

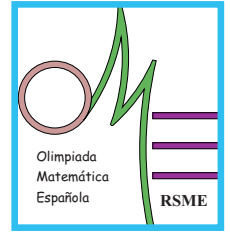


# XLVI Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Viernes mañana, 15 de enero de 2010



1. Sea  $I_n$  el conjunto de los  $n$  primeros números naturales impares. Por ejemplo:  
 $I_3 = \{1, 3, 5\}$ ,  $I_6 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ , etc.  
¿Para qué números  $n$  el conjunto  $I_n$  se puede descomponer en dos partes (disjuntas) de forma que coincidan las sumas de los números en cada una de ellas?
2. Determina los lados del triángulo rectángulo del que se conocen el perímetro,  $p = 96$ , y la altura sobre la hipotenusa,  $h = \frac{96}{5}$ .
3. Halla todos los números naturales  $n$  que verifican la condición:

$$\left[ \frac{n}{2} \right] + \left[ \frac{2n}{3} \right] = n + 335$$

donde  $[x]$  es la parte entera de  $x$ . (Esto es,  $[1,32] = 1$ ,  $[2] = 2$ ,  $\left[ \frac{1}{2} \right] = 0$ ,  $[\pi] = 3$ , etc.)

**No está permitido el uso de calculadoras.  
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.  
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**

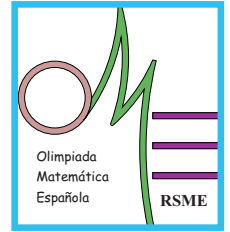


# XLVI Olimpiada Matemática Española

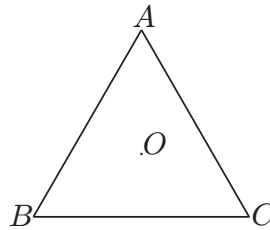
Primera Fase

Segunda sesión

Viernes tarde, 15 de enero de 2010



4. Se considera un triángulo equilátero de lado 1 y centro  $O$ , como el de la figura.



Un rayo parte de  $O$  y se refleja en los tres lados,  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  y  $\overline{BC}$ , (en el orden dado), hasta alcanzar el vértice  $A$ .

Determina la longitud mínima del recorrido del rayo.

Nota: Cuando el rayo se refleja en un lado, los ángulos de entrada (incidencia) y salida (reflexión) coinciden.

5. Calcula las soluciones reales de la ecuación:

$$\sqrt[4]{97 - X} + \sqrt[4]{X} = 5.$$

6. Dado el polinomio  $P(X) = X^4 + \square X^3 + \square X^2 + \square X + \square$ , en el que cada cuadrado representa un hueco donde se colocará un coeficiente, se plantea el siguiente juego entre dos jugadores: Alternativamente, el primer y el segundo jugador eligen un hueco vacío y colocan en él un entero no nulo hasta rellenar todos los cuatro huecos. Si el polinomio resultante tiene al menos dos raíces enteras gana el segundo jugador, en otro caso el ganador es el primero.

Prueba que, eligiendo la estrategia adecuada, el primer jugador siempre puede ganar.

**No está permitido el uso de calculadoras.  
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.  
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**