XXXIX OME 2003

Fase Local.

Viernes Mañana.

Problema -1.

¿Cuántas ternas ordenadas de números naturales (a, b, c) distintos de la unidad hay tales que

$$a.b.c = 7^{39}?$$

Solución.

Como 7 es primo y $a \neq 1$, $b \neq 1$ y $c \neq 1$, $a.b.c = 7^p.7^q.7^r = 7^{39}$ con $p, q, r \in N$

Por tanto, el número de ternas ordenadas (a, b, c) será el mismo que el de ternas (p, q, r) con la condición $p + q + r = 39$

Tabulemos y contemos:

P	q	r	Nº de ternas
1	1	37	*37*
...	2	36	
...	...	...	
...	37	1	
2	1	36	*36*
...	2	35	
...	...	...	
...	36	1	
3	1	35	*35*
...	2	34	
...	...	...	
...	35	1	
...	...	...	...
...	...	...	...
36	1	2	*2*
...	2	1	
37	1	1	*1*

El total de ternas será:

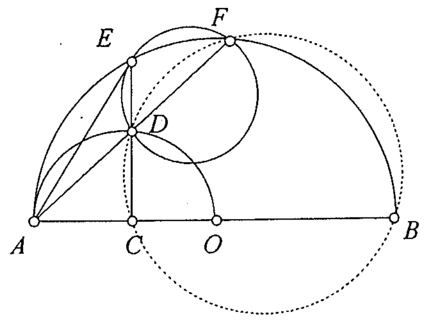
$$37 + 36 + 35 + \ldots\ldots + 2 + 1 = \frac{37 + 1}{2} \,.\, 37 = 19 \,.\, 37 = 703$$

Problema – 2.

Dibuja un semicírculo con centro en O y diámetro AB y, en su interior, otro, con diámetro OA. Traza por un punto C de OA una recta perpendicular a dicho radio OA, que cortará al semicírculo pequeño en D y al grande en E y, finalmente, la recta AD que cortará al semicírculo grande en F.

Demuestra que el círculo circunscrito al triángulo *DEF* es tangente a la cuerda *AE* en *E*

Solución.



-El triángulo *AEB* es rectángulo.

Por el *Teorema del Cateto*: $AE^2 = AC.AB$

-El cuadrilátero *BCDF* es inscriptible, pues sus ángulos opuestos *C* y ***F*** son rectos.

Así, las rectas *ACB* y *ADF* son secantes a la circunferencia que lo circunscribe.

- La potencia del punto A respecto de esa circunferencia nos da:

$$AC.AB = AD.AF$$

- Por tanto: $AE^2 = AD.AF.$

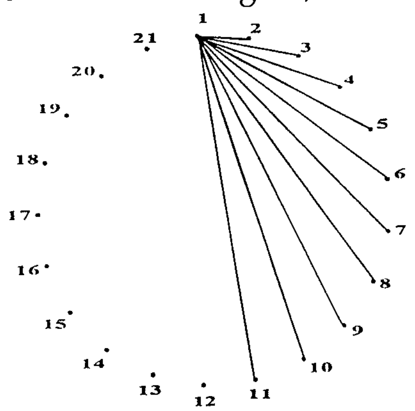
Y esto quiere decir, por potencia de *A* respecto a la circunferencia que circunscribe al triángulo *DEF*, que la recta *AE* es tangente a dicha circunferencia en *E*.

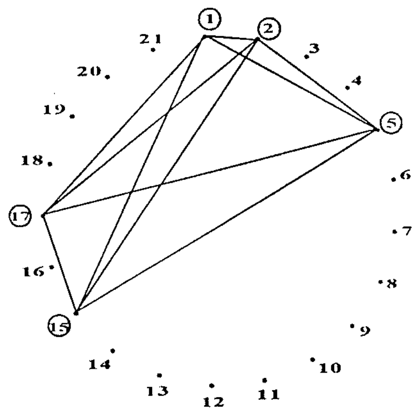
Problema – 3.

¿Cuál es el número máximo de vértices de un polígono regular de **21** lados que podemos elegir para que, al trazar los segmentos que los unen entre sí, no haya dos con la misma longitud?

Solución:

Por la simetría de la figura, sólo hay 10 distancias





distintas.

-Como mucho, podremos elegir 5 vértices. Pues, entre cinco puntos no alineados se pueden trazar $C_{5,2} = 10$ segmentos.

- Nos faltará constatar si con 5, y con qué 5, vértices se puede.

La figura de la derecha muestra una posibilidad.

Fase Local.
Viernes tarde.

Problema – 4.

Determina los dos valores de x más próximos (por defecto y por exceso) a 2003° que cumplen la siguiente ecuación trigonométrica:

$$\frac{1}{sen^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\mathrm{tg}^2 x} - \frac{1}{\mathrm{cotg}^2 x} - \frac{1}{\sec^2 x} - \frac{1}{\mathrm{cosec}^2 x} = -3$$

Solución:

La expresión se puede escribir así

$$\cos ec^2 x - \sec^2 x - \cot^2 x - \mathrm{tg}^2 x - \cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x = -3$$

$$(1 + \cot^2 x) - (1 + tg^2 x) - \cot^2 x - \mathrm{tg}^2 x - 1 = -3$$

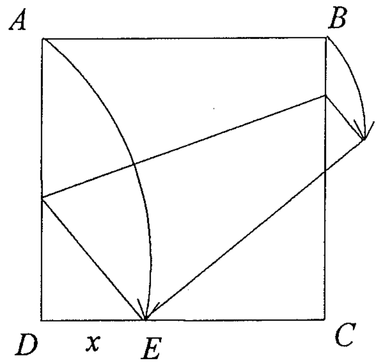
y se reduce a la sencilla ecuación trigonométrica $tg^2 x = 1$

que tiene por soluciones: $x = 45° + 90° k$ con $k \in Z$

Los valores pedidos se obtienen para $k_1 = 21$ y $k_2 = 22$

y son $x_1 = 1935°$ y $x_2 = 2025°$

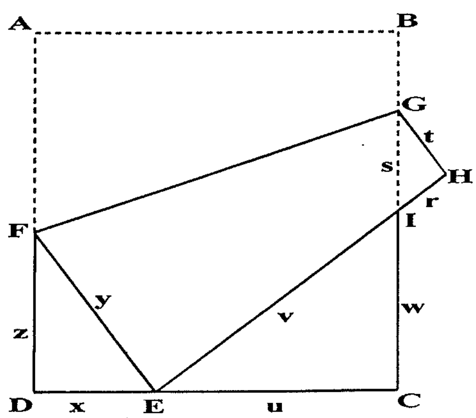
Problema – 5.



Un cuadrado de papel *ABCD* se dobla de modo que el vértice *A* toque en un punto arbitrario *E* del lado *CD*. Así, se obtienen tres triángulos rectos formados por una sola capa de papel.

Determinar la longitud de sus lados en función de $x = DE$ para demostrar que el perímetro del triángulo mayor es la suma de los perímetros de los otros dos, y vale la mitad que el perímetro del cuadrado. *(Teorema de Haga)*

Solución:



Sin pérdida de generalidad, tomamos la longitud del lado del cuadrado como unidad. Denominamos, con letras mayúsculas, los puntos característicos que produce el plegado y, con minúsculas, los lados de los triángulos

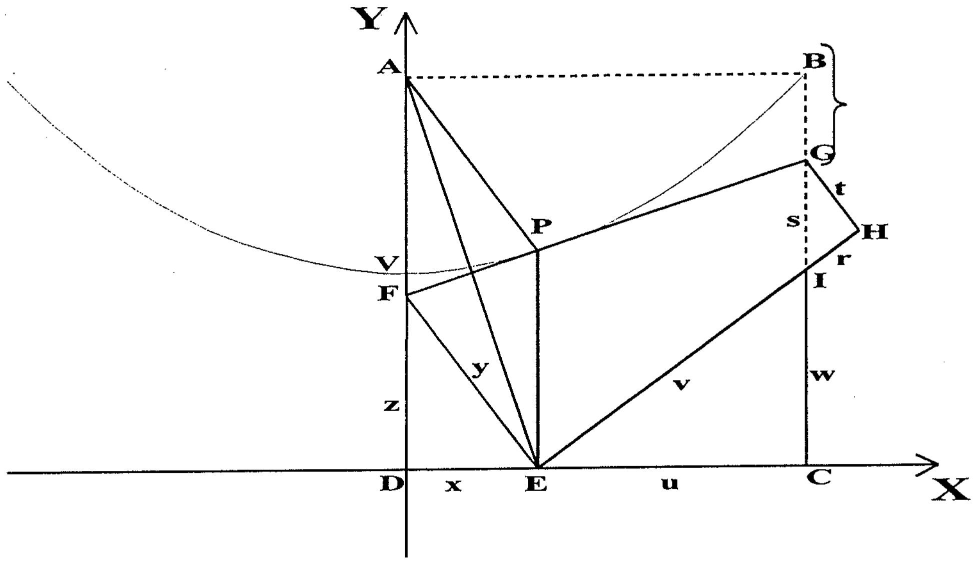
-Para cada $x \in [0, 1]$, por el punto *E*, trazamos una perpendicular al lado *DC* que corta a la línea de plegado *FG* en un punto *P*.

El plegado *FG* es mediatriz del segmento *AE*. Por tanto, son iguales las distancias: $AP = PE$ y $AF = FE$.

El cuadrilátero APEF, con diagonales perpendiculares y lados opuestos, PE y AF, paralelos, es un rombo.

Luego, los puntos P, así obtenidos, distan de A los mismo que del lado DC, es decir, están en una parábola de foco A, directriz DC, con vértice V (pues $VA = VD = 0'5$) y que pasa por B ($BA = BC = 1$)

-Llevamos todo a unos ejes de coordenadas:



La ecuación de la parábola será $y = k.x^2 + n$

Como pasa por $V(0, 0'5) \rightarrow$ $n = 0'5$

Como pasa por $B(1,1) \rightarrow$ $k = 0'5$

$$y = \frac{1}{2}(1 + x^2)$$

Ya tenemos los lados del triángulo EDF:

$$x;\ y = \frac{1}{2}(1 + x^2);\ z = \sqrt{y^2 - x^2} = \frac{1}{2}(1 - x^2)$$

cuyo perímetro es, obviamente, $P_{EDF} = x + 1$

Nota 1.- Estos lados se obtienen, de forma mucho más fácil, resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + z^2 = y^2 \\ z + y = 1 \end{array}\right\}$$

-Los triángulos rectángulos de una capa de papel son semejantes, pues, por un lado, $\angle FED$ y $\angle IEC$ son complementarios y, por otro, $\angle EIC = \angle GIH$.

Por semejanza de los triángulos EDF y ECI.

$$\frac{x}{z} = \frac{w}{u} \quad \rightarrow \quad w = \frac{x.u}{z} = \frac{x(1 - x)}{z}$$

$$\frac{y}{z} = \frac{v}{u} \quad \rightarrow \quad v = \frac{y.u}{z} = \frac{y(1 - x)}{z}$$

Los lados del triángulo ECI son:

$$u = 1 - x \qquad v = \frac{1 + x^2}{1 + x} \qquad w = \frac{2x}{1 + x}$$

y su perímetro $P_{ECI} = u + v + w = \dfrac{1-x^2}{1+x} + \dfrac{1+x^2}{1+x} + \dfrac{2x}{1+x} = 2$

Por semejanza de los triángulos *ECI* y *IHG.*

$$\frac{w}{v} = \frac{r}{s} \quad \to \quad s = \frac{v.r}{w} = \frac{v(1 - v)}{w}$$

Los lados del triángulo *IHG* son:

$$r = 1 - v = \frac{x(1 - x)}{1 + x} \qquad s = \frac{(1+x^2)(1 - x)}{2(1 + x)} \qquad t = 1 - w - s = \frac{(1 - x)^2}{2}$$

y su perímetro

$$P_{IHG} = r + s + t = \frac{2x(1-x)}{2(1+x)} + \frac{(1+x^2)(1-x)}{2(1+x)} + \frac{(1-x)^2(1+x)}{2(1+x)} =$$

$$= \frac{(1-x)\left[2x + (1+x^2) + (1- x^2)\right]}{2(1+x)} = \frac{(1-x)\left[2x + 2\right]}{2(1+x)} = 1 - x$$

-Queda probado lo que se pedía:

$$P_{EDF} + P_{IHG} = (x + 1) + (1 - x) = 2 = P_{ECI}$$

y que $P_{ECI} = 2$, la mitad del perímetro del cuadrado.

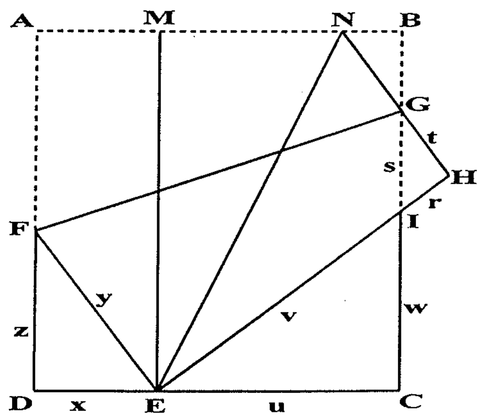
Nota 2.- Veamos que no es preciso hallar la longitud de los lados para probar la relación entre los perímetros.

Obtenemos *M* y *N* como se indica en la figura.

Por la simetría del plegado *FG*, los triángulos rectángulos *IHG* y *NBG* son iguales:

$r = HI = BN$, $s = GI = GN$ y $\quad t = GH = BG$

Los triángulos rectángulos *EMN* y *EHN* también son iguales, pues tienen la diagonal en común y un lado de igual longitud $EM = EH = 1$



$$MN = HN = GH + GN = BG + GI = BI = t + s$$

$$P_{EDF} = ED + DF + FE = x + DF + FA = x + 1$$

$$P_{IHG} = IH + HG + GI = BN + HG + GN = BN + HN = BN + MN = BM = CE = 1 - x$$

$$P_{ECI} = EC + CI + IE = BM + 1 - BI + 1 - IH = BM + 2 - MN - NB = 2$$

Y finalmente $\quad P_{EDF} + P_{IHG} = (x + 1) + (1 - x) = 2 = P_{ECI}$

Nota 3.- El triángulo *ECI* siempre es el mayor(entiéndase el de mayor área).

Podemos justificarlo:

Analíticamente

Como $\quad 0 \le x \le 1 \rightarrow \quad 1 \le 1 + x \le 2 \rightarrow (1 + x)2 \le 4 \rightarrow \; 4 - (1 + x)\, 2 \ge 0$

$$2S_{ECI} - 2S_{EDF} = \frac{2x(1-x)}{1+x} - \frac{x(1-x^2)}{2} = \frac{x(1-x)}{2(1+x)}\left[4-(1+x)^2\right] \ge 0$$

Como $\quad 0 \le x \le 1 \quad \rightarrow \quad 0 \le 1 - x \le 1$

$$2S_{EDF} - 2S_{IHG} = \frac{x(1-x^2)}{2} - \frac{x(1-x)^3}{2(1+x)} = \frac{x(1-x)}{2(1+x)}\left[(1+x)^2-(1-x)^2\right] = \frac{2x^2(1-x)}{1+x} \ge 0$$

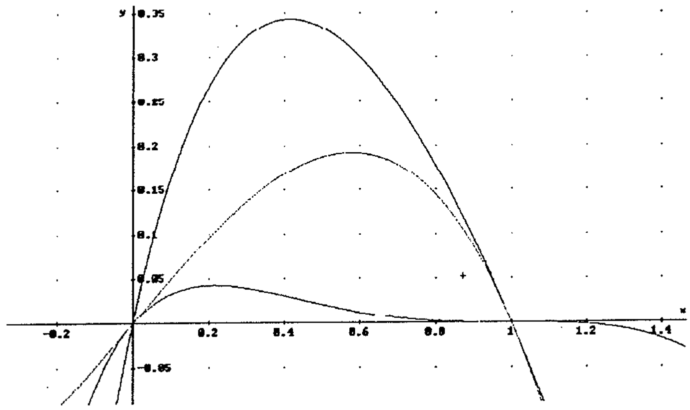
Luego $\quad S_{ECI} \ge S_{EDF} \ge S_{IHG}$

Y gráficamente

$$y = 2S_{ECI} = \frac{2x(1-x)}{1+x}$$

$$y = 2S_{EDF} = \frac{x(1-x^2)}{2}$$

$$y = 2S_{IHG} = \frac{x(1-x)^3}{2(1+x)}$$



Problema – 6.

Dado el polinomio $p(x) = x^3 + Bx^2 + Cx + D$, probar que si el cuadrado de una de sus raíces es igual al producto de las otras dos, entonces $B^3D = C^3$

Solución:

Llamemos r, s y t a las tres raíces.

El polinomio lo podemos escribir así: $\quad p(x) = (x-r)(x-s)(x-t)$.

Si operamos $\quad p(x) = x^3 - (r+s+t)x^2 + (rs+st+tr)x - rst$

e igualamos coeficientes, obtenemos las conocidas relaciones de Cardano-Vieta:

$$\begin{cases} r + s + t = -B \\ rs + st + tr = C \\ rst = -D \end{cases}$$

Y como $r^2 = st$, quedan así: $\begin{cases} C = rs + r^2 + tr = r(s+r+t) = -rB \\ -D = rst = r^3 \end{cases}$

Finalmente, elevando al cubo esta primera expresión conseguimos lo pedido:

$C^3 = (-rB)^3 = -r^3B^3 = B^3D$