# XLVI Olimpiada Matemática Española
# Fase nacional 2010 (Valladolid)
# Primera sesión (26 de marzo)

## • Problema 1

Una sucesión *pucelana* es una sucesión creciente de dieciséis números impares positivos consecutivos, cuya suma es un cubo perfecto. ¿Cuántas sucesiones *pucelanas* tienen solamente números de tres cifras?

## • Problema 2

Sean $N_0$ y $Z$ el conjunto de todos los enteros no negativos y el conjunto de todos los enteros, respectivamente. Sea $f : N_0 \to Z$ la función que a cada elemento $n$ de $N_0$ le asocia como imagen el entero $f(n)$ definido por

$$f(n) = -f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) - 3\left\{\frac{n}{3}\right\}$$

donde $\lfloor x \rfloor$ es la parte entera del número real $x$ y $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ su parte decimal. Determina el menor entero $n$ tal que $f(n) = 2010$.

NOTA: La parte entera de un número real $x$, denotada por $\lfloor x \rfloor$ es el mayor entero que no supera a $x$. Así $\lfloor 1{,}98 \rfloor = 1$, $\lfloor -2{,}001 \rfloor = -3$, $\lfloor 7\pi - 8{,}03 \rfloor = 13$.

## • Problema 3

Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Sea $P$ la intersección de $AC$ y $BD$. El ángulo $\angle APD = 60^\circ$. Sean $E$, $F$, $G$ y $H$ los puntos medios de los lados $AB$, $BC$, $CD$ y $DA$ respectivamente. Halla el mayor número real positivo $k$ tal que

$$EG + 3HF \geq kd + (1-k)s$$

siendo $s$ el semiperímetro del cuadrilátero $ABCD$ y $d$ la suma de las longitudes de sus diagonales. ¿Cuándo se alcanza la igualdad?

**No está permitido el uso de calculadoras.**
**Cada problema se puntúa sobre siete puntos.**
**El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.**

# XLVI Olimpiada Matemática Española
# Fase nacional 2010 (Valladolid)
# Segunda sesión (27 de marzo)

---

- **Problema 4**

Sean $a$, $b$, $c$ tres números reales positivos. Demuestra que

$$\frac{a+b+3c}{3a+3b+2c}+\frac{a+3b+c}{3a+2b+3c}+\frac{3a+b+c}{2a+3b+3c}\geq\frac{15}{8}$$

- **Problema 5**

Sea $P$ un punto cualquiera de la bisectriz del ángulo $A$ en el triángulo $ABC$, y sean $A'$, $B'$, $C'$ puntos respectivos de las rectas $BC$, $CA$, $AB$, tales que $PA'$ es perpendicular a $BC$, $PB'$ es perpendicular a $CA$ y $PC'$ es perpendicular a $AB$. Demuestra que $PA'$ y $B'C'$ se cortan sobre la mediana $AM$, siendo $M$ el punto medio de $BC$.

- **Problema 6**

Sea $p$ un número primo y $A$ un subconjunto infinito de los números naturales. Sea $f_A(n)$ el número de soluciones distintas de la ecuación $x_1+x_2+\cdots+x_p=n$, con $x_1,x_2,\ldots,x_p\in A$. ¿Existe algún número natural $N$ tal que $f_A(n)$ sea constante para todo $n>N$ ?

**No está permitido el uso de calculadoras.**
**Cada problema se puntúa sobre siete puntos.**
**El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.**