Relación de problemas 5. Curvas y campos vectoriales diferenciables.

Matemáticas II, Grado en Óptica y Optometría.

1. Para las siguientes curvas, determina su dominio, su vector tangente y su regularidad.

   (I) $\alpha(t) = (3\,\cos(2t), 3\,\text{sen}(2t))$,

   (II) $\alpha(t) = (3\cos(t), -2\sin(t)$,

   (III) $\alpha(t) = (e^t, 4e^{-t})$,

   (IV) $\alpha(t) = (t^2 - 2t + 1, t)$,

   (V) $\alpha(t) = (\ln(t), t^2 + 1, e^{2t})$,

   (VI) $\alpha(t) = \left(\frac{1}{t^2-t}, \sqrt{t-1}, 3t-1\right)$.

   Calcula su recta tangente en el punto $\alpha(0)$.

   ¿Cuál es la traza de las curvas (i)–(iv)?

2. Calcula la longitud de las siguientes curvas en el intervalo indicado:

   (I) El segmento de recta $\alpha(t) = (3t, t+2, -2t+1)$, para $t \in [0,1]$.

   (II) La circunferencia $\alpha(t) = (r\cos(t) + a, r\,\text{sen}(t) + b)$, para $t \in [0, 2\pi]$.

   (III) La espiral $\alpha(t) = (e^{-t}\sin(t), e^{-t}\cos(t))$, para $t \in [0, 4\pi]$.

3. Obtén una curva cuya trayectoria sea:

   (I) El segmento de recta $2x + 3y = -3$ desde el punto $(0, -1)$ hasta $(-3, 1)$.

   (II) El arco de la parábola $4y = (x-1)^2 + 2$ desde el punto $(0, 3/4)$ hasta $(1, 1/2)$.

   (III) El arco de la circunferencia de centro $(1,1)$ y radio 2 recorrida en sentido contrario a las agujas del reloj desde el punto $(-1, 1)$ hasta $(1, -1)$.

   (IV) El arco de elipse de centro $(0,0)$, semieje horizontal 5 y vertical 3 recorrida en sentido de las agujas del reloj desde el punto $(0,3)$ hasta $(5,0)$.

4. Calcula la divergencia y el rotacional del campo

$$E(x, y, z) = (2xz - y^3, z^2x - y^3z, 3xy + 3xz + 3yz).$$

   Comprueba que $\text{div}(\text{rot}(E)) = 0$.

5. Calcula el campo gradiente y el laplaciano de las funciones $f(x,y) = e^x\,\text{sen}(y)$ y $g(x,y,z) = x^{yz}$.

   ¿Cuánto vale la divergencia de ∇f y ∇g?

6. Calcula el trabajo realizado por los siguientes campos de fuerzas F:

   (I) $F(x,y) = (-x, -2y)$, sobre la curva $y = x^3$ desde el punto $(0,0)$ hasta $(2,8)$.

(II) $F(x, y) = (2x, -y)$, sobre el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$ recorrido en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

(III) $F(x, y, z) = (x, y, -5z)$, sobre $\alpha(t) = (2\cos(t), 2\mathrm{sen}(t), t)$, para $0 \leq t \leq 2\pi$.

7. Comprueba si los siguientes campos son conservativos y calcula la integral de línea:

   (I) $F(x, y) = (2xy, x^2)$ sobre la curva $\alpha(t) = (t, t^2)$, $0 \leq t \leq 1$.

   (II) $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ sobre la curva $\alpha(t) = (\cos(t), \mathrm{sen}(t), t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

   Calcula su función potencial. si es posible.

8. Se considera el campo $F(x, y) = (2xy, x^2 + y^2)$, el segmento de recta C_1 de $(-1, 0)$ a $(1, 0)$ y el arco de circunferencia $C_2 = \alpha([0, \pi])$ con $\alpha(t) = (\cos(t), \mathrm{sen}(t))$.

   (I) Calcula el trabajo de F a lo largo de C_1 y de C_2.

   (II) ¿Cuánto vale el trabajo de F a lo largo de $C_1 \cup C_2$?

   (III) ¿Es el campo F conservativo?

9. Se consideran los campos vectoriales $F, G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definidos por

$$F(x, y) = (3x^2 + sen(y), xcos(y)), \qquad G(x, y) = F(x, y) + (y, 0).$$

   (I) Estudiar si son conservativos.

   (II) Calcular el trabajo de F y de G a lo largo del menor arco de la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1, desde $(1, 0)$ a $(0, 1)$.