XLVII Olimpiada Matemática Española
Fase nacional 2011 (Pamplona)
Primera sesión (25 de marzo)

Problema 1

En un polígono regular de 67 lados trazamos todos los segmentos que unen dos vértices, incluidos los lados del polígono. Elegimos n de estos segmentos y asignamos a cada uno de ellos un color entre 10 colores posibles. Halla el valor mínimo de n que garantiza, que independientemente de cuáles sean los n segmentos elegidos y de cómo se haga la asignación de colores, siempre habrá un vértice del polígono que pertenece a 7 segmentos del mismo color.

Problema 2

Sean a, b, c números reales positivos. Demuestra que

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geq\frac{5}{2}.$$

¿Cuándo se alcanza la igualdad?

Problema 3

Sean A, B, C, D cuatro puntos en el espacio, tales que no hay ningún plano que pasa por los cuatro a la vez. Los segmentos AB, BC, CD, DA son tangentes a una misma esfera. Demuestra que los cuatro puntos de tangencia están en un mismo plano.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre siete puntos.
El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.

XLVII Olimpiada Matemática Española
Fase nacional 2011 (Pamplona)
Segunda sesión (26 de marzo)

Problema 4

Sea ABC un triángulo con $\angle B = 2\angle C$ y $\angle A > 90^{\circ}$. Sean D el punto de la recta AB tal que CD es perpendicular a AC, y M el punto medio de BC. Demuestra que $\angle AMB = \angle DMC$.

Problema 5

Cada número racional se pinta de un color, usando sólo dos colores, blanco y rojo. Se dice que una tal coloración es *sanferminera* cuando para cada dos números racionales x, y, con $x \neq y$, si se cumple una de las tres condiciones siguientes:

a) $xy = 1$,

b) $x + y = 0$,

c) $x + y = 1$,

entonces x e y están pintados de distinto color. ¿Cuántas coloraciones *sanfermineras* hay?

Problema 6

Sea (S_n), con $n \geq 0$, la sucesión definida por:

(i) $S_n = 1$ para $0 \leq n \leq 2011$.

(ii) $S_{n+2012} = S_{n+2011} + S_n$, para $n \geq 0$.

Prueba que, para todo entero no negativo a, se cumple que $S_{2011a} - S_a$, es múltiplo de 2011.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre siete puntos.
El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.