XXXIV OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase Local

Primera sesión
16 de enero de 1998

Problema 1. Los puntos A=(a,11) y B=(b, 37) determinan, junto con el origen de coordenadas, un triángulo equilátero.
Determinar el producto ab .

Problema 2. Se consideran los puntos del plano $P_1 = (1, 1000)$, $P_2 = (2,1000)$, …… , $P_{1998} = (1998,1000)$ y el punto O = (0,0), origen de coordenadas.
Para cada punto P_k de los anteriores, se traza el segmento OP_k únicamente si no contiene más puntos con ambas coordenadas enteras que O y P_k .
¿Cuántos segmentos se dibujan?

Problema 3. Determinar el menor valor de k para el que no existe ningún número real x verificando

$$k < \frac{2x-7}{2x^2-2x-5} < 1$$

Problema 4. Sea A = {1,2,3,4,5,6}. Se consideran las funciones f de A en A. ¿Cuántas de ellas verifican que $f^2(x) = x$, para todo x de A? ¿Cuántas verifican $f^3(x) = x$ para todo x de A?
[$f^2(x) = f(f(x))$; $f^3(x) = f(f^2(x)) = f(f(f(x)))$]

XXXIV OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase Local

Segunda sesión
17 de enero de 1998

Problema 5. Un polinomio $p(x)$ tiene coeficientes enteros, y para cierto entero a, se verifica $p(a) = p(a+1) = p(a+2) = 1$.
¿Existe algún entero k tal que $p(k) = 8$?

Problema 6. En el triángulo ABC, de área 100, M es el punto medio del lado AC, y P es un punto del lado AB tal que el triángulo AMP tiene área 36. La paralela a PM por B corta al lado AC en Q.
Determinar el área del triángulo MPQ.

Problema 7. Se considera $f(x) = x^{1997} - x + 1$. Sea $n>1$, un número entero.
Demostrar que, para todo número entero x, los números $f(x)$ y $f^{n}(x)$ son primos entre sí.
[$f^{2}(x) = f(f(x))$; $f^{3}(x) = f(f^{2}(x)) = f(f(f(x)))$, y en general, $f^{n}(x) = f(f^{n-1}(x)) = f(f(\ldots f(x))\ldots))$ n veces]

Problema 8. **(a)** Los vértices de un polígono regular de 8 lados se emparejan, y se trazan los segmentos - lado o diagonal - que cada pareja determina. ¿Es posible emparejarlos de forma que los cuatro segmentos determinados tengan distintas longitudes?
(b) Demostrar que si se emparejan los vértices de un polígono regular de 12 lados, y se trazan los segmentos que cada pareja determina, siempre habrá al menos dos con la misma longitud.