LACROIX

MATEMATICAS

3

ELEMENTOS
DE GEOMETRIA

DISPUESTOS POR S. F. LACROIX,

UNDECIMA EDICION,

TRADUCIDA POR DON JOSÉ REBOLLO Y MORALES, CATEDRATICO DE LOS CABALLEROS PAGES DE S. M.

CUARTA EDICION, CORREGIDA.

TOMO III.

MADRID:

EN LA IMPRENTA NACIONAL.

1846.

ELEMENTOS

DE GEOMETRIA

DISPUESTOS POR S. F. LACROIX,

UNDECIMA EDICION,

TRADUCIDA POR DON JOSÉ REBOLLO Y MORALES, CATEDRATICO
DE LOS CABALLEROS PAGES DE S. M.

CUARTA EDICION, CORREGIDA.

TOMO III.

MADRID:

EN LA IMPRENTA NACIONAL.

1846.

INDICE.

PRIMERA PARTE.

SECCION PRIMERA.

De las propiedades de las líneas rectas y circulares.

*

SECCION II.

PARTE SEGUNDA.

SECCION PRIMERA.

De los planos, y de los cuerpos terminados por superficies planas.

SECCION II.

SUPLEMENTO

AL TRATADO ELEMENTAL DE ARITMETICA,

NECESARIO PARA ESTUDIAR EN SEGUIDA

LOS ELEMENTOS DE GEOMETRIA.

1. Para abreviar el discurso se han sustituido signos particulares á las palabras mas frecuentes; y cuando se trata de un número ó de una cantidad cualquiera, sin considerar su valor particular, y sí solo para indicar sus relaciones con las otras cantidades, ó las operaciones bajo las cuales debe estar sujeta, se la designa por una letra del alfabeto, que entonces toma el nombre abreviado de esta cantidad.

$+$ *Significa* mas ó sumado con.

La expresion $A+B$ indica la suma que resulta del valor que representa la letra A sumado con el que representa B, ó A *mas* B.

$-$ *Significa* menos.

$A-B$ indica la diferencia cuando se quita del valor que representa A el que representa B, ó A *menos* B.

$\times$ *Significa* multiplicado por.

$A\times B$ indica el producto del valor que representa A multiplicado por el que representa B, ó A *multiplicado por* B.

$\frac{A}{B}$ indica el cuociente del valor que representa A dividido por el que representa B, ó A *dividido por* B.

$A=B$ *significa* que el valor que representa A es igual al que representa B, ó A *igual á* B.

$A>B$ *significa* que el valor que representa A es mayor que el que representa B, ó A *mayor* que B.

$A<B$ *significa* A *menor* que B.

$2A$, $3A$ &c. indican el *duplo*, el *triplo* &c. del valor que representa A.

2. Cuando se multiplica un número por el mismo, se forma su *segunda potencia* ó su *cuadrado*: 5×5, ó 25, es la segunda potencia de 5, ó el cuadrado de 5.

La segunda potencia es el producto de dos factores iguales; cada uno de estos factores es la raiz cuadrada del producto: 5 es la raiz cuadrada de 25.

Si se multiplica la segunda potencia por su raiz, se tendrá la *tercera potencia* ó el *cubo*: 5×25, ó 125, es la tercera potencia de 5.

La tercera potencia es un producto formado por la multiplicacion de tres factores iguales: cada uno de estos factores es la *raiz cúbica* de este producto: 125 es el producto de 5 multiplicado dos veces por sí mismo, ó $5\times5\times5$; y 5 es la raiz cúbica de 125.

En general A^2 es la abreviacion de $A\times A$, é indica la segunda potencia, ó el cuadrado de A.

$\sqrt{A}$ indida la raiz cuadrada de A ó el número que multiplicado por sí mismo, producirá el valor que representa A.

A^3 es la abreviacion de $A\times A\times A$, é indica la tercera potencia ó el cubo de A.

$\sqrt[3]{A}$ indica la raiz cúbica de A ó el número que, multiplicado dos veces por sí mismo, producirá el valor que representa A.

Todos los números no son cuadrados ó cubos perfec-

tos; es decir, no tienen raices cuadradas ó cúbicas exactamente; 19 por ejemplo, está entre 16, que es el cuadrado de 4 y 25, que es el cuadrado de 5, es un número cuya raiz está comprendida entre 4 y 5, pero que no se podrá hallar ni aun por medio de las fracciones: es por lo mismo incomensurable.

Igualmente 89 se halla entre 64, que es el cubo de 4, y 125, que es el de 5, pero que no se podrá jamas señalar exactamente. Se hallarán en los Elementos de Algebra los métodos para aproximar cuanto se quiera las raices cuadradas y las raices cúbicas de los números que no son cuadrados ó cubos perfectos.

Los tres artículos siguientes se deben estudiar antes del número 58.

3. Cuando dos proporciones tienen una razon comun, es patente que con las otras dos razones se podrá formar proporcion, porque cada una de estas es igual á la razon comun.

Si tenemos $A : B :: C : D$
$E : F :: C : D$

resultará necesariamente $A : B :: E : F$.

Cuando dos proporciones tienen los mismos antecedentes, los consecuentes formarán proporcion; pues si tenemos $A : B :: C : D$
$A : E :: C : F$

mudando de lugar los medios, resultarán las proporciones
$A : C :: B : D$
$A : C :: E : F$

de donde se deduce $B : D :: E : F$

ó lo que es lo mismo $B : E :: D : F$.

4. Se podrán hacer con las proporciones otras alteraciones que la inversion de los términos, las cuales no influyen en la igualdad de los productos de los extremos con el de los medios.

1.° Si al consecuente de una razon se le añade su antecedente, y esta suma se compara con el antecedente, este estará contenido en dicha suma una vez mas que lo que está en el primer consecuente; la nueva razon será igual á la razon primitiva aumentada de la unidad. Si se hace la misma operacion sobre las dos razones de una proporcion, resultarán evidentemente dos nuevas razones iguales entre sí, y por consecuencia una nueva proporcion.

Sea por ejemplo la proporcion

$$4 : 6 :: 12 : 18;$$

se tendrá $\quad 6+4 : 4 :: 18+12 : 12,$

ó $\quad 10 : 4 :: 30 : 12.$

2.° Si del consecuente de una razon se resta el antecedente, y esta diferencia se compara con el antecedente, este estará contenido en dicha diferencia una vez menos que en el primer consecuente: la nueva razon será igual á la razon primitiva disminuida de la unidad. Si se hace la misma operacion con las dos razones de la proporcion, resultarán dos nuevas razones iguales entre sí, y por consiguiente una nueva proporcion.

De la proporcion $4 : 6 :: 12 : 18$

se deducirá $\quad 6-4 : 4 :: 18-12 : 12$

ó $\quad 2 : 4 :: 6 : 12.$

En una proporcion cualquiera entre cantidades señaladas por letras $A : B :: C : D$

se tendrá por la operacion dicha arriba

$$B+A : A :: D+C : C,$$
$$B-A : A :: D-C : C.$$

Si se cambian de lugar los medios en estas últimas,

resultará $\quad B+A : D+C :: A : C;$

$$B-A : D-C :: A : C;$$

y por la misma operacion, la proporcion

$$A : B :: C : D$$

se convertirá en $\quad A : C :: B : D;$

y porque las razones $A : C$, $B : D$, son iguales, se concluirá $\quad B+A : D+C :: A : C$ ó $:: B : D,$

$$B-A : D-C :: A : C \text{ ó } :: B : D,$$

resultado que se expresa del modo siguiente:

En toda proporcion la suma ó la diferencia de los dos primeros términos es á la suma ó la diferencia de los dos últimos, como el primero es al tercero, ó como el segundo es al cuarto.

Las dos razones $A : C$ ó $B : D$, son comunes á las dos últimas proporciones, de donde resulta que las otras razones de las mismas proporciones son iguales, y por consecuencia

$$B+A : D+C :: B-A : D-C,$$

ó, mudando de lugar los medios,

$$B+A : B-A :: D+C : D-C;$$

quiere decir que *la suma de los dos primeros términos de una proporcion es á su diferencia como la suma de los dos últimos es igualmente á su diferencia.*

Por ejemplo:

$$6+4 : 6-4 :: 18+12 : 18-12,$$

ó $\quad 10 : 2 :: 30 : 6$

Cuando la proporcion

$$A : B :: C : D$$

se cambia en $\quad A : C :: B : D,$

A y B son los antecedentes, C y D los consecuentes; y las proporciones

$$B+A : D+C :: A : C \text{ ó } :: B : D,$$
$$B-A : D-C :: A : C \text{ ó } :: B : D,$$

que dicen lo siguiente:

La suma ó la diferencia de los antecedentes de una proporcion es á la suma ó la diferencia de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.

De donde se deduce *que la suma de los antecedentes es á su diferencia como la suma de los consecuentes es á su diferencia.*

Si tenemos una continuacion de razones iguales

$$A : B :: C : D :: E : F,$$

considerando en primer lugar que las dos primeras forman la proporcion

$$A : B :: C : D,$$

se deduce por lo que precede

$$A+C : B+D :: A : B;$$

y porque la tercera razon $E : F$ es igual á la primera $A : B$, se tendrá

$$A+C : B+D :: E : F.$$

Si se toma la suma de los antecedentes y la de los consecuentes en esta última proporcion, resultará

$$A+C+E : B+D+F :: E : F \text{ ó } :: A : B.$$

Siguiendo el mismo método, sea el número que quiera el de estas razones iguales, se tendrá finalmente: *la suma de un número cualquiera de antecedentes es á la suma de sus consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.*

5. Cuando hay dos proporciones cualesquiera

$$A : B :: C : D$$
$$E : F :: G : H,$$

y se multiplican *ordenadamente*, esto es, término por término, los productos formarán proporcion, y será

$$A\times E : B\times F :: C\times G : D\times H.$$

Esto es evidente, porque las nuevas razones $\frac{B\times F}{A\times E}$, $\frac{D\times H}{C\times G}$, serán respectivamente los productos de las razones primitivas

$$\frac{B}{A} \text{ y } \frac{F}{E}, \quad \frac{D}{C} \text{ y } \frac{H}{G},$$

que son iguales.

Si se multiplica la proporcion

$$A : B :: C : D$$

por

$$A : B :: C : D$$

se tendrá (2)

$$A^2 : B^2 :: C^2 : D^2,$$

de donde se sigue que *los cuadrados de las cuatro cantidades forman una nueva proporcion.*

Multiplicando la proporcion

$$A^2 : B^2 :: C^2 : D^2,$$

por

$$A : B :: C : D,$$

se tendrá

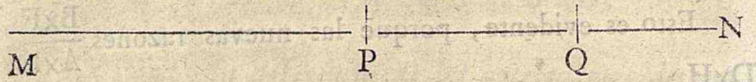
$$A^3 : B^3 :: C^3 : D^3,$$

esto es, que *los cubos de cuatro cantidades en proporcion, forman otra nueva proporcion.*

Los dos artículos siguientes se refieren al número 76.

6. Muchas veces se consideran las cantidades descompuestas en varias partes, y se necesita sumarlas, restarlas ó multiplicarlas en este estado, esto es, determinar de qué modo los resultados de estas operaciones se forman de las partes de las cantidades propuestas. Vamos á dar una regla sobre esto:

1.° Es evidente que si se quiere sumar la cantidad $B-C$ con la cantidad A, es preciso escribir $A+B-C$, respecto á que no es ni B ni C lo que se propone sumar con A, sino solamente el exceso de B á C.

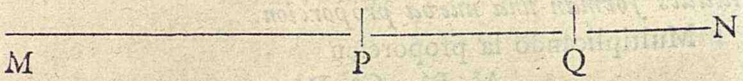


Por otra parte si se toman las rectas MP, PN y QN para representar las cantidades A, B y C, se verá que

$$PQ=PN-QN,$$
$$MP+PQ=MP+PN-QN.$$

2.° Si de la cantidad A se quiere quitar la cantidad $B-C$, se escribirá $A+C-B$, ó lo que es lo mismo, $A-B+C$.

En efecto, la diferencia de dos cantidades no se altera cuando se añade á cada una la misma cantidad; luego si se añade C á $B-C$, resultará B; haciendo la misma adicion á la cantidad A se tendrá $A+C$, y la sustraccion de B dará entonces $A+C-B$.



Esta línea confirma este resultado, porque si se toman las rectas MN, PN, PQ para representar las cantidades A, B, C, será

$$QN=PN-PQ,$$
$$MN-QN=MQ=MP+PQ,$$

y pues que $MP=MN-PN$, saldrá

$$MP+PQ=MN-PN+PQ;$$

lo cual corresponde á $A-B+C$,

3.° El producto de la cantidad A por la cantidad $B+C$, está representado por $A\times B+A\times C$; porque debe de contener tantas veces el número A como unidades hay en la suma de los números B y C; por consiguiente debe de componerse de A tomado tantas veces como unidades hay en B, mas de A tomado tantas veces co-

mo unidades hay en C, lo que se escribe así $A\times B+A\times C$.

4.° El producto de A por $B-C$ se representa por $A\times B-A\times C$; porque si se expresa $B-C$ por D, es claro que se tendrá $B=D+C$, y por consiguiente $A\times B=A\times D+A\times C$: de donde se deduce que $A\times D=A\times B-A\times C$, lo que forma la proposicion antecedente, pues que $D=B-C$.

7. De esto se sigue que *el cuadrado de un número compuesto de dos partes, contiene el cuadrado de la primera, dos veces el producto de la primera por la segunda, y el cuadrado de la segunda.* El número 13, por ejemplo, es lo mismo que $9+4$, su cuadrado 169 se compone

del cuadrado de 9, ó	81
de 2 veces 9×4, ó	72
del cuadrado de 4, ó	16
Total....	169

Para probar esto en general, basta observar que el producto de A por $B+C$ es $A\times B+A\times C$, si se hace $A=B+C$; los productos parciales $A\times B$ y $A\times C$ darán $B\times B+B\times C$, y $B\times C+C\times C$; reuniéndolos, saldrá lo siguiente:

$$B\times B+B\times C+B\times C+C\times C,$$

lo que puede escribirse del modo siguiente:

$$B^2+2B\times C+C^2,$$

que es el cuadrado de $B+C$, conforme se dijo arriba.

Por el mismo medio se demuestra que *el cuadrado de la diferencia de dos cantidades se compone del cuadrado de la primera, menos dos veces el producto de la primera por la segunda, mas el cuadrado de la segunda.*

El número 9, que es igual á $13-4$, por ejemplo, su cuadrado 81 está formado de $169-2$ veces $4\times13+16$, lo que fácilmente se puede comprobar.

La demostracion general de la proposicion antecedente se da haciendo $A=B-C$, en el producto de A por la diferencia $B-C$, porque este producto siendo representado por $A\times B-A\times C$, si se sustituye $B-C$ en lugar de A, en los productos $A\times B$ y $A\times C$, resultarán respectivamente

$$B\times B-B\times C \text{ y } B\times C-C\times C;$$

y para restar el segundo del primero será preciso, segun el artículo 6, escribir

$$B\times B-B\times C-B\times C+C\times C,$$

ó lo que es lo mismo

$$B^2-2B\times C+C^2,$$

que dan el cuadrado de $B-C$, conforme á lo arriba dicho.

Las nociones precedentes son suficientes para entender las proposiciones necesarias de la Geometría, porque se puede, en el número 141, limitarse á la solucion gráfica, y pasar los números 150, 156, 157, que no sirven sino para calcular la relacion de la circunferencia al diámetro que puede obtenerse fácilmente en la Trigonometría por los senos y las tangentes de los arcos pequeños.

OBSERVACION.

En la forma de razonamiento adoptado para la exposicion de los Elementos de Geometría, es necesario entender que

Un *axioma* es una verdad evidente por sí misma.

Un *teorema* es una proposicion que necesita demostracion.

Un *corolario* es una consecuencia de una proposicion que se ha demostrado.

Un *problema* es una cuestion que se ha de resolver.

Una proposicion, que solo sirve de preparacion para otra, se llama *lema*.

A las notas se les da el nombre de *escolios*.

Es de observar que un teorema contiene dos partes, á saber: la hipótesis, y la conclusion, que es su consecuencia. No siempre es posible invertir el enunciado; esto es, que tomando la conclusion por hipótesis, no se tiene siempre por conclusion necesaria la hipótesis primitiva; y esto consiste en que la conclusion primitiva conviene algunas veces á un número mayor de casos que la hipótesis; de donde viene la necesidad de demostrar las proposiciones *inversas*, que tambien se llaman *recíprocas* cuando se quiere hacer uso de ellas.

ELEMENTOS

DE GEOMETRIA.

NOCIONES GENERALES RELATIVAS A LA EXTENSION.

1. El espacio que cada cuerpo ocupa tiene necesariamente tres dimensiones, que designamos por los nombres de *longitud, latitud* ó *anchura*; y profundidad ó *altura* ó *grueso*.

No es posible despojar á cuerpo alguno de ninguna de las tres expresadas dimensiones sin que al mismo tiempo se le prive enteramente de la existencia; y no podríamos distinguirlos del espacio indefinido si no se halláran terminados, ó si no tuviesen límites, sin los cuales nos sería absolutamente imposible formarnos idea alguna de ellos. Estos límites, que percibimos por medio de nuestros sentidos, y que consideramos como destituidos de todo grueso, son las que llamamos *superficies*.

Cuando un cuerpo nos presenta muchas caras ó fachadas; cada una en el lugar en que se une con alguna otra, tiene sus límites que no tienen grueso ni anchura, á los cuales llamamos *líneas*.

Finalmente, estas últimas tienen en los lugares en que se encuentran unas con otras sus límites ó extremidades, que ni tienen grueso, ni latitud, ni longitud, y se llaman *puntos*.

La existencia de estas diversas especies de límites es

indudable, pues que de ellos nos valemos para juzgar de la figura del cuerpo. Nosotros consideramos á cada límite con separacion, y prescindiendo de una ó de dos de las dimensiones del cuerpo, las cuales por otra parte no pueden ser aniquiladas; porque no pudiendo hacer otra cosa que modificar las formas de la materia, se efectúan siempre nuestras operaciones sobre cuerpos, y jamás sobre superficies, ni sobre líneas, ni sobre puntos; pero su resultado discrepa tanto menos del del razonamiento, cuanto mas cuidado ponemos en disminuir las dimensiones extrañas á las del límite que hayamos considerado en el cuerpo. Por medio del razonamiento alcanzamos este límite; con el auxilio del cálculo nos podemos aproximar á él indefinidamente, mientras que la exactitud de las operaciones necesarias encuentra su término en la inevitable imperfeccion de los instrumentos.

2. Entre las líneas, la primera que se nos ofrece es la línea recta; de la cual damos una idea bastante clara diciendo que es el camino mas corto por donde puede pasarse de un punto á otro.

En esta idea se halla asimismo comprendida la posibilidad de prolongar la línea recta indefinidamente mas allá de cada uno de los extremos que anteriormente se la hayan asignado, asi como la imposibilidad de efectuarlo de varios modos.

Bien claro se ve que no hay mas que una sola especie de línea recta, y que necesariamente debe ser *curva* toda la que no sea recta, ó no esté compuesta de dos ó mas líneas rectas. Ya se deja ver que debe haber un número infinito de diferentes especies de líneas curvas.

Entre las varias superficies con que se nos presentan terminados los cuerpos, notamos desde luego el plano ó la superficie plana, que se diferencia de otra cualquiera en que se la puede exactamente aplicar ó trazar en ella una línea recta en todos los sentidos. No hay ni puede haber mas de una sola especie de planos, ó de superficies planas.

Toda superficie que no sea plana, ó no esté compuesta de muchas planas, ha de ser necesariamente curva; y el número de especies de superficies curvas es infinito.

Expondremos sucesivamente las propiedades mas notables de las líneas, de las superficies y de los cuerpos, ciñéndonos á aquellas cuyo conocimiento sea indispensable para cultivar con fruto los diversos ramos de las matemáticas puras y mistas.

PRIMERA PARTE.

SECCION PRIMERA.

De las propiedades de las líneas rectas y circulares.

N. B. En toda esta primera parte las líneas representadas en las figuras se hallan situadas en un mismo plano.

Definiciones y nociones preliminares.

3. En los elementos de Geometría no consideramos otras especies de líneas sino solas dos, á saber: la *línea recta*, que es el camino mas corto que puede imaginarse para pasar de un punto á otro; y la *circunferencia del círculo* ó la *línea circular*, cuyos puntos estan todos situados en un mismo plano y á igual distancia de otro punto del mismo plano, el cual se llama su *centro*.

AB, fig. 1, es una recta. Bien claro se ve (2) que nada se opone á que se la prolongue indefinidamente y cuanto se quiera hácia la izquierda del punto A, ó hácia la derecha del punto B, de modo que resulte terminada de nuevo por otros dos cualesquiera de sus puntos C y D, del mismo modo que antes lo estaba por los puntos A y B; es decir, que si nos propusiéramos juntar por medio de una recta los dos puntos C y D, el trazo pasaria necesariamente sobre la línea AB. Fig. 1.

ABCD, fig. 2, es una circunferencia de círculo cuyo centro es el punto O. Las rectas AO, BO, CO, que miden la distancia que hay desde cualesquiera de los puntos A, B, C de la circunferencia al centro O, y son todas entre sí iguales, se llaman *radios* del círculo; á una Fig. 2.

parte cualquiera de su circunferencia, se la da el nombre de *arco*; y bajo la denominacion de *círculo* entendemos la porcion del plano que por todas partes se halla terminada por la línea circular.

Con mas que suficiente claridad se echa de ver que para determinar todos los puntos que en un mismo plano se hallen igualmente distantes del punto O, y su distancia sea la conocida *ao*, basta describir, haciendo centro en O, y con un radio igual á *ao*, una circunferencia de círculo, en la cual deben forzosamente hallarse todos los puntos del plano cuya distancia al O sea la dada *ao*.

En esta suposicion pasemos á tratar primeramente de las líneas rectas.

4. Medir la distancia de dos puntos ó la longitud de una recta es determinar cuántas veces contiene esta recta á otra que hayamos adoptado por unidad: lo cual se consigue aplicando sucesivamente esta segunda á la primera cuantas veces sea esto posible; y en caso que por último resulte algun resto, es necesario que procuremos apreciarlo como fraccion de la unidad.

En general, medir una línea con otra es buscar la relacion que entre sí tengan estas dos líneas, ó indagar si por ventura existe alguna línea mas pequeña, que estando contenida un número exacto de veces en la una y en la otra, sea la medida comun de ambas. Tiene, pues, semejanza esta investigacion respectiva á las líneas con la del divisor comun de los números.

PROBLEMA.

5. *Dadas que sean dos rectas, hallar su medida comun, ó por lo menos determinar con aproximacion la relacion que entre sí tengan.*

Solucion. Sean AB y CD, fig. 3, las dos rectas dadas. Aplíquese sucesivamente la menor á la mayor cuantas veces pueda estar contenida la una en la otra; y asi veremos que la línea AB, ademas de contener tres veces á la DC desde A hasta E, nos presenta despues de esto el exceso EB; de modo que á consecuencia tendremos: Fig. 3.

$$AB=3CD+EB.$$

Inmediatamente aplicaremos á la línea CD el exceso BE, y veremos que despues de estar contenido en ella cuatro veces, resulta un segundo exceso FD; lo cual nos dará

$$CD=4EB+FD.$$

Aplicaremos del mismo modo este segundo exceso FD al primero EB; y hallaremos que este le lleva al otro el exceso GB, de manera que

$$EB=FD+GB.$$

Aplicado finalmente el exceso GB al FD, y hallándole contenido en él tres veces, tendremos por último resultado

$$FD=3GB.$$

Reascendiendo ahora del valor de FD al de EB; desde este al de CD, y desde este último al de AB, se nos presentarán sucesivamente:

$$FD=3GB;\ EB=4GB;\ CD=19GB;\ AB=61GB:$$

en donde se ve que el último exceso GB es la medida comun de las rectas AB y CD; y puesto que se halla contenido 61 veces en la primera y 19 veces en la segunda, es consiguiente que estas dos rectas tengan entre sí la misma relacion que los dos números 61 y 19.

Ya no puede ser dificil hacer uso de la misma práctica en cualquier otro ejemplo. La comparacion de los excesos sucesivos debe continuarse hasta que se nos presente uno que esté contenido un número exacto de veces en el inmediato anterior, ó que sea tal, que el exceso que en la comparacion pueda notarse, sea imperceptible por su pequeñez. Asi lograremos en todos casos por lo menos un resultado aproximado.

6. Es evidente que una recta no puede encontrarse con otra mas que en un punto (3).

Fig. 4. 7. El espacio indefinido, fig. 4, comprendido entre dos rectas que se cortan en un punto A, y se pueden suponer prolongadas cuanto se quiera, se llama *ángulo*. Aunque este espacio no esté cerrado por el lado BC, se le distingue, sin embargo, bien del resto del plano por medio de los límites AB y AC. Dos ángulos se pueden diferenciar uno de otro, considerándolos bajo este respecto: la recta AD, por ejemplo, hace evidentemente con AB un ángulo mayor que el que forman entre sí las rectas AB y AC.

Se designa por lo comun cada uno de los ángulos por medio de tres letras, siendo la del medio la que ocupa el punto en que las dos rectas se cortan; punto conocido bajo el nombre de *vértice* del ángulo. El formado por las rectas AB y AC se denomina el ángulo BAC. Cuando en un punto, como *a* por ejemplo, no hay mas de un solo ángulo, se le puede indicar con sola la letra del vértice llamándole sencillamente el ángulo *a*.

8. Dos ángulos son enteramente iguales cuando colocado el uno sobre el otro se confunden y se cubren exactamente. El ángulo *bac* será igual al BAC, si estando colocada la recta *ab* sobre la AB de modo que el punto *a* caiga sobre el A, caiga al mismo tiempo la otra recta *ac* sobre la AC. Para que se verifique la igualdad de dos ángulos, no es necesario que sean iguales entre sí

las longitudes de las líneas que los forman, como por ejemplo las AB y *ab*, AC y *ac*; porque bien se deja conocer que si las rectas AB y AC se confunden con las *ab* y *ac* en las porciones Ab' y Ac', lo mismo habrá de suceder en todo cuanto se nos antoje prolongarlas mas adelante.

9. La posicion respectiva de dos rectas depende del ángulo que entre sí formen. Entre todas las situaciones que puede tener una recta con respecto á otra con la cual concurra, la mas notable es la *perpendicular*: por cuyo medio se designa el caso en que una recta AC, fig. 5, Fig. 5.
que cae sobre otra AB, hace con ella, prolongada, si es necesario, por ambos lados del punto del concurso A, los dos ángulos BAC y DAC iguales entre sí; es decir, que si despues de tirada la recta AC, se dobla por ella la figura, la parte AB de la recta BD debe caer exactamente sobre la restante parte AD.

Bien claro se ve que en tal caso la recta AC no se inclina ni hácia B ni hácia D.

A los dos ángulos BAC y CAD se les da el nombre de *ángulos rectos*.

Todo ángulo menor que un recto, se llama *ángulo agudo*. El ángulo BAE es un ángulo agudo.

Todo ángulo mayor que un recto se llama *ángulo obtuso*. El ángulo BAF es un ángulo obtuso.

Es bien visible que un ángulo recto, colocado sobre otro de la misma especie, debe cubrirlo y confundirse exactamente con él; y que por tanto el ángulo recto $A'B'D'$, fig. 6, por ejemplo, colocado que sea sobre el Fig. 6.
ángulo recto ABD, debe cubrirlo con toda exactitud. Con efecto, si despues de haber tomado $AB=A'B'$, colocamos la figura $A'C'D'$ sobre la ACD, haciendo coin-

cidir respectivamente los dos puntos A′ y B′ con los otros dos A y B, las rectas A′C′ y AC se confundirán perfectamente, puesto que no es posible hacer pasar mas de una entre dos puntos determinados; y si en esta disposicion no cayese la recta B′D′ sobre la BD, sino que tomaba otra cualquiera posicion B*d*, los ángulos A′B′D′ y D′B′C′, que en la otra figura estarian representados por AB*d* y *d*BC, no serian iguales entre sí, y por consiguiente no podrian ser rectos.

Fig. 5. 10. La sola inspeccion de la figura 5 basta para hacernos ver que la suma de todos los ángulos BAE, EAC, CAF, FAD, que pueden formarse á un mismo lado de una recta con un mismo punto de ella por vértice comun de todos, equivale en todos casos á dos ángulos rectos, cualquiera que sea el número de los ángulos de que se trata.

Fig. 7. 11. Toda recta AE, fig. 7, que cae sobre otra prolongada hácia los dos lados del punto de encuentro A, forma con ella en aquel punto dos ángulos EAB y EAD, cuya suma equivale á la de dos rectos.

Dos rectas BD y EF, que se cortan y se hallan prolongadas hácia los dos lados del punto A del encuentro, forman en este punto cuatro ángulos EAB, EAD, DAF y FAB, cada uno de los cuales se llama *opuesto por el vértice* á otro de los restantes. El ángulo EAB, por ejemplo, es opuesto por el vértice al DAF; y el EAD al FAB.

TEOREMA.

12. *Los ángulos opuestos por el vértice, formados por dos rectas que se cortan entre sí, son entre sí iguales.*

Demostracion. Con efecto, segun del párrafo ante-

rior resulta, tanto la suma de los dos ángulos BAE y DAE, colocados á un mismo lado de la recta BD, equivale á dos rectos, como lo equivale la de los ángulos DAE y DAF colocados al mismo lado de la recta EF; de consiguiente los dos ángulos BAE y DAE reunidos equivalen á los dos DAE y DAF. Quitando, pues, de las dos sumas ó reuniones iguales el ángulo DAE que las es comun, resulta que el ángulo BAE restante de la una sea igual al DAF, que es su opuesto por el vértice y resta de la otra.

Del mismo modo se puede demostrar que el ángulo DAE es igual á su opuesto BAF.

13. *Corolario.* De esta proposicion se sigue que si continúa por debajo la recta BD, fig. 8, la prolon- Fig. 8.
gacion de la AC, que hace con ella los dos ángulos rectos CAB y CAD, su prolongacion AE, hará igualmente al otro lado de la recta DB otros dos ángulos rectos DAE y BAE; pues siendo estos los respectivamente opuestos por el vértice á los dos primeros, habrán de ser forzosamente iguales á estos, y por consiguiente rectos como ellos (9).

De esto resulta tambien que siendo la recta CE perpendicular á DB, debe asimismo serlo DB á CE.

Si ahora tiramos por el punto A cuantas rectas queramos FG, HI &c., se ve bien claro que la suma de todos los ángulos BAF, FAC, CAH, HAD; DAG, GAE, EAI, IAB, que aquellas rectas formen entre sí, ni pasará jamas ni bajará de la de cuatro ángulos rectos.

14. Ningun espacio puede encerrarse por un número de rectas menor que el de tres. El espacio asi cerrado se llama *triángulo*. Las tres rectas que lo terminan se cortan dos á dos, y forman tres ángulos. ABC, fig. 9, Fig. 9.

es un triángulo, cuyos tres lados son AB, AC y BC; y los tres ángulos son A, B y C.

Como las primeras propiedades del triángulo sirvan de base á todo lo que es relativo á la situacion respectiva de las rectas, tenemos por conveniente darlas á conocer antes de pasar mas adelante.

15. *Observaciones.* Siendo la línea recta AB el camino mas corto que puede seguirse para pasar del punto A al punto B, es consiguiente que la suma de los otros dos lados AC y BC del triángulo ABC sea mayor que el tercero AB; y del mismo modo la suma de dos cualesquiera lados de un triángulo es mayor que el lado restante.

Mas si en el espacio interior de un triángulo se toma un punto cualquiera E, y por él se tiran las rectas AE y EB, la suma de estas dos rectas será menor que la de las otras dos AC y CB que las envuelven. Con efecto, si por el punto E se tira una recta GF que corte á un mismo tiempo las dos AC y BC, tendremos que

$$GF<GC+CF;$$

y que de consiguiente el contorno AGFB es menor que la suma de las dos rectas AC y CB. Por la misma razon

$$AE<AG+GE; \; EB<EF+FB;$$

y á consecuencia

$$AE+EB<AG+GE+EF+FB;$$

ó lo que equivale á lo mismo, la suma de las dos rectas AE y EB es menor que el contorno AGFB; y por tanto con mayor razon es menor que la suma de las dos rectas AC y BC.

En todo triángulo se distinguen seis cosas, á saber, tres ángulos, y tres lados. Entre estas seis cosas existen ciertas relaciones necesarias que se hallan contenidas en las proposiciones siguientes:

TEOREMA.

16. *Siempre que dos lados de un triángulo sean respectivamente iguales á dos de otro, si al mismo tiempo el ángulo formado por los dos lados del primero fuere igual al formado por los del segundo, los dos triánlos habrán de ser totalmente iguales.*

Si el ángulo C del triángulo ABC, fig. 10, fuere igual al C′ del triángulo A′B′C′, y los dos lados AC y BC que comprenden al primero de estos ángulos fueren respectivamente iguales á los otros dos A′C′ y B′C′ que comprenden al segundo, el triángulo ABC deberá ser igual al A′B′C′ en todas sus demas partes restantes; es decir, que el ángulo A habrá de ser igual al A′; el ángulo B al B′; y el lado AB al A′B′. Fig. 10.

Demostracion. Colóquese el triángulo A′B′C′ sobre el ABC, de modo que el lado A′C′ caiga sobre el AC, y puesto que sea el extremo C′ sobre el C, el otro extremo A′ deberá hallarse sobre el restante extremo A, pues que por su posicion A′C′=AC. Siendo ademas, iguales entre sí por suposicion los ángulos A′C′B′ y ACB se confundirán exactamente, y de consiguiente el lado C′B′ caerá sobre el CB, en términos que el extremo B′ caiga sobre el B, pues que por suposicion la recta C′B′= CB. Es pues consiguiente que teniendo la recta A′B′ sus dos extremos colocados sobre los de la AB, se confunda con ella, y que cubriendo el triángulo A′C′B′ exactamente al otro triángulo ACB, sean los dos perfectamente iguales entre sí.

Es muy importante observar que en dos triángulos, como A′B′C′ y ACB, enteramente iguales entre sí, son siempre iguales los ángulos opuestos á los lados que sean entre sí iguales. Asi el lado A'B' del primer triángulo, que es igual al AB del segundo, se opone al ángulo C' de aquel, el cual es igual al C de este: y lo mismo se debe entender de los restantes y en todas las proporciones que siguen.

17. *Corolario.* Podemos mirar como enteramente determinado á un triángulo siempre que conozcamos la magnitud de uno de sus ángulos y la de los dos lados que lo comprenden; porque dos triángulos que sean iguales en estas tres partes, deben serlo asimismo en todas las demas. Nos podemos igualmente convencer de esta verdad, haciéndonos cargo de que cuando se nos haya dado la magnitud del ángulo C, conocemos al mismo tiempo la situacion respectiva de los dos lados AC y CB que lo forman; y que si por otra parte nos es conocida la longitud de estos, y podemos fijar ciertamente como sus extremos á los puntos A y B, es bien claro que ya no nos es posible juntar estos puntos sino por medio de la única recta AB, para obtener de este modo al único triángulo ABC.

TEOREMA.

18. *Siempre que un lado de un triángulo sea igual á otro lado de otro triángulo, y que los dos ángulos adyacentes al lado del primero sean respectivamente iguales á los dos ángulos adyacentes al del segundo, serán los dos triángulos totalmente iguales.*

Si el lado AB del triángulo ABC fuere igual al lado A'B' del triángulo A'B'C', y los dos ángulos CAB y CBA del primer triángulo fueren respectivamente iguales á los ángulos C'A'B' y C'B'A' del segundo, estos dos triángulos deberán ser totalmente iguales entre sí.

Demostracion. Para convencernos de la verdad de esta proposicion, debemos imaginarnos colocado sobre el triángulo ABC al A'B'C', de modo que el lado A'B' caiga sobre su igual AB, y en términos que el uno de sus extremos A' caiga sobre el punto A, y el otro B' sobre el punto B. Y pues que son iguales por suposicion el ángulo CAB y el C'A'B', la direccion del lado A'C' habrá de coincidir con la del lado AC; é igualmente, siendo por la misma razon iguales los ángulos CBA y C'B'A', la direccion del lado C'B' coincidirá con la del lado CB, y el punto C', comun á los dos lados C'A' y C'B', caerá exactamente sobre el punto C, comun á los lados CA y CB; y los dos triángulos se cubrirán perfectamente y se confundirán uno con otro, y en una palabra, serán iguales entre sí en todas sus partes.

TEOREMA.

19. *Si los lados A'B' y B'C' del triángulo A'B'C', fig. 11, fueren respectivamente iguales á los otros dos* Fig. 11.
AB y BC del triángulo ABC, siendo al mismo tiempo el ángulo B' comprendido por los dos primeros menor que el ángulo B comprendido por los dos últimos, será menor que el lado AC opuesto al ángulo B en el triángulo ABC, el lado A'C' opuesto al ángulo B' en el triángulo A'C'B'.

Demostracion. Con efecto, cuando hayamos colocado el triángulo A'B'C' sobre el triángulo ABC ajustando el lado A'B' al AB, pues que por suposicion son entre sí iguales, el punto C' no puede menos de tomar una de las tres posiciones representadas por C'' en los números 1, 2 y 3 de la figura.

En la primera, en la cual el punto C'', que representa al C' del triángulo sobrepuesto A'C'B', cae sobre el lado AC, se ve con bastante claridad que AC'', que representa al lado $A'C'$, es menor que AC.

En la segunda, en que se supone al punto C'' dentro del triángulo ABC, tendremos:

$$AC''+BC''<AC+BC; \quad (15)$$

y pues que BC'' representa al lado $B'C'$, y este es por suposicion igual al BC, se infiere con evidencia que el lado AC'', que representa al $A'C'$, es menor que el AC.

Por último, en la tercera posicion, en la cual se halla el punto C'' fuera del triángulo ABC, tenemos:

$$AC''<OC''+OA; \text{ y } BC<OB+OC;$$

de donde se infiere que

$$AC''+BC<OC''+OA+OB+OC;$$

lo cual equivale desde luego á decir que

$$AC''+BC<AC+BC'',$$

pues que $OC''+OB=BC''$; y $OA+OC=AC$. Quitando ahora de una y otra parte las líneas BC y $B'C'$ que por suposicion son iguales, nos resultará por conclusion que AC'', ó lo que es lo mismo, $A'C'<AC$.

20. *Corolario.* De esto se sigue que *siempre que dos triángulos tengan sus tres lados respectivamente iguales, cada uno á su correspondiente, los dos triángulos han de ser totalmente iguales*; porque si los lados AB, AC y

Fig. 10. BC del triángulo ABC, fig. 10, fueren respectivamente iguales á los lados $A'B'$, $A'C'$, y $B'C'$ del triángulo $A'B'C'$, el ángulo formado por cualesquiera dos lados del primero, deberá ser igual al ángulo comprendido por los lados respectivamente iguales á aquellos en el segundo. Si, por ejemplo, el ángulo B del un triángulo fuese menor que su correspondiente B' en el otro, el lado AC, opuesto al primero, habria de ser menor que $A'C'$, opuesto al segundo (§. ant.); y esto es contra la suposicion.

Es, pues, visto que los triángulos ABC y $A'B'C'$ tienen no solo sus tres lados, sino tambien sus tres ángulos iguales cada uno á su correspondiente, y por consecuencia son entre sí enteramente iguales (§. 16 ó 18).

PROBLEMA.

21. *Estándonos dados con separacion los tres lados de un triángulo, construir este triángulo.*

Solucion. Sean M, N y P, fig. 12, las tres líneas Fig. 12.
que se nos hayan dado para que sean respectivamente iguales á ellas los tres dados del triángulo. Para construirlo habremos de tomar una de ellas, por ejemplo la M, y destinarla á que sea el lado AB del triángulo. Inmediatamente describiremos desde uno de sus extremos A como centro, y con una de las dos líneas restantes N como radio, un círculo CDC'; y por último, desde el otro extremo B como centro, y con la tercera P como radio, describiremos otro círculo CEC'. Las circunferencias de estos dos círculos se cortarán en dos puntos C y C', situados el uno sobre la línea AB, y el otro debajo de ella: y juntando cada uno de estos puntos con los extremos de la línea AB, habremos formado dos triángulos que satisfacen á la cuestion, pues que cada uno de ellos tiene sus tres lados respectivamente iguales, como se ve, á las líneas que con este objeto se nos han dado.

22. Si tomásemos al acaso y sin un particular y detenido exámen las primeras tres rectas cualesquiera que se nos ofreciesen, podria muy bien suceder que las dos circunferencias de círculo que para la construccion del triángulo nos es forzoso describir, no se encontrasen en punto alguno. Esta circunstancia habrá necesariamente de verificarse: 1º Siempre que la suma de dos cualesquiera

de las tres líneas que para el objeto se nos presenten, sea menor que la restante; como si en el caso propuesto fuera la suma P+N menor que M. Con efecto, es bien visible, y se demostrará ademas en lo sucesivo, que dos circunferencias de círculo no pueden cortarse la una por la otra sino en el caso en que la distancia de sus dos centros sea menor que la suma de sus dos radios.

2.° Cuando uno de los dos círculos contenga al otro; es decir, cuando

$$AD>AB+BF, \text{ ó } N>M+P.$$

Estos dos casos estan comprendidos en la condicion general de que en todo triángulo la suma de dos lados cualesquiera debe forzosamente ser mayor que el tercero; lo cual se puede simplificar expresándolo de este modo: *la suma de los dos lados mas pequeños de un triángulo cualesquiera es siempre mayor que el tercero restante*. Con efecto, para evitar tales casos debe bastar la condicion de que cuando cada una de dos líneas N y P sea menor que la tercera M, la suma de aquellas N+P sea mayor que esta; pues asi estarán necesariamente satisfechas las otras dos condiciones N+M>P y P+M>N.

La solucion del problema anterior nos pone ya en estado de construir un triángulo totalmente igual á otro dado, valiéndonos para ello de los tres lados de este último; y al mismo tiempo nos suministra el medio de formar un ángulo igual á otro dado.

PROBLEMA.

23. *En un punto dado y escogido en una recta dada, formar un ángulo igual á otro dado.*

Fig. 13. *Solucion.* Sea, fig. 13, CAB el ángulo dado; A′B′ la

recta que se nos propone para formar en su punto A′ como vértice el ángulo igual al lado CAB. Desde el vértice A de este ángulo desígnense con distancias AB y AC entre sí iguales, y júntense por medio de la recta BC los dos puntos B y C en que se terminan. Colocando en seguida la recta AB desde el punto A′ al punto B′, no nos quedará mas que hacer sino describir sobre la recta A′B′ un triángulo, cuyos dos lados A′C′ y B′C′ sean respectivamente iguales á los otros dos AC y BC: lo cual se ejecuta marcando una de las intersecciones C′ de las circunferencias de círculos descritos con los radios AC y BC desde A′ y B′ como centros. Tirando ya entonces la recta A′C′, el ángulo C′A′B′ será igual al CAB, pues que los dos triángulos CAB y C′A′B′ son entre sí totalmente iguales por construccion (§. 21).

PROBLEMA.

24. *Dado que sea un triángulo, construir otro que le sea totalmente igual, haciendo uso para la construccion de este de un ángulo del primero, y de los dos lados que lo forman.*

Solucion. En caso que el ángulo y los lados de que hayamos de hacer uso para la construccion, sean el ángulo C y las rectas AC y BC del triángulo ABC, fig. 10, Fig. 10.
se formará sobre la recta A′C′ un ángulo C′ igual al C: despues se formarán de los lados A′C′ y B′C′, comenzando á medir desde el punto C′, dos distancias respectivamente iguales á los lados AC y BC, que nos determinarán los puntos A′ y B′. Juntando, pues, estos dos puntos por medio de una recta, resultará formado el triángulo A′B′C′ totalmente igual al triángulo ABC con arreglo al §. 15.

PROBLEMA.

25. *Dado que sea un triángulo, construir otro que le sea totalmente igual, haciendo uso, para la construccion de este último, de uno de los lados del primero y de sus dos ángulos adyacentes.*

Solucion. Suponiendo que el lado propuesto en el primer triángulo sea el AB, y que los dos ángulos adyacentes sean A y B; tomaremos de la recta $A'B'$ una parte $A'B'=AB$; en las extremidades de $A'B'$, formaremos los ángulos A' y B', respectivamente iguales á los ángulos A y B. Habiendo ya fijado por este medio la direccion de las rectas $A'C'$ y $B'C'$, las prolongaremos hasta que se encuentren en C', y nos resultará formado el triángulo $A'B'C'$ totalmente igual al triángulo ABC segun el §. 18.

De las líneas perpendiculares y de las oblícuas.

TEOREMA.

Fig. 14. 26. *Las líneas* AC *y* CB, fig. 14, *que partiendo de un punto cualquiera* C *de una recta* CD *perpendicular á la* AB, *se apartan igualmente del pie de esta perpendicular, es decir, del punto* D, *en que se encuentra con la recta* AB, *son entre sí iguales; y las que mas se apartan son mas largas.*

Demostracion. Suponiendo, como suponemos, que las distancias AD y DB son entre sí iguales; y viendo que por la naturaleza de la perpendicular son al mismo tiempo iguales los ángulos CDA y CDB (§. 9); y que por último la recta CD es un lado comun de los dos triángulos ACD y DCB, podremos inferir que teniendo

cada uno de estos triángulos los dos lados del uno respectivamente iguales á dos del otro, y siendo al mismo tiempo entre sí iguales los ángulos comprendidos, habrán de ser totalmente iguales entre sí los dos triángulos (§. 16.); y que de consiguiente el lado BC=AC. Lo cual hace ver que las dos rectas que igualmente se apartan de la perpendicular CD son entre sí iguales.

Si por el punto C tiramos la recta CE que se aparte de la perpendicular CD mas de lo que se aparta la CA, y prolongando á CD por debajo de la recta AB tomamos la parte $C'D=CD$, y despues tiramos las líneas AC' y EC', tendremos que.

$$CE+C'E>CA+C'A \text{ (§. 15).}$$

Y como en virtud del §. 16 deben ser entre sí totalmente iguales los triángulos CAD y $C'AD$, por ser entre sí iguales los ángulos ADC y ADC' (§. 13), y los lados CD y $C'D$ entre sí iguales por construccion; y siendo comun á los dos triángulos el lado AD, tendremos por conclusion que la línea $CA=C'A$; y del mismo modo haremos ver que $CE=C'E$: de donde resultará que.

$$2CE>2CA, \text{ ó que } EC>CA:$$

lo cual nos manifiesta que entre las diferentes líneas que pueden tirarse á la AB desde un punto cualquiera C de la perpendicular CD, las que mas aparten de esta son las mas largas.

27. 1.° *Corolario.* Las lineas CA, CB, CE se llaman *oblicuas* con respecto á la AB; y en su consecuencia se dice que *las oblicuas que igualmente se apartan de la perpendicular son iguales; y que las que mas se apartan de ellas son las mas largas*: de lo cual podemos inferir con la mayor certeza que siempre que se nos presenten dos oblicuas entre sí iguales, debemos asegurar que

no se hallan ambas á un mismo lado de la perpendicular, sino cada una en diferente lado; bien que á igual distancia de su pie.

28. 2.° *Corolario.* De lo dicho se sigue: 1.°: que la perpendicular es la mas corta de todas las líneas que pueden tirarse desde un punto determinado C á la recta AB, y de consiguiente es la medida natural de la distancia del mencionado punto á la expresada línea.

2.° Que todos los puntos de la perpendicular se hallan á iguales distancias de los dos A y B; y que si por consiguiente tomamos en su direccion un punto cualquiera F, tendremos indefectiblemente

$$AF=FB.$$

3.° Que un punto cualquiera G, tomado fuera de la direccion de la perpendicular, está á distancias desiguales de los dos puntos A y B; porque desde luego tenemos que

$$BG<BF+FG;$$

y de consiguiente $BG<AG$;
pues que $BF=AF$ y $AG=AF+FG$.

4.° En fin, que de un punto á una recta no pueden tirarse tres rectas entre sí iguales.

PROBLEMA.

29 *Tirar á la línea* AB *una perpendicular que la divida en dos partes iguales.*

Fig. 15. *Solucion.* De los puntos extremos A y B tomados sucesivamente como centros, y con una abertura de compás mayor que la mitad de la recta dada AB, describiremos dos pequeños arcos de círculos CF y CE, que se cortarán en C. Lo mismo haremos en la parte inferior á la recta

AB; y juntando entonces los dos puntos designados C y C′, la recta CC′ será la perpendicular que buscamos. Con efecto, los triángulos CBC′ y CAC′ son totalmente iguales, pues que tienen $AC=CB$, y $AC'=BC'$, y comun el lado CC′: son, pues, entre sí iguales los ángulos ACD y DCB. Y siendo respectivamente iguales los lados AC y CD, CB y CD que los comprenden en los triángulos ACD y DCB, deben ser totalmente iguales estos últimos triángulos en consecuencia de lo demostrado (§. 16): el ángulo ADC será pues igual al CDB, y por tanto estos dos ángulos habrán necesariamente de ser rectos; y por último, siendo, como se ve, $AD=DB$, bien claro que la recta AB está cortada en el punto D en dos partes iguales.

PROBLEMA.

30. *En un punto dado* D, *fig.* 16, *de una recta* AB, *levantar una perpendicular á esta recta.* Fig. 16.

Solucion. A uno y otro lado del punto dado D en la línea AB, en el cual se trata de levantar la perpendicular, se tomarán dos distancias iguales AD y DB; y desde los puntos A y B como centros con una recta mayor que cualquiera de las distancias AD ó DB como radio, se describirán los dos arcos de círculo CF y CE, que se cortarán en el punto C; y juntando por último este punto D, la línea CD será la perpendicular que se nos pide, á la recta AB. Con efecto, siendo iguales las rectas AC y CB, como asimismo las partes AD y DB, los triángu-

Nota. Para la mayor sencillez de la figura hemos evitado el trazar enteras las circunferencias de los dos círculos, segun lo hicimos en la fig. 12, sino solo las pequeñas porciones inmediatas al punto de interseccion.

los ACD y BCD, que ademas de eso tienen comun el lado CD, habrán forzosamente de ser totalmente iguales entre sí, y de serlo por consiguiente los dos ángulos ADC y CDB.

PROBLEMA.

Fig. 17. 31. *Por un punto dado* C, fig. 17, *tomado fuera de una recta* AB, *bajar á esta recta una perpendicular.*

Solucion. Desde el punto C como centro y con un radio cualquiera, bien que mayor que la mas corta distancia del punto C á la recta AB, se describirá un arco de círculo que corte á la recta AB en los dos puntos A y C. Tomando en seguida por centro á cada uno de los puntos A y B, se describirán con un mismo radio dos arcos de círculo, que cortándose en C′, determinarán un segundo punto de la perpendicular CC′ que se nos ha pedido. Con efecto, hallándose por construccion los dos puntos A y B igualmente distantes del C y del punto C′, podemos probar, como lo hemos hecho (§. 29), que los ángulos ADC y BDC son rectos.

TEOREMA.

32. *Desde un punto* C *tomado fuera de una recta, no es posible bajar á esta mas que una sola perpendicular* CD.

Demostracion. Siendo entre sí iguales las dos oblicuas AC y BC determinadas en la solucion del problema propuesto (§. 30), pues que se apartan igualmente de la perpendicular (§. 27), la cual no puede pasar por otro punto que el D, que es el medio del intervalo AB. Ahora bien, por los dos puntos C y D no se puede hacer pasar mas que una sola recta CD; y todas las oblicuas que sean

entre sí iguales dos á dos, cualquiera que por otra parte sea su longitud, no pueden encontrar á la AB sino en puntos igualmente distantes del D. Con efecto, en caso que esto no se verifique en las oblicuas EC y FC, por ejemplo, por ser ED menor que DF, podríamos tomar DF′=DE, y tirar la oblicua F′C, la cual sería igual á CE; y entonces se encontrarian á un mismo lado de la perpendicular CD dos oblicuas entre sí iguales; lo cual es imposible (§. 27). Es, pues, consiguiente que el arco de círculo descrito con el radio CE haya de cortar á la línea AB tambien en F, y por tanto es única la perpendicular CD.

Cuando se haya escogido en la recta dada el punto en que se haya de levantar la perpendicular, es evidente la proposicion (§. 9).

33. 1.° *Corolario.* De esto se sigue que cuando dos rectas DE y FG sean ambas perpendiculares á otra tercera línea AB, fig. 18, jamás se encontrarán en punto alguno, por mas que se prolongue hácia el uno ó hácia el otro lado de la recta AB; porque si se encontrasen, se podrian desde el punto de su mútua interseccion bajar dos perpendiculares sobre la recta AB; lo cual es un absurdo. Fig. 18.

34. 2.° *Corolario.* Tambien se sigue de la misma proposicion: 1.° que dos triángulos ABC y A′B′C′, fig. 19, que tengan cada uno un ángulo recto en A y en A′, y cuyos lados BC y B′C′, respectivamente opuestos á los ángulos rectos sean entre sí iguales, al mismo tiempo que lo sean el ángulo B, por ejemplo, del uno, y el ángulo B′ del otro, deberán ser totalmente iguales. Fig. 19.

Con efecto, si colocamos el triángulo A′B′C′ sobre el triángulo ABC de modo que el ángulo B′ caiga sobre el B, el lado B′C′ cubrirá exactamente á su correspondiente BC; el lado A′B′ coincidirá con la direccion de

AB; y si el lado A′C′ cuyo extremo C′ se encuentra ya sobre el C no resultase exactamente aplicado sobre AC, se seguiria que se podrian bajar desde el punto C dos perpendiculares á la recta AB, cuya direccion se halla actualmente confundida con la de A′B′.

2.º Asimismo se verificará la total igualdad de los mismos triángulos en caso que los lados AC y BC del uno sean respectivamente iguales á los lados A′C′ y B′C′ del otro; porque colocando al uno sobre el otro de modo que el lado A′C′ se ajuste con el AC, el lado A′B′ se ajustará con el AB, porque siendo rectos los dos ángulos BAC y B′A′C′, deben ser entre sí iguales; y viniendo á ser los lados BC y B′C′ oblicuas iguales situadas á un mismo lado de la perpendicular AC, se habrán de apartar de ella con igualdad, y de consiguiente caerá la una sobre la otra.

35. *Observaciones.* El primer caso de igualdad total que hemos demostrado con relacion á dos triángulos que tengan un ángulo recto, se puede mirar como general á cualesqiera triángulos; los cuales deberán ser entre sí totalmente iguales luego que el uno tenga dos de sus ángulos respectivamente iguales á dos del otro, y al mismo tiempo igual el lado en que los dos triángulos se oponga á dos ángulos entre sí iguales; pero este caso no es necesario para lo que sigue, y por otra parte resulta de la proposicion que mas adelante demostraremos (§. 51).

No sucede lo mismo con el segundo. Si en los triángulos ABC y A′B′C′, fig. 20, tuviésemos A=A′; AC=A′C′; BC=B′C′, y que el ángulo A sea agudo y que AC sea mayor que BC, no podremos de tales datos concluir que los indicados triángulos sean entre sí totalmente iguales; porque si en el triángulo A′B′C′ bajamos la

perpendicular C′D′, tendremos á cada uno de los lados de ella cada una de las dos oblicuas C′B′ y C′B″ que son entre sí iguales; y en los dos distintos y desiguales triángulos C′A′B′ y C′A′B″, en los cuales son comunes el ángulo A y el lado A′C′, aparecerán cumplidas todas las condiciones propuestas, sin embargo de que solo uno de ellos sea totalmente igual al triángulo ABC; á saber, aquel cuyo ángulo B es de la misma especie que el B′; es decir, es agudo, en el caso que nos ofrece la figura. Por otra parte se ve que el ángulo C′B″A′ es obtuso, porque reposa sobre la misma recta que el ángulo C′B″B′=C′B′B″.

TEOREMA.

36. *Siempre que dos lados de un triángulo sean entre sí iguales, deberán serlo tambien los dos ángulos que les son opuestos; y en caso que uno de aquellos sea mayor que el otro, habrá de estar opuesto al ángulo mayor.*

Demostracion. Si en el triángulo ABC, fig. 21, son entre sí iguales los dos lados AB y BC, la perpendicular bajada desde el punto B sobre el lado AC, como que debe pasar por el punto D medio de este mismo lado (§. 32), habrá de dividir al triángulo propuesto en otros dos, que han de ser entre sí totalmente iguales (§. 16), pues que el ángulo recto ADB del uno se hallará comprendido por los lados AD y DB, que son respectivamente iguales á los dos lados DC y BD que comprenden al ángulo recto del otro: será pues igual el ángulo A al ángulo C. Fig. 21.

Con respecto al triángulo ACE, en el cual son desiguales los lados AE y EC, es evidente que el punto E, en que concurren estos dos lados, debe caer fuera de la perpendicular BD hácia la extremidad de AC á que se halla mas cercano (§. 28); y por consiguiente en el ángulo FDC. Si tirando ahora la línea BC se forma el triángulo ABC, sus dos ángulos BCA y BAC deben ser entre sí iguales como lo son los lados opuestos AB y BC por ser oblícuas igualmente distantes de la perpendicular; mas siendo el ángulo BCA parte del ángulo ECA, se sigue que este último opuesto al mayor lado AE sea mayor que el ángulo EAC, opuesto al lado EC, menor que AE.

37. *Corolario.* De esto se sigue que si dos ángulos de un triángulo son entre sí iguales, deberán igualmente serlo los dos lados opuestos á estos ángulos; porque si fuesen desiguales, el ángulo opuesto al mayor de los lados deberia ser mayor que el otro; lo cual es contra lo supuesto. Los mismos razonamientos prueban al mismo tiempo que cuando sean desiguales dos ángulos de un triángulo al mayor de los dos ángulos se halla opuesto el mayor de los lados, pues que la desigualdad de los primeros está unida con la de los segundos; y siempre que sean desiguales dos lados, el mayor de estos se hallará opuesto al mayor de los dos ángulos.

Por último, cuando sean entre sí iguales los tres lados de un triángulo, lo serán tambien entre sí sus tres ángulos, y recíprocamente.

38. Todo triángulo cuyos lados sean entre sí desiguales se denomina *escaleno;* el que solamente tenga dos lados entre sí iguales, se llama *isósceles;* y finalmente, aquel cuyos tres lados sean todos entre sí iguales lleva el nombre de *equilátero.*

Teoría de las paralelas.

39. Dos rectas, que sin embargo de estar situadas en un mismo plano, y por mas que se las prolongue, no se encuentran jamás en punto alguno, son llamadas *paralelas* entre sí.

Es, pues, claro que las rectas DE y FG, fig. 18, perpendiculares á una misma recta AB, sean paralelas entre sí (§. 33.) Fig. 18.

40. *Observacion.* Cuanto vamos á exponer relativo á este asunto, está fundado sobre la verdad de las siguientes proposiciones, cuya evidencia depende inmediatamente, al parecer, de la nocion que tenemos de la línea recta: 1.ª Si por el punto D, fig. 22, se tira una recta HH′ que haga con la recta DB un ángulo HDB menor que el recto EDB, ó que se halle inclinada hácia la parte FG de la recta GG′ perpendicular á la AB, deberá necesariamente encontrarse con la GG′ cuando las dos líneas esten suficientemente prolongadas hácia la parte superior de AB. 2.ª Si por el mismo punto D se tira la recta II′ que haga con la DB el ángulo IDB mayor que el recto EDB; asi como hácia la parte inferior de la recta AB hará el ángulo I′DB menor que el recto E′DB, habrá forzosamente de inclinar hácia la parte FG′ de la recta GG′, y encontrará á esta recta en algun punto siempre que se las prolongue á las dos hácia la parte inferior de la AB cuanto sea suficiente. Fig. 22.

De lo cual resulta la siguiente proposicion, que es uno de los fundamentos de la teoría de las paralelas: *toda recta que sea perpendicular á otra, ha de ser encontrada por todas las que sean oblícuas á la misma; de consiguiente en ningun plano puede haber mas rectas que* *no se encuentren, por mas que se las prolongue, en punto alguno, ó que sean entre sí paralelas, sino las que sean perpendiculares á una misma recta*.*

TEOREMA.

Fig. 24. 41. *Siempre que dos rectas* DE *y* FC, fig. 24, *sean entre sí paralelas, cualquiera otra recta que como* LM *sea perpendicular á una de ellas, debe al mismo tiempo serlo tambien á la otra.*

Demostracion. Supongamos por un momento que tal cosa no se verifique, y que la recta LM que suponemos perpendicular en el punto M á la recta FG no lo sea en L á la ED. En tal caso se podria elevar en el punto L á LM una perpendicular distinta de la recta EL, y á la cual esta misma recta seria interior ó exterior con rela-

* A la dificultad de probar inmediatamente esta proposicion está reducida toda la imperfeccion de la teoría de las paralelas. Varios autores han hecho esfuerzos inútiles para conseguirlo; y algunos como *Bezout* se han contentado con disimular el vicio del razonamiento; en lo cual á mi entender se han desentendido de la estrecha obligacion en que se constituye todo autor de obras elementales, de no dar jamas de cosa alguna mas que nociones exactas, y sobre todo dar á conocer con claridad y cuidado su orígen. Yo en vista de esto he creido conveniente poner en la mayor evidencia este punto tan delicado, formando, á imitacion de Euclides, una *demanda*, que en mi concepto es mucho mas fácil de concederse que la suya; porque presenta la dificultad reducida á sus menores términos. (Véase en los *Ensayos sobre la enseñanza* el párrafo de los *Elementos de Geometría.*)

Muchos geómetras se han propuesto probar la verdad de esta demanda, los unos directamente, y los otros trasponiendo la dificultad; mas todos han incurrido en el defecto de ser demasiado extensos, ó en el inconveniente de complicar con razonamientos oscuros proposiciones cuya prueba directa es sumamente sencilla. Debemos sin embargo exceptuar de esta censura la demostracion dada por *Bertrand*, la cual me ha parecido la mas clara y mas ingeniosa de cuantas he podido ver: á esto se reduce en sustancia.

Por decontado es bien claro que si se juntan unos con otros muchos ángulos de una magnitud cualquiera, como lo presenta la fig. 23, ofreciéndonos reunidos los ángulos edh, hdh', $h'dh''$, $h''dh'''$, $h'''dh''''$, se conseguirá al cabo formar un ángulo total edh'''' mayor que el recto edb; mas si se elevan á la recta DB las dos perpendiculares DE y FG, prolongadas indefinidamente, nos resultará una banda ó faja indefinida EDFG, que por muchas veces que se la repita, jamas se podrá cubrir con la reunion de ellas todo el espacio comprendido por el ángulo recto EDB. Con efecto, si despues de haberse tomado FK= DF, y levantado en K á la recta AB la perpendicular KL se doblase la figura por toda la longitud de la FG, la banda EDFG cubrirá exactamente á la GFKL; porque siendo rectos por suposicion los ángulos GFD y GFK, la parte DF habrá de ajustarse con la FK: y como estas dos últimas partes sean por construccion iguales entre sí, el punto D habrá de confundirse con el K; y siendo por otra parte recto el ángulo FKL, lo mismo que el ADE la línea DE vendrá á coincidir exactamente con la KL. Y pues que en la recta indefinida DB se pueden tomar cuantas partes se quieran iguales á la DF sin que por eso sea posible llegar hasta su último extremo, se podrá ciertamente formar un número tan grande como se quiera de bandas iguales á la EDFG sin conseguir por eso cubrir totalmente el espacio indefinido que comprenden los dos lados del ángulo recto EDB. De lo cual se sigue que la superficie del ángulo edh es mayor que la de la banda EDFG, considerando á las dos con relacion á sus límites laterales; y que si se construye en esta banda sobre la recta ED el ángulo EDH igual al edh, no es posible que este quede encerrado entre las líneas ED y FG, sino que su lado DH ha de cortar necesariamente á la recta FG.

Para hacerse el debido cargo de toda la fuerza de esta demostracion, es sobrenecesario haber observado y tener muy presente que cuando se aplica el ángulo recto edb al ángulo recto EDB, estas dos superficies deben siempre coincidir entre sus límites laterales de y db, DE y DB, por mucho que se les prolongue: entonces se verá que si los ángulos construidos en las bandas no saliesen jamas de ellas, dejarian un vacío indefinido despues de la última banda, y otro en cada una de ellas: mas este, que siempre tiene lugar en la inmediacion al vértice, está mas que compensado por los espacios que se les hacen comunes cuando llegan á salir de las bandas; pues cruzándose entonces sus lados, se confunde en parte el espacio del uno con el del otro. Tal es, por ejemplo, el espacio MNO, comun á los dos ángulos EDH y GFH'. Con esta explicacion no debe quedar duda alguna fundada sobre que entra el *infinito* en todas las consideraciones antecedentes; pues solo se trata de hacer formar idea de que en todo caso es posible colocar en el ángulo recto un número de bandas mayor que otro cualquier número dado, por grande que este sea.

cion á FG. A lo cual seria consiguiente, en virtud de la proposicion del §. 40, que la recta EL debiese encontrar á la GM; y esto jamas puede acontecer siendo, como por suposiciones son entre sí paralelas las rectas DE y FG. Es pues visto que en el punto L no puede levantarse á la recta LM otra ninguna perpendicular distinta de la EL; y de consiguiente la recta LM, que por suposicion es perpendicular á la FG en M, debe igualmente serlo á la paralela DE en L.

42. *Corolario.* De esta última proposicion se sigue que como dos rectas sean paralelas á una tercera, deben serlo tambien entre sí; porque toda recta que sea perpendicular á esta tercera ha de serlo igualmente á las dos primeras, las cuales, siendo por este medio perpendiculares á una misma recta, no podrán jamas encontrarse en punto alguno, y de consiguiente habrán de ser entre sí paralelas.

TEOREMA.

43. *Siempre que dos rectas entre sí paralelas* DE
Fig. 25. *y* FG, fig. 25, *sean cortadas por otra cualquiera, serán entre sí iguales los dos ángulos* ELI *y* GMI *que aquellas forman con esta última, situados hácia un mismo lado, el uno dentro y el otro fuera del espacio interceptado por las paralelas.*

Demostracion. Si del punto K, medio de la LM, bajamos sobre cualquiera de las dos paralelas ED, FG la perpendicular DF, esta misma recta será al mismo tiempo perpendicular á la otra (§. 41). Y pues que en los triángulos DLK y KFM son iguales entre sí por construccion los lados LK y KM, respectivamente opuestos á los ángulos rectos D y F, siendo ademas entre sí iguales por opuestos en el vértice los ángulos DKL y MKF,

serán entre sí totalmente iguales los dos triángulos, y de consiguiente el ángulo restante DLK del uno, ó lo que es lo mismo, el ángulo ELI debe ser igual al ángulo restante KMF del otro, ó lo que es equivalente, al GMI, opuesto en el vértice á este último.

TEOREMA.

44. *Siempre que dos rectas* DE *y* FG *formen con otra tercera* IH, *y hácia el mismo lado con respecto á esta, dos ángulos* ELI, GMI *entre sí iguales, el uno en la parte interior y el otro en la exterior del espacio interceptado por las tales dos rectas, puede contarse con la mayor seguridad con que estas son entre sí paralelas.*

Demostracion. Si del punto K, medio de LM, se baja á DE la perpendicular DF, resultarán formados los triángulos DLK y MKF, totalmente iguales entre sí (§. 18), pues que conforme á la suposicion, el ángulo DLK ó el ELI es igual al ángulo KMF opuesto en el vértice al ángulo GMI; los dos ángulos DKL y MKF, como opuestos que son en el vértice, habrán necesariamente de ser entre sí iguales, y por último el lado LK es igual al KM por construccion. Será pues el ángulo KFM igual al LDK; y siendo este por suposicion recto, deberá tambien serlo el otro; con lo cual tenemos ya que las dos rectas DE y FG son entrambas perpendiculares á la misma recta DF, y por tanto deben ser entre sí paralelas.

45. *Observaciones.* El frecuente uso que generalmente se hace de las propiedades de las paralelas, ha inducido á los geómetras á designar con nombres particulares los varios ángulos que ellas forman con las rectas que las cortan, y que por esta razon son conocidas bajo el nombre de *secantes.*

Fig. 26. Los ángulos, que como ELI, GMI, fig. 26, se hallan situados á un mismo lado de la secante IH, y cuya abertura está vuelta hácia la misma parte, se llaman *ángulos correspondientes*. Los ángulos DLM y FMI son tambien ángulos correspondientes.

Todos los ángulos cuya abertura se halla entre las paralelas son comprendidos bajo la denominacion general de *ángulos internos*; y todos aquellos cuya abertura está de la parte de afuera de ellas se llaman *ángulos externos*.

Se distinguen ademas estos ángulos por su posicion con respecto á la *secante*. Los que se hallan á un mismo lado de esta recta, se llaman *ángulos internos ó externos*, segun sean, *de un mismo lado*.

ELM, GML son dos ángulos internos del mismo lado.

HLD, FMI son dos ángulos externos del mismo lado.

Los ángulos que se hallan en situacion opuesta, tanto con respecto á las paralelas, como á la secante, se llaman *ángulos alternos*. Entre estos los hay *alternos internos*, como ELM y FML, ó DLM y GML; y *alternos externos*, como HLE y FMI, ó HLD y GMI.

TEOREMA.

Fig. 26. 46. *Siempre que dos paralelas* DE y FG, fig. 26. *esten cortadas por una tercera recta* IH,

1.° *Los ángulos correspondientes son entre sí iguales;*

2.° *Los ángulos alternos internos son entre sí iguales;*

3.° *Los ángulos alternos externos son entre sí iguales;*

4.° *La suma de los dos ángulos internos de un mismo lado equivale á la de dos ángulos rectos;*

5.° *La suma de los dos angulos externos de un mismo lado equivale á la de dos ángulos rectos;*

6.° *Siempre que llegue á verificarse una cualquiera de estas propiedades que acabamos de expresar, deberemos estar ciertos de que las dos rectas* DE *y* FG *son entre sí paralelas.*

Demostracion. 1.° La igualdad de los ángulos correspondientes está ya vista en el teorema del §. 43; pues que los ángulos ELI y GMI, fig. 25, son evidentemente *ángulos correspondientes* en el sentido que hemos dado á esta expresion. Probada como ya está la igualdad de estos ángulos, se deduce de ella facilísimamente la de todos los demas ángulos correspondientes. Por lo respectivo á los ángulos DLM y FMI, por ejemplo, fig. 26, habremos de tener presente que la suma de los dos ángulos DLM y ELI, adyacentes á la misma recta DE, equivale á la de dos ángulos rectos (§. 11), y que por la misma razon la suma de los dos ángulos FMI y GMI es asimismo igual á la de dos ángulos rectos. Quitando pues de estas dos sumas iguales los dos ángulos iguales ELI y GMI, deberán resultar necesariamente iguales entre sí los dos ángulos restantes DLM y FMI. Fig. 25. Fig. 26.

2.° La igualdad de los *ángulos alternos internos*, la de ELI y FMH, por ejemplo, es indudable, pues siendo, como se ve, entre sí iguales los dos ángulos FMH y GMI por opuestos que son en el vértice, al mismo tiempo que este último ángulo es igual á ELI cómo su correspondiente, deben ser entre sí iguales los dos ángulos ELI y FMH, que son *alternos internos*. Del mismo modo se puede demostrar la igualdad de los otros dos DLI y GMH.

3.° Tampoco puede caber la menor duda sobre que son entre sí iguales los *ángulos alternos externos*, por ejemplo, DLH y GMI; porque siendo opuesto en el vértice este último al FMH, deben forzosamente ser iguales entre sí; y siendo FMH igual á DLH como correspondientes que son, es bien claro que los dos ángulos DLH y GMI que son iguales á un tercero FMH, han de ser por necesidad iguales entre sí. Por el mismo medio podríamos hacer ver la igualdad de los ángulos *alternos externos* ELH y FMI.

4.° La suma de los dos *ángulos internos de un mismo lado*, la de ELI y GMH, por ejemplo, equivale á la de dos ángulos rectos; porque siendo entre sí iguales los dos ángulos ELI y GMI por correspondientes, y equivaliendo á la suma de dos ángulos rectos la de los dos GMI y GMH como adyacentes que son á la misma recta IH (§. 11), es evidente que si en lugar del ángulo GMI sustituimos su igual ELI, resultará igualmente que la suma de los dos *ángulos internos de un mismo lado* ELI y GMH equivale á la de dos ángulos rectos.

5.° La suma de los dos *ángulos externos de un mismo lado* ELH y GMI, por ejemplo, equivale á la de dos ángulos rectos, en vista de que siendo entre sí iguales como correspondientes los ángulos GMI y ELI, y equivaliendo á la suma de dos ángulos rectos la de los dos ángulos ELM y ELH como adyacentes que son á la misma recta IH (§. 11), se ve con la mayor claridad que si se sustituye al ángulo ELI su igual GMI, la suma será igual á la anterior, y equivaldrá por consiguiente á la de dos ángulos rectos.

6.° Por último, luego que observemos verificada cualquiera de estas propiedades en dos rectas cortadas por una tercera, podemos estar ciertos de que las tales dos rectas son entre sí paralelas; porque si lo primero que observamos en ellas es la igualdad de los ángulos

correspondientes, en el §. 44 hemos hecho ver el necesario enlace que la igualdad de los ángulos correspondientes tiene con el paralelismo; y por lo que respecta á las otras cuatro propiedades, basta tener presente que de cualquiera de ellas se infiere necesariamente la igualdad de los ángulos correspondientes.

Con efecto, los ángulos alternos internos ELI y FMH no pueden ser entre sí iguales sin que el ángulo GMI, igual á FMH como su opuesto en el vértice, no lo sea de consiguiente á ELI. Es pues visto que en tal caso los ángulos cosrespondientes ELI y GMI son entre sí iguales.

Lo mismo podemos decir de los ángulos alternos externos ELH y FMI; pues siendo entre sí iguales los ángulos FMI y GMH como opuestos que son en el vértice, ha de resultar por consecuencia forzosa que GMH sea tambien igual á su correspondiente ELH.

Cuando sepamos que la suma de dos ángulos internos ó externos del mismo lado equivale á la de dos ángulos rectos, podremos cercionarnos del modo siguiente de que los ángulos correspondientes son entre sí iguales. Si, por ejemplo, la suma de los ángulos ELI y GMH equivale á la de dos rectos, el ángulo ELI equivaldrá á la suma de los dos rectos menos el ángulo GMH, y como por ser adyacentes á una misma línea HI los ángulos GMH y GMI, equivale la suma de ellos á la de dos ángulos rectos, resultará que el ángulo GMI equivaldrá á esta suma de los dos rectos menos el ángulo GMH; y siendo este valor igual al que hemos determinado del ángulo ELI, se ve con la mayor claridad que son entre sí iguales los dos ángulos correspondientes ELI y GMI. Del mismo modo podemos discurrir con relacion á los ángulos externos de un mismo lado.

47. *Corolario.* Pues que en todos casos dos rectas que sean paralelas han de gozar de todas las propiedades que acabamos de expresar y probar, y que siempre que observemos una cualquiera de las mismas propiedades en dos rectas cortadas por otra tercera, podemos estar ciertos de que las tales dos rectas son entre sí paralelas, es consiguiente que lo sean cualesquiera otras en que no hallemos las mencionadas propiedades.

Fig. 27 Las dos rectas DE y FG, por ejemplo, fig. 27, que son respectivamente perpendiculares á las otras dos AB y BC que entre sí se cortan, no son paralelas; porque si tiramos la secante IH, está bien patente que la suma de los ángulos internos de un mismo lado EIH y GHI es menor que la de los dos ángulos rectos EIB y GHB.

PROBLEMA.

Fig. 28. 48. *Por un punto dado* C, fig. 28, *tirar una recta paralela á la recta dada* AB.

Solucion. Tírese por el punto C una recta cualquiera CB que encuentre á la AB; fórmese en seguida en el punto C y sobre la recta CB el ángulo BCD igual al ABC (§. 23); y de este modo obtendremos la recta CD, la cual habrá de ser la paralela que se nos ha pedido, porque ademas de pasar por el punto dado C, con solo que consideremos á CB como secante, tendremos á los dos ángulos alternos internos ABC y BCD entre sí iguales por construccion.

PROBLEMA.

49. *Por un punto dado* C, *tomado fuera de una*
Fig. 29. *recta* AB, fig. 29, *tirar otra recta que forme con aquella un ángulo igual á otro dado* A'.

Solucion. En un punto cualquiera A de la recta AB fórmese (§. 23) el ángulo DAB igual al dado A'; y tirando por el punto C paralelamente á la recta AD (§. ant.) la recta CE, esta formará con AB (§. 47) el ángulo CEB, que siendo igual á su correspondiente DAB, debe por consiguiente serlo el ángulo dado A'.

TEOREMA.

50. *Los ángulos* ABC, DEF, fig. 30, *que tienen respectivamente paralelos los lados del uno á los del otro y las aberturas colocadas en un mismo sentido, son entre sí iguales.* Fig. 30.

Demostracion. Si prolongamos cualquiera de los lados del segundo ángulo, el DE, por ejemplo, hasta que encuentre á otro de los lados del primero, con solo considerar á las paralelas EF y CH como cortadas por la secante DH, echaremos de ver que los dos ángulos DEF y DHC deben ser entre sí iguales, como que son correspondientes (§. 47); y considerando á las paralelas AB y DH como que estan cortadas por la secante BC, habrán de ser tambien y por la misma razon iguales entre sí los ángulos ABC y DHC. Es pues consiguiente que siendo iguales á un mismo ángulo DHC los otros dos DEF y ABC, lo sean estos entre sí.

TEOREMA.

51. *La suma de los tres ángulos de cualquiera triángulo equivale á la de dos ángulos rectos.*

Demostracion. Si por el vértice del ángulo BAC del triángulo ABC, fig. 31, tiramos la recta AD paralela Fig. 31.
al lado opuesto BC, los ángulos ABC y EAD formados

sobre la secante AB, habrán de ser como correspondientes, iguales entre sí (§. 47); y asimismo deberán serlo los dos otros ángulos DAC y ACB por ser alternos internos con respecto á la secante AC; por consiguiente el ángulo EAC, que es igual á la suma de los dos EAD y DAC, lo será asimismo á la de los dos ángulos ABC y ACB del triángulo propuesto, que les son iguales; y agregando al ángulo CAE el tercero CAB restante en el triángulo, vendremos á tener formados en el punto A y sobre la recta EB los tres ángulos EAD, DAC y CAB, cuya suma equivale á la de dos ángulos rectos (§. 10).

N. B. Conviene tener presente que el ángulo EAC es conocido bajo la denominacion de *ángulo externo* del triángulo ABC, y que equivale por sí solo á la suma de los dos ángulos internos opuestos ABC y ACB.

52. *Corolario.* Del teorema que precede se sigue que cuando dos ángulos de un triángulo sean respectivamente iguales á dos de otro, el tercer ángulo restante del primero habrá de ser igual al tercer ángulo restante del segundo; pues reunido cada uno de estos terceros ángulos á los otros dos, componen en cada uno de los dos triángulos la misma suma de dos ángulos rectos.

El mismo teorema nos hace tambien ver que en ningun triángulo puede haber mas de un solo ángulo recto, ni con mayor razon mas de un ángulo obtuso.

53. Se llama triángulo *rectángulo* el que tenga un ángulo recto; *acutángulo* el que tenga agudos todos sus ángulos; y *obtusángulo* el que tenga un ángulo obtuso; y se comprenden las dos últimas especies bajo la denominacion general de triángulos *oblicuángulos*.

Bien claro se ve que debiendo ser entre sí iguales (§. 37) los tres ángulos de todo triángulo equilátero,

cada uno de los ángulos equivale á dos tercias partes de un ángulo recto.

TEOREMA.

54. *Las partes* AC y BD, fig. 32, *de dos rectas paralelas, interceptadas entre otras dos rectas paralelas, son entre sí iguales, y recíprocamente.* Fig. 32.

Demostracion. Si se tira la recta AD, resultan formados los dos triángulos ABD y ACD, que deben ser totalmente iguales entre sí; porque considerando á la AD como secante de las paralelas AB y CD, se verá que siendo, como son, ángulos alternos internos los dos BAD y ADC, han de ser entre sí iguales (§. 47). Mirando en seguida á la misma recta AD como secante de las paralelas AC y BD, echaremos de ver que los dos ángulos ADB y DAC son por la misma razon entre sí iguales; y siendo ademas comun el lado AD á los dos triángulos ABC y ACD, habrán estos de ser entre sí totalmente iguales (§. 18).

Sean pues entre sí iguales los dos lados AC y BD opuestos á los ángulos iguales ADC y BAD, como asimismo lo habrán de ser los otros dos lados AB y CD, opuestos á los ángulos entre sí iguales ADB y CAD, que es todo lo que nos propusimos demostrar en la primera proposicion.

Por lo que toca á la recíproca, es bien claro que siendo iguales entre sí las dos partes CD y AB; y siéndolo asimismo las otras partes AC y BD, serán respectivamente iguales los tres lados de un triángulo á los tres del otro, y los dos triángulos habrán de ser entre sí totalmente iguales. Por la igualdad de los ángulos alternos internos CAD y ADB vendremos en conocimiento del paralelismo de las dos rectas AC y BD, asi como la igualdad de los dos ángulos BAD y CDA nos da á conocer el de las otras dos rectas AB y CD.

Con la misma facilidad se puede demostrar que cuando sean entre sí iguales y paralelas las dos rectas AB y CD, deben serlo asimismo las otras dos rectas AC y BD, que juntas con ellas cierran el espacio.

55. *Corolario.* La proposicion precedente no dejará de verificarse aun cuando las rectas AC y BD sean perpendiculares á las AB y CD, pues que por esta circunstancia se conservan paralelas entre sí; y como en tal caso las partes AC y BD miden las distancias de las dos rectas AB y CD, podemos inferir que dos paralelas distan igualmente en todas sus partes una de otra.

TEOREMA.

Fig. 33. 56. *Si dos rectas cualesquiera* AF y GM, fig. 33, *se hallan cortadas por un número cualquiera de paralelas* AG, BH, CI &c., *tiradas por puntos tomados á distancias iguales en la primera, las partes* GH, HI, IK &c. *de la segunda, habrán tambien de ser iguales entre sí.*

Demostracion. Si tiramos por los puntos G, H, I &c. las rectas GN, HO, IP &c. paralelas á la AF, nos resultarán formados los triángulos GNH, HOI, IPK &c. cuyos lados NG, OH, IP &c. por ser respectivamente iguales á las partes iguales AB, BC, CD &c., como paralelas que son comprendidas entre paralelas (§. 54), han de ser forzosamente iguales entre sí. Los ángulos NGH, OHI, PIK &c. deben ser entre sí iguales, como correspondientes que son con respecto á la secante GM; y finalmente los ángulos GNH, HOI, IPK &c. serán necesariamente iguales entre sí, porque son entre sí paralelos los lados que los forman, y tienen sus aberturas dirigidas en un mismo sentido (§. 50). Teniendo pues cualquiera de estos triángulos un lado igual á otro de cada uno de los demas, y respectivamente iguales los ángulos adyacentes á los lados iguales de los dos triángulos, habrán estos de ser totalmente iguales (§. 18), y de consiguiente los lados GH, HI, IK &c. deben ser todos iguales entre sí.

57. *Corolario.* De lo que acabamos de exponer, se sigue que la parte AB está contenida en la AF tantas veces como la parte GH lo está en la GM; de suerte que podemos contar con esta proporcion:

AB : AF : : GH : GM;

la cual puede trasformarse en esta otra:

AB : GH : : AF : GM;

y de esta última se pueden deducir las siguientes:

2AB : 2GH : : AF : GM;

3AB : 3GH : : AF : GM;

&c. &c.

lo cual nos manifiesta que un número cualquiera de partes iguales de AF es á otro número igual de partes de GM, como la recta entera AF es á la recta entera GM.

TEOREMA.

58. *Las cuatro partes* AD, DF, GK y KM, fig. 34, *en que dos rectas cualesquiera resultan cortadas por las tres paralelas* AG, DK y FM *son entre sí proporcionales, de modo que forman la siguiente proporcion:* Fig. 34.

AD : DF : : GK : KM.

Demostracion. Con relacion á esta proposicion pueden ocurrir estas dos cosas: 1.º Que AD sea comensurable con AF, es decir, que la razon de AD á AF pueda expresarse exactamente por medio de la de dos números. Supongamos, por ejemplo, que sabemos que

$$AF : AD :: 47 : 25;$$

de lo cual se puede inferir que imaginándonos dividida en 47 partes iguales, 25 de ellas han de corresponder á la AD, y las 22 restantes á DF. Tirando en seguida paralelas á la GA por los puntos de las 47 divisiones, resultará dividida la recta GM en otras 47 partes iguales, de las cuales 25 compondrán la GK, y 22 la KM. Tendremos, pues:

$$AD : DF :: 25 : 22,$$
$$GK : KM :: 25 : 22;$$

y de consiguiente $AD : DF :: GK : KM$.

Ademas, en vista de las proporciones

$$AF : AD :: 47 : 25,$$
$$GM : GK :: 47 : 25,$$

podemos inferir que

$$AF : AD :: GM :: GK.$$

2.º Si AF y AD fueren incomensurables, haremos ver del modo siguiente que la razon de la una á la otra no puede ser menor ni mayor que la de GM á GK.

Sea primeramente $AF : AD :: GM : GI$, siendo GI menor que GK. En todo caso se podrá dividir el lado AF en partes tan pequeñas, que tirando por todos los puntos de division paralelas á la FM, haya de pasar una de ellas *de* por entre los puntos I y K; y con arreglo á lo que precede, tendremos, á causa de la comensurabilidad de AF y Ad,

$$AF : Ad :: GM : Ge.$$

Siendo unos mismos los antecedentes de las dos últimas proporciones, se inferirá de ellas esta tercera, que habrá de existir entre los consecuentes de entrambas:

$$AD : Ad :: GI : Ge;$$

resultado absurdo, pues que siendo AD mayor que Ad, GI es menor que Ge.

Tampoco es posible que tengamos esta proporcion:

$$AF : AD :: GM : GI',$$

siendo GI' mayor que GK; porque suponiendo dividida la AF, de modo que una de las paralelas $d'\,e'$ pase por entre los puntos K é I', tendremos:

$$AF : Ad' :: GM : Ge;$$

y deduciendo de estas dos últimas proporciones, cuyos antecedentes son los mismos, esta tercera que de ellas resulta para entre los consecuentes, vendremos á tener:

$$AD : Ad :: GI' : Ge';$$

resultado igualmente absurdo, pues que siendo AD menor que Ad, GI' es mayor que Ge'. Es pues necesario que sea GK el cuarto término de la proporcion, cuyos tres primeros son las rectas AF; AD y GM.

De esta proporcion $AF : AD :: GM : GK$, se infiere que

$$AF-AD : AD :: GM-GK : GK;$$

la cual equivale á esta otra:

$$DF : AD :: KM : GK;$$

ó invirtiendo los términos de las dos razones de esta última proporcion, tendremos la siguiente:

$$AD : DF :: GK : KM*.$$

* No será extraño que se experimente alguna dificultad en trasferir á las partes de la extension la nocion de la *razon*, tal como la entendemos con respecto á los números, mayormente siempre que se trate de líneas entre sí incomensurables; mas toda la oscuridad que sobre esto puede ofrecerse, deberá desaparecer enteramente luego que

59. 1.º *Corolario.* Si por el punto G se tira la recta GN paralela á AF, resultará

GO=AD; ON=DF (§. 54);

y conforme á lo que precede,

GO : ON : : GK : KM,
GO : GN : : GK : GM.

Si pues en un triángulo cualquiera se tira una recta OK paralela á uno de los lados NM, los otros dos lados GN y GM estarán cortados por la tal paralela en partes entre sí proporcionales.

60. 2.º *Corolario.* Por la inversa, siempre que una recta corte á dos lados de un triángulo en partes proporcionales, debe ser paralela al tercero restante.

Fig. 35. Con efecto, si en el triángulo ABC, fig. 35, tuviéramos:

AB : A*e* : : AC : A*f*,

sin que la línea *ef* fuese paralela á la BC, se podria todavía tirar por el punto *e* una recta *e*H que fuese paralela á la BC, y en tal caso tendríamos:

AB : A*e* : : AC : AH (§. 59),

en cuya proporcion los tres primeros términos son los mismos que los de la anterior, y de consiguiente el cuarto AH de esta última habrá necesariamente de ser igual al cuar-

fijemos nuestra atencion en que nos es imposible comparar dos líneas una con otra sino refiriéndolas á una medida comun (§. 5), y que en tal caso la razon de ellas es verdaderamente un número entero, ó una fraccion cuyos términos estan expresados por los respectivos números de medidas comunes que estan contenidas en cada recta. Y aunque no pueda asignarse con toda exactitud esta fraccion cuando la razon sea incomensurable, no por eso deja de existir; pues podemos aproximarnos á ella cuanto queramos, y debemos mirar como enteramente iguales dos razones incomensurables, luego que echemos de ver que por mucho que adelantemos la aproximacion de la una y de la otra, permanezca constantemente nula la diferencia de entrambas.

to término A*f* de la otra; lo cual nos pone de manifiesto que las supuestas dos rectas *ef* y *e*H se confunden en una misma, y que la primera debe ser paralela al tercer lado BC del triángulo BAC.

61. 3.º *Corolario.* Siempre que la recta BD, fig. 36, Fig. 36.
divida en dos partes iguales á uno de los ángulos B de un triángulo cualquiera ABC, divide asimismo al lado opuesto AC en dos segmentos proporcionales á los lados adyacentes; es decir, que tendremos:

AD : DC : : AB : BC.

Esto se demuestra tirando por el punto C la recta CE paralela á la BD, y que encuentre en el punto E á la AB prolongada. De esto resultará (§. 59)

AD : DC : : AB : BE.

Por otra parte es isósceles el triángulo CBE, porque son entre sí iguales los ángulos BCE y BCD, como alternos internos que son con respecto á la secante BC, siendo al mismo tiempo iguales entre sí los ángulos BEC y ABD como correspondientes con respecto á la secante AE; y ademas sabemos que los dos ángulos ABD y CBD, siendo como por suposicion son, mitades de un mismo ángulo ABC, deben necesariamente ser entre sí iguales. Será, pues, forzoso que tambien lo sean los dos ángulos BCE y BEC, y asimismo los lados opuestos BE y BC; y por último resultado tengamos

AD : DC : : AB : BC.

PROBLEMA.

62. *Hallar una cuarta proporcional á las tres rectas dadas* M, N y P, fig. 37; *ó determinar el cuarto* Fig. 37.
término de esta proporcion:

M : N : : P : *x*.

Solucion. Fórmese con dos rectas indefinidas AB y AC un ángulo cualquiera: tómese en la primera desde A hasta B la distancia AB igual á la M, y desde A hasta D otra distancia AD igual á la N; en seguida tómese desde A hasta C la tercera distancia AC igual á la P. Júntense por medio de una recta BC los dos puntos B y C, y tirando por el punto D la recta DE paralela á la BC, la interseccion de esta paralela y de la recta AC nos determinará á la AE, que es la cuarta proporcional que se nos ha pedido; pues que (§. 59)

AB : AD : : AC : AE:

lo cual equivale á M : N : : P : AE.

Si fueren entre sí iguales las dos rectas dadas N y P, la línea AE que obtendremos como cuarto término de la proporcion M : N : : N : AE, será la que los geómetras acostumbran llamar *tercera proporcional* á las dos rectas dadas M y N. La construccion en este caso no se diferencia de la del anterior, sino en que el punto C del primero viene á ser el *c*, y en que la recta D*e* paralela á la B*c*, corta de la AC la parte A*e*, la cual es la tercera proporcional que buscábamos; pues que tenemos: AB : AD : : A*c* : A*e*;

ó la equivalente N : N : : N : A*e*.

63. Dos triángulos son *semejantes* siempre que los tres ángulos del uno sean respectivamente iguales á los tres del otro, y que sean proporcionales los lados que en ambos esten opuestos á dos ángulos entre sí iguales, y que por esta razon se llaman *lados homólogos*.

Estas dos condiciones estan tan unidas y enlazadas entre sí, que no puede separarse la una de la otra.

TEOREMA.

64. *Siempre que dos triángulos* ABC *y* DEF, fig. 38, *tengan los tres ángulos del uno respectivamente iguales á los tres del otro, deben ser proporcionales sus lados homólogos, y de consiguiente habrán de ser semejantes los dos triángulos.* Fig. 38.

Demostracion. Si en los dos lados AB y AC tomamos las partes A*e* y A*f* respectivamente iguales á sus lados homólogos DE y DF, por estar opuestos á los ángulos F y E de un triángulo respectivamente iguales á los C y B del otro; y si en seguida tiramos la recta *ef*, los triángulos *e*A*f* y EDF deberán ser entre sí totalmente iguales (§. 16); porque siendo por suposicion iguales los ángulos A y D; y siendo al mismo tiempo respectivamente iguales por construccion A*e*, A*f* del uno y DE, DF del otro que los comprenden, habrán de ser totalmente iguales los dos triángulos A*ef* y DEF, y de consiguiente el ángulo A*ef* será igual al E, y por tanto al B. Siendo pues paralela por esta razon la recta *ef* á la BC, tendremos esta proporcion:

A*e* : AB : : A*f* : AC (§. 59);

equivalente á estotra: DE : AB : : DF : AC.

Si ahora tiramos la recta G*f* paralela á la AB tendremos la siguiente:

A*f* : AC : : BG : BC,

ó la equivalente DF : AC : : EF : BC,

pues que BG es igual á *ef* (§. 54), y esta lo es á EF. Reuniendo finalmente esta última proporcion comun á la anterior por medio de la razon DF : AC, que es comun á las dos, nos resultará la siguiente serie de razones iguales:

DE : AB : : DF : AC : : EF : BC;

en la cual se nos manifiesta que los lados homólogos de los triángulos ABC y DEF son entre sí proporcionales.

65. De esta proposicion se sigue que son semejantes dos triángulos:

1.° Cuando dos ángulos del uno sean respectivamente iguales á dos ángulos del otro, pues que en tal caso el ángulo restante del primero es necesariamente igual (§. 52) al restante del segundo:

2.° Siempre que sean entre sí paralelos los tres lados del uno á los tres del otro.

3.° Cuando los lados del uno sean respectivamente perpendiculares á los del otro.

La segunda de estas tres proposiciones es evidente por lo tocante á los ángulos colocados segun lo estan los dos ABC y DEF; porque los ángulos que como el A y el D tienen respectivamente paralelos los lados que los comprenden, y dirigida su abertura en un mismo sentido, son necesariamente iguales entre sí (§. 50).

Con respecto á los triángulos que se nos presentan en una situacion trastornada, como los que vemos en la figura 39, es claro que si prolongamos el lado EF del triángulo DEF hasta que corte los del triángulo ABC en G y en H, los ángulos AGH y DEF, como alternos externos que son con respecto á las paralelas AB y DE, y á la secante FH, deberán ser entre sí iguales: asimismo lo serán los ángulos AHG y DFE, como alternos internos que son con respecto á las paralelas AC y DF. Será pues semejante al triángulo AGH el EDF, asi como el AGH lo es al ABC, por ser los ángulos AHC y AGH iguales á los ángulos ACB y ABC, como correspondientes que son con respecto á las paralelas GH y BC y á las secantes AC y AB.

Es de consiguiente bien manifiesto que en el caso propuesto son entre sí paralelos los lados homólogos.

A fin de demostrar la tercera y última parte, supongamos á los dos triángulos ABC y DEF, fig. 40, colocados de manera que el lado EF sea perpendicular á la BC prolongada; que el lado DF prolongado sea perpendicular á la AC, y por último, que el lado ED prolongado sea perpendicular á la AB. Tírense por el punto A, opuesto al lado BC perpendicular al EF las rectas AG y AH respectivamente paralelas á las otras dos rectas DF y DE lados del triángulo DEF, y de las cuales la una es perpendicular á la AC y la otra á la AB. Ahora bien, los ángulos CAG y BAH han de ser rectos por suposicion, y de consiguiente si á cada uno de ellos se agrega el mismo ángulo CAH, los dos ángulos resultantes BAC y GAH deben ser entre sí iguales; y siéndolo los ángulos GAH y EDF por tener por construccion sus lados respectivamente paralelos entre sí, y sus aberturas dirigidas en un mismo sentido, habrán de ser necesariamente entre sí iguales los ángulos BAC y EDF. Fig. 40.

Tirando despues por el punto B las rectas BI y BK respectivamente paralelas á los lados EF y DE, resultarán formados los dos ángulos rectos CBI y ABK, de los cuales, quitada la parte comun ABI, quedarán por residuos iguales los ángulos ABC ó IBK, y siendo este último igual á DEF, á causa de ser respectivamente paralelos los lados BI y BK del uno á los lados EF y DE del otro, habrán de ser tambien iguales entre sí los ángulos ABC y DEF. Y teniendo los dos triángulos ABC y DEF dos ángulos del uno respectivamente iguales á dos del otro, deberán por consiguiente ser semejantes.

Por otra parte se ve que los lados homólogos son los respectivamente perpendiculares; pues que siendo el ángulo D igual al A, el lado EF es homólogo al BC, y asi de los demas.

TEOREMA.

66. *Dos triángulos son semejantes siempre que un ángulo del uno sea igual á otro del otro, y que sean proporcionales los cuatro lados que forman á los dos ángulos iguales.*

Demostracion. Si el ángulo A del triángulo ABC,
Fig. 38. fig. 38, fuere igual al ángulo D del triángulo DEF, y tenemos al mismo tiempo que AB : DE : : AC : DF, tomaremos en los lados AB y AC del primer triángulo las dos partes A*e* y A*f* respectivamente iguales á los lados DE y DF del segundo; y tirando la recta *ef* resultará formado el triángulo A*ef* totalmente igual al triángulo DEF (§. 16), y la recta *ef* que corta los lados del triángulo BAC en partes proporcionales, pues que por suposicion

AB : DE ó A*e* : : AC : DF ó A*f*,

habrá de ser paralela á BC (§. 60); y los ángulos *e* y *f* respectivamente iguales á los E y F, lo serán tambien á los ángulos B y C; y de consiguiente, teniendo los dos triángulos ABC y DEF respectivamente iguales los ángulos del uno á los del otro, deben necesariamente ser semejantes (§. 64).

TEOREMA.

67. *Dos triángulos, de los cuales nos conste que los tres lados del uno son proporcionales á los tres del otro, son semejantes.*

Demostracion. Supongamos que en los triángulos ABC y DEF se nos presente la siguiente serie de razones iguales:

AB : DE : : AC : DF : : BC : EF.

Si se toma de AB una parte A*e* igual al DE, y se tira una recta *ef* paralela á BC, los triángulos ABC y A*ef*, semejantes entre sí (§. 56), nos darán:

AB : A*e* : : AC : A*f* : BC : *ef*;

y siendo A*e* igual á DE, todas las razones de esta segunda serie deben necesariamente ser iguales á las de la primera; y siendo unos mismos los antecedentes de entrambas, deberán serlo asimismo los consecuentes; por cuyo medio tendremos A*f*=DF; *ef*=EF. De consiguiente el triángulo DEF es totalmente igual al A*ef*; y siendo este último semejante al ABC, lo será asimismo el primero DEF.

PROBLEMA.

68. *Construir sobre una recta dada* EF *un triángulo semejante al* ABC.

Solucion. Podemos ejecutarlo de diferentes modos, sirviéndonos para ello de cualquiera de los varios caracteres por cuyo medio venimos en conocimiento de la semejanza de dos triángulos. Proponiéndonos pues formar sobre la recta dada EF un triángulo semejante al ABC, podremos conseguirlo:

1.º Tirando por los dos extremos E y F rectas que hagan con la EF los dos ángulos E y F, respectivamente iguales á los dos B y C (§. 65):

2.º Haciendo en el punto F sobre la recta EF un ángulo igual al B, y tomando por segundo lado de este ángulo E una distancia DE, cuarta proporcional á las tres líneas BC, EF y AB; por cuyo medio tendremos dos triángulos entre sí semejantes, pues que un ángulo del uno es igual á otro ángulo del otro, estando comprendidos estos dos ángulos iguales por lados entre sí proporcionales (§. 66):

3.º Por último, hallando primeramente la cuarta proporcional á las tres rectas BC, EF y AB; y en seguida la cuarta proporcional á las BC, EF y AC; y formando con estas dos líneas que ya suponemos determinadas, y con la dada EF el triángulo DEF; en cuyo caso los dos triángulos DEF y ABC serán entre sí semejantes, por ser los tres lados del uno proporcionales á los tres del otro (§. 67).

TEOREMA.

69. *Cuantas rectas* AB, AC, AD, AE, AF *queramos*, fig. 41, *tiradas por un mismo punto* A, *y encontradas por dos paralelas* GL *y* BF, *estan cortadas por estas paralelas en partes proporcionales, asi como lo estan las mismas paralelas.*

Fig. 41.

Demostracion. Siendo entre sí semejantes los triángulos BAC y GAH (§. 65), nos darán esta serie de razones iguales:

AB : AG : : AC : AH : : BC : GH;

y los triángulos CAD y HAI nos darán la siguiente:

AC : AH : : AD : AI : : CD : HI;

los triángulos DAE é IAK nos darán esta otra:

AD : AI : : AE : AK : : DE : IK;

y los triángulos EAF y KAL la que sigue:

AE : AK : : AF : AL : : EF : KL.

Todas las razones de estas series son entre sí iguales, pues que la segunda razon de cada serie es la primera de la que la sigue. No tomando primeramente de todas ellas

sino las en que se comparan líneas tiradas desde el punto A, tendremos:

AB : AG : : AC : AH : : AD : AI : : AE : AK : : AF : AL;

y reuniendo despues las en que se comparan las partes de las paralelas BF y GL, nos resultará que

BC : GH : : CD : HI : : DE : IK : : EF : KL;

lo cual nos hace ver que estas paralelas estan cortadas en partes proporcionales.

Considerando ahora los triángulos BAC, CAD, DAE y EAF, como que dos de sus lados se hallan cortados por una recta paralela al tercer lado, tendremos (§. 59):

AG : GB : : AH : HC;
AH : HC : : AI : ID;
AI : ID : : AK : KE;
AK : KE : : AL : LF;

de donde se infiere que

AG : GB : : AH : HC : : AI : ID : : AK : EK : : AL : LF;

de lo cual resulta que las rectas AB, AC, AD, AE y AF estan cortadas por la GL paralela á la BF en partes proporcionales.

PROBLEMA.

70. *Dividir una recta dada en partes proporcionales á las de otra ya dividida.*

Solucion. Sea *gl* la línea que nos proponemos dividir, y BF la que se nos da ya dividida. Descríbase sobre esta última un triángulo equilátero BAF, efectuando para ello lo prescrito (§. 21); es decir, describiendo desde los puntos B y F como centros, y tomando por radio á la recta dada BF dos circunferencias de círculo; aplíquese despues al lado AB desde A hasta G la recta *gl*, y ejecútese lo mismo en el lado AF desde A hasta L; tírese por último la línea GL, y las rectas que junten con el punto A á los C, D, E de la division de la recta dada BF cortarán á la línea GL, igual á la *gl* en partes proporcionales á las de BF, segun lo requiere la propuesta de la cuestion.

Con efecto, pues que AB=AF, y AG=AL, tendremos esta proporcion evidente AB : AG : : AF : AL; de la cual resulta (§. 60) que la GL es paralela á la BF. Siendo pues semejante al triángulo BAF el GAL, tendremos esta proporcion:

AB : AG : : BF : GL;

y siendo por construccion BF=AB, es consiguiente que GL=AG=*gl*. Segun esto, y en vista del teorema antecedente, las paralelas GL y BF estan divididas en partes entre sí proporcionales.

Si la línea que se nos proponga para dividirla fuere $g'l'$ mayor que la BF que se nos da dividida, habremos de prolongar los lados AB y AF indefinidamente por la parte de abajo de la BF; y deberemos en seguida aplicar la recta $g'l'$ al lado AB desde A hasta G′, y lo mismo al lado AF desde A hasta L′; y por último tiraremos la G′L′; despues de lo cual, si prolongamos, como es necesario, las rectas AC, AD y AE, dividirán á la G′L′en los puntos H′, I′, K′ en partes proporcionales á las de la recta BF.

71. *Observacion.* La cuestion precedente puede tambien resolverse del siguiente modo:

Fig. 42. Sea AH, fig. 42, la recta que se nos haya dado para efectuar su division. Tírese por su extremo A una recta indefinida AP que forme con la dada AH un ángulo cualquiera PAH, y sobre la cual colóquense, á continuacion unas de otras, todas las partes en que esté dividida

la línea que se nos ha dado para que nos sirva de modelo en la nueva division. Júntese el extremo P con el H de la línea que nos proponemos dividir; y en seguida se tirarán por los puntos I, K, L, M, N y O las rectas IB, KC, LD, ME, NF, OG paralelas á PH, las cuales cortarán á la AH en partes proporcionales á las de AP.

Este último método se demuestra haciéndose cargo de que el triángulo ACK, cuyos dos lados AC y AK estan cortados por la recta BI paralela al tercer lado CK, nos da esta serie de razones iguales (§. 59):

AB : AI : : AC : AK : : BC : IK;

el triángulo ADL, considerado con respecto á la recta CK, nos da la siguiente:

AC : AK : : AD : AL : : CD : KL;

el triángulo AEM, considerado con respecto á la recta LD, nos da esta otra:

AD : AL : : AE : AM : : DE : LM;

y asi de los demas.

Todas estas series de razones se enlazan unas con otras por medio de la segunda razon de cada una, que viene á ser la primera de la serie que inmediatamente la sigue. No tomando de todas las razones mas de las que contienen las divisiones de la recta AP, tendremos:

AB : AI : : BC : IK : : CD : KL : : DE : LM &c.

lo cual manifiesta que las partes AB, BC, CD, DE &c. de la recta AH son proporcionales á las de AP.

Se puede simplificar un poco este último procedimiento, tirando por el punto H una recta QH paralela á la AP, y tomando en ella desde el extremo H las partes HX, XV, VU, UT &c. respectivamente iguales á las partes PO, ON, NM, ML &c., y juntando los correspondientes puntos de division, las rectas que los junten, que (§. 54) deben ser entre sí paralelas, cortarán á la recta AH en partes proporcionales á las de la AP ó á las de la HQ.

72. 1.º *Corolario.* Si en la figura 41 las partes de la recta BF, y en la figura 42 las de la AP fueran entre sí iguales, las de la recta GL en la primera, y las de la recta AH en la segunda, habrian de ser tambien iguales entre sí.

De esto se sigue que el procedimiento del §. 70 y el del §. 71 nos pueden servir para dividir una línea recta en un número cualquiera de partes iguales; para lo cual es necesario mirar primeramente como indefini-
Fig. 41. da á la recta BF, fig. 41; tomar de ella una parte BC de magnitud arbitraria, y repetirla á continuacion un número de veces igual al de las partes en que debe dividirse la recta dada GL. Siendo el punto F el extremo de estas partes, se acabará la construccion con arreglo á lo que hemos practicado (§. 70).

Observando lo hecho (§. 71), habremos de tomar
Fig. 42. de la recta AP, fig. 42, considerada como indefinida las partes iguales y arbitrarias, á continuacion unas de otras, pues que la recta AH representa la que se nos ha dado para ejecutar su division.

73. 2.º *Corolario.* La division de las rectas en partes iguales es el fundamento de la construccion de las *escalas*; es decir, de las rectas que se destinan á que sirvan de medida de las demas. Con efecto, si desde luego se hubiese dividido en partes iguales la recta CD, fig. 3, no hubiéramos necesitado para averiguar la razon de la AB á la CD, ninguna otra cosa mas que determinar cuántas de aquellas partes iguales de la CD contenia la AB, y por este medio habríamos puesto en claro la razon de

estas dos rectas, á lo menos con tanta mayor aproximacion, cuanto mas pequeñas fuesen las partes iguales de la recta CD. La imperfeccion de los instrumentos y la limitacion de nuestros sentidos, nos obligan con frecuencia en la division de líneas, cuyas partes se nos escapan por su pequeñez; y para ensanchar mas nuestras facultades con relacion á este punto, se ha hecho uso de la division por *trasversales*, que manifestamos en la fig. 43, Fig. 43.
y cuya construccion es la siguiente:

Habiendo dividido primeramente la recta AC en un número cualquiera de partes iguales, tales como BC, y queriendo todavía dividir á BC en un número de partes demasiado grande y expuesto á que se las pueda confundir; se levantarán á la AC, para evitar este inconveniente, por los extremos A y C las dos perpendiculares AA'''' y CL; se tomará de la AA'''' una parte arbitraria AA', y se repetirá esta á continuacion, una de otra, tantas veces cuantas indique el número de partes en que nos propongamos dividir á la BC, las cuales en la figura son solo cuatro; por los puntos de division A', A'', A''' se tirarán rectas paralelas á la AC; y por último se juntarán los dos puntos B y L con la línea trasversal BL.

Si despues de hecho esto se tira la recta BK paralela á la CL, resultarán los triángulos BDE, BFG, BHI, BKL evidentemente semejantes entre sí (§. 65), y que nos darán estas proporciones:

$$BD : BK :: DE : KL;$$
$$BF : BK :: FG : KL;$$
$$BH : BK :: HI : KL;$$

de las cuales se deduce: 1.º que siendo BD una cuarta parte de BK, lo habrá tambien de ser DE de KL ó de BC, que (§. 54) es igual á KL: 2.º que siendo BF las dos cuartas partes ó la mitad de BK, lo debe tambien ser FG de KL ó de BC: 3.º que siendo BH las tres cuartas partes de BK, lo será igualmente HI de KL ó de BC.

Por este medio se ve que si tomamos en la primera, en la segunda y en la tercera de las rectas paralelas á AB las distancias $A'E$, $A''G$, $A'''I$, respectivamente iguales á $A'D+DE$, $A''F+FG$, $A'''H+HI$, tendremos en ellas las siguientes:

$$AB+\tfrac{1}{4}BC;\ AB+\tfrac{2}{4}BC;\ AB+\tfrac{3}{4}BC.$$

Esto nos parece suficiente para dar á conocer cómo se pueda construir una escala de trasversales con destino á obtener cualesquiera divisiones, y el uso que puede hacerse de ella.

Cuando la escala contiene diez paralelas á la recta AB, toma el nombre de *escala de décima*, porque en tal caso nos da las décimas de BC.

TEOREMA.

74. *Si del vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo se baja una perpendicular á su lado opuesto, llamado* la hipotenusa:

1.º *La perpendicular dividirá al triángulo propuesto en otros dos, que les serán semejantes, y que de consiguiente lo serán entre sí:*

2.º *La misma perpendicular dividirá á la hipotenusa en dos partes ó segmentos tales, que cada uno de los lados del ángulo recto será medio proporcional entre el segmento adyacente y la hipotenusa entera:*

3.º *La perpendicular será media proporcional entre los dos segmentos de la hipotenusa.*

Demostracion. Supuesto que es rectángulo en B el

triángulo ABC, fig. 44, y que la recta BD es perpendicular á la AC, deberán ser semejantes (§. 65) los triángulos ABC y ABD, por ser dos ángulos del uno respectivamente iguales á dos del otro; á saber, el ángulo A, que es comun á entrambos, y el ángulo recto ABC del primero, igual al ángulo recto ADB del segundo. El triángulo BDC es por lo mismo semejante al ABC, por ser comun á los dos el ángulo C, siendo recto el ángulo BDC del uno como lo es el ángulo ABC del otro. Fig. 44.

Si comparamos sucesivamente con el triángulo propuesto ABC cada uno de los triángulos parciales ABD y BDC, y tenemos presente que los dos ángulos ABD y CBD son respectivamente iguales á los dos C y A, echaremos de ver las siguientes proporciones entre los lados homólogos:

$$AD : AB :: AB : AC;$$
$$CD : BC :: BC : AC;$$

las cuales forman la segunda parte de nuestra proposicion.

Comparando ahora uno con otro á los dos triángulos parciales ABD y BCD, tendremos estotra:

$$AD : DB :: DB : DC;$$

que viene á ser la tercera y última parte de la propuesta que hemos establecido.

75. *Corolario.* Del teorema que acabamos de demostrar se infiere que estando referidos á una medida comun los tres lados de un triángulo rectángulo, la segunda potencia, llamada ordinariamente el *cuadrado*, del número que nos indique la longitud de la hipotenusa, es igual á la suma de las segundas potencias ó cuadrados de los números con que expresamos la longitud de los otros dos lados.

Con efecto, de las dos proporciones

$$AD : AB :: AB : AC,$$
$$CD : BC :: BC : AC,$$

resulta que $AD = \frac{\overline{AB}^2}{AC}$ y que $CD = \frac{\overline{BC}^2}{AC}$.

Siendo pues la hipotenusa $AC = AD + CD$, será por consiguiente $AC = \frac{\overline{AB}^2}{AC} + \frac{\overline{BC}^2}{AC}$; de donde fácilmente se deduce que $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$.

De esto se sigue que podemos determinar sin la menor dificultad cuánta sea la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, luego que conozcamos la que tiene cada uno de los otros dos lados. Si, por ejemplo, $AB = 3$, y $BC = 4$, tendremos $\overline{AC}^2 = 9 + 16 = 25$; de lo cual se infiere que $AC = \sqrt{25} = 5$.

Del mismo modo podemos determinar la longitud de cualquiera de los dos lados del ángulo recto, cuando previamente conozcamos la de la hipotenusa, y la del otro lado restante; porque de la ecuacion $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ se deducen estas otras dos: $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$, y $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$. Si, por ejemplo, fuere $AC = 13$, y $BC = 12$, tendremos:

$\overline{AB}^2 = 169 - 144 = 25$; de donde se infiere que

$$AB = 5.$$

Generalmente, $AC = \sqrt{\overline{BA}^2 + \overline{BC}^2}$; $AB = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2}$; $BC = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2}$.

TEOREMA.

76. *Estando referidos á una medida comun los tres lados de un triángulo cualquiera, y expresados por medio de los números que les corresponden; si desde el vértice de uno de los ángulos se baja sobre su lado opuesto una perpendicular, la segunda potencia de uno de los lados que forman el ángulo es igual á la suma de las segundas potencias de los otros dos lados, menos dos veces el producto del lado sobre que caiga la perpendicular, multiplicado por la distancia de la perpendicular al ángulo opuesto al lado que por primero hayamos escogido, en caso que este ángulo opuesto sea agudo; y mas dos veces el mismo producto, en caso que el mismo ángulo sea obtuso; es decir, que el primero,* fig. 45 y 46, *tendremos;* Fig. 45 y 46.

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2AB \times BD,$$

y en el segundo, fig. 47, Fig. 47.

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2AB \times BD.$$

Demostracion. Cuando hemos dividido con la perpendicular CB, fig. 45, al triángulo ABC en los otros dos ACD y BCD rectángulos en D, tenemos en el primero Fig. 45.

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2,$$

y en el segundo $\overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2$.

Sustituyendo pues esta expresion del valor de $\overline{CD}^2$ en la del $\overline{AC}^2$, tendremos que $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2$.

Ahora, viendo que $AD = AB - BD$, la expresion de la segunda potencia ó del cuadro $\overline{AD}^2$ equivaldrá á $\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 - 2AB \times BD$*. Sustituyendo, pues, esta última expresion en la última del valor de $\overline{AC}^2$, nos resultará que $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 - 2AB \times BD + BC - BD$; la cual se reduce á la siguiente:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2AB \times BD.$$

Fig. 46. En el caso que nos presenta la figura 46, y en el cual cae fuera del triángulo la perpendicular, consiste la diferencia en que $AD = BD - AB$, sin que por eso deje de ser la misma la expresion del valor de su cuadrado $\overline{AD}^2$; la cual es:

$$\overline{AD}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AB}^2 - 2AB \times BD,$$

de modo que $\overline{AD}^2$ tiene la misma expresion que en el caso anterior. Hé ahí la primera parte del teorema.

Fig. 50. Mas cuando el lado AC, fig. 50 esté opuesto á un ángulo obtuso, debiendo necesariamente caer fuera del triángulo ABC la perpendicular, tendremos todavía en los dos triángulos ACD y BCD rectángulos en D, que

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2; \text{ y que } \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2;$$

de donde se infiere que $AC = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2$;

mas como tenemos que $AD = AB + BD$, y de consiguiente el cuadrado $\overline{AD}^2$ equivale á $\overline{AB}^2 + 2AB \times BD + \overline{BD}^2$; si sustituimos esta expresion en la que acabamos de determinar del valor de $\overline{AC}^2$, nos resultará esta otra:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + 2AB \times BD + \overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2;$$

la cual se reduce á la siguiente:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2AB \times BD;$$

en donde se ve el segundo caso de nuestro teorema.

N. B. Las partes AD y BD determinadas en el lado AB por la perpendicular CD, se llaman *segmentos*.

77. Combinando con este teorema el inmediato anterior, echaremos de ver que cuando conozcamos la longitud de cada uno de los tres lados de un triángulo, podremos determinar si el ángulo opuesto á cualquiera de ellos es agudo, recto ú obtuso. Con efecto, en el primer caso en que sabemos que $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2AB \times BD$, es bien claro que la segunda potencia del lado AC es menor que la suma de las de los otros dos lados AB y BC.

En el segundo caso, en el cual el ángulo B es recto, tenemos que $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$; de modo que la segunda potencia del lado AC es exactamente igual á la suma de las de los otros dos lados.

Finalmente, en el tercer caso, en que $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2AB \times BD$, la segunda potencia del lado AC es mayor que la suma de los otros dos lados.

Aplicando estas obsrrvaciones al triángulo cuyos lados tengan de longitud la expresada por los números 5, 7 y 8, cuyas segundas potencias son 25, 49 y 64, ven-

* En esta proposicion, en que considero á las líneas como valuadas en números, he debido suponer que se tiene conocimiento del modo de componer la segunda potencia de un número que sea la suma ó la diferencia de otros dos; mayormente cuando no es dificil adquirirlo por solo el propio razonamiento.

dremos en conocimiento de que el ángulo opuesto al mayor lado 8 es agudo, pues que su segunda potencia 64 es menor que la suma 74 de las segundas potencias de los otros dos lados.

Bueno será tener presente que la especie del ángulo opuesto al mayor lado nos debe hacer conocer la del triángulo (§. 53).

De los polígonos.

78. Las superficies planas terminadas por un conjunto cualquiera de líneas rectas, se llaman *polígonos*.

El mas sencillo de todos es el *triángulo*. Los polígonos de cuatro lados se llaman por lo general *cuadriláteros*:

los de cinco, *pentágonos*;
los de seis, *exágonos*;
los de siete, *eptágonos*;
los de ocho, *octágonos*;
los de nueve, *eneágonos*;
los de diez, *decágonos*;
&c.

No se continúa, por lo comun, esta nomenclatura mas arriba del polígono de diez lados, sino para llamar *dodecágono* al que tenga doce lados, y *pentedecágono* al que tenga quince.

Fig. 48. y 49. En las figuras 48 y 49 se nos presenta en ABCDEF un polígono de seis lados ó un *exágono*. Teniendo todos los ángulos de la primera figura su abertura dirigida hácia la parte interior del polígono, se les da el nombre de ángulos *salientes*; y al ángulo DEF de la figura 49, cuya abertura está mirando á la parte exterior del polígono, se le llama ángulo *entrante*.

Las rectas, que como la CA, la CF &c. que estan tiras de un ángulo á otro del polígono, sin ser los ángulos adyacentes á un mismo lado, se llaman *diagonales*.

79. Entre los cuadriláteros ó polígonos de cuatro lados se designa con particularidad el llamado *paralelógramo*, porque tiene á cada dos de sus lados paralelos entre sí.

Del §. 54 se infiere: 1.º que cada una de las diagoneles AC y BD divide al paralelógramo en dos triángulos totalmente iguales entre sí:

2.º Los lados opuestos AB y DC, AD y BD, son entre sí respectivamente iguales:

3.º Que recíprocamente, si los lados opuestos de una figura de cuatro lados fueren entre sí iguales, ó si dos lados opuestos fueren entre sí iguales y paralelos, la tal figura habrá de ser un paralelógramo.

TEOREMA.

80. *Las dos diagonales* AC y BD *de un paralelógramo se cortan mútuamente en dos partes iguales.*

Demostracion. Los triángulos AOD y BOC son totalmente iguales entre sí (§. 18), porque lo son por suposicion los lados AD y BC, y lo son asimismo los ángulos DAO y OCB, como alternos internos que son con respecto á la secante AC y á las paralelas AD y BC; y por último son entre sí iguales los ángulos ADO y OBC, como alternos internos que son con respecto á la secante BD. Luego AO=OC y DO=OB. Fig. 50.

TEOREMA.

81. *Juntando un ángulo cualquiera de un polígono*

con todos los demas, quedará dividido el polígono en tantos triángulos como lados tenga, menos dos.

Demostracion. Esta proposicion se nos hace casi evi-
Fig. 48. dente con solo fijar nuestra atencion sobre la figura 48, en la cual se nos pone de manifiesto que las diagonales CA, CF y CE, tiradas desde el ángulo C á los ángulos A, F y E, dividen al polígono ABCDEF de seis lados en los cuatro triángulos ABC, ACF, FCE y ECD; siendo mas fácil echar de ver que habremos de observar un resultado semejante en todo polígono de cualquier número de lados, en haciéndonos cargo de que cada uno de los triángulos extremos ACB y ECD, entre los cuales estan comprendidos todos los demas en que puede dividirse el polígono propuesto, contienen dos de los lados del mismo polígono, mientras que cada uno de los otros triángulos intermedios no contiene mas de uno solo. Habrá, pues, en los triángulos extremos cuatro lados del polígono; y el número de los intermedios deberá ser igual al de los lados del polígono menos cuatro. De lo cual se deduce que el número total de triángulos es igual al de los lados del polígono, menos dos, segun manifiesta la propuesta.

82. *Corolario.* A lo que acabamos de hacer ver es consiguiente que la suma de todos los ángulos internos ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB &c. de cualquier polígono equivale á tantas veces dos rectos como lados tenga, menos dos; porque la suma de los tales ángulos internos del polígono viene á ser la misma que la de los ángulos de los triángulos: y ya se sabe que la suma de los ángulos de cada triángulo equivale á la de dos ángulos rectos, y que el polígono contiene tantos triángulos como lados tengan, menos dos.

En la figura 49 el ángulo entrante DEF es externo Fig. 49.
y no interno, y haciendo partir las diagonales desde el vértice E del ángulo entrante se sustituye en lugar de este para determinar la suma de los ángulos internos, la de los ángulos DEC, CEB, BEA y AEF, que agregada al entrante DEF, equivale á la de cuatro ángulos rectos (§. 13).

TEOREMA.

83. *Si, como se ve en el primer polígono de la figura 48, el cual no tiene ningun ángulo entrante, se prolongan en un mismo sentido todos sus lados, la suma de los ángulos externos formados por cada lado y por la prolongacion del que se le halla contiguo, equivaldrá á cuatro rectos, cualquiera que sea el número de los lados del polígono.*

Demostracion. Cada uno de los ángulos externos, como *a*AB, agregado al interno que le es adyacente, equivale á la suma de dos ángulos rectos; y esto se halla repetido en el contorno de todo el polígono tantas veces como lados ó ángulos tenga. De consiguiente la suma de todos los ángulos, tanto internos como externos, equivaldrá á la suma de tantas veces dos ángulos rectos como lados tenga el polígono; y rebajando de esta suma total la de los ángulos internos, que como ya se sabe, asciende á la de tantas veces dos ángulos como lados tenga el polígono, menos dos, resultará que la suma de los ángulos externos equivalga á la de dos veces dos ángulos rectos ó á cuatro ángulos rectos.

84. *Observacion.* Dos polígonos serán iguales cuando se compongan de un mismo número de triángulos respectivamente iguales colocados en una disposicion seme-

jante, ó reunido de un mismo modo; pues bien se ve que con estas condiciones dos polígonos, puesto el uno de ellos sobre el otro, se cubrirán y confundirán perfectamente.

TEOREMA.

85. *Siempre que de un polígono conozcamos todos los lados, menos uno, y que al mismo tiempo conozcamos los ángulos comprendidos por los lados dados, está determinado el polígono, y se le puede construir fácilmente.*

Demostracion. Si del polígono ABCDEF conocemos los lados AB, BC, CD, DE, EF y los ángulos que estos lados forman, podremos hacer sobre el nuevo lado $A'B'=AB$ en su extremo B' el ángulo $A'B'C'=ABC$, y en seguida tomar $B'C'=BC$; hacer en el extremo C' del lado $B'C'$ el ángulo $B'C'D'=BCD$; tomar despues $C'D'=CD$; hacer en el extremo D' del lado $C'D'$ el ángulo $C'D'E'=CDE$, y á continuacion tomar $D'E'=DE$; construir en el extremo E' el ángulo $D'E'F'=DEF$, y tomar por último $E'F'=EF$. Habiendo llegado por este medio al punto F', no nos queda sino un solo modo de juntarlo con el punto A', para cerrar y concluir el polígono $A'B'C'D'E'F'$.

Bien visible es que este nuevo polígono será igual en todas sus partes al polígono anterior ABCDEF, porque si se coloca aquel sobre este, poniendo el lado $A'B'$ sobre su igual AB, el lado $B'C'$ caerá asimismo sobre su igual BC; y continuando del mismo modo de uno en otro, echaremos de ver que los puntos $A'B'C'D'E'F'$ habrán de caer respectivamente sobre los puntos A, B, C, D, E, F; de lo cual se sigue que los dos polígonos se ajustan y confunden perfectamente.

86. *Observacion.* Hay otros muchos medios de averiguar la total igualdad de dos polígonos; mas nosotros nos hemos limitado á dar en el anterior un ejemplo de esta igualdad con el fin de hacer ver que un polígono de cualquier número N de lados, y que de consiguiente tiene el mismo número N de ángulos, está determinado con solo que conozcamos de las 2N cosas que concurren á su formacion, un número de ellas representado por la expresion $2N-3$. Aqui se notará, como se debe haber notado en los diferentes casos de la total igualdad de los triángulos, que los N ángulos no han de contarse sino por $N-1$ datos, pues que la suma de todos los ángulos es una cantidad que en todos casos puede mirarse como dada (§. 82).

87. Se llaman polígonos *semejantes* aquellos cuyos ángulos son respectivamente iguales los del uno á los del otro, y cuyos lados homólogos ó colocados en la misma disposicion son proporcionales.

TEOREMA.

88. *Dos polígonos compuestos de un mismo número de triángulos respectivamente semejantes, y semejantemente dispuestos, tienen respectivamente iguales los ángulos del uno á los del otro, y proporcionales los lados homólogos, y de consiguiente son entre sí semejantes.*

Demostracion. Sean BAEDC y *baedc*, fig. 51, los dos polígonos propuestos, y pues que los triángulos ABC y *abc* son semejantes, habrán de tener sus ángulos respectivamente iguales, y de consiguiente $B=b$; $BAC=bac$; por la misma razon en los triángulos semejantes ACE y *ace* tenemos la igualdad respectiva de los ángulos; es decir, que Fig. 51.

CAE=*cae*; CEA=*cea*;

á lo cual es consiguiente que el ángulo BAE, formado por la reunion de los dos ángulos BAC y CAE en el primer polígono, sea igual al ángulo *bae* formado de la reunion de los otros dos *bac* y *cae* en el segundo. Del mismo modo se hará ver la igualdad AED y *aed* y la de EDC y *edc*; y por lo que respecta á los últimos ángulos BCD y *bcd*, bien claro se nos muestra que son entre sí iguales, por estar formado el primero por la reunion de los tres BCA, ACE y ECD, al mismo tiempo que el segundo se nos presenta formado por el conjunto de los otros tres ángulos *bca*, *ace* y *ecd*, los cuales como ángulos homólogos de triángulos semejantes, habrán de ser iguales á los tres primeros.

Desenvolviendo las proporciones que resultan de la semejanza de los triángulos ABC y *abc*, de ACE y *ace*, de ECD y *ecd* tendremos:

BC : *bc* : : AB : *ab* : : AC : *ac*;
AC : *ac* : : AE : *ae* : : CE : *ce*;
CE : *ce* : : ED : *ed* : : CD : *cd*;

Siendo la primera razon de cada serie la misma que la última de la serie inmediata anterior, deben ser entre sí iguales todas las razones que se nos ofrecen en todas las series. No tomando pues de ellas mas que los que contengan los lados homólogos de los dos polígonos, nos resultará:

BC : *bc* : : AB : *ab* : : AE : *ae* : ED : *ed* : CD : *cd*;

lo cual nos manifiesta que los lados homólogos de los dos polígonos son entre sí proporcionales.

TEOREMA.

89. *Dos polígonos semejantes se dividen en igual*

número de triángulos respectivamente semejantes, y semejantemente dispuestos.

Demostracion. Siendo por suposicion los ángulos de uno de los polígonos respectivamente iguales á los del otro, y siendo al mismo tiempo los lados del primero proporcionales á los homólogos del segundo, tendremos desde luego que el ángulo B es igual *b*, y que BC : *bc* : : AB : *ab*; de lo cual se sigue que los dos triángulos ABC y *abc* sean semejantes (§. 66); y que por tanto los ángulos BAC y *bac* sean entre sí iguales. Si de los ángulos BAE, *bae*, que como propios de los polígonos se suponen entre sí iguales, se quitan los ángulos BAC y *bac*, los residuos CAE y *cae* deberán ser entre sí iguales. Por otra parte, dándonos los triángulos semejantes ABC y *abc*, esta proporcion AB : *ab* : : AC : *ac*; y los polígonos esta otra AB : *ab* : : AE : *ae*, tendremos por resultado de ellas á la siguiente AC : *ac* : : AE : *ae*; de lo cual se sigue que los triángulos CAE y *cae* son entre sí semejantes (§. 66). Del mismo modo se puede hacer ver la semejanza que tienen los triángulos de un polígono con los del otro, cualquiera que sea el número de estos triángulos.

PROBLEMA.

90. *Construir sobre una recta dada un polígono semejante á otro dado.*

Solucion. Sean *bc* y BAEDC la recta y el polígono dados; hágase sobre *be* por uno de los métodos prescritos (§. 68) un triángulo *abc* semejante al ABC, por cuyo medio determinaremos el punto *a*; y para determinar el punto *e* se construirá del mismo modo sobre la recta *ac* un triángulo *cae* semejante al CAE, y asi de los demas.

*

De este modo habremos conseguido que el polígono *abcde* sea semejante al ABCDE, pues que estan formados de un mismo número de triángulos respectivamente semejantes y semejantemente dispuestos.

Si se colocase el lado *bc* sobre el BC desde C hasta *b'*, bastaria tirar por el punto *b'* la recta *b'a'*, paralela á la BA; tirar en seguida por el punto *a'* la recta *a'e'* paralela á la AE &c., á fin de construir los triángulos *b'Ca'* á *a'Ce'* &c., respectivamente semejantes á los triángulos BCA, ACE &c.; por cuyo medio quedará construido sobre el lado dado el polígono *b'a'e'd'* C, semejante al polígono BAEDC.

91. *Observacion.* Hasta aqui hemos tirado desde un mismo ángulo del polígono las diagonales que se terminan en todos los demas; pero los polígonos pueden ser divididos en triángulos de otros muchos modos; y las proposiciones anteriores se extienden con igualdad á estos casos, entre los cuales suele ocurrir uno, que es muy conveniente conocer: es justamente el en que se juntan todos los ángulos del polígono con los puntos extremos de uno de sus lados. Este caso se nos ofrece representado en la fi-
Fig. 52. gura 52, en la cual por medio de diagonales se han juntado los puntos C, D, E con los dos A y B.

1.° Es bien claro que la posicion de los tres primeros puntos está determinada con respecto á la recta AB, luego que esten dados los triángulos ABC, ABD y ABE; y de este modo se evidencia que para determinar un polígono, basta un número de triángulos que tenga dos unidades menos que el de los ángulos ó los lados del polígono. Se ve asimismo que si designamos por N este último número, la determinacion de la figura dependerá de las 2(N−2) diagonales tiradas de cada uno de los ángulos de la base, y de la magnitud de la misma base, lo cual hace subir á 2N−3 á todo el número de datos (§. 86).

2.° Sin grande dificultad se puede demostrar, casi del mismo modo que en los §§. 88 y 89, que si los triángulos ABC y *abc*, ABD y *abd*, ABE y *abe* fueren respectivamente semejantes, lo serán tambien los polígonos ABCDE y *abcde*, y que mútuamente si los polígonos lo son, lo serán los triángulos de consiguiente*.

TEOREMA.

92. *Si en dos polígonos semejantes se tiran dos rectas, semejantemente colocadas en cada uno de ellos; es decir, que pasen por puntos semejantemente colocados sobre lados homólogos, y que formen con estos lados ángulos entre sí iguales, ó que en cada polígono corten en partes proporcionales dos lados homólogos, deberán ser proporcionales las tales rectas á los lados homólogos de los polígonos.*

Demostracion. Sean las rectas GF y *gf*, tiradas de los puntos G y *g*; y sabiéndose que BG : *bg* : : AB : *ab*,

* Todo el arte de levantar los planos está en suma reducido á construir en el papel polígonos semejantes á los que se hallan formados sobre el terreno por los puntos cuyas situaciones respectivas queremos conocer. Bien claro se ve que por último análisis debe reducirse á imaginarnos que estos puntos se hallan enlazados unos con otros por medio de triángulos, y á medir en estos triángulos un número suficiente de ángulos ó de lados, que nos habiliten á construir otros semejantes en el papel, con arreglo á lo prescrito (§. 67). He ahí cuanto se puede decir acerca de este objeto, sin entrar en el pormenor de los instrumentos á propósito para medir los ángulos; descripcion que en los tratados generales se halla fuera de su lugar, es casi ininteligible á los que no hayan visto los tales instrumentos, y supérflua á los que tengan conocimiento de ellos.

supongamos que igualmente se sepa que son iguales los ángulos FGB y *fgb*; en tal caso los triángulos BGC y *bgc* han de ser entre sí semejantes á causa de ser iguales los ángulos B y *b*, y proporcionales los lados BG y *bg* á BC y á *bc*, pues que los unos y los otros lo son á AB y á *ab*. Tenemos, pues:

GC : *gc* : : BG : *bg*, ó : : AB : *ab*;

y ademas BCG=*bcg*; CGB=*cgb*.

De lo cual se infiere que GCF ó BCF−BCG es igual á *gcf* ó á *bcf*−*bcg*; y por ser FGB=*fgb*, nos resultará CGF ó FGB−CGB igual á *cgf* ó á *fgb*−*cgb*. Serán, pues, entre sí semejantes los triángulos FCG y *fcg*, y nos darán:

FG : *fg* : : FC : *fc* : : GC : *gc*, ó : : AB : *ab*;

pues que ya antes sabemos que GC : *gc* : : AB : *bc*.

Si en lugar de hacer iguales los ángulos FGB y *fgb* se hubiesen tomado los puntos F y *f* de modo que BG: *bg* : : FC : *fc*, serian en tal caso semejantes los triángulos FCG y *fcg*, por tener, como tienen, un ángulo igual comprendido por lados proporcionales. Las consecuencias serán las mismas que antes, y se demostrará en este caso la igualdad de los ángulos FGB y *fgb*.

TEOREMA.

93. *Los contornos ó perímetros de dos polígonos semejantes son entre sí como los lados homólogos de los mismos polígonos.*

Demostracion. Los polígonos semejantes ABCDE y *abcde* nos dan esta serie de razones iguales:

AB : *ab* : : BC : : *bc* : : CD : *cd* : : DE : *de* : : AE : *ae*;

de donde se infiere que

AB + BC + CD + DE + EA : *ab* + *bc* + *cd* + *de*+*ea* : : AB : *ab*;

es decir, que el contorno ó perímetro ABCDE es al contorno ó perímetro *abcde*, como el lado AB es á su homólogo *ab*.

De la línea recta y del círculo.

94. Ya hemos visto (§. 28) que desde un mismo punto no podian tirarse á una recta otras tres rectas entre sí iguales; de lo cual se infiere con evidencia que una recta no puede cortar á una circunferencia de círculo en mas que en dos puntos.

Toda recta que corte á la circunferencia de un círculo, y esté prolongada fuera de él, se llama su *secante*. La recta EF, fig. 53, es una secante del círculo Fig. 53.
AHBCG. La parte CD de esta recta, comprendida dentro del círculo, se llama *cuerda* del *arco* ó de circunferencia, cuyos extremos junta.

95. Se dice de general acuerdo que la cuerda CD, que reune los extremos de un arco CGD de la circunferencia del círculo, *subtende* al mismo arco; mas es necesario no perder de vista que la misma recta es al mismo tiempo cuerda del otro arco CHD, que agregado al GCD, componen entre los dos la circunferencia entera. De consiguiente, siempre que el primer arco sea menor que la semicircunferencia, el segundo habrá necesariamente de ser mayor que ella.

96. Cuando una cuerda pase por el centro del círculo, se la da el nombre de *diámetro*. La recta AB, que pasa por el centro O, es un diámetro.

Todos los diámetros de un mismo círculo son entre sí iguales, pues que cada uno de ellos equivale á dos radios puestos en línea recta; y ya se sabe que todos los radios son entre sí iguales.

Bien visible es que cualquier diámetro es la mayor de todas las rectas que pueden tirarse dentro de la circunferencia del círculo, pues cualquiera otra cuerda CD es menor (§. 19) que la suma de los dos radios OC y OD dirigidos á los extremos C y D.

97. El diámetro AB divide á la circunferencia y al círculo en dos partes iguales, porque si á lo largo de la recta AB se dobla toda la figura del círculo una de sus partes, la AGB se habrá de confundir con la restante AHB, debiendo coincidir con la mayor exactitud las dos partes de circunferencia, pues de lo contrario no estarian equidistantes del centro O todos los puntos de la circunferencia.

El mismo razonamiento hace tambien ver que dos círculos descritos con un mismo radio, ó con dos radios iguales, son entre sí totalmente iguales, porque si colocamos el centro del uno exactamente sobre el del otro, siendo como se supone, iguales entre sí los radios de los dos círculos, las circunferencias habrán necesariamente de ajustarse y confundirse una con otra.

TEOREMA.

98. *Siempre que apliquemos un arco de círculo sobre algun otro del mismo círculo, ó de otro descrito con el mismo ó con igual radio, de modo que cualesquiera dos puntos del arco aplicado caigan sobre el otro, y estando las dos convexidades dirigidas hácia un mismo lado, el arco aplicado se confundirá en toda su extension con el otro.*

Demostracion. Con efecto, si aplicamos el arco A′C′,
Fig. 54. fig. 54, al arco AE, colocando el punto A′ exactamente

sobre el A, y suponemos que caiga justamente en C el punto C′; y á consecuencia la cuerda A′C′ cubrirá con la mayor exactitud á AC; y como los radios O′A′ y O′C′ son iguales á los radios OA y OC, el centro O′ debe haber caido sobre el O (§. 20), y de consiguiente todos los puntos del arco A′C′ deben caer sobre los del arco AC, porque los primeros distan tanto de su centro O′ como los segundos distan del suyo O; por lo cual es claro que el arco A′C′ se confundirá con el AC *.

99. *Corolario.* De esto se sigue que en un mismo círculo ó en dos distintos círculos descritos con uno mismo ó con dos radios iguales, los arcos, cuyas cuerdas sean iguales, siendo ellos de una misma especie, es decir, ó ambos menores ó ambos mayores que la semicircunferencia, deben ser entre sí iguales. Con efecto, cuando las cuerdas esten colocadas una sobre otra, como en el caso precedente, los arcos se cubren y confunden exactamente.

Es igualmente verdadera la proposicion recíproca; á saber, siempre que en un mismo círculo ó en dos descritos con radios iguales fueren entre sí iguales dos arcos, sus cuerdas serán asimismo iguales, porque poniendo á los arcos uno sobre otro y ajustándose exactamente, las extremidades del primero se confunden con las del segundo. Asi que, colocado que sea sobre el arco AC el A′C′ de modo que el punto A′ se halle sobre el punto A y el C′

* La propiedad de la circunferencia del círculo que acabamos de demostrar, es tanto mas notable, cuanto que solo pertenece á esta curva y á la línea recta, y que nos manifiesta con la mayor evidencia la semejanza de todas las partes de la circunferencia del círculo, ó la uniformidad de su curvatura. Esta ha sido la razon que me ha movido á presentar el teorema bajo otra propuesta diferente de la que por lo comun tiene en la mayor parte de los libros elementales.

sobre el C, las rectas A'C' y AC se cubrirán exactamente, y por tanto serán entre sí iguales.

TEOREMA.

100. *En un mismo círculo ó en círculos iguales, el mayor arco tiene la mayor cuerda, y al contrario, con tal que los arcos comparados sean menores que la semicircunferencia.*

Demostracion. 1.° Siendo mayor que el arco AC el AE, será por consiguiente el ángulo AOE mayor que el ángulo AOC, y (§. 19) el lado AE del triángulo AOE será mayor que el lado AC del triángulo AOC, puesto que los dos triángulos AOE y AOC tienen entre sí iguales los lados AO y OE del uno á los AO y OC del otro.

2.° Siendo mayor que la cuerda AC la AE, el angulo AOE será mayor que el AOC, y de consiguiente el arco AE será mayor que el AC.

PROBLEMA.

101. *Dados que sean dos arcos de un mismo círculo ó de dos círculos iguales, determinar la razon de sus longitudes.*

Solucion. La cuestion propuesta se resolveria del mismo modo que la del §. 5, si pudieran aplicarse uno sobre otro los arcos de círculo, como se aplican una sobre otra dos líneas rectas; pero no pudiendo verificarse en la práctica semejante superposicion, se suple su uso sirviéndonos de las cuerdas, que siendo iguales, corresponden necesariamente á arcos iguales. La cuerda del arco CD,
Fig. 55. por ejemplo, fig. 55, podrá aplicarse dos veces sobre el arco AB desde A hasta E; y determinado por este medio el

arco AE, resultará compuesto de las dos partes A*d* y *d*E, iguales cada una de ellas á CD. Tendremos que

$$AB=2CD+EB.$$

Tómese ahora la cuerda de la última parte EB, y apliquesela sobre el arco CD desde C hasta F; lo cual puede en este caso efectuarse una sola vez resultando por exceso el arco FD; de donde se sigue que

$$CD=EB+FD:$$

por último, pudiendo la cuerda del segundo exceso FD aplicarse cuatro veces exactamente sobre el primero EB, nos resultará que

$$EB=4FD.$$

De este último valor, volviendo á subir á la determinacion de los arcos anteriores, hallaremos que

$$EB=4\,FD;\ CD=5\,FD;\ AB=14\,FD;$$

y estando contenido 14 veces en el arco AB, y 5 veces en el CD el arco FD, que es la medida comun de aquellos otros dos, podremos estar ciertos que los dos arcos propuestos tienen entre sí la misma razon que los dos números 14 y 5.

Aqui se termina la operacion del mismo modo que cuando tratándose de líneas rectas se nos presenta un residuo, al cual contenga el precedente un número exacto de veces, ó que es tal, que el residuo siguiente se escape de los sentidos por su pequeñez.

102. *Observacion.* Si nos imaginamos que una recta AB, fig. 56, que corta la circunferencia de un círculo Fig. 56.
en dos puntos A y B, gire al rededor de uno de ellos, de A por ejemplo, y que dirigiéndose á salir del círculo tome posiciones semejantes á la AB, veremos que los dos puntos de interseccion de la recta y de la circunferencia del círculo, se van aproximando sin cesar, hasta lle-

gar á la posicion AC, en la cual reunidos los puntos de interseccion en uno solo, no tiene la recta mas punto comun con la circunferencia del círculo, ó no hace mas que tocarle. En tal posicion la recta AC se llama *tangente* al círculo.

TEOREMA.

103. *La perpendicular levantada en un punto de la circunferencia de un círculo sobre el radio que pase por el mismo punto, es tangente al círculo; y recíprocamente la tangente en un punto cualquiera de la circunferencia, es perpendicular en la extremidad del radio que pasa por aquel punto.*

Fig. 57. *Demostracion.* Siendo la línea AB, fig. 57, perpendicular al radio AO en el punto A, todos sus demas puntos han de estar mas distantes que este mismo punto A del centro O del círculo, porque todas las rectas que como la OB y la OC estan tiradas desde el centro á la recta AB en una ú otra banda de la AO son oblicuas, y de consiguiente mas largas que la misma AO (§. 28). Estan pues, fuera del círculo los puntos C y B; y no teniendo la recta AB mas que el único punto A, comun juntamente á la circunferencia del círculo, debe necesariamente ser su tangente.

Con igual facilidad se puede ver que la tangente al círculo en el punto A no puede ser otra que la recta AB perpendicular al radio AO en su extremo A; porque no teniendo la AB mas punto comun con la circunferencia del círculo que el punto A del *contacto*, y estando todos sus otros puntos mas distantes que el A del centro, es consiguiente que el radio AO es la línea mas corta que puede tirarse desde el centro á la tangente, y que por tanto es perpendicular á la misma tangente.

104. *Corolario.* De esto se sigue que con solo levantar la perpendicular AB en la extremidad A del radio AO dirigido al punto dado A de la circunferencia del círculo, tendremos la tangente al círculo en el punto A.

TEOREMA.

105. *Toda recta* CD, fig. 58, *perpendicular á una cuerda* AB *en su punto medio, pasa por el centro* O *del círculo, y por el punto medio del arco subtendido por la cuerda.* Fig. 58.

Demostracion. Siendo por suposicion la recta CD perpendicular á la AB en el punto de enmedio, deberá necesariamente pasar por todos los puntos igualmente distantes de A y de B; y el centro O es uno de ellos, por estar á igual distancia de los extremos A y B, que se hallan en la circunferencia ACB. Y pues que el punto C, en que la perpendicular CD encuentra á la circunferencia, se halla á igual distancia de los extremos A y B del arco ACB, las cuerdas AC y BC han de ser necesariamente iguales entre sí, y del mismo modo deberán serlo los arcos sotendidos por estas cuerdas (§. 99). Será, pues, el punto C el de la mitad del arco ACB; y de consiguiente la recta CD habrá de pasar por el centro O, y por el punto de enmedio del arco sotendido por la cuerda AB.

106. 1.^{er} *Corolario.* 1.^{o} Pues que para determinar la posicion de una recta no se necesitan mas de dos puntos (§. 3); y hallándose necesariamente en una misma recta el punto de enmedio de una cuerda, el centro del círculo, y el punto de enmedio del arco sotendido por la cuerda, es consiguiente que apenas sepamos que una rec-

ta dada pasa por dos de los tres mencionados puntos, hayamos de inferir que debe necesariamente pasar por el tercero.

2.° Como desde un punto dado no puede bajarse sobre una recta mas de una sola perpendicular (§. 32), se infiere tambien de lo dicho que toda perpendicular bajada sobre la cuerda desde el centro ó desde el punto de enmedio del arco, habrá de cortar á la cuerda en dos partes iguales.

107. 2.° *Corolario.* Se deduce asimismo del teorema precedente que para dividir en dos partes iguales un arco cualquiera, basta levantar una perpendicular á la cuerda que sotienda á este arco en su punto de enmedio, pues que esta perpendicular debe pasar por el punto de enmedio del arco que se nos haya propuesto.

TEOREMA.

108. *Los arcos de un mismo círculo, interceptados*
Fig. 59. *entre dos cuerdas entre sí paralelas, ó entre una tangente y una cuerda que le sea paralela, son entre sí iguales.*

Demostracion. Si las cuerdas BC y DE y la tangente FG son entre sí paralelas, y juntamos el centro O con el punto A del contacto con el auxilio del radio AO, siendo, como es, perpendicular este radio á la tangente FG (§. 103), lo habrá tambien de ser á las dos cuerdas paralelas BC y DE (§. 42), y dividirá en dos partes iguales los arcos BAC y DAE. De consiguiente si de los arcos AB y AC, iguales por ser mitades del arco BAC, se quitan los otros dos AD y AE, iguales tambien entre sí por ser mitades del arco DAE, deberán asimismo resultar entre sí iguales los residuos BD y EC: lo cual es

la primera parte de la propuesta del teorema; y la igualdad de los arcos AB y AC hace ver la segunda.

TEOREMA.

109. *Si haciendo centros en los vértices O y O′ de dos ángulos AOC y A′O′C′, fig. 60, se describen con* Fig. 60.
un mismo radio dos arcos de círculo, la razon de los dos ángulos será la misma que la de los arcos comprendidos entre los lados de cada ángulo.

Demostracion. Si los arcos AC y A′C′ tuvieren por medida comun al AB=A′B′, aplicando esta medida comun á cada uno de ellos tantas veces como se halle en él contenida, resultarán entrambos divididos en partes entre sí iguales; y si por medio de rectas semejantes á las OB y O′B′ se juntan los diferentes puntos de la division del arco con el vértice del ángulo correspondiente, resultarán dividos los ángulos AOC y A′O′C′ en tantas partes iguales cuantas sean las contenidas en los arcos AC y A′C′.

Con efecto siendo entre sí iguales las cuerdas AB y A′B′, deben ser totalmente iguales los triángulos AOB y A′O′B′, como que tienen los tres lados del uno respectivamente iguales á los tres del otro (§. 20), ademas de que las rectas OA, OB, O′A′, O′B′ son entre sí iguales como radios que son de dos círculos iguales: es pues el ángulo AOB igual al A′O′B′. Bajo esta suposicion comprendiendo cada uno de los dos ángulos AOC y A′O′C′ tantos otros iguales al AOB, cuantas partes iguales á la AB esten contenidas en los arcos AC y A′C′, se infiere con evidencia que los dos ángulos propuestos habrán de tener entre sí la misma razon que los arcos descritos con un mismo radio desde sus vértices como centros, y comprendidos por sus respectivos dos lados, teniendo al mismo tiempo por su medida comun al ángulo AOB.

El anterior razonamiento requiere que los dos arcos AC y A′C′ sean entre sí comensurables; pero aun cuando fuesen incomensurables, no dejaria por eso de verificarse la proposicion; porque es imposible suponer que los dos
Fig. 61. ángulos AOC y A′O′C′, fig. 61, tengan una razon mayor ó menor que la que entre sí tienen los respectivos dos arcos AC y A′C′.

Si, por ejemplo, en vez de tener esta proporcion:

$$AOC : A'O'C' :: AC : A'C';$$

tuviéramos la siguiente:

$$AOC : A'O'C' :: AC : A'd;$$

en la cual Ad es mayor que A′C′, y si supusiésemos dividido al arco AC en cierto número de partes iguales bastante pequeñas, para que aplicadas al arco A′C′ caiga entre los puntos C′ y d uno de los puntos de division e, nos resultaria entre los ángulos AOC y A′O′e, y los arcos AC y A′e respectivamente comensurables, esta proporcion:

$$AOC : A'O'e :: AC : A'e,$$

cuyos antecedentes son los mismos que los de la anterior, y de consiguiente de la combinacion de las dos nos resultará la proporcion que sigue:

$$A'O'C' : A'O'e :: A'd : A'e;$$

resultado absurdo, pues que siendo $A'O'C' < A'O'e$, se nos presentan como entre sí iguales las dos razones de $A'O'C' : A'O'e$ y la de $A'd : A'e$, en la cual $A'd > A'e$.

Si tomásemos el arco A′d' menor que el A′C′, tendríamos que

$$AOC : A'O'C' :: AC : A'd';$$

y por lo tocante al punto de division e', tenemos que

$$AOC : A'O'e' :: AC : A'e';$$

y de la combinacion de ambas proporciones se deduce esta otra:

$$A'O'C' : A'O'e' :: A'd' : A'e';$$

la cual tambien es absurda, pues que siendo $A'O'C' > A'O'e'$ es $A'd' < A'e'$.

La proposicion recíproca á la que acabamos de demostrar no necesita de demostracion particular; porque mal podría ser la razon de los arcos la misma que la de los ángulos, sin que esta segunda sea constantemente la misma que la primera *.

110. 1.° *Corolario.* Siendo la razon de los arcos AC y A′C′ la misma que la de los ángulos AOC y A′O′C′, se infiere que los arcos de círculo deben ser la medida natural de los ángulos; y á consecuencia de estas nociones, se dice generalmente que *la medida de todo ángulo es el arco de la circunferencia de círculo, que esté comprendido entre sus dos lados, y descrito desde su vértice como centro.*

Al principio nos parece oscura esta definicion porque miramos como imposible que haya cantidad alguna cuya medida no sea otra cantidad de la misma especie; y siendo línea todo arco de círculo, y superficie todo ángulo

* Yo me creo en la obligacion de hacer notar que esta proposicion que en los elementos adoptados en Francia antes del año de 1794, casi se contentaban con solo enunciarla, ha sido demostrada casi del mismo modo que lo acabamos de ejecutar desde el año de 1760 en los elementos de *Karsten*, y acaso tambien lo estaba en obras mas antiguas. Por otra parte el medio de efectuar la demostracion se nos ofrece por sí mismo en una forma de razonamiento, de que se ha servido Euclides en una transicion semejante de lo comensurable á lo incomensurable; y como ya en otra parte lo he dicho (*Ensayo sobre la enseñanza*), cuando nos reducimos á las proposiciones verdaderamente necesarias en unos Elementos de geometría, nos resta todavía que averiguar la colocacion en que mejor se enlazan unas con otras, y las haga mas evidentes y mas fáciles de retener.

(§. 7) se nos ofrece alguna dificultad en admitir por medida de una cantidad otra de tan diferente naturaleza. Mas es necesario tener presente que cuando se ha definido la medida de un ángulo se ha subtendido el arco tomado por unidad, y el ángulo correspondiente á este arco; de modo que la definicion que acabamos de dar, viene á decirnos lo que sigue: *todo ángulo contiene á otro cierto ángulo, arbitrariamente escogido para que sirva de unidad ó de término de comparacion, tantas veces como el arco de círculo, comprendido entre sus lados y descrito desde su vértice como centro, contenga á otro arco de un círculo igual, comprendido entre los lados de este segundo ángulo, y descrito desde su vértice como centro.*

Por este medio se ve que solo nos valemos de arcos de círculo para medir la magnitud de los ángulos, porque nos sirven de términos de comparacion; y que para determinar la razon numérica de dos ángulos cualesquiera, es indispensable buscar con arreglo al método prescrito (§. 101) la razon que entre sí tengan dos arcos de círculo descritos desde sus vértices como centros con un radio de magnitud arbitraria, pero de la misma para entrambos.

El ángulo que nos parece mas adecuado para servir de *unidad* es el ángulo recto; del cual sabemos con la mayor evidencia que comprende entre sus lados la cuarta parte de la circunferencia de un círculo; pues si desde el
Fig. 62. punto O como centro, fig. 62, se describe una circunferencia de círculo, la recta AB subtenderá la mitad de ella (§. 97); y siendo entre sí iguales los dos ángulos rectos COB y COA, comprenderá cada uno de estos entre sus lados la mitad de la mitad (§. *preced.*), ó lo que es lo mismo la cuarta parte de la circunferencia entera. Sabremos, pues, la medida de un ángulo cuando comparemos

el arco descrito desde su vértice como centro, y comprendido entre sus lados, con el del mismo círculo que esté interceptado por el ángulo recto que tenga su vértice en el centro.

111. 2.° *Corolario.* Tambien se infiere del teorema precedente que las rectas que dividan en muchas partes iguales un arco cualquiera, dividen al mismo tiempo en igual número de partes iguales el ángulo medido por aquel arco, y que de consiguiente la division de cualquier ángulo se reduce á la division del arco que le sirva de medida. Por desgracia, la geometría elemental no nos suministra mas medios de efectuar estas divisiones, que el de dividir en dos partes iguales un arco.

Este medio consiste (§. 107) en levantar una perpendicular CO, fig. 58 á la cuerda AB en su punto de en- Fig. 58.
medio; y la perpendicular dividirá á un mismo tiempo el ángulo AOB en dos partes iguales. Por otro camino podríamos convencernos *á priori* de la igualdad de los ángulos AOD y BOD por medio de las de los triángulos del mismo nombre.

Por el mismo medio se podrá dividir de nuevo en dos partes iguales cada mitad del arco ACB ó del ángulo AOB, y llevar adelante la division siguiendo la serie de los números 2, 4, 8, 16, 32, 64 &c.; pero no será imposible dividir al arco ni al ángulo en 3 ó en 5 &c., partes iguales.

TEOREMA.

112. *Todo ángulo, cuyo vértice esté situado en la circunferencia de un círculo, tiene por medida la mitad del arco que sus lados comprenden.*

Demostracion. 1.° Supongamos que el ángulo pro-

puesto sea el BAC; uno de cuyos lados AC pasa por el
Fig. 63. centro O del círculo, fig. 63. Si por el mismo centro tiramos el diámetro DE paralelo al lado AB, resultará formado en O el ángulo DOC, que como correspondiente del propuesto BAC con respecto á la secante AC, debe serle igual. De modo que el arco DC sería la verdadera medida del ángulo BAC si su vértice A se trasladase al centro O. Ahora bien, el arco DC es desde luego igual al AE, por ser este la medida del ángulo AOE, opuesto en el vértice á DOC, y que de consiguiente debe serle igual. Por otra parte, siendo entre sí iguales los dos arcos AE y BD, como comprendidos que estan entre dos cuerdas paralelas (§. 108), se ve con la mayor claridad que el arco DC es tambien igual al BD, y que de consiguiente el arco BC, compuesto de la agregacion de los dos BD y DC, es doble de cada uno de ellos, y por tanto doble de la medida del ángulo BAC.

2.° Sea ya el ángulo BAG, que contiene al centro entre sus lados; y componiéndose este ángulo de los dos BAC y CAG reunidos, habrá de ser su medida la suma de las medidas de estos dos últimos; y pues que cada uno de ellos tiene uno de sus lados que pasa por el centro, la medida del BAC será la mitad del arco BC, y la del CAG será la mitad del arco CG; y componiendo la suma de estas mitades de los arcos BC y CG á la mitad del arco BG, que es igual á BC+BG, es consiguiente que el ángulo BAG tenga por medida la mitad del arco BG comprendido entre sus lados.

3.° Pudiendo ser considerado el ángulo FAB, que no contiene al centro entre sus lados, como diferencia de los otros dos ángulos FAC y BAC, es de inferir que tenga por medida á la diferencia de las de estos dos. Y como su lado comun AC pasa por el centro, sus respectivas medidas deben ser la mitad del arco FC y la del BC, cuya diferencia equivale á la mitad del FB; pues que todo este arco viene á ser=FC−BC. Resulta, pues, que la medida del ángulo FAB será mitad del arco FB comprendido entre sus lados.

4.° El ángulo formado por una tangente y una cuerda tiene asimismo por medida la mitad del arco comprendido entre sus lados; porque siendo recto el ángulo CAH formado por la tangente AH y el diámetro AC, que la perpendicular debe tener por medida á la mitad de la circunferencia ABC (§. 110); y si á este ángulo recto se agrega el CAG formado por dos cuerdas, y cuya medida es la mitad del arco CG, nos resultará por suma el ángulo GAH, cuya medida será la suma de la mitad del arco ABC y de la mitad del arco GC, la cual suma equivale á la mitad del arco total ABG, comprendido entre los lados del ángulo. Ahora, si del mismo ángulo recto CAH se quita el ángulo FAC, cuya medida es la mitad del arco FC, resultará como diferencia de los dos, el ángulo FAH, que debe tener por medida á la diferencia de las mitades del AB y del FC, la cual diferencia equivale á mitad del arco AF.

113. 1.° *Corolario.* El ángulo FAI formado por la cuerda AF y por la prolongacion AI de la cuerda AG, tiene por medida la mitad de la suma de los dos arcos AF y AG que las dos cuerdas sotienden.

Con efecto, el ángulo FAI, equivalente á dos rectos menos el ángulo FAG (§. 11), tendrá por medida á la diferencia que hay entre la semicircunferencia y la mitad del arco FG, la cual es la medida del ángulo FAG; mas esta diferencia equivale á la mitad de la que se advierte entre la circunferencia entera y todo el arco FG, lo cual viene á ser lo mismo que la mitad de la suma de los dos arcos AF y AG.

114. 2.° *Corolario.* Del teorema anterior se infiere tambien: 1.° que todos los ángulos que como EGF,
Fig. 64. EHF, EIF, KEF, fig. 64, tengan su vértice situado en la circunferencia, é insistan sobre un mismo arco, son entre sí iguales, pues que cada uno de ellos tiene por medida la mitad del mismo arco EAF, sobre que todos insisten, y que se halla comprendido entre sus lados.

2.° Que el ángulo BAC, cuyo vértice se halla en la circunferencia, y cuyos lados AB y AC pasan por los extremos de un diámetro BC es recto; pues que tiene por medida á la mitad de la semicircunferencia BGC comprendida entre sus lados; cuya mitad equivale á la cuarta parte de la circunferencia entera (§. 110).

TEOREMA.

Fig. 65. 115. *El ángulo* BAC, fig. 65, *cuyo vértice se halla dentro del círculo entre el centro y la circunferencia, tiene por medida la mitad del arco* BC *comprendido entre sus lados, mas la mitad del arco* ED *comprendido entre las prolongaciones de ellos.*

Demostracion. Por el punto D tírese la cuerda DF paralela al uno AC de los lados del ángulo propuesto, y resultará formado el ángulo BDF igual al BAC, como correspondiente que le es con respecto á la secante BD, y que tiene por medida á la mitad del arco BCF comprendido entre sus lados, pues que su vértice se halla situado en la circunferencia (§. 112); mas siendo entre sí iguales los dos arcos ED y FC, por estar comprendidos entre cuerdas paralelas (§. 108), se infiere que siendo el arco BF equivalente á BC+CF, habrá de ser por consiguiente iguales á BC+DE; y pues que la mitad del arco BF es la medida del ángulo BDF, y por lo tanto de su igual BAC, vendrá este último á tener por medida á la mitad de la suma de los dos arcos BC y ED, la cual es equivalente á la mitad del arco BF.

TEOREMA.

116. *El ángulo* BAC, fig. 66, *cuyo vértice se halla situado fuera del círculo, tiene por medida á la semidiferencia de los dos arcos* BC *y* DE *comprendidos entre sus lados; de los cuales arcos el uno dirige hácia el vértice su concavidad, y el otro su convexidad.* Fig. 66.

Demostracion. Tirando, como en el caso anterior, por el punto D la recta DF paralela al lado AC, resultará formado el ángulo BDF igual al BAC, como correspondiente que le es con respecto á la secante BD, y que tiene por medida á la mitad del arco BF, comprendido entre sus lados (§. 112); mas siendo entre sí iguales los arcos DE y FC por estar comprendidos entre cuerdas paralelas (§. 108), es de inferir que siendo el arco BF igual á BC−FC, sea tambien igual á BC−ED; y pues la mitad del arco BF es la medida del ángulo BDF, y por consiguiente de su igual BAC, tendrá tambien este último por medida á la mitad de la diferencia de los dos arcos BC y ED equivalente á la mitad del arco BF.

PROBLEMA.

117. *Levantar una perpendicular en la extremidad* A *á una recta dada* AB, fig. 64., *sin prolongarla como se requiere si se sigue el método prescrito* (§. 30). Fig. 64.

Solucion. Tómese fuera de la línea AB un punto O, desde el cual, como centro y con un radio igual á AO, descríbase una circunferencia de círculo BAH: por el punto B en que esta encuentre á la recta AB y por el centro O tírese el diámetro BOC, que determinará en la circunferencia el punto C; y juntando este punto con el extremo A de la recta AB, la AC será la perpendicular que se ha pedido; pues que el ángulo BAC es recto (§. 114).

PROBLEMA.

118. *Desde un punto dado A fuera de un círculo,*
Fig. 67. fig. 67, *tirar una tangente al mismo círculo.*

Solucion. Se juntará con el punto dado A el punto O, centro del círculo dado, y sobre la recta AO como diámetro se describirá una circunferencia de círculo que encontrará á la otra BDB′ en los dos puntos B y B′; y juntando cada uno de estos puntos con el punto dado A por medio de las rectas BA y B′A, estas serán dos tangentes al círculo BDB′.

Con efecto, si se tiran en este último círculo los dos radios BO y B′O, que serán cuerdas en el círculo BB′A, será recto cada uno de los ángulos OBA y OB′A, pues que sus vértices se hallan en la circunferencia del círculo BB′A, y sus lados pasan por los dos extremos de uno de sus diámetros (§ 114). De consiguiente las dos rectas AB y AB′ serán ambas tangentes al círculo BDB′ (§. 103).

PROBLEMA.

Fig. 68. 119. *Por tres puntos* A, B, C, fig. 68, *que no esten en línea recta, hacer pasar una circunferencia de círculo.*

Solucion. Si se juntan los tres puntos dados A, B, C, por medio de las dos rectas AB y BC, estas dos rectas vendrán á ser otras tantas cuerdas del círculo que haya de pasar por los puntos propuestos; y levantando en el punto de enmedio de la recta AB la perpendicular DE, y en el punto de enmedio de la BC su respectiva perpendicular FG, el centro O, que á un mismo tiempo debe hallarse en una y en otra perpendicular (§. 105), no podrá menos de ser el punto de la mutua interseccion de ellas, la cual necesariamente habrá de verificarse (§. 47).

120. 1.er *Corolario.* La construccion que acabamos de exponer no nos da mas de un solo punto para que nos sirva de centro, asi como nos da un solo radio, pues que siendo las rectas OA y OC iguales á BO, como oblicuas que se hallan á iguales distancias de las respectivas perpendiculares OD y OF, habrán de ser iguales entre sí. Es, pues, evidente que no hay mas de una circunferencia de círculo que pueda efectivamente pasar por los tres puntos propuestos A, B y C.

Cuando estos tres puntos se hallan en una misma recta, viene á ser insoluble la cuestion, porque en tal caso son entre sí paralelas las perpendiculares DE y GF (§. 39), y no pudiendo de consiguiente encontrarse, no es posible nos indiquen para centro á punto alguno. Con efecto, ninguna circunferencia de círculo puede pasar por los tres puntos propuestos, porque con solo que pasase una, se nos presentarian en ella tres puntos que la serian comunes con una recta, lo cual seria contrario á lo demostrado (§. 94).

121. 2.º *Corolario.* De la misma proposicion se sigue que las circunferencias de dos círculos no pueden tener tres puntos comunes sin que resulten enteramente

confundidos los círculos; porque si por tres puntos dados en una circunferencia de círculo practicamos la construccion que nos indica la solucion del problema anterior, nos ha de resultar necesariamente que el radio del nuevo círculo ha de ser totalmente igual al del primero, y los centros de ambos han de confundirse con un mismo punto.

Por esta razon las circunferencias de dos círculos no pueden mutuamente encontrarse en mas que en dos puntos.

TEOREMA.

122. *Dos circunferencias de círculo que pasen por un mismo punto de la recta que junta sus centros, no tienen comun mas que aquel punto, en el cual de consiguiente se tocan; y por la inversa, siempre que se toquen dos círculos, sus centros y el punto de contacto se hallan en una línea recta.*

Demostracion. 1.° Si los centros O y O′ de las
Fig. 69. circunferencias de los círculos AC y AC′, fig. 69, estuviesen ambos situados á un mismo lado del punto A comun á las dos circunferencias en la recta OO′, y si hubiésemos tomado en la circunferencia del mayor radio un punto cualquiera M′, juntando este punto con los centros O y O′, resultará formado un triángulo O′OM′, en el cual tendremos:

$$OO'+OM'>O'M'; \text{ ú } O'O+OM'>O'A;$$

y siendo $O'A=OO'+OA$, se inferirá que

$$OO'+OM'>OO'+OA;$$

y que de consiguiente $OM'>OA$. Se ve, pues, que en todo caso se halla el punto M′ fuera del círculo mas pequeño AC.

2.° Si los centros se hallan situados á distintos lados

del punto A, por ejemplo en O y en O″, el triángulo OM″ O″ nos dará desde luego que $OM''+O''M''>OA+O''A$, de donde se infiere que $OM''>OA$; pues que $O''A=O''M''$. Por consiguiente se halla fuera del círculo AC el punto M″.

A fin de demostrar la proposicion inversa habremos de observar, que siendo comun el punto A á las dos circunferencias, si no estuviesen sus centros en una misma recta OA, esten, si se quiere, sobre otra cualquiera recta O′M′, de modo que el centro del círculo menor se halle en *o*. En tal caso tendremos:

$$O'o+oA>O'A, \text{ ó } >O'M';$$

de lo cual, quitando de una y de otra parte á la $O'o$, nos quedará

$$oA>oM';$$

lo cual es absurdo, porque siendo por suposicion oA radio del círculo pequeño AC, debe ser igual á *om*, que es necesariamente menor que oM'.

Cuando dos círculos se toquen exteriormente como AC y AC″, es bien claro que la línea mas corta que se puede tirar desde el centro del uno al del otro deberá ser igual á la suma de sus respectivos radios, y que esta línea mas corta pasa por el punto de contacto; pues si pasase por cualquiera otro punto M″, y juntásemos con este punto los centros por medio de las rectas OM″ y O′M″, veríamos que la suma de estas es mayor que la de los radios; y como deba ser recta la línea mas corta que pueda tirarse de un punto á otro, es consiguiente que sea recta la línea OAO″.

123. *Observaciones.* En el §. 22 hemos ya indicado las condiciones que deben tener lugar para que se corten dos circunferencias de círculos, y las vemos aqui confirmadas de nuevo por el teorema antecedente; pues se

ve con bastante claridad que las circunferencias AC y AC′ no se tocarian ni menos se cortarian, si la distancia OO′ de los centros fuese menor que la diferencia de los radios, asi como siempre que la distancia OO″ sea mayor que la suma de los radios de los círculos AC y AC″, no será posible que se toquen sus circunferencias.

Pues que los círculos AC, AC′ y AC″ tienen sus centros, y el punto de su mutuo contacto en una misma línea recta, la perpendicular AB levantada á esta recta en el punto A los debe tocar todos á un tiempo (§. 103).

Por otra parte es bien visible que aunque no pueda tirarse recta alguna entre el círculo AC y su tangente, se pueden hacer pasar sin embargo por entre los dos una infinidad de circunferencias de diferentes círculos *.

PROBLEMA.

124. *Describir un círculo que toque en un punto da-*
Fig. 70. *do* A, fig. 70, *á una recta* AB *dada de posicion, y cuya circunferencia pase por otro punto dado* C.

* Esto es lo que en sustancia quiere decir aquella proposicion que muchos geómetras sostuvieron, y en que afirmaban que el ángulo de contingencia CAB formado en el punto del contacto entre la circunferencia y la tangente es menor que cualquiera otro ángulo rectilíneo ó formado por dos rectas, por pequeño que sea este último. La disputa que ocurrió sobre este negocio no procedió de otra causa sino de que no estaban todos de acuerdo sobre el significado que en este caso atribuian á la voz *ángulo*. Los que aplicaban al ángulo la nocion deducida de las líneas rectas, viendo en el ángulo de contingencia un espacio indefinido CAB, comprendido entre la circunferencia AC y su tangente, tenian razon en negarse á mirarlo como menor que otro cualquier ángulo rectilíneo; porque se ve con bastante claridad que se puede tirar por el punto A una recta que pase por entre los puntos C y B. Pero toda esta disputa, que en realidad giraba sobre las palabras, ha caido en el olvido desde que se advirtió que no interesaba cosa alguna á los principios.

Solucion. Levántese á la recta AB en el punto A la perpendicular AO′, y juntando los puntos A y C, levántese en el punto medio de la recta AC la perpendicular DO′; y el punto O′ de la interseccion de las dos perpendiculares será el centro del círculo que se nos ha pedido.

Con efecto, el centro de este círculo debe hallarse en la recta AO′ perpendicular á la tangente AB, y que pasa por el punto A, lugar del contacto del círculo y de la recta AB (§. 103); debe igualmente hallarse en la DO′ perpendicular en el punto de enmedio de la recta AC, que juntando los dos puntos A y C de la circunferencia pedida, viene á ser una cuerda (§. 105). Debe, pues, ser el centro del círculo el punto comun O′ de la mutua interseccion de las dos perpendiculares.

PROBLEMA.

125. *Describir un círculo que toque en un punto dado* A *á otro círculo dado* AE, *y que pase por otro punto dado* C.

Solucion. Se juntarán como en el problema precedente los dos puntos dados A y C; y levantando en el punto de enmedio de la cuerda AC la perpendicular DO′, habrá de pasar esta por el centro del círculo pedido. En seguida se tirará por el centro O del círculo dado y por el punto A una recta, en la cual tambien deberá estar el centro del círculo pedido (§. 122); y el punto O′, en que esta recta prolongada, si acaso es necesario, encuentre á la recta DO′, será en tal caso el centro del círculo pedido.

Ni aun cuando el punto dado C pasase á ser C′, y estuviese dentro del círculo dado AE, habrá de variar la construccion, y solo se notará la diferencia de que el círculo pedido quedará envuelto por este otro.

PROBLEMA.

Fig. 64. 126. *Describir sobre una recta dada* EF, fig. 64, *un círculo tal, que todos los ángulos que tengan su vértice en la circunferencia, y esten colocados á un mismo lado de la tal recta é insistan sobre sus extremidades, sean iguales á un ángulo dado.*

Solucion. Tírese por el punto E la recta KM que haga con EF un ángulo KEF igual al ángulo dado, y cuya abertura esté dirigida hácia el mismo lado que las de los demas ángulos que se han pedido. Despues de lo cual, no habrá otra cosa que hacer que construir (§. 124) una circunferencia que pase por el punto F, y que toque en E á la recta KM.

Por lo expuesto (§. 114) es bien claro que teniendo todos los ángulos EGF, EHF, EIF la misma medida que el ángulo KEF, serán iguales al ángulo dado.

N. B. Este problema suele tambien proponerse en los términos siguientes: *Describir sobre una recta* EF *un segmento ó una porcion de círculo, capaz de contener un ángulo dado.*

TEOREMA.

Fig. 71. 127. *Si dos secantes que parten desde un mismo punto* E *tomado fuera de un círculo*, fig. 71, *estan prolongadas hasta la parte de la circunferencia que mas diste de aquel punto, serán recíprocamente proporcionales á sus partes exteriores: es decir, que tendremos la siguiente proporcion:*

EA : DE : : CE : BE;

en la cual una de las secantes y su parte exterior forman los extremos, mientras la otra secante y su respectiva parte exterior forman los medios.

Demostracion. Tírense las cuerdas AC y BD, y resultarán formados los dos triángulos AEC y BED, que son entre sí semejantes, por ser dos ángulos del uno respectivamente iguales á dos del otro (§. 65); conviene saber, el ángulo ACD es igual al ABD por tener el uno y el otro su vértice en la circunferencia, y ambos insisten sobre un mismo arco AD (§. 114); y ademas de eso tienen comun el ángulo AED. Comparando, pues, sus lados homólogos, tendremos esta proporcion:

AE : DE : : CE : BE;

la cual viene á ser el objeto de la proposicion.

128. *Observacion.* Si imaginamos que la secante EC gire al rededor del punto E adelantándose hácia F como para salir y desembarazarse del círculo, los dos puntos C y D de interseccion con la circunferencia se irán aproximando uno á otro sin cesar, haciéndose cada vez mas pequeña la diferencia entre toda la secante y su parte exterior; y no dejando por eso de ser verdadera la proporcion que acabamos de demostrar, es muy natural inferir que habrá de verificarse aun cuando sea enteramente nula aquella diferencia; es decir, aun cuando llegue la recta CE á ser la tangente EF, y haya venido la parte exterior á igualarse con toda la secante. En tal caso tendremos esta proporcion:

AE : EF : : EF : EB;

la cual nos hace ver que la tangente EF es media proporcional entre toda la secante BE y su parte exterior AE.

Esta proposicion puede tambien demostrarse *à priori* del modo siguiente:

Fig. 72. Con haber tirado las cuerdas AF y BF, fig. 72, nos resultan los triángulos AEF y BEF, en los cuales es comun el ángulo E, y entre sí iguales los dos ángulos EBF y EFA, como que ambos tienen el vértice en la circunferencia, é insisten sobre un mismo arco AF. La comparacion, pues, de sus lados homólogos nos dará

AE : EF : : EF : BE.

TEOREMA.

Fig. 73. 129. *Dos cuerdas* AB y CD *que se encuentran dentro de un círculo*, fig. 73, *se cortan entre sí en partes ó segmentos recíprocamente proporcionales, y de modo que en la proporcion que nos resulta*,

AE : DE : : CE : BE,

las partes ó segmentos de una de las cuerdas vengan á ser los extremos, mientras que los de la otra formen los medios.

Demostracion. Tirando las cuerdas AC y BD, resultan formados los triángulos AEC y BED, que deben ser entre sí semejantes por ser los ángulos del uno respectivamente iguales á los del otro (§. 65); á saber, el ángulo ACD igual al ABD, por tener ambos su vértice en la circunferencia é insistir sobre un mismo arco AD (§. 114); por otra parte el ángulo CAE es igual por la misma razon al EDB; ademas de que los ángulos opuéstos en el vértice E han de ser iguales. Comparando, pues, entre sí sus lados homólogos, tendremos esta proporcion:

AE : DE : : CE : BE;

la cual es el objeto de la proposicion.

N. B. Es muy fácil echar de ver que este teorema y el del §. 127 no son mas que dos casos particulares de una misma proposicion, que se puede expresar en estos términos:

Siempre que dos rectas se corten entre sí y encuentren á una circunferencia de círculo, cada una en dos puntos diferentes, las distancias del punto de su mútuo encuentro á cada uno de aquellos en que ellas cortan la circunferencia del círculo, son recíprocamente proporcionales.

130. *Corolario.* Si la cuerda BA pasare por el centro ó fuere diámetro, y fuere perpendicular á este la cuerda CD, fig. 74, esta última estará cortada en dos partes Fig. 74.
iguales (§. 106), y la proporcion

AE : DE : : CE : BE

vendrá á ser AE : CE : : CE : BE,

pues que DE=CE. Será, pues, la recta CE media proporcional entre las partes ó segmentos AE y BE del diámetro AB.

De lo cual se sigue que para determinar una media proporcional entre dos rectas dadas M y N, bastará ponerlas en línea recta la una á continuacion de la otra, la primera desde A hasta E, y la otra desde E hasta B; en seguida sobre la suma AB de las dos dadas, como que debe ser un diámetro, descríbase un círculo; y por último en el punto de reunion de las dos rectas dadas M y N levántese el diámetro AB la perpendicular EC: y esta última será la media proporcional que se nos ha pedido.

131. La proposicion que forma el asunto del corolario precedente, resulta inmediatamente de la propiedad del triángulo rectángulo demostrado (§. 74); porque si se tiran las cuerdas AC y CB, será recto (§. 114), el ángu-

lo ACB; y con arreglo á lo establecido (§. 74) podemos contar seguramente con las siguientes proporciones:

AE : CE : : CE : BE;

AE : AC : : AC : AB;

EB : BC : : BC : AB,

resultando de estas dos últimas que la cuerda tirada por una de las extremidades de un diámetro es media proporcional entre todo el diámetro y la parte cortada de él por la perpendicular que se le baje desde el otro extremo de la cuerda.

Por este medio podremos tambien determinar una media proporcional entre dos rectas dadas, eligiendo á la mayor AB para diámetro de un círculo; aplicando sobre esta la segunda desde A hasta E; levantando la perpendicular EC; y tirando por último la cuerda AC, la cual será, segun lo expuesto, la media proporcional que se nos ha pedido.

PROBLEMA.

Fig. 75. 132. *Dividir una línea recta dada* AB, *fig.* 75, *en media y extrema razon*; es decir, *de modo que tengamos esta proporcion*:

AC : BC : : BC : AB,

en la cual la parte BC, *que es la mayor de las dos en que debemos dividir á la recta dada, sea media proporcional entre toda esta recta* AB *y su otra parte menor* AC.

Solucion. Levántese en una de las extremidades de la recta AB la perpendicular AE que sea igual á la mitad de aquella recta; tírese BE; desde el punto E como centro y con el radio AE descríbase un círculo ADF; por último desde el punto B como centro, y con un radio igual á BD descríbase el arco DC que corte á la recta

dada en el punto C, en el cual quedará dividida en media y extrema razon.

Para demostrarlo prolónguese BE hasta F para tener con arreglo al §. 128

BD : AB : : AB : AF;

de donde se deducirá que

AB–BD : BF–AB : : BD : AB;

pero AB–BD=AB–BC=AC;

y pues que por construccion la perpendicular AE es la mitad de la AB, es consiguiente que AB=2AE=FD: de lo cual se deduce que BF–AB=BF–FD=BD=BC, y por tanto AC : BC : : BC : AB; proporcion enteramente conforme á la propuesta del problema.

PROBLEMA.

133. *Describir un círculo cuya circunferencia pase por dos puntos dados* C y D, *fig.* 76, *y toque ademas á una recta indefinida* AB *cuya posicion esté dada.* Fig. 76.

Solucion. Júntense los puntos D y C por medio de una recta, y prolónguese esta hasta que encuentre á la AB en A, halle inmediatamente despues una media proporcional entre AC y AD, con arreglo al método indicado (§. 131); y siendo la AE la media proporcional, se la aplicará á la AB, describiendo desde A como centro y con un radio igual á la AE el arco EF, el cual determinará el punto F que debe ser el de contacto de la recta AB y de la circunferencia que se busca. Podremos, pues, describirla siguiendo el método prescrito (§. 119) ó el del §. 124.

Esta solucion se demuestra con solo hacerse cargo de que la línea AC es una secante, y de que la cuestion está reducida á determinar en la recta AB la posicion del punto de contacto, con respecto al cual, segun lo establecido (§. 128), debemos tener:

$$AD : AF :: AF : AC;$$

de donde se infiere que obtendremos la distancia AF, determinando la media proporcional entre la AD y la AC*.

TEOREMA.

134. *En un semicírculo las segundas potencias ó cuadros de las longitudes de las cuerdas* AC *y* AF *que*
Fig. 74. *parten de una de las extremidades del diámetro*, fig. 74, *son proporcionales á los segmentos* AE *y* AG *comprendidos en el mismo diámetro entre la extremidad comun de las cuerdas y el pie de la perpendicular bajada desde la otra extremidad de cada una de ellas.*

Demostracion. Siendo las cuerdas AC y AF respetivamente medias proporcionales entre el diámetro AB y cada uno de sus segmentos AE y AG (§. 131), tendremos

$$\overline{AC}^2 = AB \times AE \text{ y } \overline{AF}^2 = AB \times AG;$$

* El problema del párrafo anterior y el de este son susceptibles de dos soluciones. En el primero satisfacen á las condiciones de la propuesta, no solo la línea ED, fig. 75, sino tambien la línea BF, en tanto que AB es media proporcional entre BF y BD. (Véase la *Aplicacion del álgebra á la geometría.*)

En el último problema se puede llevar la línea AE, fig. 76, no solo desde A hasta F, sino tambien por el lado opuesto hasta F′, con lo cual tendremos otro círculo, cuya circunferencia toque á la recta AB en F′, y que pase por los puntos D y C.

Si desde luego se nos presentase paralela á la línea AB la DC, no dará á conocer al punto F la construccion que hemos indicado; mas bien se ve que en tal caso la perpendicular levantada en el punto de enmedio de la cuerda DC y que pasa por el centro del círculo pedido, debiendo tambien ser perpendicular á la tangente AB, determinará el punto de contacto F (§. 103).

de donde fácilmente se infiere que

$$\overline{AC}^2 : \overline{AF}^2 :: AB \times AE : AB \times AG,$$

de la cual, con solo suprimir el factor AB por ser comun á los dos términos de la segunda razon, resulta que

$$\overline{AB}^2 : \overline{AF}^2 :: AE : AG.$$

De los polígonos inscritos y circunscritos al círculo.

135. *Observacion.* Bien claro es que en todo caso, pues que se puede hacer pasar la circunferencia de un círculo por tres puntos dados que no se hallen en una misma línea recta (§. 119), se la podrá tambien hacer pasar por vértices de los tres ángulos de un triángulo cualquiera ABC, fig. 77; y en tal caso el triángulo ABC se llama *inscrito* al círculo, asi como este se llama *circunscrito* al triángulo.

Esta propiedad del triángulo comunica la mayor claridad á todas las que en los §§. 36, 37 y 51 se ha demostrado pertenecerle:

1.° Se ve bien claro que la suma de los tres ángulos de cualquier triángulo rectilíneo ha de equivaler á la de dos ángulos rectos; pues suponiéndolo inscrito en un círculo, se verá sin la menor dificultad que teniendo cada ángulo su vértice en la circunferencia, habrá de tener por medida á la mitad del arco que comprenden; y como la suma de los tres arcos equivale á toda la circunferencia, es consiguiente que las mitades de los tres arcos equivalgan á la semicircunferencia, que es justamente el valor de la suma de dos ángulos rectos (§. 110).

2.° La igualdad de los ángulos, de A y B por ejemplo, trae consigo la igualdad de los dos arcos opuestos

CB y AC, que como ya se sabe, han de ser respectivamente dobles de los que sean las justas medidas de los ángulos (§. 112); serán, pues, iguales entre sí las cuerdas de los arcos entre sí iguales CB y AC, las cuales no son otra cosa que los lados respectivamente opuestos á los dos ángulos A y B (§. 99). Con igual facilidad se demostraria la inversa de esta proposicion.

3.° Como cuando un arco es mayor que otro, con tal que cada uno de ellos sea menor que la semicircunferencia, debe el mayor estar subtendido por mayor cuerda, se infiere con evidencia que al ángulo mayor de un triángulo le está opuesto el mayor de los lados del mismo triángulo.

PROBLEMA.

136. *Inscribir un círculo en un triángulo* ABC, Fig. 78.
fig. 78; es decir, *describir en el interior de este triángulo un círculo cuya circunferencia toque á los tres lados del triángulo.*

Solucion. Divídanse en dos partes iguales dos ángulos cualesquiera del triángulo dado (§. 111), A y B por ejemplo; y el punto O de interseccion de las dos rectas AO y BO por cuyo medio se ejecuta aquella division, será el centro del círculo pedido.

Con efecto, si desde el punto O se baja una perpendicular á cada uno de los tres lados AB, AC y BC, serán entre sí iguales (§. 34) los triángulos AEO y ADO, asi como los triángulos DOB y BOF; pues por lo respectivo á los dos primeros, tiene cada uno de ellos un ángulo recto en D y en E, y ademas son entre sí iguales los ángulos EAO y DAO, como mitades que son del mismo ángulo DAE, y fuera de eso el lado AO les es comun. Lo mismo podemos decir de los dos últimos triángulos, pues que tambien son rectángulos el uno en D y el otro F; los ángulos DBO y FBO son entre sí iguales, como mitades que son de un mismo ángulo DBC; y á los dos triángulo les es comun el lado BO. Son, pues, los dos primeros totalmente iguales entre sí; y los dos segundos lo mismo: de lo cual se infiere que las tres perpendiculares EO, FO y DO son todas entre sí iguales, y que de consiguiente la circunferencia de círculo que se describa desde el punto O como centro, con un radio igual á cualquiera de las tres perpendiculares, no hará mas que tocar á los tres lados del triángulo ABC.

Como para esta demostracion no hemos hecho hasta ahora uso mas que de los dos ángulos A y B, será conveniente repetirla, combinando con cualquiera de esos dos ángulos al tercero C, para que igualmente se vea que el centro del círculo pedido es constantemente el mismo punto O. Para esto júntese el punto O con el vértice del tercer ángulo C, valiéndonos de la recta OC; y la total igualdad de los triángulos CEO y CFO, por ser rectángulos, el uno en E y el otro en F, y por tener entre sí iguales los lados EO y FO, y últimamente comun el lado CO (§. 34) nos hace que tambien la recta CO divide en dos partes iguales el ángulo C.

137. *Observacion.* Pues que por tres puntos dados que no esten en una misma recta no se puede hacer pasar mas de una circunferencia de círculo, es bien claro que si se nos diese ademas un cuarto punto D, fig. 77, po- Fig. 77.
dria muy bien caer este punto fuera del círculo ABC, y en tal caso sería imposible inscribir en un círculo al cuadrilátero ACDB; y con mas justa razon deberán hallarse

excepciones respectivas á polígonos cuyo número de lados sea mayor que cuatro *.

TEOREMA.

138. *Todo polígono de cualquier número de lados, en caso de ser regular, es decir, siempre que todos sus ángulos sean entre sí iguales, y lo sean tambien entre sí todos sus lados, puede inscribirse y circunscribirse á un círculo.*

Fig. 79. *Demostracion.* Sea el polígono ABCDE, fig. 79, cuyos ángulos ABC, BCD, CDF &c. sean todos entre sí iguales, sucediendo lo mismo á todos sus lados:

1.° La circunferencia de círculo que pase por los vértices A, B y C de tres ángulos cualesquiera del polígono, habrá necesariamente de pasar por todos los demas; porque si desde el centro O del círculo ABC se tiran las rectas AO, BO, CO, DO &c., las tres primeras serán por construccion rádios del círculo, y de consiguiente iguales entre sí; los triángulos isósceles AOB y BOC deberán tambien ser entre sí totalmente iguales, por ser los tres lados del uno respectivamente iguales á los tres del otro, pues que por suposicion BC=AB; y siendo entre sí iguales los ángulos ABO y CBO, cada uno de ellos será la mitad del ángulo ABC del polígono; el ángulo BCO, que es igual á los dos ya mencionados, será tambien por consiguiente la mitad del ángulo BCD, igual por supo-

* Por la sola inspeccion de la figura se pone en claro que todos los cuadriláteros, tales como ACEB, en los cuales la suma de los ángulos D y A equivalga á la de dos ángulos rectos (§. 112), pueden inscribirse en un círculo; y justamente en el ACDB aquella suma es mayor que la de dos rectos por lo respectivo á los ángulos C y B, y menor por lo que toca á los dos A y D (§. 116).

sicion al ABC; el ángulo OCD será la otra mitad, y de consiguiente será igual al BCO. Ahora bien, siendo igual por suposicion CD á CB, los triángulos BCO y OCD, que tienen dos lados y el ángulo comprendido del uno respectivamente iguales á otros dos lados y al ángulo comprendido del otro, habrán de ser totalmente iguales y darnos OD=OC; de modo que el punto D deberá hallarse en la circunferencia del círculo ABC. Del mismo modo se demostrará que se hallan tambien en ella el punto E y los demas que le siguen.

2.° Si desde el punto O, centro del círculo circunscrito, y juntamente del polígono inscrito ABCDEF se baja una perpendicular á cualquiera lado AB de los del polígono, la circunferencia GH, descrita desde el punto O como centro con el radio GO, y que en consecuencia de su construccion toca al lado AB en el punto G, tocará asimismo á cada uno de los lados en su respectivo punto de enmedio; porque si desde el punto O se baja al lado BC inmediato al AB la perpendicular OH, los triángulos OBG y OBH, que en primer lugar son rectángulos, el uno en G y el otro en H; que tienen ademas el ángulo GBO igual al OBH, y comun la hipotenusa OB, serán totalmente iguales (§. 34), y de consiguiente darán OG=OH. Tocará, pues, la circunferencia GH al lado BH en el punto H, que es el de enmedio, pues que son entre sí iguales las oblicuas OB y OC. El mismo razonamiento nos hará ver que la tal circunferencia tocará asimismo á cada uno de los demas lados del polígono en su respectivo punto de enmedio.

139. *Observacion.* Los ángulos AOB, BOC, COD &c. formados por los radios tirados desde el centro O á los vértices de los ángulos del polígono, se llaman *ángulos*

en el centro, para distinguirlos de los otros cuyos vértices se hallan en la circunferencia, cuales son ABC, BCD, CDE &c., los cuales por esta razon son conocidos bajo la denominacion comun de *ángulos en la circunferencia.* Son enteramente iguales entre sí todos los *ángulos en el centro*; ó equivaliendo la suma total de ellos á la de cuatro rectos (§. 13), equivaldrá cada uno al cociente que resulte de la division de esta suma por el número de ángulos y lados del polígono propuesto.

TEOREMA.

140. *Los polígonos regulares de un mismo número de lados son entre sí semejantes, y sus contornos ó perímetros son entre sí como los radios de los círculos á que esten inscritos ó circunscritos.*

Demostracion. 1.° Estos polígonos tienen todos sus ángulos respectivamente y entre sí iguales; y siendo asimismo los lados del primero iguales entre sí, y los del segundo tambien iguales entre sí, los unos y los otros estarán todos en la misma razon, y de consiguiente son entre sí proporcionales. Son, pues, entre sí semejantes los polígonos (§. 87).

2.° Siendo entre sí iguales los ángulos AOB y *aob*; y siendo por otra parte isósceles los dos triángulos AOB y *aob*, serán entre sí semejantes (§. 66), y nos darán:

$$AB : ab :: AO : ao;$$

y siendo entre sí los contornos ó perímetros de los polígonos ABCDEF y *abcdef*, como sus respectivos lados homólogos AB y *ab* (§. 93), habrán de tener entre sí, en consecuencia de esta última proporcion, la misma razon que los radios AO y *ao* de los círculos en que se hallan inscritos los polígonos.

La igualdad de los dos ángulos BAO y *bao* nos hace conocer la semejanza de los triángulos AGO y *ago*, de la cual se deduce que

$$AO : ao :: OG : og;$$

y de esta se concluye que AB : *ab* : : OG : : *og*; y de consiguiente siendo los contornos ó perímetros de los polígonos propuestos proporcionales á sus lados homólogos AB y *ab*, deberán asimismo serlo á los radios OG y *og* de los círculos á que se hallan circunscritos.

PROBLEMA.

141. *Hallándose inscrito en un círculo un polígono regular de cualquier número de lados, inscribir en el mismo círculo otro polígono regular de un número de lados doble del de los del primero, y determinar el valor de cada uno de los lados del segundo.*

Solucion. Sea AB, fig. 80, uno de los lados del primer polígono, y AOB uno de sus ángulos en el centro: divídase este ángulo ó el arco AB'B que lo mide en dos partes iguales en el punto B' (§. 111), y las rectas AB' y B'B, que son entre sí iguales, serán evidentemente dos lados contiguos del nuevo polígono. Fig. 59.

Para determinar ahora el valor de AB' prolónguese el radio B'O hasta D, y en tal caso tendremos (§. 131);

$$\overline{AB'}^2 = B'D \times B'E = AC \times B'E;$$

y siendo B'E=B'O−EO, y sabiendo que en el triángulo AEO rectángulo en E es el lado $EO = \sqrt{\overline{AO}^2 - \overline{AE}^2}$; y $AE = \frac{1}{2}AB$; que B'O=AO; y que AC=2AO; podremos concluir de todo que

$$B'E = AO - \sqrt{\overline{AO}^2 - (\tfrac{1}{2}AB)^2}$$

y que $\overline{AB'}^2 = 2AO\,(AO - \sqrt{\overline{AO}^2 - (\tfrac{1}{2}AB)^2})$.

Si adoptamos por medida comun ó por unidad al radio AO del círculo, en que estan inscritos los polígonos propuestos, será $AO = 1$; y resultará

$$\overline{AB'}^2 = 2\,(1 - \sqrt{1 - (\tfrac{1}{2}AB)^2}).$$

En caso que en el punto B″ dividiésemos al arco AB′ en dos partes iguales, veríamos del mismo modo que el lado del polígono que tenga un número de lados doble del precedente tendrá por expresion de su valor

$$\overline{AB''}^2 = 2(1 - \sqrt{1 - (\tfrac{1}{2}AB')^2});$$

y asi de los demas.

142. Despues del triángulo equilátero, el polígono mas sencillo que se nos presenta es el cuadrilátero que tenga sus lados entre sí iguales, y lo mismo todos sus ángulos. Este polígono es comunmente conocido bajo el nombre de *cuadrado*.

Y equivaliendo (§. 82) la suma de los ángulos interiores de cualquier cuadrilátero á la de cuatro ángulos rectos, y siendo entre sí iguales todos los del *cuadrado*, forzoso es que cada uno de ellos sea un ángulo recto. Asi
Fig. 81. el cuadrado ABCD, fig. 81, ademas de tener entre sí iguales sus cuatro lados AB, BC, CD y AD, tiene sus cuatro ángulos A, B, C y D rectos.

143. *Observaciones*. El cuadrado es evidentemente un paralelógramo (§. 79), cuyos ángulos son entre sí iguales, y cuyos lados lo son tambien; y es necesario no confundirlo con el paralelógramo, que teniendo sus la-

dos entre sí iguales, tenga al mismo tiempo desiguales ángulos. A este último, cuyo ejemplar se nos muestra en la figura 82, lo denominamos *rombo*. Fig. 82.

Siempre que sean desiguales los lados contiguos, y permanezcan rectos los cuatro ángulos, el paralelógramo toma el nombre de *rectángulo*; cuyo ejemplar se nos presenta en la fig. 83. Fig. 83.

Es bien visible que todo rectángulo puede ser inscrito en un círculo; porque siendo en este caso entre sí iguales sus dos diagonales AC y BD, se cortarán mútuamente entre sí en un punto O, que se halla igualmente distante de los puntos A, B, C y D; pues en general AO=OC; y DO=OB (§. 80); y de consiguiente los tales puntos se hallarán en la circunferencia del círculo descrito desde el punto O como centro con un radio igual á AO.

PROBLEMA.

144. *Sobre una recta dada* AB *construir un cuadrado*, fig. 81. Fig. 81.

Solucion. Levántense en los dos extremos A y B de la recta dada las dos perpendiculares AD y BC; y que estas sean iguales á la AB; y juntando por medio de una recta los extremos C y D de las dos perpendiculares, resultará formado el cuadrado ABCD que se nos ha pedido.

Con efecto, siendo por construccion paralelos é iguales entre sí los lados AD y BC, lo serán asimismo entre sí los dos lados restantes DC y AB (§. 54); y equivaliendo á la suma de dos ángulos rectos la de los ángulos ADC y BAD internos de un mismo lado (§. 47); y siendo por construccion recto el segundo, deberá serlo asimismo el primero. Lo mismo se demostrará con respecto al ángulo BCD comparándolo con el ABC.

PROBLEMA.

145. *Inscribir en un círculo los polígonos regulares de cuatro, de ocho, de diez y seis, de treinta y dos, de sesenta y cuatro, de &c. lados.*

Solucion. Esta cuestion está enteramente reducida á inscribir en primer lugar un polígono regular de cuatro lados, para pasar despues á formar por medio de este todos los demas, con arreglo á lo prescrito (§. 141).

Fig. 84. Para inscribir, pues, en el círculo ABCD, fig. 84, un cuadrado, tendremos que levantar perpendicularmente á un diámetro cualquiera AC otro BD, por cuyo medio resultarán determinados en la circunferencia los cuatro puntos A, B, C y D; y juntándolos por medio de rectas, estará formado el cuadrado pedido.

Con efecto, los cuatro ángulos ABC, BCD &c. son todos rectos (§. 114); y los cuatro lados AB, BC &c. son entre sí todos iguales, por ser hipotenusas de los triángulos rectángulos AOB, BOC DOC y AOD, que con evidencia son totalmente iguales (§. 16).

Dándonos el triángulo rectángulo AOB la siguiente ecuacion:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2;\ \text{y siendo } AO = BO;$$

se infiere de ella que $\overline{AB}^2 = 2\,\overline{AO}^2$; y de consiguiente

$$AB = AO\sqrt{2};$$

de donde, adoptando al radio AO por unidad, nos resultará $AB = \sqrt{2}$*.

* Siendo, como se ve, rigoroso el método que hemos seguido para determinar el valor de AB, venimos en conocimiento de que la geometría nos presenta exactamente la magnitud de la incomensurable $\sqrt{2}$, cuyo valor no puede obtenerse mas que por aproximacion, con el auxilio de los números; pero es necesario tener presente que el número que en tal caso buscamos no es sino la expresion de la razon de AB á AO: y si fuese posible efectuar con rigorosa exactitud con estas líneas la operacion indicada (§. 5.), jamas tendria fin; porque ninguna recta, por pequeña que sea, puede á un mismo tiempo medirlas á entrambas.

Si sostituimos este valor en la expresion (§. 141) del de AB′, y en seguida este último en la del de AB″, y asi de los demas, obtendremos sucesivamente la longitud de cada uno de los lados de los polígonos de 8, de 16, de 32 &c. lados, referida á la del radio del círculo.

PROBLEMA.

146. *Inscribir en un círculo los polígonos regulares de tres, de seis, de doce, de veinte y cuatro, de cuarenta y ocho &c. lados.*

Solucion. El lado del exágono regular es el primero que se nos presenta, por ser exactamente igual al radio del círculo en que se halle inscrito. Con efecto, equivaliendo á la sexta parte de la suma de cuatro ángulos rectos el ángulo AOB del polígono en en el centro, fig. 85, Fig. 85.
habrá de ser igual á cuatro sextas partes ó á dos tercias de un recto. Rebajando ahora este valor de la suma de los dos ángulos rectos á que equivale la de todos los ángulos de cualquier triángulo, resultará $2-\frac{2}{3}$, equivalente á $\frac{4}{3}$ de un ángulo recto, por valor de la suma de los ángulos BAO y ABO; y siendo estos entre sí iguales, es consiguiente que cada uno de ellos equivalga á dos tercias partes de un ángulo recto. Teniendo, pues, el triángulo ABO sus tres ángulos entre sí iguales, habrá de ser forzosamente equilátero, y de consiguiente darnos AB=AO.

Se podrá, pues, fácilmente inscribir en un círculo un

PROBLEMA.

145. *Inscribir en un círculo los polígonos regulares de cuatro, de ocho, de diez y seis, de treinta y dos, de sesenta y cuatro, de &c. lados.*

Solucion. Esta cuestion está enteramente reducida á inscribir en primer lugar un polígono regular de cuatro lados, para pasar despues á formar por medio de este todos los demas, con arreglo á lo prescrito (§. 141).

Fig. 84. Para inscribir, pues, en el círculo ABCD, fig. 84, un cuadrado, tendremos que levantar perpendicularmente á un diámetro cualquiera AC otro BD, por cuyo medio resultarán determinados en la circunferencia los cuatro puntos A, B, C y D; y juntándolos por medio de rectas, estará formado el cuadrado pedido.

Con efecto, los cuatro ángulos ABC, BCD &c. son todos rectos (§. 114); y los cuatro lados AB, BC &c. son entre sí todos iguales, por ser hipotenusas de los triángulos rectángulos AOB, BOC DOC y AOD, que con evidencia son totalmente iguales (§. 16).

Dándonos el triángulo rectángulo AOB la siguiente ecuacion:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2; \text{ y siendo } AO = BO;$$

se infiere de ella que $\overline{AB}^2 = 2\,\overline{AO}^2$; y de consiguiente

$$AB = AO\sqrt{2};$$

de donde, adoptando al radio AO por unidad, nos resultará $AB = \sqrt{2}$*.

* Siendo, como se ve, rigoroso el método que hemos seguido para determinar el valor de AB, venimos en conocimiento de que la geometría nos presenta exactamente la magnitud de la incomensurable $\sqrt{2}$, cuyo valor no puede obtenerse mas que por aproximacion, con el auxilio de los números; pero es necesario tener presente que el número que en tal caso buscamos no es sino la expresion de la razon de AB á AO: y si fuese posible efectuar con rigorosa exactitud con estas líneas la operacion indicada (§. 5.), jamas tendria fin; porque ninguna recta, por pequeña que sea, puede á un mismo tiempo medirlas á entrambas.

Si sostituimos este valor en la expresion (§. 141) del de AB′, y en seguida este último en la del de AB″, y asi de los demas, obtendremos sucesivamente la longitud de cada uno de los lados de los polígonos de 8, de 16, de 32 &c. lados, referida á la del radio del círculo.

PROBLEMA.

146. *Inscribir en un círculo los polígonos regulares de tres, de seis, de doce, de veinte y cuatro, de cuarenta y ocho &c. lados.*

Solucion. El lado del exágono regular es el primero que se nos presenta, por ser exactamente igual al radio del círculo en que se halle inscrito. Con efecto, equivaliendo á la sexta parte de la suma de cuatro ángulos rectos el ángulo AOB del polígono en en el centro, fig. 85, Fig. 85.
habrá de ser igual á cuatro sextas partes ó á dos tercias de un recto. Rebajando ahora este valor de la suma de los dos ángulos rectos á que equivale la de todos los ángulos de cualquier triángulo, resultará $2-\frac{2}{3}$, equivalente á $\frac{4}{3}$ de un ángulo recto, por valor de la suma de los ángulos BAO y ABO; y siendo estos entre sí iguales, es consiguiente que cada uno de ellos equivalga á dos tercias partes de un ángulo recto. Teniendo, pues, el triángulo ABO sus tres ángulos entre sí iguales, habrá de ser forzosamente equilátero, y de consiguiente darnos AB=AO.

Se podrá, pues, fácilmente inscribir en un círculo un exágono, con solo aplicar el radio del círculo á la circunferencia cuantas veces sea esto posible, que justamente serán seis, y juntar por medio de rectas uno con otro cada dos puntos de division consecutivos. Suponiendo que es-AO=1, resultará AB=1; y con el auxilio de este valor, y el de las fórmulas (§. 141), podremos ascender á la determinacion de los valores de cada uno de los lados de los polígonos inscritos de 12, de 24, de 48 &c. lados.

Para determinar el valor de cada uno de los lados de un triángulo equilátero inscrito ACE, basta tener presente que este triángulo está formado juntando por medio de rectas los dos vértices de los dos ángulos extremos de tres que se hayan tomado en el exágono; y que el triángulo ACD rectángulo en C, nos da (§. 114):

$$AC=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{ED}^2}=\sqrt{(2AO)^2-\overline{AO}^2}=AO\sqrt{3};$$ y

suponiendo que sea AO=1, vendrá á ser $AC=\sqrt{3}$.

PROBLEMA.

147. *Inscribir en un círculo los polígonos regulares de 5, de 10, de 20, de 40 &c. lados.*

Solucion. Hállese primeramente el valor del lado del decágono ó polígono de diez lados, tomando para esto al mayor de los segmentos del radio dividido en media y extrema razon (§. 132).

Con efecto en el decágono el ángulo AOB en el
Fig. 86. centro, fig. 86, equivale á una décima parte de cuatro ángulos rectos, ó á las dos quintas partes de un recto; quedan, pues, para expresion del valor de la suma de los dos ángulos ABO y BAO $2-\frac{2}{5}$ de un ángulo recto, que vienen á ser $\frac{8}{5}$ de ángulo recto; de lo cual se infiere que

el valor de cualquiera de ellos es $\frac{4}{5}$, y por tanto resulta doble del ángulo AOB. Si se tira AG que haga con AB el ángulo BAG igual al AOB, los dos triángulos ABG y ABO, que ademas tiene un ángulo comun B, habrán de ser semejantes (§. 65), y darnos

BG : AB : : AG : AO;

ahora, siendo isósceles el triángulo ABO, lo será igualmente el triángulo ABG, y tendremos que AG=AB.

Por otra parte, siendo el ángulo BAG=AOB, será la mitad de BAO, y la otra mitad GAO será de consiguiente igual á AOB; de lo cual resulta (§. 37) que GO=AG=AB; y la proporcion precedente podrá trasformarse en estotra:

BG : GO : : GO : AO

la que nos manifiesta que el radio BO está efectivamente dividido en el punto G en media y extrema razon, y que el lado AB es el segmento mayor.

Si de cada tres ángulos de un decágono se juntan por medio de rectas los dos vértices de los extremos, resultará formado el pentágono. No me detengo á calcular el valor de cada lado del decágono porque juzgo por mas curiosa que útil esta investigacion.

148. *Observacion.* Ya puede haberse comprendido que la inscripcion de los polígonos regulares en los círculos está reducida á la division de la circunferencia en un cierto número de partes iguales. Los métodos que hemos indicado para inscribir en el círculo los polígonos de 4, de 8, de 16, de 32 &c. lados; los de 3, de 6, de 12, de 24 &c.; los de 5, de 10, de 20, de 40 &c. podrán servir para dividir la circunferencia de un círculo segun los números de estas diversas progresiones.

No será fuera de propósito advertir aqui que se puede tambien dividir la circunferencia siguiendo la progresion 15, 30, 60 &c.; porque dándonos el polígono de seis lados la sexta parte de la circunferencia, y dándonos el de diez lados la décima parte de la circunferencia, la diferencia de los arcos subtendidos por los lados de estos dos polígonos será igual $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}$ de toda ella, lo cual viene á ser $\frac{1}{15}$. Llevando, pues, desde A hasta H el radio del círculo, el arco BH deberá ser la *décimaquinta* parte de la circunferencia, y su cuerda habrá de ser el lado del polígono que tiene quince ó del *pentedecágono*. Por medio de la continua division de los arcos en dos partes iguales, ó de su *biseccion*, se pueden fácilmente obtener los polígonos regulares de 30, de 60 &c. lados*.

PROBLEMA.

149. *Estando inscrito en un círculo un polígono regular de cualquier número de lados, circunscribir al mismo círculo otro polígono regular de igual número de lados; y por la inversa, estando dado el polígono circunscrito, construir el inscrito.*

Fig. 87. *Solucion*. Sea *abcde*, fig. 87, el polígono propuesto; tírense los radios O*a*, O*b*, O*c* &c. y en el extremo de cada uno de ellos levántense las perpendiculares AE, BA, CB &c.; y en el conjunto de estas perpendiculares, que

* Estas divisiones de la circunferencia del círculo no son las únicas que se pueden efectuar geométricamente. M. F. Gauss, en una obra titulada *Disquisitiones arithmeticæ*, publicada en Leipsic en 1801, y traducida al frances por M. Delisle, hace ver que se puede ejecutar del mismo modo la division en 2^n+1 partes siempre que este número sea *primo*. Véase tambien el *Complemento de los Elementos de Algebra*. De esto resulta la division en 17 partes iguales, de que hay una demostracion particular, pero que no es para ser colocada en este lugar.

tocarán todas á la circunferencia del círculo *abcde*, tendremos el polígono que se nos ha pedido.

Con efecto, los triángulos *a*A*b*, *b*B*c*, *c*C*d* &c. son todos isósceles y entre sí iguales, porque lo son los lados *ab*, *bc*, *cd* &c.; y los ángulos A*ab*, A*bc*, B*bc*, B*cb*, C*cd*, C*dc* &c. formados por estos mismos lados, comprendiendo los arcos iguales *ab*, *bc*, *cd* &c., son tambien entre sí iguales (§. 114). Tendremos, pues, 1.º $aAb = bBc = cCd$ &c.

2.º $aA = Ab = bB = Bc = cC = Cd$; de donde se concluye que $AB = 2Ab$; $BC = 2Bc$; $CD = 2Cd$ &c., y por consiguiente $AB = BC = CD$ &c.

Teniendo, pues, el polígono ABCDE todos sus ángulos entre sí iguales, y sus lados tambien, habrá de ser el mismo que se nos ha pedido.

Podemos deducir del polígono circunscrito el inscrito juntando los puntos *a*, *b*, *c*, *d* &c., que son los de enmedio de cada uno de los lados del primero, y los de contacto de la circunferencia.

Para que sobre esto no quede la menor duda, nos bastará observar que los triángulos *a*A*b*, *b*B*c*, *c*C*d* &c. son entre sí totalmente iguales, como que tienen un ángulo igual comprendido por dos lados respectivamente iguales, siendo como son los ángulos A, B, C &c. los de un polígono regular, y *a*A, A*b*, B*b* &c. las mitades de los lados AE, AB, BC &c. que son iguales entre sí. De lo cual resulta que los lados *ab*, *bc*, *cd* &c. son entre sí iguales; y que de consiguiente lo son los arcos subtendidos por ellos, y por tanto, los ángulos *abc*, *bcd* &c., cuyos vértices se hallan en la circunferencia, y que entre sus lados comprenden un mismo número de estos arcos, son iguales entre sí (§. 114). Es, pues, el polígono *abcde*, que tiene todos sus ángulos entre sí iguales, y todos sus lados tambien, el inscrito que se nos ha pedido.

Tambien podríamos haber formado al polígono inscrito $a'b'c'd'e$, que no se diferencia del $abcde$ mas que en la posicion, tirando las rectas AO, BO, CO &c. desde los vértices de los ángulos del polígono circunscrito ABCDE al centro del círculo inscrito, y juntando los puntos $a'b'c'$ &c. en que estas líneas cortan á la circunferencia de este mismo círculo. Con efecto, pues que $AO = BO$, $a'O = b'O$, tendremos que

$$AO : a'O :: BO : b'O;$$

y de consiguiente la recta $a'b'$ habrá de ser paralela á la AB (§. 60); los triángulos AOB y $a'Ob'$ serán entre sí semejantes, y lo mismo podemos decir de BOC y $b'Oc'$, y asi sucesivamente: siendo homólogos á los lados AB, BC, CD &c. los lados $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$ &c. habrán estos de ser iguales entre sí; y ademas se probará como anteriormente que comprenden ángulos iguales.

150. *Corolario.* En vista de lo que precede será fácil determinar el valor del lado AB del polígono circunscrito. Con efecto, siendo entre sí iguales las rectas Aa y Ab (§. 149), asi como las Oa y Ob, la línea AO es perpendicular á la ab en su punto de enmedio (§. 29); y los triángulos OGa y OAa por tener los dos ángulos rectos, el uno en G y el otro en a, y ademas un ángulo comun en O serán semejantes. De esto se deduce que

$$OG : Oa :: aG : aA;$$

ó que

$$OG : Oa :: \tfrac{1}{2}ab : \tfrac{1}{2}AE;$$

de lo cual resulta que AE ó $AB = \dfrac{ab \times Oa}{\sqrt{\overline{Oa}^2 - (\frac{1}{2}ab)^2}}$, teniendo presente que el triángulo rectángulo OGa nos da:

$$OG = \sqrt{\overline{Oa}^2 - \overline{aG}^2} = \sqrt{\overline{Oa}^2 - (\tfrac{1}{2}ab)^2}$$

151. *Observacion.* Es muy importante observar que á proporcion que se multiplican los lados de un polígono inscrito, aumenta su contorno ó perímetro; al paso que en las mismas circunstancias disminuye el del polígono circunscrito. Con efecto, si dividimos el arco $aa'b$, fig. 88, Fig. 88.
en dos partes iguales, y tiramos las cuerdas aa' y $a'b$, tendremos en ellas dos lados consecutivos del polígono inscrito con un número de lados doble del que tenga el polígono cuyo lado sea el ab. Tirando en seguida á $a'O$ la perpendicular $A'B'$, las rectas aA', $A'a'$, $a'B'$ y $B'b$, serán otros tantos semilados del polígono circunscrito correspondiente al inscrito cuyo lado sea aa' (§. 149). Ahora puede ya bien verse que las porciones aAb, $aA'B'b$, ab, $aa'b$ estarán contenidas en los contornos ó perímetros de los polígonos de que forman parte, tantas veces como el arco $aa'b$ lo esté en la circunferencia entera; y de consiguiente serán partes semejantes de cada contorno ó perímetro. Y pues que $aa' + a'b > ab$, el contorno del segundo polígono inscrito debe ser mayor que el del primero.

Por otra parte, siendo $B'A' < AA' + AB'$, resulta que

$$aA'B'b < aA + bA \text{ (§. 15)},$$

y que de consiguiente el contorno ó perímetro del segundo polígono circunscrito es menor que el del primero.

Bajo esta suposicion, una vez que el polígono inscrito es siempre menor que el correspondiente circunscrito, y aumenta de contorno cuando se multiplican sus lados mientras otro disminuye, es de inferir que la diferencia de los polígonos disminuye asimismo en las mismas circunstancias. Aun se pueden determinar dos polígonos, uno

inscrito y otro circunscrito, tales que la diferencia de sus contornos ó perímetros sea menor que cualquiera cantidad dada δ, por pequeña que sea. Para convencerse de esta verdad, basta traer á la memoria que los contornos de los polígonos regulares de un mismo número de lados son entre sí como los radios de los círculos á que estan circunscritos (§. 140); pues si designamos por P al con-
Fig. 87. torno del polígono ABCDE, fig. 87, y por p al del polígono $abcde$, tendremos:

$$P : p :: Oa : OG;$$

de donde se inferirá que

$P-p : P :: Oa-OG : Oa$; y de consiguiente

$$P-p=\frac{a'G \times P}{Oa};$$

debiendo tener entendido que nada se opone á que tomemos á la pequeña línea $a'G$ mas pequeña que cualquiera otra cantidad que se quiera; porque habiendo aplicado sobre el radio Oa' una parte $a'G$ de la pequeñez que se apetece, se tira la cuerda ab; y en caso que el arco $aa'b$ no sea parte alícuota de la circunferencia, bastará tomar una parte alícuota menor que el tal arco, y por este medio vendrá á ser mas pequeña la línea análoga á la aG.

Se puede, pues, multiplicando cuanto sea necesario los lados del polígono, reducir al grado de pequeñez que se quiera á la cantidad $P-p$.

152. *Corolario.* Pues que segun cuanto precede disminuyen mas y mas los contornos de los polígonos circunscritos, á proporcion que mas se van acercando á la circunferencia del círculo; al mismo tiempo que en las mismas circunstancias aumentan los de los polígonos inscritos, es bien claro que la circunferencia del círculo es

menor que el contorno ó perímetro del polígono circunscrito, y mayor que el del polígono inscrito. Se diferenciará, pues, menos de cualquiera de los dos contornos la circunferencia que lo que ellos se diferencian entre sí; y de consiguiente se podrá determinar un polígono inscrito ó circunscrito, tal que la diferencia entre su contorno y la circunferencia del círculo sea menor que cualquiera cantidad dada, por pequeña que sea.

En esta propiedad está fundado el método de que se valió Arquímedes para determinar de un modo aproximado la razon de la circunferencia al diámetro; y yo haré de él un uso semejante cuando haya hecho ver que la tal razon es una misma en todos los círculos; para lo cual estableceré un teorema que pueda aplicarse á todas las proposiciones del mismo género que la que me propongo demostrar.

TEOREMA.

153. *Si dos cantidades invariables* A y B *son tales que se pueden demostrar que su diferencia* $A-B$ *es menor que otra tercera cantidad* δ, *por pequeña que sea esta última, en tal caso son entre sí iguales aquellas dos cantidades.*

Demostracion. Con efecto, si fuesen desiguales, necesariamente tendríamos $A-B=D$, indicando por D la diferencia de ellas; en cuyo caso seria ya imposible tomar á δ de modo que fuese menor que la D, ni por consiguiente tan pequeña como se querria.

Observacion. En la última proposicion merece la mayor atencion la palabra *invariable*, porque puede muy bien hallarse, por ejemplo, una cierta expresion de $\sqrt{2}$, que no se diferencie de la verdadera mas que en una cantidad menor que cualquiera otra que se quiera, sin llegar jamas sin embargo al valor exacto de $\sqrt{2}$; pero los resultados varían á cada nueva aproximacion, mientras que las cantidades A y B no son susceptibles la una y la otra mas que de una sola determinacion.

TEOREMA.

154. *Las circunferencias de los círculos son entre sí como sus radios ó sus diámetros.*

Demostracion. Pues que dos polígonos de cualquier número de lados, con tal que el uno tenga tantos como el otro, son entre sí como los radios de los círculos en que se hallen inscritos; si designamos por p y p' los contornos ó perímetros de los polígonos, y por R y R$'$ los radios de los círculos correspondientes, tendremos $\frac{p'}{p}=\frac{R'}{R}$. Por otra parte podemos imaginarnos que el número de los lados de los polígonos sea tal, que las diferencias entre sus contornos y la circunferencia del círculo en que cada uno de ellos esté inscrito, sea menor que una cierta cantidad que se quiera. Si, pues $\frac{C'}{C}$ representa la razon de la circunferencia, la diferencia, en caso que exista alguna, entre las dos razones $\frac{C'}{C}$ y $\frac{p'}{p}$ podrá reducirse á tal grado de pequeñez cual se quiera. Siendo tambien esta diferencia la de las razones invariables $\frac{C'}{C}$ y $\frac{R'}{R}$, pues que $\frac{p'}{p}=\frac{R'}{R}$, se infiere

que se puede demostrar que la diferencia entre las cantidades invariables $\frac{C'}{C}$ y $\frac{R'}{R}$ es menor que toda cantidad dada; y de consiguiente, con arreglo á la proposicion anterior, tendremos $\frac{C'}{C}=\frac{R'}{R}$; ó $C:C'::R:R'$; ó lo que equivale á lo mismo, $C:C'::2R:2R'::D:D'$, designando por D y D$'$ los diámetros de los círculos propuestos *.

155. *Corolario.* La última proposicion nos hace ver que la razon de la circunferencia al diámetro es una misma en todos los círculos, y que por medio de ella se puede calcular en todo caso la longitud de una circunferencia, cuyo radio se conoce. Con efecto, si por π designamos aquella razon, ó lo que es equivalente, la circunferencia de un círculo, cuyo diámetro sea tenido por unidad, tendremos constantemente esta proporcion:

* Esta proposicion puede demostrarse inmediatamente de muchos modos por medio de razonamientos análogos á los del §. 58, haciéndonos cargo de que por pequeña que sea la diferencia de la magnitud de dos círculos, siempre podemos formarnos idea de un polígono regular mayor que el uno, y menor que el otro. Euclides (*lib.* XII, *propos.* 19) ha presentado bajo una forma muy elegante esta proposicion que resulta de la del §. 152. Supone el citado autor que desde un centro comun O$'$, fig. 89, se hayan descrito los dos círculos; en cuyo caso es bien visible que si se tira al círculo interior la tangente MN, y se toma sobre el círculo exterior una parte alícuota menor que el arco MQN, el contorno del polígono D$'$E$'$F$'$G$'$H$'$ construido sobre esta parte, no llegará á tocar la circunferencia del círculo pequeño. Fig. 89.

Hé aqui cómo Maurolico, autor de un célebre Comentario sobre Arquimedes, impreso en Palermo de Sicilia en 1685, se ha servido de esta observacion para demostrar la proposicion superior (*pág.* 5 *y sig.*).

Si en vez de saber que $C:C'::DO:d'O'$, tuviéramos $C:C'::DO:D'O'$, de modo que fuese $D'O'>d'O'$, describiriamos sobre

$$1 : \pi :: 2R : C;$$

de la cual se deduce:

$$C = 2\pi R;\ R = \frac{C}{2\pi};$$

fórmulas con cuyo auxilio se determinará facilísimamente la magnitud de la circunferencia C, siempre que esté conocido previamente el radio R, ó se hallará el valor de este, en caso que supongamos sabido de antemano el de la circunferencia.

PROBLEMA.

156. *Determinar la razon aproximada de la circunferencia al diámetro.*

Solucion. En el §. 152 podemos ver que no nos debe ser dificil resolver la cuestion propuesta, calculando en una de las series de polígonos que ya sabemos inscribir en un círculo, el contorno de un cierto número de los primeros, y el contorno de los polígonos circunscrito que les correspondan. Por este medio tendremos dos series de

D′O′ un círculo concéntrico al círculo C′, y en el primero inscribiriamos un polígono D′E′F′G′H′, cuyo contorno no llegase á tocar al segundo. Comparando ahora este polígono con su correspondiente DEFGH en el círculo C, y designando por p' y p los respectivos contornos de estos polígonos, tendremos:

$$DO : D'O' :: p : p';$$

de donde se seguiria: C : C′ :: $p : p'$; proporcion absurda, pues que $C > p$, y $C' < p'$. Tampoco se puede suponer que el cuarto término de la proporcion, cuyos tres primeros son C, C′ y DO sea menor $d'O'$; porque si asi fuese, en designándolo por X tendriamos:

$$X : DO :: d'O : Z;\ \text{siendo } Z > DO:$$

é invirtiendo la proporcion C : C′ :: DO : X, nos resultaria C′ : C :: X, DO :: $d'O'$: Z : es decir, que el cuarto término de la proporcion C′ : C :: $d'O$: Z, sería mayor que el radio del segundo círculo, lo cual se ha demostrado que es absurdo en el primer caso de la demostracion.

La ventaja que puede hallarse en este giro de demostracion, que como se ve, es muy antigua, es que nos pone en cierto modo á la vista el polígono que debemos considerar.

números, los unos mas pequeños, y los otros mayores que la circunferencia; y las continuaremos hasta ver que la diferencia de dos números correspondientes de las dos series venga á ser menor que el grado de aproximacion que nos hayamos propuesto obtener en el valor de la circunferencia. Yo voy á practicar esta investigacion en los polígonos de 6, de 12, de 24 &c. lados inscritos y circunscritos á un círculo, cuyo radio sea $= 1$.

Sea, pues, a el lado de un polígono inscrito cualquiera; A el del polígono circunscrito correspondiente; y por último a' el del polígono inscrito con un número de lados doble del del primero.

Por de contado tenemos (§. 150):

$$A = \frac{a}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}a^2}} = \frac{a}{\frac{1}{2}\sqrt{4 - a^2}};$$

y (§. 141)

$$a' = \sqrt{2\left(1 - \sqrt{1 - \tfrac{1}{4}a^2}\right)} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}}.$$

Comenzando ya por exágono inscrito, tendremos $a = 1$; y nos resultará $A = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Será consiguiente igual á 6 el contorno del polígono inscrito; el del exágono circunscrito equivaldrá á $\frac{12}{\sqrt{3}}$; y la circunferencia se hallará comprendida entre los dos números 6 y $\frac{12}{\sqrt{3}}$. Se obtendrán límites mas estrechos y aproximados, pasando á los polígonos regulares de 12 lados, y á los demas que le siguen.

Sean, pues, a', a'', a''' &c. los lados de los polígonos incritos de 12, de 24, de 48 &c. lados; A', A'', A''' &c. los lados de los polígonos circunscritos correspondientes; siendo 1 el radio del círculo, su circunferencia será 2π (§. 155); y si á fin de abreviar se supone que $r' = \frac{1}{2}\sqrt{4-a'^2}$; $r''=\frac{1}{2}\sqrt{4-a''^2}$: $r'''=\frac{1}{2}\sqrt{4-a'''^2}$; &c. nos resultarán con arreglo á las fórmulas anteriores:

$$a'=\sqrt{2-\sqrt{3}};\quad A'=\frac{a'}{r'};\quad 2\pi\begin{cases} > 12\,a' \\ < 12\,A' \end{cases}$$

$$a''=\sqrt{2-2r'};\quad A''=\frac{a''}{r''};\quad 2\pi\begin{cases} > 24\,a'' \\ < 24\,A'' \end{cases}$$

$$a'''=\sqrt{2-2r''};\quad A'''=\frac{a'''}{r'''};\quad 2\pi\begin{cases} > 48\,a''' \\ < 48\,A''' \end{cases}$$

&c. &c. &c.

Se tendrá presente que $\sqrt{3}=1,73205080756887$*,

$$\left.\begin{array}{ll} a' = 0,517638090205 & 12\,a' = 6,2116571 \\ r' = 0,965925826289 & 12\,A' = 6,4307806 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} a'' = 0,261052384440 & 24\,a'' = 6,2652572 \\ r'' = 0,991444861374 & 24\,A'' = 6,3193199 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} a''' = 0,130806258460 & 48\,a''' = 6,2787004 \\ r''' = 0,997858923234 & 48\,A''' = 6,2921724 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \overset{\text{IV}}{a} = 0,065438165643 & 96\,\overset{\text{IV}}{a} = 6,2820639 \\ \overset{\text{IV}}{r} = 0,999464587476 & 96\,\overset{\text{IV}}{A} = 6,2854292 \end{array}\right\}$$

* Véanse las *Memorias de la Academia de Ciencias* de 1747, pág. 445.

$$\left.\begin{array}{ll} \overset{\text{V}}{a} = 0,032723463253 & 192\,\overset{\text{V}}{a} = 6,2826049 \\ \overset{\text{V}}{r} = 0,999866137909 & 192\,\overset{\text{V}}{A} = 6,2837461 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \overset{\text{VI}}{a} = 0,016362279208 & 384\,\overset{\text{VI}}{a} = 6,2831152 \\ \overset{\text{VI}}{r} = 0,999966535917 & 384\,\overset{\text{VI}}{A} = 6,2833260 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \overset{\text{VII}}{a} = 0,008181208052 & 768\,\overset{\text{VII}}{a} = 6,2831678 \\ \overset{\text{VII}}{r} = 0,999991633444 & 768\,\overset{\text{VII}}{A} = 6,2832203 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \overset{\text{VIII}}{a} = 0,004090612582 & 1536\,\overset{\text{VIII}}{a} = 6,2831809 \\ \overset{\text{VIII}}{r} = 0,999997908359 & 1536\,\overset{\text{VIII}}{A} = 6,2831941 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \overset{\text{IX}}{a} = 0,002045307361 & 3072\,\overset{\text{IX}}{a} = 6,2831842 \\ \overset{\text{IX}}{r} = 0,999999477089 & 3072\,\overset{\text{IX}}{A} = 6,2831875 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \overset{\text{X}}{a} = 0,001022653814 & 6144\,\overset{\text{X}}{a} = 6,2831850 \\ \overset{\text{X}}{r} = 0,999999869272 & 6144\,\overset{\text{X}}{A} = 6,2831858 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \overset{\text{XI}}{a} = 0,000511326934 & 12288\,\overset{\text{XI}}{a} = 6,2831852 \\ \overset{\text{XI}}{r} = 0,999999967318 & 12288\,\overset{\text{XI}}{A} = 6,2831854 \end{array}\right\}$$

Por el estado que precede, se viene en conocimiento de cómo se van aproximando mas y mas entre sí los perímetros de los polígonos inscritos y circunscritos correspondientes, pues, como bien se ve, los de los polígonos de 12288 lados se diferencian solo en dos unidades decimales del séptimo órden. Por tanto podremos inferir que las siete primeras cifras, que son comunes al uno y al otro, pertenecen necesariamente á la circunferencia del círculo, cuya longitud será de consiguiente 6,283185, con menos de una millonésima de diferencia.

Si adoptamos como expresion del valor de la magnitud de la circunferencia de un círculo al valor medio de los polígonos inscrito y circunscrito con 12288 lados cada uno, nos resultaria 6,2831853 como valor exacto de ella, sin exceptuar ni la última cifra. Será, pues la razon del diámetro á la circunferencia la de 2 : 6,2831853 ó la equivalente 1 : 3,1415926 dividiendo los dos términos por 2. De modo, que 3,1415926 es un valor aproximado de la razon designada por π (§. 155): y suponiendo que sea $C=1$, vendrá á ser $2R=0,3183099$, número que nos representa al diámetro, siempre que por suposicion sea la circunferencia la unidad.

Arquimedes se limitó al cálculo de los perímetros de los polígonos inscrito y circunscrito de 96 lados, y determinó que la circunferencia del círculo era $<3\frac{10}{70}$ y $>3\frac{10}{71}$; lo cual nos dió á conocer la razon tan sabida de 1 : $3\frac{1}{7}$ ó la de siete : 22. Posteriormente se ha llevado mucho mas adelante la exactitud; mas entre todas las razones conocidas merece por su sencillez y exactitud una particular atencion la razon de 113 á 355, pues que trasformándola en una expresion decimal, se reduce á 3,1415929, la cual es enteramente verdadera á excepcion de la última cifra. Al dar cuenta *Adriano Mecio* en su *Geometría práctica* de tal razon, la atribuye á su padre *Pedro Mecio*, que la habia publicado en una refutacion de la cuadratura del círculo de Simon Duchesme*.

* Las investigaciones de los sabios ingleses en la India nos han dado á conocer una razon de la circunferencia al diámetro, mas aproximada á la verdadera que la de Arquimedes, y que ellos miran como mas antigua. Es justamente la de 3927 á 1250, consignada en una obra de Bramides, titulada *Ayien Akbery*. Viene á reducirse á la expresion decimal 3,1416, que no es exacta, cuando mas, sino hasta las diezmilésimas, y de consiguiente del cálculo del perímetro del polígono de 768 lados.

Bueno es saber que las razones 7 : 22 y 113 : 355 se presentan por sí mismas en la serie de las fracciones aproximadas que encontramos, cuando convertimos á fraccion continua (*Aritm.* §. 163) la fraccion ordinaria que corresponde á la razon expresada anteriormente en decimales (*Aritm.* §. 85). Mas como no sea rigurosamente exacta la tal razon, no debemos avanzar el cálculo hasta el extremo; y nos convendrá operar á un mismo tiempo sobre las dos fracciones:

$$\frac{31415926}{10000000} \text{ y } \frac{31415927}{10000000}$$

la una menor y la otra mayor que la razon exacta, y reducirnos á los cuocientes que son comunes á las dos operaciones. (Para mayor extension véase el *Complemento de los elementos de Algebra.*)

157. *Observaciones.* No es el estado de que hemos dado muestras el medio mas expedito de obtener el valor del lado del último polígono que en él está contenido; queda reducido á la mitad el número de extracciones de raices; calculando en vez de los lados de los polígonos intermedios las cuerdas BC, B′C, fig. 80, de los arcos que es necesario agregar á los arcos AB y AB′ para completar la semicircunferencia. Con efecto,

$$BC=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AB}^2};\ \overline{B'C}^2=\sqrt{\overline{AC}^2=\overline{AB'}^2}$$

pues que los triángulos ABC y AB′C, formados sobre el diámetro, y que tienen el vértice de uno de sus ángulos en la circunferencia, son necesariamente rectángulos (§. 114); y si tomamos por unidad al radio AO, y que designemos por a y a' á las AB y AB′, y por b y b' á las BC y B′C; siendo, como suponemos, $AC=2$, resultará:

$$b=\sqrt{4-a^2};\quad b'=\sqrt{4-a'^2};$$

y pues que (§. *ant.*) tenemos $a'=\sqrt{2-\sqrt{a4-a^2}}$, nos resultará

$$a'=\sqrt{2-b};\ \text{ó, lo que es lo mismo,}\ a'^2=2-b;$$

y sustituyendo este valor en el de b', vendrá á trasformarse en $b'=\sqrt{2+b}$: en seguida pasaremos de b á b' extrayendo la raiz cuadrada de la primera cantidad aumentada del 2; y del mismo modo tendremos á $b''=\sqrt{2+b'}$, en la cual b'' representa la cuerda B''C del arco correspondiente á AB'', mitad de AB'; y asi sucesivamente.

Dando por supuesto que $a=1$, nos ocurrirán:

$$b=\sqrt{3}=1,7320508075$$
$$b'=\sqrt{2+1,7320508075}=1,9318516525$$
$$b''=\sqrt{2+1,9318516525}=1,9828897227$$
$$b'''=\sqrt{2+1,9828897227}=1,9957178465$$
$$b^{\text{IV}}=\sqrt{2+1,9957178465}=1,9989291749$$
$$b^{\text{V}}=\sqrt{2+1,9989291749}=1,9997322758$$
$$^{\text{VI}}=\sqrt{2+1,9997322758}=1,9999330678$$
$$b^{\text{VII}}=\sqrt{2+1,9999330678}=\sqrt{3,9999330678};$$

y correspondiendo el símbolo b á un polígono de seis lados, b' habrá de corresponder al de 12; b'' al de 24; b''' al de 48; b^{IV} al de 96; b^{V} al de 192; b^{VI} al de 384; y b^{VII} al de 768. Designando por a^{VIII} el lado de este último, tendremos:

$$a^{\text{VII}}=\sqrt{4-b^{\text{VIII}\,2}}=\sqrt{4-3,9999330678}$$

$$=\sqrt{0,0000669322}=0,0081812\,1;$$

y multiplicando este último número por 768, obtendremos el contorno del polígono inscrito de 768 lados, en los mismos términos que en el estado anterior; y calcularemos en seguida el perímetro del polígono circunscrito correspondiente.

PRIMERA PARTE.

SECCION SEGUNDA.

Del área de los polígonos, y la del círculo.

158. Por *superficie* de una figura cualquiera entendemos la parte de extension que se halla comprendida entre las líneas que terminan la tal figura. A esta extension la damos tambien el nombre de *área* de la figura.

Sería muy conveniente aplicar con especialidad la voz *área* á la extension superficial, siempre que la consideremos con relacion á su magnitud; en vista de que se hace con mayor frecuencia uso de la palabra *superficie* para designar la forma, prescindiendo de toda especie de límites*: y esto es lo que yo pienso hacer en el curso de esta obra.

159. Por otra parte, es muy evidente, como que se nos ofrecerán muchos ejemplares de ello en lo sucesivo, que dos figuras de muy diferentes formas pueden contener áreas iguales. Esta circunstancia me reduciré á expresarla, diciendo con *M. Legendre* que las dos tales figuras son *equivalentes*, y reservaré la denominacion de *iguales* para las figuras semejantes que en caso de sobre-

* Ordinariamente decimos con efecto una *superficie curva* por oposicion al plano y á la superficie plana; y para determinar su extension, sería necesario que hiciésemos uso de la expresion la *superficie de una superficie curva*, la cual es muy viciosa en todos sentidos, mientras que el *área de una superficie curva* es una expresion clara y correcta al mismo tiempo. Adoptándola, conservamos la analogía entre las líneas y las superficies, pues que estas palabras se aplican solamente á las formas; y de este modo la voz *área* viene á ser para este segundo caso la análoga de la voz *longitud* para el primero.

poner la una á la otra, pueden confundirse exactamente en una.

160. En los triángulos y en los paralelógramos se elige arbitrariamente uno de los lados, al cual se da el nombre de *base*, y al mismo tiempo llamamos *altura* á la perpendicular bajada desde el vértice del ángulo opuesto al lado elegido en el triángulo, ó de un punto cualquiera del lado opuesto en el paralelógramo.

Fig. 90. BD y B'D', fig. 90, son las alturas de los triángulos ABC, A'B'C', en la suposicion de que se hayan escogido para bases á los lados AC y A'C'. Conviene tener presente que cuando la perpendicular caiga fuera del triángulo, viene á ser, propiamente hablando, perpendicular sobre la prolongacion de la base.

El vértice del ángulo opuesto á la base se llama el *vértice* del triángulo.

La recta IK es la altura del paralelógramo EFGH. Bien claro se ve que permanecerá la misma, sea cual fuere el punto del lado HG, de donde se la baje (§. 65).

No es menos evidente que los triángulos, cuyas bases se hallen en una misma recta, y cuyos vértices existan en una línea paralela á las bases, tienen la misma altura; es decir, que los triángulos comprendidos entre unas mismas paralelas tienen una misma altura. Los triángulos ABC, A'B'C' y el paralelógramo EFGH tienen todos tres la misma altura, pues que en virtud de la naturaleza de las paralelas AF y BG, las tres perpendiculares BD, B'D' é IK, son todas entre sí iguales (§. 55).

TEOREMA.

161. *Dos paralelógramos de una misma ó de iguales bases, y de una misma ó de iguales alturas, son equivalentes.*

Demostracion. Teniendo, como se supone, una misma ó iguales bases los dos paralelógramos, podremos considerarlos como colocadas la una sobre la otra de modo que se confundan entre sí; y como tienen ademas la misma altura, es forzoso que el lado paralelo á la base del primero coincida con el opuesto á la base del segundo, ó que se hallen los dos en la prolongacion de una misma línea, segun se nos presentan en las figuras 91 con respecto á los paralelógramos ABCD y ABEF. Fig. 91.

En esta suposicion, los triángulos ADF' y BCE son iguales por tener respectivamente iguales los lados AD y BC, y tambien los AF y BE, como lados opuestos que entre sí son de unos mismos paralelógramos; y ademas tienen iguales los ángulos DAF y CBE por ser entre sí paralelos los lados que los comprenden, y estar dirigidas en un mismo sentido sus aberturas. Si del cuadrilátero ABED se quita por una parte el triángulo ADF, y por otra al BCE, nos resultarán necesariamente dos cantidades entre sí iguales, de las cuales será la una el paralelógramo ABEF, y la otra el paralelógramo ABCD.

TEOREMA.

162. *Cualquier triángulo es la mitad de un paralelógramo de la misma base y de la misma altura.*

Demostracion. Si por los vértices B y C de dos de los ángulos del triángulo ABC, fig. 92, se tiran las rectas BD y CD respectivamente paralelas á los lados AC y AB, la figura ABCD será un paralelógramo (§. 79) Fig. 92.
que tiene la misma base y la misma altura que el trián-

gulo propuesto (§. 160); y siendo entre sí iguales los dos triángulos ABC y BCD por tener entre sí iguales así los lados AB y CD como los AC y BD (§. 54), y ademas comun el tercer lado CB, vendrá á ser necesariamente el triángulo ABC la mitad justa del paralelógramo ABCD, que tiene la misma base y la misma altura que él.

163. *Corolario.* De lo cual se sigue que dos triángulos que tengan la misma base y la misma altura, son equivalentes, pues que son mitades de otros dos paralelógramos de la misma base y altura; los cuales, como ya se sabe, son equivalentes (§. 161).

PROBLEMA.

164. *Trasformar un polígono de un cierto número de lados en otro, que teniendo un lado menos le sea equivalente.*

Solucion. Sea por ejemplo el pentágono ABCDE,

Fig. 93. fig. 93. Júntense por medio de una recta los ángulos E y C; y por el vértice del ángulo D, que se halla situado entre los dos primeros, tírese paralelamente á la EC la recta DF, que determina en la prolongacion del lado AE un punto F, el cual, junto con el punto C, formará el cuadrilátero ABCF, equivalente al pentágono ABCDE.

Para convencerse de esta verdad, basta tener presente que siendo una misma la base EC de los dos triángulos CDE y CFE, y hallándose comprendidos entre las paralelas CE y DF, deben ser entre sí equivalentes (§. *ant.*); y que agregando sucesivamente cada uno de los mencionados triángulos al mismo cuadrilátero ABCF, resultan del mismo modo el pentágono ABCDE, y el cuadrilátero ABCF.

No padecerá variacion alguna el método, aun cuando el pentágono ABCDE tenga algun ángulo entrante, como en la figura 94; solo habrá que tener en la demos- Fig. 94.
tracion cuidado que el pentágono ABCDE y el cuadrilátero ABCF se forman entrambos, quitando del cuadrilátero ABCE los triángulos equivalentes CDE y CFE.

Bien claro se ve que la construccion y los razonamientos que preceden pueden aplicarse á cualquier polígono que se quiera.

165. *Corolario.* Si efectuamos en el cuadrilátero FABC una construccion parecida á la que acabamos de efectuar, lo vendremos ó trasformaremos en un triángulo equivalente; y del mismo modo convertiremos á un polígono cualquiera en un triángulo que á él equivalga. Si nos propusiéramos, por ejemplo, un exágono, podríamos trasformarlo primeramente en un pentágono; en seguida haríamos de este un cuadrilátero equivalente; y finalmente lo convertiríamos en un triángulo que á él equivaliese.

TEOREMA.

166. *Dos rectángulos* ABCD *y* EFGH *que tengan la misma base*, fig. 95, *son entre sí como sus alturas* *. Fig. 95.

Demostracion. En este caso, lo mismo que (§. 58), las alturas AD y EH de los dos paralelógramos pueden ser entre sí comensurables ó incomensurables.

En el primer supuesto si dividimos las alturas AD y EH en partes como A*d* y E*h*, iguales á su comun medida, y levantamos perpendiculares en los puntos de division, nos vendrán á resultar en cada uno de los rectángu-

* He variado la propuesta de este teorema á fin de hacerlo semejante al de la proposicion del §. 255, que le es análogo.

los propuestos tantos rectángulos iguales, cuantas divisiones haya en la altura de cada uno; pues que la base de todos estos rectangulitos habrá de ser igual á AB, y todas sus alturas deberán ser iguales entre sí. La razon de los dos rectángulos ABCD y EFGH será evidentemente igual á la de los dos números que nos expresen cuántos rectangulitos contiene cada uno de ellos: números que son precisamente los mismos de las partes iguales contenidas en las alturas AD y EH. Tendremos, pues:

ABCD : EFGH : : AD : EH.

Y como en el caso propuesto el rectángulo ABCD aparece dividido en cinco partes iguales á la AB*cd*, al mismo tiempo que el rectángulo EFGH se nos representa dividido en solas tres, deduciremos esta proporcion:

ABCD : EFGH : : 5 : 3.

Cuando sean entre sí incomensurables las alturas AD
Fig. 96. y EH, fig. 96, se puede fácilmente hacer ver que la razon de los rectángulos ABCD y EFGH no puede ser ni mayor ni menor que la de sus alturas.

Con efecto, si tuviéramos

ABCD : EFGH : : AD : EI,

siendo EI mayor que EH, é imaginásemos dividida la AD en partes iguales menores que HI, y que se llevasen estas partes sobre la EH desde E hácia H, caeria necesariamente un punto de division *h* entre H é I; y levantando por este punto á la EH la perpendicular *hg*, tendremos el rectángulo EF*gh*, que nos dará:

ABCD : EF*gh* : : AD : E*h*,

pues que las alturas AD y E*h* serian comensurables entre sí por construccion; y comparando esta proporcion con la anterior, se deduce facilísimamente de ellas

EFGH : EF*gh* : : EI : E*h*;

lo cual no es humanamente posible, por ser EFGH< EF*gh*, y EI>E*h*.

Llevando el punto I al otro lado del GH en I′, tampoco se podrá obtener la siguiente proporcion:

ABCD : EFGH : : AD : EI′;

porque al tomar en *h*′ el punto de division correspondiente á *h*, tendriamos primeramente con respecto á las alturas AD y E*h*′, que son comensurables entre sí,

ABCD : EF*g*′*h*′ : : AD : E*h*′,

la cual nos conduciria todavía á esta otra:

EFGH : EF*g*′*h*′ : : EI′ : E*h*′,

y que no puede ser menos de ser absurda, á causa de que EFGH>EF*g*′*h*′, y EI′<E*h*′.

No pudiendo, pues, ser mayor ni menor que la de AD á EH, la razon del rectángulo ABCD al otro rectángulo EFGH, será forzosa consecuencia:

ABCD : EFGH : : AD : EH.

TEOREMA.

167. *Dos rectángulos cualesquiera son entre sí como los productos de su base por su altura, ó como los productos de dos lados contiguos.*

Demostracion. Si de la base del paralelógramo ABCD, fig. 97, tomamos una parte A*b*, igual á la base del paralelógramo EFGH, y tiramos la recta *bc* paralela á BC, nos resultará, con arreglo al teorema anterior: Fig. 97.

A*bc*D : EFGH : : AD : EH;

tomando despues AD por base de los paralelógramos ABCD y A*bc*D, que entonces tendrán por alturas la AB y la A*b*, podremos concluir:

ABCD : A*bc*D : : AB : A*b*.

Multiplicando ahora por órden estas proporciones con el cuidado de omitir el factor $AbcD$, comun á los dos términos de la primera razon compuesta, y sustituir en lugar de Ab su igual EF, tendremos:

$$ABCD : EFGH : : \overline{AB} \times \overline{AD} : \overline{EF} \times \overline{EH},$$

resultado en que se verifica la propuesta del teorema *.

168. *Observacion.* No siendo otra cosa medir las cantidades que comparar entre sí las de la misma especie, bien se deja conocer que la medida de las cantidades debe tener por objeto el determinar cuántas veces contiene una área cualquiera á otra que arbitrariamente hayamos

* Aqui me he valido de la multiplicacion por órden, como del medio mas sencillo de conseguir el resultado que se apetecia; mas podria muy bien suceder que se experimentase alguna dificultad en concebir esta variacion, en la cual parece que se deben multiplicar las áreas entre sí. Con todo, esta dificultad dejará de existir luego que se imagine que estas áreas, para ser comparadas unas con otras, estan préviamente referidas á una cierta y determinada área, adoptada por medida comun ó por unidad. Y aun puede darse mayor claridad á este pasage, poniéndolo en estos términos:

$$AbcD : EFGH : : AD : EH, \qquad \frac{EFGH}{AbcD} = \frac{EH}{AD}$$

Las proporciones $ABCD : BbcD : : AB : Ab$ dan $\frac{AbcD}{ABCD} = \frac{AB}{Ab}$

lo cual no presenta oscuridad alguna, puesto que tratamos de razones de cantidades homogéneas. En este supuesto, designando el quebrado $\frac{EH}{AD}$ cuantas veces está contenida el área $AbcD$ en la EFGH, asi como la fraccion $\frac{Ab}{AB}$ nos manifiesta cuántas veces está contenida el área ABCD en la $AbcD$, el número de veces que la primera está contenida en la última, estará de consiguiente expresada por $\frac{EH}{AD} \times \frac{Ab}{AB} = \frac{EF}{AB} \times \frac{EH}{AD}$, concibiendo referidas las rectas á una medida comun.

adoptado para que nos sirva de término de comparacion ó de unidad. Medir, por ejemplo, el rectángulo ABCD, fig. 98, es tratar de determinar cuántas veces contiene este rectángulo á un cuadrado *abcd*, en el cual se suponga que el lado *ab* sea igual á la recta elegida para medida comun de las longitudes de las rectas; y con arreglo á lo expuesto, y refiriendo á la medida comun la base y la altura AB y BC del paralelógramo ABCD, nos resultará: Fig. 98.

$$abcd : ABCD : : ab \times bc : AB \times BC; \text{ ó } : : 1 : \frac{AB}{ab} \times \frac{BC}{bc};$$

lo que pone en claro que *el rectángulo* ABCD *contiene al rectángulo* abcd, *ó al área adoptada por unidad tantas veces como el producto del número de unidades lineares contenidas en su base* AB, *y multiplicado por el número de unidades lineares contenidas en su altura* BC, *contiene á la unidad númérica;* expresion cuya exactitud es evidente, por estar ya reducidas á números las razones. El deseo de abreviar ha inducido á decir, que *el area de cualquier rectángulo es igual al producto de su base por su altura*; debiendo estar siempre con el cuidado de entender y restablecer la primera proposicion, cuando dé motivo á ello la mala inteligencia de la segunda.

La verdad de la proposicion antecedente resulta de la mera inspeccion de sola la figura, siempre que el lado del cuadrado elegido por medida comun esté contenido exactamente en la base y en la altura del rectángulo ABCD. Tirando entonces por todos los puntos de division de la altura BC rectas *ef* paralelas á la AB, nos resultará dividido el rectángulo ABCD en tantos rectángulos iguales, ó en tantas bandas ó fajas iguales, cuantas contiene su altura á la *ab*; y cada una de estas bandas puede dividirse, del mismo modo que la AB*ef*, en tantos cuadrados B*egh*, todos iguales al *abcd*, cuantas veces contiene la base AB á la *ab*. El número total, pues, de los cuadrados iguales al B*egh*, contenidos en el rectángulo ABCD, es igual al de las bandas AB*ef*, multiplicado por el número de cuadrados contenidos en cada una: lo cual compone el producto del número de unidades lineares de la base por el número de unidades lineares de la altura.

169. 1.° *Corolario.* Siempre que sean entre sí iguales los dos lados AB y BC del rectángulo, en términos que haya pasado á ser cuadrado, en tal caso su área se medirá formando la segunda potencia de su lado AB; es decir, que contendrá al cuadrado *abcd* elegido por unidad, tantas veces cuantas la segunda potencia del número de unidades lineares contenidas en su lado contenga á la unidad numérica; y de esto nace que se llama tambien *cuadrado* de un número á la segunda potencia del mismo número.

170. 2.° *Corolario.* El área de cualquier paralelógramo se mide por el producto de su base por su altura. Con efecto, siendo entre sí equivalentes los paralelógramos de una misma base y de una misma altura (§. 161), cualquier paralelógramo habrá necesariamente de ser equivalente al rectángulo de la misma base y la misma altura. Se infiere asimismo que siendo entre sí dos paralelógramos cualesquiera como sus respectivas medidas, estarán de consiguiente en la razon de los productos de cada base por cada altura respectiva, ó simplemente en la razon de las bases, si son iguales las alturas; ó en razon de las alturas cuando tengan la misma base.

171. 3.° *Corolario.* Siendo todo triángulo la mitad de un rectángulo de la misma base y de la misma altura,

habrá de medirse el área de todo triángulo tomando la mitad del producto de su base por su altura. Y siendo entre sí las mitades como los todos, cualesquiera triángulos vendrán á tener la misma razon que los paralelógramos de que hacen parte; y de consiguiente la misma que la de la respectiva base por su correspondiente altura (§. *antec.*); ó como sus bases, cuando sean iguales sus alturas; ó como sus alturas, cuando sean iguales las bases.

PROBLEMA.

172. *Trasformar en un cuadrado á un paralelógramo, ó á un triángulo dado.*

Solucion. 1.° Determinando una media proporcional entre la base AB y la altura DF del paralelógramo propuesto ABCD, fig. 99, hallaremos el lado FG del cuadrado EFGH equivalente al paralelógramo dado. Fig. 99.

Con efecto, en virtud de la última construccion tenemos:

$$AB : FG :: FG : DE;$$

de donde se infiere que $\overline{AB}\times\overline{DE}=\overline{FG}^2$;
y como la medida del área del paralelógramo propuesto es AB×DE, y la del cuadrado EFGH, construido sobre FG, es $\overline{FG}^2$, esta última figura debe ser equivalente á la otra.

2.° Por lo que respecta al triángulo A′B′D′, deberemos primeramente buscar la media proporcional FG entre la base A′B′ y la mitad de la altura D′E′, pues en tal caso tenemos:

$$A'B' : FG :: FG : \tfrac{1}{2}D'E';$$

de la cual se sigue que $\tfrac{1}{2}\overline{A'B'}\times\overline{D'E'}=\overline{FG}^2$; en cuya ecuacion el primer producto representa el área del triángulo, y el segundo la del cuadrado.

173. *Corolario.* Por medio del problema anterior se puede trasformar cualquiera polígono en un cuadrado equivalente; para lo cual será indispensable trasformarle en primer lugar en un triángulo, segun el método (§. 164), y en seguida se convertirá inmediatamente el tal triángulo en un cuadrado.

174. *Observacion.* Pudiendo todo polígono ser dividido en triángulos (§. 81), no habrá inconveniente en valuar su área, calculando con separacion la de cada uno de los triángulos que lo componen, y tomando la suma de sus resultados.

TEOREMA.

Fig. 100. 175. *El área de un cuadrilátero* ABCD, *fig.* 100, *en el cual son entre sí paralelos dos lados, y que se llama trapezio, se mide por el producto de la semisuma de los dos lados paralelos,* AB *y* CD, *multiplicada por la altura* EF *tomada entre estos lados.*

Demostracion. Si tiramos la diagonal CB, dividiremos el trapezio en dos triángulos ABC y BCD, cuya altura comun será EF; y siendo ABCD=ABC+ABC;

$$ABC=\tfrac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{EF};$$

$$BCD=\tfrac{1}{2}\overline{CD}\times\overline{EF};$$

podremos concluir de estos antecedentes que

$$ABCD=\tfrac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{EF}+\tfrac{1}{2}\overline{CD}\times\overline{EF}=\tfrac{1}{2}\,(AB+CD)\ EF,$$

lo cual es justamente la propuesta del teorema.

Bueno será observar que la recta GH, tirada por el punto G de enmedio de uno de los lados no paralelos

del trapezio, es igual á $\tfrac{1}{2}$(AB+CD); porque siendo H el punto de enmedio de la línea BD (§. 58) la semejanza de los triángulos BCD y BHI hace ver con evidencia que IH=$\tfrac{1}{2}$CD; así como la de los triángulos ACB y GCI prueba del mismo modo que GI=$\tfrac{1}{2}$AB, de lo cual resulta que

$$GH=GI+IH=\tfrac{1}{2}\,(AB+CD).$$

Dividiendo tambien la recta GH á la EF en dos partes iguales (§. 58) se habrá de hallar á igual distancia de los lados paralelos del trapezio; y se podrá decir de consiguiente: que *el área del trapezio se mide por el producto de su altura, multiplicada por una línea tirada á igual distancia de las dos bases paralelas.*

TEOREMA.

176. *Las áreas de los polígonos semejantes son entre sí como los cuadrados de los lados homólogos de los mismos polígonos.*

Demostracion. Si los polígonos propuestos fuesen unos triángulos cualesquiera ABC y *abc*, fig. 101, los Fig. 101.
triángulos rectángulos BDC y *bdc*, formados por las alturas de los primeros, serán semejantes, como que ademas de tener los ángulos rectos D y *d*, tienen ademas entre sí iguales los ángulos B y *b*; lo cual nos da:

$$CD : cd :: BC : bc;$$

pero en virtud de la semejanza de los triángulos ABC y *abc*, habremos de tener tambien:

$$AB : ab :: BC : bc;$$

multiplicando estas dos proporciones por su órden, y dividiendo por 2 los dos términos de la primera razon de la proporcion compuesta, nos resultará:

$$\tfrac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{CD} : \tfrac{1}{2}\overline{ab}\times\overline{cd} : : \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2,$$

resultado, cuyos primeros términos expresan las áreas respectivas de los triángulos ABC y *abc* (§. 171); y de consiguiente

$$ABC : abc : : \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2.$$

2.° Estando divididos dos polígonos semejantes
Fig. 51. ABCDE y *abcde*, fig. 51, en un mismo número de triángulos semejantes (§. 89) y semejantemente dispuestos, cada uno de los triángulos del primer polígono será á su correspondiente en el segundo como el cuadrado de uno de los lados del primer polígono es al cuadrado del lado homólogo del segundo. Tendremos, pues:

$$ABC : abc : : \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$$

$$AEC : aec : : \overline{AE}^2 : \overline{ae}^2$$

$$EDC : edc : : \overline{ED}^2 : \overline{ed}^2.$$

Mas la semejanza de los polígonos nos da la siguiente serie de razones iguales:

$$AB : ab : : AE : ae : : ED : ed,$$

de la cual se deduce

$$\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 : : \overline{AE}^2 : \overline{ae}^2 : : \overline{ED}^2 : \overline{ed}^2,$$

lo cual demuestra la igualdad de las razones de cada uno de los triángulos de cada polígono á su correspondiente en el otro; y de donde resulta

$$ABC : abc : : AEC : aec : : EDC : edc.$$

Y de esta última serie de razones iguales se deducirá por último

$$ABC + AEC + EDC : abc + aec + edc : : ABC : abc,$$

$$\text{ó } ABCDE : abcde : : ABC : abc : : \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2.$$

El mismo razonamiento tendria manifiestamente lugar, cualquiera que fuese el número de lados de los dos polígonos propuestos.

TEOREMA.

177. *Las áreas de dos triángulos que tengan un ángulo comun, tienen la misma razon que los productos de los lados que comprendan el tal ángulo.*

Demostracion. Luego que bajemos las alturas CD y FG, fig. 101, de los triángulos ABC y AEF resultan Fig. 101.
formados los triángulos semejantes ACD y AFG, que dan

$$CD : FG : : AC : AF;$$

y con arreglo al §. 171, tendremos:

$$ABC : AEF : : \overline{AB}\times\overline{CD} : \overline{AE}\times\overline{FG}.$$

Si ahora se multiplican por órden las dos últimas proporciones, suprimiendo á un mismo tiempo el factor CD comun á los antecedentes, y el factor FG comun á los consecuentes, resultará, conforme á la propuesta, que

$$ABC : AEF : : \overline{AB}\times\overline{AC} : \overline{AE}\times\overline{AF}.$$

TEOREMA.

178. *El cuadrado* AEHL, fig. 162, *construido so-* Fig. 102.
bre la hipotenusa de un triángulo rectángulo ABE, *es equivalente á la suma de los cuadrados* ABCD *y* BEFG, *construidos sobre los otros dos lados del mismo triángulo.*

Demostracion. Podríamos con razon deducir esta proposicion de la del §. 75, ya que se ha hecho ver en aquel párrafo que $\overline{AB}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{AE}^2$; y que conforme al §. 169, los $\overline{AB}^2$, $\overline{BE}^2$ y $\overline{AE}^2$ son las respectivas medidas de los cuadrados ABCD, BEFG y AEHL; mas suponiendo estas consideraciones que las líneas y las áreas se hallan referidas á números, he juzgado conveniente demostrar la proposicion, valiéndome inmediatamente de las áreas, á imitacion de Euclides, y sin hacer uso alguno de razones de líneas.

Para ello es indispensable bajar desde el ángulo recto B del triángulo ABE sobre la hipotenusa AE la perpendicular BK, y prolongarla hasta I, y en seguida tirar las líneas DE y BL. Teniendo el triángulo DAE la misma base AD que el cuadrado ABCD, y hallándose comprendido entre las mismas paralelas AD y CE, deberá ser equivalente á la mitad del tal cuadrado (§. 162); asimismo el triángulo BAL habrá de ser equivalente á la mitad del rectángulo AKIL, construido sobre su base AL, y comprendido entre las mismas paralelas AL y BI. Ahora bien, los triángulos DAE y BAL son entre sí iguales (§. 16), porque el ángulo DAE, compuesto del ángulo recto DAB y del ángulo BAE es necesariamente igual al BAL, compuesto igualmente de un ángulo recto EAL y del ángulo BAE, y siendo ademas respectivamente iguales entre sí los lados AD y AB, AL y AE, como lados que son de un mismo cuadrado: es, pues, la mitad del cuadrado ABCD equivalente á la del rectángulo AKIL; y de consiguiente el mismo cuadrado ABCD será equivalente al rectángulo AKIL. Del mismo modo se hará ver que el cuadrado BEFG es equivalente al rectángulo EHIK; y de todo esto resultará que el cuadrado AEHL, compuesto de los dos rectángulos AKIL y EHIK es equivalente á la suma de los dos cuadrados ABCD y BEFG.

179. 1.° *Corolario.* Pues que tienen una misma altura AL los rectángulos AKIL, y EHIK y el cuadrado

AEHL, habrán de ser entre sí como sus bases (§. 170); de modo que tengamos:

ABCD : BEFG : AEHL : : AK : KE : AE;

es decir, que los cuadrados construidos sobre los lados del ángulo recto de un triángulo rectángulo son al cuadrado construido sobre la hipotenusa, como los segmentos adyacentes AK y KE son á la hipotenusa entera AE.

180. 2.° *Corolario.* Ya que las áreas de los polígonos semejantes son entre sí como los cuadrados de los lados homólogos de los mismos polígonos (§. 176), si se construyen sobre los dos lados del ángulo recto del triángulo ABE y sobre su hipotenusa AE, fig. 103, tres Fig. 103.
polígonos semejantes X, Y y Z, vendremos á tener:

$$X : \overline{AB}^2 : : Y : \overline{BE}^2 : : Z : \overline{AE}^2;$$

de donde se inferirá:

$$X+Y : \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2 : : Z : \overline{AE}^2;$$

y del teorema precedente, que nos da $\overline{AB}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{AE}^2$, se podrá concluir que X+Y=Z; es decir, que el polígono construido sobre la hipotenusa es equivalente á la suma de los otros dos.

PROBLEMA.

181. *Construir un polígono semejante á otro dado, y cuya área se halle en una razon dada con la del primero, ó que sea equivalente á un cuadrado dado.*

Solucion. En el primer caso, en que *bc*, fig. 104, Fig. 104.
designe uno de los lados del polígono dado, y en que el área de este polígono tenga á la del buscado la misma ra-

zon que tienen entre sí dos rectas cualesquiera M y N; tómense de una recta indefinida AE dos partes AK y KE que se hallen en la misma razon: sobre la suma de ellas AE, como diámetro, descríbase una semicircunferencia; levántese la perpendicular BK; tírense las cuerdas AB y BE; por último, llévese sobre la AB, desde B á C, el lado *bc* de la primera figura, y habiendo tirado CD paralela á la AE, tendremos en BD el lado que en el polígono buscado es homólogo á *bc*. La cuestion, pues, quedará reducida á construir sobre BD un polígono semejante al polígono X, lo cual se efectuará con arreglo al método del §. 90.

Para demostrar la construccion anterior deducimos desde luego de los triángulos ABE y CBD, semejantes entre sí, las siguientes proporciones:

$$AB : BE :: BC : BD \text{ y } \overline{AB}^2 : \overline{BE}^2 :: \overline{BC}^2 : \overline{BD}^2$$

mas con arreglo al §. 179

$$\overline{AB}^2 : \overline{BE}^2 :: AK : KE \text{ ó } :: M : N;$$

de consiguiente $\overline{BC}^2 : \overline{BD}^2 :: M : N$;

y por tanto (§. 176) el polígono construido sobre BC será al polígono construido sobre BD en la misma razon que M á N, como lo exige la propuesta de la cuestion.

Si el lado *bc* de la figura X fuese mayor que AB, prolongaríamos esta línea hasta C′; mas no por eso variarian la construccion ni la demostracion.

En el caso en que el área del polígono pedido debiera ser equivalente á un cuadrado dado N^2, se trasformaria igualmente en un cuadrado el polígono dado, y representando por M^2 este cuadrado, sería necesario que tuviésemos

$$\overline{BC}^2 : \overline{BD}^2 :: M^2 : N,$$

á la cual se sigue $M : N :: BC : BD$;

asi obtendríamos entonces á BD con el auxilio de las líneas proporcionales (§. 92) ó bien podríamos tomar AK y KE en la misma razon de los cuadrados M^2 y N^2.

TEOREMA.

182. *El área de un polígono regular tiene por medida la mitad del producto de su contorno por el radio del círculo inscrito.*

Demostracion. El tal polígono puede ser dividido en tantos triángulos iguales como lados tiene (§. 139); uno de estos triángulos ABO, fig. 79, se halla medido por $\frac{1}{2}\overline{AB}\times$ Fig. 79.
$\overline{OG}$; y repitiendo este producto tantas veces como lados tiene el polígono, nos resultará, siempre que designemos por N al número de lados,

$$\tfrac{1}{2}N\times AB\times OG;$$

mas representando $N\times AB$ al contorno ó perímetro del polígono, si lo designamos por P, vendremos á tener por resultado á

$$\tfrac{1}{2}P\times OG,$$

como nos lo anuncia la propuesta del teorema.

Al radio del círculo inscrito se le llama tambien *apotema*, y en consecuencia se dice que *el área de un polígono regular tiene por medida la mitad del producto de su perímetro por su apotema.*

183. *Corolario.* Del último teorema y del §. 140 se sigue que siendo entre sí las áreas de los polígonos regulares de un mismo número de lados como los cuadrados

de sus lados, lo son asimismo entre sí como los cuadrados de los radios de los círculos, en los cuales esten inscritos, ó á los cuales se hallen circunscritos. Con efecto, tenemos sucesivamente

$$ABCDEF : abcdef :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2,$$
$$AB : ab :: AO : ao \;(\text{§. } 240),$$
$$\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 :: \overline{AO}^2 : \overline{ao}^2;$$

de lo cual resulta $ABCDEF : abcdef :: \overline{AO}^2 : \overline{ao}^2$.

Por otra parte, observando que $AO : ao :: OG : og$ (§. 140), tendremos del mismo modo que

$$ABCDEF : abcdef :: \overline{OG}^2 : \overline{og}^2.$$

184. *Observacion.* Haciendo aplicacion de la proposicion del párrafo precedente á los polígonos regulares inscritos y circunscritos á un mismo círculo, se echa de ver que en todo caso es posible hallar dos polígonos del mismo número de lados, inscrito el uno y circunscrito el otro, tales que la diferencia de sus respectivas áreas sea menor que cualquiera otra cantidad dada, por pequeña que pueda esta imaginarse.

Fig. 87. Efectivamente, en la figura 87 tenemos con la mayor evidencia $ABCDE : abcde :: \overline{Oa}^2 : \overline{OG}^2$; y designando por P el área del polígono circunscrito, y por p la del polígono inscrito, resultará

$$P : p :: \overline{Oa}^2 : \overline{OG}^2,$$
$$P - p : P :: \overline{Oa}^2 - \overline{OG}^2 : \overline{Oa}^2;$$

de donde se deduce que $P - p = \dfrac{P\left(\overline{Oa}^2 - \overline{OG}^2\right)}{\overline{Oa}^2}$;

valor en el cual se puede hacer tan pequeño como se quiera, el factor $\overline{Oa}^2 - \overline{OG}^2$, multiplicando los lados de los polígonos.

185. *Corolario.* Siendo visiblemente mayor que el círculo el polígono circunscrito, mientras el inscrito es menor que el mismo círculo, se infiere claramente que en todo caso podremos asignar un polígono regular, ora inscrito, ora circunscrito, cuya área se diferencie, cuan poco se quiera, de la de un círculo dado. Para lo cual bastará escoger un polígono de un número de lados bastante grande, á fin de que la diferencia entre el polígono inscrito y el polígono circunscrito no supere á la cantidad asignada.

TEOREMA.

186. *Si tres cantidades* A, B, X, *son tales, que la primera* A, *á la cual suponemos variable, y que jamas deja de superar á cada una de las otras dos* B *y* X *que no varían, pueda aproximarse á un mismo tiempo, cuanto se quiera á entrambas, será forzoso decir que* $B=X$.

Demostracion. Sea 1.° $X>B$; y con arreglo á esta hipótesis, y en virtud de la propuesta,

$$A>X;\; X>B;$$

de lo cual resulta que si tomamos A de modo que la diferencia $A-B$ sea menor que una cantidad cualquiera δ, lo cual siempre se mira como posible, la diferencia $X-B$ habrá de ser con mas fuerte razon menor que δ.

2.° Sea $X<B$; y en tal caso tendremos $A>B$; $B>X$; y tomando A de modo que $A-X$ sea menor que δ, con mucha mayor razon la diferencia $B-X$ será menor que δ.

Y conduciendo este razonamiento á manifestar que la diferencia de las dos cantidades invariables X y B es necesariamente menor que cualquiera cantidad dada, por pequeña que esta sea, se sigue forzosamente que B=X (§. 153).

TEOREMA.

187. *El área de un círculo tiene por medida la mitad del producto de la circunferencia por el radio, ó* $\frac{1}{2}CR$, *designando por* C *la circunferencia, y por* R *el radio.*

Demostracion. Con efecto, cuanto mas aumenta el número de los lados del polígono circunscrito, tanto mas se aproxima á la circunferencia su perímetro P (§. 152), y tanto mas se aproxima al producto $\frac{1}{2}CR$ el $\frac{1}{2}PR$, sin embargo de que este segundo será siempre mayor que el primero, bien que pueda disminuirse el exceso cuanto se quiera. Por otra parte, el área del mismo polígono, que siempre es mayor que la del círculo, puede aproximarse á esta con cuanta cercanía se apetezca (§. 185). Se hallan pues, los productos $\frac{1}{2}PR$, $\frac{1}{2}CR$, y la verdadera medida del área del círculo, en las mismas circunstancias que las tres cantidades A, B y X del párrafo precedente. De consiguiente la verdadera medida del área del círculo es $\frac{1}{2}CR$ *.

* Se demuestra inmediatamente que la medida del área del círculo no puede ser mayor ni menor que $\frac{1}{2}CR$: en vista de que si se verificase que fuera mayor, $\frac{1}{2}CR$ sería en tal caso la medida de un círculo mas pequeño que aquel cuyo radio fuese=R; mientras que inscribiendo en este último círculo un polígono mayor que el otro círculo (*véase la nota de la pag.* 134), este polígono tendria sin embargo por medida un producto menor que $\frac{1}{2}CR$, puesto que su contorno y su apotema son respectivamente menores que C y R.

Tampoco se puede suponer que el producto $\frac{1}{2}CR$ sea la medida de un círculo mayor que el propuesto; pues inscribiendo en el círculo

188. *Corolario.* De esto se infiere que las áreas de los círculos son entre sí como los cuadrados de sus respectivos radios ó diámetros. Con efecto, pues que tenemos esta proposicion:

$$C : C' :: R : R' \text{ (§. 154)},$$

si la multiplicamos por esta otra

$$\tfrac{1}{2}R : \tfrac{1}{2}R' :: R : R',$$

la cual es evidente, producirá la que sigue:

$$\tfrac{1}{2}CR : \tfrac{1}{2}C'R' :: R^2 : R'^2;$$

en cuya proporcion los dos términos de la primera razon son, con arreglo á lo que precede, las respectivas medidas de las áreas de los círculos, cuyos radios son R y R'.

Por otro lado, es bien manifiesto que designando por D y por D' á los respectivos diámetros, y siendo, como es bien sabido, D=2R, D'=2R', tendremos esta proporcion:

$$R^2 : R'^2 :: D^2 : D'^2;$$

y de consiguiente

$$\tfrac{1}{2}CR : \tfrac{1}{2}C'R' :: D^2 : D'^2;$$

lo cual completa la propuesta de la proposicion.

Si representamos por π la circunferencia de un círculo cuyo diámetro esté designado por 1, la superficie de este círculo deberá ser $\frac{1}{4}\times\pi=\frac{1}{4}\pi$; y por tanto

$$\tfrac{1}{4}\pi : \tfrac{1}{2}C'R' :: 1 : D'^2;$$

de donde se infiere que

$$\tfrac{1}{2}C'R' = \tfrac{1}{4}\pi D'^2;$$

lo cual nos hace ver que *el área de un círculo es igual al cuadrado del diámetro multiplicado por* $\frac{1}{4}$ *de la razon de la circunferencia al diámetro.* Si sustituimos en vez de

mayor un polígono mayor que el círculo propuesto, este polígono tendria una medida mayor que la que se asigna al círculo en que se halla inscrito.

D'^2 su equivalente $4R'^2$, nos resultará $\pi R'^2$, ó *el cuadrado del radio multiplicado por la razon de la circunferencia al diámetro.*

TEOREMA.

Fig. 105. 189. *El área de la figura* AFBO fig. 105, *terminada por los dos radios* AO *y* BO, *que forman un ángulo cualquiera, y por el arco de círculo* AFB, *la cual se llama* sector del círculo, *tiene por medida á la mitad del producto del arco* AFB, *mulplicado por el radio* AO.

Demostracion. Si por el centro O levantamos sobre el diámetro AE la perpendicular DO, los lados del ángulo recto AOD y el arco ABD comprenderán evidentemente entre sí la cuarta parte de la área del círculo; y el razonamiento del §. 109 nos hace ver que el área del sector AFBO es á la del sector AOD en la misma razon que el arco AFB al arco AD. Mas por cuanto el área del sector AOD es la cuarta parte de la del círculo, vendrá á ser

$$AOD=\tfrac{1}{4}\times\tfrac{1}{2}C\times AO=\tfrac{1}{8}C\times AO;$$

y la proporcion presentada mas arriba

$$AFBO : AOD :: AFB : AD, \text{ ó } \tfrac{1}{4}C,$$

se trasformará en la que sigue:

$$AFBO : \tfrac{1}{8}C\times AO :: AFB : \tfrac{1}{4}C;$$

lo cual nos dará:

$$AFBO=\tfrac{1}{2}\overline{AFB}\times AO,$$

segun nos lo anuncia la propuesta de la proposicion.

190. *Observacion.* Podremos determinar el valor del espacio AFBA, que se halla comprendido entre el arco AFB y la cuerda AB, sustrayendo del área del sector AFBO la del triángulo ABO.

Esta última se expresará por $\tfrac{1}{2}\overline{BG}\times\overline{AO}$, siempre que BG sea perpendicular á la AO (§. 171); y quitando su valor del del sector AFBO (§. 189), tendremos por residuo

$$AFBA=\tfrac{1}{2}\,\overline{AFB}\times\overline{AO}-\tfrac{1}{2}\,\overline{BG}\times\overline{AO}=\tfrac{1}{2}\,(AFB-BG)\,AO,$$

que es decir: *la mitad del producto de la diferencia entre el arco* AFB *y la perpendicular* BG *multiplicada por el radio* AO*.

N. B. El espacio AB se llama *segmento*, y á la porcion FH del radio OF perpendicular á la cuerda AB se la da el nombre de *flecha*.

* En la *Trigonometría* se hace muy frecuente uso de la perpendicular BG, dándola el nombre de *seno* del arco AFB.

SEGUNDA PARTE.

SECCION PRIMERA.

De los planos y de los cuerpos terminados por superficies planas.

N. B. En todo lo que va á seguir, las figuras abrazan el espacio con todas sus tres dimensiones. Las líneas puntuadas pasan por la espalda de los planos.

De los planos y de las líneas rectas.

191. Ya que la línea recta se aplica exactamente al plano en todos sentidos (§. 2), es bien claro que en teniendo una recta dos de sus puntos en un plano, debe hallarse en él toda entera, sin lo cual se podrian tirar por dos puntos muchas líneas rectas; la una que estaria tirada en el plano mismo por los puntos dados, y las otras, que tendrian prolongaciones fuera del plano; lo cual no puede acordarse con la idea que tenemos formada de la línea recta.

192. La interseccion de dos planos es una línea recta, segun resulta de las definiciones del §. 1; y bien se concibe que si por dos puntos de la interseccion se tira una recta, deberá hallarse á un mismo tiempo en el uno y en el otro plano (§. *preced.*); y de consiguiente no podrá menos de ser su mutua interseccion.

Fig. 106. 193. Por una misma línea recta AB, fig. 106, se puede hacer pasar una infinidad de planos diferentes CD,

EF, GH &c. Para convencerse de ello, basta observar que á un plano se le puede en todo caso suponer girando al rededor de una línea recta tirada por dos de sus puntos, y tomando por este medio un infinito número de diferentes posiciones, sin que los puntos de la recta varíen de lugar; mas no por eso se deja de ver que este plano permanecerá inmoble siempre que se fije fuera de la recta un punto, por el cual deba necesariamente pasar. De lo cual resulta que se halla determinada la situacion de un plano cuando se conozcan y no se hallen en una misma recta tres de los puntos donde haya de pasar, asi como está determinada la posicion de una recta luego que tenemos conocimiento de dos de sus puntos.

Se puede igualmente demostrar esto mismo haciendo ver que dos planos que tengan tres puntos comunes A, B, C, fig. 107, se confunden en toda su extension; Fig. 107.
y para convencerse de ello basta observar que si por un punto cualquiera E, tomado en uno de estos planos, se tira una recta EF que encuentre á dos de las tres rectas AB, AC y BC que juntan á cada dos de los tres puntos comunes, y que por esta razon se hallan á un mismo tiempo en dos de los planos (§. 191), esta recta será igualmente comun á los mismos planos, por tener en ellos los dos puntos *e* y *f*, en que corta á la AB y á la BC.

194. Estan por consiguiente en un mismo plano dos rectas que se cortan; porque haciendo pasar un plano por una de ellas, por la AB por ejemplo, y por un punto C, tomado sobre BC; teniendo esta última dos de sus puntos B y C sobre el plano, habrá de hallarse en el mismo toda entera (§. 191).

De esto se infiere que juntando dos á dos, por medio de rectas, tres puntos tomados de cualquier modo en el espacio, el triángulo que resulte ABC, habrá de hallarse todo entero en un mismo plano.

No acontece lo mismo con cuatro puntos tomados por casualidad, pues el plano que pasa por tres de ellos no siempre pasa por el cuarto; y como no se halla en un mismo plano el cuadrilátero que en tal caso resulta, se le conoce bajo el nombre de *cuadrilátero oblicuo*.

195. Las paralelas, en consecuencia de su definicion, han de estar siempre en un mismo plano; pero es necesario tener muy presente que en el espacio dos rectas pueden ser perpendiculares á una tercera sin ser entre sí paralelas ni encontrarse; porque pueden tirarse por un solo punto tantas perpendiculares á una misma recta, cuantos planos se pueden hacer pasar por la indicada recta; es
Fig. 106. decir, una infinidad. Las rectas AC, AE, AG, fig. 106, pueden todas ser perpendiculares á la AB, la primera en el plano CD, la segunda en el plano EF, y la tercera en el plano GH. Si sucediere lo mismo á las líneas BD, BF y BH, serán entre sí paralelas las rectas BD y AC, como que son juntamente perpendiculares á la misma recta AB en el plano CD; pero estas mismas rectas no serán paralelas á ninguna de las demas.

TEOREMA.

Fig. 108. 196. *Una recta* CD, fig. 108, *levantada fuera de un plano* AB, *perpendicularmente á otras dos* DE, DF *tiradas por su pie en el mismo plano, es perpendicular á todas las que se pueden tirar por aquel punto en el mismo plano.*

Demostracion. Sea DG una recta tirada por el punto D, de cualquier manera en el plano AB; y ademas es necesario tirar una recta EF que corte á la DG; prolón-

guese por debajo del plano AB la CD en una cantidad C'D=CD; y tírense por último las rectas CE, CG, CF, C'E, C'G y C'F. Y pues que la CD es perpendicular sobre la DE y la DF, estas lo habrán de ser sobre C'D (§. 13); las oblicuas CE y C'E, CF y C'F serán iguales como que distan igualmente del pie D de la perpendicular (§. 27); y por otra parte siendo comun el lado EF á los triángulos CEF y C'EF, tendrán respectivamente iguales entre sí todos sus lados, y serán por consiguiente totalmente iguales (§. 29): serán, pues, iguales los ángulos CEF y C'EF. Lo mismo puede decirse de los triángulos CEG y C'EG, en los cuales se hallan comprendidos los tales ángulos entre un lado comun EG y otros dos lados respectivamente iguales entre sí CE y C'E (§. 16). A lo cual es consiguiente que los lados CG y C'G sean iguales; y como que distan igualmente del punto D, resulta de esto que la recta DG es perpendicular sobre CD (§. 27), y que recíprocamente lo es la CD sobre la DG*.

197. *Observacion.* Cayendo la recta CD de modo que forme ángulo recto con cada una de todas las que se pueden tirar por su pie en el mismo plano, y no inclinándose de consiguiente hácia lado alguno de él, se dice con propiedad que le es *perpendicular*.

TEOREMA.

198. *Si tres rectas* ED, FD *y* GD, fig. 109, *fueren perpendiculares á otra misma recta* CD *en un mis-* Fig. 109.

* Esta demostracion, del mismo género que la de Euclides, pero mas sencilla, me ha sido comunicada por M. Cauchy, geómetra jóven muy distinguido.

mo punto D, todas las tres habrán de hallarse en un mismo plano perpendicular a esta última.

Demostracion. No siendo esto asi, podriamos hacer pasar por dos rectas ED y ED un plano AB, al cual sería perpendicular la CD, y que cortaria el plano GDC tirado por la GD y la CD en una recta G'D, que tambien sería perpendicular á la CD (§. 196); y entonces tendriamos sobre una misma recta CD en el mismo punto D y en un mismo plano dos perpendiculares GD y G'D: lo cual es imposible (§. 32).

TEOREMA.

199. *Por un punto escogido fuera de un plano, ó que se halle en el mismo plano, no se puede tirar mas que una sola perpendicular al indicado plano, asi como por el mismo punto de una recta no puede pasar mas de un solo plano perpendicular á ella.*

Demostracion. El primer caso de la proposicion es casi evidente por sí mismo; pues si por el punto C, figu-
Fig. 108. ra 108, pudiéramos bajar sobre el plano AB otra perpendicular distinta de la CD, por ejemplo CG, sería tambien perpendicular esta recta sobre la GD, y el triángulo CGD vendria á tener á un mismo tiempo dos ángulos rectos; lo cual es, como bien se ve, una consecuencia absurda (§. 52).

En el segundo caso, si por la segunda perpendicular
Fig. 109. C'D, fig. 109, y por la primera CD se hiciera pasar un plano, sería indispensable que las dos rectas CD y C'D fuesen á un mismo tiempo perpendiculares á la recta DE, en la cual encontraria él al plano AB; lo cual es asimismo otro absurdo. Se ve, pues, que es verdadera la proposicion en sus dos primeras partes.

Por lo que respecta á la tercera, si por el punto D se pudiera tirar perpendicularmente á la CD otro plano distinto del AB, y que se tirase por aquel punto en el primero una recta cualquiera GD, encontrando en tal caso el plano GDC, tirado por esta recta y por la perpendicular CD al plano AB en una recta G'D diferente de la GD, vendria á seguirse que dos rectas G'D y GD, comprendidas en el mismo plano que la CD, serian perpendiculares en el mismo punto de esta recta; lo cual es absurdo (§. 32).

TEOREMA.

200. *Las oblicuas que igualmente distan de la perpendicular á un plano, son entre sí iguales; las que mas se apartan de ella son las mas largas; y la perpendicular es la mas corta de cuantas rectas se pueden tirar desde un punto dado á un plano.*

Demostracion. Siendo CD la perpendicular, fig. 110, Fig. 110.
1.º todos los puntos situados en la circunferencia del círculo EF, descrito desde el punto D como de centro, se hallan igualmente distantes del punto C; pues que siendo rectos los ángulos en D, habrán de ser iguales los triángulos CDE y CDF, como que tienen comun el lado CD, y entre sí iguales los lados DE y DF; es por consiguiente CE=CF.

2.º Si se junta con el centro D el punto G exterior al círculo, la recta GC, situada en el mismo plano que las rectas CF y CD, será mas larga que la CE (§. 27).

3.º La línea CD, que sin la menor duda es mas corta que la CF, habrá forzosamente de ser mas corta que todas cuantas se puedan tirar desde el punto C sobre el plano AB.

201. *Observaciones.* Hallándose cada punto de la recta CD igualmente distante de todos los de la circunferencia EF, se puede hacer uso de él en la descripcion de esta circunferencia; cual si fuese el centro D.

Valiéndonos de este medio, podríamos bajar desde un punto exterior una perpendicular á un plano. Para ello describiríamos en primer lugar desde el punto C sobre el plano AB un círculo, cuyo centro D buscaríamos; y juntándolo con el punto C, tendremos la recta CD perpendicular al plano AB.

Siendo la perpendicular CD la línea mas corta que se puede tirar desde el punto C al plano AB, se nos presenta en ella la medida natural de la distancia del indicado punto C al mencionado plano.

TEOREMA.

202. *Si desde un punto C de la recta CG oblicua*
Fig. 111. *al plano AB, fig. 111, se bajare sobre este plano la perpendicular CD, y se juntaren por medio de una recta los puntos G y D; la recta EF tirada en el plano AB perpendicularmente á la GD, será tambien perpendicular á la CG.*

Demostracion. Despues de haber tomado GE=GF, y de haber tirado en el plano AB las rectas ED y FD, tendremos ED=FD (§. 27). Tirando en seguida las oblicuas CE y CF, habrán estas de ser entre sí iguales por hallarse á igual distancia de la perpendicular (§. 200); mas considerándolas con respecto á la CG en el plano ECF, hallaremos que distan igualmente del pie G de la recta CG, la cual será por consiguiente perpendicular á la EF (§. 30).

TEOREMA.

203. *Una recta DE, fig. 112, situada fuera de* Fig. 112.
un plano AB y paralela á otra cualquiera AC tirada en el mismo plano, no lo encontrará jamás, por mas prolongada que la supongamos, y habrá de ser al mismo tiempo paralela á toda recta BF, tirada en el plano AB paralelamente á la AC.

Demostracion. 1.° Hallándose la recta DE con la recta AC en un mismo plano AD, no podria encontrar al plano AB, sino en su interseccion con el anterior; es decir, sobre AC; mas no pudiendo DE encontrar á la AC, por suposicion, tampoco podrá encontrar al plano AB.

2.° Si por la recta DE y por uno de los puntos B de la recta BF, paralela por suposicion á la AC en el plano AB, se tira el plano D*f*, la recta B*f* habrá necesariamente de ser paralela á la DE, pues que se acaba de hacer ver que la DE no puede encontrar al plano AB, en el cual se halla tambien contenida la B*f*; y con arreglo á lo que precede, no pudiendo la recta AC, paralela á la DE, encontrar tampoco al plano D*f* en que se halla contenida esta última, le habrá de suceder lo mismo con respecto á la recta B*f*, la cual se halla alli tambien. No encontrándose, pues, en ningun punto las rectas AC y B*f* que se hallan contenidas en un mismo plano, habrán de ser entre sí paralelas; y como por el punto B no es posible tirar mas de una sola paralela á la AC (§. 40), es consiguiente que B*f* se confunda con BF, ó que la DE sea paralela á la BF; lo cual viene á ser la segunda parte de la proposicion.

204. *Corolario.* Por lo dicho se ve claramente que

como sean dos rectas DE y BF paralelas á una misma tercera AC, habrán de ser paralelas entre sí; porque si imaginamos un plano AB que pase por la recta BF y por la recta AC, la recta DF deberá satisfacer á las condiciones de la propuesta del teorema anterior.

TEOREMA.

205. *Los ángulos* BCD *y* EAF, *que tienen los lados paralelos y la abertura dirigida hácia una misma parte, son entre sí iguales, aunque se hallen situados en distintos planos.*

Demostracion. Si por los lados paralelos CD y AE, CB y AF se hacen pasar dos planos AD y AB; que se tome CD=AE; CB=AF; y que ademas se tiren las DF, BF, DB y EF, las figuras ACDE y ACBF serán paralelógramos (§. 76); los lados ED y FB serán por consiguiente iguales á la AC, paralelos entre sí (§. *prec.*), y formarán un paralelógramo, en el cual tendremos DB =EF. Teniendo los triángulos DCB y AEF los tres lados del uno respectivamente iguales á los tres del otro, cada uno al suyo, habrán de ser por consiguiente totalmente iguales los triángulos, y por tanto BCD=EAF.

TEOREMA.

206. *Si en cada uno de los dos planos* AB *y* AD *se tiran por un punto cualquiera* H *de su comun seccion* AC *las rectas* IH *y* HG, *respectivamente perpendiculares á la indicada comun seccion; y con tal que el ángulo* IHG *que ellas forman entre sí, sea igual al ángulo* ihg *formado por las rectas* ih *y* hg, *tiradas de la misma manera en los planos* ab *y* ad, *con respecto á la comun*

seccion ac *de estos, se podrán hacer coincidir los dos primeros planos con los dos últimos.*

Demostracion. Si se aplica el plano *ab* sobre el AB de modo que *ac* caiga sobre AC, y que el punto *h* se halle sobre el punto H, la recta *hg* coincidirá necesariamente con la HG por ser rectos los dos ángulos *ahg* y AHG. Ademas, las rectas IH y HG, perpendiculares á la AH, determinan un plano GHI perpendicular á la misma recta (§. 198; las rectas *ih* y *hg* determinan igualmente otro plano *ghi*, perpendicular á la *ah*. Mas cuando la *ah* se haya confundido con la AH, los planos GHI y *ghi* deben confundirse tambien; sin lo cual seria posible tirar por el mismo punto H dos planos perpendiculares á la misma recta (§. 199); y siendo por suposicion entre sí iguales los ángulos GHI y *ghi*, es consiguiente que coincidiendo *hg* con HG, coincida tambien *ih* con IH; de lo cual resulta que los planos *ad* y AD coincidan asimismo, pues que las dos rectas *ah* é *ih* situadas en el primero se confunden con las otras dos rectas AH é IH, colocadas en el segundo (§. 194).

207. 1.° *Corolario.* De esto se sigue que el espacio comprendido entre dos planos AB y AD que se cortan, considerado entre estos límites, puede, sin embargo de hallarse indefinido en todos los demas sentidos, compararse á cualquiera otro espacio terminado de la misma manera. Este espacio, que es con respecto á los planos lo que el ángulo primitivo es con respecto á las rectas (§. 7), viene á constituir el *ángulo de los mismos planos*, y mide su *inclinacion.*

Lo llamaré de aqui adelante *ángulo diedro*, queriendo decir con esto, *ángulo de dos caras*; y lo designaré por cuatro letras, de las cuales las dos del medio nos in-

dicarán la comun seccion de los planos, ó la *arista* del ángulo diedro*. El ángulo formado por los planos AB y AE,
Fig. 113. fig. 113, que se encuentran á lo largo de la línea AG, viene á ser el ángulo diedro BGAE, ó DHGC.

Ademas de lo dicho se sigue del §. precedente que el ángulo CHD, formado por las rectas HD y HC, tiradas perpendicularmente á la comun seccion AG de los planos AB y AE, es la medida natural del ángulo diedro que ellos comprenden entre sí; pues que es bien visible que si hacemos girar al plano AC al rededor de la recta AG, comun seccion de los dos planos propuestos, ó arista del ángulo diedro, la recta HC, que coincidirá con HD, cuando el plano AC se halle exactamente aplicado sobre AB, describirá en este movimiento un plano perpendicular á AG (§. 198), y vendrá á colocarse en HF en la prolongacion de HD, cuando el plano AC se halle en el de AB; de suerte que el ángulo CHD tiene su principio, aumento y conclusion, juntamente con el de los planos. Por otra parte, si comparamos el ángulo de los dos planos *ab* y *ae* con el de los otros dos planos AB y AE, hallaremos que la razon de estos ángulos diedros es la misma que la razon de los ángulos *chd* y CHD. Con efecto, cuando estos ángulos son comensurables entre sí; que se les divida en partes que son alícuotas del uno y del otro, por medio de las rectas hd', HD$'$, HD$''$; y que se tire por la comun seccion *ag* y por hd' el plano ad'; y por la comun seccion AG y por HD$'$, HD$''$, los planos

* Se le da ordinariamente el nombre de *ángulo plano*; pero esta denominacion es muy viciosa, porque no nos presenta del ángulo otra idea que la de estar contenido en un plano, y por consiguiente la de cualquier ángulo formado por dos rectas. La palabra *diedro* es compuesta de otras dos griegas, de las cuales la primera significa *dos*, y la segunda *cara ó base*.

AD, AD$''$, se formarán por una parte de ángulos diedros $dhgd'$, $d'hgc$, y por lo otra los ángulos diedros DHGD$'$, D$'$HGD$''$, D$''$HGC, que serán todos iguales (§. 206); y el ángulo diedro *dhgc* será al ángulo diedro DHGC como el número de partes contenidas en el ángulo *chd* es al número de partes contenidas en el ángulo CHD.

Si los ángulos diedros *bgac* y BGAC no fuesen comensurables entre sí, nos valdríamos de un razonamiento absolutamente semejante al del §. 109, y nos haria ver que su razon no podia ser menor ni mayor que la razon de los ángulos *chd* y CHD. Resulta, pues, de esto que *el ángulo diedro tiene por medida al ángulo plano, formado por dos rectas tiradas cada cual en cada una de las caras ó fachadas perpendicularmente á su comun seccion, y por un mismo punto de la tal recta.*

Bien se ve que los ángulos diedros gozarán de las mismas propiedades que los ángulos planos que los miden: los ángulos diedros LGHI y BGHC, por ejemplo, opuestos por la arista GH, son entre sí iguales por tener como medidas á los ángulos planos IHF y CHD, opuestos por el vértice.

208. 2.º *Corolario*. Un plano CD tirado por la línea FG perpendicular al plano AB, fig. 114; no se in- Fig. 114.
clina hácia lado alguno de este último, al cual es por consiguiente *perpendicular*; pues si en el plano AB se tira perpendicularmente á la CE la recta FK, prolongándola hasta K$'$, siendo rectos los ángulos GFK y GFK$'$ (§. 196), se infiere del párrafo precedente que los ángulos diedros BECD y ACED, formados por el plano CD sobre las dos partes AE y CB del plano AB, como rectos que son, han de ser forzosamente entre sí iguales.

Bien claro se ve que por la recta CE, tomada en el plano AB, no puede levantarse perpendicularmente sobre este plano sino el único plano CD.

TEOREMA.

209. *Si por un punto cualquiera de la comun seccion* CE *de los planos* AB *y* CD *que se encuentran en ángulo recto, se levanta perpendicularmente al primero una recta* FG, *se hallará comprendida esta recta en el segundo.*

Demostracion. Con efecto, si no se hallase en él, se podria todavía tirar por la tal línea y por la CE un segundo plano perpendicular á AB; lo que es absurdo (§ *preced.*).

Por otra parte la recta FG es perpendicular sobre la comun seccion (§. 196).

Fig. 115. 210. *Corolario.* De aqui se sigue que la interseccion OH, fig. 115, de dos planos CD y EF, perpendiculares á otro tercero AB, es perpendicular á este último; porque debiendo, por el párrafo precedente, la perpendicular levantada por el punto O del plano AB hallarse á un mismo tiempo en el plano CD y en el plano EF, no puede menos de ser su comun seccion OH.

TEOREMA.

Fig. 114. 211. *La recta* FG, fig. 114, *tirada perpendicularmente á la* CE *en el plano* CD *que encuentra al* AB *en ángulo recto, es perpendicular á este último plano.*

Demostracion. Si por el punto F se tira en el plano AB la recta FK perpendicular á la CE, el ángulo GFK

será forzosamente recto, pues que el plano CD es, por suposicion, perpendicular sobre AB (§. 208). Y hallándose á un mismo tiempo la línea GF perpendicular á las dos rectas CE y FK, tiradas en el plano AB, deberá tambien ser perpendicular á este mismo plano (§. 196).

TEOREMA.

212. *Dos rectas* FG *y* HI, *perpendiculares á un mismo plano, son entre sí paralelas; y recíprocamente, si la recta* FG *es perpendicular al plano* AB, *siendo al mismo tiempo* HI *paralela á la* FG, *deberá tambien ser la* HI *perpendicular al plano* AB.

Demostracion. Si por medio de la recta CE se juntan los puntos F y H, y por la misma línea y la FG se tira el plano CD, que será perpendicular á AB, él comprenderá á la recta HI, pues que esta es tambien perpendicular á AB (§. 209); y hallándose entonces esta última en el mismo plano que FG y perpendicular á la misma recta CE, habrá de ser paralela á la FG (§. 39).

Recíprocamente, si las líneas FG y HI son entre sí paralelas, el plano CD que las contenga será perpendicular sobre AB, siempre que una de ellas, FG por ejemplo, sea perpendicular sobre este último; y como en virtud del paralelismo, vendrá la otra recta HI á resultar perpendicular sobre CE lo mismo que FE, deberá ser perpendicular al plano AB en consecuencia de lo expuesto (§. *preced.*).

TEOREMA.

213. *Dos planos perpendiculares á una misma recta* GH, fig. 116, *no pueden jamas encontrarse.* Fig. 116.

Demostracion. Si efectivamente se encontrasen, y se juntase uno de los puntos de su comun seccion, la cual suponemos sea EF, con los puntos G y H, en donde la perpendicular GH los encuentra, las rectas HF y GF, que saliendo de un mismo punto formarian un triángulo con la GH, se hallarian necesariamente en el mismo plano que esta última; y pues que ellas la deberian encontrar en ángulos rectos (§. 196), se seguiria que desde un mismo punto se podrian bajar á un mismo plano dos perpendiculares sobre una sola recta; lo cual es un absurdo (§. 32).

214. No pudiéndose jamas encontrar dos planos perpendiculares á una misma recta, habrán de ser *paralelos* entre sí.

TEOREMA.

215. *Siempre que dos planos paralelos* AB *y* CD,
Fig. 117. fig. 117, *esten cortados por un tercero* FH, *las intersecciones* EF *y* GH *habrán de ser entre sí paralelas.*

Demostracion. Bien claro se ve que las rectas EF y GH, comprendidas en el mismo plano FH, no podrán jamas encontrarse por mas que se las prolongue, á no ser que igualmente se encuentren los planos AB y CD que respectivamente las contienen; lo cual es absolutamente imposible, pues que son paralelos.

216. *Corolario.* De esto se sigue: 1.° que dos planos paralelos tienen comunes sus perpendiculares.

2.° Que son entre sí iguales estas perpendiculares, y de consiguiente es una misma la distancia de dos planos paralelos en todos sus puntos.

Fig. 118. Con efecto, si se levanta sobre el plano AB, fig. 118, la perpendicular GH, y por su pie se tiran las rectas GL y GI, los planos LGH é IGK cortarán á los AB y CD en las direcciones de las rectas HM y HK, paralelas á las rectas GL y GI, y de consiguiente perpendiculares como estas últimas á la GH. Es, pues, GH (§. 196) perpendicular al plano CD al mismo tiempo que al plano AB.

En segundo lugar, si se levanta por otra parte sobre el plano AB la perpendicular RS, y concebimos el plano GRS, la figura GHSR será un paralelógramo rectángulo (§. 215), y nos dará por consiguiente GH=RS.

TEOREMA.

217. *Si dos rectas que entre sí se cortan, fueren respectivamente paralelas á otras que tambien se corten entre sí, el plano determinado por las dos primeras será paralelo al que determinen las dos segundas.*

Demostracion. Con efecto, si las rectas HM y HK son paralelas á las rectas AP y AN, y se baja desde el punto H perpendicularmente al plano AB la recta GH, será perpendicular esta sobre cada una de las rectas GL y GI, tiradas en este plano paralelamente á las rectas HM y HK Fig. 118. (§. 204); será, pues, la línea GH perpendicular tambien sobre estas últimas, y por consiguiente sobre el plano CD, determinado por ellas (§. 196). Siendo, pues, en tal caso perpendiculares á la misma recta GH los planos AB y CD, habrán de ser entre sí paralelos (§. 214).

218. *Corolario.* De esto se sigue que por dos rectas HQ y GI, fig. 119, que no cortándose ni siendo pa- Fig. 119. ralelas entre sí no pueden estar comprendidas en un mismo plano, se puede en todo caso hacer pasar dos planos paralelos, cuya mínima distancia nos dé la de las dos rectas propuestas.

Efectivamente, si por un punto cualquiera T de la recta HQ se tira una recta TD paralela á la GI, y por un punto cualquiera T de la recta GI, una recta RO paralela á la HQ; las rectas HQ y TD, respectivamente paralelas á las rectas RO y GI, determinarán un plano paralelo al que pase por estas últimas.

Por lo cual es bien visible que las rectas HQ y GI no pueden aproximarse mas entre sí que estos mismos planos.

219. *Observacion.* Si por un punto cualquiera R de la recta GI se tira una perpendicular RS sobre el plano CD; el plano GS, que pasa por SR y por GI, será á un mismo tiempo perpendicular sobre CD y sobre AB (§. 216), y encontrará al primero en la direccion de la recta HK paralela á GI (§. 215), y el cual cortará á la recta HQ en el punto H, en donde mas se aproxima esta á la GI; porque si desde el punto H se baja sobre GI la perpendicular HG, será esta perpendicular al plano AB (§. 211), y por lo mismo lo será tambien al plano CD (§. 216); y de consiguiente medirá la mas corta distancia de los planos y de las rectas.

Conviene observar bien que esta recta es á un mismo tiempo perpendicular á las dos rectas propuestas HQ y GI (§. 196).

TEOREMA.

220. *Dos rectas* GH é IK, *comprendidas entre dos*
Fig. 120. *planos paralelos* AB y EF, fig. 120, *son en todo caso cortadas en partes proporcionales por un tercer plano* CD, *paralelo á los dos primeros.*

Demostracion. Para ponerlo de manifiesto juntaremos primeramente los puntos H é I por una recta HI; y en

seguida tiraremos sobre el plano CD por los puntos L, M, N, en que las rectas GH, HI é IK le encuentran, las rectas LM y MN, á las cuales podremos considerar como las intersecciones del plano CD con los planos triangulares GHI y HIK; y que serán por consiguiente paralelos á las rectas GI y HK, en las que GHI encuentra á AB y HIK encuentra á EF (§. 215). Teniendo, pues, el triángulo GHI dos de sus lados, GH y HI, cortados por la línea LM paralela á GI, nos dará:

HL : LG : : HM : MI;
HL : HG : : HM : HI;

y siendo paralela la MN á la HK, el triángulo HIK nos dará:

HM : MI : : KN : NI;
HM : HI : : KN : KI;

de donde se concluirá, en conformidad con la propuesta,

HL : LG : : KN : NI;
HL : HG : : KN : KI.

221. Siempre que muchos planos ASB, BSC, CSD, DSE, ESF, FSG, GSA, fig. 121, pasando por un mismo punto S se encuentran dos á dos, el espacio que entre sí comprenden, indefinido en el sentido opuesto al punto S, se llama ordinariamente *ángulo sólido*; mas yo he creido deber llamarle *ángulo poliedro* ó ángulo de muchas caras, por la misma razon que he tenido para imponer el nombre de *ángulo diedro* ó ángulo de dos caras al que forman dos planos entre sí*. Esta nomenclatura ofrece por otra parte la ventaja de distinguir á los ángulos de este género por el número de sus caras ó fachadas. El ángu- Fig. 121.

* Mas adelante se verán razones bastante fuertes para desterrar de la Geometría la palabra *sólido*, cuya significacion mas conocida entre nosotros corresponde á una idea muy diferente de la que se la atribuye en Geometría.

Fig. 122. lo de á tres caras SABC, fig. 122, tendrá el nombre de *ángulo triedro*; un ángulo que tenga cuatro caras será un *ángulo tetraedro*; el ángulo SABCDEFF de la figu-
Fig. 121. ra 121 vendrá á ser un *ángulo eptaedro.*

El punto S en que se encuentran todas las caras ó fachadas del ángulo viene á ser su *vértice*; y sus intersecciones sucesivas SA, SB, SC, SD, SE &c. son las *aristas* del ángulo. Lo que constituye al ángulo poliedro y lo distingue de cualquiera otro ángulo compuesto del mismo número de caras, son los ángulos planos ASB, BSC, CSD &c. formados por sus aristas consecutivas, y las inclinaciones respectivas de las caras, ó los ángulos diedros que estos forman entre sí. Hay, pues, en un ángulo triedro seis cosas que considerar, á saber: tres ángulos planos y tres ángulos diedros.

TEOREMA.

222. *La suma de dos cualesquiera de los ángulos planos que componen un ángulo triedro, es en todo caso mayor que el tercero.*

Demostracion. Si los ángulos planos ASB, ASC,
Fig. 122. BSC, fig. 122, fuesen iguales entre sí, la proposicion sería evidente por sí misma. Para en el caso contrario, sea el ASB el mayor de los tres, y tírese en él la recta SD de modo que el ángulo ASD sea igual al ASC; tómese SD=SC, y tírense las rectas ABD, AC, BC. Los dos triángulos ASC y ASD habrán de ser entre sí iguales, pues que los ángulos ASC y ASD, iguales por construccion, se hallarán comprendidos entre lados respectivamente iguales: tendremos, pues, AC=AD; pero AC+BC>AB (§. 15); ó AC+BC>AD+BD: quitando, pues,

de una y otra parte las líneas iguales AC y AD, habrá de resultar BC>BD. Ahora bien, teniendo los triángulos BSC y BSD los lados SC y SD entre sí iguales, y comun el lado SB, el ángulo BSC, opuesto al lado BC mayor que el BD, habrá forzosamente de ser mayor que el ángulo BSD opuesto á este último (§. 19); por cuyo medio se evidencia que ASC+BSC=ASD+BSC y que mayor que ASD+BSD, ó que ASB.

TEOREMA.

223. *Siempre que dos ángulos triedros* SABC, S'A'B'C', fig. 123, *esten formados de tres ángulos pla-* Fig. 123.
nos respectivamente iguales entre sí, cada uno al suyo, habrán de ser iguales los ángulos diedros comprendidos entre los ángulos planos iguales; es decir: las caras ó fachadas semejantes se hallarán igualmente inclinadas entre sí en cada uno de los ángulos triedros propuestos.

Demostracion. Sea ASB = A'S'B'; ASC = A'S'C'; BSC=B'S'C'; y si sobre las aristas BS y B'S', por cuyo medio se juntan ángulos planos iguales, se toma BS=B'S'; y por los puntos B y B' se conciben planos ABC, A'B'C', perpendiculares á estas aristas; siendo rectángulos en B los triángulos BSC, ASB, asi como lo son en B' los triángulos B'S'C', A'S'B', serán iguales á estos últimos á causa de la igualdad de los lados BS y B'S'; de la de los ángulos BSC y B'S'C', y de la de los ASB y A'S'B' (§. 18). Tendremos, pues: SC = S'C'; SA = S'A'; BC = B'C'; AB=A'B'.

Mas siendo ASC=A'S'C', serán iguales los triángulos ASC y A'S'C' (§. 16), y por consiguiente darán AC=A'C'. Por último siendo iguales los tres lados de los triángulos ABC y A′B′C′, los ángulos ABC y A′B′C′, que miden los ángulos diedros formados por los planos BSC y BSB, B′S′C′ y A′S′B′ (§. 206), habrán de ser iguales, segun lo anuncia la propuesta del teorema.

Suponiendo esta construccion que el plano ABC encuentre á un mismo tiempo las aristas SA y SC, no podrá verificarse cuando los ángulos ASB y BSC no sean entrambos agudos; mas en el caso de que alguno de ellos, ó que entrambos á dos sean obtusos, se prolongaria mas allá del punto S la una de las aristas SA, SB, ó á entrambas. Estas prolongaciones producirian un nuevo ángulo triedro, en el cual el ángulo diedro formado sobre la arista SB, sería ó el suplemento de CSBA, ó la continuacion de este ángulo (§. 207). La misma construccion causaria una variacion análoga sobre el ángulo triedro S′A′B′C′.

Cuando las dos aristas AS y SC sean perpendiculares á SB, serán paralelas al plano ABC; mas en tal caso su ángulo ASC mide la inclinacion de los planos SBA y SBC. Lo mismo se observa en el segundo ángulo triedro; y resulta evidente por sí misma la proposicion.

Si uno solo de los ángulos ASB, BSC fuere recto, el
Fig. 124. primero por ejemplo, fig. 124, habiendo prolongado las aristas SA y SB en caso necesario, á fin de que sean agudos los ángulos ASC y BSC, se tirarán desde un punto cualquiera de la arista SC los planos CAD y CBD perpendiculares, el uno sobre SA, y el otro sobre SB : BSA les será perpendicular (§. 208); y ellos se cortarán por consiguiente segun la direccion de una recta CD perpendicular á este plano (§. 210). Tomando ahora S′C′=SC, y haciendo la misma construccion sobre el ángulo triedro S′A′B′B′, serán respectivamente iguales los triángulos

SAC y S′A′C′, SBC y S′B′C′, por tener iguales dos ángulos y un lado. Será, pues: AC=A′C′, BC=B′C′; AS=A′S′; BS=B′S′: las dos últimas igualdades establecen la de los rectángulos ASBD y A′S′B′D′: es por tanto BD=B′D′; y en tal caso, teniendo los triángulos CBD, C′B′D′, rectángulos en D y D′, dos lados del uno respectivamente iguales á dos del otro, de los cuales es el uno la hipotenusa, habrán de ser entre iguales (§. 34): asi será CD=C′D′, y por consiguiente los ángulos CBD y C′B′D′, que miden las inclinaciones de los planos ASB y BSC, A′S′B′ y B′S′C′ deberán ser tambien iguales entre sí *.

TEOREMA.

224. *Dos ángulos triedros* SABC y S″A″B″C″, fig. 123, *formados por tres ángulos planos iguales y semejantemente dispuestos entre sí, son iguales en todas sus partes.* Fig. 123.

Demostracion. Con efecto, habiendo hecho coincidir las caras iguales ASB y A″S″B″ por las aristas AS y A″S″, las caras iguales ASC y A″S″C″ que estan igualmente inclinadas á las anteriores (§. *preced.*) habrán tambien de coincidir; y á causa de la igualdad de los ángulos planos ASB, A″S″B″, ASC, A″S″C″, las aristas SB y S″B″, SC y S″C″ coincidirán tambien, y por consiguiente las caras ó fachadas BSC y B″S″C″, determinadas por estas aristas.

* Mr. Vecten, profesor en el liceo de Nimes, me ha hecho observar que tirando por el vértice S el plano perpendicular á la arista SR, se podia formar una construccion aplicable á todos los casos; pero siendo mas dificil de concebir la figura que la 123, he creido deber conservar aqui la demostracion de Roberto Simsom, que ha sido el primero que ha dado este teorema y el siguiente para llenar una laguna que presentaba el lib. 11 de los *Elementos de Euclides.*

225. *Observacion.* Es muy importante observar que no puede realizaase la coincidencia de los ángulos triedros, sino en el caso en que las caras iguales esten semejantemente colocadas en ambos; es decir, cuando estando los dos situados sobre caras iguales, y teniendo su vértice vuelto del mismo lado estan abiertos en un mismo sentido los ángulos diedros, como sucede á los ángulos SABC y $S''A''B''C''$, y no á los ángulos SABC y $S'A'B'C'$. En este último el ángulo diedro $C'B'S'A'$, comprendido entre los ángulos planos $A'S'B'$, $B'S'C'$, tiene su abertura en sentido contrario de la del ángulo diedro CBSA, que le es igual, como comprendido entre los ángulos planos ASB, BSC, respectivamente iguales á los anteriores; y bien se ve que es absolutamente imposible hacer coincidir estos dos ángulos triedros.

La igualdad de los triángulos ABC y $A'B'C'$, sobre la cual se funda la de los ángulos diedros formados por ángulos planos iguales, subsiste siempre, porque si se les concibe separados del ángulo triedro, se puede volver el plano del segundo para aplicarlo sobre el primero; inversion que no posible efectuar en los ángulos poliedros. No se puede, pues, concluir la igualdad de los ángulos triedros SABC y $S'A'B'C'$ sino de la de sus partes constituyentes, y porque no puede haber razon alguna para que se diferencien uno de otro, estando, como estan, formados de los mismos ángulos planos y de los mismos ángulos diedros.

No resultando la diferencia de estos ángulos, sino de una simple trasposicion de partes; es decir, de que siendo el órden de los ángulos planos del uno ASB, ASC, CSB, el de los ángulos correspondientes del otro viene á ser $A'S'B'$, $C'S'B'$, $A'S'C'$; me parece que á unos ángulos triedros se

les podria llamar *inversos* de los otros, y decir en consecuencia que con respecto al espacio que encierran, *dos ángulos triedros inversos uno de otro*, son iguales *.

Hay en los ángulos triedros otros muchos casos de igualdad; mas el precedente basta para nuestro objeto.

TEOREMA.

226. *La suma de los ángulos planos que componen un ángulo poliedro* convexo, *es decir, cuyas aristas sean todas salientes ó externas, cualquiera que ella sea, ha de ser siempre menor que la de cuatro rectos.*

Demostracion. Si se cierra el ángulo poliedro SABC DE, fig. 125, por un plano cualquiera, los lados del Fig. 125.
polígono ABCDE formado por las intersecciones de este plano, con cada una de las caras del ángulo poliedro propuesto, se convertirán estas caras en otros tantos triángulos. Considerando ahora con separacion al ángulo triedro BACS, tenemos que

$$SBA+SBC>ABC\ (\S.\ 222);$$

y el ángulo triedro CBDS nos da asimismo

$$SCB+SCD>BCD;$$

y asi de los demas: la suma de los ángulos SAB, SBA,

* Mr. Legendre, á quien se debe la observacion y el desvanecimiento de la dificultad que presenta la igualdad de los ángulos triedros inversos, les da el nombre de *simétricos* considerándolos como construidos de diferentes lados de un mismo plano. Con efecto si se volviera el ángulo triedro $S'A'B'C'$ á fin de colocarlo por debajo de $S''A''B''C''$ en $S''A''B''C''$, haciendo coincidir el ángulo plano $A'\ S'\ B'$ con su igual $A''S''B''$ por las aristas correspondientes $A'S'$ y $A''S''$, $B'S'$ y $B''S''$, los dos ángulos triedros presentarian por cada lado del plano $A''S''B''$ espacios simétricos. Mr. Legendre ha dado á esta ingeniosa idea ciertas exposiciones que han difundido mucha luz sobre la teoría de los poliedros ó cuerpos de caras planas, para cuya inteligencia remitimos á su obra.

SBC, SCD &c. formados sobre los lados AB, BC &c. de los triángulos ASB, BSC &c. habrá de ser mayor que la de los ángulos internos del polígono ABCDE, y por consiguiente valdrá mas de dos veces tantos rectos como lados tenga el polígono, menos dos, ó como caras tenga el ángulo poliedro, menos dos (§. 82). Si quitamos esta suma de la de todos los triángulos SAB, SBC, SCD &c. compuesta de tantas veces dos ángulos rectos como caras tenga el ángulo poliedro, quedarán forzosamente menos de dos veces dos ángulos rectos, ó menos de cuatro ángulos rectos para la suma de los ángulos planos ASB, BSC &c. formados en el vértice S del ángulo poliedro SABCDE.

De los cuerpos terminados por planos.

227. Los cuerpos terminados por planos se llaman *cuerpos poliedros*, ó simplemente *poliedros*.

No es posible cerrar por todas partes espacio alguno por un número de planos menor que cuatro. El cuerpo
Fig. 126. SABC, fig. 126, comprendido entre los cuatro planos ASB, ASC, BSC y ABC, se llama *tetraedro*.

Todo cuerpo que nos presenta por una de sus caras á un polígono cualquiera, y en que todas sus demas caras son triángulos cuyos vértices se hallan en un mismo pun-
Fig. 127. to, se llama *pirámide*. El cuerpo SABCDE, fig. 127, es una pirámide *pentagonal*, por ser su *base* ABCDE un pentágono; el punto S, vértice comun de todos los triángulos ASB, BSC, CSD, DSE, ESA, es tambien el *vértice*, y se llama la *cúspide* de la pirámide. El tetraedro
Fig. 126. SABC de la fig. 126 es asimismo una pirámide triangular. Ninguno de los ángulos poliedros de esta tienen mas de tres caras; lo cual no se verifica en las demas pirámi-

des sino en los ángulos adyacentes á la base; y por base se puede tomar en el tetraedro la cara ó fachada que se quiera.

Los tetraedros son en el espacio lo que los triángulos sobre un plano; porque asi como se fija en un plano la posicion de un punto, juntándolo por medio de un triángulo con otros dos puntos dados, se fija tambien la de un punto en el espacio, juntándolo con el auxilio de un tetraedro á otros tres puntos dados. Aqui á continuacion pueden verse las principales propiedades de los tetraedros, al mismo tiempo que algunas de las de las pirámides, que tienen la mayor analogía con los tetraedros.

TEOREMA.

228. *Si los ángulos triedros* S *y* S′ *de los tetraedros* SABC, S′A′B′C′, fig. 126, *estuviesen compuestos de* Fig. 126.
triángulos iguales y semejantemente dispuestos, estos tetraedros serán entre sí iguales; y lo mismo serán, si las caras SAB *y* SAC *del uno fueren iguales á las* S′A′B′ *y* S′A′C′ *del otro, reunidas de una misma manera, y formasen entre sí el mismo ángulo diedro que estos.*

Demostracion. Es evidente en primer lugar que haciendo coincidir la cara SAB con la S′A′B′, y estando, como estan, igualmente inclinadas sobre estas las otras caras iguales (§. 223), habrán de coincidir igualmente.

En segundo lugar, coincidiendo la cara SAB con al S′A′B′, la cara SAC habrá de coincidir con la S′A′C′ cuando el ángulo diedro CSAB sea igual al C′S′A′B′; y hallándose entonces confundidas las rectas SB y SC con las S′B′ y S′C′, las caras SBC y S′B′C′ habrán tambien de coincidir necesariamente.

229. Se da el nombre de *poliedros semejantes* á

aquellos cuyas caras son polígonos semejantes, y cuyos planos son en un mismo número semejantemente dispuestos é igualmente inclinados los unos con respecto á los otros, ó formando ángulos diedros iguales. Ya veremos que esta última condicion resulta de las demas en lo respectivo á los tetraedros y á las pirámides *.

TEOREMA.

230. *Siempre que los triángulos que forman dos ángulos triedros homólogos de dos tetraedros sean semejantes entre sí, y se hallen semejantemente dispuestos, los tales tetraedros son entre sí semejantes; y lo serán tambien en el caso en que dos caras del uno hagan entre sí el mismo ángulo que dos caras del otro, sean ademas semejantes á estas, y se hallen reunidas por lados homólogos.*

Demostracion. 1.° Si los triángulos SAB, SAC,
Fig. 126. SBC, fig. 126, fueren respectivamente semejantes á los triángulos S'DE, S'DF, S'EF, y se hallan en la misma disposicion, tómese en la arista S'D, homóloga en el tetraedro S'DEF á la arista SA del tetraedro SABC, la parte S'A'=SA, y por el punto A' tírese el plano A'B'C' paralelo á DEF, y se determinará en el tetraedro S'DEF un tetraedro S'A'B'C' semejante á S'DEF é igual á SABC.

Con efecto, es bien claro que en virtud del paralelismo de las rectas A'B' y DE, A'C' y DF, B'C' y EF

* El ya citado Mr. Cauchy ha demostrado en el cuaderno 16 del *Diario de la Escuela politécnica* que lo mismo acontecia á todos los poliedros convexos, y que esto se habia supuesto sin prueba en los *Elementos de Euclides*, y que ademas se habia extendido á todos los poliedros, sin aquella restriccion, cuya necesidad habia ya reconocido Roberto Simson. Véase al mismo tiempo la *Geometría* de Mr. Legendre, novena edicion.

(§. 205), las caras S'A'B' y S'DE, S'A'C' y S'DF, S'B'C' y S'EF, situadas dos á dos en el mismo plano, habrán de ser semejantes. Por otra parte, los triángulos A'B'C' y D'EF, situados en diferentes planos, y que ademas tienen sus lados paralelos, y de consiguiente sus ángulos iguales (§. 205), deberán ser semejantes. Teniendo, pues, los dos tetraedros S'A'B'C' y S'DEF sus caras semejantes, y sus ángulos triedros formados por ángulos iguales, tendrán respectivamente todos sus ángulos diedros iguales (§. 223), y de consiguiente serán necesariamente semejantes.

Ahora bien, los triángulos S'A'B', S'A'C', equiángulos por construccion á S'DE y S'DF, y por consiguiente, con arreglo á la hipótesi, á SAB y á SAC, serán iguales á estos últimos; en vista de que son iguales los dos lados homólogos S'A' y SA (§. 18): tendremos, pues, de este modo S'B'=SB, S'C'=SC; lo cual atraerá la igualdad de los triángulos equiángulos S'B'C' y SBC, y á consecuencia la de los tetraedros S'A'B'C' y SABC (§. 228). Y por último los tetraedros SABC y S'DEF, el uno igual, y el otro semejante á S'A'B'C', son semejantes entre sí.

2.° Si los triángulos SAB y SAC son semejantes á los triángulos S'DE y S'DF, juntos ademas por los lados homólogos á los que reunen á estos últimos, y siendo igual el ángulo diedro CSAB al ángulo diedro FS'DE, el tetraedro S'A'B'C', construido poco antes, será igual á SABC (§. 228), como que tiene dos caras S'A'B' y S'A'C' iguales á las caras SAB y SAC, y que forman entre sí el mismo ángulo diedro que estas últimas: será, pues, el tetraedro SABC ademas semejante á S'DEF.

TEOREMA.

231. *Dos pirámides cualesquiera serán semejantes, siempre que tengan todas sus caras entre sí semejantes y semejantemente dispuestas.*

Fig. 127. *Demostracion.* Sean SABCDE, S'FGHIK, fig. 127 las dos pirámides propuestas: bien visible es que todos sus ángulos diedros hacen parte de los ángulos triedros adyacentes á las bases ABCDE, FGHIK; mas cuando estos son homólogos, como B y G, C y H &c. hallándose comprendidos entre caras semejantes y semejantemente dispuestos, estan formados de ángulos iguales, y por consiguiente tienen sus ángulos diedros iguales; y por tanto las pirámides reunen todos los caractéres de la semejanza (§ 229).

232. 1.° *Corolario.* Si se cortase la pirámide S'FGHIK por un plano A'B'C'D'E', paralelo á FGHIK, resultaria una pirámide S'A'B'C'D'E' semejante á la pirámide entera; porque es fácil reconocer que todas las caras de la una serian semejantes á las de la otra, y todas estarian semejantemente dispuestas, pues que los triángulos A'B'C', A'C'D', A'D'E' son respectivamente semejantes á los triángulos FGH, FHI, FIK; de lo cual resulta que las bases A'B'C'D'E' y FGHIK sean entre sí semejantes.

Con bastante claridad se ve que las pirámides S'A'B'C'D'E' y SABCDE serán iguales, si una de las aristas S'A' de la primera fuere igual á su correspondiente SA en la segunda; porque siendo las caras de entrambas semejantes á las de la pirámide S'FGHIK, serán forzosamente semejantes entre sí, y habrán de consiguiente de hacerse iguales luego que tengan un lado comun; asi como dos triángulos equiángulos vienen á ser (§. 18) entre sí iguales, cuando ademas tienen un lado del uno igual al homólogo del otro. Por otra parte, estando formados de ángulos planos iguales los ángulos triedros de cada una de estas pirámides, habrán de tener sus ángulos diedros iguales (§. 223). Por consiguiente, siempre que coincidan las bases A'B'C'D'E' y ABCDE, deberán tambien coincidir las pirámides S'A'B'C'D'E' y SABCDE.

Tirando planos por los vértices S y S' y por las diagonales AC, AD, FH y FI, se demostraría asimismo con un poco de atencion que las pirámides SABCDE, S'A'B'C'D'E' y S'FGHIK estan compuestas de un mismo número de tetraedros semejantes y semejantemente dispuestos; y que las pirámides S'A'B'C'D'E' y SABCDE lo estan de tetraedros iguales: de lo cual se podria tambien inferir que estas últimas son iguales.

Conviene observar que la igualdad de estas pirámides lleva consigo la de las perpendiculares SP y S'P', bajadas desde los vértices S y S' sobre sus respectivas bases.

233 2.° *Corolario.* De la semejanza de las caras de las pirámides SABCDE, S'FGHIK se sigue que las aristas de estas pirámides son proporcionales entre sí y á las perpendiculares SP y S'Q, bajadas desde sus vértices á sus bases: pues comparando las caras triangulares homólogas SAB y S'FG, SBC y S'GH &c. nos resultarán estas series de razones iguales:

$$SA : S'F :: AB : FG :: SB : S'G;$$
$$SB : S'G :: BC : GH :: SC : S'H;$$

de las cuales se deducirá la siguiente:

$$SA : S'F :: SB : S'G :: SC : S'H \ \&c. :: AB : FG :: BC : GH \ \&c.$$

Ademas, el paralelismo de los planos $A'B'C'D'E'$ y FGHIK nos da (§. 220):

$$S'A' : S'F :: S'P' : S'Q;$$

$$\text{ó} \quad SA : S'F :: SP : S'Q;$$

pues que $S'A'=SA$, $S'P'=SP$; y la razon $SA : SF$ enlaza esta última proporcion con las anteriores.

234. *Observacion.* Por medio de lo que precede, se puede determinar la altura de una pirámide siempre que conozcamos las dimensiones de un *tronco* tal como FGHIKA'B'C'D'E', que queda despues de haber quitado la parte superior S'A'B'C'D'E' por medio de un plano A'B'C'D'E' paralelo á la base FGHIK. Para lo cual basta considerar la proporcion

$$A'B' : FG :: S'P' : S'Q;$$

de la cual se infiere

$$FG-A'B' : FG :: S'Q-S'P' : S'Q;$$

$$\text{ó} \quad FG-A'B : FG :: P'Q : S'Q;$$

en cuya última proporcion los tres primeros términos estan dados por el tronco mismo cuya altura es P'Q, y dan á conocer la altura de la pirámide entera.

TEOREMA.

235. *Las bases de las pirámides semejantes* S'A'B'C'D'E' *y* S'FGHIK, *son entre sí como los cuadrados de dos aristas homólogas cualesquiera* S'A', S'F, *y como los cuadrados de las perpendiculares* S'P' *y* S'Q, *bajadas desde su vértice á su plano.*

Demostracion. Siendo semejantes las bases, tendremos desde luego:

$$A'B'C'D'E' : FGHIK :: \overline{A'B'}^2 : \overline{FG}^2 \ (\S.\ 176);$$

y siendo (§. 233) $A'B : FG :: S'A' : S'F :: S'P' : S'Q$;

será por consiguiente $\overline{A'B'}^2 : \overline{FG}^2 :: \overline{S'A'}^2 : \overline{S'F'}^2 :: \overline{S'P'}^2 : \overline{S'Q}^2$;

de donde resulta $A'B'C'D'E' : FGHIK :: \overline{S'A'}^2 : \overline{S'F}^2 :: \overline{S'P'}^2 : \overline{S'Q}^2$

lo cual contiene las dos partes de la proposicion.

Con suficiente claridad se ve que en las proporciones obtenidas anteriormente podemos sustituir en vez de la pirámide igual S'A'B'C'D'E', y de las líneas que la pertenecen, la pirámide igual SABCDE y las líneas correspondientes.

236. *Corolario.* De esto se sigue que las secciones hechas en dos pirámides cualesquiera á la misma distancia de sus vértices, se hallan en una razon constante, cualesquiera que sean por otra parte estas distancias y las figuras de las bases. Con efecto, si en el tetraedro de la fig. 126 las distancias S'Q y S'P' son iguales á Fig. 126
las distancias S'Q y S'P', en la pirámide de la fig. 127, y 127.
siendo como es la razon de los cuadrados de las dos primeras igual á la de los cuadrados de las dos últimas, la razon de los dos triángulos DEF y A'B'C' será por consiguiente igual á la de los pentágonos FGHIK y A'B'C'D'E'; de modo que tendremos:

$$DEF : A'B'C' :: FGHIK : A'B'C'D'E';$$

$$\text{ó} \quad DEF : FGHIK :: A'B'C' : A'B'C'D'E'.$$

237. Ademas se distinguen entre los poliedros, bajo el nombre de *prismas*, los que tienen dos caras opuestas, iguales y paralelas, que llamamos *bases*, y donde todas las demas son paralelógramos. El cuerpo ABCDEFGHIK,
fig. 128, es un prisma; su base es el pentágono ABCDE, Fig. 128.
y hé aqui su construccion: por el vértice de los ángulos

de esta base y fuera de su plano, se han tirado las rectas AF, BG &c. paralelas entre sí, y terminadas en un plano FGHIK paralelo al plano ABCDE. Las aristas AF, BG, CH &c. tomadas dos á dos, determinan las caras AFGH, BGHC &c. que son paralelógramos, pues que las rectas AB y FG, BC y GH son paralelas dos á dos (§. 215).

Bien visible es que el polígono FGHIK que forma la base *superior* del prisma, es igual al polígono ABCDE, que viene á ser la base inferior; porque tienen sus lados y sus ángulos iguales, cada uno al suyo (§. 205). Por la misma razon cualquiera seccion ejecutada en el prisma propuesto por todo plano paralelo á su base, será tambien igual á esta misma base.

Se debe tener muy presente que cada uno de los ángulos poliedros de un prisma no se compone mas que de tres ángulos planos.

Todo prisma, cuyas aristas sean perpendiculares á su base se llama *recto;* y todos los demas tienen el nombre de *oblicuos.*

Fig. 129. 238. El prisma ABCDEFGH, fig. 129, al cual se le podria tambien designar por AG, y cuya base ABCD es un paralelógramo, tiene el nombre de *paralelepípedo;* y sus caras opuestas ABFE, CDHG por ejemplo, son iguales y paralelas. La igualdad de ellas es bien manifiesta en vista de la construccion de prisma (§. 297); y el paralelismo de las mismas resulta del de los lados de los ángulos EAB, HDC, iguales entre sí (§. 217).

PROBLEMA.

239. *Todo poliedro comprendido entre seis planos, paralelos dos á dos, es un paralelepípedo.*

Demostracion. 1.° Cortando el plano ABFE á los dos planos paralelos ABCD y EFGH, segun las rectas AB y EF paralelas entre sí (§. 215), y á los planos paralelos ADHE y BCGF, segun las rectas AE y BF, paralelas entre sí, la figura ABFE habrá necesariamente de ser un paralelógramo. Del mismo modo se puede manifestar que lo es cualquiera de las otras caras del poliedro AG.

2.° Estando entre sí opuestos los lados AB y DC del paralelógramo ABCD, deben ser forzosamente iguales; asi como los lados HD y AE, CG y BF lo son del mismo modo, por opuestos que entre sí son en los paralelógramos ADHE, BCGF: finalmente, los ángulos CDH y BAE, DCG y ABF, habrán de ser iguales, como que tienen sus lados paralelos, y sus aberturas dirigidas en un mismo sentido (§. 205). Teniendo, pues, de este modo los paralelógramos opuestos ABFE y CDHG, tres lados y dos ángulos iguales, cada uno al suyo, deberán por necesidad ser iguales entre sí (§. 85).

TEOREMA.

240. *Si los ángulos triedros* B *y* B′, *de los prismas* AI *y* A′I′, fig. 128, *se hallan compuestos de polígonos iguales y semejantemente dispuestos, estos prismas habrán de ser entre sí iguales.* Fig. 128.

Demostracion. Bien se ve que cuando se halle establecida la coincidencia de los ángulos triedros B y B′ (§. 224), estando entre sí confundidas las caras ABCDE y A′B′C′D′E′, y las BCHG y B′C′H′G′, las rectas CD y C′D′, CH y C′H′, deberán tambien coincidir necesariamente á causa de la igualdad de estas caras. Mas como las líneas CD y CH determinan la cara CDIH, asi como las líneas C'D' y C'H' á la cara correspondiente C'D'I'H', se sigue que estas caras habrán asimismo de coincidir. Del mismo modo se demostraria que todos los demas paralelógramos del prisma AI deben confundirse con los del prisma A'I'; de lo cual resulta que los polígonos FGHIK y F'G'H'I'K' coincidirán tambien, pues que los lados del primero se hallarán confundidos con los del segundo *.

241. *Observaciones.* Paso ya á tratar de los poliedros de una figura cualquiera. En todo caso se puede, juntando con el auxilio de rectas el vértice de uno de sus ángulos á todos los demas, y dividiendo á todas sus caras en triángulos, repartirlos en pirámides triangulares, que tienen para las caras planos tirados desde aquel punto hasta las aristas y las diagonales de las caras del cuer-
Fig. 130. po propuesto. Sola la inspeccion de la fig. 130 hace evidente la cosa. El poliedro ABCDEFG se halla dividido en las cinco pirámides

GABC, GABF, GAEF, GAEC, GEDC,

cuyo vértice se halla en el punto G, y que se forman juntándose desde luego este punto con los vértices A,B, C,D,E, de los otros ángulos poliedros; lo cual nos da las pirámides GABCDE, GABF, GAEF, que tienen por bases las diversas caras que no hacen parte del ángulo poliedro G; y repartiendo en triángulos la cara que tiene mas de tres lados, tendremos las bases de las pirámides triangulares anteriormente designadas.

No me detendré á hacer ver que dos cuerpos compuestos de un mismo número de pirámides triangulares iguales y semejantemente dispuestas son iguales; mas ha-

* Sería muy fácil probar que la igualdad de los prismas se convertiria en semejanza, si los polígonos reunidos en el mismo ángulo triedro fuesen solo semejantes y semejantemente dispuestos.

ré observar, por analogía con lo que hemos ya dicho respectivo á los polígonos (§. 91), que se halla determinado un poliedro cualquiera, siempre que esten dados los vértices de tres de sus ángulos poliedros y sus distancias á todos los demas (§. 227). De lo cual se sigue que designando N el número de los ángulos de un poliedro, su determinacion absoluta depende de las 3 (N—3) líneas tiradas á los ángulos del triángulo tomado por base, y de los tres lados de este triángulo; que en todo vienen á componer 3N—6 datos *.

TEOREMA.

242. *Dos poliedros que se hallen compuestos de un mismo número de pirámides semejantes y semejantemente dispuestas, son semejantes.*

Demostracion. Sean los dos poliedros ABCDEFG, *abcdefg*, fig. 130, compuestos de un mismo número de Fig. 130.
pirámides semejantes,

GABCDE y *gabcde*,

GAEE y *gaef*,

GABF y *gabf***.

cuyos vértices se hallan en los puntos G, *g*, y semejante-

* El número de los ángulos de un poliedro, el de sus caras, y el de sus aristas satisfacen á una condicion muy notable descubierta por Euler, la cual se reduce á que designando por S el número de los ángulos poliedros, por H el de las caras, y por A el de las aristas, se observa constantemente que S+H=A+2. Por lo que respecta al cubo, por ejemplo, S=8; H=6; A=12. *Véase* el cuaderno 16 del *Diario de la Escuela politécnica*, en el cual Mr. Cauchy ha dado teoremas nuevos y curiosos relativos á este asunto.

** Para facilitar al lector el formarse idea de las pirámides comprendidas en cada uno de los poliedros, he colocado la primera la letra que designa al vértice; y las otras dan á conocer la base.

mente dispuestos. Debemos, pues, hacer ver que todas las caras de uno de estos cuerpos son semejantes á las del otro, semejantemente dispuestas, y forman ángulos diedros iguales.

Con solo fijar los ojos sobre la figura, se ve inmediatamente que todas las caras de los dos poliedros son ó caras semejantes de pirámides homólogas, ó se hallan compuestas del mismo número de estas caras, semejantemente dispuestas entre sí.

En el primer caso se hallan las caras tales como ABCDE y *abcde*, pues que pertenecen á las pirámides GABCDE y *gabcde*, situadas del mismo modo en ambos poliedros.

Lo mismo acontece á las caras ABF, *abf*, comunes á los poliedros y á los tetraedros GABF y *gabf*.

Al segundo caso corresponde la semejanza de las caras DEFG y *defg*, por hallarse respectivamente formadas de los triángulos DEG y EFG, *deg* y *efg*, pertenecientes á las pirámides GABCDE y GAEF, *gabcde y gaef*, de las cuales las dos primeras son semejantes á las dos últimas. Lo mismo habremos de decir de las caras BFGC y *bfgc*, compuestas de los triángulos BCG y BFG, *bcg* y *bfg*, perteneciente á las pirámides GABCDE y GABF, *gabcde* y *gabf*.

Con el auxilio de un razonamiento semejante podremos hacer ver la semejanza de todas las caras de los poliedros, fuera cual fuese el número de ellas.

Del mismo modo nos podremos valer para reconocer la igualdad de los ángulos diedros que estas caras comprenden. Los unos son iguales, porque son comunes á los poliedros y á dos pirámides semejantes. Tales son los ángulos GDEA y *gdea*, que forman parte de los poliedros y de las pirámides GABCDE y *gabcde*: tales son tambien

los ángulos GEFA y *gefa*, pertenecientes á los tetraedros GAEF y *gaef*.

Los otros ángulos son iguales, porque estan formados de la reunion de un mismo número de ángulos iguales, como pertenecientes que son á pirámides semejantes. Tales son los ángulos BFAE y *bfae*, compuestos respectivamente de los ángulos BFAG y GAEF, *bfag* y *gaef*, pertenecientes á las pirámides GABF y GAEF, *gabf* y *gaef*. El mismo razonamiento tendria lugar, cualquiera que fuese el número de los ángulos de los poliedros. Podria ciertamente acontecer que estos ángulos estuviesen compuestos de mas de dos ángulos de las pirámides; mas no por eso variaria en este caso la demostracion: por otra parte se observará su analogía con la del §. 88, que se refiere á los polígonos.

TEOREMA.

243. *Siempre que dos poliedros sean semejantes, podrán ser divididos en un mismo número de tetraedros semejantes y semejantemente dispuestos.*

Demostracion. Por de contado es indudable que si en las caras semejantes de los poliedros propuestos se juntan los ángulos homólogos por diagonales, se formará sobre estas caras un mismo número de triángulos semejantes y semejantemente dispuestos. Escogiendo en seguida en los dos cuerpos dos caras semejantes, y tomando en cada una un ángulo homólogo para juntarlo á todos los demas ángulos del cuerpo, de que hace parte, los poliedros propuestos se hallarán divididos en un mismo número de tetraedros semejantemente dispuestos, y cuyas bases serán todas semejantes.

A estos tetraedros podremos dividirlos en dos clases: los unos tendrán dos caras comunes con los poliedros, y que comprendan entre sí ángulos diedros iguales, como pertenecientes que son á los poliedros; y serán por consiguiente semejantes. En esta clase se hallan los tetraedros GCDE y *gcde*, cuyas caras GDC y GDE, *gdc* y *gde* son semejantes como triángulos homólogos de las caras semejantes DEFG y *defg* de los poliedros, y que comprenden los ángulos diedros CGDE, *cgde*, pertenecientes á los poliedros.

Los tetraedros de la segunda clase estan compuestos de caras homólogas de los tetraedros de la primera, y comprenden ángulos formados por la diferencia de ángulos iguales de estos tetraedros, y de ángulos iguales de los poliedros. De este número son los tetraedros GAEC, *gaec*. Con efecto, la comparacion de los tetraedros GCDE y *gcde*, cuya semejanza hemos demostrado ya, hace ver que los triángulos GEC y *gec* son semejantes, y que los ángulos diedros DCGE y *dcge* son iguales. La comparacion de los tetraedros GABC y *gabc*, que tambien tienen dos caras comunes con los poliedros, á saber, BCG y ABC por lo respectivo al primero; *bcg* y *abc* por lo perteneciente al segundo, hace ver la semejanza de los triángulos ACG y *acg*, así como la igualdad de los ángulos diedros BCGA y *bcga*. Ahora bien: si de los ángulos diedros BCGD y *bcgd* iguales por estar formados por caras homólogas de los poliedros, se quitan respectivamente los ángulos DCGE y *dcge*, BCGA y *bcga* cuya igualdad se ha manifestado ya, habrán de ser iguales los ángulos diedros restantes ACGE y *acge*; y por consiguiente serán semejantes los tetraedros GAEC y *gaec*. Iguales consideraciones harian manifiesta la semejanza de todos los tetraedros que no tienen dos caras comunes con los poliedros.

Conviene mucho hacerse cargo de la semejanza de los triángulos ACG y *acg*, formados por las diagonales de los poliedros; porque de ella resulta que los vértices de los ángulos poliedros A, G, C, *a*, *g*, *c*, homólogos en caras semejantes se hallan semejantemente colocados los unos con respecto á los otros en todos los planos que los juntan, y que estan asimismo semejantemente colocados é igualmente inclinados con respecto á las caras que encuentran. De esto se infiere que los vértices de estos ángulos estan semejantemente colocados en los dos cuerpos, asi como con respecto á las caras homólogas, y que son por consiguiente homólogos en los cuerpos. Esta demostracion es enteramente análoga á la del §. 89, relativa á los polígonos.

TEOREMA.

244. *Las aristas homólogas de los poliedros semejantes son proporcionales; como tambien las diagonales de las caras homólogas, y las diagonales interiores de los poliedros.*

Demostracion. Con efecto, si se comparan sucesivamente las caras homólogas BCGF y *bcgf*, y los triángulos AGC y *agc*, nos resultarán las dos siguientes series de razones iguales:

$$BC : bc :: BF : bf :: BG : bg :: GC : gc;$$
$$GC : gc :: AC : ac :: AG : ag;$$

las cuales se enlazan entre sí por medio de la razon comun GC : *gc*; y del mismo modo se las combinaria con las series de razones iguales deducidas de la comparacion de las otras caras homólogas.

245. *Observacion.* No tengo por necesario detenerme á hablar de la medicion del área de las superficies que

terminan á los poliedros, en vista de que se componen de figuras planas, cuyo valor será fácil determinar con el auxilio de las proposiciones de la segunda seccion de la primera parte. Solo advertiré que las sumas de las áreas de los paralelógramos que envuelven á un prisma, no comprendiendo en ellas las dos bases, es igual al producto de una
Fig. 128. de las aristas AF, BG, CH &c. de este prisma, fig. 128, multiplicada por el contorno de la seccion LMNOP, hecha por un plano que la sea perpendicular. Con efecto, de lo expuesto (§. 196) se sigue que los lados LM, MN, NO &c. de la indicada seccion vienen á ser las alturas de los paralelógramos ABGF, BCHG, CDIH &c., tomando por bases las aristas AF, BG, CH &c. Tendremos, pues:

$$ABGF=\overline{AF}\times\overline{LM};$$

$$BCHG=\overline{BG}\times\overline{MN};\ \&c.$$

y siendo entre sí iguales las aristas AF, BG &c., la suma de las áreas de los paralelógramos que envuelven al prisma, será igual á una de ellas, multiplicada por LM +MN+&c.

TEOREMA.

246. *Las áreas de los poliedros semejantes son entre sí como los cuadrados de sus aristas homólogas.*

Demostracion. Cada una de las caras del primer poliedro es á su correspondiente en el segundo, como el cuadrado de uno de los lados de aquel es al cuadrado del lado homólogo del otro (§. 176): mas siendo estos lados aristas homólogas de los poliedros, se hallan de un poliedro al otro, en una misma razon (§. 244): sus cuadrados formarán, pues, una serie de razones iguales; y sien-

do al mismo tiempo estas razones las de las caras homólogas, habremos de inferir que estas últimas son iguales entre sí. Por consiguiente, la suma de las caras del primer poliedro es á la suma de las caras del segundo, como una cualquiera de las caras del uno es á la correspondiente del otro; ó como el cuadrado de una arista del primer poliedro es al cuadrado de la arista homóloga del segundo. Y sustituyendo en esta proporcion en lugar de las sumas de las caras las áreas totales de los poliedros que ellas forman, vendrá á resultar que estas areas serán entre sí en la misma razon que los cuadrados de las aristas homólogas.

De la medicion de los volúmenes.

247. Se designa generalmente por el nombre de *volúmen* * el espacio contenido por la superficie de un poliedro, ú ocupado por este cuerpo. Cuando consideramos una vasija ó cuerpo hueco, designamos su volúmen, valiéndonos para ello de la palabra *capacidad.* Entre innumerables cuerpos de formas diferentísimas, se hallan no pocos equivalentes en volúmen, asi como hay muchas figuras planas de formas muy diferentes, y equivalentes en áreas (§. 159).

* Esta voz, entendida por todos, me ha parecido preferible á la de *solidez*, que se suele emplear en el mismo sentido, sin embargo de tener á veces otra muy distinta acepcion. Tan solo cuando en una lengua se echen de menos palabras propias para designar una idea, podrá ser permitido introducir al efecto una nueva, ó apartar de su ordinaria significacion cualquiera palabra conocida. Y pues que todo el mundo comprende qué se entienda por *volúmen de un cuerpo*, no vemos necesidad alguna para designarle por medio de la palabra *solidez*, destinada ya á recordarnos la resistencia á las diversas causas de destruccion.

TEOREMA.

248. *Dos paralelepípedos construidos sobre una misma base, y terminados superiormente por un mismo plano paralelo á su base, son equivalentes en volúmen.*

Demostracion. Se nos ofrecen dos casos que considerar: en el uno, que nos representan las dos figuras 131, y de que hablaré en primer lugar, los paralelepípedos propuestos AG y AL se hallan contenidos lateralmente entre los mismos planos paralelos AK y DL. En tal estado de cosas es bien visible que los prismas triangulares AEIDHM y BFKCGL son iguales (§. 240); pues que los triángulos AEI y BFK que les sirven de bases, lo son (§. 16) á causa de las paralelas AE y BF, AI y BK; y los paralelógramos AEHD y BFGC, AIMD y BKLC son asimismo iguales (§. 238). Si, pues, quitamos del poliedro AL, por una parte al prisma AEIDHM, y por otra al prisma BFKCGL, los paralelepípedos restantes ABCDEFGH y ABCDIKLM, ó AG y AL, habrán de ser equivalentes.

Fig. 131.

Fig. 132. El segundo caso se nos presenta en la fig. 132, en la cual los dos paralelepípedos ABCDIKLM y............ ABCDNOPQ no tienen comun mas que su base inferior ABCD, y el plano que contiene sus bases superiores IKLM y NOPQ. Podremos reducirlos al anterior prolongando los planos ABIK y DCLM al mismo tiempo que los planos ADQN y BCPO, para formar el paralelepípedo ABCDEFGH (§. 239), que resulta equivalente en primer lugar al paralelepípedo ABCDIKLM, como comprendido que está lateralmente entre los planos paralelos AK y DL. El mismo paralelepípedo ABCDEFGH, considerado como comprendido entre los planos paralelos BP y AQ, es asimismo equivalente al paralelepípedo..... ABCDNOPQ. Son, pues, equivalentes entre sí los paralelepípedos ABCDIKLM y ABCDNOPQ, ó AL y AP.

249. *Corolario.* Por medio del teorema precedente se puede hacer ver que todo paralelepípedo AL, cuyas aristas AI, BK, DM, CL, se hallen inclinadas á la base, es equivalente á otro AP, construido sobre la misma base, mas con las aristas AN, BO, CP, DQ perpendiculares á la base.

Se puede trasformar despues este último, fig. 133, en otro ABRSNOTU, ó AT, que tenga por base al rectángulo ABRS, equivalente al paralelógramo ABCD, y cuyas aristas sean tambien perpendiculares á su base; porque si consideramos á los paralelepípedos AP y AT, como que tienen por base comun al paralelógramo ABON, entrarán de nuevo en el primer caso del párrafo precedente. Fig. 133.

Bien claro se ve que todas las caras del paralelepípedo AT son rectángulos; por cuya causa se le da el nombre de *paralelepípedo rectángulo*: y de lo que acabamos de exponer se infiere, que *cualquiera paralelepípedo puede trasformarse en otro paralelepípedo rectángulo que tenga una base equivalente á la del primero, y la misma altura.*

La *altura* de un prisma ó de un paralelepípedo es la perpendicular levantada entre sus bases.

N. B. Es necesario tener presente que las bases ABCD y ABRS tienen necesariamente un lado comun.

TEOREMA.

250. *Si sobre la base de un prisma triangular se forma un paralelógramo, y tomando á este por base se levanta sobre él un paralelepípedo de la misma altura que el prisma triangular, habrá de ser este la mitad del otro.*

Demostracion. Sea el prisma triangular ABCEFG,
Fig. 129. fig. 129, si se acaba sobre su base el paralelógramo ABCD, y se levanta en el punto D la recta DH paralela á las rectas AE, BF, CG, y terminada en el plano de la base superior EFG del prisma propuesto; los planos AEHD, DHGC, respectivamente paralelos á los planos BFGC y AEFB (§. 237), completarán el paralelepípedo, y formarán con el plano AEGC un segundo prisma triangular ADCEHG, cuyas partes constitutivas serán las mismas que las del prisma ABCEFG. Con efecto, las bases triangulares son las mismas; la cara ACGE les es comun, y las otras caras paralelógramas son iguales, como opuestas que son en el paralelepípedo. Sin embargo de esto no podemos concluir del §. 240 la igualdad de estos prismas, por no hallarse semejantemente dispuestas sus caras. Solo los ángulos triedros, tales como H y B, diagonalmente opuestos en el paralelepípedo, se nos presentan enteramente formados de ángulos planos iguales. Comparando la posicion de estos (§. 223) venimos en conocimiento de que los ánguols diedros AEHG y GCBA, DHGE y FBAC, AEGH y EACB son iguales. Y por aqui se ve que el prisma triangular ADCEHG está construido por debajo del plano EHG de las mismas partes que constituyen al prisma ABCEFD por encima de ABC, y que por consiguiente estos dos poliedros, comprendidos en la clase de los que no pueden coincidir (§. 225), deben encerrar el mismo espacio: será, pues, el volúmen de cada uno de ellos la mitad del del paralelepípedo que ellos componen *.

251. *Corolario.* De esto se sigue que dos prismas triangulares que tenga una misma base y la misma altura, son equivalentes, como mitades que son de paralelepípedos equivalentes.

TEOREMA.

252. *Si se corta un tetraedro por planos paralelos á su base y equidistantes, se podrá formar en cada uno de los cortes un prisma externo y otro interior, de modo que la suma de los primeros se aproxime á la de los segundos, y por consiguiente tambien al tetraedro.*

* Si aun quedase alguna duda sobre esta igualdad, se la podrá disipar del siguiente modo. Por las extremidades A, E de una arista del paralelepípedo BH, fig. 134, se tirarán planos perpendiculares á esta arista, y asi se formará el paralelepípedo NE, cuyas aristas son perpendiculares á la base AMNO, y es ademas equivalente al paralelepípedo BH, por tener una misma altura, ser equivalentes sus bases AOLE y ADHE, y tener por otra parte un lado comun (§. 249). Ahora bien, el plano DBHF divide al paralelepípedo NE en dos prismas triangulares rectos AOMELI, MNOIKL, evidentemente iguales; porque sus caras son iguales, semejantemente dispuestas, é iguales los ángulos diedros correspondientes. Es, pues, cada uno de estos prismas la mitad del paralelepípedo NE, y por consiguiente la del paralelepípedo BH. Esto supuesto, es fácil ver que las pirámides cuadrangulares AMBDO y EIFHL son iguales, como que tienen todas sus caras iguales cada una á su correspondiente, semejantemente dispuestas, y sus ángulos diedros correspondientes iguales; y que si á consecuencia se quitan alternativamente del cuerpo AMOEFH, los resíduos serán los dos prismas triangulares, AOMELI, ABDEFH. Son, pues, equivalentes estos dos prismas, y siendo el primero la mitad del paralelepípedo BH, habrá de suceder lo mismo al segundo. Fig. 134.

Esta demostracion me la comunicó en 1803 Mr. Fournier el jóven; pero Mr. Ampere, profesor entonces en la escuela central de Lyon, habia ya descubierto por su parte el principio en que se funda.

Fig. 135. *Demostracion.* Sean ABC, fig. 135, la base del tetraedro propuesto, y FGH, LMN, QRT los planos secantes. Tírense por los puntos A y B, F y G, L y M, Q y R, las rectas AD y BE, I*a* y K*b*, O*f* y P*g*, U*l* y V*m*, paralelas á la arista CS y terminadas en los planos secantes superiores. En el primer corte el prisma externo será ABCDEH, y el interno *ab*CFGH. Por abreviar designaré al uno por AH y al otro por *a*H. En el corte segundo FGHLMN el prisma externo será FN y el interno *f*N; y asi sucesivamente hasta el último corte SQRT, el cual no tendrá prisma interno, sino solo el externo QS.

Todos estos prismas tienen por altura comun al grueso de las rebanadas; y estando comprendido el prisma interno de cada una entre las mismas paralelas que el prisma externo de la inmediata superior, habrá de ser igual á este último (§. 240); de modo que

$$aH = FN;\ fN = LT;\ lT = QS;$$

y por consiguiente

$$aH + fN + lT = FN + LT + QS;$$

suma que comprende todos los prismas externos, á excepcion del primero AH. Es, pues, este el exceso que lleva la suma de los prismas externos á la de los internos.

Yo no he considerado mas de cuatro rebanadas, pero pueden ser tantas cuantas se quieran; y cuanto mayor sea el número de ellas, tanto menor será su grueso, ó el del prisma AH. Por consiguiente se le podrá hacer menor que un prisma dado. por pequeño que sea este; y lo mismo sucederá con la diferencia de la suma de los prismas externos y la de los internos. Mas siendo el tetraedro SABC menor que la primera suma y mayor que la segunda, su diferencia con relacion á cualquiera de las dos será todavía menor que su diferencia propia: podremos, pues, ha-

cer de modo que la una y la otra suma se aproximen cuanto se quiera al volúmen de este tetraedro.

TEOREMA.

253. *Dos tetraedros de una misma base y de una misma altura son equivalentes.*

Demostracion. Imaginémonos que sobre cada tetraedro SABC, S′A′B′C′ se haya construido una serie de prismas externos correspondientes. Estos prismas, comprendidos entre planos paralelos, tienen necesariamente una misma altura; y estando las secciones que les sirven de bases respectivamente á una misma distancia del vértice, así como los triángulos iguales ABC, A′B′C′, bases de los tetraedros, son iguales cada cual á su correspondiente (§. 236): son, pues, equivalentes los prismas externos correspondientes; y por consiguiente la suma de los prismas externos de un tetraedro es igual á la de los prismas externos del otro. Si, pues, designamos por S y S′ estas dos sumas, tendremos

$$S = S' \text{ ó } \frac{S}{S'} = 1;$$

mas como podamos reducir á la pequeñez que queramos la diferencia de cada una de estas sumas y del tetraedro á que pertenece, podremos hacer ver que la diferencia entre las razones $\frac{S}{S'}$ y $\frac{SABC}{S'A'B'C'}$ es menor que cualquiera otra cantidad dada; y viniendo por este medio á serlo asimismo la de la razon invariable $\frac{SABC}{S'A'B'C'}$ y de la *unidad*-

resultará de esto que $\frac{SABC}{S'A'B'C'}=1$ (§. 153), y por consiguiente que $SABC=S'A'B'C'$ *.

TEOREMA.

254. *Cualquier tetraedro es equivalente á la tercia parte del prisma triangular que tenga la misma base y la misma altura.*

Demostracion. Si por los puntos A y C de la base
Fig. 133. ABC del tetraedro EABC, fig. 136, tiramos las rectas AD, CF, paralelas á la arista BE, y por el punto E un plano paralelo al ABC, resultará formado (§. 237) el prisma triangular ABCDEF. Si ahora hacemos pasar por los vértices A, E, C de los ángulos triedros de este prisma un plano, separará primeramente de él el tetraedro propuesto EABC, cuya base y altura son las mismas que las del prisma: despues de lo cual resultará una pirámide cuadrangular EACFD representada con separacion en $E'A'C'F'D'$, cuyo vértice se hallará en E, y que tendrá por base la cara posterior ACFD del prisma. Y si por los puntos D, E, C hacemos pasar un nuevo plano, dividiremos con él la pirámide en dos tetraedros EACD, ECFD, representados aparte en $E''A''C''D''$, $E'''C'''$

* Se haria ver inmediatamente que se cometeria un absurdo en suponer á uno de los tetraedros mayor que el otro; pues que para ello bastaria considerar tales á los prismas externos, que la diferencia entre los que esten formados sobre el tetraedro supuesto mas pequeño, y el mismo tetraedro fuese menor que la diferencia de los dos tetraedros; porque de esto resultaria que la suma de los dos prismas externos correspondientes, formados sobre el tetraedro que se mira como el mayor, sería menor que este tetraedro.

$F'''D'''$; cuyas alturas serán iguales, pues que tienen su vértice en el mismo punto E, hallándose sus bases sobre un mismo plano. Estas bases son por decontado iguales, como mitades que son del paralelógramo ACFD: son, pues, equivalentes los tetraedros EACD, ECFD (§. *preced.*); y pudiendo el segundo ser considerado como que tiene por base al triángulo DEF igual al triángulo ABC y su vértice en el punto C, vendrá á tener la misma base y la misma altura que el prisma, y á consecuencia será equivalente al primer tetraedro EABC. Es, pues, visto que los tres tetraedros EABC, EACD, ECFD son entre sí equivalentes, y por consiguiente cada uno de ellos viene á ser la tercia parte del prisma triangular que entre todos componen.

TEOREMA.

255. *Los paralelepípedos rectángulos de una misma base son entre sí como sus alturas.*

Demostracion. Sean los paralelepípedos rectángulos AG é IP, fig. 137, cuyas bases AC é IL son rectángulos iguales. Fig. 137.

1.° Si las alturas AE é IN son comensurables, de modo que se las divida en partes A*a* é I*i*, iguales á su medida comun, y que por los puntos *a* é *i* se tiren planos paralelos á AC y á IL, se formarán paralelepípedos A*c* é I*l* iguales entre sí (§. 240); y siendo el número de estos paralelepípedos en AG el mismo que el de las partes iguales contenidas en AE; y en IP el mismo que el de las partes iguales contenidas en IN, tendremos evidentemente AG : IP : : AE : IN,
conforme á lo que hemos propuesto.

2.° Cuando las alturas AE é IN no sean comensu-

*

rables, el giro de demostracion de que se ha hecho uso (§. 156) hace igualmente ver que la razon del paralelepípedo AG al paralelepípedo IP no puede ser mayor ni menor que la de AE á IN. Con efecto, si suponemos la proporcion

$$AG : IP :: AE : IR,$$

siendo $IR > IN$;

tomaremos sobre IN partes alícuotas de AE, mas pequeñas que NR; y por el punto de division n que cae entre N y R, tiraremos un plano paralelo á IL, para formar el paralelepípedo Ip, con respecto al cual tendremos

$$AG : Ip :: AE : In;$$

y de esta proporcion y de la anterior deduciremos:

$$IP : Ip :: IR : In;$$

resultado absurdo; pues siendo $IP < Ip$, es $IR > In$.

Tampoco se puede hacer

$$AG : IP :: AE : IR',$$

siendo $IR' < IN$;

porque para un punto de division n, colocado entre R′ y N, tendríamos:

$$AG : Ip' :: AE : In';$$

de donde inferiríamos que

$$IP : Ip' :: IR' : In';$$

lo cual es asimismo absurdo, pues que $IP > Ip'$, siendo $IR < In'$.

TEOREMA.

256. *Dos paralelepípedos rectángulos cualesquiera*
Fig. 138. *AG é IP*, fig. 138, *son entre sí como los productos de las aristas que formen un mismo ángulo triedro.*

Demostracion. Si de la arista IN del paralelepípedo IP tomamos una parte $II' = AE$; y de la arista BC del

paralelepípedo AG una parte $BC' = IM$; y despues tiramos el plano $I'L'$ paralelo á IL, y el plano $C'H'$ paralelo á AF, resultarán construidos los paralelepípedos IL' y AG', que tendrán por bases los rectángulos IM' y AH', formados sobre bases y alturas iguales. Tendremos, pues, (§. *preced.*) $AG' : IL' :: AB : IK$;

y comparando los paralelepípedos AG y AG', considerados como que tienen por base al rectángulo AF, resultará

$$AG : AG' :: AD : AD'.$$

Multiplicando estas proporciones por órden, omitiendo el factor AG' comun á los dos términos de la primera razon compuesta, y sostituyendo á AD' su igual IM, vendremos á concluir que

$$AG : IL' :: \overline{AB}\times\overline{AD} : \overline{IK}\times\overline{IM}.$$

Finalmente, por tener una misma base IKLM los paralelepípedos IL' é IP, nos darán esta proporcion:

$$IL' : IP :: II' : IN.$$

Multiplicando ahora por órden estas dos últimas proporciones, omitiendo el factor IL', y reemplazando á II', por su igual AE, tendremos:

$$AG : IP :: \overline{AB}\times\overline{AD}\times\overline{AE} : \overline{IK}\times\overline{IM}\times\overline{IN};$$

lo cual viene á ser la propuesta del teorema.

257. *Observacion.* Si adoptamos por término de comparacion de todos los paralelepípedos rectángulos al paralelepípedo rectángulo ag, fig. 139, cuyas tres aris- Fig. 139.
tas contiguas ab, ad, ae, sean todas iguales á la línea escogida para unidad ó para medida comun de las rectas, su producto habrá de ser la unidad; y tendremos:

$$ag : AG :: 1 : \overline{AB}\times\overline{AD}\times\overline{AE};$$

es decir: *que el paralelepípedo rectángulo AG contendrá* *al paralelepípedo* ag *tantas veces como el producto de las líneas* AB, AD *y* AE, *referida á la medida comun* ab *contiene á la unidad*. Esto es justamente lo que debe entenderse siempre que se diga que la *medida del volúmen de un paralelepípedo rectángulo es el producto de sus tres aristas contiguas*; y si tenemos presente que el producto $\overline{AB}\times\overline{AD}$ expresa el número de cuadrados iguales á *ac* que se hallan contenidos en la base AC (§. 168), ó lo que viene á ser lo mismo, nos da la medida del área de la base, vendremos á concluir que *el volúmen de un paralelepípedo rectángulo tiene por medida al producto de su base por su altura*, valuadas entrambas numéricamente.

En el caso de que las aristas AB, AD y AE contuviesen un número exacto de veces al lado *ab* del paralelógramo *ag*, se reconoceria á la sola inspeccion de la figura que se podrian colocar sobre la base AC tantos paralelepípedos iguales á *ag*, como veces contiene la base AC á la *ac*; y que de este modo se formaría un paralelepípedo de la misma base que AG, de la misma altura que *ag*, y que estaria contenido en AG tantas veces como la altura AE contiene á la *ae*, ó al lado *ab*; de lo cual se sigue ademas que el paralelepípedo AG contiene tantos paralelepípedos iguales á *ag*, cuantas unidades contenga el producto de base ABCD por la altura AE.

258. 1.° *Corolario*. Si las aristas AB, AD, AE fuesen entre sí iguales, el volúmen del paralelepípedo AG se mediria por $\overline{AB}^2\times\overline{AB}=\overline{AB}^3$, ó por la tercera potencia de AB; mas es bien visible que en este caso las seis caras del paralelepípedo rectángulo AG vienen á ser cuadrados iguales. Entonces se le da el nombre de *cubo*, y

de aqui nace el llamar *cubo* á la tercera potencia de cualquier número.

259. 2.° *Corolario*. Puesto que un paralelepípedo cualquiera puede en todo caso ser trasformado en paralelepípedo rectángulo de la misma altura, y construido sobre una base equivalente (§. 249), habrá de ser consiguiente que el volúmen de un paralelepípedo cualquiera tenga por medida al producto de su base por su altura; y que por consiguiente dos paralelepípedos de una misma altura y de bases solo equivalentes, comprendan el mismo volúmen.

260. 3.° *Corolario*. Siendo equivalente el volúmen
del prisma triangular ABCEFG, fig. 129, á la mitad Fig. 129.
del del paralelepípedo ABCDEFGH (§. 250), habrá de tener por medida, á consecuencia de lo que precede, la mitad del producto de la base del tal paralelepípedo por su altura; mas no siendo el triangular ABC, que forma la base del prisma, mas de la mitad del paralelepípedo, es evidente que el volúmen de un prisma triangular tendrá por medida al producto de su base por su altura.

Del mismo modo se expresa el volúmen de un prisma que tenga una base cualquiera ABCDE, fig. 128; Fig. 128.
porque si se divide el polígono ABCDE en triángulos con el auxilio de las diagonales AC, AD, y por estas diagonales y por las aristas paralelas que la son contiguas, AF y CH, AF y DI, se tiran planos, se dividirá el prisma AI en tres prismas triangulares de una misma altura, y cuyas bases serán ABC, ACD, ADE; y designando por H la altura comun de estos prismas, ó la distancia perpendicular de los planos que contienen sus bases inferiores y sus bases superiores, serán las medidas de sus volúmenes respectivos

$$\overline{ABC}\times H ; \overline{ACD}\times H ; \overline{ADE}\times H ;$$

y por tanto su suma $(ABC + ACD + ADE)\, H = \overline{ABCDE}\times H$ dará el volúmen del prisma total AI.

De esto se infiere que los volúmenes de dos prismas cualesquiera son entre sí como los productos de su base por su altura, y que por consiguiente cuando tengan bases equivalentes, serán entre sí como sus alturas; y cuando tengan una misma altura, serán entre sí como sus bases; y que finalmente serán equivalentes cuando tengan á un mismo tiempo una misma altura y bases equivalentes, cualesquiera que sean las figuras de estas bases.

261. 4.° *Corolario.* El volúmen de un tetraedro tiene por medida á la tercia parte del producto de su base por su altura; puesto que este volúmen es la tercia parte del del prisma que tiene por medida al producto de su base por su altura (§. 254).

262. 5.° *Corolario.* Las mismas medidas convienen á todas las pirámides, cualesquiera que ellas sean; pues si dividimos en triángulos la base ABCDE de una pirámide
Fig. 127. cualquiera SABCDE, fig. 127, y tiramos el plano por el vértice y por cada una de las diagonales AC, AD, resultará dividida la pirámide en tres tetraedros de una misma altura, y cuyas bases serán respectivamente ABC, ACD, ADE: y siendo la medida del volúmen de cada uno de estos tetraedros la tercia parte del producto de su base por su altura, la suma de los volúmenes de todos tres ó el de la pirámide propuesta, vendrá á ser necesariamente igual á la tercia parte del producto de la suma de sus bases por la altura comun; es decir, á la tercia parte del producto de la base de la pirámide propuesta por su altura.

De lo cual resulta que dos pirámides cualesquiera son entre sí como los productos de sus bases y alturas; y solamente como sus bases cuando sean unas mismas sus alturas; ó solamente como sus alturas si son equivalentes sus bases; ó finalmente, que las tales pirámides habrán de ser equivalentes en caso que sus alturas y sus bases lo sean á un mismo tiempo, cualesquiera que por otra parte sean las figuras de estas bases.

263. *Observaciones.* Puesto que podemos hallar la altura de una pirámide cuya parte es un tronco que se nos ha dado con bases paralelas (§. 234), no puede ocultársenos que podremos asimismo determinar el volúmen de este tronco, calculando con separacion el de la pirámide entera, el de la que la falta, y tomando la diferencia de estos dos resultados.

Se puede ver igualmente que pudiendo ser dividido en pirámides un poliedro cualquiera (§. 241), la valuacion de su volúmen se efectuará calculando con separacion, conforme á lo prescrito, el de cada una de las pirámides que el poliedro propuesto contiene; y tomando por último la suma de los resultados. No tengo por necesario detenerme mas en este asunto.

Hay sin embargo una especie de poliedros, á la cual se pueden reducir todos los demas, y por esta razon conviene hacer conocer; y son los *prismas triangulares truncados*, que no se diferencian de los ordinarios sino en que el plano opuesto á su base no es paralelo á ella; y en que á consecuencia sus caras vienen á ser trapezios en vez de ser paralelógramos. ABCDEF, fig. 140, re- Fig. 140.
presenta un prisma triangular truncado.

TEOREMA.

264. *Un prisma triangular truncado es en todo caso equivalente á tres tetraedros de una misma base, y que tienen sus respectivos vértices colocados en cada uno de los ángulos del triángulo opuesto á esta base.*

Demostracion. Haciendo pasar un plano por los tres puntos A, C, E, separaríamos en primer lugar del prisma ABCDEF al tetraedro EABC, cuya base es el triángulo ABC, base del prisma, y cuyo vértice se halla colocado en el ángulo E del triángulo DEF opuesto á esta base. A consecuencia de esto resultará la pirámide cuadrangular EACFD, que se dividiria en los dos tetraedros EACD, ECFD, tirando por la diagonal DC y por el punto E el plano DEC. Estos tetraedros no son los que se hallan designados en la propuesta; mas restableciendo el prisma en su total entereza, se hace fácilmente ver que aquellos son equivalentes á estos últimos.

Con efecto, si en la cara ABED tiramos la diagonal BD, é imaginamos el plano BDC, nos resultará el tetraedro BACD, construido sobre la base ACD del tetraedro EACD, y de la misma altura, pues que los vértices B y E del uno y del otro se hallan en una misma recta BE, paralela al plano de su base; pero tambien se puede considerar al tetraedro BACD como que tiene su vértice en el punto D, y por base al triángulo ABC: y de este modo este tetraedro es cual lo requiere la propuesta.

Para hallar ahora el tetraedro equivalente á ECFD, es necesario tirar las diagonales AF y BF en las caras ACFD y BCFE; é imaginando entonces el plano AFB, tendremos al tetraedro BACF, cuya base ACF es equivalente á la base CFD del tetraedro ECFD, pues que

estos dos triángulos tienen una misma base CF y se hallan comprendidos entre las paralelas AD y CF: teniendo ademas los tetraedros sus vértices en la misma recta BE, paralela al plano de su base, tienen por consiguiente una misma altura; y son por tanto equivalentes. El tetraedro BACF, considerado como que tiene su vértice colocado en F, y por base al triángulo ABC, será el tercer tetraedro designado en la propuesta.

265. *Corolario.* Del teorema precedente se sigue que el volúmen de todo prisma triangular truncado tiene por medida al producto de su base por la tercia parte de la suma de las tres perpendiculares bajadas sobre esta base desde cada uno de los ángulos de la base superior, pues que estas perpendiculares son las respectivas alturas de los tetraedros, á cuya suma es equivalente el prisma, y que tienen todos por base la misma del prisma.

TEOREMA.

266. *Dos poliedros semejantes son entre sí como los cubos de sus aristas homólogas.*

Demostracion. 1.º Si los poliedros propuestos fueren las pirámides SABCDE, S'FGHIK, fig. 127, tendremos (§. 235): Fig. 127.

$$ABCDE : FGHIK :: \overline{SP}^2 : \overline{S'Q}^2;$$

y multiplicando esta proporcion por la proporcion evidente $\frac{1}{3}SP : \frac{1}{3}S'Q :: SO : S'Q$

nos resultará

$$\overline{ABCDE}\times\tfrac{1}{3}\overline{SP} : \overline{FGHIK}\times\overline{S'Q} :: \overline{SP}^3 : \overline{SQ}^3.$$

Los dos primeros términos de esta proporcion, que expresan los volúmenes de las pirámides propuestas, nos manifiestan que estos volúmenes son entre sí como los cubos de sus alturas; mas la semejanza de las pirámides nos da asimismo:

$$SP : S'Q :: SA : S'F :: AB : FG \ (\text{§. } 233);$$

de lo cual se deduce:

$$\overline{SP}^3 : \overline{S'Q}^3 :: \overline{SA}^3 : \overline{S'F}^3 :: \overline{AB}^3 : \overline{FG}^3;$$

y por consiguiente

$$SABCDE : S'FGHIK :: \overline{SA}^3 : \overline{SF}^3 :: \overline{AB}^3 : \overline{FG}^3;$$

es decir: *que las pirámides semejantes son entre sí como los cubos de sus aristas homólogas, ya partan estas aristas desde sus vértices, ó ya se hallen en sus bases* *.

2.° Cuando tratemos de otros poliedros cualesquiera, los podremos imaginar divididos en un mismo número de pirámides semejantes y semejantemente dispuestas (§. 243). Cada una de las pirámides del primer poliedro será á su correspondiente del segundo como el cubo de una de sus aristas es al cubo de la arista homóloga de la otra pirámide; mas estas aristas que necesariamente son ó las aristas mismas de los poliedros propuestos, ó las diagonales de sus caras, ó finalmente las diagonales que juntan interiormente los vértices de sus ángulos poliedros, se hallan de un poliedro al otro, en una misma razon (§. 244); formarán por consiguiente sus cubos una serie de razones iguales; y siendo al mismo tiempo iguales estas razones á las de las pirámides, nos será forzoso concluir que estas últimas han de ser iguales entre sí. Por tanto, la suma de las pirámides del primer poliedro es á la suma de las pirámides del segundo como una cualquiera de las pirámides del uno es á la correspondiente del otro; ó como el cubo de una cualquiera de las aristas del primer poliedro es al cubo de la arista homóloga del segundo. Y sustituyendo en esta última porcion en lugar de las sumas de las pirámides, los poliedros que ellas componen nos vendrá á resultar por conclusion que estos cuerpos se hallan entre sí en la misma razon que los cubos de sus aristas homólogas.

* Imitando la construccion y el razonamiento del §. 177, sería fácil hacer ver que *los volúmenes de dos tetraedros que tengan un ángulo triedro comun, son entre sí como los productos de las aristas, que en cada uno de ellos comprenden aquel ángulo.*

PARTE SEGUNDA.

SECCION SEGUNDA.

De los cuerpos redondos.

267. Los cuerpos redondos son los que podemos imaginar como producidos á consecuencia de dar una figura plana vueltas al rededor de una línea recta. De entre ellos trataré solo aquí con especialidad del *cono recto*, del *cilindro recto*, y de la *esfera*.

El cono recto se puede imaginar formado con el auxilio de hacer girar un triángulo rectángulo SAC, figura 141, al rededor de uno de los lados del ángulo recto; de modo que la hipotenusa SA describe en este movimiento *la superficie cónica recta* que envuelve al cuerpo.

Un punto cualquiera A′ de esta recta describe una circunferencia de círculo, cuyo centro se halla en la recta SC, al rededor de la cual gira el triángulo SAC, y que por esta razon se llama el *eje del cono*; porque si imaginamos tirada en el triángulo generador la recta A′C′ perpendicularmente al eje, y girando con él, habrá de describir un plano perpendicular al eje SC (§. 198), y será claramente el radio del círculo A′D′B′.

De esto se sigue que siempre que cortemos la superficie cónica por un plano perpendicular á su eje, nos resultará una circunferencia de círculo; y es bien visible que un plano tirado por su vértice, la corta en general siguiendo dos líneas rectas.

El círculo ADB, descrito por el lado AC del triángulo generador, y que cierra al cono, es su *base*, mientras que el punto S es su *vértice*; y esta base es perpendicular al eje SC*.

Los triángulos semejantes SAC y SA′C′, que nos dan

$$AC : A'C' :: SC : SC' :: SA : SA';$$

nos hacen ver que los radios de los círculos ADB y A′D′B′ son proporcionales á la distancia que hay desde su respectivo plano al vértice del cono; mas siendo entre sí las circunferencias de los círculos como sus radios (§. 154), y siguiendo sus áreas la razon de los cuadrados de los mismos radios (§. 188), vendremos á tener ademas:

$$\text{circ. } ADB : \text{circ. } A'D'B' :: AC : A'C' :: SC : S'C' :: SA : S'A';$$

$$\text{área } ADB : \text{área } A'D'B' :: \overline{AC}^2 : \overline{A'C'}^2 :: \overline{SC}^2 : \overline{SC'}^2 :: \overline{SA}^2 : \overline{SA'}^2;$$

propiedades que vienen á ser las mismas que con respecto á las pirámides hemos demostrado (§§. 233 y 235).

268. *Observacion.* Cuando conocemos las dimensiones de un tronco de cono con bases paralelas...............

Fig. 144. BDDAEB′D′A′E′, fig. 144, podremos calcular por un

* Se da el nombre de *cono recto* al que describimos aqui para distinguirlo del cono oblicuo con base circular que se forma haciendo gi-

Fig. 142. rar al rededor de un punto S, fig. 142, una recta SA, sujeta á tocar continuamente á la circunferencia de un círculo ADB, situado en un plano que no pase por el punto S: en tal caso la recta SC, que tambien se llama el *eje del cono*, deja de ser perpendicular al plano de la base ADB.

método análogo al del §. 234, la altura del cono entero. Con efecto, siendo semejantes los triángulos ASO y A′SO′, nos dan

$$AO : A'O' :: SO : SO';$$

de donde se deduce que

$$AO - A'O' : SO - SO' :: AO : SO;$$

la cual viene á ser la siguiente

$$AO - A'O' : OO' :: AO : SO;$$

proporcion en la cual nos estan dados los tres primeros términos, y que de consiguiente nos puede dar á conocer la altura del cono entero.

PROBLEMA.

269. *Si se construyen polígonos regulares inscritos y circunscritos en la base de un cono, y se juntan los ángulos de estos polígonos con el vértice del cono, estas líneas determinarán pirámides que se llaman* regulares, *porque todas sus caras triangulares serán iguales; y entre estas pirámides se pueden en todo caso encontrar dos, la una inscrita y la otra circunscrita, tales que la diferencia de sus áreas sea menor que cualquiera cantidad dada, por pequeña que sea la magnitud de esta.*

Demostracion. Sea *abcdef*, fig. 143, el polígono regular inscrito en la base del cono: y tirando las rectas *a*S, *b*S, *c*S &c., y juntando estas rectas por planos, nos resultará la pirámide S*abcdef*. El área de esta pirámide, no comprendiendo en ella su base *abcdef*, se halla compuesta de los triángulos *a*S*b*, *b*S*c*, *c*S*d* &c., iguales entre sí pues que estan formados de los lados del polígono *abcdef*, regular por su posicion, y de las oblicuas S*a*, S*b*, S*c* &c., que igualmente se apartan de la perpendicular SO. El área de cualquiera de estos triángulos, la de *a*S*b* por ejemplo, tiene por medida $\frac{1}{2}\overline{ab}\times\overline{Sg}$, siendo Sg perpendicular á la ab; la suma de las áreas de todos tendrá por medida $\frac{1}{2}N\times\overline{ab}\times\overline{Sg}$, designando por N al número de lados del polígono $abcdef$; y representando $N\times ab$ al contorno de este polígono, se habrá de concluir indudablemente que *el área de la pirámide regular, no comprendiendo en ella la de su base, tiene por medida la mitad del producto del contorno de esta base por la perpendicular bajada desde el vértice á cualquiera de los lados de la misma base.*

En la pirámide circunscrita, de la cual he representado solo una cara ASB á fin de no complicar mas la figura, son iguales entre sí todas las caras como en la pirámide inscrita, porque las aristas SA, SB &c. son asimismo oblicuas que se apartan igualmente de la perpendicular SO. Y siendo el punto de enmedio del lado AB del polígono circunscrito precisamente el punto de su contacto con la circunferencia del círculo $aGbf$, se habrá de confundir con el lado la perpendicular SG, bajada desde el punto S sobre el lado AB. El área del triángulo ASB tiene por expresion $\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{SG}$; y por consiguiente la de la pirámide entera, sin incluir la de su base, vendrá á ser $\frac{1}{2}N\times\overline{AB}\times\overline{SG}$.

Supuesto esto, si designamos por p y P las áreas de la pirámide inscrita y de la pirámide circunscrita, y por p' y P' los contornos de sus bases, tendremos:

$$p=\tfrac{1}{2}p'\times\overline{Sg}\,;\ P=\tfrac{1}{2}P'\times\overline{SG}\,;$$

de donde podemos inferir que

$$P-p=\tfrac{1}{2}P'\times\overline{SG}-\tfrac{1}{2}p'\times Sg.$$

Mas resultando de la naturaleza de los polígonos regulares inscritos y circunscritos al círculo (§. 151) que los contornos de estos polígonos se aproximan á ser iguales á proporcion que se multiplican sus lados; es bien visible que en igualdad de circunstancias la diferencia entre las rectas SG y Sg puede llegar á ser tan pequeña como se quiera: de consiguiente los productos $\frac{1}{2}P'\times\overline{SG}$ y $\frac{1}{2}p'\times\overline{Sg}$ se aproximarán tambien sin cesar á la igualdad; y la diferencia de las áreas de las pirámides inscrita y circunscrita podrá á consecuencia llegar á ser menor que cualquiera cantidad que se quiera.

270. *Corolario.* Es bien evidente que cuanto mas se multiplican los lados de los polígonos inscritos y circunscritos, tanto mas se aproximan á confundirse con el cono las pirámides inscritas y circunscritas; y tanto mas aumenta el área de la pirámide inscrita, al mismo tiempo que disminuye la de la circunscrita. Con efecto, constantemente aumenta el contorno del polígono inscrito, asi como la recta Sg, que acercándose á la superficie cónica, se aleja sin cesar de la perpendicular SO, mientras que el contorno del polígono circunscrito disminuye sin cesar acercándose al círculo, y que la recta SG conserva la misma magnitud. De aqui se sigue evidentemente que por lo respectivo á la extension, el área del cono se halla siempre comprendida entre las de la pirámide inscrita y de la pirámide circunscrita; y como, segun el teorema precedente, se puede hacer la diferencia de estas últimas menor que cualquiera cantidad dada, por pequeña que sea la magnitud de esta, con mayor razon podremos hacer en todo caso tan pequeña como queramos la diferencia entre

el área del cono y la de la pirámide inscrita ó la pirámide circunscrita.

TEOREMA.

271. *El área de un cono recto tiene por medida la mitad del producto de la circunferencia del círculo que le sirve de base por su lado: lo cual designando por C á la primera y por R al segundo, vendrá á estar bien expresado por* $\frac{1}{2}$CR.

Demostracion. Si P representa actualmente el perímetro del polígono circunscrito, el área de la pirámide circunscrita habrá de expresarse por $\frac{1}{2}$PR (§. 269), pues que R es lo mismo que SG; y si designamos por X la verdadera medida del área del cono, tendremos las cantidades $\frac{1}{2}$PR, $\frac{1}{2}$CR y X, que se hallan en el mismo caso que se supone en el §. 186; pues que siendo constantemente la primera mayor que las otras dos, en virtud del §. 270, y á causa de ser P>C, se pueden aproximar una á otra cuanto se quiera. Tendremos, pues, que

$$X=\tfrac{1}{2}CR\ *.$$

TEOREMA.

272. *El área de la porcion que resta de una superficie cónica despues de haberle quitado por un plano paralelo á su base una parte* SA′D′B′; ó lo que viene á ser lo mismo, *el área del cono truncado* ADBEA′D′B′E′, fig. 144, *tiene por medida la mitad del producto de la suma de las circunferencias de sus dos bases* ADB y A′D′B′ *por su lado* AA′. Fig. 144.

Demostracion. Si en el punto A se levantan perpendicularmente á SA, la recta AC, igual en longitud á la circunferencia ADBE, y se tira la SC; teniendo el área del triángulo rectángulo SAC por medida $\frac{1}{2}$AC×SA, habrá de ser esta equivalente al área del cono SADBE (§. *preced.*). Tirando en seguida la recta A′C′ paralela á la AC, los triángulos SAC y SA′C′, entre sí semejantes, nos darán:

$$AC : A'C' :: SA : SA';$$

mas tambien tenemos:

circunf. ADBE : circunf. A′D′B′E′ : : SA : SA′ (§. 267);

y siendo comun esta segunda razon á las dos últimas proporciones, resultará de ellas la siguiente:

circunf. ADBE: circunf. A′D′B′E′ : : AC : A′C′;

y puesto que AC=circunf. ADBE por construccion, deberá ser por consecuencia A′C′=circunfer. A′D′B′E′.

De esto se sigue que el área del triángulo SA′C′ igual á $\frac{1}{2}$A′C×SA′, será equivalente á la de cono SA′D′B′E′ que se echa menos: será, pues, el área del trapezio ACC′A′ equivalente á la del tronco de cono ADBEA′D′B′E′; y pues que la recta AA′ es perpendicular á las rectas AC y A′C′, la medida del trapezio ACC′A será $\frac{1}{2}$AA′ (AC+A′C′) (§. 175),

ó $\frac{1}{2}$AA′ (circunf. ADBE+circunf. A′D′B′E′)

como anuncia la propuesta.

Y pues que podemos tomar en vez de $\frac{1}{2}$(AC+A′C′)

* Este teorema podríamos demostrarlo valiéndonos inmediatamente de un razonamiento semejante al de la nota del §. 187, sustituyendo pirámides á los polígonos empleados en la nota citada. Fácil es descubrir cómo sea necesario modificar el mismo razonamiento y aplicarlo á las proposiciones de los §§. 279, 280, 283, 297 y 304, que completan la medicion del área y del volúmen de los cuerpos redondos.

la recta $A''C''$ tirada paralelamente á AC por el medio de AA' (§. 175), es consiguiente que en lugar de $\frac{1}{2}$ (circunfer. ADBE + circunfer. $A'D'B'E'$) podamos sustituir la circunferencia $A''D''B''E''$ de la seccion hecha en el tronco de cono á distancia igual de las dos bases y paralelamente á sus planos; pues tendremos esta serie de razones iguales:

$AC : A''C'' :: SA : SA'' :$ circ. $ADBE :$ circ. $A''D''B''E''$, á consecuencia de la cual la igualdad de circunferencia ADBE, y de AC nos hace ver la de circunferencia $A''D''B''E''$ y de $A''C''$.

De lo cual podremos concluir que el área convexa del tronco de cono tiene por medida $\overline{AA'}\times$circunfer..... $A''D''B''E''$, ó *al producto de su lado por la circunferencia de la seccion hecha á una igual distancia de las bases.*

N. B. Sustituyendo el vértice á la base superior, viene á ser esta medida la del área del cono íntegro.

TEOREMA.

273. *Multiplicando suficientemente los lados del polígono inscrito, podemos en todos casos formar dos pirámides, la una inscrita y la otra circunscrita, tales que la diferencia de sus volúmenes sea menor que cualquiera cantidad dada, por pequeña que sea la magnitud de esta.*

Demostracion. Con efecto, teniendo la pirámide ins-
Fig. 143. crita y la circunscrita la misma altura SO, fig. 143; si designamos por p y P los volúmenes de estas pirámides; p' y P' las áreas de los polígonos *abcdef*, ABCDF que las sirven de bases, tendremos:

$$p=\tfrac{1}{3}p'\times\overline{SO};\quad P=\tfrac{1}{3}P'\times\overline{SO};$$

lo cual dará $\quad P-p=\frac{1}{3}SO\,(P'-p')$;
y pudiéndose reducir al grado de pequeñez que se quiera, la diferencia $P'-p'$ entre el área del polígono inscrito, y la del polígono circunscrito (§. 184), se podrá igualmente reducir á que sea menor que tal cantidad dada como se quiera, la diferencia $P-p$ entre el volúmen de la pirámide inscrita y el de la pirámide circunscrita.

274. *Corolario.* Siendo visiblemente el volúmen del cono intermedio entre los de la pirámide inscrita y de la circunscrita, se infiere del teorema precedente que en todo caso se pueden asignar una pirámide inscrita y otra circunscrita, que se diferencien de él en cuanto menos se quiera.

TEOREMA.

275. *El volúmen de un cono tiene por medida la tercia parte del producto del área de su base por su altura;* á lo cual equivale $\frac{1}{3}CH$, siempre que la primera se designe por C, y la segunda por H.

Demostracion. Sea P el área del polígono que sirve de base á la pirámide circunscrita, cuyo volúmen tendrá en tal caso por medida $\frac{1}{3}PH$; y represente X la verdadera medida del volúmen del cono. Asi tendremos tres cantidades $\frac{1}{3}PH$, $\frac{1}{3}CH$ y X, que se hallarán en el caso de las del §. 186; puesto que $\frac{1}{3}PH$ es siempre mayor que las otras dos, y puede aproximarse á ellas cuan cerca se quiera. Tendremos, pues, $X=\frac{1}{3}CH$*.

* El teorema anterior tiene igualmente lugar aun cuando sea oblicuo el cono propuesto; pues bien se ve que ni en el teorema del §. 273, ni en el corolario del §. 274 se supone que la perpendicular SO caiga sobre el centro del circulo *aGbf*, y pueden por consiguiente

PROBLEMA.

276. *Hallar el volúmen de un tronco de cono recto con bases paralelas.*

Solucion. Será indispensable prolongar los lados AA′
Fig. 144. y BB′, fig. 144, hasta que se encuentren, y asi nos den á conocer la altura SO del cono entero (§. 268), con el auxilio de la cual tendremos para volúmen de este cuerpo á $\frac{1}{3}SO \times \overline{ADBE}$; y quitando de SO la altura del tronco OO′, el residuo SO′, será la altura del cono sustraido, cuyo volúmen estará expresado por $\frac{1}{3}SO' \times \overline{A'D'B'E'}$; y por tanto la diferencia entre este producto y el anterior habrá de ser la medida del volúmen del tronco de cono propuesto.

277. Si nos imaginamos que el rectángulo ACC′A′,
Fig. 145. fig. 145, gire al rededor de uno de sus lados CC′, vendremos en conocimiento del cómo podemos suponer formado el cuerpo que llamamos *cilindro recto*; en cuya suposicion la recta AA′ describirá la *superficie cilíndrica.*

Un punto cualquiera de esta recta describirá la circunferencia del círculo A″D″B″, igual y paralelo al círculo ADB engendrado por AC, al cual se le llama la *base* del cilindro; en vista de que la recta A″C″, perpendicular á CC′, igual á AC, describirá girando al rededor de CC′ un plano paralelo al ADB, y cuya interseccion con la superficie cilíndrica será A″D″B″. De lo cual resulta que la seccion de la superficie del cilindro recto por

Fig. 142. adaptarse al cono oblicuo que se nos presenta en la figura 142. Lo mismo puede decirse con respecto á la investigacion del volúmen del cono truncado del §. siguiente.

un plano paralelo á su base, es un círculo igual á esta misma base.

El cilindro está terminado en su parte superior por una base A′D′B′ igual y paralela á su base inferior ADB. La recta CC′ al rededor de la cual suponemos que ha girado el paralelógramo ACC′A′, y en la cual evidentemente se hallan los centros de las bases de todas las secciones que las son paralelas, se llama el *eje* del cilindro, y es perpendicular á la base*.

TEOREMA.

278. *Si se inscriben y se circunscriben al círculo que sirve de base á un cilindro, polígonos de un mismo número de lados, y por los vértices de los ángulos de estos polígonos se tiran rectas paralelas al eje OO′* fig. 147, Fig. 147.
juntando sus extremidades superiores con otras rectas, resultarán formados dos prismas, el uno inscrito y el otro circunscrito al cilindro propuesto; los cuales podrán en todo caso ser tales que la diferencia de sus áreas sea menor que cualquiera cantidad dada, por pequeña que sea la magnitud de esta cantidad.

* El cilindro oblicuo es el que contiene la superficie descrita por
una recta cualquiera AA′, fig. 146, forzada á deslizarse paralelamente Fig. 146.
á sí misma á lo largo de la circunferencia de un círculo ADB. Si consideramos á la recta generatriz AA′ como existente en una posicion cualquiera, cual DD′, y por el centro de la base tiramos la CC′ paralela é igual á la AA′, y terminamos el cuerpo con un plano A′D′B′ paralelo al ADB; tirando C′D, nos resultará formado el paralelógramo DCC′D′, y tendremos C′D′=CD. Es, pues, visto que la base superior A′D′C′ del cilindro oblicuo debe ser un círculo, lo mismo que su base inferior y todas las secciones que la son paralelas; mas el eje CC′ no será perpendicular á esta base, como lo es en el cilindro recto.

Demostracion. Las rectas aa', bb', levantadas paralelamente á OO', y por consiguiente perpendiculares al plano $abcdef$, se hallarán sobre la superficie del cilindro, pues que los rectángulos $aOO'a'$, $bOO'b$ son iguales al rectángulo generador. Por otra parte es evidente que los rectángulos $abb'a'$, $bcc'b'$ &c. son entre sí iguales, puesto que visiblemente tienen dos ángulos y tres lados respectivamente iguales (§. 85). Siendo las aristas aa', bb' &c. perpendiculares á ab, bc &c., las áreas de los rectángulos ab', bc' &c. se expresarán por $ab \times aa'$, $bc \times bb'$ &c.

Reuniendo estos productos con la advertencia de que todos tienen un factor comun, pues que $aa'=bb'$ &c., el área del prisma inscrito, sin comprender las bases $abcdef$, $a'b'c'd'e'f'$, vendrá á estar expresada por $(ab+bc+cd+de+ef+fa)\,aa'$, ó por $p+H$, designando por p al perímetro del polígono $abcdef$, y por H á la altura aa' comun al prisma y al cilindro.

Con el fin de evitar cualquiera confusion, no he representado mas de una sola cara $ABB'A'$ del prisma circunscrito. Bien se ve que si en esta cara y por el punto G, en que el lado AB toca al círculo, se tira GG' paralelamante á OO', esta recta se hallará sobre la superficie cilíndrica, en vista de que el rectángulo $GOO'G'$ es igual al rectángulo generador. Y estando expresada el área del rectángulo $ABB'A'$ por $\overline{AB} \times \overline{GG'}$; el área total del prisma circunscrito, sin comprender las bases, será igual al contorno P del polígono circunscrito, multiplicado por la altura GG' ó H, comun á todos los paralelógramos que envuelven al prisma circunscrito; y lo mismo puede decirse de los del prisma inscrito.

Supuesto esto, la diferencia del área convexa del prisma inscrito y la del circunscrito vendrá á ser $P \times H - p \times H = (P-p)\,H$, y se la podrá hacer tan pequeña como se quiera tomando polígonos inscritos y circunscritos, cuyos contornos tengan una diferencia menor que cualquiera cantidad dada, por pequeña que la magnitud de esta sea.

279. *Corolario.* De la proposicion anterior y de las razones expuestas (§. 270) se sigue que la superficie cilíndrica es menor que la del prisma circunscrito, y mayor que la del inscrito, y que por consiguiente podemos determinar un prisma inscrito ó circunscrito, cuya área se diferencie en cuan poco se quiera, de la del cilindro recto.

TEOREMA.

280. *El área de la superficie convexa del cilindro recto tiene por medida al producto de la circunferencia de su base por su altura* H, *que representaremos por* CH.

Demostracion. Si P designa al contorno del polígono que sirve de base al prisma circunscrito al cilindro, y X la verdadera medida de este último, vendrá á representar PH al área del prisma circunscrito, y visiblemente se hallarán las tres cantidades PH, CH y X en el caso que las del §. 186. Será por consiguiente $X=CH$.

TEOREMA.

281. *En todo caso se pueden formar dos prismas, el uno inscrito y el otro circunscrito al cilindro, ta-*

les que sus volúmenes se diferencien en cuan poco queramos.

Demostracion. El volúmen del prisma inscrito $\overline{abcdef\,a'b'c'd'e'f'}$ es igual á $abcdef \times H$ (§. 260); y designando el área del polígono inscrito por p, y la del circunscrito por P, el volúmen del prisma inscrito vendrá á tener por medida á pH, el del circunscrito á PH; y siendo su diferencia $(P-p)$ H, podrá venir á ser tan pequeña como se quiera, en consecuencia de que $P-p$, diferencia de las áreas de los polígonos inscrito y circunscrito, puede llegar á ser menor que cualquiera cantidad dada, por pequeña que sea la magnitud de esta (§. 184).

282. *Corolario.* De esto se sigue que se pueden construir un prisma inscrito y otro circunscrito, tales que su volúmen se diferencie del del cilindro en cuan poco se quiera; en la inteligencia de que este ha de ser siempre mayor que el primero y menor que el segundo.

TEOREMA.

283. *El volúmen de un cilindro recto tiene por medida al producto del área de su base por su altura,* ó designando por C' al área de esta base, por $C'H$.

Demostracion. Si designamos por P' al área del polígono circunscrito, habrá de ser $P'H$ la medida del volúmen del prisma circunscrito, y por X designamos la verdadera medida del volúmen del cilindro; hallándose las tres cantidades $P'H$, CH y X en el mismo caso que las del §. 186, habremos necesariamente de tener $X = C'H$*.

* Este teorema se verifica igualmente con respecto al cilindro oblicuo; pues es muy fácil de ver que ni el teorema ni su corolario requieren que el eje del cilindro ni las aristas de los prismas sean perpendiculares al plano de la base.

284. Si el semicírculo ACB gira al rededor de su diámetro AB, fig. 148, podremos imaginarnos que por Fig. 148.
medio de este movimiento forma la *esfera*, al mismo tiempo que la semicircunferencia describe la *superficie esférica.*

En este movimiento cada punto del arco ACB describe evidentemente la circunferencia de un círculo, cuyo radio es la perpendicular DE, bajada sobre el diámetro AB, al cual se llama el *eje*. Se deben sin embargo exceptuar de esta observacion los dos puntos extremos A y B del eje, que permanecen inmóviles, como todos los demas puntos de este eje, y que se llaman los *polos.*

La superficie de la esfera tiene todos sus puntos igualmente distantes del punto O, centro del círculo generador; porque habiendo conservado este punto la misma situacion en el plano del semicírculo ACB en todas cuantas posiciones ha tomado este plano, no ha variado su distancia á ninguno de los puntos del arco ACB, que sucesivamente han pasado por todos los de la esfera.

De aqui se sigue que el radio del círculo ACB es asimismo el de la esfera.

TEOREMA.

285. *La seccion de la esfera por un plano cualquiera, es indefectiblemente un círculo.*

Demostracion. A consecuencia de lo anteriormente expuesto, es por sí misma evidente la proposicion, siempre que el plano secante pase por el centro de la esfera;

en cuyo caso la circunferencia de esta seccion tiene por radio al mismo de la esfera.

Mas si DGFH designa á un plano cualquiera, y si del centro O se baja sobre este plano la perpendicular OE, el pie E de esta perpendicular se hallará á distancia igual de todos los puntos de la seccion DGF; pues que siendo entre sí iguales, como radios que son de la esfera, todas las oblicuas OD, OG, OF, OH, estarán igualmente apartadas de OE (§. 200). Será, pues, la curva DGFH un círculo cuyo centro sea E, y cuyo radio, sea DE.

286. *Observacion.* Siendo necesariamente menor que el radio OD la recta DE, el círculo DGFH habrá de ser menor que el que habria resultado si la seccion se hubiese hecho por el centro de la esfera; pues en este caso se nos presentaria un *círculo máximo*, en vez de que cualquiera otro habrá de ser un *círculo menor*.

Teniendo todos los círculos mayores un mismo radio, habrán de ser entre sí iguales.

287. *Corolario.* Dos círculos máximos ACBF, AIBK se cortan siempre en dos partes iguales; pues, como bien se ve, no pueden encontrarse mas que en la recta AB, seccion comun de sus dos planos, la cual pasando por su centro comun, viene á ser á un mismo tiempo diámetro comun de entrambos, y los divide por consiguiente en dos partes iguales.

288. Tres círculos que se corten dos á dos en la superficie de la esfera, forman un *triángulo esférico*; mas de ordinario no se consideran sino los que estan formados por tres arcos de círculo máximo, menores que la semicircunferencia, cual es el ICM.

Si del centro de la esfera se tiran radios á los puntos

C, I y M, bien se ve que estos radios determinarán un ángulo triedro OCIM, cuyos ángulos planos IOC, IOM, MOC, tendrán por sus respectivas medidas á los arcos CI, IM y CM.

TEOREMA.

289. *La suma de dos lados cualesquiera de un triángulo esférico es siempre mayor que el tercero.*

Demostracion. Puesto que en virtud de lo expuesto (§. 222) la suma de dos cualesquiera de los tres ángulos planos IOC, IOM, MOC, que forman el ángulo triedro OCIM, es mayor que el tercero; y siendo de un mismo radio los arcos CI, IM y CM, que son las medidas de estos ángulos, resulta de esto por necesidad que la suma de dos cualesquiera de estos arcos, la cual será forzosamente la medida de la suma de los dos ángulos á que corresponden (§. 110), habrá de ser mayor que el tercero.

290. 1.° *Corolario.* De esto se sigue que el camino mas corto para ir de un punto á otro sobre la superficie de la esfera, es el arco de la circunferencia de un círculo máximo determinado por los dos puntos ya indicados y por el centro de la esfera; porque si se asignase como camino mas corto desde el punto A al B, fig. 149, una Fig. 149.
línea AMNB, diferente del círculo máximo, cuya circunferencia pasa por los dos puntos propuestos; tomaríamos en esta línea un punto M, y tirando desde él los dos arcos de círculo máximo AM y MB, tendremos (§. *preced.*)

$$AM+MB>AB.$$

Tomando en seguida el punto N entre M y B; y tirando por él los dos arcos MN y MB de círculo máximo, nos resultará de consiguiente que AM+MN+NB>AM+MB.

Continuando del mismo modo, veremos con claridad que cuanto mas nos acerquemos á la línea AMNB, mas se aumenta el camino que hay que andar para pasar de A á B: por lo cual es evidente que el arco AB de la circunferencia de un círculo máximo es el camino mas corto, sin ser posible que lo haya menor; porque el círculo máximo que de nuevo se tiraria por dos cualesquiera puntos del arco á AB, se confundiria con este mismo arco, en vista de que todos sus puntos y el centro de la esfera se hallan comprendidos en un solo plano.

Yo he supuesto que la línea AMNB fuese exterior á todos los círculos máximos tirados por dos cualesquiera de sus puntos; mas en caso de ocurrir lo contrario, segun puede verse en la parte puntuada MN′A, tiraríamos los arcos de círculos máximos MN′ y AN′; y como entonces tendríamos AN′+MN′>AM, resulta asimismo que

AN′+MN′+MN+NB>AM+MB>AB.

291. 2.° *Corolario.* Del mismo teorema se sigue tambien que la suma de los lados de un triángulo esférico es menor que la circunferencia de un círculo máximo; porque si se prolongan los lados AI y AM del triángulo MAI, fig. 148, hasta que vuelvan á encontrarse en B, tendremos que

Fig. 148.

IM<BM+BI (§. 289);

añadiendo á una y á otra parte la suma de los lados AM+AI, resultará que

IM+AM+AI<BM+BI+AM+AI.

Ahora bien, los dos arcos AM y BM juntos, componen la semicircunferencia ACB: y los dos AI y BI

juntos componen otra semicircunferencia AIB, igual á la primera. Equivale, pues, la suma de estos cuatro arcos reunidos á una circunferencia de círculo máximo, la cual, segun se ve, es mayor que la suma de los lados del triángulo MAI.

Fácil es ver que esta proposicion resulta igualmente de lo expuesto (§§. 226 y 288).

TEOREMA.

292. *Si por el centro de un círculo cualquiera* DGFH, *trazado sobre la esfera, se levanta una perpendicular* AE, *pasará esta por el centro de la esfera, y la cortará en dos puntos* A *y* B, *cada uno de los cuales se hallará igualmente distante de todos los de la circunferencia* DGFH.

Demostracion. Con efecto, de lo expuesto (§. 200) se infiere con evidencia que la perpendicular AE debe pasar por una serie de puntos tales, que cada uno de ellos se halle á igual distancia de los puntos de la circunferencia DGFH descrita desde el pie E de esta perpendicular, como centro. Pues ahora, teniendo el punto O, centro de la esfera, la misma propiedad, deberá por consiguiente hallarse en la misma línea AE; y los puntos A y B, en que la AE encuentra á la esfera, habrán de estar cada uno á igual distancia de los puntos de la circunferencia DGFH: bien entendido que la distancia de estos últimos al punto A no es igual á la distancia de los mismos al punto B, sino cuando el punto E coincida con el O, ó lo que es lo mismo, cuando se trate de un círculo máximo CILK.

Bien claro se ve que los arcos AD, AG, AF, AH, tomados en las circunferencias de círculos máximos, que son necesariamente iguales, y que tienen por cuerdas á las distancias del punto A á cada uno de los puntos de la circunferencia DGFH, deben ser entre sí iguales.

293. *Corolario.* De lo anteriormente expuesto se sigue que los puntos A y B nos pueden servir para describir el círculo DGFH, sin necesidad de conocer su centro, colocado en el interior de la esfera; pues que basta con marcar todos los puntos cuyas distancias al punto A ó al punto B, medidas sobre la superficie de la esfera por los arcos del círculo máximo AD y AG, ó BG, sean iguales á la que se haya escogido para describir el círculo propuesto.

En consecuencia los puntos A y B se llaman los *polos* del círculo DGFH; y la recta AE es su *eje.*

TEOREMA.

294. *El plano tirado por un punto de la superficie de la esfera perpendicularmente al radio que pase por este punto, es tangente á la esfera; y recíprocamente, el plano tangente en un punto cualquiera de la superficie esférica, es perpendicular en la extremidad del radio que pase por aquel punto.*

Demostracion. Siendo perpendicular el radio OC en el punto C el plano AB, habrá de tener todos sus demas
Fig. 250. puntos mas apartados que el punto C del centro O de la esfera; pues que las oblicuas cualesquiera OD, OE &c. son mas largas que la perpendicular OC (§. 200); se hallan, pues, fuera de la esfera los puntos D, E &c.; y no teniendo el plano AB mas que el solo punto C comun con la superficie de la esfera, debe ser la tangente.

Recíprocamente, el plano tangente á la esfera en C no puede ser otro que el plano AB, perpendicular al radio OC; porque no teniendo este plano de comun con la esfera mas que el punto del *contacto* C; y hallándose mas distantes del centro que este todos sus demas puntos, es consiguiente que el radio OC sea la línea mas corta que pueda tirarse desde el centro al plano tangente, y que á consecuencia sea perpendicular á este plano.

TEOREMA.

295. *Si se inscriben y se circunscriben á un arco cualquiera de un semicírculo dos porciones de polígonos regulares de un mismo número de lados, y se hace girar al semicírculo al rededor de su diámetro, juntamente con las indicadas porciones de los polígonos, podremos en todo caso conseguir que la diferencia entre el área del cuerpo descrito por la porcion inscrita y la del cuerpo descrito por la circunscrita, sea tan pequeña cuanto se quiera.*

Demostracioon. El área del cuerpo descrito por la porcion del polígono *abcd*, fig. 151, cuando esta gira Fig. 151.
juntamente con el arco *ab* al rededor del diámetro *ap*, se compone de las áreas que en particular describe cada uno de sus lados. El primero *ab* describe un cono entero, mientras los demas describen troncos de conos, cuyas bases son los círculos engendrados por las perpendiculares *be*, *cf*, *dg*, bajadas de los puntos *b*, *c*, *d*, al eje *a*O (§. 267). El área de uno de estos cuerpos, del que, por ejemplo, describe *cd*, se determina, bajando de enmedio de este lado sobre *a*O la perpendicular *lq*, y se expresa por $\overline{cd}$ ×circunfer *lq*; mas esta expresion se puede trasformar en

otra que no contenga al factor circ. lq, que varía para cada cono. Con este objeto se baja la cr perpendicular sobre la dg; se tira la Ol; y siendo semejantes los triángulos dcr y qlO, como que los lados del uno son respectivamente perpendiculares á los del otro, cada uno al suyo (§. 65), tendremos que

$$cd : cr :: lO : lq.$$

Pero siendo cr igual á fg, y teniendo entre sí las circunferencias de círculo la misma razon que sus respectivos radios, podremos sustituir en lugar de la razon de lO á lq la de las circunferencias de círculos cuyos radios sean aquellas rectas; y en tal caso tendremos:

$$cd : fg :: \text{circ. } lO : \text{circ. } lq;$$

de lo cual deduciremos que

$$cd \times \text{circ. } lq = fg \times \text{circ. } lO;$$

y por consiguiente el área del cono descrito por cd tendrá asimismo por expresion á $fg \times$circ. lO; es decir, *al producto de su altura por la circunferencia del círculo inscrito al polígono de que su lado hace parte* Lo mismo podemos decir de las áreas de los conos descritos por los otros lados, y cuyas alturas son ef y ae. Siendo un factor comun de todas estas áreas la circunferencia del círculo inscrito; es consiguiente que la suma de ellas, ó el área del cuerpo descrito por la porcion $abcd$ del polígono inscrito sea igual al producto de la suma de las líneas fg, ef, ae; es decir, de la parte ag del eje, comprendida entre la extremidad a del primer lado, y la perpendicular bajada sobre el mismo eje por la extremidad del último lado, multiplicada por la circunferencia del círculo inscrito, ó á $ag \times$circ. lO.

Por la misma razon, el área del cuerpo descrito por la porcion ABCD del polígono circunscrito tendrá por

expresion á $\overline{\text{AG}}\times$circ. LO; la cual cantidad será en todo caso mayor que la primera, lo uno porque circunf. LO será siempre mayor que circunf. lO, y lo otro, porque AG es mayor que ag. Con efecto, desde luego tenemos que $BG = aG + Aa$; y $ag = aG + Gg$; de lo cual resulta que

$$AG - ag = Ag - Gg = Dd - Gg;$$

pues que $Aa = Dd$; mas siendo bien claro que $Gg < Dd$, y que se puede disminuir cuanto se quiera, la Aa ó la Dd, multiplicando suficientemente los lados de los polígonos, podremos hacer lo mismo con la diferencia de las líneas Dd y Gg, necesariamente menor que la mayor de estas líneas. Por consiguiente la AG será siempre mayor que la ag, y se las podrá aproximar una á otra cuanto se quiera *. En esta circunstancia, aproximándose mas y mas LO y lO; y diferenciándose cada vez menos circ. LO de circ. lO, podremos de consiguiente hacer á la diferencia AF×circ. LO$-ag\times$circ. lO, menor que cualquiera cantidad dada, por pequeña que sea la magnitud de esta cantidad, considerando á esta diferencia como la de dos rectángulos, cuyas bases y alturas pueden aproximarse cuanto se quiera á ser iguales.

296. *Corolario.* La expresion $AG - ag = Dd - Gg$, nos hace ver al mismo tiempo que AG disminuye al mis-

* El triángulo DOG nos da (§. 59); $dO : gO :: Dd :: Gg$; y de aqui se deduce que $Gg = Dd \times \frac{gO}{dO}$; lo cual hace tambien ver que $Gg < Dd$, en vista de que gO no es mas que uno de los lados del triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es dO. Ademas, siendo el punto g la extremidad comun de todas las porciones de los polígonos inscritos al arco ad, no varían ni un punto las líneas gO ni dO ni la razon de ellas. Disminuye, pues, Gg al mismo tiempo que Dd.

*

mo tiempo que Dd, por ser comun á todos los polígonos inscritos en el arco *ad* la altura *ag*; y permaneciendo igualmente la misma la LO, resulta que el área del cuerpo descrito por la porcion ABCD disminuye al acercarse á la esfera. El aumento de *lo* en la misma circunstancia prueba que el área del cuerpo descrito por *abcd*, aumenta entonces, y que por consiguiente el área de la porcion de esfera descrita por el arco *aLd* es menor que la del primero de estos cuerpos, y mayor que la del segundo. A lo cual es consiguiente que se puedan asignar dos cuerpos de este género, cuya área se diferencie tan poco como se quiera de la porcion de la de la esfera descrita por el arco.

TEOREMA.

297. *El área de la porcion de esfera, conocida por el nombre de* casquete ó solideo *esférico, descrita por un arco que no sea mayor que la cuarta parte de la circunferencia del círculo generador, es igual al producto de esta circunferencia multiplicada por la parte del diámetro que mida la altura del tal casquete ó solideo.*

Demostracion. Designando por X á la verdadera medida del área descrita por el arco *ad*, y comparándola con las de los cuerpos descritos por la porcion del polígono circunscrito ABCD, y por la porcion del polígono inscrito correspondiente, tendremos las tres cantidades

$$\overline{AG}\times\text{circ. LO},\ \overline{ag}\times\text{circ. LO y X};$$

la primera de las cuales, siendo siempre mayor que las otras dos, pudiéndose aproximar á estas cuan cerca se quiera, podremos inferir (§. 186), que $X=\overline{ag}\times$circ. LO.

298. 1.° *Corolario.* De lo expuesto se sigue que el área de la esfera entera es igual á su diámetro multiplicado por la circunferencia de un círculo máximo, ó á $\overline{ap}\times$circ. LO. Con efecto, si aplicamos el teorema anterior al cuarto de círculo *aLm*, nos resultará $\overline{aO}\times$circ. LO para el área de la semiesfera que él engendra girando al rededor del eje LO; y lo mismo por lo que respecta al segundo cuarto de círculo *pnm*, tenemos $\overline{pO}\times$ circ. LO: y la suma de estas dos cantidades viene á ser

$$(aO+pO)\times\text{circ. LO}=\overline{ap}\times\text{circ. LO}.$$

En general, el área de una porcion cualquiera de la superficie esférica, comprendida entre dos planos paralelos, Fig. 148.
ó de una *zona*, es igual á la altura de esta zona, ó á la distancia perpendicular de los planos que la terminan, multiplicada por la circunferencia de un círculo máximo: porque si del casquete descrito por el arco *aLm*, y cuya área tiene por medida á $\overline{aO}\times$circ. LO, se quita el casquete descrito por el arco *aLd*, y cuya área se mide por $ag\times$circ. LO, tendremos á

$$(aO-ag)\times\text{circ. LO}=\overline{Og}\times\text{circ. LO}$$

para medida del área de la zona descrita por el arco *dm*.

Con arreglo al mismo método podríamos hallar que el área de la zona descrita por el arco *mn* debe expresarse por $\overline{Oo}\times$circ. LO; y agregando este producto al $\overline{Og}\times$circ. LO, tendríamos en el resultado $(Oo+Og)\times$circ. LO$=og\times$circ. LO la expresion del área de la zona descrita por el arco *dmn*, la cual comprende al centro de la esfera.

299. 2.° *Corolario.* Se sigue asimismo de lo que precede que el área de la superficie esférica, es cuádrupla de la de su círculo máximo; porque el área de este se expresa por $\frac{1}{2}$CR, designando por C la circunferencia y por R á su radio (§. 187); y como designando por D al diámetro, tendremos á consecuencia $R = \frac{1}{2}D$, nos resultará igualmente $\frac{1}{2}R = \frac{1}{4}D$; de donde podemos con entera seguridad inferir que $\frac{1}{4}$CD viene á ser la justa expresion del área del círculo máximo, la cual no es efectivamente mas que la cuarta parte del producto CD, que es la medida del área de la esfera (§. *prec.*).

TEOREMA.

Fig. 148. 300. *El área de la porcion* ACBIA, fig. 148, *comprendida entre dos círculos máximos que se cortan, llamada* huso esférico, *es á la superficie de la esfera, como el arco* CI *del círculo* CILK *perpendicular á la interseccion comun de los planos* BCA *y* BIA *es á su circunferencia; ó como el ángulo que mide al diedro de estos es á cuatro rectos.*

Demostracion. La proposicion es de suyo evidente cuando el arco CI es parte alícuota de la circunferencia CILK; porque si suponemos dividida efectivamente en sus partes alícuotas á la circunferencia, y tirados por los puntos A, B, y por los puntos de division círculos máximos, la superficie esférica resultará dividida en tantos husos iguales á ACBIA, como partes contenga el círculo, CILK; pues que es bien visible que dos husos de una misma esfera son iguales siempre que los planos de los círculos que los determinan forman respectivamente un mismo ángulo diedro.

Mas cuando el arco CI no sea parte alícuota de la circunferencia, se puede hacer ver por medio de un razonamiento análogo al del §. 109 que la razon del huso ACBIA á la superficie entera de la esfera, no puede ser menor ni mayor que la del arco CI á la circunferencia CILK.

Siendo perpendicular á la recta AB el plano CILK, el ángulo plano COI medirá evidentemente el ángulo diedro CABI; y pues que la razon de este ángulo á cuatro rectos es la misma que la del arco CI que lo mide, á la circunferencia CILK (§. 110), se sigue necesariamente que el ángulo COI es á cuatro rectos como el área del huso ACBIA es á la de la esfera.

TEOREMA.

301. *El área de un triángulo esférico es á la de la esfera entera como la diferencia que haya entre la suma de los tres ángulos diedros formados por los círculos que componen al tal triángulo, y la de dos ángulos rectos es á la de ocho ángulos rectos.*

Demostracion Los tres círculos ACBL, CILK y MIFK, que forman el triángulo esférico CIM, reparten la superficie esférica en ocho triángulos, de los cuales los CKM y FIL son entre sí iguales, segun podemos convencernos de ello, con solo observar que los ángulos triedros OCKM y OFIL, á los que corresponden (§. 288), tienen todas sus partes iguales*.

* La igualdad de las partes de estos ángulos triedros demuestra con bastante claridad la de las partes de los triángulos esféricos; pero segun es muy fácil de ver, los lados de estos triángulos no se hallan reunidos de un mismo modo, y no es posible de consiguiente aplicar al uno sobre el otro. Caballeri, á quien debemos la proposicion anterior (*Directorium generale uranometricum*, *Bononiae*, 1632, pág. 316) y los autores que le han seguido, han mirado la igualdad de los triángulos

En esta suposicion, si designamos por S á la superficie de la esfera, y por D al ángulo recto, el área de huso ICKMI vendrá á tener por expresion á

$$S\times\frac{\acute{a}ng.\ \mathrm{CIKM}}{4\mathrm{D}}\ (\S.\ \textit{preced.});$$

y componiéndose este huso de los dos triángulos CM, CKM, nos resultará que

$$\mathrm{CIM}+\mathrm{CKM}=S\times\frac{\acute{a}ng.\ \mathrm{CIKM}}{4\mathrm{D}};$$

y siendo el área del huso MIFAM

$$S\times\frac{\acute{a}ng.\ \mathrm{IMFA}}{4\mathrm{D}};$$

vendremos á tener:

esféricos cuyos lados sean respectivamente iguales, cada uno á su correspondiente, como análoga á la de los triángulos rectilíneos, sin llamarles la atencion que no es posible dar vuelta á la superficie esférica como á la plana; pero en el fondo esta dificultad es mas bien aparente que real, pues tenemos muchos medios de convencernos de la igualdad de las áreas de los triángulos de que se trata: y hé aqui, para que no quede sobre esto la menor duda, una demostracion de ella.

Si por los vértices de los ángulos de los triángulos propuestos se hace pasar un círculo, y por su polo se tiran arcos de círculo máximo á los ángulos de los triángulos propuestos, estos arcos habrán de ser iguales (§. 293); y por este medio se formará sobre cada lado de los triángulos propuestos un triángulo esférico isósceles. Ahora bien, siendo iguales las cuerdas de los lados de los triángulos esféricos propuestos (§. 99), los círculos, de que acabamos de hablar, habrán asimismo de serlo (§. 119), y tendrán sus polos situados á unas mismas distancias de sus circunferencias. De consiguiente los tres triángulos esféricos isósceles del primero de los triángulos propuestos serán evidentemente iguales respectivamente á los tres del segundo, cada uno al suyo, y las áreas de los triángulos propuestos habrán de estar formadas de la misma manera que la de los nuevos triángulos.

$$\mathrm{CIM}+\mathrm{CIF}=S\times\frac{\acute{a}ng.\ \mathrm{IMFA}}{4\mathrm{D}}:$$

y por último el huso CILBC, cuya área se halla expresada por $S\times\frac{\acute{a}ng.\ \mathrm{ICLB}}{4\mathrm{D}}$, nos dará

$$\mathrm{CIM}+\mathrm{MIL}=S\times\frac{\acute{a}ng.\ \mathrm{ICLB}}{4\mathrm{D}}.$$

Y si en lugar del triángulo CKM sustituimos á su igual FIL, y sumamos estas expresiones, observando que CIM+CIF+FIL+MIL componen la mitad de la superficie esférica, situada por delante del plano ACBL, ó al *hemisferio* IACBL, nos resultará:

$$2\,\mathrm{CIM}+\tfrac{1}{2}S=\frac{S}{4\mathrm{D}}\ (\text{áng. CIKM}+\text{áng. IMFA}+\text{áng. ICLB.})$$

Ahora bien: los tres ángulos diedros CIKM, IMFA, ICLB, son evidentemente los que entre sí forman los planos de los lados del triángulo esférico CIM; y á fin de abreviar, los designaré por una sola letra de su arista, cual es la que se halla en la interseccion de dos lados de cada triángulo; por cuyo arbitrio los ángulos CIKM, IMFA, ICLB, vendrán respectivamente á ser los ángulos I, M, C; y por consiguiente

$$2\mathrm{CIM}+\tfrac{1}{2}S=\frac{S}{4\mathrm{D}}\,(\mathrm{I}+\mathrm{M}+\mathrm{C});$$

y quitando de ambos miembros á $\frac{1}{2}S$, nos resultará:

$$2\mathrm{CIM}=\frac{S\,(\mathrm{I}+\mathrm{M}+\mathrm{C})}{4}-\tfrac{1}{2}S.$$

Reduciendo en seguida á un mismo denominador todos los términos de esta expresion de 2CIM, y tomando la mitad de ambos miembros del resultado, tendremos:

$$\text{CIM}=\frac{\text{S}\,(\text{I}+\text{M}+\text{C}-2\text{D})}{8\text{D}};$$

lo cual nos dará:

$$\text{CIM} : \text{S} :: \text{I}+\text{M}+\text{C}-2\text{D} : 8\text{D}\ *.$$

TEOREMA.

302. *Si por las extremidades de las porciones correspondientes de polígonos regulares inscritas y circunscritas en un mismo arco se tiran dos radios, se formarán dos sectores poligonales, que girando al rededor de uno de estos radios, engendrarán volúmenes, cuya diferencia podrá disminuirse cuanto se quiera, siempre que se multiplique suficientemente el número de los lados de los polígonos.*

Demostracion. En tirando los radios BO, CO, figu-
Fig. 151. ra 151, vemos que el cuerpo engendrado por la figura $abcd$O, girando al rededor del eje aO, se compone de los engendrados por los triángulos abO, bcO, cdO, cuyo valor se debe determinar con separacion. Bajo esta suposicion, si bajamos sobre la aO la perpendicular be, echaremos de ver que girando la cuerda ab y el radio Ob al rededor de aO, engendran dos conos, los cuales tienen ambos por base al círculo descrito por la perpendicular be. La suma de sus volúmenes, ó el volúmen del cuerpo

* Los ángulos I, M, C, son los mismos ángulos del triángulo esférico. (Véase el *Tratado elemental de Trigonometría, y de aplicacion del Algebra á la Geometría*, cap. II.)

engendrado por el triángulo abO, se expresará de consiguiente por $\frac{1}{3}a$O×círcul. be (§. 275). Esta expresion se trasforma en otra en que no se halla el círculo be, observando que el área del cono engendrado por la cuerda ab tiene por expresion á $\frac{1}{2}\overline{ab}$×circunf. be (§. 271). Pero tambien sabemos que

$$\text{círcul. } be=\tfrac{1}{2}be\times\text{circunf. } be \text{ (§. 187);}$$

de donde resulta que

Area del cono ab : círculo be :: $\frac{1}{2}\overline{ab}$×circunferencia be : $\frac{1}{2}be$×circunferencia be;

ó :: ab : be,

dividiendo los dos términos de la segunda razon por $\frac{1}{2}$ circunferencia be. Si ahora bajamos sobre la ab la perpendicular Oh, y comparamos entre sí los triángulos abe y ahO, semejantes, porque ademas de ser ambos rectángulos tienen un ángulo comun en a, tendremos esta proporcion:

$$ab : be :: a\text{O} : \text{O}h;$$

en donde se nos presenta tambien la razon ab : be; y asi

Area del cono ab : círculo be :: aO : Oh;

y por consiguiente

$$\text{círculo } be=\frac{\text{O}h}{a\text{O}}\times\text{área del cono } ab.$$

Por medio de esta expresion el volúmen del cuerpo engendrado por el triángulo abO, é igual á $\frac{1}{3}a$O×círculo be, vendrá á ser $\frac{1}{3}$Oh×área del cono ab; de lo cual resulta que *el volúmen de un cuerpo descrito por un triángulo que gira al rededor de uno de sus lados, tiene por medida la tercia parte del área del cono engendrado por uno de sus otros dos lados, multiplicada por la perpendicular bajada sobre este lado desde su ángulo opuesto.*

*

Con respecto al segundo triángulo *bc*O, debemos prolongar la *bc* hasta que encuentre á la *t*O; y en virtud de lo expuesto, siendo el volúmen del cuerpo engendrado por el triángulo *ct*O igual á $\frac{1}{3}$O*i*×área del cono *ct*, mientras que el del cuerpo engendrado por el triángulo *bt*O, es $\frac{1}{3}$O*i*×área del cono *bt*, la diferencia de estas expresiones, ó la medida del cuerpo engendrado por el triángulo *bc*O será visiblemente igual á $\frac{1}{3}\overline{Oi}$×la diferencia entre la área del cono *ct* y la del cono *bt*; diferencia que es justamente el área del cono truncado descrito por el lado *bc*. Los mismos razonamientos harian ver asimismo que el volúmen del cuerpo engendrado por el triángulo *ca*O, tiene por medida á $\frac{1}{3}$O*l*×área del cono truncado descrito por *cd* Continuando del mismo modo sucesivamente de uno en otro, y observando que las perpendiculares O*h*, O*i*, O*l* &c. son todas iguales, llegaremos á ver que, sea cual fuere el número de los lados *ab*, *bc*, *cd* &c., el volúmen del cuerpo engendrado por el sector poligonal *abcd*O tendrá por medida á $\frac{1}{3}$O*l*×la suma de las áreas descritas por los lados *ab*, *bc*, *cd* &c.; suma que no es otra cosa que el área descrita por la porcion de polígono *abcd*.

Aplicando este resultado al sector poligonal circunscrito ABCDO, hallaremos que el volúmen del cuerpo que este engendra es igual á $\frac{1}{3}\overline{OL}$×área descrita por la porcion de polígono ABCD: y estando ya demostrado (§. 295) que las áreas descritas por las porciones correspondientes de polígonos regulares inscritos y circunscritos pueden aproximarse cuando se quiera, mientras que la diferencia de las apotemas OL y O*l* disminuye sin cesar, resultará evidentemente que los volúmenes engendrados por el sector poligonal inscrito, y por el sector poligonal circunscrito correspondientes, se encaminan asimismo sin cesar á la igualdad, y pueden aproximarse á ella cuanto queramos.

303. *Corolario.* Bien se ve que el cuerpo descrito por el sector circular *a*L*d*O, y al cual llamamos *sector esférico*, es menor que el cuerpo descrito por el sector poligonal circunscrito, y mayor que el descrito por el sector poligonal inscrito; es, pues, consiguiente al teorema anterior que la diferencia entre el primer cuerpo y el de cualquiera de los otros dos puede llegar á ser tan pequeña como se quiera, multiplicando cuanto sea necesario á los lados de los polígonos.

TEOREMA.

304. *El volúmen de un sector esférico es igual al área del casquete, sobre el cual se apoya, multiplicada por la tercia parte del radio; ó lo que viene á ser lo mismo, á* $\frac{1}{3}$SR, *designando el área por* S, *y al radio por* R.

Demostracion. Si por P representamos al área descrita por la porcion de polígono circunscrito ABCD, el volúmen del cuerpo engendrado por el sector poligonal ABCDO, será P×$\frac{1}{3}\overline{OL}$, ó $\frac{1}{3}$PR (§. 302); y designando por X á la verdadera medida del volúmen del sector esférico, tendremos las tres cantidades $\frac{1}{3}$PR, $\frac{1}{3}$SR, y X, que se hallan en las mismas circunstancias que las del §. 186, y de esto inferiremos que necesariamente X=$\frac{1}{3}$SR.

Es evidente que por medio de este resultado venimos en conocimiento del sector esférico, pues que su área S representa la del casquete descrito por el arco *ad*.

305. 1.° *Corolario.* De esto se sigue que el volúmen de la esfera es igual á su área multiplicada por la tercia parte del radio; pues que si tomamos en lugar del arco *ad* la cuarta parte de la circunferencia, ó á *am*, el sector esférico vendrá á ser igual á la semiesfera, porque el radio *m*O, perpendicular á *a*O, describirá un plano que dividirá á la esfera en dos partes iguales, y tendremos como mitad ó como hemisferio superior á $\frac{1}{2}\text{S}\times\frac{1}{3}\overline{m\text{O}}$, representando por S el área de la esfera entera; y reuniendo las dos mitades, el total $\text{S}\times\frac{1}{3}\overline{m\text{O}}$ vendrá á ser el volúmen de la esfera.

Siendo el área de la esfera cuádrupla de la de uno de sus círculos máximos, ó equivaliendo á la de cuatro círculos, su volúmen vendrá á ser $\frac{4}{3}\text{R}\times$círculo, ó $\frac{2}{3}\text{D}\times$círculo; es decir, que *el volúmen de la esfera es igual al área de su círculo máximo, multiplicada por las dos tercias partes de su diámetro.*

306. 2.° *Corolario.* Siempre que nos propongamos determinar el volúmen engendrado por un sector *a*O*n*, mayor que el cuadrante de círculo, quitaremos de la esfera entera al sector engendrado por *n*O*p*, y equivale á $\frac{1}{3}\overline{m\text{O}}\times$área del casquete descrito por el arco *np*; y la diferencia vendrá á ser $\frac{1}{3}m\text{O}$ multiplicada por la diferencia entre el área entera de la esfera, y la del casquete descrito por *np*; diferencia que no es otra cosa sino el área descrita por el arco *amn*, ó la del casquete que sirve de base al sector propuesto.

307. 3.° *Corolario.* El volúmen de la porcion de

esfera engendrada por el semisegmento circular *a*L*dg*, y al cual llamamos *segmento esférico*, se puede determinar quitando del sector esférico descrito por el sector circular *a*L*d*O el del cono descrito por el triángulo *dg*O.

Por lo que respecta al volúmen comprendido entre la zona engendrada por el arco *d*L*c* y los planos descritos por las perpendiculares *dg* y *cf*, se obtendrá quitando el segmento esférico descrito por el semisegmento circular *acf*, del que se describe por *adg*.

Comparacion de los cuerpos redondos.

308. Los cuerpos redondos semejantes son los que resultan engendrados por figuras semejantes, tales como son los conos SADB y SA′D′B′, fig. 141, engendrados Fig. 141.
por los triángulos semejantes ACS, A′C′S.

Del §. 267 se sigue que los lados, las alturas y las circunferencias de las bases de los conos semejantes son proporcionales; y que asimismo las áreas de sus bases son entre sí como los cuadrados de sus líneas homólogas.

Los cilindros ADBA′D′B′ y *adba′d′b′*, fig. 145, Fig. 145.
engendrados por los rectángulos semejantes ACC′A′, *acc′a′*, son tambien semejantes; y la semejanza de estas figuras nos dará igualmente las razones iguales:

$$\text{AA}' : aa' :: \text{AC} : ac :: \text{circunf. AC} : \text{circunf. } ac,$$

$$\overline{\text{AA}'}^2 : \overline{aa'}^2 :: \overline{\text{AC}}^2 : \overline{ac}^2 :: \text{círc. AC} : \text{círc. } ac.$$

Por último, siendo figuras semejantes los círculos, habrán tambien de ser las esferas cuerpos semejantes.

TEOREMA.

309. *Las áreas de los conos semejantes son entre sí*

como los cuadrados de sus lados; y sus volúmenes como los cubos de los mismos lados.

Demostracion. 1.° Si se multiplican ordenadamente las dos proporciones que siguen,

$$\text{circunf. } AC : \text{circunf. } A'C' :: AS : A'S, \text{ fig. } 141,$$

$$\tfrac{1}{2}AS : \tfrac{1}{2}A'S :: AS : A'S;$$

nos resultará $\tfrac{1}{2}\overline{AS}\times\text{circunf. } AC : \tfrac{1}{2}\overline{A'S}\times\text{circunf. } A'C' :: \overline{AS}^2 : \overline{A'S}^2$;

proporcion cuyos dos primeros términos expresan las áreas de los conos SADB y SA'D'B' (§. 271).

2.° Si multiplicamos ordenadamente los términos de las dos proporciones que siguen:

$$\text{círcul. } AC : \text{círcul. } A'C' :: \overline{AS}^2 : \overline{A'S}^2,$$

$$\tfrac{1}{3}CS : \tfrac{1}{3}C'S :: AS : A'S;$$

tendremos esta otra:

$$\tfrac{1}{3}\overline{CS}\times\text{círcul. } AC : \tfrac{1}{3}\overline{C'S}\times\text{círcul. } A'C' :: \overline{AS}^3 : \overline{A'S}^3;$$

proporcion cuyos dos primeros términos expresan la razon de los volúmenes de los conos propuestos SADB, SA'D'B' (§. 275).

TEOREMA.

310. *Las áreas de dos cilindros semejantes son entre sí como los cuadrados de sus lados homólogos, y sus volúmenes lo son como los cubos de los mismos lados.*

Demostracion. 1.° Siempre que multipliquemos ordenadamente los términos de estas dos proporciones:

$$\text{circunf. } AC : \text{circunf. } ac :: AA' : aa' \text{ (§. 308) fig. } 145,$$

$$AA' : aa' :: AA' : aa'$$

nos habrá forzosamente de resultar:

$$\overline{AA'}\times\text{circunf. } AC : \overline{aa'}\times\text{circunf. } ac :: \overline{AA'}^2 : \overline{aa'}^2;$$

proporcion cuyos primeros términos expresan la razon que tienen entre sí los cilindros propuestos (§. 280).

2.° Y en caso que multipliquemos ordenadamente los términos de estas dos proposiciones, cada uno por su correspondiente,

$$\text{círcul. } AC : \text{círcul. } ac :: \overline{AA'}^2 : \overline{aa'}^2 \text{ (§. 308)};$$

$$AA' : aa' :: AA' : aa',$$

nos habrá de resultar como producto

$$\overline{AA'}\times\text{círcul. } AC : \overline{aa'}\times\text{círcul. } ac :: \overline{AA'}^3 : \overline{aa'}^3,$$

proporcion cuyos dos primeros términos representan los volúmenes de los cilindros propuestos (§. 283).

TEOREMA.

311. *Las áreas de dos esferas son entre sí como los cuadrados de sus radios ó de sus diámetros; y los volúmenes son entre sí como los cubos de aquellas mismas líneas.*

Demostracion. Sean R y R' los respectivos radios de las esferas propuestas; D y D' sus diámetros; S y S' sus áreas; C y C' las circunferencias de sus círculos máximos; y con esto tendremos 1.°

$$C : C' :: D : D';$$

y multiplicando esta proporcion por esta otra evidente,

$$D : D' :: D : D',$$

tendremos:

$$CD : CD' :: D^2 : D'^2.$$

Ahora bien, los representados productos CD y C'D' designan las áreas de las esferas (§. 298): por consiguiente

$$S : S' : : D^2 : D'^2 : : 4R^2 : 4R'^2 : : R^2 : R'^2 ;$$

poniendo la atencion que $D=2R$, y $D'=2R'$.

2.° Y si multiplicamos ordenadamente los términos de estas siguientes proporciones,

$$S : S' : : \overline{R}^2 : R'^2$$
$$\tfrac{1}{3}R : \tfrac{1}{3}R' : : R : R' ;$$

nos resultará esta otra:

$$\tfrac{1}{3}RS : \tfrac{1}{3}R'S' : : R^3 : R'^3 ;$$

proporcion cuyos dos primeros términos representan los volúmenes de las esferas propuestas (§. 305); y asi como tenemos $R^3 : R'^3 : : D^3 : D'^3$, tendremos asimismo.

$$\tfrac{1}{3}RS : \tfrac{1}{3}R'S' : : D^3 : D'^3.$$

312. *Observacion.* Por lo comun se compara la esfera con el cilindro circunscrito; es decir, con el cilindro
Fig. 150. FGG'F, fig. 150, cuyas bases son iguales á un círculo máximo de la esfera OCC', y cuya altura FF' es igual á un diámetro de la misma esfera. Equivaliendo el área del tal cilindro al producto FF'×circunferencia FC(§. 280), viene á ser igual á la de la esfera (§. 298); pues que FF'=CC', y circunferencia FC=circunferencia CO.

El volúmen del mismo cilindro, representado por FF'× círculo FC (§. 283), si lo comparamos con el de la esfera, nos resultará medido este por $\tfrac{2}{3}$CC' ×círculo OC (§. 305), y que de consiguiente no equivale á mas que á dos tercias partes del volúmen del cilindro.

313. *Corolario.* En todo cuanto precede no he comprendido otras proposiciones que las absolutamente necesarias para la medicion de las áreas y los volúmenes; y los lectores que deseen tomar conocimiento de la teoría de las intersecciones de los planos y de las superficies curvas que

abraza el complemento de los Elementos de Geometría, mirados en toda su extension, podrán recurrir á los *Ensayos de Geometría respectivos á los planos y superficies curvas*, ó Elementos de Geometría descriptiva.

Por lo que toca á los cuerpos regulares ó poliedros terminados por polígonos regulares iguales, que forman ángulos diedros iguales, se hallan tratados con mucha detencion en la Geometría de Mr. Legendre. Yo, por mi parte, pienso reducirme á poner en claro que no puede pasar de cinco el número de tales cuerpos, y que no es posible formarlos sino por medio de triángulos equiláteros, ó de cuadrados, ó de pentágonos. Esto se deja ver con claridad, observando que debiendo la suma de los ángulos planos que componen un ángulo poliedro ser menor que la de cuatro rectos (§. 226), no es posible, ni aun con tres solos exágonos, formar un ángulo triedro, porque en tal caso la suma de los tres ángulos planos equivaldria á la de cuatro rectos (§. 82): y con mucha mayor razon no podemos para este objeto hacer uso de mayor número que el de tres exágonos ú otros cualesquiera polígonos de un mayor número de lados. De esto se sigue que podemos reunir tres, cuatro, cinco triángulos equiláteros para formar cada uno de los ángulos poliedros, y solamente tres cuadrados ó tres pentágonos; y asi completamos los cinco cuerpos.

El que tiene los ángulos triedros, y triangulares las fachadas,, es el *tetraedro regular*, formado por cuatro triángulos equiláteros, fig. 152. Fig. 152.

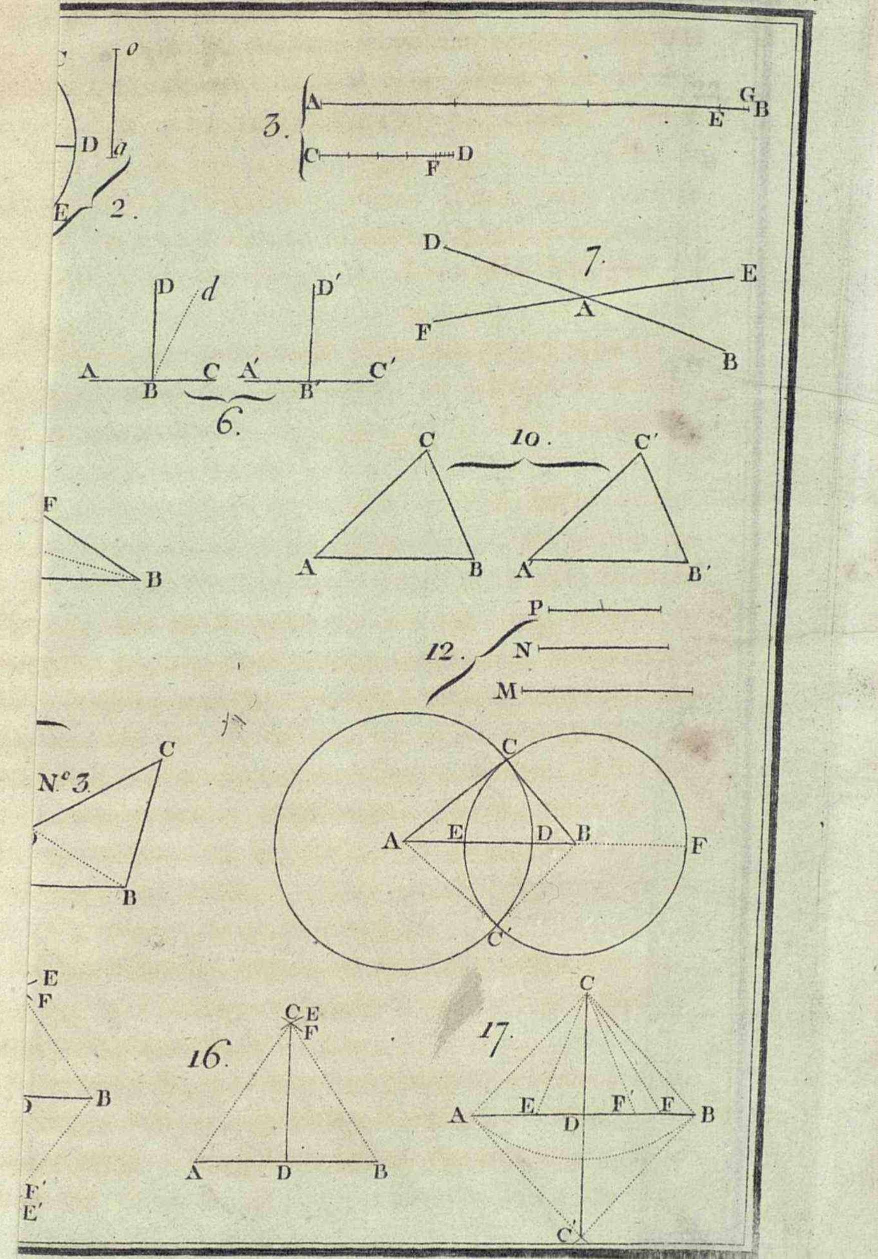
El *octaedro* regular tiene sus ángulos tetraedros, y está formado por ocho triángulos equiláteros, fig. 153. Fig. 153.

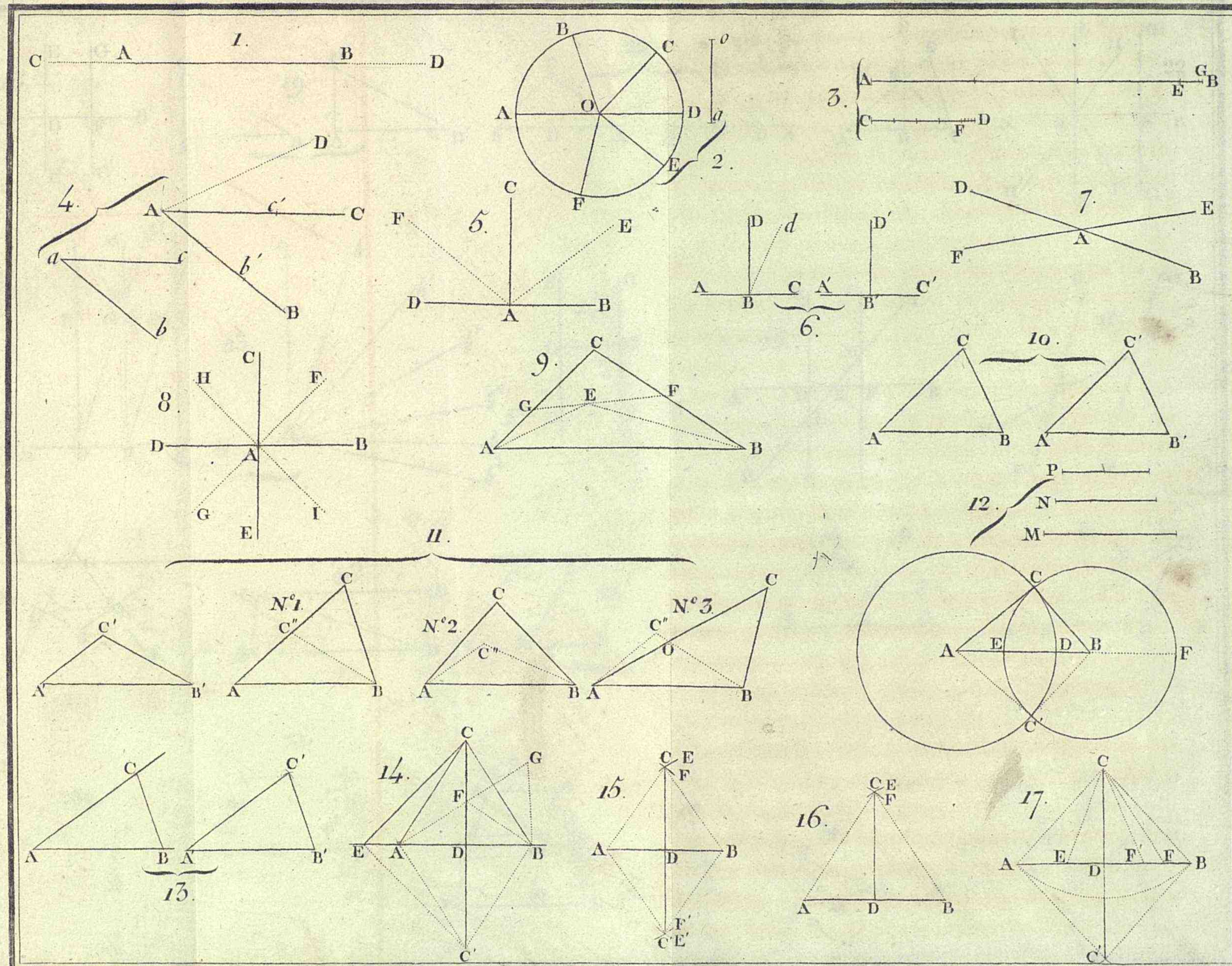
El *icosaedro* tiene sus ángulos pentaedros, y está formado por veinte triángulos equiláteros, fig. 154. Fig. 154.

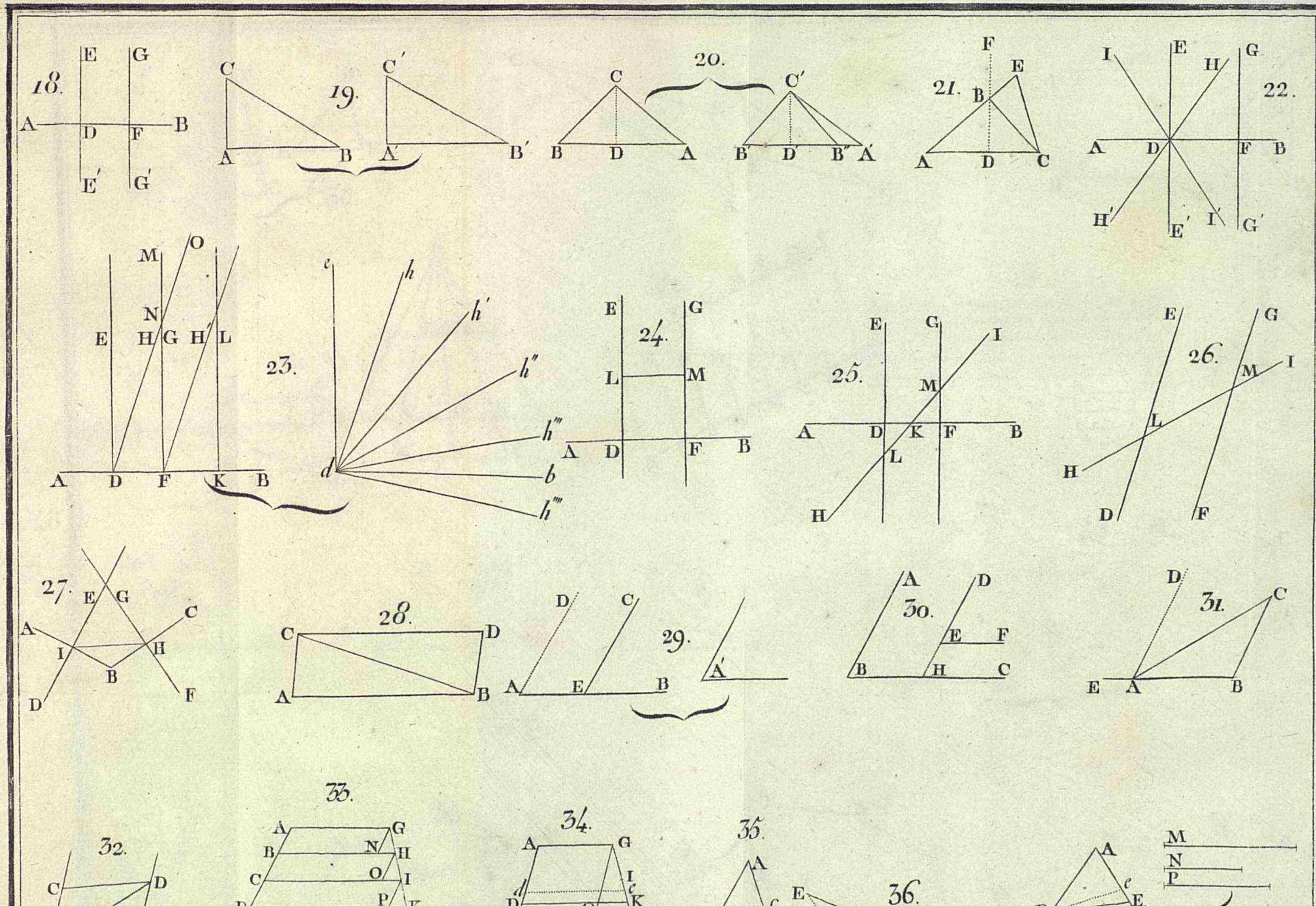
El *exaedro* ó *cubo* tiene sus ángulos triedros, y está
Fig. 155. formado por seis cuadrados iguales, fig. 155.

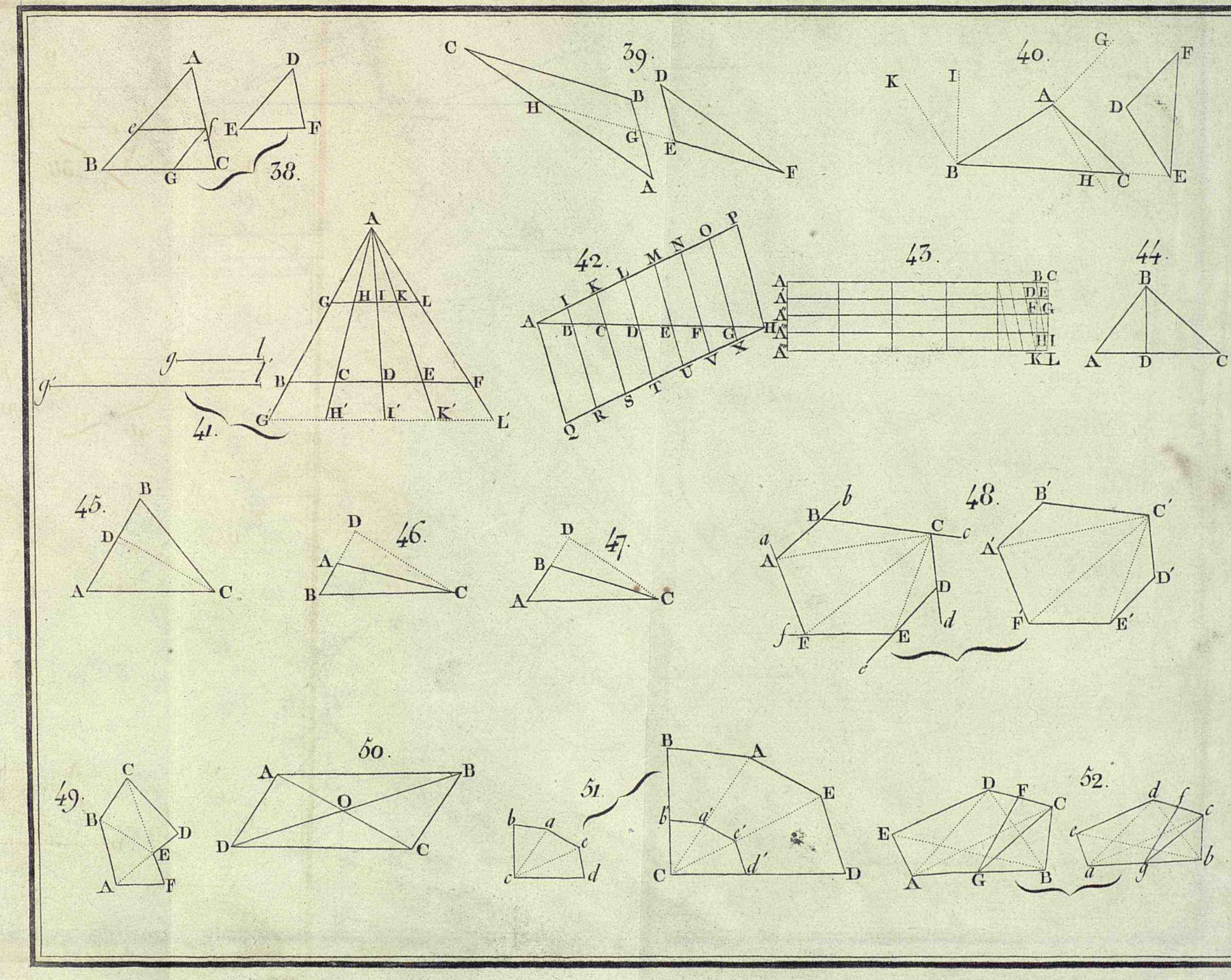
El *dodecaedro* tiene asimismo sus ángulos triedros,
Fig. 156. y está formado por doce pentágonos, fig. 156.

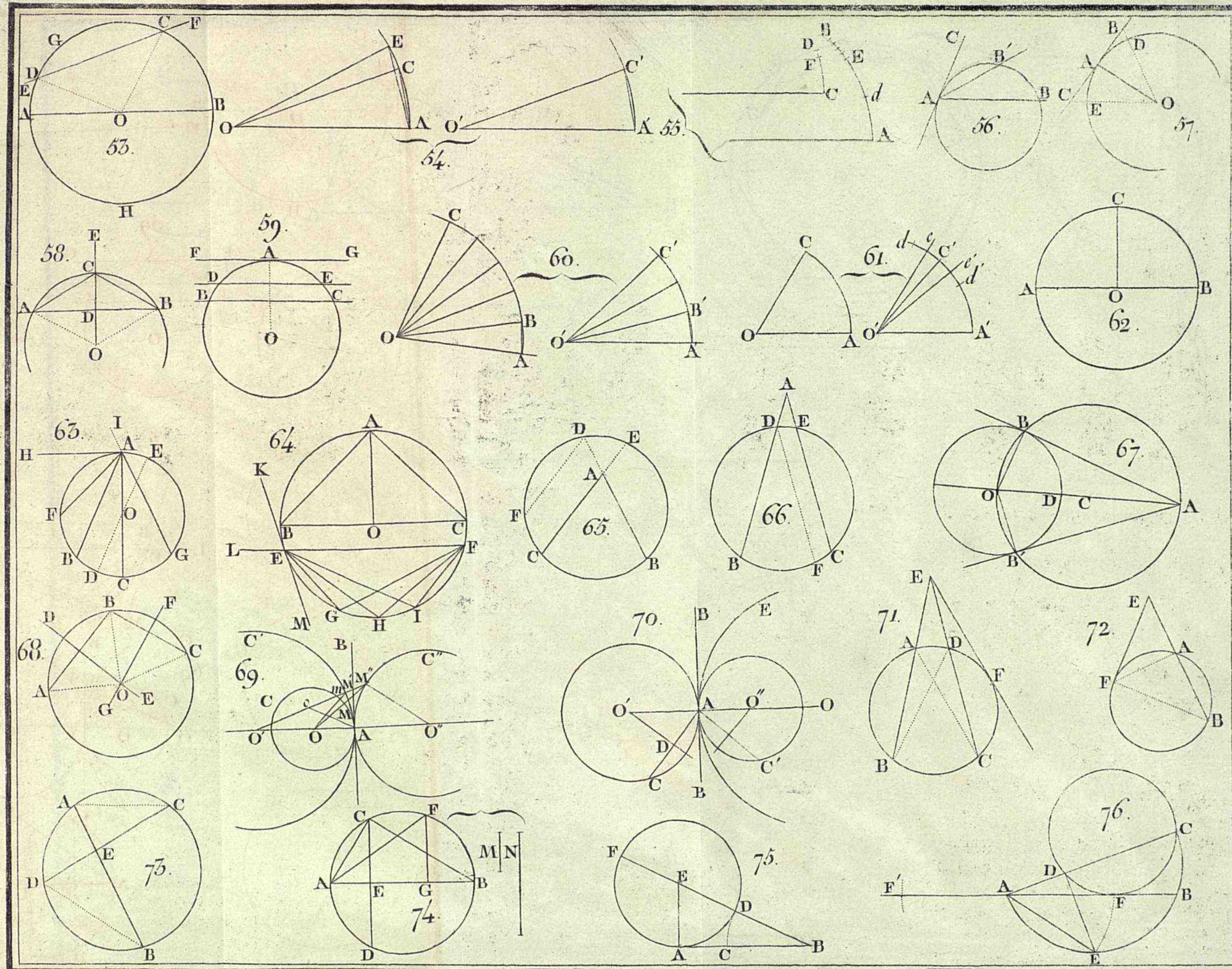
Elementos de Geometría Lam. I.

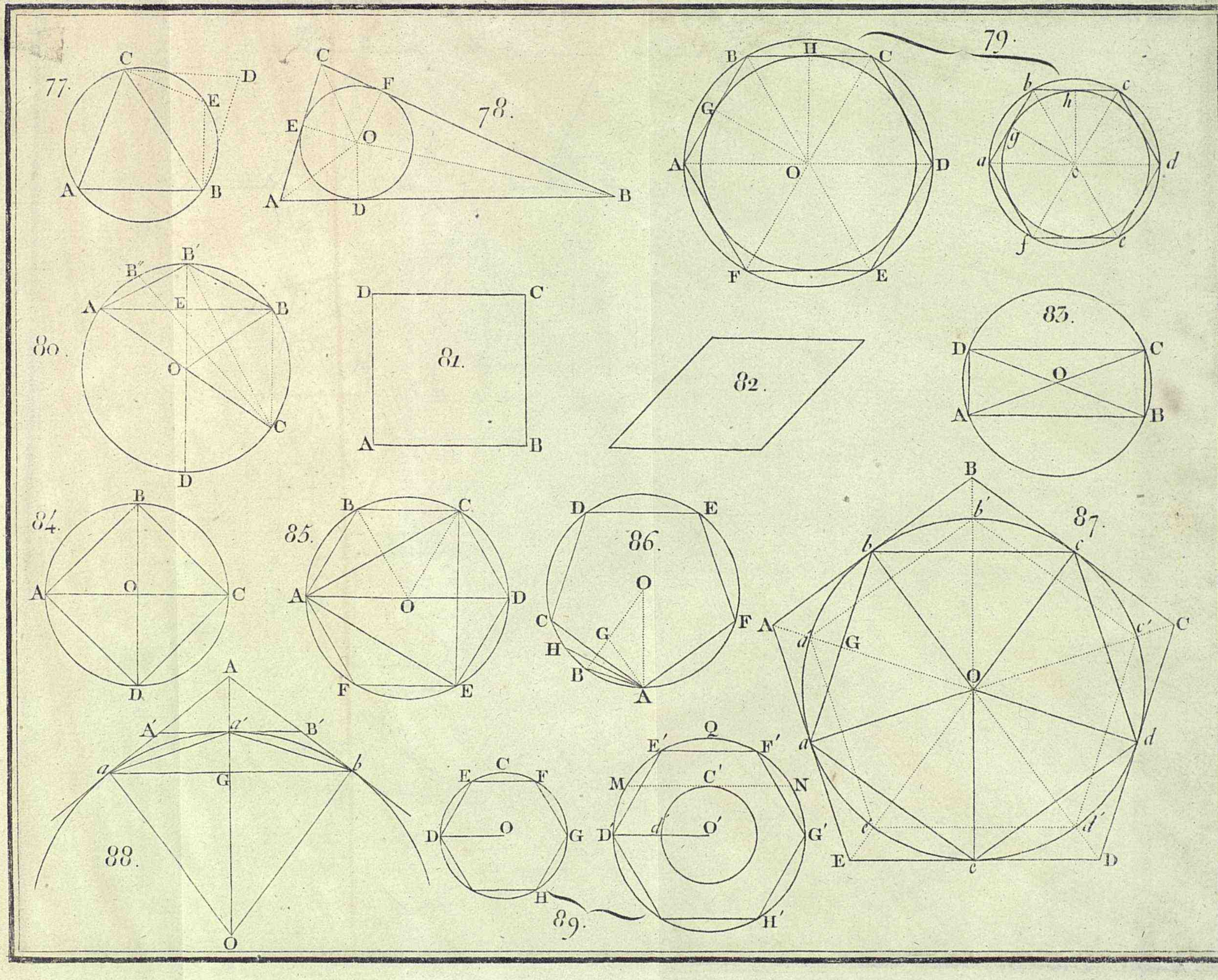


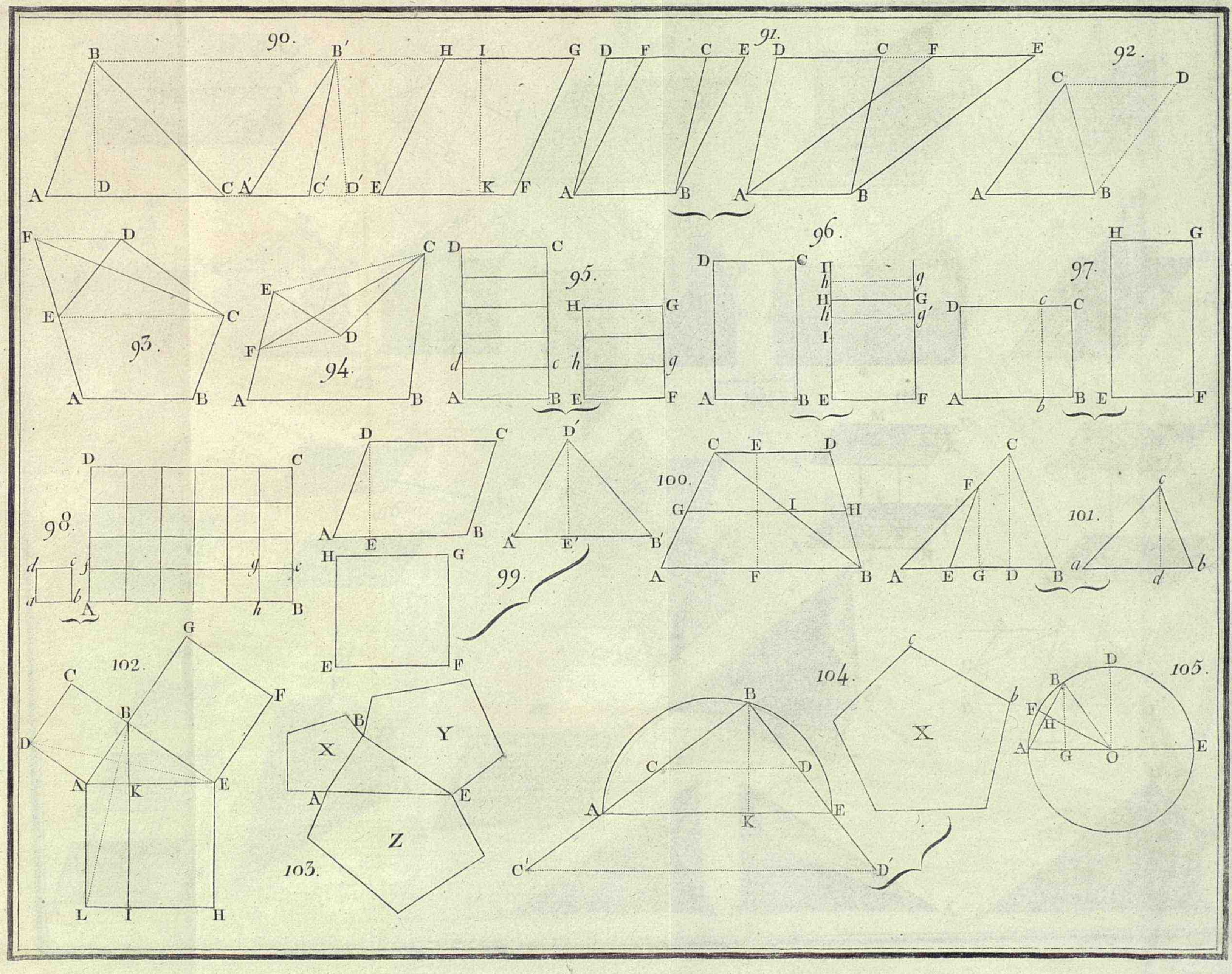

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
N.º 1
N.º 2
N.º 3
12.
13.
14.
15.
16.
17.

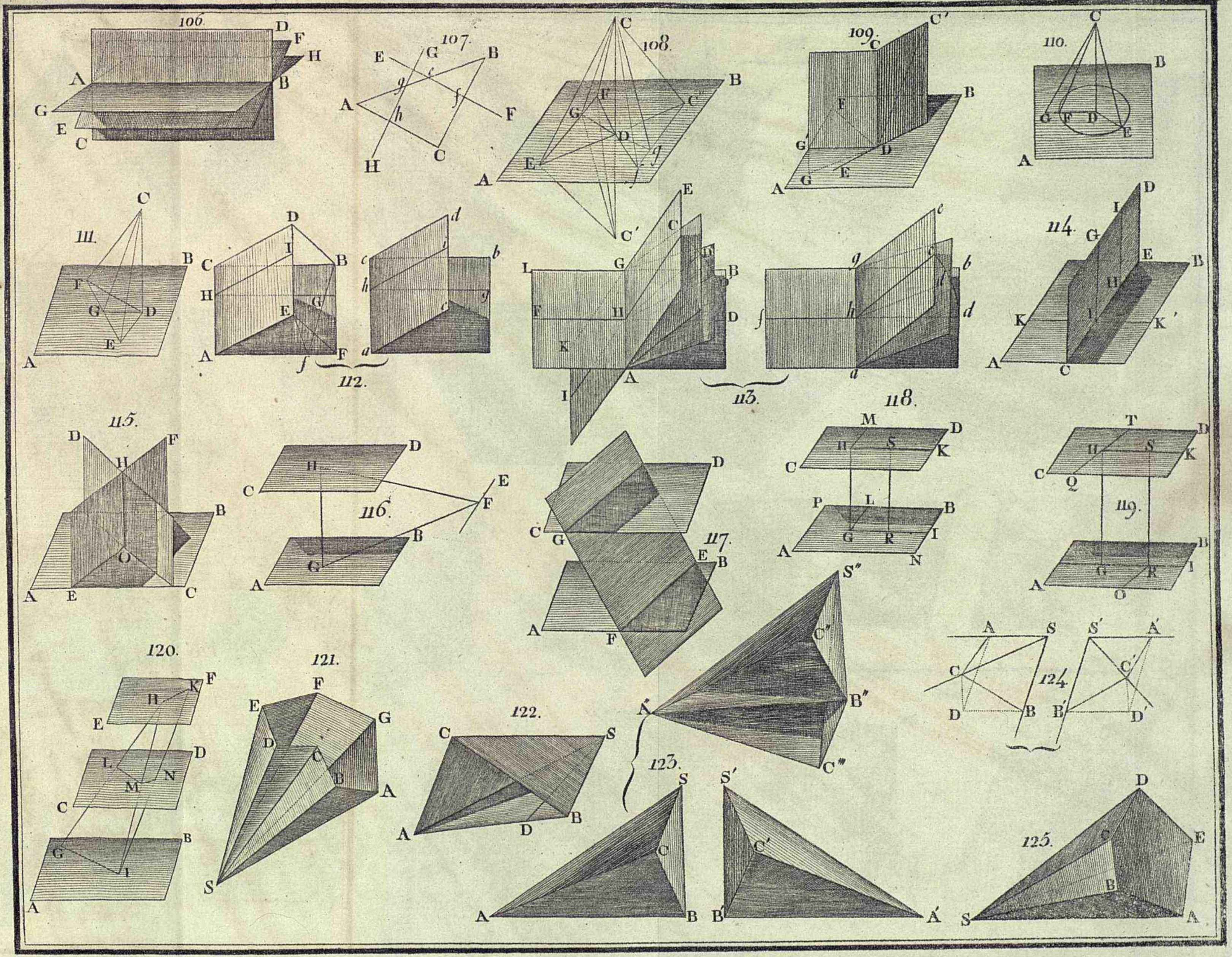

18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.
29.
30.
31.
32.
33.
34.
35.
36.
37.

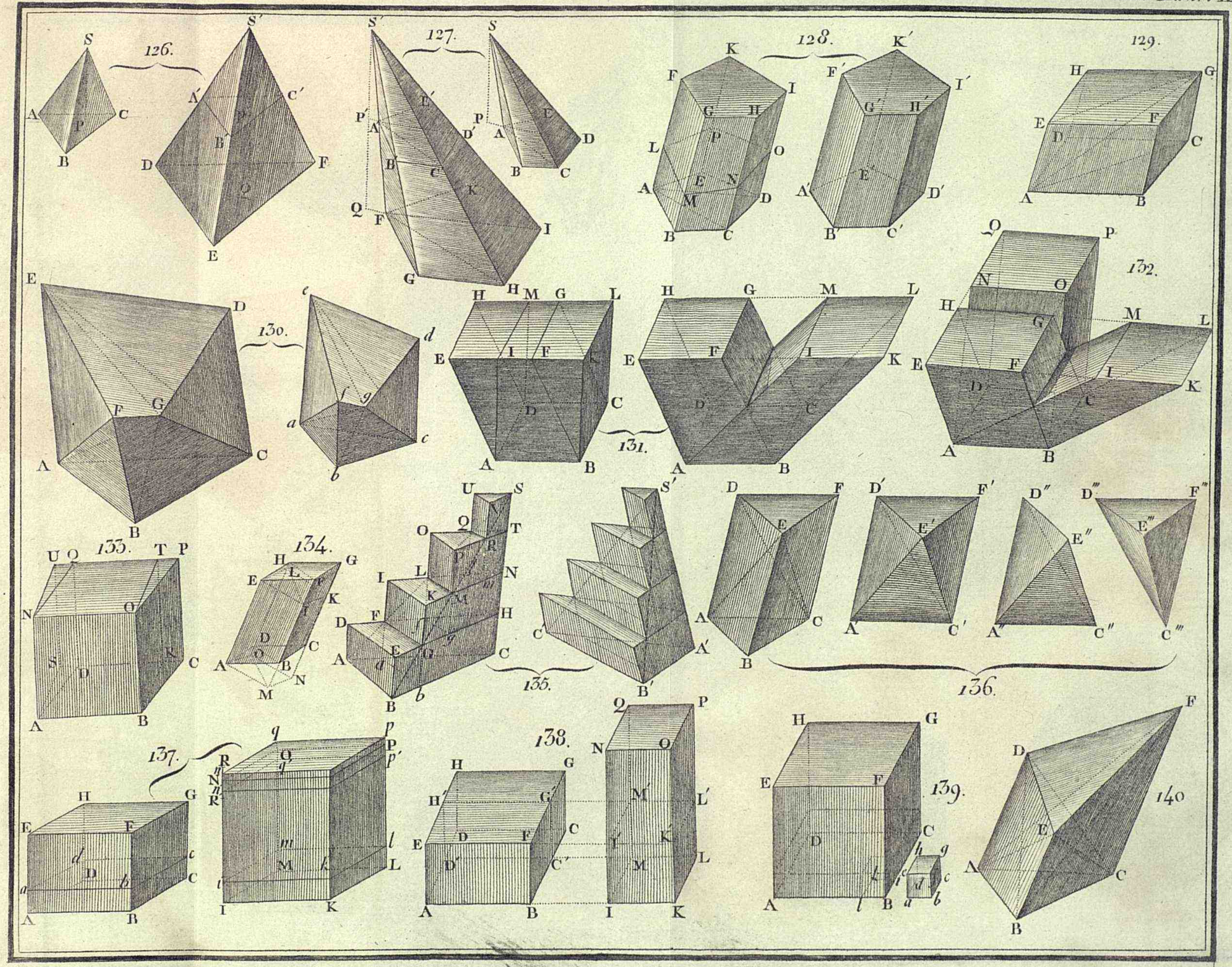

38.
39.
40.
41.
42.
43.
44.
45.
46.
47.
48.
49.
50.
51.
52.

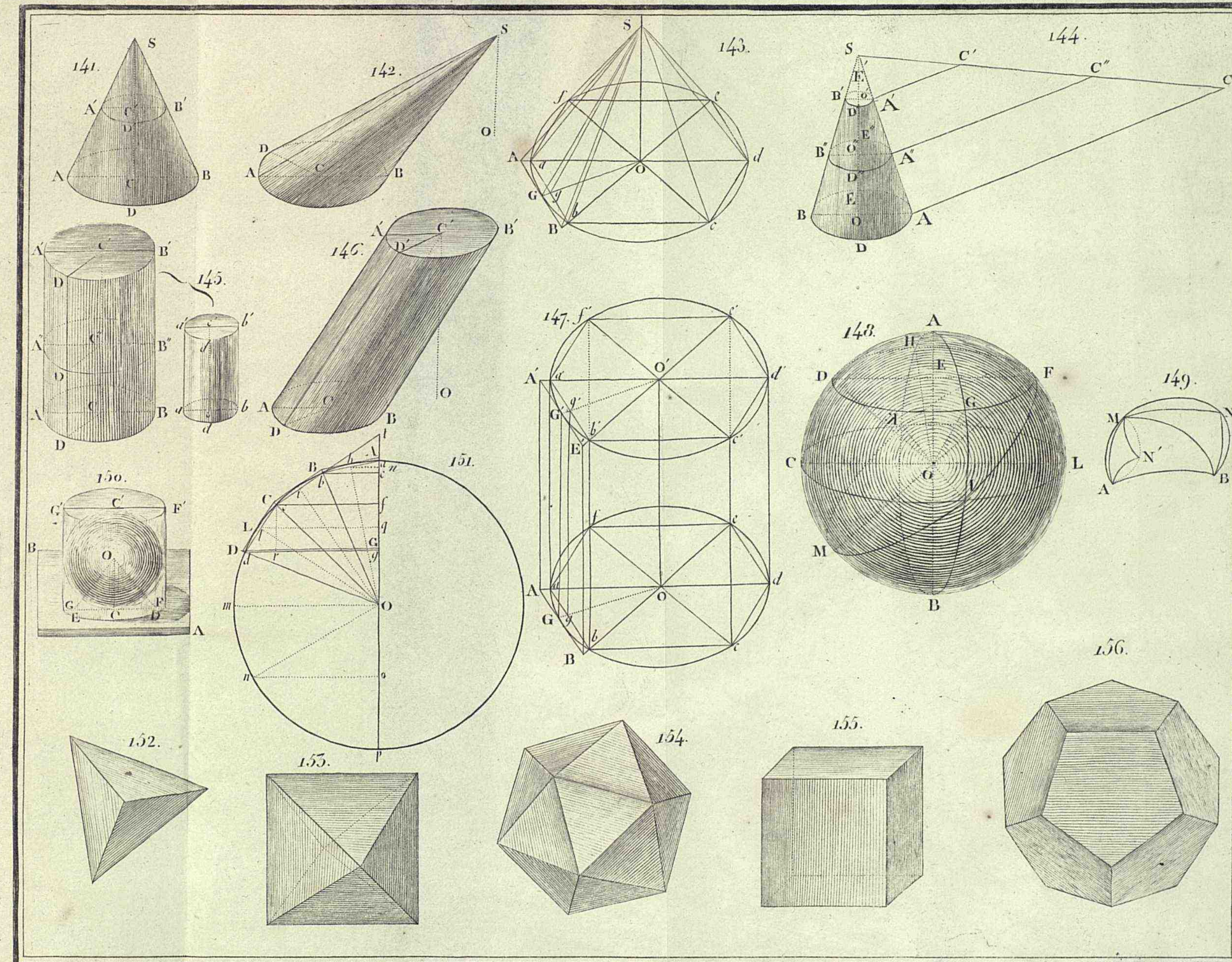

53.
54.
55.
56.
57.
58.
59.
60.
61.
62.
63.
64.
65.
66.
67.
68.
69.
70.
71.
72.
73.
74.
75.
76.


77.
78.
79.
80.
81.
82.
83.
84.
85.
86.
87.
88.
89.




106.
107.
108.
109.
110.
111.
112.
113.
114.
115.
116.
117.
118.
119.
120.
121.
122.
123.
124.
125.


126.
127.
128.
129.
130.
131.
132.
133.
134.
135.
136.
137.
138.
139.
140.


141.
142.
143.
144.
145.
146.
147.
148.
149.
150.
151.
152.
153.
154.
155.
156.