Matemáticas II. Grado en Óptica y Optometría.
Pruebas 2017.

(a) Halla la ecuación de los puntos del plano tales que su distancia al punto $(3, 0)$ es un medio de su distancia a la recta $x = 9$.

$\downarrow$ Desarrollando

$$(x-3)^2 + (y-0)^2 = \frac{1}{4}(x-9)^2$$

queda

$$3(x-1)^2 + 4y^2 = 48 \Longleftrightarrow \frac{(x-1)^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

(b) Calcula los focos, vértices y directrices de la elipse anterior.

$\downarrow$ Además del foco $F = (3, 0)$ y la recta directriz $r \equiv x = 9$, ahora se tiene el centro

$$C = (1, 0), \qquad a = 4, \qquad b = \sqrt{12} \qquad y \qquad c = d(F, C) = 2.$$

Por tanto,

$$F_\pm = (1 \pm 2, 0), \qquad V = (1 \pm 4, 0),\ (1, 0 \pm \sqrt{12}) \qquad y \qquad r \equiv x = 1 \pm 8.$$

(c) Comprueba la propiedad reflectora en un punto distinto de sus vértices.

$\downarrow$ La recta $x = 3$ pasa por el foco $F_+ = (3, 0)$ y corta a la elipse en $y = \pm 3$.

Tomando $P = (3, 3)$, se tiene $\overrightarrow{F_+P} = (0, 3) = 3(0, 1)$ y $\overrightarrow{PF_-} = (-4, -3)$.

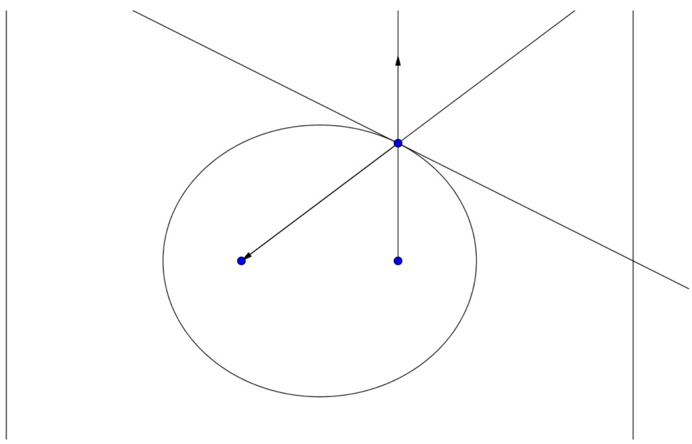
Entonces, $u = (\alpha, \beta)$ es un vector director de su bisectriz si y solo si

$$\frac{\beta}{1} = \frac{-4\alpha - 3\beta}{\sqrt{16+9}} \Longrightarrow \alpha = -2\beta \Longrightarrow u = \beta(-2, 1).$$

Para comprobar que $(-2, 1)$ es también un vector director de la recta tangente en $(3, 3)$, se sustituye $(x, y) = (3, 3) + \lambda(-2, 1)$ en la ecuación de la elipse

$$48 = 3(2-2\lambda)^2 + 4(3+\lambda)^2 = 3(4 + 4\lambda^2 - 8\lambda) + 4(9 + \lambda^2 + 6\lambda) = 48 + 16\lambda^2$$

y se obtiene un único punto de intersección para $\lambda = 0$.



(I) Integra la función $f(x, y) = x$ en el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(0, 12)$ y $(4, 0)$.

$\downarrow$ El triángulo T está delimitado por los ejes y la recta

$$(x, y) = (4, 0) + \lambda(-4, 12) \qquad \Leftrightarrow \qquad y = 12 - 3x.$$

Por tanto

$$\int_T x dA = \int_0^4 \int_0^{12-3x} x\ dy\ dx = \int_0^4 \Big[xy\Big]_{y=0}^{y=12-3x} dx =$$

$$= \underline{\int_0^4 x(12 - 3x)\ dx} = \Big[6x^2 - x^3\Big]_0^4 = \Big[(6 - x)x^2\Big]_0^4 = 32.$$

(II) Calcula el volumen de helado contenido en el cono

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ /\ 0 \leq z \leq 12 - 3\sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

$\downarrow$ De $0 \leq 12 - 3\sqrt{x^2 + y^2}$ se tiene que la base del cono C es el disco

$$D \equiv \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{12}{3} = 4$$

y la función altura es

$$f(x, y) = 12 - 3\sqrt{x^2 + y^2} = 12 - 3r,$$

tomando coordenadas polares $x = rcos(\theta),\ y = rsen(\theta)$.

Entonces, el volumen pedido es

$$V(C) = \int_D f dA = \int_0^{2\pi} \underline{\int_0^4 (12 - 3r)\Big|r\Big|\ dr}\ d\theta = \int_0^{2\pi} 32\ d\theta = 64\pi.$$

(III) Suma el volumen de media bola de radio 4.

$\downarrow$ Como $V(B) = \frac{4}{3}\pi r^3$, hay que sumar

$$\frac{2}{3}\pi 4^3 = \frac{128}{3}\pi.$$