FASE LOCAL DE LA XLIV OME

PRIMERA SESIÓN

Mañana del viernes 18 de Enero de 2008

1. Sea P una familia de puntos en el plano tales que por cada cuatro puntos de P pasa una circunferencia. ¿Se puede afirmar que necesariamente todos los puntos de P están en la misma circunferencia? Justifica la respuesta.

2. En un cuadrilátero convexo se trazan las perpendiculares desde cada vértice a la diagonal que no pasa por él. Demuestra que los cuatro puntos de intersección de cada perpendicular con su correspondiente diagonal forman un cuadrilátero semejante al dado.

3. Halla las soluciones reales de la ecuación: $x\left(\dfrac{6-x}{x+1}\right)\left(\dfrac{6-x}{x+1}+x\right)=8.$

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se califica sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.

FASE LOCAL DE LA XLIV OME

SEGUNDA SESIÓN

Tarde del viernes 18 de enero de 2008

4. Demuestra que $2222^{5555} + 5555^{2222}$ es múltiplo de 7.

5. Dada una circunferencia y dos puntos P y Q en su interior, inscribir un triángulo rectángulo cuyos catetos pasen por P y Q. ¿Para qué posiciones de P y Q el problema no tiene solución?

6. Sean a, b, c tres números positivos de suma uno. Demuestra que

$$a^{a^2+2ca}\, b^{b^2+2ab}\, c^{c^2+2bc} \geq \frac{1}{3}.$$

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se califica sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.

FASE LOCAL DE LA XLIV OME

PRIMERA SESIÓN

Tarde del viernes 18 de enero de 2008

1. Demuestra que no existen enteros a, b, c, d tales que el polinomio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$, cumpla que $P(4) = 1$ y $P(7) = 2$.

2. En el triángulo ABC, el área S y el ángulo C son conocidos. Halla el valor de los lados a y b para que el lado c sea lo más corto posible.

3. Determina todas las ternas de números reales (a,b,c), que satisfacen el sistema de ecuaciones siguiente: $\begin{cases} a^5 = 5b^3 - 4c \\ b^5 = 5c^3 - 4a. \\ c^5 = 5a^3 - 4b \end{cases}$

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se califica sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.

FASE LOCAL DE LA XLIV OME

Olimpiada Matemática Española

RSME

SEGUNDA SESIÓN

Mañana del sábado19 de enero de 2008

4. ¿Qué número es mayor: $999!$ ó 500^{999}? Justifica la respuesta.

5. Sean D, E, F los puntos de tangencia del círculo inscrito al triángulo ABC con los lados BC, AC y AB respectivamente. Demuestra que

$$4S_{DEF} \leq S_{ABC}$$

donde S_{XYZ} denota el área del triángulo XYZ.

6. Las longitudes de los lados y de las diagonales de un cuadrilátero convexo plano $ABCD$ son racionales. Si las diagonales AC y BD se cortan en el punto O, demuestra que la longitud OA es también racional.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se califica sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.

FASE LOCAL DE LA XLIV OME

PRIMERA SESIÓN

Mañana del sábado 19 de enero de 2008

1. Sea m un entero positivo. Demuestra que no existen números primos de la forma $2^{5m}+2^m+1$.

2. Un cuadrilátero convexo tiene la propiedad que cada una de sus dos diagonales biseca su área. Demuestra que este cuadrilátero es un paralelogramo.

3. Se consideran 17 enteros positivos tales que ninguno de ellos tiene un factor primo mayor que 7. Demuestra que hay al menos una pareja de estos números cuyo producto es un cuadrado perfecto.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se califica sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.

FASE LOCAL DE LA XLIV OME

Olimpiada Matemática Española

RSME

SEGUNDA SESIÓN

Tarde del sábado 19 de enero de 2008

4. Determina el triángulo de menor perímetro entre todos los que tienen la circunferencia inscrita con el mismo radio y el mismo valor de un ángulo.

5. Un club tiene 25 miembros. Cada comité está formado por 5 miembros. Dos comités cualesquiera tienen como mucho un miembro en común. Prueba que el número de comités no puede ser superior a 30.

6. Halla todas las ternas (x, y, z) de números reales que son solución de la ecuación

$$\sqrt{3^x(5^y+7^z)}+\sqrt{5^y(7^z+3^x)}+\sqrt{7^z(3^x+5^y)}=\sqrt{2}\left(3^x+5^y+7^z\right).$$

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se califica sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.