

*Relación de problemas 4*  
*Integración de funciones de dos variables.*  
*Matemáticas II, Grado en Óptica y Optometría.*

1. Encuentra y clasifica los puntos críticos de las siguientes funciones:
  - (I)  $f(x, y) = \operatorname{sen}(x) \cos(y)$
  - (II)  $f(x, y) = (x^2 - x - 2)e^{(y^2+y+3)}$
2. Calcula la integral de la función  $f$  en el rectángulo indicado:
  - (I)  $f(x, y) = 3x^2y^3 + 3xy, \quad -2 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 2.$
  - (II)  $f(x, y) = xe^{x-y}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2.$
  - (III)  $f(x, y) = 1 + \cos(x) \cos(y), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq \pi/2.$
3. Calcula la integral de la función  $f(x, y) = xy$  en el recinto delimitado por las rectas  $x = -2, x = 2$  y las gráficas de las funciones  $g(x) = x - 2, h(x) = -x + 2.$
4. Calcula la integral de la función  $f(x, y) = 2 - x - y$  en la región comprendida entre las gráficas de las funciones  $g(x) = x^2 - 1$  y  $h(x) = 1 - x^2.$
5. Calcula la integral de la función  $f(x, y) = 1 + 2xy$  en la región  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, x^2 - 2x \leq y \leq x\}.$
6. Calcula la integral de la función  $f(x, y) = e^{(x+y)/2}$  en el recinto  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - 2 \leq x \leq y + 2, -1 \leq y \leq 1\}.$
7. Calcula la integral de la función  $f(x, y) = xy$  en la región del disco de centro  $(0, 0)$  y radio 2 contenida en el primer cuadrante.
8. Calcula la integral de la función  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 8xy$  en el anillo de centro  $(0, 0)$  y radios 1 y 2.
9. Calcula la integral de la función  $f(x, y) = y/x$  en la región  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq 2x\}.$
10. Calcula el área de la región plana delimitada por el eje  $x,$  la recta  $y = -3x + 6$  y la parábola  $y = 4x - x^2.$
11. Calcula la integral de la función  $f(x, y) = x$  en la región del plano delimitada por la recta  $y = x$  y la parábola  $y = (x - 2)^2 + 2.$
12. Calcula la integral de la función  $f(x, y) = \frac{1}{x+y}$  en el triángulo de vértices  $(1, 1), (2, 3)$  y  $(3, 2).$