Problema nº 1

Dado un número real positivo L, demostrar que existe una sucesión de números naturales $\{x_n\}$ verificando las siguientes dos condiciones:

a) $\{x_n\}$ *es estrictamente creciente.*

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n} = L$

Solución

Construyamos la sucesión $\{x_n\}$ de la siguiente manera:

$$x_n = \min \left\{ a \in \mathbb{N} : a > x_{n-1}, \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{x_n} < L \right\}$$

es decir, vamos tomando x_n mayor que el anterior y de forma que sea el más pequeño para el que la suma de los inversos es estrictamente menor que L. Todos los términos están bien definidos porque la sucesión de los inversos de los naturales tiende a cero.
Es obvio que verifica (i) y, como la serie de sus inversos es convergente (ya que la sucesión de sumas parciales es creciente y está acotada por L), tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n} \leq L$$

luego será suficiente comprobar que no se puede dar la desigualdad estricta.
Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n} = L - \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$. Puesto que la serie de los inversos de los naturales es divergente, debe haber una sucesión creciente de naturales $\{y_n\} \to \infty$ tal que $x_n \neq y_m$ para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$, luego existirá y_m tal que $\frac{1}{y_m} < \varepsilon$, pero esto contradice la construcción de la sucesión $\{x_n\}$ (ya que siempre vamos tomando los naturales más pequeños en que la suma de los inversos no llega a L y nos hemos saltado el y_m).

Problema nº 2

Colocamos tres bolas esféricas macizas de radio 1 sobre una mesa de forma que cada una de ellas sea tangente a las otras dos y a la mesa. ¿Cuál es el radio de una cuarta bola que sea tangente a estas tres y a la mesa?

Solución (de Samuel Johnson, estudiante FisyMat)

Llamemos A_1, A_2, A_3 a los centros de las tres bolas y R a su radio. Llamemos también C al centro de la bola buscada y r a su radio.
De la tangencia de las tres bolas deducimos que el triángulo $A_1A_2A_3$ es triángulo equilátero de radio $2R$ y si llamamos O a su centro, tenemos, usando el teorema de Pitágoras, que $A_1O = \frac{2R}{\sqrt{3}}$. Por otro lado, por simetría. Ahora bien, C y O están en la misma perpendicular a la mesa luego por la tangencia de la cuarta bola a la mesa tenemos que $CO = R - r$ y, por la tangencia a las tres bolas, que $CA_1 = R + r$. Como el triángulo A_1CO es rectángulo en O, podemos aplicar el teorema de Pitágoras obteniendo que

$$(R-r)^2 - (R-r)^2 = (\frac{2R}{\sqrt{3}})^2$$

donde se opera y se obtiene que $r = \frac{R}{3}$.
En particular, para $R = 1$, el radio buscado es $\frac{1}{3}$.

También resuelto por María Calvo (estudiante 1º Matemáticas)

Problema nº 3

Tenemos un dado de 6 caras numeradas del 1 a 6 y en el que dos caras cualesquiera tienen la misma probabilidad de salir en una tirada. Si lanzamos n veces el dado,

¿con qué probabilidad la suma de los resultados obtenidos es un múltiplo de 5?

Solución (de Alfonso Navas, licenciado en Matemáticas)

Consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ *y* $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $p_{n,r}$ *la probabilidad de que la suma después de* n *tiradas dé resto* r *al dividirla entre 5 (Concretamente estamos interesados en* $p_{n,0}$*). Observemos entonces que*

$$p_{1,0} = \tfrac{1}{6}, \quad p_{1,1} = \tfrac{2}{6}, \quad p_{1,2} = \tfrac{1}{6}, \quad p_{1,3} = \tfrac{1}{6}, \quad p_{1,4} = \tfrac{1}{6}$$

y para $n \geq 2$*, se tiene la fórmula recursiva*

$$p_{n,r} = \sum_{k=1}^{6} \tfrac{1}{6} p_{n-1,r-k}$$

ya que el resto de la suma en n *tiradas es la suma del resto en* $n-1$ *tiradas con el resto de la última tirada. Calculando algunos términos de la sucesión, conjeturamos que*

$$p_{n,r} = \begin{cases} \frac{6^n+4}{5\cdot 6^n} & si\ n \equiv r\ (mod\ 5) \\ \frac{6^n-1}{5\cdot 6^n} & si\ n \not\equiv r\ (mod\ 5) \end{cases}$$

exprsión que se verifica por inducción con la fórmula recursiva previa. Haciendo $r = 0$*, se obtiene el resultado buscado.*

$\boxed{\text{Nota:}}$ *Es fácil ver que la probabilidad de que sea múltiplo de 5 tiende a* $\frac{1}{5}$ *cuando el número de tiradas tiende a* ∞.

Problema nº 4

Supongamos que una función creciente $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ verifica las condiciones

i) $f(1)=1$

ii) $f(\frac{x}{3})=\frac{f(x)}{2}$ *para cualquier* $x\in[0,1]$.

iii) $f(1-x)=1-f(x)$ *para cualquier* $x\in[0,1]$

Demostrar que f es continua y calcular $f(\frac{207}{2007})$.

Solución

Observemos que $f(\frac{1}{3})=\frac{f(1)}{2}=\frac{1}{2}$ *y* $f(\frac{2}{3})=1-f(\frac{1}{3})=\frac{1}{2}$ *luego, como f es creciente,* $f([\frac{1}{3},\frac{2}{3}])=\{\frac{1}{2}\}$. *De (ii) obtenemos que* $f([\frac{1}{9},\frac{2}{9}])=\{\frac{1}{4}\}$ *y de (iii) que* $f([\frac{7}{9},\frac{8}{9}])=\{\frac{3}{4}\}$. *Reiterando el proceso, se demuestra que dado* $0\le a<3^{n-1}$ *entero, se cumple*

$$f\left(\left[\frac{3a+1}{3^n},\frac{3a+2}{3^n}\right]\right)=\left\{\frac{a+1}{2^n}\right\} \qquad (1)$$

luego f toma todos los valores del conjunto

$$B=\left\{\frac{b}{2^n}:n,b\in\mathbb{N},1\le b\le 2^n\right\}$$

de donde deducimos que es una función continua ya que si tuviera una discontinuidad en x, como es creciente, no tomaría los puntos del intervalo $(\lim_{y\to x^-}f(y),\lim_{y\to x^+}f(y))$, *que es no vacío. Como en todo intervalo abierto no vacío hay puntos de B, llegamos a una contradicción.*

Para calcular $f(\frac{207}{2007})$, *encajemos esta fracción en uno de los intervalos del tipo de la fórmula (1). Concretamente, se comprueba que*

$$\frac{3\cdot 8+1}{3^5}=\frac{25}{243}<\frac{207}{2007}<\frac{26}{243}=\frac{3\cdot 8+2}{3^5}$$

luego $f(\frac{207}{2007})=\frac{8+1}{2^5}=\frac{9}{32}$.

Problema nº 5

Sea $n \in \mathbb{N}$ y consideremos la matriz cuadrada A de orden $n \times n$ tal que el elemento que se encuentra en la fila i-ésima y en la columna j-ésima de A viene dado por

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} k^{i+j}$$

Calcular el determinante de A.

Solución (de María Calvo, estudiante 1º Matemáticas)

La matriz A del enunciado se puede escribir como $A = SS^t$, donde

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1^2 & 2^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1^n & 2^n & \cdots & n^n \end{pmatrix}$$

y S^t denota la matriz traspuesta de S. Por tanto, $\det(A) = \det(S)^2$, pero

$$\det(S) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1^2 & 2^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1^n & 2^n & \cdots & n^n \end{pmatrix} = n! \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1^{n-1} & 2^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \end{pmatrix}$$

donde hemos sacado factor común k en la columna k-ésima. Este último determinante es del tipo de Vandermonde, luego podemos calcularlo directamente, obteniendo

$$\det(S) = n! \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i) = n! \cdot (n-1)! \cdots 3! \cdot 2! \cdot 1!$$

y finalmente

$$\det(A) = \prod_{k=1}^{n} (k!)^2$$

Problema nº 6

Supongamos que $f, g : [0,1] \to [0,1]$ *son funciones continuas que cumplen*

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \text{ para cualquier } x \in [0,1]$$

a) *Demostrar que existe* $x_0 \in [0,1]$ *tal que* $f(x_0) = g(x_0)$.

b) *¿Es cierto (a) si sólo una de las funciones es continua?*

c) *Dar un ejemplo en el que* f *y* g *no tengan puntos fijos comunes, es decir, no exista* $x_0 \in [0,1]$ *tal que* $f(x_0) = g(x_0) = x_0$.

Solución (apartados (a,b) de Alfonso Ruiz, estudiante 4º Matemáticas)

Consideremos la función continua $h = f - g : [0,1] \to \mathbb{R}$ *y supongamos por reducción al absurdo que no se anula. Podemos suponer además sin pérdida de generalidad que* $h > 0$ *(en otro caso basta intercambiar los papeles de* f *y* g*).*
Como $f : [0,1] \to [0,1]$ *es continua, es fácil ver que existe* $x_1 \in [0,1]$ *punto fijo de* f *y según la condición* $f \circ g = g \circ f$ *es inmediato que los términos de la sucesión* $\{g^n(x_1)\}$, *donde* $g^n = g \circ \overset{(n)}{\cdots} \circ g$, *son puntos fijos de* f. *Además, tenemos que*

$$g^n(x_1) - g^{n+1}(x_1) = f(g^n(x_1)) - g(g^n(x_1)) = h(g^n(x_1) > 0$$

luego la sucesión $\{g^n(x_1)\}$ *es decreciente y, como está acotada inferiormente por* 0, *será convergente a cierto* $\alpha \in [0,1]$.
Como $\lim\{g^n(x_1)\} = \alpha$, *deducimos que* $\lim\{g^{n+1}(x_1)\} = g(\alpha)$ *por la continuidad de* g *y, como esta segunda sucesión es una parcial de la anterior, la unicidad del límite nos asegura que* $g(\alpha) = \alpha$. *Por otro lado, como* $g^n(x_1)$ *es un punto fijo de* f *para cualquier* n, *su límite también lo es (el conjunto de puntos fijos es cerrado por la continuidad de la función* $x \mapsto f(x) - x$*). En consecuencia,* $h(\alpha) = f(\alpha) - g(\alpha) = \alpha - \alpha = 0$ *y tenemos la contradicción buscada.*

Para el apartado (b), un contraejemplo sería

$$f(x) = x \qquad\qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Nota: Debido a que no se han recibido soluciones para (c) y a la mayor dificultad de este apartado, se deja abierto hasta que alguien envíe algún contraejemplo.

Problema nº 7

Sea k un número natural. Se pide probar cuál es el mínimo número natural n (si existe) tal que $5^n - 1$ es múltiplo de 2^k.

Solución (de Juan Manuel Urbano, Dpto. Álgebra)

Sea G el grupo multiplicativo de las unidades de $\mathbb{Z}_{2^k}$. Entonces G se puede identificar con el conjunto de los enteros positivos impares menores que 2^k, por lo que su cardinal es igual a 2^{k-1}. Por ser G finito, para cada $a \in G$ existe un entero positivo mínimo $n(a)$ (el cual se denomina el orden de a en G) tal que $a^{n(a)} = 1$. Nuestro problema equivale a determinar $n(5)$.
El Teorema de Lagrange nos dice que $n(a)$ divide a 2^{k-1}, pero el valor 2^{k-1} lo podemos descartar como candidato al orden de a, debido al siguiente resultado:

Propiedad. *Si a es impar y $k \geq 3$, se verifica que $a^{2^{k-2}} \equiv 1 \mod 2^k$.*

Demostración. Aplicamos inducción sobre k.
Para $k = 3$, ya que a es impar, obtenemos que $a^2 \equiv 1 \mod 8$, con lo cual la propiedad es verdadera en este caso.
Suponemos como hipótesis de inducción que $a^{2^{k-2}} \equiv 1 \mod 2^k$, es decir, existe un entero b tal que $a^{2^{k-2}} = 1 + 2^k b$. Elevando ambos miembros al cuadrado, queda $a^{2^{k-1}} = (1 + 2^k b)^2 = 1 + 2^{k+1} b + 2^{2k} b^2 = 1 + 2^{k+1}(b + 2^{k-1} b^2)$, es decir, $a^{2^{(k+1)-2}} \equiv 1 \mod 2^{k+1}$. Hemos probado que la propiedad también se verifica para $k + 1$ y por tanto se verifica para todo entero $k \geq 3$. $\square$

Consideramos el caso $a = 5$ propuesto por el enunciado del ejercicio y cuando el exponente es 2^{k-3}, siendo $k \geq 3$. Al calcular las primeras potencias $5^{2^{k-3}}$ para $k = 3, 4, \ldots$, parece ser que éstas se reducen a $2^{k-1} + 1$ módulo 2^k. Pues bien, esto también se puede probar por inducción.

Propiedad. *Si $k \geq 3$, se cumple que $5^{2^{k-3}} \equiv 2^{k-1} + 1 \mod 2^k$.*

Demostración. Para $k = 3$ la comprobación es trivial. Si suponemos como hipótesis de inducción que $5^{2^{k-3}} \equiv 2^{k-1} + 1 \mod 2^k$, entonces sabemos que existe un entero b tal que $5^{2^{k-3}} = 2^{k-1} + 1 + 2^k b$. Elevando ambos miembros al cuadrado, queda $5^{2^{k-2}} = 2^k + 1 + 2^{k+1}(2^{k-3}(1 + 2b)^2 + b)$, lo cual significa que $5^{2^{(k+1)-3}} \equiv 2^{(k+1)-1} + 1 \mod 2^{k+1}$, es decir, propiedad se verifica para $k + 1$, y por tanto se verifica para todo $k \geq 3$. $\square$

El cálculo de $n(5)$ para los casos $k = 1$ y $k = 2$ es trivial, con lo que

$$n(5) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 1 \\ 2^{k-2} & \text{si } k \geq 2 \end{cases}$$

También resuelto por María Calvo (estudiante 1º Mat.), por Alfonso Ruiz (estudiante 4º Mat.) y parcialmente por Alfonso Navas (licenciado en Mat.)

Problema nº 8

Hay un montón de 2000 piedras. Ana y Fran se turnan para quitar alternadamente piedras respetando las siguientes reglas:

i) En cada jugada se pueden retirar 1, 2, 3, 4 ó 5 piedras.

ii) No se puede retirar la misma cantidad de piedras que quitó el otro jugador la vez anterior.

y pierde el jugador que en su turno no pueda realizar una jugada válida.
Si empieza Ana, ¿hay alguna estrategia que permita ganar a uno de ellos independientemente de lo que haga el otro?

Solución (de Juan Manuel Urbano, Dpto. Álgebra)

El juego consta de un conjunto de estados entre los cuales se establecen transiciones atendiendo a las condiciones del enunciado. Cada estado lo describimos como un par ordenado (n, k) *siendo* n *el número de piedras que aún quedan en el montón y* k *las piedras que fueron retiradas en la etapa inmediatamente precedente. Existe además un estado especial que representamos como* $(2000, 0)$ *que corresponde al momento incial del juego, pues inicialmente no existe ninguna restricción. Por tanto el espacio de estados es el conjunto* $(\{1, 2, \ldots, 1999\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\}) \cup \{(2000, 0)\}$.
Un estado decimos que es perdedor, si desde él no se puede realizar ninguna transición a otro estado, o bien todas las transiciones que se pueden realizar son a estados no perdedores, es decir, estados ganadores. Si comenzamos a analizar los primeros estados, obtenemos la siguiente tabla donde los estados perdedores se han marcado con una x:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	x						x						x
2							x						x
3			x			x	x						x
4				x			x				x		x
5					x		x					x	x

	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
1	x						x	x					x
2							x						x
3			x			x	x						x
4							x				x		x
5					x		x					x	x

Las columnas etiquetadas con $1, 2, 3, 4, 5$ *son las columnas básicas. A partir de ellas se obtienen las restantes aplicando el siguiente criterio que es consecuencia de las reglas del juego: El estado* (n, k), *con* $n \geq 6$ *y* $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *es ganador si y sólo si existe al menos un* $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, *con* $k \neq j$, *de modo que la casilla* $(n - j, j)$ *ya ha sido marcada como perdedora. Como consecuencia, para asignarle la condición de perdedora o ganadora a la casilla* (n, k), *sólo hemos de mirar las casillas* $(n-1, 1), (n-2, 2), (n-3, 3), (n-4, 4), (n-5, 5)$ *en las cinco columnas inmediatamente anteriores. Por tanto, en cuanto haya un bloque de cinco columnas consecutivas que se repita, la tabla será cíclica.*
Observamos que la configuración en las columnas $9, 10, 11, 12$ *y* 13 *se repite de nuevo en las columnas* $22, 23, 24, 25$ *y* 26. *Ello implica que la tabla a partir de la columna* 9 *es periódica con período igual a* 13. *Ello nos permite diseñar una estrategia para cualquier número de piedras (no necesariamente* 2000*).*
Ésta se puede describir como sigue: Dado un estado (n, k), *si* $n < 14$ *miramos las columnas de la tabla e intentamos quitar un número de piedras de modo que a nuestro rival le dejemos una posición perdedora. Si* $n \geq 14$, *calculamos el resto* r *de dividir* $n - 14$ *entre* 13 *y nos fijamos en la columna* $14 + r$. *Desde dicha columna intentamos quitar un número de piedras de modo que a nuestro rival le dejemos una posición perdedora.*
Concretamente, para 2000 *piedras, obtenemos resto* $r = 10$, *con lo cual miramos la columna* $14 + 10 = 24$. *Como es posible alcanzar una posición perdedora (quitando cuatro piedras, pasando al estado* $(1996, 4)$*), concluimos que para* 2000 *piedras siempre existe una estrategia ganadora para el primer jugador.*

Problema nº 9

Dada $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una aplicación biyectiva, determinar si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n)}{n^2}$$

es o no convergente a un número real.

Solución

Sea π una tal biyección cualquiera. Entonces tenemos que

$$\pi(1) + \pi(2) + \ldots + \pi(n) \geq 1 + 2 + \ldots + n = \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$. De esta desigualdad y de la igualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\pi(1) + \ldots + \pi(n)) \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \right]$$

deducimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n)}{n^2} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2n(n+1)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty$$

En consecuencia, la suma es divergente para cualquier biyección.

Problema nº 10

Sea $[a, b]$ un intervalo compacto no vacío, $p : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y $\lambda > 0$. Demostrar que la única solución del problema de valores en la frontera

$$\begin{cases} x''(t) + p(t)x'(t) - \lambda x(t) = 0 \\ x(a) = x(b) = 0 \end{cases}$$

es $x(t) = 0$ para todo $t \in [a, b]$.

Solución

Como x es continua en $[a, b]$, x ha de alcanzar su máximo y mínimo absolutos en $[a, b]$, es decir, existen

$$M = \text{máx}\{x(t) : t \in [a, b]\} \geq 0, \quad m = \text{mín}\{x(t) : t \in [a, b]\} \leq 0$$

Bastará ver que $M = 0$ pues de forma completamente análoga se razona que $m = 0$ y x habrá de ser constantemente nula. Por reducción al absurdo, si $M > 0$, entonces este máximo se alcanza en $]a, b[$, es decir, $x(c) = M$ para algún $c \in]a, b[$. De la derivabilidad de x y de la condición de máximo deducimos que $x'(c) = 0$ y sustituyendo $t = c$ en la ecuación diferencial tenemos que $x''(c) = \lambda M > 0$, de donde x tiene un mínimo local estricto en $t = c$ y por tanto, en cualquier entorno de c hay puntos en los que x vale más de M, contradiciendo que M es el máximo global de x. Queda así probado que $M = 0$.

Problema nº 11

Sean a, b, c números enteros distintos. Demostrar que no existe ningún polinomio P con coeficientes enteros y tal que

$$P(a) = b, P(b) = c, P(c) = a$$

Solución (de Juan Manuel Urbano, Dpto. Álgebra)

Usaremos la siguiente propiedad que se demuestra fácilmente:

Propiedad. *Sean z_1, z_2, m números enteros con $m > 0$ y $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros. Si $z_1 \equiv z_2 \mod m$, entonces $P(z_1) \equiv P(z_2) \mod m$.*

Dados tres números enteros, siempre al menos dos de ellos tienen la misma paridad, es decir, son congruentes módulo 2. Por tanto, al menos dos de los enteros a, b y c son congruentes módulo 2. Supongamos que $a \equiv b \mod 2$. Aplicando la propiedad anterior obtenemos que $P(a) \equiv P(b) \mod 2$, es decir, $b \equiv c \mod 2$, y por consiguiente a, b y c tienen la misma paridad. Supongamos que a, b y c son impares (El caso en el que a, b y c son pares lleva a un razonamiento similar). Cuando consideramos dichos números módulo 4, estos pueden ser congruentes con 1 o con 3. De nuevo deducimos que dos de dichos números han de ser congruentes entre sí módulo 4. Supongamos que $a \equiv b \mod 4$. Aplicando de nuevo la propiedad anterior obtenemos que $P(a) \equiv P(b) \mod 4$, es decir, $b \equiv c \mod 4$, y por tanto dos cualesquiera de los números a, b y c son congruentes entre sí módulo 4. A continuación consideraríamos los tres números módulo 8, y así con todas las potencias de 2. Inductivamente tenemos la siguiente propiedad:

Propiedad. *Si a, b y c son números enteros y existe un polinomio $P(x)$ con coeficientes enteros tal que $P(a) = b, P(b) = c$ y $P(c) = a$, entonces para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se verifica que a, b y c son congruentes entre sí módulo 2^n.*

Una vez visto esto, elegimos un número natural n tal que 2^n sea mayor que la diferencia entre el máximo y el mínimo de a, b y c. Este requerimiento junto con el hecho de que dos cualesquiera de dichos números son congruentes módulo 2^n implica que $a = b = c$, lo cual contradice la hipótesis inicial de que a, b y c son tres números enteros distintos.

Nota. *De manera similar se puede demostrar que si $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ son distintos, con $n \geq 3$, entonces no existe ningún polinomio $f(x)$ con coeficientes enteros tal que $f(a_1) = a_2, f(a_2) = a_3, \ldots, f(a_{n-1}) = a_n$ y $f(a_n) = a_1$. Nótese que ahora $a_1, a_2, \ldots, a_n$ serían congruentes módulo $(n-1)^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Problema nº 12

Partiendo de que $0 < y_1 < x_1$, *consideramos la sucesión definida por*

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = \left(\frac{x_n + y_n}{2}, \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n} \right)$$

Calcular los límites de las sucesiones $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$.

Solución (de Juan Manuel Urbano, Dpto. Álgebra)

De las definiciones de x_{n+1} y de y_{n+1}, deducimos que $x_{n+1} \cdot y_{n+1} = x_n \cdot y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde $x_{n+1} \cdot y_{n+1} = x_1 \cdot y_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Propiedad. *Para todo n se verifica que $y_n < y_{n+1} < x_{n+1} < x_n$.*

Demostración. Hacemos la demostración por inducción y además tenemos en cuenta la propiedad bien conocida siguiente: $(*)$ Si x, y son números reales no negativos, entonces $\sqrt{x \cdot y} \leq \frac{x+y}{2}$, dándose la igualdad si y sólo si $x = y$.

- $n = 1$. Veamos que $y_1 < y_2 < x_2 < x_1$. Al ser $y_1 < x_1$ y $x_2 = \frac{x_1+y_1}{2}$, tenemos que $y_1 < x_2 < x_1$, de donde $\frac{x_2}{x_1} < 1$. Como $y_1 = \frac{x_2}{x_1} y_2$, deducimos que $y_1 < y_2$. Por último,

  $$y_2 < x_2 \iff \frac{x_1 \cdot y_1}{\frac{x_1+x_2}{2}} < \frac{x_1+x_2}{2} \iff x_1 \cdot y_1 < \left(\frac{x_1+y_1}{2}\right)^2 \iff \sqrt{x_1 \cdot y_1} < \frac{x_1+y_1}{2}$$

  lo cual es verdad aplicando $(*)$ y teniendo en cuenta que $x_1 \neq y_1$.

- Supongamos como hipótesis de inducción que $y_n < y_{n+1} < x_{n+1} < x_n$, y probemos que $y_{n+1} < y_{n+2} < x_{n+2} < x_{n+1}$.

  Por hipótesis de inducción sabemos que $y_{n+1} < x_{n+1}$, y esto implica que $y_{n+1} < x_{n+2} = \frac{x_{n+1}+y_{n+1}}{2} < x_{n+1}$. En particular tenemos que $0 < \frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} < 1$, que combinado con $y_{n+1} = \frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} y_{n+2}$, implica $y_{n+1} < y_{n+2}$. Por último

  $$y_{n+2} < x_{n+2} \iff \frac{x_{n+1} \cdot y_{n+1}}{\frac{x_{n+1}+x_{n+2}}{2}} < \frac{x_{n+1}+x_{n+2}}{2} \iff$$

  $$x_{n+1} \cdot y_{n+1} < \left(\frac{x_{n+1}+y_{n+1}}{2}\right)^2 \iff \sqrt{x_{n+1} \cdot y_{n+1}} < \frac{x_{n+1}+y_{n+1}}{2},$$

  lo cual es verdad por $(*)$ y porque $x_{n+1} \neq y_{n+1}$.

$\square$

Como consecuencia de la propiedad anterior las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son monótonas y acotadas, y por tanto convergentes. Además de $x_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}$ deducimos que $y_n = 2x_{n+1} - x_n$, con lo cual si $\lim\{x_n\} = \ell$, entonces $\lim\{y_n\} = \ell$. Por último, usando que $x_{n+1} \cdot y_{n+1} = x_1 \cdot y_1$ y tomando límites resulta que $\ell^2 = x_1 y_1$, lo cual implica que $\ell = \sqrt{x_1 \cdot y_1}$.

Problema nº 13

Sea P_1 *un triángulo equilátero de lado* 1 *y, para* $n \geq 2$*, definimos* P_n *como el polígono que resulta al eliminar en cada vértice de* P_{n-1} *el triangulito que tiene por lados un tercio de los lados adyacentes al vértice. Calcular*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Area}(P_n)$$

$\boxed{\textit{Nota:}}$ *Por ejemplo,* P_2 *es un hexágono regular de lado* $\frac{1}{3}$*,* P_3 *es un dodecágono irregular y cada polígono tiene el doble de lados que el precedente.*

Solución

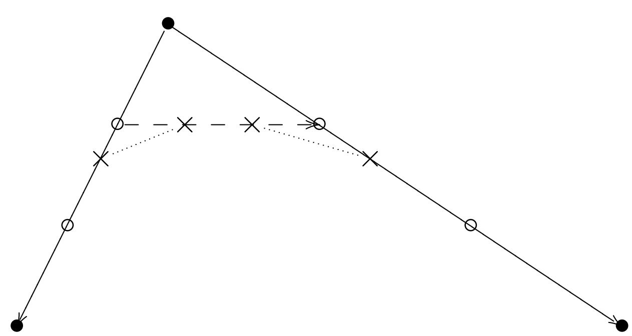
Vamos a analizar en primer lugar de forma abstracta lo que pasa en un vértice en dos eliminaciones sucesivas. Supongamos que los lados adyacentes al vértice están dados por los vectores u *y* v*, en cuyo caso, al eliminar el triángulo que forman éste tiene área* $\frac{1}{18}|u \wedge v|$*, siendo* $\wedge$ *el producto vectorial entendiendo el plano dentro de* $\mathbb{R}^3$*. Al eliminar este triángulo y los dos de los vértices adyacentes los lados* u *y* v *quedan en* $\frac{1}{3}u$ *y* $\frac{1}{3}v$ *y aparece un lado nuevo que está representado por el vector* $\frac{1}{3}(v-u)$ *(marcado en trazo discontinuo en el dibujo). Así, en el siguiente paso de eliminación, el área que desaparece al quitar los triángulos correspondientes a los dos nuevos vértices (marcado en trazo punteado en el dibujo) viene dado por*

$$\frac{1}{18}\left(\left|\frac{u}{3} \wedge \frac{v-u}{3}\right| + \left|\frac{u-v}{3} \wedge \frac{v}{3}\right|\right) = \frac{1}{18}\left(\frac{1}{9}|u \wedge v| + \frac{1}{9}|u \wedge v|\right) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{18}|u \wedge v|$$

es decir, el área de estos dos triángulos es $\frac{2}{9}$ *de la del triángulo quitado primero. Volviendo ahora al problema, este cálculo que hemos hecho nos dice que en cada paso quitamos exactamente* $\frac{2}{9}$ *del área que habíamos quitado en el paso anterior. El área original es la del triángulo equilátero de lado* 1*, es decir,* $\frac{\sqrt{3}}{4}$ *y en el primer paso quitamos el área de tres triángulos equiláteros de lado* $\frac{1}{3}$*, es decir,* $\frac{\sqrt{3}}{12}$*. Deducimos que el área límite es*

$$\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12}\left(1 + \frac{2}{9} + \left(\frac{2}{9}\right)^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^3 + \dots\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{9}{7} = \frac{\sqrt{3}}{7}$$

donde se ha usado que la suma infinita es la suma de una progresión geométrica.



Problema nº 14

Sea G un grupo finito de matrices reales $n \times n$ junto con la multiplicación de matrices. Probar que si la suma de las trazas de los elementos de G es cero, entonces la suma de los elementos de G es la matriz nula.

Solución 1 (de Jesús García y Juan M. Urbano, Dpto. Álgebra)

Escribamos $G = \{A_1, \ldots, A_r\}$ y sea $B = A_1 + \cdots + A_r$. Entonces B es una matriz $n \times n$ cuya traza es cero, pues ésta es igual a la suma de las trazas de todas las matrices en G, lo cual por hipótesis es cero. Debido a que G es un grupo, para cualquier $i \in \{1, \ldots, r\}$ la aplicación $f : G \to G$ definida por $f(M) = A_i \cdot M$ es biyectiva. Esto implica que $\{A_i \cdot A_1, \ldots, A_i \cdot A_r\} = \{A_1, \ldots, A_r\}$ y en particular $A_i \cdot B = B$ para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$. Deducimos de aquí que $B^2 = B \cdot B = (A_1 + \cdots + A_r) \cdot B = rB$, es decir, $\boldsymbol{0} = B \cdot (B - rI) = (B - 0I) \cdot (B - rI)$, con lo cual B es una matriz $n \times n$ cuyos valores propios posibles (en $\mathbb{C}$) son 0 y r. Ya que la traza de una matriz cuadrada es igual a la suma de todos sus valores propios y la traza de B es cero, deducimos que el único valor propio de B es 0. Por consiguiente B es una matriz nilpotente, es decir, existe un número natural k tal que $B^k = \boldsymbol{0}$. Como además la igualdad $B^2 = rB$ implica que $B^m = r^{m-1}B$ para todo número natural $m \geq 1$, obtenemos necesariamente que $k = 1$, es decir, $B = \boldsymbol{0}$.

Solución 2 (de Javier López Peña, Dpto. Álgebra)

Sea $h = \sum_{g\in G} g$ *la suma de los elementos de* G*. La hipótesis del problema nos dice que* $\mathrm{Traza}(h) = 0$*. Observemos que para cualquier* $g \in G$ *se tiene* $g \cdot h = h$*,por lo que* $\mathrm{Traza}(g \cdot h) = 0$*, pero entonces tenemos que*

$$\mathrm{Traza}(h^2) = \mathrm{Traza}(\textstyle\sum_{g\in G} g \cdot h) = \sum_{g\in G} \mathrm{Traza}(g \cdot h) = 0$$

y de manera similar obtenemos que $\mathrm{Traza}(h^k) = 0$ *para todo* k *natural. Si escribimos el polinomio característico de* h *como*

$$p_h(t) = \textstyle\sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i t^{n-i}$$

con valores propios $a_1, \ldots, a_n$*, y definimos* $t_i := x_1^i + \cdots + x_n^i$ *la suma de las potencias* i*–ésimas de los autovalores de* h *(para* $i \geq 1$*), entonces se tiene que* $t_i = \mathrm{Traza}(h^i) = 0$ *(para probar esto basta suponer que* h *está en forma de Jordan, lo cual no cambia la traza). Aplicando las identidades de Newton a* $p_h(t)$ *tenemos*

$$\begin{aligned} a_1 &= t_1, \\ a_2 &= \tfrac{1}{2}(t_1^2 - t_2), \\ a_3 &= \tfrac{1}{6}(t_1^3 - 3t_1t_2 + 2t_3), \quad \ldots \end{aligned}$$

lo cual siginifca que todos los coeficientes del polinomio característico (salvo el correspondiente a t^n*) valen 0, de modo que* $p_h(t) = t^n$*, todos los autovalores de* h *son nulos, y de aquí se obtiene inmediatamente que* h *es nula.*

Problema nº 15

Calcular el siguiente límite (en caso de que exista):

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}$$

Solución (de Juan M. Urbano, Dpto. Álgebra)

Consideremos $a_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}$. *Teniendo en cuenta las identidades*

$$k^3 - 1 = (k-1)(k^2+k+1), \qquad k^3+1 = (k+1)(k^2-k+1)$$

podemos escribir

$$a_n = \frac{1\cdot 7}{3\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 13}{4\cdot 7}\cdot\frac{3\cdot 21}{5\cdot 13}\cdots\frac{(n-1)\cdot(n^2+n+1)}{(n+1)\cdot(n^2-n+1)}.$$

Observamos que el segundo factor que aparece en el numerador de cada fracción es igual al segundo factor que aparece en el denominador de la fracción siguiente. Esto es consecuencia de la identidad $(k-1)^2 + (k-1) + 1 = k^2 - k + 1$. *Simplificando resulta*

$$a_n = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-3)\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot(n^2+n+1)}{3\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdots(n-1)\cdot n\cdot(n+1)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n^2+n},$$

y por tanto

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}$$

Problema nº 16

Sea G un grupo finito no conmutativo y $f : G \to G$ un isomorfismo de grupos. Consideremos el conjunto

$$A_f = \{g \in G : f(g) = g^{-1}\}$$

i) Demostrar que $|A_f| \leq \frac{3}{4}|G|$, donde $|\cdot|$ denota el número de elementos.

ii) ¿Puede darse la igualdad en la desigualdad establecida en (i)?

Solución (de Jesús García y Juan M. Urbano, Dpto. Álgebra)

Observamos en primer lugar que A_f es no vacío pues el elemento neutro de G pertenece a A_f. Como consecuencia de la definición del conjunto A_f y de que f es un homomorfismo de grupos, es inmediato comprobar que

$$\forall a, b \in A_f, \quad a \cdot b \in A_f \quad \text{si y sólo si} \quad a \cdot b = b \cdot a. \qquad \circledast$$

Supongamos que $|A_f| > \frac{3}{4}|G|$ y demostremos que G es conmutativo. Fijamos un elemento arbitrario $a \in A_f$ y definimos la aplicación biyectiva $h : G \to G$ como $h(x) = a \cdot x$. Los elementos del subconjunto $G \setminus A_f$ pueden transformarse mediante h de nuevo en elementos de $G \setminus A_f$ o bien en elementos de A_f. La hipótesis $|A_f| > \frac{3}{4}|G|$ implica $|G \setminus A_f| < \frac{1}{4}|G|$, que junto con la biyectividad de h nos garantiza que más de $\frac{1}{2}|G|$ de los elementos en A_f de nuevo se transforman mediante h en elementos de A_f. Combinando esta propiedad con la observación anterior $\circledast$, tenemos que $\{b \in A_f \mid a \cdot b \in A_f\} = \{b \in A_f \mid a \cdot b = b \cdot a\}$, siendo el cardinal de este conjunto mayor que $\frac{1}{2}|G|$. Pero claramente $\{b \in A_f \mid a \cdot b = b \cdot a\}$ está incluido en $Z(a) = \{b \in G : a \cdot b = b \cdot a\}$ luego $Z(a)$ es un subgrupo de G cuyo cardinal es mayor que $\frac{1}{2}|G|$. El Teorema de Lagrange implica que $G = Z(a)$. Ya que a era un elemento arbitrario de A_f, hemos probado que cualquier elemento de G conmuta con cualquier elemento de A_f, es decir, $A_f \subseteq Z(G)$. Usando de nuevo la hipótesis $|A_f| > \frac{3}{4}|G|$ y el Teorema de Lagrange, deducimos que $Z(G) = G$, lo cual significa que G es un grupo conmutativo y hemos probado (i).

Si se diera la igualdad, habría de ocurrir que el cardinal de G sea múltiplo de 4 y que G sea no conmutativo. Consideramos como ejemplo más sencillo G el grupo diédrico $D_4 = \langle r, s \mid r^4 = s^2 = 1, rs = sr^{-1}\rangle$. Para todo $k \in \mathbb{Z}$ se verifica que $r^k s = sr^{-k}$. Obsérvese además que $r^2 = r^{-2}$ y $s = s^{-1}$. Consideramos el automorfismo f definido como $f(x) = s^{-1}xs$ para el que se comprueba fácilmente que $A_f = \{1, r, r^2, r^3, s, sr^2\}$ y por tanto $|A_f| = 6 = \frac{3}{4}|G|$.

Problema nº 17

En un prado hay una valla rodeando un círculo de radio 1. En un punto de la valla y de forma exterior al círculo, está atada una cabra con una cuerda de longitud π. Suponiendo que ni la cabra ni la cuerda puedan traspasar la valla, ¿cuál es el área de la superficie accesible para la cabra?

Solución 1

Claramente la curva que delimita la región en donde se mueve la cabra está formada por una semicircunferencia (donde no se enrolla la cuerda) la circunferencia de la valla y otro trozo de curva. Prescindamos en principio de la valla y de la semicircunferencia y calculemos el área del trozo restante. Para ello tomemos coordenadas imponiendo que la valla esté centrada en $(0,0)$ *y la cabra atada en* $(1,0)$*. El trozo cuya área queremos calcular es dividido en dos partes iguales por del eje* X *y la superior* Ω *está delimitada por las curvas parametrizadas por*

$$\alpha_1 : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \alpha_1(t) = (\tfrac{2}{\pi}t - 1, 0)$$

$$\alpha_2 : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \alpha_2(t) = (1, t)$$

$$\alpha_3 : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \alpha_3(t) = (\cos t - (\pi - t)\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t + (\pi - t)\cos t)$$

que, respectivamente, tienen normales unitarios exteriores al recinto Ω

$$N_1(t) = (0,-1), \quad N_2(t) = (1,0), \quad N_3(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$$

como puede comprobarse fácilmente. Usando ahora el Teorema de la Divergencia para el campo $X(x,y) = (x,0)$ *(que tiene divergencia constante 1) y*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Area}(\Omega) &= \int_\Omega \mathrm{Div}\, X = \int_{\partial\Omega} \langle X, N\rangle = \sum_{i=1}^{3} \int_0^\pi \langle X(\alpha_i(t)), N_i(t)\rangle \cdot |\alpha_i'(t)| dt \\
&= 0 + \int_0^\pi 1 dt + \int_0^\pi -(\cos t - (\pi - t)\operatorname{sen} t)(\pi - t)\operatorname{sen} t dt = \tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi^3}{6}
\end{aligned}$$

Por tanto, el área que puede abarcar la cabra es $2\,\mathrm{Area}(\Omega) - \pi + \frac{\pi^3}{2} = \frac{5}{6}\pi^3$

Solución “no estándar” (de Samuel Johnson, Dpto. Elect. y F. de la Materia)

Enrollando toda la cuerdad alrededor de la valla, la cabra podrá llegar hasta un punto P diametralmente opuesto al punto de sujeción de la cuerda a la valla. Si a partir de allí empieza a caminar mantiendo tensa la cuerda en todo momento, habrá un punto Q de la valla en que la cuerda se despega de ella. Si φ es el ángulo POQ (siendo O el centro de la circunferencia que describe la valla), entonces la longitud de la cuerda despegada será exactamente φ y la superficie barrida por la cuerda en un movimiento diferencial de la cabra vendrá dada por $dA = \frac{1}{2}\varphi^2 d\varphi$. Integrando entre 0 y π, obtenemos que $A = \frac{\pi^3}{6}$, pero como la cabra tiene acceso a dos recintos de esta magnitud más un semicírculo de rado π (cuando la cuerda está totalmente despegada de la valla), la superficie total será $2 \cdot \frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi^3}{2} = \frac{5}{6}\pi^3$.

Problema nº 18

¿Existe una familia no numerable de subconjuntos (distintos) de $\mathbb{N}$ con la propiedad de que los elementos de cualquier subfamilia (con al menos dos elementos) tengan intersección finita? Justificar la respuesta.

Solución

La respuesta es afirmativa y un ejemplo es el siguiente:
Consideremos el intervalo $]0,1[$ y para cada $x \in \mathbb{R}$ consideremos una sucesión de racionales convergiendo a x y definamos A_x el conjunto de los elementos de esa sucesión. Es claro ahora que si $x \neq y$, entonces $A_x \cap A_y$ es finito. Finalmente, si tomamos una biyección $\varphi : \mathbb{Q} \cap \,]0,1[\, \rightarrow \mathbb{N}$, la familia $\{\varphi(A_x) : x \in \,]0,1[\}$ cumple la propiedad del enunciado.

Nótese que es suficiente que la intersección de dos elementos distintos sea finita para que la intersección de más elementos sea finita.

Problema nº 19

Supongamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es una función de clase* $C^\infty(\mathbb{R})$ *tal que para cada* $n \in \mathbb{N}$ *verifica*

$$f(\tfrac{1}{n}) = \tfrac{n^2}{1+n^2}$$

¿Determina esta condición todas las derivadas de f *en cero? En caso afirmativo, calcularlas; en caso negativo, justificarlo.*

Solución

Una función que cumple la hipótesis del enunciado es obviamente $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, *que cumple que* $f^{(2k+1)}(0) = 0$ *y* $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$
Supongamos que $g(x)$ *es otra función que cumple los requisitos del enunciado y definamos* $h(x) = f(x) - g(x)$ *que es de clase* $C^\infty(\mathbb{R})$ *y toma el valor cero en* $x = \frac{1}{n}$ *para* $n \in \mathbb{N}$. *Probemos que todas las derivadas de* h *en* $x = 0$ *se anulan. Razonando por reducción al absurdo, tomemos el menor* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $h^{(k)}(0) \neq 0$ *con lo que, para algún* $\varepsilon > 0$, $h^{(k)}$ *no se anula en* $[0, \varepsilon[$, *pero existe* $n \in \mathbb{N}$ *con* $\frac{1}{n} < \varepsilon$. *El Teorema de Taylor nos asegura que* $h(\frac{1}{n}) = \frac{1}{k!}h^{(k)}(\zeta)$ *para algún* $0 \leq \zeta \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$ *pero el miembro de la izquierda es cero y el de la derecha no, lo cual es una contradicción.*
En consecuencia, g *tiene las mismas derivadas en cero que* f, *lo que da la respuesta afirmativa a la pregunta planteada.*

Problema nº 20

En un tablero $n \times n$ tenemos en cada casilla un cero y tenemos la siguiente jugada: elegir una casilla y sumarle uno a cada elemento de su fila y su columna (así, en cada jugada sumamos $2n-1$ unos).

i) Probar que mediante la reiteración de estas jugadas puede conseguirse que en todas las casillas haya un número impar

ii) Hallar en función de n el número mínimo de jugadas para lograr el objetivo establecido en (i).

Solución (de Samuel Johnson, Dpto. Electromag. y Física de la Materia)

Si n es impar, basta jugar una vez en cada casilla de una misma fila (o columna) de modo que esas casillas llevarán el número n y las demás contendrán unos. Si n es par, jugando una vez en cada casilla del tablero se consigue que todas las casillas contengan el número n^2-1 que es impar.
Veamos que estos valores son los mínimos respectivamente si n es impar o par. En primer lugar, nos damos cuenta de que para que ninguna casilla lleve un cero, es necesario jugar al menos una vez en cada fila, de modo que es imposible conseguir el resultado con menos de n jugadas. Como la estrategia que hemos descrito para n impar utiliza n jugadas, éste es el mínimo. Queda por demostrar, que si n es par no se puede completar con menos de n^2 jugadas.
Supongamos por reducción al absurdo que todos los números fueran impares y no se ha jugado una casilla concreta c_0. Ahora bien, si ésta está encendida, es porque o bien en su fila se ha jugado un múmero impar de veces y un número par en su columna o viceversa; supongamos que es en la fila donde se ha jugado un número impar de veces y en la columna par. Por tanto, en la fila de c_0 habrá otra casilla en la que se ha jugado, llamémosla c_1, luego en la columna de c_1 se tiene que haber jugado un número impar de veces. Por otro lado, en la columna de c_0 habrá una casilla c_2 que no se habrá jugado tampoco (porque tiene un número impar de casillas aparte de c_0). Como la columna de c_1 y la fila de c_2 son impares su intersección c_3 tiene que haber sido jugada, pero ahora debe haber otra c_4 que ha sido jugada en la columna de c_1 porque hay un número impar de jugadas y la casilla intersección de la fila de c_4 con la columna de c_0 no puede haber sido jugada. Reiterando el proceso llegamos a que ninguna casilla de la columna de c_0 ha sido jugada mientras que la columna de c_1 ha sido jugada entera. Esto contradice que la columna de c_1 tiene un número impar de jugadas.