Premio Euler - 2009/10
Problemas

Problema 1. *A un congreso asisten 9 personas que, en cada una de las cuatro reuniones que hacen juntas, se sientan alrededor de una misma mesa redonda. ¿Pueden sentarse de forma que ninguna tenga a la misma persona a su lado más que en una de las cuatro ocasiones?*

Problema 2. *Encontrar todos los números $\lambda \in \mathbb{R}$ para los que la ecuación*

$$\left(x^2 - 2\lambda x - 4\lambda(1+\lambda^2)\right)\left(x^2 - 4x - 2\lambda(1+\lambda^2)\right) = 0$$

tiene exactamente tres soluciones complejas distintas.

Problema 3. *Definamos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como*

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq e \\ x f(\log(x)) & \text{si } x \geq e \end{cases}$$

donde $\log(x)$ representa el logaritmo neperiano de x.
Determinar si la siguiente serie es o no convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$$

Problema 4 (propuesto por J.M. Urbano). *Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $P(x) \geq 0$ *para cualquier* $x \in \mathbb{R}$.

ii) *Existen polinomios $Q_1(x)$ y $Q_2(x)$ con coeficientes reales tales que $P(x) = Q_1(x)^2 + Q_2(x)^2$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$.*

Problema 5. *Dado un número real $a > -1$, decidir si la siguiente serie es o no convergente.*

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a^n(a+1)^n}{((a+1)^{n+1} - a^{n+1})((a+1)^n - a^n)}$$

En caso de serlo, calcular el valor de la suma.

Problema 6. *Consideremos el polinomio $p(x) = 3x^2 + 7x + 2$. Determinar si existe otro polinomio $q(x)$ con coeficientes reales cumpliendo las siguientes propiedades:*

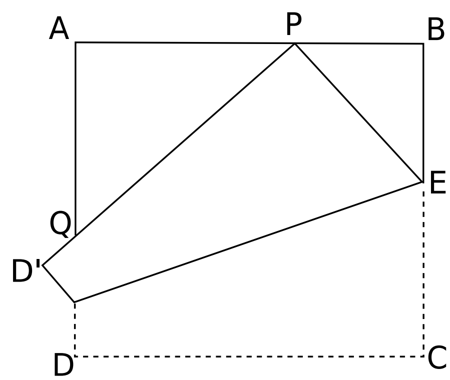
i) $q(0) = 1$ *(en particular,* $q(x)$ *es distinto de* $p(x)$*).*

ii) *La suma de los cuadrados de los coeficientes de los polinomios* $p(x)^n$ *y* $q(x)^n$ *es la misma para todo número natural* $n \in \mathbb{N}$*.*

Problema 7. *Consideremos un cuadrado de papel de vértices* A, B, C, D *en ese orden y un punto* P *sobre el lado* AB*. A continuación doblemos el papel de forma que el vértice* C *coincida con el punto* P *como se muestra en la figura. Sea* Q *el corte del nuevo segmento* PD' *con* AD *y tomemos el cociente* $\mu(P) = QD/AD$*. En esta situación,*

a) *Demostrar que si* P *es el punto medio de* AB*, entonces* $\mu(P) = 1/3$*.*

b) *¿Es cierto que si escogemos* P *de forma que* $AP/AB = \frac{a}{2^n}$*, entonces* $\mu(P)$ *recorre todos los racionales en* $]0, 1[$ *al variar* $a \in \{1, 2, 3, \ldots, 2^n - 1\}$ *y* $n \in \mathbb{N}$*?.*



Problema 8. *Calcular el siguiente máximo común divisor:*

$$\operatorname{mcd}\left(\left(2^{2009} + 1\right)^{2009}, 2^{2009^{2009}} + 1\right)$$

Problema 9. *¿Existe algún número real* $a > 0$ *de forma que* $E(a^n)$ *tenga la misma paridad que* n *para cualquier número natural* n*?*

Nota: $E(x)$ denota la parte entera de un número real x, esto es, el mayor número entero menor o igual que x.

Problema 10. *La manecilla de las horas de un reloj mide 3cm mientras que la de los minutos mide 4cm.*

a) *¿Cuál es la velocidad máxima a la que se separan las puntas de las agujas?*

b) *¿Cuál es la distancia en ese momento?*

c) *Indicar una hora del día a la que se alcance tal velocidad máxima (se admite una solución aproximada si esta no pudiera darse de forma exacta).*

Problema 11. *Consideremos* S_n *el conjunto de todas las permutaciones de los números* $\{1, 2, \ldots, n\}$*. Para cada permutación* $\sigma \in S_n$*, definimos* $f(\sigma)$ *como el número de elementos* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *para los* *que $\sigma(i) > \sigma(j)$ para todo $j > i$. Hallar la media de $f(\sigma)$ cuando σ recorre todas las permutaciones de S_n.*

Problema 12. *Todos los coeficientes de un cierto polinomio $p(x)$ son cero o uno y $p(0) = 1$. ¿Cuál es la máxima constante $a \geq 0$ para la que podemos asegurar que $|z| \geq a$ para toda raíz compleja z de $p(x)$?*

Problema 13. *Dado un número natural $n \in \mathbb{N}$, hallar el número de pares de números naturales (a, b) que cumplen*

$$\frac{ab}{a+b} = n$$

Problema 14. *Dados números reales $a, b, c \geq 0$ tales que $a + b + c = 1$, probar que*

$$0 \leq ab + ac + bc - 2abc \leq \tfrac{7}{27}$$

Analizar en qué casos se alcanza la igualdad en cada una de las dos desigualdades.

Problema 15 (propuesto por J. M. Urbano). *Sean $A = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ y la aplicación $f : A \to A$ dada por*

$$\begin{array}{lllll} f(1) = 2, & f(2) = 3, & f(3) = 4, & f(4) = 5, & f(5) = 1, \\ f(6) = 7, & f(7) = 8, & f(8) = 9, & f(9) = 10, & f(10) = 6, \\ f(11) = 12, & f(12) = 13, & f(13) = 14, & f(14) = 15, & f(15) = 11, \\ f(16) = 17, & f(17) = 18, & f(18) = 19, & f(19) = 20, & f(20) = 16. \end{array}$$

Hallar el número de aplicaciones $g : A \to A$ tales que $g^4 = f$.

Problema 16. *¿Es primo $2009^4 + 4^{2009}$?*

Problema 17. *Consideremos un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia de radio unidad y denotemos, en sentido horario, por $P_1, P_2, \dots, P_n$ a sus vértices. Demostrar que*

$$P_1P_2 \cdot P_1P_3 \cdots P_1P_n = n$$

Problema 18. *Calcular el valor de la siguiente integral*

$$\int_0^{\pi/2} \log(\operatorname{sen}(x))\, dx$$

Problema 19. *A cada punto del plano se le asigna un número real de forma que los números asignados a los vértices de cualquier cuadrado tienen suma cero. Demostrar que a todos los puntos se les ha asignado el valor cero.*

Problema 20. *El conjunto $\{1, 2, 3, \dots, 49\}$ se divide en tres subconjuntos disjuntos. Demostrar que al menos uno de estos tres subconjuntos contiene tres elementos distintos a, b, c tales que $a + b = c$.*