L OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA (CONCURSO FINAL)

Enunciados y Soluciones

1. *Es posible disponer sobre una circunferencia los números* $0, 1, 2, \ldots, 9$ *de tal manera que la suma de tres números sucesivos cualesquiera sea, como mucho a) 13, b) 14, c) 15?*

Solución. Cortamos la circunferencia a la izquierda del 0. Descartado el 0, nos quedan 9 números, que podemos agrupar en tres tríos cuya suma total es

$$1 + 2 + \ldots + 9 = 45$$

Por lo tanto, no puede suceder que las tres sumen menos de 15. Luego la respuesta a los apartados a) y b) es **NO**, mientras que al apartado c) es **SÍ**, colocando por ejemplo los números en el siguiente orden:

$$0, \underbrace{9, 5, 1}, \underbrace{8, 4, 3}, \underbrace{2, 7, 6}$$

2. *Dados los números racionales* r, q *y* n, *tales que* $\dfrac{1}{r+qn} + \dfrac{1}{q+rn} = \dfrac{1}{r+q}$, *probar que* $\sqrt{\dfrac{n-3}{n+1}}$ *es un número racional.*

Solución. Racionalizando, tenemos

$$\sqrt{\frac{n-3}{n+1}} = \sqrt{\frac{(n-3)(n+1)}{(n+1)^2}} = \frac{\sqrt{(n-1)^2 - 4}}{n+1}$$

Por tanto, el enunciado quedará probado si vemos que $(n-1)^2 - 4$ es el cuadrado de un número racional. Para ello, utilizamos la condición y la escribimos en la forma equivalente

$$(r + qn)(r + q) + (q + rn)(r + q) = (r + qn)(q + rn) \Leftrightarrow (r + q)^2 = rq(n - 1)^2$$

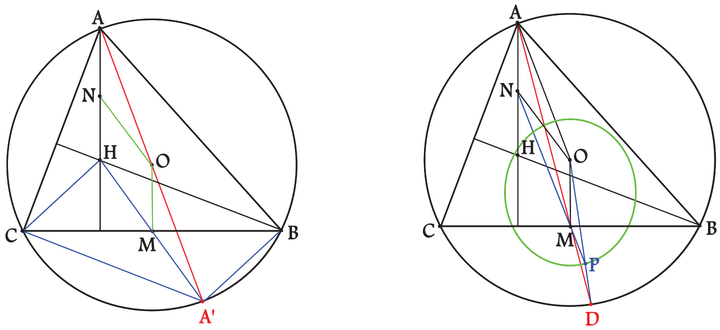
de donde resulta $(n-1)^2 = \dfrac{(r+q)^2}{rq}$. Entonces, se tiene que

$$(n-1)^2 - 4 = \frac{(r+q)^2}{rq} - 4 = \frac{(r-q)^2}{rq} = \frac{(r-q)^2(n-1)^2}{(r+q)^2} = \left(\frac{(r-q)(n-1)}{(r+q)}\right)^2$$

(En la penúltima igualdad se ha utilizado que $rq = \dfrac{(r+q)^2}{(n-1)^2}$). Por tanto, $(n-1)^2 - 4$ es el cuadrado de un número racional y hemos terminado.

3. *Sean B y C dos puntos fijos de una circunferencia de centro O, que no sean diametralmente opuestos. Sea A un punto variable sobre la circunferencia, distinto de B y C, y que no pertenece a la mediatriz de BC. Sean H, el ortocentro del triángulo ABC; y M y N los puntos medios de los segmentos BC y AH, respectivamente. La recta AM corta de nuevo a la circunferencia en D, y, finalmente, NM y OD se cortan en un punto P. Determinar el lugar geométrico del punto P cuando A recorre la circunferencia.*

Solución. Empezaremos considerando el caso en que $\triangle ABC$ es acutángulo. En primer lugar, denotaremos por A' el punto diametralmente opuesto a A con lo que los triángulos ACA' y ABA' son rectángulos. Los segmentos HB y CA' son paralelos por ser perpendiculares a AC. Igualmente, HC y BA' también son paralelos por ser perpendiculares a AB.



Triángulo ABC acutángulo

Entonces, $CHBA'$ es un paralelogramo y, por tanto, M es el unto medio de HA'. Los triángulos $AA'H$ y $OA'M$ son semejantes con razón de semejanza conocida. Es decir, tenemos que

$$\frac{OM}{AH} = \frac{MA'}{HA'} = \frac{1}{2} \Rightarrow OM = \frac{AH}{2} = AN = NH$$

Luego $OMHN$ es otro paralelogramo (figura izquierda).

Sea D la intersección de AM con la circunferencia y sea P el punto de corte de AD con NM. Puesto que $\triangle AOD$ es isósceles, entonces $\angle AOD = \angle ODA$. Como OM y AN son paralelos, pues ambos son perpendiculares al lado BC, además de iguales, entonces $AOMN$ es también un paralelogramo. Y, de aquí, tenemos que $\angle OAM = \angle AMN = \angle PMD$ por ser opuesto por el vértice. Sintetizando, tenemos que $\angle PMD = \angle OAM = \angle OAD = \angle ODA = \angle PDM$ con lo que $\triangle PDM$ es isósceles y, por tanto, $PM = PD$.

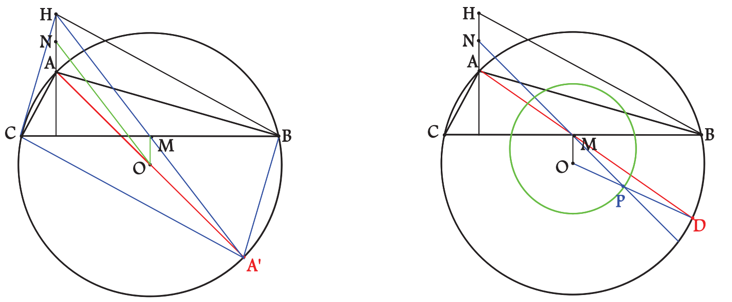
Finalmente, tenemos que

$$OP + PM = OP + PD = OD = r = \text{constante}$$

Es decir, con A variable, el punto P se mueve sobre una **elipse** incompleta con focos en O y M, y eje mayor el radio de la circunferencia. En esta elipse hay que descartar los cuatro vértices. En efecto, si el punto P estuviese sobre el eje mayor de la elipse, también estaría D y por tanto A, lo cual está excluido del enunciado ya que en este caso AD y NM son coincidentes. Si el punto P fuese uno de los vértices del eje menor de la elipse, tendríamos $OP = PM = r/2$. Como $OD = r$, entonces

$PD = r/2$. Supongamos que P está del lado de B, entonces la paralela a BM por el punto medio de OB es el eje menor de la elipse, con lo que el punto medio de OB es precisamente P y D coincide con B, lo que implicará que A coincide con C, lo cual está escluido del enunciado ya que ABC sería degenerado. El resto de puntos de la elipse se pueden obtener cuando A es distinto de B y C y no está en la mediatriz de BC.

A continuación aparece la figura para el caso en que $\triangle ABC$ sea obtusángulo.



Triángulo ABC obtusángulo

4. *Sea $\{x_n\}_{n\geq 1}$ la sucesión de enteros positivos definida por $x_1 = 2$ y $x_{n+1} = 2x_n^3 + x_n$ para todo $n \geq 1$. Determinar la mayor potencia de 5 que divide al número $x_{2014}^2 + 1$.*

Solución. Para $n = 1$ se tiene que $x_1 = 2$ y $x_1^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$ que es múltiplo de 5 pero no de 5^2. Para $n = 2$ es $x_2 = 2 \cdot 2^3 + 2 = 18$ y $x_2^2 + 1 = 18^2 + 1 = 325$ que es múltiplo de 5^2 pero no de 5^3. Esto nos sugiere conjeturar que $x_n^2 + 1$ es múltiplo de 5^n pero no de 5^{n+1}. La demostraremos por inducción. Los casos $n = 1$ y $n = 2$ ya están probados. Supongamos que $n \geq 3$ y que $x_n^2 + 1 = k\,5^n$ con $(k, 5) = 1$. Entonces,

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 + 1 &= (2x_n^3 + x_n)^2 + 1 = x_n^2(2x_n^2 + 1)^2 + 1 = (k5^n - 1)(2k5^n - 1)^2 + 1 \\ &= (k5^n - 1)(4k^2 5^{2n} - 4k5^n + 1) + 1 = 4k^3 5^{3n} - 8k^2 5^{2n} + k5^{n+1} \\ &= k5^{n+1}\Big(\underbrace{4k^2 5^{2n-1} - 8k5^{n-1}}_{\dot{5}} + 1\Big) \end{aligned}$$

que es múltiplo de 5^{n+1} pero no es múltiplo de 5^{n+2} ya que para $n \geq 3$ es $2n - 1 \geq 1$ y $n - 1 \geq 1$ respectivamente y el término entre paréntesis no es múltiplo de 5. Esto prueba la conjetura y, por tanto, la mayor potencia de 5 que divide a $x_{2014}^2 + 1$ es 5^{2014}.

5. *El conjunto M está formado por números enteros de la forma $a^2 + 13b^2$, con a y b enteros distinos de cero.*

- *Demostrar que el producto de dos elementos cualesquiera de M es un elemento de M.*
- *Determinar, razonadamente, si existen infinitos pares de enteros (x, y) tales que $x + y$ no pertenece a M, pero $x^{13} + y^{13}$ sí pertenece a M.*

Solución. (1) Sean a^2+13b^2 y c^2+13d^2 dos elementos de M. Poniendo $m = a, n = \sqrt{13}\,b, p = c, q = \sqrt{13}\,d$ en la identitdad algebraica

$$(m^2+n^2)\,(p^2+q^2) = (mq-np)^2 + (mp+nq)^2 \quad \text{(Euler)}$$

se obtiene

$$(a^2+13b^2)\,(c^2+13d^2) = (\sqrt{13}ad-\sqrt{13}bc)^2+(ac+13bd)^2 = (ac+13bd)^2+13(ad-bc)^2 \in M$$

(2) Puesto que los cuadrados de los enteros son congruentes con 0 o con 1 módulo 4, entonces los elementos de M no son congruentes con 3 módulo 4. Para que la suma $x+y$ de dos elementos de M no pertenezca a M, es suficiente que $x+y$ sea congruente con 3 módulo 4. Ahora consideramos las sucesiones $\{x_k\}_{k\geq 1}$ e $\{y_k\}_{k\geq 1}$ definidas, respectivamente por

$$x_k = (2^{13}+1)\Big((4k)^2+13(4k+1)^2\Big), \quad y_k = 2x_k$$

Entonces,

$$x_k+y_k = 3x_k = 3\,(2^{13}+1)\Big((4k)^2+13(4k+1)^2\Big) \equiv 3 \pmod 4$$

y por tanto $x_k+y_k \notin M$ para todo entero positivo k.

Calculamos ahora

$$x_k^{13}+y_k^{13} = x_k^{13}+2^{13}x_k^{13} = (2^{13}+1)x_k^{13} = (2^{13}+1)^{14}\Big((4k)^2+13(4k+1)^2\Big)^{13} \in M$$

al ser el producto de un cuadrado por un elemento de M.

6. *Se tienen* 60 *puntos en el interior del círculo unidad. Demostrar que existe un punto V de la frontera del círculo, tal que la suma de las distancias de V a los* 60 *puntos es menor o igual que* 80.

Solución. Consideremos un triángulo equilátero PQR inscrito en la circunferencia frontera del círculo unidad dado. Observamos que si para cualquier punto X del círculo se cumple que

$$|XP|+|XQ|+|XR| \leq 4,$$

entonces sumando las correspondientes desigualdades para los 60 puntos X_k, $(1 \leq k \leq 60)$ se obtiene

$$\sum_{k=1}^{60}|X_kP|+\sum_{k=1}^{60}|X_kQ|+\sum_{k=1}^{60}|X_kR| = \sum_{k=1}^{60}(|X_kP|+|X_kQ|+|X_kR|) \leq 60\times 4 = 240$$

En consecuencia, una de las sumas del miembro izquierdo no excede de $240/3 = 80$ y, por tanto, alguno de los puntos P, Q o R verifica el enunciado. Ahora veremos que

$$|XP|+|XQ|+|XR| \leq 4$$

En efecto, debido a la simetría del recinto, será suficiente probar la desiguladad cuando el punto X esté en el sector POQ, siendo O el centro del círculo. De hecho, el máximo valor de $|XP| + |XQ| + |XR|$ se alcanza cuando el punto X está sobre el arco PQ. En este caso, aplicando el Teorema de Ptolomeo al cuadrilátero cíclico $RQXP$ se tiene que $ax = ay + az$ de donde resulta que $x = y + z$ y como $x \leq 2$ entonces $|XP| + |XQ| + |XR| \leq 2 + 2 = 4$ y hemos terminado.