XXXVII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Primera Fase

Viernes 19 de enero de 2001

Sesión de Tarde

Problema 1. Sean a, b, y c números reales. Prueba que si $x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene tres raíces reales, entonces $3b \leq a^2$.

Problema 2. Un cristalero dispone de una pieza de vidrio de forma triangular. Usando sus conocimientos de geometría, sabe que podría cortar de ella un círculo de radio r. Demuestra que, para cualquier número natural n, de la pieza triangular puede obtener n^2 círculos de radio $\frac{r}{n}$ (suponiendo que se puedan hacer siempre los cortes perfectos).

Problema 3. Nueve personas han celebrado cuatro reuniones diferentes sentados alrededor de una mesa circular. ¿Han podido hacerlo sin que existan dos de esas personas que se hayan sentado una junto a la otra en más de una reunión? Razona la respuesta.

Nota:

- Todas las respuestas han de estar razonadas.
- Cada problema se calificará sobre 7 puntos.
- Tiempo estimado: tres horas y media.

XXXVII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Primera Fase

Sábado 20 de enero de 2001

Sesión de Mañana

Problema 1. Consideramos el conjunto $N = \{1, 2,3,...\}$ de los números naturales y la aplicación $f : N \to N$ que cumple las dos siguientes condiciones:

a) $f(f(n)) = n$ para todo $n \in N$.

b) $f(f(n)+1) = \begin{cases} n-1, & si\ n\ es\ par; \\ n+3, & si\ n\ es\ impar. \end{cases}$

Determina el valor de $f(n)$ para cada $n \in N$ observando previamente que f es biyectiva y que, al no ser nunca $f(f(n) + 1) = 2$, tiene que ser $f(1) = 2$.

Problema 2. Consideramos los siguientes 27 puntos de un cubo: el centro (1), los centros de las caras (6), los vértices (8) y los centros de las aristas (12). Coloreamos cada uno de esos puntos de azul o de rojo. ¿Puede hacerse de modo que no haya tres puntos del mismo color alineados? Demuéstralo.

Problema 3. Un condenado queda en libertad cuando alcance el final de una escalera de 100 escalones. Pero no puede avanzar a su antojo, puesto que está obligado a subir un solo escalón cada día de los meses impares y a bajar un escalón cada día de los meses pares. Comienza el 1 de enero de 2001. ¿Qué día quedará en libertad? ¿Qué día quedaría en libertad si la escalera tuviera 99[redacted] escalones?

Nota:

- Todas las respuestas han de estar razonadas.
- Cada problema se calificará sobre 7 puntos.
- Tiempo estimado: tres horas y media.