Premio Euler - 2009/10
Problemas y soluciones

Problema 1. *A un congreso asisten 9 personas que, en cada una de las cuatro reuniones que hacen juntas, se sientan alrededor de una misma mesa redonda. ¿Pueden sentarse de forma que ninguna tenga a la misma persona a su lado más que en una de las cuatro ocasiones?*

Solución. Sí que pueden hacerlo. Si numeramos a las personas con los números del 1 al 9, una forma de hacerlo es en el siguiente orden

Primera reunión:	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Segunda reunión:	1 3 5 7 9 4 6 2 8
Tercera reunión:	1 4 7 3 8 5 2 9 6
Cuarta reunión:	1 5 9 3 6 8 4 2 7

donde estamos suponiendo que el último de la lista y el primero se sientan juntos. □

Problema 2. *Encontrar todos los números $\lambda \in \mathbb{R}$ para los que la ecuación*

$$\left(x^2 - 2\lambda x - 4\lambda(1+\lambda^2)\right)\left(x^2 - 4x - 2\lambda(1+\lambda^2)\right) = 0$$

tiene exactamente tres soluciones complejas distintas.

Solución. Consideremos las funciones $p_i : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definidas por

$$p_1(\lambda) = \lambda + \sqrt{4\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda} \qquad p_2(\lambda) = \lambda - \sqrt{4\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda}$$
$$p_3(\lambda) = 2 + \sqrt{2\lambda^3 + 2\lambda + 4} \qquad p_4(\lambda) = 2 - \sqrt{2\lambda^3 + 2\lambda + 4}$$

que son las cuatro soluciones de la ecuación del enunciado. Es fácil ver que, para $\lambda < -1$, se tiene que $p_1(\lambda)$, $p_2(\lambda)$, $p_3(\lambda)$ y $p_4(\lambda)$ están cada una en un cuadrante distinto luego tenemos cuatro soluciones distintas. Si $\lambda = -1$, entonces $p_3(-1) = p_4(-1) = 2$ y $p_3(-1)$ y $p_4(-1)$ están en el segundo y tercer cuadrante luego $\lambda = -1$ es uno de los valores buscados. Para $0 < \lambda < 1$, $p_3(\lambda), p_4(\lambda)$ son reales distintos y $p_1(\lambda)$ y $p_2(\lambda)$ no son reales y siguen estando uno en el segundo cuadrante y otro en el tercero luego para ningún λ en $]0,1[$ hay tres soluciones distintas. Para $\lambda = 0$, tenemos que $p_1(0) = p_2(0) = p_4(0) = 0$ luego $\lambda = 0$ no es uno de los valores buscados.

En lo que sigue, supondremos que $\lambda > 0$, en cuyo caso todas las raíces involucradas son reales. Además, es fácil ver que $p_1(\lambda)$ y $p_3(\lambda)$ son estrictamente positivos mientras que $p_2(\lambda)$ y $p_4(\lambda)$ son negativos para $\lambda > 0$ luego las únicas posibilidades de que coincidan dos raíces es que p_1 coincida con p_3 o bien que p_2 coincida con p_4. Analizamos estos dos casos por separado:

- Si en la ecuación $p_2(\lambda) = p_4(\lambda)$ aislamos las raíces en un miembro, elevamos al cuadrado, volvemos a aislar la raíz que queda en un lado y volvemos a elevar, obtenemos que toda solución de $p_2(\lambda) = p_4(\lambda)$ es también solución de

$$0 = \lambda^6 - 2\lambda^5 + 14\lambda^4 - 18\lambda^3 + 13\lambda^2 - 16\lambda = \lambda(1+\lambda^2)(\lambda^3 - 2\lambda^2 + 13\lambda - 16)$$

Esto nos da los candidatos a soluciones $\lambda = 0$ (que no nos interesa) y las soluciones positivas de la ecuación $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 13\lambda - 16 = 0$. Como la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + 13x - 16$ es estrictamente creciente (su derivada no se anula), esta última ecuación tiene exactamente una solución, que llamaremos λ_0. Como $f(1) <$ y $f(\frac{3}{2}) > 0$, deducimos que $\lambda_0 \in]1, \frac{3}{2}[$ pero se cumple que $p_2(\lambda) \leq -2 < p_4(\lambda)$ para $\lambda \in]1, \frac{3}{2}[$ luego λ_0 no es solución de $p_2(\lambda) = p_4(\lambda)$ y esta ecuación no tiene soluciones positivas.

- Si ahora en la ecuación $p_1(\lambda) = p_3(\lambda)$ hacemos el mismo proceso que en el caso anterior, llegamos a exactamente la misma ecuación ya que al elevar al cuadrado perdemos los signos que distinguen este caso del anterior. Ahora λ_0 sí es solución de $p_1(\lambda) = p_3(\lambda)$ ya que $p_1(1) < p_3(1)$ y $p_1(\frac{3}{2}) > p_3(\frac{3}{2})$. Por tanto, para $\lambda = \lambda_0$ la ecuación original tiene exactamente tres soluciones.

De todo esto deducimos que la ecuación tiene tres soluciones distintas para $\lambda = -1$ y para $\lambda = \lambda_0$. Resolviendo la ecuación de tercer grado $f(\lambda) = 0$, obtenemos el valor exacto

$$\lambda_0 = \frac{1}{3}\left(2 - \frac{35}{\sqrt[3]{107 + 6\sqrt{1509}}} + \sqrt[3]{107 + 6\sqrt{1509}}\right) \approx 1{,}32192$$

$\square$

Nota: Como en el enunciado original no se especificaba si las soluciones buscadas eran o no reales, no se ha tenido en cuenta esto a la hora de la corrección. Además, la solución en el caso de considerar sólo raíces reales se deduce de la solución anterior (que es más general) y es sólo el valor $\lambda = \lambda_0$.

Problema 3. *Definamos la función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *como*

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq e \\ x f(\log(x)) & \text{si } x \geq e \end{cases}$$

donde $\log(x)$ *representa el logaritmo neperiano de* x.
Determinar si la siguiente serie es o no convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$$

Solución (de L. L. Salcedo (Dpto. Física Atómica, Molecular y Nuclear). La serie es divergente. Usamos la notación $\log^k(x)$ para indicar que se toma k veces el logaritmo de x:

$$\log^0(x) = x, \qquad \log^k(x) = \log(\log^{k-1}(x)), \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Igualmente definimos

$$f_0(x) = x, \quad f_k(x) = f_{k-1}(x) \log^k(x), \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

y

$$x_0 = 1, \quad x_k = e^{x_{k-1}}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Con estas definiciones es obvio que la función dada satisface

$$f(x) = f_k(x) \quad \text{para} \quad x_k \le x \le x_{k+1} \,.$$

Puesto que cada nuevo factor $\log^k(x)$ es positivo, creciente y 1 al principio del intervalo, $f(x)$ es positiva y monótonamente creciente para $x > 0$ y por tanto $1/f(x)$ es positiva y decreciente en para $x > 0$. Se deduce entonces que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)} \ge \int_1^{\infty} \frac{dx}{f(x)} \,.$$

La serie diverge ya que la integral diverge:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{f(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dx}{f(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dx}{f_k(x)} := \sum_{k=0}^{\infty} I_k,$$

$$I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dx}{x \log(x) \cdots \log^k(x)} \,.$$

Haciendo el cambio de variable $t = \log(x)$ es inmediato que $t(x_k) = x_{k-1}$, $t(x_{k+1}) = x_k$, $dx/x = dt$, $\log^j(x) = \log^{j-1}(t)$ y en consecuencia

$$I_k = I_{k-1} = \cdots = I_0 = \int_1^e \frac{dx}{x} = 1 \,,$$

y la integral y la serie son propiamente divergentes. □

Problema 4 (propuesto por J.M. Urbano). *Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *$P(x) \ge 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$.*

ii) *Existen polinomios $Q_1(x)$ y $Q_2(x)$ con coeficientes reales tales que $P(x) = Q_1(x)^2 + Q_2(x)^2$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$.*

Solución. La implicación (ii ⇒ i) es evidente luego nos centraremos en (i ⇒ ii). Supongamos que $P(x)$ es un polinomio con coeficientes reales y tal que $P(x) = 0$. Tenemos entonces que:

- Todas las raíces reales de P tienen orden par ya que, en caso contrario, existiría $\alpha \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ impar tal que $P(x) = (x-\alpha)^n Q(x)$ para cierto polinomio $Q(x)$ que no se anula en α, de donde $P(x)$ cambiaría de signo en α, contradiciendo la hipótesis.
- Si α es una raíz compleja de P, entonces también lo es su conjugada $\overline{\alpha}$, luego el polinomio

$$(x-\alpha)(x-\overline{\alpha}) = x^2 - 2\,\mathrm{Re}(\alpha)x + |\alpha|^2 = (x - \mathrm{Re}(\alpha))^2 + \mathrm{Im}(\alpha)^2$$

  divide a P.
- El coeficiente líder de P es no-negativo, por ser $\lim_{x\to+\infty} P(x) \ge 0$.

De todo esto deducimos que podemos expresar $P(x) = \lambda^2 Q(x)^2 P_1(x) \cdots P_r(x)$ donde $\lambda \in \mathbb{R}$, $Q(x)$ es un polinomio que tiene por raíces las raíces reales de P con multiplicidad la mitad y $P_1, \ldots, P_r$ son polinomios de grado dos de la forma $(x-a)^2 + b^2$ para $a, b \in \mathbb{R}$. Ahora bien, la fórmula

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad-bc)^2$$

válida para cualesquiera $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ nos asegura que el producto $P_1 \cdots P_r$ puede expresarse de la forma $R_1^2 + R_2^2$ para ciertos polinomios R_1, R_2 de coeficientes reales. Finalmente, basta tomar $Q_1 = \lambda Q R_1$ y $Q_2 = \lambda Q R_2$. $\square$

Problema 5. *Dado un número real $a > -1$, decidir si la siguiente serie es o no convergente.*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{a^n(a+1)^n}{((a+1)^{n+1} - a^{n+1})((a+1)^n - a^n)}$$

En caso de serlo, calcular el valor de la suma.

Solución. En primer lugar, nos fijamos en que todos los términos están bien definidos excepto para $a = -\frac{1}{2}$ luego supondremos en lo que sigue que a es un número real distinto de este valor. Aunque en el enunciado se pide estudiar la serie para $a > -1$, con el mismo esfuerzo lo hacemos también para $a \leq -1$. Para ello, en primer lugar, no es difícil probar por inducción que la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ está dada por

$$S_n = a(a+1)\frac{(a+1)^n - a^n}{(a+1)^{n+1} - a^{n+1}}$$

y distinguimos casos según los distintos valores de a:

- En el caso $a > -\frac{1}{2}$, dividimos numerador y denominador entre $(a+1)^{n+1}$ y obtenemos

$$S_n = a(a+1)\frac{(a+1)^n - a^n}{(a+1)^{n+1} - a^{n+1}} = \frac{a - (a+1)\frac{a^{n+1}}{(a+1)^{n+1}}}{1 - \frac{a^{n+1}}{(a+1)^{n+1}}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$$

  donde se ha usado que la sucesión $\{\frac{a^{n+1}}{(a+1)^{n+1}}\}$ converge a cero por ser una progresión geométrica cuya razón tiene valor absoluto menor que uno (aquí se usa que $a > -\frac{1}{2}$).

- En el caso $a < -\frac{1}{2}$, dividimos numerador y denominador entre a^{n+1} y obtenemos

$$S_n = a(a+1)\frac{(a+1)^n - a^n}{(a+1)^{n+1} - a^{n+1}} = \frac{a\frac{(a+1)^{n+1}}{a^{n+1}} - (a+1)}{\frac{(a+1)^{n+1}}{a^{n+1}} - 1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a+1$$

  donde ahora se ha usado que la sucesión $\{\frac{(a+1)^{n+1}}{a^{n+1}}\}$ converge a cero por ser una progresión geométrica cuya razón tiene valor absoluto menor que uno (aquí se usa que $a < -\frac{1}{2}$).

Deducimos que la serie del enunciado es convergente para cualquier $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq -\frac{1}{2}$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n(a+1)^n}{((a+1)^{n+1} - a^{n+1})((a+1)^n - a^n)} = \begin{cases} a & \text{si } a > -\frac{1}{2} \\ a+1 & \text{si } a < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$\square$

Problema 6. *Consideremos el polinomio $p(x) = 3x^2 + 7x + 2$. Determinar si existe otro polinomio $q(x)$ con coeficientes reales cumpliendo las siguientes propiedades:*

i) $q(0) = 1$ *(en particular, $q(x)$ es distinto de $p(x)$).*

ii) La suma de los cuadrados de los coeficientes de los polinomios $p(x)^n$ y $q(x)^n$ es la misma para todo número natural $n \in \mathbb{N}$.

Solución 1. Dado un polinomio $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, la suma de los cuadrados de los coeficientes de P no es más que el coeficiente en x^n del nuevo polinomio

$$(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \ldots + a_1 x + a_0)(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n)$$

Por tanto, si encontramos un polinomio $q(x) = b_n x^n + \ldots + b_1 x + 1$ verificando

$$(3x^2 + 7x + 2)(2x^2 + 7x + 3) = (b_n x^n + \ldots + b_1 x + 1)(x^n + \ldots + b_{n-1} x + b_n)$$

tendremos que cumple (i) por ser el término independiente igual a uno y cumple (ii) por la condición anterior[1]. Ahora bien, un polinomio de esta forma que cumpla tal ecuación tiene que ser de grado 2 e, igualando coeficientes, no es difícil llegar a que $q(x) = 6x^2 + 5x + 1$ la cumple luego este es un ejemplo que muestra que la respuesta al problema es afirmativa. $\square$

Solución 2 (de L. L. Salcedo, Dpto. Física Atómica, Molecular y Nuclear). La respuesta es afirmativa y de hecho el polinomio $q(x) = 6x^2 + 5x + 1$ satisface los requisitos del enunciado. En efecto. Usando la relación

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} e^{-i\ell\theta} d\theta = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \ell \\ 0 & \text{si } k \neq \ell \end{cases}$$

para cualesquiera $k, \ell \in \mathbb{Z}$, es inmediato verificar la identidad

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) f(e^{-i\theta})\, d\theta = \sum_{k=0}^{N} a_k^2$$

para cualquier polinomio $f(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k$.

Puesto que $p(x)^n$ y $q(x)^n$ son polinomios cuando n es natural, puede aplicarse la identidad anterior y la condición requerida en el enunciado de igualdad de suma de cuadrados de coeficientes equivale al conjunto de condiciones

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(e^{i\theta})^n p(e^{-i\theta})^n\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(e^{i\theta})^n q(e^{-i\theta})^n\, d\theta\,, \qquad n \in \mathbb{N}$$

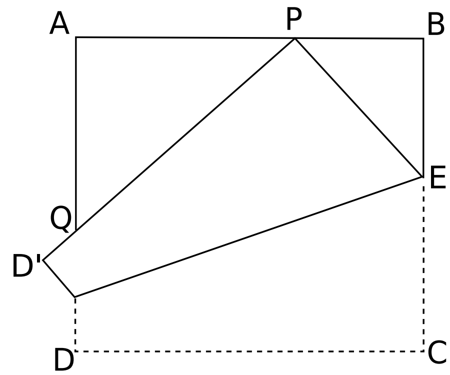
Todas estas condiciones se cumplen si $p(e^{i\theta}) p(e^{-i\theta}) = q(e^{i\theta}) q(e^{-i\theta})$ para cualquier $\theta \in \mathbb{R}$. Es inmediato comprobar que el polinomio $q(x)$ dado más arriba satisface esta relación, así como la otra condición $q(0) = 1$ y tener coeficientes reales. $\square$

Problema 7. *Consideremos un cuadrado de papel de vértices A, B, C, D en ese orden y un punto P sobre el lado AB. A continuación doblemos el papel de forma que el vértice C coincida con el punto P como se muestra en la figura. Sea Q el corte del nuevo segmento PD' con AD y tomemos el cociente $\mu(P) = QD/AD$. En esta situación,*

a) Demostrar que si P es el punto medio de AB, entonces $\mu(P) = 1/3$.

b) ¿Es cierto que si escogemos P de forma que $AP/AB = \frac{a}{2^n}$, entonces $\mu(P)$ recorre todos los racionales en $]0, 1[$ al variar $a \in \{1, 2, 3, \ldots, 2^n - 1\}$ y $n \in \mathbb{N}$?.

[1] Esto no quiere decir que todos los polinomios que cumplen (i) y (ii) son de esta forma pero, como a continuación encontramos uno que cumple esto, nos será suficiente para concluir una respuesta afirmativa al problema.



Solución. En primer lugar, no hay pérdida de generalidad si suponemos que el lado del cuadrado es uno, ya que el cociente $\mu(P)$ no depende de cuál es el valor del lado, luego tenemos que $\mu(P) = DQ$.

Consideremos $\lambda = AP$ e intentemos expresarlo todo en función de λ. Por un lado, se tiene que $BP = 1-\lambda$ y, si tomamos el punto E como en la figura, el teorema de Pitágoras aplicado al triángulo BPE nos dice que $EP^2 = BP^2 + BE^2$. Como $EP + BE = 1$, despejamos $EP = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 2\lambda + 2)$ y $BE = \frac{1}{2}(2\lambda - \lambda^2)$. Ahora bien, el triángulo APQ es semejante a BPE (se comprueba fácilmente que tienen los tres ángulos iguales) luego la proporcionalidad entre sus catetos nos da $AQ \cdot BE = AP \cdot PB$, de donde $AQ = 2\frac{1-\lambda}{2-\lambda}$. Como $DQ = 1 - AQ$, tenemos finalmente que

$$\mu(P) = \frac{AP}{2 - AP}$$

De aquí, es inmediato que si P es el punto medio de AB, entonces $AP = \frac{1}{2}$ y $\mu(P) = \frac{1}{3}$. Para el segundo apartado, veamos que la respuesta es negativa probando que $\mu(P)$ no toma el valor $\frac{1}{2}$ sobre los puntos que cumplen $AP = \frac{a}{2^n}$. En efecto, si tuvieramos que $\mu(P) = \frac{1}{2}$, como la función μ es inyectiva, podemos despejar

$$AP = \frac{2\mu(P)}{1 + \mu(P)} = \frac{2}{3}$$

que no puede expresarse de la forma $\frac{a}{2^n}$, ya que un número racional puede expresarse de esta forma si, y sólo si, una vez simplificado su denominador es una potencia de dos. $\square$

Problema 8. *Calcular el siguiente máximo común divisor:*

$$\operatorname{mcd}\left(\left(2^{2009}+1\right)^{2009}, 2^{2009^{2009}}+1\right)$$

Solución. Para cualquier $x \in \mathbb{R}$ y cualquier impar $n \geq 3$, se cumple que

$$\begin{aligned} x^n + 1 &= (x+1)(x^{n-1} - x^{n-2} + x^{n-3} - \ldots - x + 1) \\ &= (x+1)\left((x+1)(x^{n-2} - 2x^{n-3} + 3x^{n-3} - \ldots + (n-2)x - (n-1)) + n\right) \end{aligned}$$

igualdades que se comprueban fácilmente sin más que dividir el polinomio $x^n + 1$ entre $x + 1$ dos veces. Ahora tomemos $x = 2^{2009}$ y $n = 2009^{2008}$ (que es impar), con lo que se tiene que

$$2^{2009^{2009}} + 1 = (2^{2009} + 1)\left((2^{2009} + 1)a + 2009^{2008}\right)$$

para cierto número natural $a \in \mathbb{N}$. De aquí deducimos que

$$\operatorname{mcd}\left(\left(2^{2009}+1\right)^{2009}, 2^{2009^{2009}}+1\right) = (2^{2009}+1)\operatorname{mcd}\left((2^{2009}+1)^{2008}, (2^{2009}+1)a + 2009^{2008}\right)$$

y el último paso consistirá en probar que el último máximo común divisor es uno, para lo que será suficiente probar que no existen primos que dividan a $(2^{2009}+1)^{2008}$ y a $(2^{2009}+1)a+2009^{2008}$ simultáneamente. Razonando por reducción al absurdo si p fuese un primo que dividiera a ambos, tendríamos que p divide a $2^{2009}+1$ por dividir a $(2^{2009}+1)^{2008}$, luego p divide a 2009^{2008} y, por tanto, a $2009 = 7^2 \cdot 41$. Deducimos que $p = 7$ o bien $p = 41$ pero ni 7 ni 41 dividen a $2^{2009}+1$ como mostramos a continuación y esta es la contradicción buscada.

- 7 no divide a $2^{2009}+1$. En efecto, tenemos que $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod{7}$ luego $2^{2009}+1 = 4 \cdot 8^{669} + 1 \equiv 5 \pmod{7}$ y $2^{2009}+1$ no es divisible por 7.
- 41 no divide a $2^{2009}+1$. En efecto, si consideramos la función φ de Euler[2], como 2 y 41 son primos entre sí y $\varphi(41) = 40$, tenemos que $2^{40} \equiv 1 \pmod{41}$ luego $2^{2009}+1 = 2^9(2^{40})^{50}+1 \equiv 2^9+1 \equiv 21 \pmod{41}$ y $2^{2009}+1$ tampoco es divisible por 41.

De todo esto se deduce que

$$\operatorname{mcd}\left(\left(2^{2009}+1\right)^{2009}, 2^{2009^{2009}}+1\right) = 2^{2009}+1$$

$\square$

Problema 9. *¿Existe algún número real $a > 0$ de forma que $E(a^n)$ tenga la misma paridad que n para cualquier número natural n?*

Nota: $E(x)$ denota la parte entera de un número real x, esto es, el mayor número entero menor o igual que x.

Solución. Para dar respuesta afirmativa a la pregunta, definiremos una sucesión $\{a_n\}$ de números naturales de forma que a_n tenga la misma paridad que n y los intervalos semiabiertos definidos por $I_n = [a_n^{1/n}, (a_n+1)^{1/n}[$ cumplan que $I_n \supseteq I_{n+1}$. No es difícil ver que entonces el límite $a = \lim_{n\to\infty} a_n^{1/n}$ existe y cumple la propiedad del enunciado.

Para definir la sucesión a_n, lo haremos de forma inductiva. En primer lugar, tomaremos $a_1 = 3$, con lo que $I_1 = [3, 4[$. Si suponemos que $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$ cumplen las propiedades del párrafo anterior y tienen asociados intervalos $I_1, \ldots, I_k$, entonces el intervalo $[a_k^{(k+1)/k}, (1+a_k)^{(k+1)/k}[$ tiene longitud mayor o igual que 3 ya que $a_k \geq 3$, luego contiene algún intervalo de la forma $[a_{k+1}, a_{k+1}+1[$ donde a_{k+1} tiene la misma paridad que $k+1$, luego definimos a_{k+1} de esta forma. Ahora es fácil ver que a_{k+1} cumple las propiedades exigidas y se deja su comprobación al lector. $\square$

Problema 10. *La manecilla de las horas de un reloj mide 3cm mientras que la de los minutos mide 4cm.*

a) ¿Cuál es la velocidad máxima a la que se separan las puntas de las agujas?

b) ¿Cuál es la distancia en ese momento?

c) Indicar una hora del día a la que se alcance tal velocidad máxima (se admite una solución aproximada si esta no pudiera darse de forma exacta).

[2] La función φ de Euler se define sobre cualquier número natural n como el número de números entre 1 y $n-1$ que son primos relativos con n y se cumple (Teorema de Euler) que si a y n son primos entre sí, entonces $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

Solución. Podemos suponer que el sistema de referencia tiene su origen en el centro del reloj y que la aguja de las horas no se mueve y tiene su punta en el punto $(0,3)$ (que supondremos corresponde a las 12:00 horas). Así, como la aguja de los minutos da 12 vueltas cuando la de las horas da una, no es difícil comprobar que la trayectoria de la aguja de los minutos viene dada como la curva

$$\alpha(t) = 4\left(\operatorname{sen}(\tfrac{11\pi}{6}t), \cos(\tfrac{11\pi}{6}t)\right)$$

donde estamos midiendo el tiempo t en horas y los ángulos en radianes. La distancia entre las dos agujas en el instante t viene dada por la función

$$d(t) = \sqrt{16\operatorname{sen}^2(\tfrac{11\pi}{6}t) + \left(4\cos(\tfrac{11\pi}{6}t) - 3\right)^2} = \sqrt{25 - 24\cos(\tfrac{11\pi}{6}t)}$$

y la velocidad instantánea a la que se mueve una aguja respecto de otra por

$$d'(t) = \frac{22\operatorname{sen}(\tfrac{11\pi}{6}t)}{\sqrt{25 - 24\cos(\tfrac{11\pi}{6}t)}}$$

Observemos que d es de clase C^∞ (no presenta problemas de derivación ya que $d(t) \geq 1$ para cualquier valor de t). Así, podemos calcular también

$$d''(t) = \frac{-121\pi^2\left(12\cos^2(\tfrac{11\pi}{6}t) - 25\cos(\tfrac{11\pi}{6}t) + 12\right)}{6\left(25 - 12\cos\left(\tfrac{11\pi t}{6}\right)\right)^{3/2}}$$

Entonces, $d'(t) = 0$ si, y sólo si, $12\cos^2(\tfrac{11\pi}{6}t) - 25\cos(\tfrac{11\pi}{6}t) + 12 = 0$. Resolviendo esta ecuación de segundo grado y descartando uno de los valores para $\cos(\tfrac{11\pi}{6}t)$ por no pertenecer a $[-1,1]$, tenemos que

$$d'(t) = 0 \ \Leftrightarrow \cos(\tfrac{11\pi}{6}t) = \frac{3}{4}$$

Como $d(t)$ es periódica de período $\frac{12}{11}$, los únicos valores de $t \in [0, \frac{12}{11}]$ que cumplen que $d'(t) = 0$ son

$$t_1 = \frac{6}{11\pi}\arccos\frac{3}{4}$$

$$t_2 = \frac{12}{11} - \frac{6}{11\pi}\arccos\frac{3}{4}$$

No es difícil ver ahora que $d'''(t_1) < 0 < d'''(t_2)$ luego d' alcanza su máximo absoluto en t_1. Los valores que se piden en el enunciado son t_1, $d(t_1)$ y $d'(t_1)$, que pueden calcularse fácilmente. $\square$

Problema 11. *Consideremos S_n el conjunto de todas las permutaciones de los números $\{1,2,\ldots,n\}$. Para cada permutación $\sigma \in S_n$, definimos $f(\sigma)$ como el número de elementos $i \in \{1,\ldots,n\}$ para los que $\sigma(i) > \sigma(j)$ para todo $j > i$. Hallar la media de $f(\sigma)$ cuando σ recorre todas las permutaciones de S_n.*

Solución. Llamemos M_n al valor de la media que queremos calcular. La idea es obtener una fórmula recursiva para M_n y para ello, dada $\sigma \in S_n$, vamos a distinguir casos según el elemento $k \in \{1,\ldots,n\}$ para el que $\sigma(k) = n$.

Dado $k \in \{1,\ldots,n\}$, hay $(n-1)!$ permutaciones para las que $\sigma(k) = n$. De entre estas $(n-1)!$, fijémonos en los elementos $\{\sigma(k+1),\ldots,\sigma(n)\}$ ya que no existe $i \in \{1,\ldots,k-1\}$ tal que $\sigma(i) > \sigma(j)$ para todo $j > i$. Por tanto, es fácil darse cuenta de que los números $\{k+1,\ldots,n\}$ se comportan igual que $\{1, 2, \ldots, n-k\}$ con respecto a la propiedad que queremos analizar y la media entre estas permutaciones de la función f es igual a $1 + M_{n-k}$. Así, tenemos que

$$\begin{aligned} M_n &= \frac{1}{n!}\left((n-1)!(1+M_{n-1}) + (n-1)!(1+M_{n-2}) + \ldots + (n-1)!(1+M_0)\right) \\ &= 1 + \frac{1}{n}(M_1 + \ldots + M_{n-1}) \end{aligned}$$

donde hemos usado que $M_0 = 0$ para que la discusión anterior tenga sentido. Usando también que $M_1 = 1$, es fácil calcular

$$M_2 = \frac{3}{2}, \quad M_3 = \frac{11}{6}, \quad M_4 = \frac{25}{12}, \quad \ldots$$

y, en general, se prueba por inducción que

$$M_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

□

Nota: es interesante observar que las medias son divergentes.

Problema 12. *Todos los coeficientes de un cierto polinomio $p(x)$ son cero o uno y $p(0) = 1$. ¿Cuál es la máxima constante $a \geq 0$ para la que podemos asegurar que $|z| \geq a$ para toda raíz compleja z de $p(x)$?*

Solución. Probaremos que la constante buscada viene dada por

$$a = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

lo que será consecuencia de los siguientes dos puntos:

- Supongamos que $p(x)$ es un polinomio cuyos coeficientes son ceros y unos y $p(0) = 1$, entonces $p(x)$ no tiene raíces complejas en el disco centrado en el origen de radio a.

  En efecto, consideremos la función

  $$f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}, \qquad f(z) = 1 + \frac{1}{1-z} - 2p(z)$$

  Como el desarrollo en serie de Taylor de $z \mapsto (1-z)^{-1}$ centrado en el origen es $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, que tiene radio de convergencia uno, el desarrollo en serie de Taylor de f centrado en el origen también tiene radio de convergencia uno y tiene todos sus coeficientes en el conjunto $\{-1, 0, 1\}$. Por tanto, para $|z| < 1$,

  $$|f(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z|^n = \frac{|z|}{1-|z|}$$

  de donde tenemos que

  $$2|p(z)| \geq \left|1 + \frac{1}{1-z}\right| - \left|1 + \frac{1}{1-z} - 2p(z)\right| \geq 1 + \frac{1}{1+|z|} - \frac{|z|}{1-|z|} = 2\frac{1-|z|-|z|^2}{1-|z|^2}$$

  Ahora bien, si $|z| < a$, el último término es positivo, lo que imposibilita que $p(z) = 0$ para $|z| < a$.

- El polinomio $p(x) = x^2 + x + 1$ cumple que $p(a) = 0$.

$\square$

Nota: No es difícil ver a partir de las desigualdades anteriores que si un polinomio $p(x)$ con coeficientes cero y uno y $p(0) = 1$ alcanza la cota, entonces se tiene que anular precisamente en a, es decir, no se anula en otro punto de la circunferencia $|z| = a$.

Problema 13. *Dado un número natural $n \in \mathbb{N}$, hallar el número de pares de números naturales (a, b) que cumplen*

$$\frac{ab}{a+b} = n$$

Solución (Francisco Montiel, estudiante de Matemáticas). Probaremos que hay tantos pares como divisores tiene n^2. Si despejamos a en la expresión del enunciado, tenemos que

$$\frac{ab}{a+b} = n \Rightarrow ab = n\,(a+b) \Rightarrow a = \frac{bn}{b-n}$$

y el problema puede reformularse: dado $n \in \mathbb{N}$, hallar todos los naturales b tales que la expresión $\frac{bn}{b-n}$ es un número natural.

Ahora bien, puesto que $bn > 0$, el número $b - n$ ha de ser mayor que cero luego $b = n + k$ para cierto $k \in \mathbb{N}$. Así pues, se trata de hallar los valores $k \in \mathbb{N}$ tales que la expresión anterior es entera. Pero sustituyendo b por su valor, tenemos que

$$\frac{bn}{b-n} = \frac{n(n+k)}{n+k-n} = \frac{n^2+kn}{k} = \frac{n^2}{k} + n$$

y para que esa expresión sea natural, basta con que lo sea $\frac{n^2}{k}$, esto es, que k sea divisor de n^2. Por tanto, para que se cumpla la condición del enunciado, debe existir k divisor de n^2 tal que

$$b = n + k$$
$$a = \frac{n^2}{k} + n$$

Es inmediato comprobar que cualquier par (a, b) de esa forma cumple la identidad pedida, pues

$$\frac{ab}{a+b} = \frac{(n+k)\left(\frac{n^2}{k}+n\right)}{n+k+\frac{n^2}{k}+n} = \frac{(n+k)\,(n+k)\,n}{k\,(n+k)+n\,(n+k)} = \frac{n\,(n+k)^2}{(n+k)^2} = n$$

luego los números pedidos son de la forma expresada anteriormente. $\square$

Nota: Se ha demostrado que hay tantos pares como divisores tenga n^2. Si descomponemos n en factores primos como $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$, entonces tal número de divisores puede calcularse como

$$(2e_1 + 1)(2e_2 + 1) \cdots (2e_r + 1)$$

(la comprobación de esto último se deja como ejercicio sencillo al lector).

Problema 14. *Dados números reales $a, b, c \geq 0$ tales que $a + b + c = 1$, probar que*

$$0 \leq ab + ac + bc - 2abc \leq \tfrac{7}{27}$$

Analizar en qué casos se alcanza la igualdad en cada una de las dos desigualdades.

Solución. Como $a+b+c=1$, podemos suponer que alguno de los tres números es menor o igual que $\frac{1}{3}$, pongamos que $a \le \frac{1}{3}$. Por lo tanto, $1-2a>0$ y

$$ab+ac+bc-2abc = ab+ac+bc(1-2a) \ge 0$$

En este caso, como $1-2a>0$, si la igualdad se alcanza entonces $b=0$ ó $c=0$. Supongamos sin perder generalidad que $b=0$ luego $0=ab+ac+bc-2abc=ac$ lo que implica que $a=0$ ó $c=0$. Deducimos que la igualdad en la desigualdad de la izquerda se alcanza si, y sólo si, dos de los tres números son cero.

Para probar la otra desigualdad, distingamos dos casos:

a) Si uno de los tres números es mayor que $\frac{1}{2}$, pongamos $a>\frac{1}{2}$, entonces

$$ab+ac+bc-2abc = a(b+c)+bc(1-2a) < a(b+c) = a(1-a) \le \frac{1}{4} < \frac{7}{27}$$

b) Si $0<a,b,c\le\frac{1}{2}$, entonces tenemos que

$$ab+ac+bc-2abc = \frac{1+(1-2a)(1-2b)(1-2c)}{4} \le \frac{1+\frac{1}{27}(3-2(a+b+c))^3}{4} = \frac{7}{27}$$

donde hemos aplicado la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica a los números $1-2a$, $1-2b$ y $1-2c$ (observemos que estos números son positivos por haber supuesto que $0\le a,b,c\le\frac{1}{2}$) y también hemos usado que $a+b+c=1$.

Ahora bien, en el caso (a) no puede darse la igualdad mientras que en el (b) la igualdad se alcanza si, y sólo si, se alcanza en la desigualdad de las medias, esto es, cuando $1-2a=1-2b=1-2c$ o, equivalentemente, $a=b=c=\frac{1}{3}$. $\square$

Problema 15 (propuesto por J. M. Urbano). *Sean* $A=\{1,2,3,\ldots,20\}$ *y la aplicación* $f:A\to A$ *dada por*

$$\begin{array}{lllll}
f(1)=2, & f(2)=3, & f(3)=4, & f(4)=5, & f(5)=1,\\
f(6)=7, & f(7)=8, & f(8)=9, & f(9)=10, & f(10)=6,\\
f(11)=12, & f(12)=13, & f(13)=14, & f(14)=15, & f(15)=11,\\
f(16)=17, & f(17)=18, & f(18)=19, & f(19)=20, & f(20)=16.
\end{array}$$

Hallar el número de aplicaciones $g:A\to A$ *tales que* $g^4=f$.

Solución (del proponente). En primer lugar se observa que f es biyectiva, de hecho es la composición de cuatro ciclos disjuntos c_1, c_2, c_3, c_4 cada uno de longitud cinco. Esto fuerza a que si $g^4=f$, entonces g también ha de ser biyectiva.

Ahora nos preguntamos cómo podrá ser la descomposición en ciclos disjuntos de g. La observación clave es la siguiente: si tenemos un ciclo c de longitud m y n es un entero, entonces c^n se descompone en r ciclos disjuntos cada uno de longitud m/r, siendo $r=\mathrm{mcd}(m,n)$. Por tanto g puede tener uno de entre los siguientes tipos de descomposiciones en producto de ciclos disjuntos:

1. Cuatro ciclos de longitud cinco.

   En este caso hay una única permutación g tal que $g^4=f$. Concretamente $g=c_1^{-1}c_2^{-1}c_3^{-1}c_4^{-1}$, pues si tenemos un ciclo c de longitud 5, se verifica que $c^4=c^{-1}$.

2. Tres ciclos, siendo uno de longitud diez y los otros dos de longitud cinco.

   En primer lugar hay $\binom{4}{2} = 6$ formas de seleccionar dos ciclos de entre c_1^{-1}, c_2^{-1}, c_3^{-1} y c_4^{-1} para formar el ciclo de longitud diez. Una vez seleccionados dos concretos, pongamos $d = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ y $d' = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$, los elementos en el ciclo nuevo han de pertenecer a d y a d' alternativamente. Por ejemplo, una forma sería $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4, x_5, y_5)$. Vemos que hay cinco formas de "pegarlos" para formar el ciclo de longitud diez. Por tanto en este caso resultan $6 \cdot 5 = 30$ aplicaciones g válidas.

3. Dos ciclos de longitud diez cada uno.

   Ahora hemos de agrupar los cuatro ciclos c_1^{-1}, c_2^{-1}, c_3^{-1} y c_4^{-1} de dos en dos. Hay tres formas y en cada una de ellas, por el apartado anterior, hay cinco ciclos de longitud diez posibles. Por tanto en este caso resultan $3 \cdot 5^2 = 75$ aplicaciones g válidas.

4. Un único ciclo de longitud veinte.

   Finalmente, con los ciclos c_1^{-1}, c_2^{-1}, c_3^{-1} y c_4^{-1}, hemos de formar un sólo ciclo c de longitud veinte. Observamos que hay $3! = 6$ permutaciones circulares con estos cuatro ciclos y supongamos que están ordenados en la forma c_1^{-1}, c_2^{-1}, c_3^{-1} y c_4^{-1} (después multiplicaremos por 6 el número de posibilidades). Si escribimos c como un vector de longitud veinte, podemos completar las posiciones 1, 5, 9, 13, 17 con los elementos de c_1^{-1}, las posiciones 2, 6, 10, 14, 18 con los elementos de c_2^{-1}, las posiciones 3, 7, 11, 15, 19 con los de c_3^{-1} y las 4, 8, 12, 16, 20 con los de c_4^{-1} y hay cinco formas de ubicar cada uno de tales grupos de elementos en c, luego en este caso vemos que hay $6 \cdot 5^3 = 750$ aplicaciones g válidas.

Finalmente, decir que éstas son las únicas posibilidades, pues g no puede consistir en un ciclo de longitud quince por otro de longitud cinco (ambos disjuntos), pues al elevar a 4 obtendríamos otra permutación con esa misma estructura. Por tanto, la repuesta al problema es: $1 + 30 + 75 + 750 = 856$. □

Problema 16. *¿Es primo* $2009^4 + 4^{2009}$*?*

Solución. Utilizando la siguiente factorización

$$a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 - 2ab)(a^2 + 2b^2 + 2ab)$$

conocida como identidad de Sophie-Germain, aplicada a $a = 2009$ y $b = 4^{502}$, llegamos a que

$$2009^4 + 4^{2009} = (2009^2 + 2^{2009} - 2009 \cdot 2^{1005})(2009^2 + 2^{2009} + 2009 \cdot 2^{1005})$$

El segundo factor es claramente mayor que uno y el primero también ya que $2^{2009} - 2009 \cdot 2^{1005} = 2^{1005}(2^{1004} - 2009) > 2^{1005}$, luego la anterior factorización de $2009^4 + 4^{2009}$ nos dice que dicho número es compuesto, dando respuesta negativa a la pregunta del enunciado. □

Problema 17. *Consideremos un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia de radio unidad y denotemos, en sentido horario, por $P_1, P_2, \ldots, P_n$ a sus vértices. Demostrar que*

$$P_1P_2 \cdot P_1P_3 \cdots P_1P_n = n$$

Solución (de Francisco Montiel, estudiante de Matemáticas). Es claro que, sin pérdida de generalidad, podemos considerar la circunferencia centrada en el origen y los vértices del polígono coincidentes con las raíces n-ésimas de la unidad. Entonces, nombrando los vértices en sentido antihorario en lugar de en sentido horario, tendríamos

$$P_k = e^{\frac{2\pi(k-1)i}{n}}, \quad k = 1, \ldots, n$$

En particular, $P_1 = 1$ y, por tanto,

$$P_1P_2 \cdot P_1P_3 \cdot \ldots \cdot P_1P_n = \prod_{k=2}^{n} \left|1 - e^{\frac{2(k-1)\pi i}{n}}\right| = \left|\prod_{k=2}^{n} \left(1 - e^{\frac{2(k-1)\pi i}{n}}\right)\right| = |\phi(1)|$$

donde $\phi(z)$ es el polinomio cuyas raíces son, precisamente, las raíces n-ésimas de la unidad distintas de la propia unidad Pero $\phi(z) = 1 + z + \cdots + z^{n-1}$ ya que el polinomio cuyas raíces son todas las raíces n-ésimas de la unidad es $z^n - 1$ luego

$$\phi(z) = \frac{z^n - 1}{z - 1} = 1 + z + \cdots + z^{n-1}$$

y por tanto $|\phi(1)| = n$, con lo que queda probada la igualdad que se quería demostrar. $\square$

Problema 18. *Calcular el valor de la siguiente integral*

$$\int_0^{\pi/2} \log(\mathrm{sen}(x))\, dx$$

Solución (de L.L. Salcedo, Dpto. Física Atómica, Molecular y Nuclear). El valor de la integral es $-\frac{\pi}{2}\log(2)$. Usando sólo propiedades elementales se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \log(\mathrm{sen}(x))\, dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log(\mathrm{sen}(x))\, dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \log(\mathrm{sen}(2x))\, dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \log(2\,\mathrm{sen}(x)\cos(x))\, dx \\
&= \frac{\pi}{2}\log(2) + \int_0^{\pi/2} \log(\mathrm{sen}(x))\, dx + \int_0^{\pi/2} \log(\cos(x))\, dx \\
&= \frac{\pi}{2}\log(2) + 2\int_0^{\pi/2} \log(\mathrm{sen}(x))\, dx,
\end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado indicado. $\square$

Problema 19. *A cada punto del plano se le asigna un número real de forma que los números asignados a los vértices de cualquier cuadrado tienen suma cero. Demostrar que a todos los puntos se les ha asignado el valor cero.*

Solución (de L.L. Salcedo, Dpto. Física Atómica, Molecular y Nuclear). Sea C un punto cualquiera del plano. Sean V_1, V_2, V_3 y V_4, los cuatro vértices de un cuadrado centrado en C, listados en sentido antihorario. Y sean M_1, M_2, M_3 y M_4 los cuatro puntos medios de los lados del cuadrado anterior, también en sentido antihorario, siendo M_1 el correspondiente al lado V_1V_2.

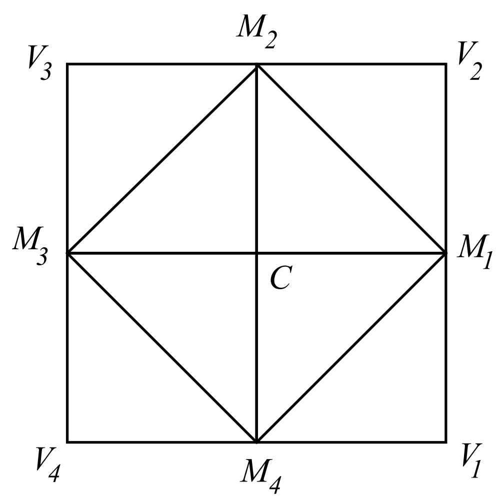
Cada uno de los vértices junto con los puntos medios adyacentes y C forman un cuadrado (de lado mitad del $V_1V_2V_3V_4$)). Por ejemplo, $V_1M_1CM_4$. De acuerdo con el enunciado $0 = v_1+m_1+c+m_4$ (indicando con minúscula el valor de la función en el punto dado). Y análogamente para los otros tres cuadrados de tamaño mitad. Sumando las cuatro relaciones obtenidas para los cuatro cuadrados se tiene

$$0 = (v_1 + m_1 + c + m_4) + (v_2 + m_2 + c + m_1) + (v_3 + m_3 + c + m_2) + (v_4 + m_4 + c + m_3).$$

Por otra parte, los vértices V_i forman un cuadrado y los puntos medios M_i otro, lo cual implica

$$0 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4.$$

Se deduce entonces que $c = 0$, es decir, la función se anula en un punto arbitrario C. Ésta era la proposición a demostrar. $\square$



Problema 20. *El conjunto* $\{1, 2, 3, \ldots, 49\}$ *se divide en tres subconjuntos disjuntos. Demostrar que al menos uno de estos tres subconjuntos contiene tres elementos distintos* a, b, c *tales que* $a+b = c$.

Solución. Llamemos Y_1, Y_2, Y_3 a los tres subconjuntos disjuntos. Como tenemos 49 números, alguno de ellos debe contener al menos 17 elementos, pongamos que Y_1 contiene los números $x_1 < x_2 < \ldots < x_{17}$. Entonces, consideremos las diferencias $x_2 - x_1, x_3 - x_1, \ldots, x_{17} - x_1$ de las que quitamos x_1 si aparece como una tal diferencia y tenemos al menos 15 diferencias distintas.

Si alguna de estas diferencias pertenece a Y_1, entonces hemos terminado (de aquí el eliminar x_1). En caso contrario, uno de los otros subconjuntos ha de contener a 8 de las 15 diferencias, pongamos que Y_2 contiene a ciertos $z_j = x_{i_j} - x_1$ para $j \in \{1, \ldots, 8\}$. Tomemos las diferencias $z_2 - z_1, \ldots, z_8 - z_1$ y quitemos de la lista z_1 y x_{i_1} si aparecen en ella. Si alguna de estas siete diferencias aparece en Y_2 hemos terminado y si alguna de ellas aparece en Y_1 también (¿por qué?).

Entonces, podemos suponer que cinco de estas diferencias $w_k = z_{j_k} - z_1$ pertenecen al subconjunto restante Y_3. Consideramos finalmente las diferencias $w_2 - w_1$, $w_3 - w_1$, $w_4 - w_1$ y $w_5 - w_1$ y quitemos w_1, z_{j_1} y $x_{i_{j_1}}$ de la lista. La diferencia restante, pertenecirá a alguno de los Y_1, Y_2, Y_3 y esta nos proporcionará los elementos deseados. $\square$