

XXXVIII OLIMPIADA MATEMÁTICA
ESPAÑOLA

Fase nacional 2002 (La Rioja)

Primera sesión (5 de abril)

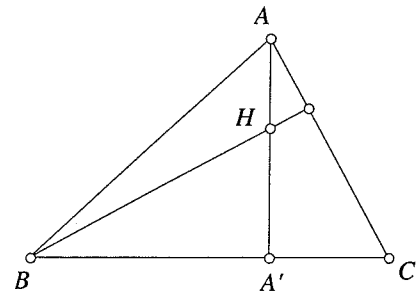
Problema 1

Hallar todos los polinomios $P(t)$ de una variable, que cumplen $P(x^2 - y^2) = P(x+y) \cdot P(x-y)$ para todos los números reales x e y .

Problema 2

En un triángulo ABC , A' es el pie de la altura relativa al vértice A y H el ortocentro.

- a) Dado un número real positivo k tal que $\frac{AA'}{HA'} = k$, encontrar la relación entre los ángulos B y C en función de k .
- b) Si B y C son fijos, hallar el lugar geométrico del vértice A para cada valor de k .



Problema 3

La función g se define sobre los números naturales y satisface las condiciones:

- $g(2) = 1$
- $g(2n) = g(n)$
- $g(2n + 1) = g(2n) + 1$

Sea n un número natural tal que $1 \leq n \leq 2002$. Calcula el valor máximo M de $g(n)$. Calcula también cuántos valores de n satisfacen $g(n) = M$.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3,5 horas.



³⁸
[O] Olimpiada
[M] Matemática

Fase nacional - Abril 2002 - Universidad de La Rioja



**XXXVIII OLIMPIADA MATEMÁTICA
ESPAÑOLA**

Fase nacional 2002 (La Rioja)

Segunda sesión (6 de abril)

Problema 4

Sea n un número natural y m el que resulta al escribir en orden inverso las cifras de n . Determinar, si existen, los números de tres cifras que cumplen $2m + S = n$, siendo S la suma de las cifras de n .

Problema 5

Se consideran 2002 segmentos en el plano tales que la suma de sus longitudes es la unidad. Probar que existe una recta r tal que la suma de las longitudes de las proyecciones de los 2002 segmentos dados sobre r es menor que $\frac{2}{3}$.

Problema 6

En un polígono regular H de $6n + 1$ lados (n entero positivo), r vértices se pintan de rojo y el resto de azul. Demostrar que el número de triángulos isósceles que tienen sus tres vértices del mismo color no depende del modo de distribuir los colores en los vértices de H .

**No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3,5 horas.**