

### Relación de problemas 3.

#### Cálculo diferencial de funciones de varias variables.

Matemáticas II, Grado en Óptica y Optometría.

1. Calcula el dominio de definición y las derivadas parciales de las siguientes funciones:

(I)  $f(x, y) = xy + x^2y^3$

(II)  $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$

(III)  $f(x, y) = \sqrt{xy}$

(IV)  $f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$

(V)  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

(VI)  $f(x, y) = \ln(4x^2 - y^2)$

(VII)  $f(x, y) = \arctg(x + \operatorname{sen} y)$

(VIII)  $f(x, y) = (x^2 + 4y^2) e^{1-x^2-y^2}$ .

2. Se considera la función  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Calcula la ecuación implícita del plano tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(1, 2)$ .

3. Calcula las derivadas parciales de segundo orden de la función  $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$  para cada  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

4. Se considera la función de dos variables definida en  $\mathbb{R}^2$  por:

$$f(x, y) = x^2y + y^2 + 4xy.$$

(a) Calcula la derivada direccional de  $f$  en el punto  $(1, 2)$  según la dirección del vector  $(\sqrt{2}, 0)$ .

(b) Clasifica los puntos críticos de  $f$ .

5. Clasifica los puntos críticos de las siguientes funciones definidas en  $\mathbb{R}^2$ :

(I)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,

(II)  $f(x, y) = x^2 - y^2$ ,

(III)  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$ ,

(IV)  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ ,

(V)  $f(x, y) = x^2y + y^3 - y$ ,

(VI)  $f(x, y) = x - \arctg x + y^2$ ,

(VII)  $f(x, y) = -x^3 + 4xy - 2y^2$ .

6. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la función de dos variables, dada por

$$f(x, y) = (x^2 - x)(y^2 - 4y + 3).$$

(a) Calcular la derivada direccional de  $f$  en el punto  $(-1, 3)$  para el vector unitario que indica el máximo crecimiento de  $f$ .

(b) Encontrar y clasificar los puntos críticos de  $f$ .

7. Se considera la función de tres variables dada por

$$f(x, y, z) = (\sin x) (\cos y) e^{xyz}.$$

Calcula la derivada direccional de  $f(x, y, z)$  en el punto  $(0, 0, 0)$  según la dirección del vector  $(1, -2, 6)$ .

8. Calcula los puntos críticos de las siguientes funciones de tres variables:

(I)  $f(x, y, z) = x^2 - 6y + 2z + y^2 + z^2 + 10,$

(II)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2xz - 4yz + 10z,$

(III)  $f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2,$

(IV)  $f(x, y, z) = \frac{x}{y + z},$

(V)  $f(x, y, z) = x^3 - 2xy^2 + z^2y,$

(VI)  $f(x, y, z) = xy + z^2 + xe^z.$