



XLV OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA
PRIMERA SESIÓN

Viernes, 16 de enero de 2009



Enunciado 1.

(1) Disponemos de dos jarras, una con 10 cl. de agua y la otra con la misma cantidad de aceite. Se toma una cucharada de la primera jarra, la de agua, y se mezcla con el aceite de la segunda. A continuación se toma una cucharada de esta segunda jarra y se mezcla con el agua de la primera.

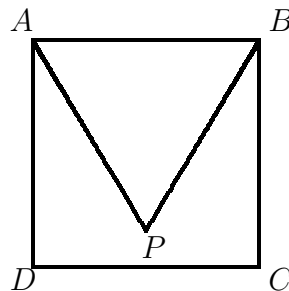
¿Hay más (o menos) agua en la primera jarra que aceite en la segunda?

(2) Suponemos ahora que tenemos tres jarras, la primera con 10 cl. de agua, la segunda con 10 cl. de aceite y la tercera con 10 cl. de vino. Tomamos una cucharada de la primera jarra y la mezclamos con el aceite de la segunda, a continuación tomamos una cucharada de la segunda jarra y la mezclamos con el vino de la tercera y finalmente tomamos una cucharada de la tercera jarra y la mezclamos con el agua de la primera.

En ese momento, ¿de cuál de los tres líquidos hay menos en su propia jarra?

Enunciado 2.

Se considera un cuadrado $ABCD$ y un punto P interior al cuadrado de forma que ABP es un triángulo equilátero.



Calcula el valor del ángulo \widehat{PCD} .

Enunciado 3.

Supongamos que a, b son enteros positivos con $\text{mcd}\{a, b\} = 1$.

(1) Determinar el valor de $\text{mcd}\{a + b, a^2 + b^2\}$ en términos de a y b .

(2) Determinar el valor de $\text{mcd}\{a + b, a^3 + b^3\}$ en términos de a y b .

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se califica sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.



XLV OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA
SEGUNDA SESIÓN

Viernes, 16 de enero de 2009



Enunciado 4.

Se considera un cuadrado 4×4 . En cada una de las casillas colocamos un número entero mayor o igual que uno con las siguientes condiciones:

- (1) Ningún número se repite en filas o columnas;
- (2) Ningún número se repite en la misma diagonal, sea ésta principal o secundaria.

¿Cuál es el menor valor de la suma de estos dieciséis números?

Enunciado 5.

El autobús urbano de la línea 22 hace el recorrido que se indica en el gráfico.



Si en origen hay 15 pasajeros, durante el recorrido no sube ninguno más y el autobús debe quedar vacío en la parada 4ª.

- (1) ¿Cuál es la probabilidad de que se bajen todos los pasajeros en la misma parada?
- (2) ¿Cuál es la probabilidad de que en cada parada se baje, al menos, un pasajero?

Enunciado 6.

Determinar todas las funciones estrictamente crecientes, $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, que verifican:

- (I) $f(0) = 2$,
- (II) $f(n) + f(f(n)) = 2n + 6$ para todo $n \in \mathbb{N}$.