REAL SOCIEDAD
MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Olimpiada Matemática
Española

XXXV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera Sesión

Problema 1

¿Qué dígitos se han omitido en la siguiente multiplicación?

$$
\begin{array}{cccc}
 & 2 & * & * \\
 & \times & * & * \\
\hline
 & * & 6 & 1 \\
* & * & 4 & \\
\hline
* & * & 0 & 1
\end{array}
$$

Problema 2

Una empresa produce semanalmente 300 bicicletas de montaña que vende íntegramente al precio de 600 euros cada una. Tras un análisis de mercados observa que si varía el precio, también varían sus ventas (de forma continua) según la siguiente proporción: por cada 7 euros que aumente o disminuya el precio de sus bicicletas, disminuye o aumenta la venta en 3 unidades.

a) ¿Puede aumentar el precio y obtener mayores ingresos?
b) ¿A qué precio los ingresos serán máximos?

Problema 3

Dado un triángulo ABC, con baricentro G.

a) Prueba que para cualquier punto del plano M se verifica:
$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 \geq \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2$, obteniéndose la igualdad si y solamente si $M = G$

b) Fijado un número $k > \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2$, halla el lugar geométrico de los puntos M tales que

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = k$$

Nota:

- Todas las respuestas han de estar razonadas.
- Cada problema se calificará sobre 7 puntos.
- Tiempo estimado: tres horas y media.
- No utilizar calculadora.

REAL SOCIEDAD
MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Olimpiada Matemática
Española

XXXV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda Sesión

Problema 4

Halla todos los pares de números naturales x, y ($x < y$) tales que la suma de todos los números naturales comprendidos estrictamente entre ambos es igual a 1999.

Problema 5

Prueba que la longitud de los catetos de un triángulo rectángulo isósceles es siempre igual a la suma de los radios de sus circunferencias inscrita y circunscrita.

Problema 6

Sean a, b y c números reales no nulos (con suma no nula) tales que:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}.$$

Prueba que también se verifica:

$$\frac{1}{a^{1999}}+\frac{1}{b^{1999}}+\frac{1}{c^{1999}}=\frac{1}{a^{1999}+b^{1999}+c^{1999}}$$

Nota:

- Todas las respuestas han de estar razonadas.
- Cada problema se calificará sobre 7 puntos.
- Tiempo estimado: tres horas y media.
- No utilizar calculadora.