Soluciones viernes mañana

1. Si p es un número real y las raíces de $x^3 + 2px^2 - px + 10 = 0$ están en progresión aritmética, halla dichas raíces.

Solución:

Sean a, $\frac{a+c}{2}$ y c dichas raíces.

Así pues, $x^3 + 2px^2 - px + 10 = (x-a)\left(x - \frac{a+c}{2}\right)(x-c)$, de donde, identificando coeficientes llegamos a:

$(a+c)\frac{3}{2} = -2p$ (1); $\frac{(a+c)^2}{2} + ac = -p$ (2); $(a+c)\frac{ac}{2} = -10$ (3).

De (1) y (3) sigue que $\frac{ac}{3} = \frac{5}{p}$ y como $a + c = -\frac{4p}{3}$, llevando estos valores de $a+c$ y ac a (2) podemos concluir que $16p^3 + 18p^2 + 270 = 0$, es decir, $8p^3 + 9p^2 + 135 = 0$. Una raíz real de este polinomio es $p = -3$ y como $8p^3 + 9p^2 + 135 = (p+3)(8p^2 - 15p + 45)$, sigue que $p = -3$ es la única raíz real de dicho polinomio. Esto nos lleva a $ac = -5$, $a + c = 4$, de donde a y c son 5 y -1 y las raíces que nos piden son -1, 2 y 5.

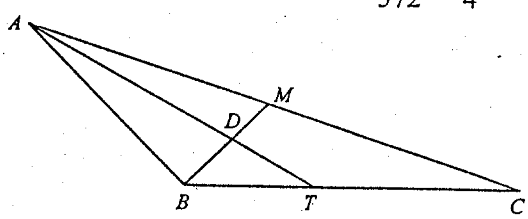
2. En el triángulo ABC, la bisectriz trazada desde A divide al lado opuesto en dos segmentos, de los que conocemos uno: $BT = 572$ m. Si dicha bisectriz corta a la mediana BM en los segmentos $BD =$ 200 m y $DM = 350$ m, calcula el lado a de dicho triángulo y plantea una ecuación con incógnita c para obtener el lado c (no hace falta que lo calcules explícitamente).

Solución

Como BD es la bisectriz de A y $BD = 200$ y $DM = 350$, sigue que $\frac{AM}{AB} = \frac{DM}{DB} = \frac{7}{4}$, de donde $AM =$ $7k$ y $AB = 4k$. Así pues, $AC = 14k$ y, volviendo a aplicar la relación anterior, sigue que $\frac{TC}{572} = \frac{14}{4}$ $\Rightarrow TC = 2002$ (¡ya salió el año!).

Así pues $a = BT + TC = 2574$ m.

Sea $c = AB \Rightarrow AM = \frac{7c}{4}$ y $AC = \frac{7c}{2}$.



Aplicando ahora el teorema del coseno a los triángulos ABC y ABM, podemos escribir:

$$2574^2 = \frac{49c^2}{4} + c^2 - 7c^2 \cos C \quad (1)$$

$$550^2 = \frac{49c^2}{16} + c^2 - \frac{7c^2}{2} \cos C \quad (2)$$

En (1), $7c^2 \cos C = \frac{53c^2}{4} - 2574^2$ y en (2), $7c^2 \cos C = \frac{65c^2}{8} - 2 \cdot 550^2$

Así pues, $\boxed{\dfrac{53c^2}{4}-2574^2=\dfrac{65c^2}{8}-2\cdot 550^2}$

3. Encuentra todos los enteros positivos m y n tales que $n!+1=(m!-1)^2$.

Solución

Si m y n son enteros positivos y $n!+1=(m!-1)^2$, sigue que $m\geq 3$.

La ecuación dada se transforma en $n!+1=(m!)^2-2m!+1$, o sea $n!=m!\,(m!-2)$. Dividiendo por $m!$ (obviamente $n>m$), tenemos que $n(n-1)\,(n-2)\ldots(m+1)=m!-2$ y al ser $m!$ divisible por 3 ($m\geq 3$), sigue que $m!-2$ no es divisible por 3, por lo que el término de la izquierda, $n(n-1)\ldots(m+1)$, debe tener a lo sumo dos factores. Así pues, tenemos:

1 factor: $n=m+1\Rightarrow m+1=m!-2\Rightarrow m=m!-3$. Como m divide a $m!-3$ y divide a $m!$ sigue que m divide a $3\Rightarrow m=3$ y $n=4$. Compruebo y es solución.

2 factor: $n=m+2\Rightarrow(m+2)\,(m+1)=m!-2\Rightarrow m^2+3m+4=m!$.

Así pues $3m=m!-m^2-4$ con lo que m divide a $m!-m^2-4$, de lo que sigue que m divide a 4 y, por tanto, $m=4$. Pero $m=4$ no es solución de $m^2+3m+4=4!$ pues $16+12+4\neq 24$. La única solución es, entonces, $\boxed{m=3,\ n=4}$

Soluciones viernes tarde

1. En un equipo de fútbol tenemos 11 jugadores, cuyas camisetas están numeradas del 1 al 11. Elegimos al azar 6 de ellos. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números de sus camisetas sea impar?

Solución

Hay $\binom{11}{6}$ elecciones posibles.

La suma de los números de las camisetas de los elegidos será impar si hay entre ellos una cantidad impar de números impares.
Escribamos ahora los casos favorables. Hay 6 números impares y 5 pares.

Una camiseta impar y 5 pares: $\binom{6}{1}\cdot\binom{5}{5}=6\cdot 1$

Tres camisetas impares y 3 pares: $\binom{6}{3}\cdot\binom{5}{3}=20\cdot 10$

Cinco camisetas impares y 1 par: $\binom{6}{5}\cdot\binom{5}{1}=6\cdot 5$

Así pues, la probabilidad pedida será $\dfrac{6\cdot 1+20\cdot 10+6\cdot 5}{\binom{11}{6}}=\dfrac{236}{462}=\dfrac{118}{231}$

2. La suma de las edades de los 120 estudiantes que participaron el año pasado en la fase final de la Olimpiada Matemática fue de 2002 años. Demuestra que podrías haber elegido 3 de ellos tales que la suma de sus edades no fuera menor de 51 años.

Solución

Calculemos en primer lugar las ternas posibles que podríamos haber elegido:
$\binom{120}{3} = 20 \cdot 119 \cdot 118 = 280840$. Veámoslo por contradicción:

Si no hubiera ninguna terna de suma de edades mayor o igual a 51 años, es que cada una sumaba un número de años menor o igual a 50.
Así pues, la suma de todas las ternas sería menor o igual a $50 \cdot 280840 = 14042000$.

Pero calculemos la suma de todas las ternas: Cada alumno aparecerá en $\binom{119}{2}$ ternas, o sea, en $119 \cdot 59 = 7021$ ternas, luego la suma de las edades de todas las ternas sería $7021 \cdot 2002 = 14056042$, lo que contradice que la tal suma era menor o igual a 14042000.

3. Escribo en la pizarra 14 números enteros, no necesariamente distintos, que verifican la propiedad de que al borrar cualquiera de ellos, puedo agrupar los trece restantes en tres montones de igual suma.

a) Demuestra que cada uno de los catorce es múltiplo de 3.

b) ¿Es posible que alguno de los catorce que he escrito no sea el 0?

Solución

Sean $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{14}$ los números que he escrito y $S = \sum_{i=1}^{14} a_i$

a) Me dicen que para cada i, $S - a_i = 3b_i$; siendo b_i la suma de cada montón obtenido al quitar a_i.
Así pues:

$$\begin{aligned} S - a_1 &= 3b_1 \\ S - a_2 &= 3b_2 \\ &\vdots \\ S - a_{14} &= 3b_{14} \end{aligned}$$

Sumando estas igualdades, llegamos a $14S - S = 3(b_1 + b_2 + \ldots + b_{14}) \Rightarrow 13S = 3T \Rightarrow T/13S$ y como 13 es primo, T/S, así que $S = 3c$ con c entero.
– Escribiendo ahora $S - a_i = 3b_i$; como $3c - a_i = 3b_i$, sigue que cada a_i es múltiplo de 3.

b) Hemos probado que cada $\frac{a_i}{3}$ es un número entero, llamémosle d_i. Trabajemos ahora con estos nuevos catorce enteros.

$\sum_{i=1}^{14} d_i = \frac{S}{3}$. Para cada i, $\frac{S}{3} - d_i = \frac{S}{3} - \frac{a_i}{3} = \frac{S - a_i}{3} = \frac{3b_i}{3}$. Así pues, quitando cada d_i, puedo agrupar, los restantes en 3 montones de igual suma, con lo que cada d_i es múltiplo de 3 (siguiendo el argumento de a). Esto nos lleva a que $\frac{a_i}{3^2}$ es múltiplo de 3. Reiterando este proceso, llegamos a que para cada $k \in$ N, $\frac{a_i}{3^k}$ es múltiplo de 3, con lo que la única salida es que $\frac{a_i}{3^k} = 0 \Rightarrow a_i = 0$ para cada i, de donde <u>**no es posible que algún a_i no sea 0.**</u>