Premio Euler - 2011/12
Problemas

Problema 1. *Supongamos que* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *es una función tres veces derivable tal que* $\lim_{x\to\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$ *y* $\lim_{x\to\infty} f'''(x) = 0$. *Demostrar que*

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} f''(x) = 0.$$

Problema 2. *Sea* A *una matriz cuadrada de orden* n *con coeficientes reales y sea* B *la matriz adjunta de* A. *Demostrar que*

$$\det(B) = \det(A)^{n-1}.$$

Problema 3. *Determinar todas las ternas* (a, b, p) *de números enteros, siendo* p *un número primo, verificando la ecuación*

$$a^2b^2 = p^2(a-1)(b-1).$$

Problema 4. *Supongamos que dividimos un cuadrado de lado unidad en dos subconjuntos disjuntos. Demostrar que uno de los dos subconjuntos tiene diámetro mayor o igual que* $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Problema 5. *Consideremos números enteros* $p, q \in \mathbb{Z}$ *tales que*

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{1350} + \frac{1}{1351}$$

Demostrar que 2027 *divide a* p.

Problema 6. *Sea* $\mathcal{A}$ *el conjunto de aplicaciones de* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *en sí mismo. Dadas dos aplicaciones* $f, g \in \mathcal{A}$, *denotemos por* $\delta(f, g)$ *al número de aplicaciones* $h \in \mathcal{A}$ *tales que* $h \circ f = g$. *Calcular los posibles valores de* $\delta(f, g)$ *cuando* f *y* g *varían en* $\mathcal{A}$.

Problema 7. *Pepe se encuentra en la esquina de una piscina cuadrada. Si la velocidad de Pepe andando es* a *y nadando es* b *(donde suponemos que* $b < a$*), ¿cuál es el camino que debe tomar Pepe (parte nadando y parte andando) para alcanzar la esquina opuesta en el menor tiempo posible (en función de* a *y* b*)?*

Problema 8. *¿Puede expresarse el intervalo* $(0, 1)$ *como unión numerable de intervalos cerrados disjuntos?*

Problema 9. *Calcular el valor de la siguiente suma en función de $n \in \mathbb{N}$:*

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-j} \frac{(-1)^k}{j! \cdot k!}.$$

Problema 10. *Hallar todas las matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, esto es, las matrices cuadradas de orden n con coeficientes complejos, que cumplen que si $x \in \mathbb{C}^n$ es un vector que tiene dos entradas iguales, entonces el vector $Ax \in \mathbb{C}^n$ tiene las mismas dos entradas iguales.*

Problema 11. *Hallar todas las sucesiones estrictamente crecientes de números naturales que cumplen que cualquier número natural se escribe de forma única como suma de términos distintos de la sucesión.*

Problema 12. *Dado un número real $a > 1$, determinar si la siguiente serie es o no convergente.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a\sqrt{a}\,\sqrt[3]{a}\cdots\sqrt[n]{a}}.$$

Problema 13. *Un año es bisiesto si es múltiplo de 4 pero no múltiplo de 100, excepto que sea múltiplo de 400. Por ejemplo, 1984, 2000 y 2012 son años bisiestos, mientras que 1900 no lo es. Consideremos un día cualquiera del año, distinto del 29 de febrero. Demostrar que los días de la semana (lunes, martes,...) en que puede caer dicho día no son equiprobables (cuando se toma un año al azar).*

Problema 14. *En un triángulo ABC, supongamos que las rectas tangentes a su circunferencia circunscrita en B y en C se cortan en un punto P. Demostrar que la recta AP es la simétrica de la mediana del lado BC respecto de la bisectriz del ángulo A.*

Problema 15. *Dado un triángulo en el plano euclídeo, determinar un punto tal que*

1. *la suma de los cuadrados de las distancias a los tres vértices sea mínima.*
2. *la suma de los cuadrados de las distancias a los tres lados sea mínima.*

Problema 16. *Determinar el valor de la siguiente integral definida:*

$$\int_0^1 \left(\sqrt[5]{1-x^{17}} - \sqrt[17]{1-x^5} \right) dx.$$

Problema 17. *Dado un número natural $n \in \mathbb{N}$, tenemos una cuadrícula de dimensiones $3 \times n$. ¿De cuántas formas se pueden rellenar las $3n$ casillas de la cuadrícula con fichas de tamaño 3×1?*

Problema 18. *Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que*

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$

Problema 19. *En cierto país hay 21 ciudades conectadas por autobuses de varias compañías. Cada compañía opera en sólo 5 ciudades de forma que tiene líneas que unen cualesquiera dos de las cinco ciudades. No hay problema en que dos compañías compartan algunas de sus ciudades, pero sabemos que cada par de ciudades está unido por, al menos, una línea directa (sin pasar por otra ciudad intermedia). ¿Cuál es el mínimo número de compañías necesario para que esta situación sea posible?*

Problema 20. *Consideremos la sucesión recurrente definida por* $a_0 = 0$ *y*

$$a_n = \frac{1}{2E(a_{n-1}) - a_{n-1} + 1} \qquad (n \geq 1),$$

donde $E(x)$ *representa la parte entera de* $(x \in \mathbb{R}$. *Demostrar que la sucesión* $\{a_n\}$ *recorre todos los racionales positivos, tomando cada valor una única vez.*