S. MORENO REY Y J. CERUELO

ARITMÉTICA
Y
ALGEBRA

LIBRO II.

DEL CÁLCULO DE NÚMEROS CONCRETOS.

LIBRO III.

DE LA COMPARACIÓN DE NÚMEROS CONCRETOS.

ELEMENTOS

DE

MATEMÁTICAS.

ELEMENTOS

DE

MATEMÁTICAS

POR

D. SANTIAGO MORENO REY

Y

D. JOSÉ CERUELO Y OBISPO,

CATEDRÁTICOS DE ESTA ASIGNATURA.

ÁLGEBRA.

Tercera edición.

MADRID.

IMPRENTA DE LA VIUDA É HIJA DE FUENTENEBRO.

Bordadores, 10.

1890.

(2

Precio de cada ejemplar, en rústica.

En la Península, Baleares y Canarias. . . . . *Ptas.* 2,50.
En Ultramar, el correspondiente al anterior, según el cambio.

ÁLGEBRA.

ÁLGEBRA.

PRELIMINARES.

1. Además de los caracteres cualitativo y cuantitativo de la cantidad, considerados en la Aritmética, ofrece aquélla otro, por el modo de ser ó modalidad, dependiente del concepto de su oposición respecto á otra, homogénea con ella. Ejemplos de cantidades de modalidad opuesta son las distancias que, á partir de un punto, se cuenten sobre una línea hacia la *izquierda,* con relación á las que se cuenten hacia la *derecha*, y las consideradas hacia *abajo,* respecto de las consideradas hacia *arriba* y, por analogía, lo que *debe* una persona, respecto de lo que *tiene,* el tiempo *pasado*, respecto del *futuro*, etc.

Las cantidades de modalidad opuesta, se designan con los calificativos de *positivas* y *negativas*, entendiéndose que, fijado el carácter de las primeras, el opuesto será el de las segundas. Así, en los ejemplos citados anteriormente, si se consideran como *positivas* las distancias contadas hacia la derecha de un punto, las tomadas hacia arriba, lo que tiene una persona, el tiempo futuro, etc., serán *negativas*, respectivamente, las distancias contadas hacia la izquierda, las tomadas hacia abajo, lo que debe una persona, el tiempo pasado, etc.; lo contrario sucedería si á éstas se las asignase el carácter positivo, pues entonces aquéllas tendrían el negativo.

Las cantidades negativas se marcan anteponiéndolas ó poniendo sobre ellas el signo sustractivo —, y las positivas, anteponiéndolas el aditivo +, que comunmente se omite; así, -3 ó $\overline{3}$, que se lée, *menos tres*, es un número negativo, y $+3$, ó simplemente 3, es un número positivo.

2. La influencia de la modalidad de las cantidades en el resultado de su agregación da lugar á los siguientes principios:

1.° *La suma de dos ó más números del mismo signo es igual á la suma de sus valores absolutos, precedida del signo común á los sumandos*; pues si suponemos, por ejemplo, que una persona tiene varios haberes y otra varias deudas, la primera se encontrará con un *haber* igual á la suma de todos los haberes parciales, y la segunda, con un *debe* igual á la suma de todas las deudas; así se tendrá:

$$(+8)+(+3)+(+5)+(+9) = +(8+3+5+9) = 8+3+5+9 = 25$$
$$\text{y } (-8)+(-3)+(-5)+(-9) = -(8+3+5+9) = -25$$

y, en general,

$$(+a)+(+b)+(+c)+(+d) = +(a+b+c+d) = a+b+c+d$$
$$\text{y } (-a)+(-b)+(-c)+(-d) = -(a+b+c+d).$$

2.° *La suma de dos números de distinto signo es igual á la diferencia de sus valores absolutos, precedida del signo del mayor*; pues si suponemos, por ejemplo, que una persona tiene un *haber* y una *deuda*, el menor de estos valores destruirá, en su opuesto, una parte igual á él y el resultado ó exceso del mayor sobre el menor será de la misma modalidad que aquél; así se tendrá:

$$(+8)+(-3)=8-3=5; \quad (-8)+(+3)=-(8-3)=-5$$
$$(+9)+(-15)=-(15-9)=-6; \quad (-9)+(+15)=15-9=6$$

y, en general,

$$\text{si } a>b, \ (+a)+(-b)= a-b; \ (-a)+(+b)=-(a-b)$$
$$\text{y si } a<b, \ (+a)+(-b)=-(b-a); \ (-a)+(+b)=b-a.$$

3. Del carácter opositivo de las cantidades positivas y negativas y de aplicar á éstas el concepto aritmético de que una cantidad es menor que otra cuando, para ser igual á ella, hay que agregarla una positiva, se derivan los siguientes principios, de frecuente aplicación:

1.° *Al cero se le puede asignar, indiferentemente, el signo + ó el —*; pues es carencia de toda unidad, ó límite entre las positivas y las negativas.

2.° *El resultado de una sustracción, cuyo minuendo es menor que el sustraendo, es negativo*; pues se tiene que $a-(a+d)=a-a-d=-d$.

3.° *Toda cantidad negativa es menor que cero*; pues hay que agregarla una positiva, igual á ella, para tener cero.

4.° *De dos cantidades negativas, es menor la de mayor valor absoluto*; pues habrá que agregarla mayor positiva para tener cero; así se tendrá, en general, $-(a+b)<-a$.

4. **Álgebra** *es la parte de la ciencia matemática que tiene por objeto la cantidad en general y por fin el estudio de las leyes generales de la cantidad.*

La cantidad en Álgebra, atendiendo al fin esencialmente generalizador de esta parte de la ciencia matemática, se expresa por medio de letras, de las que cada una representa, ya un número cualquiera, ya el resultado de una operación simple ó compuesta, sin que por ello se excluya el uso de los números, en combinación con las letras.

5. **Expresión ó cantidad algebráica ó literal** *es el conjunto de letras ó de letras y números, ligados entre sí por los signos y formas de indicación de operaciones, empleados en la Aritmética:*

tales son, a, a^2b, $5a^3c^2$, $\sqrt{\dfrac{4a^2+9d}{7b^3-3c}}$.

6. **Valor numérico de una expresión algebráica** *es el número que resulta de verificar las operaciones indicadas en ella, dando valores particulares á sus elementos literales.* Así, por ejemplo, el valor numérico de la expresión algebráica $3a^3b^2$, cuando sea $a=2$ y $b=5$, será $3\times 2^3\times 5^2 = 3\times 8\times 25 = 600$.

Dos expresiones algebráicas que, por los mismos valores de las mismas letras, tienen igual valor numérico, se llaman *equivalentes*: tales son la propuesta, $3a^3b^2$, y la $\frac{3}{5}a^3b^3$, cuyo valor numérico, para $a=2$ y $b=5$, es

$$\frac{3}{5}\times 8\times 125 = 600.$$

7. Se llama **función de una ó varias cantidades** *á toda cantidad cuyo valor depende del que tengan aquélla ó aquéllas*, á las que se da el nombre de *variables*. Así, el valor numérico de una expresión algebráica es función de las letras que la constituyen, que son las variables.

8. Las expresiones algebráicas se dividen, por su forma, en *racionales* y *radicales*, subdividiéndose aquéllas en *enteras* y *fraccionarias*.

Expresiones algebráicas racionales *son las que no contienen ningún radical de radicando literal*, y **radicales**, *las que tienen alguno.*

Expresiones algebráicas enteras *son las racionales que no tienen ningún denominador literal*, y **fraccionarias**, *las que tienen alguno.*

9. Monomio *es toda expresión algebráica, separada de otra por el signo + ó el —.*

En todo monomio, además del signo, hay que considerar un factor ó conjunto de factores efectiva ó hipotéticamente constante, llamado *coeficiente*, y otro variable, llamado *parte literal*, que consta de letras y exponentes (*).

El coeficiente implícito de un monomio, que no le tiene manifiesto, es la unidad. Así, $5a^pb^qc$, es un monomio positivo, de coeficiente numérico, 5; $-ma^rb^sd$, es un monomio negativo, de coeficiente literal, m; y a^3b^2 es un monomio positivo cuyo coeficiente implícito es 1.

El exponente implícito de una letra ó de una expresión algebráica, que no le tenga manifiesto, es la unidad.

Grado absoluto ó simplemente **grado de un monomio entero** *es el número de sus factores literales ó sea la suma de los exponentes de sus letras:* así, el monomio $7a^5b^3c^2$ es de décimo grado.

Grado de un monomio entero, respecto á una de sus letras, *es el exponente de dicha letra.* Así, el monomio $6a^3b^2c^4d$, es de tercer grado, respecto á la a; de segundo, respecto á la b; de cuarto, respecto á la c, y de primero, respecto á la d.

10. Polinomio *es la expresión algebráica que consta de varios monomios, llamados términos del polinomio:* si éstos son dos, recibe aquél el nombre particular de *binomio*, y si tres, el de *trinomio*.

La expresión algebráica, $5a^3b + ab^2 - 3a^4c + 4a^3b^2c$, es un polinomio de cuatro términos.

Grado absoluto ó simplemente **grado de un polinomio entero** *es el de su término de mayor grado:* así el polinomio anterior es de sexto grado, como su término $4a^3b^2c$.

Grado de un polinomio entero, respecto á una de sus letras, *es el mayor exponente que dicha letra tenga en él.* Así, dicho polinomio es de cuarto grado respecto á la a, de segundo, respecto á la b, y de primero respecto á la c.

Polinomio homogéneo *es aquel cuyos términos son todos del mismo grado:* así, el polinomio $4a^2b - 2bc^2 + b^3$ es homogéneo, de tercer grado.

(*) En la escritura de un monomio se hace preceder el coeficiente á la parte literal y en su lectura se omite, para abreviar, la frase *elevado á d;* así, el monomio $5a^4b^2c$, se lée cinco, a cuatro, b dos, c.

11. Se dice que un polinomio es **completo**, respecto á una de sus letras, cuando existen en él todos los sucesivos exponentes de ella, desde el mayor á cero, entendiéndose que es de grado *cero* el término independiente de dicha letra, porque según ya sabemos (Arit. **62-Esc. 2.°**), toda cantidad con exponente cero equivale á la unidad.

Así, el polinomio $3a^3b^2-7ab^4+6a^5b-4a^2b^3-2a^4b^5+8$ es completo, respecto á las letras a y b,
y el polinomio $8ab^2-3a^4b^5+2a^6b-5a^3b^3+7$ es incompleto, respecto á la letra a, porque faltan en él los términos en que ésta tenga los exponentes 5 y 2 (que, abreviadamente, se llaman términos en a^5 y en a^2), y respecto á la letra b, porque falta el término en b^4.

12. Se dice que un polinomio está **ordenado**, respecto á una de sus letras, cuando el exponente de ella es constantemente mayor ó menor en cada término que en el que le precede, si no lo tiene igual. La letra con relación á la cual está ordenado un polinomio se llama *letra ordenatriz.* La ordenación de un polinomio es *descendente* ó *ascendente*, según que los exponentes de la letra ordenatriz van disminuyendo ó aumentando desde el primero hasta el último término.

13. **Teorema.** *El valor numérico de un polinomio es independiente del órden de sus términos.*

En efecto, todo término, cualquiera que sea el lugar que ocupe, contribuye, según que vaya precedido del signo aditivo ó sustractivo, á aumentar ó disminuir en su valor numérico el del polinomio: luego éste depende de los valores particulares de cada uno de los términos y de los signos de éstos y, como al invertir el órden de ellos, no varían sus valores ni sus signos, es evidente que no se altera el valor numérico del polinomio.

Escolio. Un polinomio puede ordenarse como se quiera, colocando cada uno de sus términos en el lugar conveniente. Así, el polinomio $3a^3b^2-7ab^4+6a^5b-4a^2b^3-2a^4b^5+8$, ordenado descendentemente, respecto á la a, se escribirá,

$$6a^5b - 2a^4b^5 + 3a^3b^2 - 4a^2b^3 - 7ab^4 + 8,$$

y, ordenado ascendentemente, respecto á la b, se escribirá

$$8 + 6a^5b + 3a^3b^2 - 4a^2b^3 - 7ab^4 - 2a^4b^5.$$

Todo polinomio homogéneo de dos variables, ordenado descendentemente respecto á una de ellas, lo está ascendentemente, respecto á la otra: tal es el polinomio

$$6a^4 + 5a^3b - 8a^2b^2 - 4ab^3 + 9b^4,$$

14. Llámanse **monomios semejantes** ó **términos semejantes de un polinomio** *á los que tienen la misma parte literal;* tales son los monomios $6a^2b$ y $4a^2b$.

Dos monomios semejantes se pueden siempre reducir á uno solo; pues cómo un monomio representa el producto de sus factores, dos monomios semejantes son dos productos que tienen por factor común la parte literal: luego, separando este factor común (ARITMÉTICA, **51-Esc. 3.°**), se obtendrá un producto de dos factores, de los que uno será la suma ó diferencia de los coeficientes y el otro dicha parte literal.

Asi se tendrá:

$$6a^2b+4a^2b=(6+4)a^2b=10a^2b$$
$$-3b^4c-11b^4c=-(3+11)b^4c=-14b^4c$$
$$5ax^3-2ax^3=(5-2)ax^3=3ax^3$$
$$8a^4b^2-13a^4b^2=-(13-8)a^4b^2=-5a^4b^2$$

De aquí se deduce la siguiente regla:

Para reducir dos monomios semejantes se suman sus coeficientes, si son del mismo signo, y se restan, si son de signo contrario, y el resultado, con el signo común, en el primer caso, y con el del mayor, en el segundo, se pone por coeficiente de la parte literal. (*)

Si en un polinomio hay más de dos términos semejantes se podrán reducir á uno, reduciendo dos de ellos, después el resultado de esta reducción y otro de sus semejantes y así sucesivamente: pero, si se tiene en cuenta que se pueden disponer consecutivamente los términos semejantes positivos y á continuación los negativos (**13**), se podrá aplicar la siguiente regla:

Para reducir términos semejantes, en un polinomio, se suman separadamente los coeficientes de los de signo positivo y de los de signo negativo; se restan las sumas, y la diferencia, precedida del signo de la mayor, se pone por coeficiente de la parte literal.

Así, la reducción de los términos semejantes del polinomio $4a^2b-7a^2b-5a^2b+3a^2b-a^2b+17a^2b$ se obtendrá de este modo:

$4-7=-3; -3-5=-8; -8+3=-5; -5-1=-6; -6+17=11$,
lo que dá la reducción $11a^2b$
ó bien, $4+3+17=24; -7-5-1=-13; 24-13=11$,
lo que da la reducción $11a^2b$, igual á la anterior.

(*) Si dos monomios semejantes, pero de signo contrario, tienen el mismo coeficiente, tales como ma^2b y $-ma^2b$, se dice que *se destruyen*.

PRIMERA PARTE.

CÁLCULO ALGEBRÁICO.

LIBRO PRIMERO.

GENERALIDADES.

CAPÍTULO ÚNICO.

GENERALIDADES SOBRE EL CÁLCULO ALGEBRÁICO.

15. El cálculo algebráico consiste, esencialmente, en meras transformaciones de unas expresiones en otras equivalentes, mediante el mecanismo de las operaciones aritméticas, *adición*, *sustracción*, *multiplicación*, *división*, *elevación á potencias* y *extracción de raíces*, que se indican en Algebra con los mismos signos y formas expuestas en la Aritmética, al tratar particularmente de cada una de ellas.

Entre el cálculo aritmético y el algebráico existen, sin embargo, notables diferencias, en razón al distinto concepto de los datos de las operaciones y forma de expresión del resultado.

En el cálculo aritmético, los datos de las operaciones son números particulares de valor positivo determinado, y en el algebráico son, en general, formas de indicación de operaciones compuestas. En todo cálculo aritmético, el resultado es un número positivo de valor determinado, y en el algebráico es una expresión general, llamada *fórmula*.

Las ventajas que sobre el cálculo aritmético tiene el algebráico se revelan principalmente en el resultado, pues en el del aritmético no queda huella alguna del procedimiento seguido para obtenerle, al paso que en el del algebráico queda indicada la serie de operaciones que componen la fórmula obtenida, la cual es aplicable á todos los casos particulares de la misma índole.

16. Los caracteres distintivos del cálculo algebráico y el aritmético se hacen patentes en la resolución de una cuestión concreta, tal como la siguiente:

Averiguar cuáles serán dos números cuya suma sea 36 *y cuya diferencia sea* 8.

Resolviéndola *aritméticamente* diremos: puesto que el mayor excede al menor en 8 unidades, la suma de ámbos, que es 36, será igual al duplo del menor más 8 y, por tanto, $36 - 8$ ó sea 28 será el duplo del menor: luego éste será $28 : 2 = 14$ y, por consiguiente, $14 + 8 = 22$ será el mayor.

Resolviéndola *algebráicamente* en toda su generalidad, designaremos por s la *suma* de los dos números, por d su *diferencia*, por x el *mayor*, y por y el *menor*, con lo que se tendrá:

$y = x - d$ y, por tanto, $x + x - d = s$ ó sea $2x - d = s$, de donde, agregando d á los dos miembros de esta igualdad, se obtiene $2x = s + d$ y, dividiendo los dos miembros de ésta por 2, resulta $x = \dfrac{s+d}{2}$ (α)

y de aquí, $y = s - \dfrac{s+d}{2} = \dfrac{2s-(s+d)}{2} = \dfrac{2s-s-d}{2} = \dfrac{s-d}{2}$ (β),

fórmulas aplicables á todas las cuestiones de esta índole.

El valor numérico de las fórmulas (α) y (β) dará, para el caso particular propuesto,

$$x = \frac{36+8}{2} = 22 \text{ é } y = \frac{36-8}{2} = 14,$$

que son los mismos valores obtenidos por la resolución aritmética.

17. Traducir una fórmula al lenguaje vulgar *es expresar el curso de las operaciones que en ella se indican, teniendo en cuenta lo que representa cada uno de sus elementos.*

Así, de las fórmulas obtenidas en el ejemplo anterior, se deduce, traduciéndolas al lenguaje vulgar, que *conocida la suma y la diferencia de dos números, el mayor es igual á la semisuma, más la semidiferencia, y el menor es igual á la semisuma, menos la semidiferencia.*

En la práctica del cálculo es muy conveniente acostumbrarse á traducir las fórmulas, aunque para recordarlas más fácilmente se emplea, como medio mnemotécnico, el retenerlas en su forma algebráica ó *natural*.

LIBRO II.

DE LA CANTIDAD ALGEBRÁICA ENTERA.

CAPÍTULO PRIMERO.

DE LA ADICION.

18. La **adición** *tiene por objeto hallar una expresión algebráica cuyo valor numérico sea siempre igual á la suma de los valores numéricos de otras dadas.*

De esta definición se infiere que la suma ha de ser la reunión de todos los sumandos y que cada uno de éstos ha de tener en ella la influencia propia de su valor numérico y de su modalidad.

De aquí se deduce la siguiente regla:

Para sumar dos ó más expresiones algebráicas se escriben unas á continuación de otras, con los signos que tengan, y, en el polinomio que resulte, se reducen los términos semejantes.

Escolio. La adición algebráica de dos sumandos se convierte en una sustracción, cuando éstos son de distinto signo; pues se tendrá, en general,

$$a + (-b) = a - b$$
$$\text{y } -a + (+b) = -a + b = b - a.$$

Observación. En la práctica de la adición de polinomios es muy conveniente colocar los sumandos unos debajo de otros, de modo que los términos semejantes se correspondan en columna y, para abreviar, omitir la escritura de la parte literal de todo término semejante á otro ya escrito.

Ejemplo. *Sumar los polinomios* $7c^2d + 6a^2b - 2bc - 5ab^2$, $8ab^2 - c^2d - 4a^2b$ y $-6ab^2 + 2c^2d + 9a^2b + 3bc$.

La operación se puede disponer en esta forma:

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 7c^2d & +\ 6a^2b & -\ 2bc & -\ 5ab^2 \\
 & -\ 1 & -\ 4 & & +\ 8 \\
 & 2 & +\ 9 & +\ 3 & -\ 6 \\
\hline
\text{Suma} = & 8c^2d & +\ 11a^2b & +\ bc & -\ 3ab^2
\end{array}$$

CAPÍTULO II.

DE LA SUSTRACCIÓN.

19. La sustracción *tiene por objeto hallar uno de dos sumandos, cuando se conoce el otro y la suma de ámbos.*

De esta definición se infiere que la diferencia ha de ser la cantidad que, sumada con el sustraendo, dé por suma el minuendo ; así, si éste es M y aquél $a+b-c$, la diferencia será $M-(a+b-c)=M-a-b+c$, pues $(M-a-b+c)+(a+b-c)=M-a-b+c+a+b-c=M$.

De aquí se deduce la siguiente regla:

Para restar dos expresiones algebráicas se escribe el minuendo y, a continuación, el sustraendo, con los signos cambiados, y, en el polinomio que resulte, se reducen los términos semejantes.

Escolio 1.° La sustracción algebráica se convierte en una adición, cuando ambos términos son de signo contrario: pues se tendrá, en general ,

$$a-(-b)=a+b \quad \text{y} \quad -a-(+b)=-a-b=-(a+b).$$

Escolio 2.° La igualdad

$$o-(a+b-c-d+e)=o-a-b+c+d-e$$

ó sea $-(a+b-c-d+e)=-a-b+c+d-e$ indica que *todo polinomio, precedido del signo negativo, equivale al mismo polinomio con los signos cambiados*, y recíprocamente, que *á todo polinomio se le pueden cambiar los signos, encerrándolo en un paréntesis, precedido del signo negativo.*

Observación. En la práctica de la sustracción de polinomios es muy conveniente escribir el sustraendo, cambiado de signos, debajo del minuendo, de manera que se correspondan los términos semejantes y, para abreviar, omitir la parte literal de los términos del sustraendo, semejantes á otros del minuendo.

Ejemplo. *Restar del polinomio* $6b^4+8a^2b^3+4ab^2-7bc$, *el polinomio* $-5b^4+12a^2b^3+4ab^2+2bc$.

La operación se puede disponer en esta forma :

$$\begin{array}{rrrrr} & 6b^4 & +8a^2b^3 & +4ab^2 & -7bc \\ & +5 & -12 & -4 & -2 \\ \hline \text{Diferencia} = & 11b^4 & -4a^2b^3 & & -9bc \end{array}$$

CAPÍTULO III.

DE LA MULTIPLICACIÓN.

20. La multiplicación *tiene por objeto hallar una expresión algebráica que sea, en valor numérico y signo, respecto á otra dada, lo que una tercera, también dada, sea respecto á la unidad entera y positiva.*

21. Teorema. *El producto de dos números del mismo signo es positivo y el de dos números de signo contrario es negativo.*

En efecto, si los dos factores son positivos, ó sea, del mismo signo que la unidad, el producto tendrá el mismo signo que cualquiera de ellos; si los dos son negativos, ó sea de signo contrario al de la unidad, el producto tendrá signo contrario al de cualquiera de ellos; y finalmente, si uno es positivo y el otro negativo, teniendo el primero igual signo que la unidad, el producto tendrá igual signo que el segundo.

Corolario 1.° *Si uno de los factores de un producto cambia de signo, el producto cambiará de signo;* pues si ámbos tenían *igual* ó *distinto* signo, después del cambio lo tendrán *distinto* ó *igual*, respectivamente.

Corolario 2.° *Si los dos factores de un producto cambian á la vez de signo, el producto no sufrirá alteración;* puesto que el simultáneo y contrario cambio de signo del producto, le deja con el que tuviera.

Escolio. La determinación del signo del producto, llamada *regla de los signos en la multiplicación*, se suele expresar, abreviadamente, diciendo : *signos iguales dan* + y *signos desiguales* —, y también , más detalladamente,

+ por + dá + ; — por — dá +;
+ por — dá — ; — por + dá —.

22. Teorema. *El valor y signo de un producto de factores algebráicos es independiente del órden de éstos.*

En efecto, demostrada ya en la ARITMÉTICA (**53**, **126** y **160**) la primera parte de este teorema, basta observar que como el signo del producto depende de que sean iguales ó desiguales los de los factores y esta igualdad ó desigualdad subsiste independientemente del órden de ellos, el signo del producto no variará, sea cualquiera dicho órden.

23. En el estudio de la multiplicación algebráica conviene distinguir la de dos monomios, la de un polinomio por un monomio ó de un monomio por un polinomio, y la de dos polinomios.

24. Multiplicación de dos monomios.

El signo del producto dependerá de los que tengan los factores y se obtendrá por la regla de los signos (21.-Esc).

Por otra parte, como todo monomio es un producto de varios factores, si se trata de multiplicar los monomios $Ca^m b^n d^p$ y $C'a^q d^r e^s$, se tendrá

$Ca^m b^n d^p \times C'a^q d^r e^s = CC'a^m a^q b^n d^p d^r e^s$ (ARIT. 55-Esc.)

$= CC'a^{m+q} b^n d^{p+r} e^s$ (ARIT. 62 Esc. 1.°)

De aquí se deduce la siguiente regla:

Para multiplicar dos monomios se multiplican los coeficientes y, á la derecha del producto, se escriben las letras comunes á ambos factores, con un exponente igual á la suma de los que tienen en ellos, y las nó comunes con el que tengan en el factor en que se hallen.

Ejemplo. *Multiplicar* $4a^3b^2c$, *por* $-2a^2bd$.

Se tendrá $4a^3b^2c \times -2a^2bd = -8a^5b^3cd$.

25. Multiplicación de un polinomio por un monomio.

Multiplicar un polinomio por un monomio es hallar el producto de la suma algebráica de los términos del polinomio por el monomio: así se tendrá la igualdad

$(a + b + c)\,d = ad + bd + cd$ (ARIT. 51-Esc. 1.°)

en cuyo segundo miembro, los términos ad, bd y cd tendrán el signo determinado por el del monomio d y el de cada uno de los monomios a, b y c, de donde se deduce la siguiente regla:

Para multiplicar un polinomio por un monomio se multiplica cada término del polinomio por el monomio y se suman los productos parciales.

Ejemplos.

1.° *Multiplicar* $6a^3b^2 - 3a^2b - 4a$, *por* $5a^3b$.

Se tendrá $(6a^3b^2 - 3a^2b - 4a)5a^3b = 30a^6b^3 - 15a^5b^2 - 20a^4b$.

2.° *Multiplicar* $4b^3c + 2b^2c^2 - 6d$, *por* $-3b^2d$.

Se tendrá $(4b^3c + 2b^2c^2 - 6d)(-3b^2d) = -12b^5cd - 6b^4c^2d + 18b^2d^2$.

26. Multiplicación de dos polinomios.

Si se tiene un polinomio, $a + b - c$, y se desea hallar su producto por otro, $d - e + f$, llamando S á la suma algebráica de todos los términos que forman el primer polinomio, se tendrá:

$$(a + b - c)(d - e + f) = S(d - e + f) = Sd - Se + Sf,$$

y restableciendo el valor de S, resultará

$$\begin{aligned}(a+b-c)(d-e+f) &= (a+b-c)d + (a+b-c)(-e) + (a+b-c)f \\ &= ad + bd - cd - (ae + be - ce) + af + bf - cf \\ &= ad + bd - cd - ae - be + ce + af + bf - cf,\end{aligned}$$

de donde se deduce la siguiente regla:

Para multiplicar dos polinomios se multiplica uno de ellos por cada uno de los términos del otro y se suman los productos parciales.

Escolio. Es notable, por sus frecuentes aplicaciones, el resultado de multiplicar el binomio $a + b$, por el binomio $a - b$, pues se tiene

$$(a + b)(a - b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2 ;$$

lo que da á entender, que *el producto de la suma de dos cantidades, por su diferencia, es igual a la diferencia de sus cuadrados.*

Observación 1.ª En la práctica de esta operación conviene ordenar los factores con relación á una misma letra, colocarlos uno debajo del otro y multiplicar el multiplicando por cada término del multiplicador, cuidando de escribir los polinomios resultantes de modo que se correspondan en columna sus términos semejantes, con lo cual se facilita su reducción.

Ejemplo. *Multiplicar el polinomio* $8ab^2c^3 + 4a^3bc^2 - 7a^2b^3c$, *por el polinomio* $5a^2b^3c + a^3bc^2 - 2ab^2c^3$.

Ordenando ambos respecto á la letra a, se dispone la operación en esta forma:

$$\begin{array}{r} 4a^3bc^2 - 7a^2b^3c + 8ab^2c^3 \\ a^3bc^2 + 5a^2b^3c - 2ab^2c^3 \\ \hline 4a^6b^2c^4 - 7a^5b^4c^3 + 8a^4b^3c^5 \qquad\qquad\qquad\qquad \\ +20a^5b^4c^3 - 35a^4b^6c^2 + 40a^3b^5c^4 \qquad\qquad \\ - 8a^4b^3c^5 + 14a^3b^5c^4 - 16a^2b^4c^6 \\ \hline \text{Producto} = 4a^6b^2c^4 + 13a^5b^4c^3 - 35a^4b^6c^2 + 54a^3b^5c^4 - 16a^2b^4c^6 \end{array}$$

Observación 2.ª Cuando varios términos de uno ó de los dos polinomios propuestos tengan *la misma potencia de la letra ordenatriz*, se separa esta potencia como factor común, se considera como coeficiente suyo la suma algebráica de las cantidades á que afecta como tal factor común y se verifica, por la regla general, la multiplicación de los coeficientes de los términos del multiplicando por el de cada uno de los términos del multiplicador.

Ejemplo.

Multiplicar el polinomio $4x^2 + 2ax + bx + 3a^2 - 5ab - b^2$, *por el polinomio* $2x^2 - 3ax + bx + 8a^2 - ab + 4b^2$.

Tomando la x como letra ordenatriz, se dispone y ejecuta la operación en esta forma:

Multiplicando....	$4x^2$	$+2a$ $+b$	x	$+3a^2$ $-5ab$ $-b^2$				
Multiplicador.....	$2x^2$	$-3a$ $+b$	x	$+8a^2$ $-ab$ $+4b^2$				
Producto por $2x^2$..	$8x^4$	$+4a$ $+2b$	x^3	$+6a^2$ $-10ab$ $-2b^2$	x^2			
Producto por $-3a$ $+b$		$-12a$ $+4b$		$-6a^2$ $-3ab$ $+2ab$ $+b^2$		$-9a^3$ $+15a^2b$ $+3ab^2$ $+3a^2b$ $-5ab^2$ $-b^3$	x	
Producto por $8a^2$.. $-ab$ $+4b^2$				$+32a^2$ $-4ab$ $+16b^2$		$+16a^3$ $+8a^2b$ $-2a^2b$ $-ab^2$ $+8ab^2$ $+4b^3$		$+24a^4$ $-40a^3b$ $-8a^2b^2$ $-3a^3b$ $+5a^2b^2$ $+ab^3$ $+12a^2b^2$ $-20ab^3$ $-4b^4$
	$8x^4$	$-8a$ $+6b$	x^3	$+32a^2$ $-15ab$ $+15b^2$	x^2	$+7a^3$ $+24a^2b$ $+5ab^2$ $+3b^3$	x	$+24a^4$ $-43a^3b$ $+9a^2b^2$ $-19ab^3$ $-4b^4$

27. Propiedades del resultado de una multiplicación algebráica.

Del mecanismo de la multiplicación se deducen las siguientes propiedades:

1.ª *El producto de dos monomios es otro monomio cuyo grado es la suma de los grados de los factores.*

Pues todas las letras que entran en ellos forman parte del producto.

2.ª *El producto de un polinomio por un monomio es otro polinomio de tantos términos como tenga el multiplicando.*

Pues el producto de cada término del polinomio por el monomio es un término del producto.

3.ª *El producto de un polinomio homogéneo por un monomio es un polinomio homogéneo, de un grado igual á la suma de los grados de los factores.*

Pues cada término del producto es del mismo grado que los demás.

4.ª *El producto de dos polinomios, ordenados del mismo modo respecto á la misma letra, es otro polinomio, igualmente ordenado, que tiene por primer término el producto de los dos primeros términos de los factores, y por último, el producto de los dos últimos.*

Pues, no pudiendo resultar en los productos parciales otros términos en que la letra ordenatriz tenga el mismo exponente que en aquéllos, por tener en los demás de cada uno de los factores, ordenados descendentemente, menores exponentes que en el primero y mayores que en el último, no podrá haber en el producto total términos semejantes con los que resulten de su respectiva multiplicación.

De aquí se infiere que, si el número de términos de un factor es m y el del otro es n, el número de términos del producto será, á lo más mn (en el caso de no haber reducción de términos semejantes), esto es, el producto del número de términos de ambos factores, y á lo menos, *dos*, cuando haya el máximum de reducciones posibles.

5.ª *El producto de dos polinomios homogéneos es otro polinomio homogéneo, de un grado igual á la suma de los grados de los factores.*

Pues, al multiplicar dos términos cualesquiera de los factores, resultan siempre monomios de un grado igual á la suma de los grados de éstos y, por consiguiente, el producto total se compone de sumandos homogéneos de este grado.

28. Producto de varios factores algebráicos *es el resultado de multiplicar los dos primeros, su producto, por el tercero, el producto, por el cuarto, y así sucesivamente, hasta el último.*

29. Teorema. *El producto de varios factores, todos positivos, es siempre positivo y el de varios factores, todos negativos ó unos positivos y otros negativos, es positivo ó negativo, según que el número de factores negativos sea par ó impar.*

En efecto, de la manera de obtenerse el producto de varios factores se deduce, evidentemente, que si todos ellos son positivos, lo será el resultado; que si todos son negativos, como el primer par de factores da un resultado positivo, este producto por el tercero, negativo, éste por el cuarto, positivo, y así sucesivamente, se obtendrá al fin un producto total, que será *positivo* ó *negativo*, según que el número de factores negativos sea *par* ó *impar;* y finalmente, que si unos son positivos y otros negativos, colocando aquéllos consecutivamente y á continuación éstos, cómo el producto de los primeros será positivo, el que el signo del producto total sea *positivo* ó *negativo* dependerá de que los segundos sean en número *par* ó *impar*.

Corolario 1.° *Si se cambia de signo á uno de los factores de un producto, éste cambiará de signo;* pues el supuesto cambio de signo hace aumentar ó disminuir en uno el número de factores negativos, con lo que éste, si era impar, se convertirá en par, y si era par, en impar; luego el producto pasará de negativo á positivo ó de positivo á negativo.

Corolario 2.° *Si se cambia de signo á dos factores de un producto, éste no cambia de signo;* pues, considerando separadamente los efectos de los supuestos cambios, el producto cambiará dos veces de signo y conservará, por tanto, el que primitivamente tenía.

30. Teorema. *El valor y signo de un producto de varios factores es independiente del órden de éstos.*

En efecto, demostrada ya en la Aritmética (**53**, **126** y **160**) la primera parte de este teorema, basta observar que como el signo del producto depende solamente del número de los factores negativos y éste no varía al cambiar el órden de los factores, tampoco variará el signo del producto.

CAPÍTULO IV.

DE LA DIVISIÓN.

31. La división *tiene por objeto hallar uno de dos factores algebráicos, cuando se conoce el otro y el producto de ámbos.*

32. Teorema. *El cociente de dos números del mismo signo es positivo y el de dos números de signo contrario es negativo.*

En efecto, debiendo ser el dividendo igual al producto del divisor por el cociente, si el dividendo y el divisor son ambos positivos ó ambos negativos, el cociente ha de ser positivo, pero si el dividendo es positivo ó negativo y el divisor negativo ó positivo, el cociente ha de ser negativo, pues dos factores del mismo signo dan un producto positivo y dos de signo contrario lo dan negativo (**21-Esc.**).

Corolario 1.° *Si el dividendo ó el divisor cambia de signo, el cociente también cambia de signo*; pues, si ámbos tenían signos iguales, vendrán á tenerlos desiguales y recíprocamente, con lo que el cociente pasará de positivo á negativo ó de negativo á positivo.

Corolario 2.° *Si dividendo y divisor cambian de signo, el cociente no cambia de signo;* pues subsistirá la igualdad ó desigualdad de signos de ambos términos de la división y, por tanto, el signo del cociente.

Escolio. La determinación del signo del cociente, llamada *regla de los signos en la división*, se suele expresar abreviadamente, como en la multiplicación, diciendo: *signos iguales* dan $+$ y *signos desiguales* $-$, y también, más detalladamente,

$$+ \text{ por } + \text{ da } + \;;\; - \text{ por } - \text{ da } + \;;$$
$$+ \text{ por } - \text{ da } - \;;\; - \text{ por } + \text{ da } - \,.$$

33. En el estudio de la división algebráica conviene distinguir la de dos monomios, la de un polinomio por un monomio, la de dos polinomios y la de un monomio por un polinomio.

34. División de dos monomios.

El signo del cociente dependerá de los que tengan el dividendo y el divisor y se determinará por la regla de los signos (32-Esc.).

Por otra parte, el cociente será un monomio, pues sólo así, su producto por el divisor podría ser igual al monomio dividendo (27-1.ª), y como el producto del coeficiente y parte literal del divisor por el coeficiente y parte literal del cociente serán, respectivamente, iguales al coeficiente y parte literal del dividendo, el coeficiente del cociente será igual al cociente de el del dividendo por el del divisor; toda letra común al dividendo y al divisor tendrá en el cociente un exponente igual á la diferencia del que tenga en aquél menos el que tenga en éste, y la letra que se encuentre en el dividendo y nó en el divisor aparecerá en el cociente con el mismo exponente, pues hallándose en el producto y nó en uno de los factores, necesariamente procede del otro.

De aquí se deduce la siguiente regla:

Para dividir un monomio por otro se divide el coeficiente del dividendo por el del divisor y, á la derecha del cociente, se escriben las letras que tengan mayor exponente en el primero que en el segundo, con un exponente igual al exceso de aquél sobre éste, y además todas las que estén en el dividendo y nó en el divisor, con el exponente que tengan.

Ejemplo. *Dividir* $35a^8b^5c^4d$, *por* $-7a^5b^5c^2$.

Se tendrá $35a^8b^5c^4d : (-7a^5b^5c^2) = -5a^3c^2d$.

Escolio. La división de dos monomios es inexacta, siempre que haya en el divisor alguna letra con mayor exponente que en el dividendo ó que no haya en éste. Así, la división de $-8a^3b^2c$ por $-4a^5bd$ es inexacta.

35. División de un polinomio por un monomio.

Dividir un polinomio por un monomio es hallar el cociente de la suma algebráica de los términos del polinomio, por el monomio: así se tendrá la igualdad

$(a+b+c) : d = a : d + b : d + c : d$ (Arit. 58-Esc.)

en cuyo segundo miembro los términos $a : d$, $b : d$ y $c : d$ tendrán el signo determinado por el del monomio d y el de cada uno de los monomios a, b y c, de donde se deduce la siguiente regla:

Para dividir un polinomio por un monomio se divide cada término del polinomio por el monomio y se suman los cocientes parciales.

Ejemplo. *Dividir* $15a^4b^3c^2+24a^3b^5d-6a^2bc$, *por* $3a^2b$.

Se tendrá $(15a^4b^3c^2+24a^3b^5d-6a^2bc):3a^2b=5a^2b^2c^2+8ab^4d-2c$.

Escolio. La división de un polinomio por un monomio es inexacta si lo es la de algún término del polinomio por el monomio.

36. División de dos polinomios.

Supongamos que se trata de dividir el polinomio $A+B+C+\ldots$ por el polinomio $A'+B'+C'+\ldots$, y que ámbos están ordenados respecto á una misma letra.

Puesto que el dividendo ha de ser igual al producto del divisor por el cociente, si éste se representa por $M+N+P+\ldots$, se tendrá, evidentemente, la igualdad

$$A+B+C+\ldots = (A'+B'+C'+\ldots)(M+N+P+\ldots)$$
$$=(A'+B'+C'+\ldots)M+(A'+B'+C'+\ldots)(N+P+\ldots) \quad (\alpha)$$

y, como el primer término de los productos indicados en el último miembro de esta serie de igualdades es $A'M$ (27-4.ª), se tendrá, $A=A'M$, de donde se deduce, $M=A:A'$.

Si de los dos miembros de la igualdad (α) se resta el producto, ya conocido, $(A'+B'+C'+\ldots)M$, se tendrá

$$A+B+C+\ldots-(A'+B'+C'+\ldots)M=(A'+B'+C'+\ldots)(N+P+\ldots)$$

de cuya igualdad, llamando $A''+B''+C''+\ldots$ á la diferencia indicada en su primer miembro, resulta

$$A''+B''+C''+\ldots = (A'+B'+C'+\ldots)(N+P+\ldots)$$
$$=(A'+B'+C'+\ldots)N+(A'+B'+C'+\ldots)(P+\ldots) \quad (\beta)$$

y, como el primer término de los productos indicados en el último miembro de esta serie de igualdades es $A'N$, se tendrá, $A''=A'N$, de donde se deduce, $N=A'':A'$.

Si de los dos miembros de la igualdad (β) se resta el producto, ya conocido, $(A'+B'+C'+\ldots)N$, se tendrá

$$A''+B''+C''+\ldots-(A'+B'+C'+\ldots)N=(A'+B'+C'+\ldots)(P+\ldots)$$

de cuya igualdad, llamando $A'''+B'''+C'''+\ldots$ á la diferencia indicada en el primer miembro, resulta

$$A'''+B'''+C'''+\ldots = (A'+B'+C'+\ldots)(P+\ldots)$$

y, como el primer término del producto indicado en el segundo miembro de esta igualdad es $A'P$, se tendrá $A'''=A'P$, de donde se deduce, $P=A''':A'$.

Del anterior razonamiento que, evidentemente, se podrá continuar mientras haya términos que obtener en el cociente, se deduce la siguiente regla :

Para dividir dos polinomios se ordenan de igual modo respecto á una de las letras del dividendo; se divide el primer término de éste por el primero del divisor y se tendrá el primer término del cociente; se multiplica éste por el divisor y el producto se resta del dividendo; se divide el primer término del resto por el primero del divisor y se tendrá el segundo término del cociente; se multiplica éste por el divisor y el producto se resta del dividendo; y así se continúa hasta obtener un resto cero ó tal que su primer término no sea divisible por el primero del divisor, en cuyo caso, dicho resto será el de la división.

Escolio. La división de dos polinomios es inexacta cuando el primero y último término del dividendo no son divisibles por el primero del divisor y cuando el primer término de alguno de los dividendos parciales no sea divisible por el primero del divisor, en cuyo caso, este dividendo será el resto de la división.

Observación 1.ª En la práctica, se abrevia la operación de restar de cada dividendo parcial, el producto del divisor por el respectivo término del cociente, *omitiendo la escritura del primer término de dicho producto y cambiando los signos á todos los demás, antes de escribirlos en su lugar correspondiente, que es debajo de los semejantes del dividendo.*

Ejemplo. *Dividir el polinomio*

$32a^3b^2+90b^5-32a^4b+92a^2b^3+14a^5-94ab^4$, *por el polinomio* $5a^2b+9b^3+7a^3-4ab^2$.

Ordenando ambos polinomios respecto á la letra a, se dispone la operación en esta forma :

$$\begin{array}{l|l}
14a^5-32a^4b+32a^3b^2+92a^2b^3-94ab^4+90b^5 & 7a^3+5a^2b-4ab^2+9b^3 \\ \cline{2-2}
\quad -10a^4b+\ 8a^3b^2-18a^2b^3 & 2a^2-6ab+10b^2 \\ \cline{1-1}
\quad -42a^4b+40a^3b^2+74a^2b^3 & \\
\qquad\qquad +30a^3b^2-24a^2b^3+54ab^4 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 70a^3b^2+50a^2b^3-40ab^4 & \\
\qquad\qquad\qquad -50a^2b^3+40ab^4-90b^5 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad\quad 0 \qquad 0 &
\end{array}$$

Observación 2.ª Cuando varios términos de uno ó de los dos polinomios propuestos tengan *la misma potencia de la letra ordenatriz*, se separa dicha potencia como factor común, se considera como coeficiente suyo la suma algebráica de las cantidades á que afecta como tal factor común y se verifican, por la regla general, las divisiones del coeficiente del primer término de cada dividendo parcial por el del primero del divisor.

Ejemplo. *Dividir el polinomio*
$8x^4-8ax^3+6bx^3+32a^2x^2-15abx^2+15b^2x^2+7a^3x+24a^2bx+5ab^2x+3b^3x+24a^4-43a^3b+9a^2b^2-19ab^3-4b^4$, *por el polinomio* $2x^2-3ax+bx+8a^2-ab+4b^2$.

La operación se dispone y verifica en esta forma :

Dividendo.

$8x^4-8a$ $+6b$	x^3+32a^2 $-15ab$ $+15b^2$	x^2+7a^3 $+24a^2b$ $+5ab^2$ $+3b^3$	$x+24a^4$ $-43a^3b$ $+9a^2b^2$ $-19ab^3$ $-4b^4$
$+12a$ $-4b$	$-32a^2$ $+4ab$ $-16b^2$		
$+4a$ $+2b$	$-11ab$ $-b^2$		
	$+6a^2$ $-2ab$ $+3ab$ $-b^2$	$-16a^3$ $+2a^2b$ $-8ab^2$ $-8a^2b$ $+ab^2$ $-4b^3$	
	$+6a^2$ $-10ab$ $-2b^2$	$-9a^3$ $+18a^2b$ $-2ab^2$ $-b^3$	
		$+9a^3$ $-3a^2b$ $-15a^2b$ $+5ab^2$ $-3ab^2$ $+b^3$	$-24a^4$ $+3a^3b$ $-12a^2b^2$ $+40a^3b$ $-5a^2b^2$ $+20ab^3$ $+8a^2b^2$ $-ab^3$ $+4b^4$
		0	0

Divisor.

$2x^2-3a$ $+b$	$x+8a^2$ $-ab$ $+4b^2$

Cociente.

$4x^2+2a$ $+b$	$x+3a^2$ $-5ab$ $-b^2$

DIVISIONES PARCIALES.

1.ª $\ 8 \,|\, \underline{2}$; 4

2.ª $\ 4a+2b \,|\, \underline{2}$; $2a+b$

3.ª $\ 6a^2-10ab-2b^2 \,|\, \underline{2}$; $3a^2-5ab-b^2$

Observación 3.ª Si el divisor carece de alguna de las letras del dividendo, conviene ordenar éste respecto á ella y dividir separadamente por el divisor cada uno de los coeficientes de dicha letra en los sucesivos términos del dividendo, con lo que se obtendrán los coeficientes de los respectivos términos del cociente.

Pues si el dividendo es el polinomio

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\dots+Kx+L,$$

y el divisor es otro polinomio independiente de la letra x, al que se puede representar por M, resultará:

$$(Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\dots+Kx+L):M$$
$$=(A:M)x^m+(B:M)x^{m-1}+(C:M)x^{m-2}+\dots+(K:M)x+L:M.$$

Ejemplo. *Dividir el polinomio* $30a^5bx^2-20a^4b^2x^2-25a^3b^3x^2+18a^4b^2x-12a^3b^3x-15a^2b^4x-42a^3b^3+28a^2b^4+35ab^5$, *por el polinomio, independiente de* x, $6a^2-4ab-5b^2$.

La operación se dispone en esta forma:

$$\left\{\begin{array}{r|r|r} 30a^5b & x^2+18a^4b^2 & x-42a^3b^3 \\ -20a^4b^2 & -12a^3b^3 & +28a^2b^4 \\ -25a^3b^3 & -15a^2b^4 & +35ab^5 \end{array}\right\} : 6a^2-4ab-5b^2$$

y se verifica, ejecutando las siguientes divisiones parciales:

$$(30a^5b-20a^4b^2-25a^3b^3):(6a^2-4ab-5b^2)=5a^3b$$
$$(18a^4b^2-12a^3b^3-15a^2b^4):(6a^2-4ab-5b^2)=3a^2b^2$$
$$(-42a^3b^3+28a^2b^4+35ab^5):(6a^2-4ab-5b^2)=-7ab^2$$

por las que se obtiene el cociente pedido, $5a^3bx^2+3a^2b^2x-7ab^3$.

37. División de un monomio por un polinomio.

Considerando al dividendo como un polinomio cuyos términos, menos uno, se han reducido á cero y aplicando á este caso el razonamiento empleado en la división de dos polinomios, se deduce que la de un monomio por un polinomio que, por lo ya dicho, es un caso particular de la de dos polinomios, se verificará por la regla general de la división de éstos.

Ejemplo. *Dividir el monomio* $6a^4b^2$, *por el binomio* $2ab-4b^2$.

La operación se dispondrá en esta forma:

$$\begin{array}{l|l} 6a^4b^2 & 2ab-4b^2 \\ \hline \quad +12a^3b^3 & 3a^3b+6a^2b^2+12ab^3+24b^4 \\ \qquad +24a^2b^4 & \\ \qquad\quad +48ab^5 & \\ \qquad\qquad +96b^6 & \end{array}$$

Escolio. La división de un monomio por un polinomio es siempre inexacta, pues no es posible hallar una expresión algebráica que, multiplicada por el polinomio divisor, dé un producto igual al monomio dividendo (27-2.ª).

38. Teorema. *Si se divide un polinomio entero, completo y ordenado respecto á una letra* x, *por el binomio* x—a, *se verificará:*

1.º *Que el cociente es un polinomio, también ordenado y completo respecto á* x, *de un grado inferior en una unidad al del propuesto, y en el que el coeficiente del primer término es el mismo que el del primero del dividendo y el de cada uno de los términos siguientes es igual al del que ocupa el mismo lugar en el dividendo, mas el producto, por* a, *del inmediato anterior del cociente.*

2.º *Que el resto es igual al resultado de sustituir* a *en vez de* x *en el polinomio propuesto.*

En efecto: 1.º sea el dividendo el polinomio

$$C_0x^m+C_1x^{m-1}+C_2x^{m-2}+C_3x^{m-3}+\dots+C_nx^{m-n}+C_m$$

en el que $C_0\ C_1\ C_2\ C_3\dots C_n,\dots C_m$ representan los coeficientes de los términos 1.º, 2.º, 3.º, 4.º... *enésimo más uno* y último (*).

La marcha de la operación será la siguiente:

$$\begin{array}{llll|l}
C_0x^m+C_1 & x^{m-1}+C_2 & x^{m-2}+C_3 & x^{m-3}+\dots & x-a \\ \cline{5-5}
+C_0a & & & & C_0x^{m-1}+\left.\begin{array}{l}C_1\\+C_0a\end{array}\right| x^{m-2}+\left.\begin{array}{l}C_2\\+C_1a\\+C_0a^2\end{array}\right| x^{m-3}+\dots \\ \cline{1-2}
C_1 & x^{m-1}+C_2 & x^{m-2}+\dots & & \\
+C_0a & \quad +C_1a & & & \\
 & \quad +C_0a^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & C_2 & x^{m-2}+C_3 & x^{m-3}+\dots & \\
 & +C_1a & \quad +C_2a & & \\
 & +C_0a^2 & \quad +C_1a^2 & & \\
 & & \quad +C_0a^3 & & \\ \cline{3-4}
 & & +C_3 & x^{m-3}+\dots & \\
 & & +C_2a & & \\
 & & +C_1a^2 & & \\
 & & +C_0a^3 & &
\end{array}$$

Si suponemos que el n^{mo} término del cociente obtenido conforme á dicha ley sea

$$(C_{n-1}+C_{n-2}a+\dots+C_0a^{n-1})x^{m-n},$$

se obtendrá para primer término del n^{mo} resto

$$(C_n+C_{n-1}a+C_{n-2}a^2+\dots+C_0a^n)x^{m-n}$$

y, al dividirlo por x, se hallará el término $(n+1)^{mo}$ del cociente, que será

$$(C_n+C_{n-1}a+C_{n-2}a^2+\dots+C_0a^n)x^{m-n-1}$$

el cual aparece también formado según la ley indicada y, como ésta se verifica en el término 3.º, se verificará en el 4.º 5.º, etc. y, por tanto, será general.

(*) Notación muy usada en Algebra cuando, más bien que los valores de los coeficientes (que expuestos en esta forma se llaman *indeterminados*), se quiere indicar el lugar que cada uno ocupa en el polinomio.

2.° Si designamos por Q el cociente obtenido que, por la marcha de la operación, constará de un número limitado de términos, y por R el resto, se tiene

$$C_0x^m+C_1x^{m-1}+C_2x^{m-2}+\ldots C_nx^{m-n}+\ldots+C_m=(x-a)Q+R$$

cuya igualdad es cierta para cualquier valor de x: de modo que haciendo $x=a$, se tendrá la nueva igualdad

$$C_0a^m+C_1a^{m-1}+C_2a^{m-2}+\ldots+C_na^{m-n}+\ldots+C_m=R$$

cuyo primer miembro es, evidentemente, el resultado de sustituir a en vez de x, en el polinomio propuesto.

Corolario. *Si un polinomio entero y completo respecto á una letra* x *se reduce á cero, cuando en vez de esta letra se sustituye un valor* a, *dicho polinomio es divisible por* x—a: pues el resto, en este caso, es cero.

Escolio 1.° Como el resto

$$C_0a^m+C_1a^{m-1}+C_2a^{m-2}+\ldots+C_na^{m-n}+\ldots+C_m$$

se puede poner en la forma

$$[((\ldots((C_0a+C_1)a+C_2)a+\ldots+C_{m-2})a+C_{m-1}]a+C_m,$$

dedúcese de aquí la siguiente regla

Para hallar el valor numérico de un polinomio de una sola variable, ordenado descendentemente, cuando en vez de ella se sustituye un número, se le hace completo, si no lo es, para lo cual se suponen iguales á cero los coeficientes de los términos que le falten; se multiplica el coeficiente de su primer término por dicho número y al producto se agrega el coeficiente del segundo; esta suma se multiplica por el número; al producto se agrega el coeficiente del tercer término y así sucesivamente hasta agregar el último.

Ejemplo. *Hallar, para* $x=3$, *el valor numérico del polinomio* $5x^6+6x^5-3x^3-20x+8$.

Completándolo se tiene $5x^6+6x^5+0x^4-3x^3+0x^2-20x+8$ y se dirá: $5\times3+6=21$; $21\times3+0=63$; $63\times3-3=186$; $186\times3+0=558$; $558\times3-20=1654$; $1654\times3+8=4970$, que es el valor pedido.

Escolio 2.° Como la diferencia x^m-a^m se reduce á cero, reemplazando x por a, y el cociente de su división por $x-a$, según lo demostrado en la primera parte del teorema, es

$$x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\ldots+a^{m-3}x^2+a^{m-2}x+a^{m-1},$$

se tiene que la *diferencia de las potencias del mismo grado de dos cantidades es divisible por la diferencia de éstas y que el cociente es un polinomio homogéneo, de grado inferior en una unidad al del dividendo, de términos positivos y de coeficiente numérico igual á la unidad.*

Así, $x^5-a^5 : x-a=x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4$.

CAPÍTULO V.

DE LA ELEVACIÓN Á POTENCIAS.

39. La elevación á potencias ó potenciación de expresiones algebráicas *tiene por objeto, en general, hallar una expresión*, llamada, POTENCIA, *que sea factorialmente respecto á otra, llamada*, BASE, *lo que una tercera, llamada* EXPONENTE, *sea adicionalmente respecto á la unidad entera y positiva.*

De esta definición se desprende que *si el exponente es entero y positivo, la potencia es el producto de tantos factores iguales á la base como unidades tiene el exponente* (*).

40. Teorema. *Toda potencia es positiva, excepto en el caso de ser la base negativa é impar el exponente.*

En efecto, siendo m un número entero y positivo, se tendrá

$a^m=aaa\ldots a$, cuyo producto es siempre positivo,
y $(-a)^m=(-a)(-a)(-a)\ldots(-a)$, cuyo producto es positivo, si m es par, y negativo, si m es impar (29).

Corolario. *Si en una potencia indicada se cambia el signo á la base, la potencia no cambia de signo, si el exponente es par, pero sí, si es impar:* pues, en el primer caso, la potencia es el producto de un número par de factores y, por tanto, positivo, sea cualquiera su signo, y, en el segundo, el de un número impar de ellos, que será positivo ó negativo, según que su signo sea positivo ó negativo.

Así, designando por P el valor absoluto de una potencia de a, se tendrá

$$(\pm a)^{2n}=P$$
$$(+a)^{2n+1}=a^{2n+1}=P$$
$$(-a)^{2n+1}=-P.$$

41. En el estudio de la elevación á potencias de una expresión algebráica conviene considerar la de un monomio y la de un polinomio.

(*) Mientras otra cosa no se exprese, se entenderá que el exponente es un número entero y positivo, dejando para más adelante el exponer la significación de los exponentes negativos y la de los fraccionarios.

42. Elevación de un monomio á una potencia.

Siendo un monomio el producto indicado de varios factores, la elevación del monomio Ca^mb^nd, por ejemplo, á la potencia del grado p, dará

$$(Ca^mb^nd)^p=C^p(a^m)^p(b^n)^pd^p=C^pa^{mp}b^{np}d^p \text{ (Arit. 63 y 65).}$$

De aquí se deduce la siguiente regla:

Para elevar un monomio á una potencia se eleva el coeficiente á la potencia indicada y se multiplican por el exponente de ésta, los exponentes de las letras del monomio.

Ejemplos.

1.° $(9a^2bc^3d^4)^2=81a^4b^2c^6d^8$
2.° $(-2ab^5c^3)^4=16a^4b^{20}c^{12}$
3.° $(3a^2b)^3=27a^6b^3$
4.° $(-5a^4b^2c)^5=-3125a^{20}b^{10}c^5$.

43. Elevación de un polinomio á una potencia.

La elevación de un polinomio cualquiera á una potencia se obtiene, naturalmente, hallando el producto de tantos factores iguales á él como unidades tenga el exponente.

Sin embargo, como esta obtención es muy enojosa, es preferible hacerla depender de la de un binomio, en cuanto se conozca la ley del desarrollo de una potencia de cualquier grado de éste, lo que se consigue mediante una teoría cuyos principios elementales, suficientes á este objeto, se exponen en las siguientes:

44. Nociones de combinatoria.

Si varias letras a, b, c, d, e, etc. ú objetos representados por ellas se agrupan una á una, dos á dos, tres á tres, etc. de todos los modos posibles, pero no entrando cada letra más que una vez en cada agrupación, éstas se clasifican por órdenes, llamándose de primero, segundo, tercero, ... enésimo órden, ó primarias, binarias, ternarias, ... de n á n, según que, en cada una de ellas, haya una, dos, tres, ... n, letras.

Dichas agrupaciones, según las condiciones de su formación, reciben los nombres particulares de coordinaciones, permutaciones y combinaciones.

45. *Coordinaciones son los grupos de igual número de letras que se diferencian, ya en el órden de éstas, ya en alguna de ellas:* así, abc, acb y dcb son tres coordinaciones.

Para hallar el número de coordinaciones de cualquier órden que se pueden formar con m letras, a, b, c, d, etc., basta considerar:

1.° que es desde luego evidente que, tomándolas una á una, se formarán m coordinaciones *primarias.*

2.° que, colocando al lado de cada letra, cada una de las demás, como se indica al márgen, se formarán todas las coordinaciones binarias posibles, y como de cada coordinación primaria se obtendrán $m-1$ binarias, las m letras darán $m(m-1)$ coordinaciones *binarias.*

ab,	ac,	ad...
ba,	bc,	bd...
ca,	cb,	cd...
da,	db,	dc...

3.° que, colocando al lado de cada coordinación binaria, cada una de las letras que no entran en ella, se formarán todas las ternarias posibles, y como de cada coordinación binaria se obtendrán $m-2$ ternarias, las m letras darán $m(m-1)(m-2)$ coordinaciones *ternarias.*

4.° que, colocando al lado de cada coordinación de cualquier órden, cada una de las letras que no entran en ella, se formarán todas las posibles del órden siguiente, cuyo número estará expresado por un producto de factores sucesivamente decrecientes, desde m hasta m ménos el órden de la coordinación, disminuido en una unidad; luego el número, O_n, de coordinaciones del órden n que se pueden formar con m letras será

$$O_n=m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)] \quad (\alpha).$$

46. *Permutaciones son las coordinaciones que sólo se diferencian en el órden de sus letras:* así, las coordinaciones abc, acb y cab forman una sola permutación, por lo que, considerándolas como productos indicados, se las llama también *productos iguales.*

Para hallar el número de permutaciones que se pueden formar con un número dado de letras basta considerar que las permutaciones de n letras no son otra cosa que sus coordinaciones del órden n, de modo que, haciendo $m=n$ en la fórmula (α), el número, P_n, de permutaciones de n letras será $P_n=n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]=n(n-1)(n-2)\ldots2.1$

$$\text{ó sea } P_n=1.2\ldots(n-1)n \quad (\beta) \text{ (*)}.$$

(*) Los Autores modernos llaman *factorial enésima* al producto 1,2,3... n de n factores consecutivos, que se indica abreviadamente $n!$ ó $\underline{|n}$

47. *Combinaciones son las coordinaciones que sólo se diferencian en alguna ó algunas de sus letras :* así, las coordinaciones abc, dbc y cde forman tres combinaciones, por lo que, considerándolas como productos indicados, se las llama también *productos diferentes*.

Para hallar el número de combinaciones de cualquier órden que se pueden formar con m letras basta considerar que si se forman las coordinaciones del órden n con las m letras, cada uno de los productos, diferentes de los demás, estará repetido tantas veces como productos iguales se pueden formar con n letras, de modo que, designando por C_n el número de combinaciones del órden n que se pueden formar con m letras, se tendrá, $O_n = C_n \times P_n$; y de aquí, por las igualdades (α) y (δ) (45 y 46),

$$C_n = O_n : P_n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{1.2.3\ldots n} \;(^*).$$

48. *El número de combinaciones del órden* n *de* m *letras es el mismo que el de las combinaciones del órden* m—n *de las mismas letras.*

En efecto, al tomar n de las m letras para formar una combinación, quedarán $m-n$ letras, que formarán otra; luego á cada una de las combinaciones del órden m corresponde otra de las del órden $m-n$ y, por tanto, el número de unas y otras es el mismo, es decir, que $C_n = C_{m-n}$.

49. *La suma de las combinaciones del órden* n *de* m+1 *letras es igual á la suma de las del mismo órden de las* m *primeras letras, más el producto de sus combinaciones del órden* n—1, *por la nueva letra.*

En efecto, si designamos por ${}^mS_{n-1}$ la suma de las combinaciones del órden $n-1$ que se pueden formar con m letras y suponemos que, al lado de cada una de ellas, se coloca una nueva letra, l, la expresión ${}^mS_{n-1}\times l$ será la suma de las combinaciones del órden n que producirá esta letra, y agregando esta suma á ${}^mS_n$, expresión de las del órden n producidas por las m letras, se tendrán las del mismo órden que producirán las $m+1$ letras y, por tanto, será ${}^{m+1}S_n = {}^mS_n + {}^mS_{n-1}\times l$.

(*) Obsérvese que el número de combinaciones de cualquier órden que se pueden formar con m letras se expresa por una fracción, cuyo denominador es la serie natural de los números 1 2 3 . etc. hasta el igual al órden de la combinación, y cuyo numerador es el producto de tantos factores descendentes, de unidad en unidad, á partir de m, como factores tiene el denominador.

50. *Si se multiplican varios factores binomios de la forma* $x+a$, $x+b$, $x+c$ . ..., etc., *cuyo primer término,* x, *es común á todos, el producto tendrá estas condiciones:*

1.ª *El exponente de* x, *en su primer término, es igual al número de factores binomios, y, en los términos siguientes, va disminuyendo, de unidad en unidad, hasta que en el último es cero.*

2.ª *El coeficiente del primer término es la unidad; el del segundo es la suma de los segundos términos de los factores binomios; el del tercero es la suma de las combinaciones binarias de dichos segundos términos; el del cuarto es la suma de las combinaciones ternarias de los mismos y así sucesivamente hasta el último término, que es el producto de todos los segundos términos de los binomios.*

En efecto, el producto de dos factores binomios de la forma indicada cumple con las condiciones dichas, pues

$$(x+a)(x+b) = x^2+ax+bx+ab = x^2 + \left.\begin{matrix}a\\+b\end{matrix}\right| x + ab,$$

así como también el de tres, pues

$$(x+a)(x+b)(x+c) = (x^2+ax+bx+ab)(x+c)$$
$$= x^3+ax^2+bx^2+abx+cx^2+acx+bcx+abc$$
$$= x^3 + \left.\begin{matrix}a\\+b\\+c\end{matrix}\right| x^2 + \left.\begin{matrix}ab\\+ac\\+bc\end{matrix}\right| x + abc$$

Para ver si esta ley es general, sea cualquiera el número de factores, demostremos que habiéndose verificado en el producto de un número dado de factores, se verificará en el de un factor más.

Para ello, supongamos que el producto de m factores sea, conforme á dicha ley,

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+k)$$
$$= x^m + {}^mS_1 x^{m-1} + {}^mS_2 x^{m-2} + \ldots + {}^mS_{n-1} x^{m-(n-1)} + {}^mS_n x^{m-n} + \ldots + abc\ldots k$$

donde ${}^mS_1$ representa la suma de los m segundos términos de los factores, ${}^mS_2$ la suma de sus combinaciones binarias y, en general, ${}^mS_n$ la de sus combinaciones del órden n.

Multipliquemos el producto dado por un nuevo factor binomio, $x+l$, y tendremos

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+k)(x+l)$$
$$= (x^m + {}^mS_1 x^{m-1} + {}^mS_2 x^{m-2} + \ldots + {}^mS_{n-1} x^{m-(n-1)} + {}^mS_n x^{m-n} + \ldots + abc\ldots k)(x+l)$$

ó sea, $(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+k)(x+l)$

$$
\begin{array}{l|l|l|l}
= x^{m+1} + {}^{m}S_1 & x^{m} + {}^{m}S_2 & x^{m-1} + \ldots + {}^{m}S_n & x^{m-n} + \ldots \\
\quad + l & \quad + {}^{m}S_1 l & \quad + {}^{m}S_{n-1} l & \quad + abc\ldots kl
\end{array}
$$

en cuyo producto vemos que el exponente de x, en su primer término, es igual al número de factores binomios y que en los términos siguientes va disminuyendo de unidad en unidad, hasta que en el último es *cero*: que el coeficiente del primer término es la unidad, el del segundo es la suma de los segundos términos de los $m+1$ factores binomios, el del tercero es, por lo ya demostrado (**49**), la suma de las combinaciones binarias de dichos términos, y el del que ocupa el lugar $n+1$ es, por la misma razón, la suma de las combinaciones del órden n de los mismos.

Ahora bien, hemos visto que la ley se verifica en el producto de tres factores binomios, luego se verificará en el de *cuatro, cinco, seis*, . ., etc. y, por tanto, es cierta y general.

Escolio. Si en el producto de m factores binomios $(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\ldots\,(x+h)(x+i)(x+k)$

$$
\begin{array}{l|l|l|}
= x^{m} + a & x^{m-1} + ab & x^{m-2} + \ldots + abc\ldots\; x^{m-n} + \ldots + abc..hik \\
\quad +b & \quad +ac & \quad + \\
\quad +c & \quad . & \quad . \\
\quad + & \quad +bc & \quad . \\
\quad . & \quad +bd & \quad . \\
\quad . & \quad + & \quad . \\
\quad +h & \quad . & \quad . \\
\quad +i & \quad +hk & \quad . \\
\quad +k & \quad +ik & \quad +..hik
\end{array}
$$

se suponen iguales á a todos los segundos términos, se tendrá

$$(x+a)^{m} = x^{m} + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^{2}x^{m-2} + \ldots$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}a^{n}x^{m-n} + \ldots + a^{m},$$

que es la notable expresión, conocida con el nombre de *fórmula del binomio* ó *fórmula de Newton* (*).

(*) Empleando la notación de factorial (Pág. 33. *Nota* *), se escribe esta fórmula en la forma:

$$(x+a)^{m} = x^{m} + \frac{m}{1!}ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2!}a^{2}x^{m-2} + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{n!}a^{n}x^{m-n} + \ldots + a^{m}$$

ó $$(x+a)^{m} = x^{m} + \frac{m}{\underline{|1}}ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{\underline{|2}}a^{2}x^{m-2} + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{\underline{|n}}a^{n}x^{m-n} + \ldots + a^{m}$$

51. El segundo miembro de la fórmula de Newton tiene, entre otras, las siguientes propiedades:

1.ª *Es un polinomio de* $m+1$ *términos, homogéneo y del grado* m *respecto á* x *y á* a; pues contiene $m+1$ potencias sucesivas de cada una de estas letras y, en todos sus términos, la suma de los exponentes de ámbas es igual á m, indicando el de x el número de términos que le preceden y el de a el de los que le siguen.

2.ª *El coeficiente numérico de cada término es el número de combinaciones de* m *letras, tomadas tantas á tantas, como términos le preceden, y se forma del anterior, multiplicándole por el exponente de* x *y dividiéndole por el de* a, *aumentado en una unidad;* pues, designando por T_{n+1} el término que ocupa el lugar $n+1$, al que se llama *término general*, se tiene

$$T_{n+1} = \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1\,.\,2\ldots n}a^{n}x^{m-n}$$

y el siguiente, ó sea el que ocupa el lugar $n+2$, será

$$T_{n+2} = \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)](m-n)}{1\,.\,2\ldots n(n+1)}a^{n+1}x^{m-(n+1)}$$

$$= \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1\,.\,2\ldots n}\times\frac{m-n}{n+1}a^{n+1}x^{m-(n+1)}.$$

3.ª *Los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son iguales;* pues el que tenga delante de sí n términos tendrá por coeficiente C_n y el que tenga detrás de sí n términos tendrá delante $m+1-(n+1)=m-n$ y su coeficiente será C_{m-n}, que es igual á C_n (**48**).

4.ª *Si* x *y* a *son positivos, lo serán también todos los términos del desarrollo de cualquier potencia del binomio* $x+a$; *si son negativos, serán dichos términos positivos ó negativos, según que el exponente sea par ó impar; y si uno de los términos,* x *ó* a, *es positivo y el otro negativo, los del desarrollo serán alternativamente positivos y negativos;* pues, en el primer caso, se tendrá siempre un producto de factores positivos; en el segundo, poniendo de manifiesto los signos, se tendrá

$$(-x-a)^{2n} = (-(x+a))^{2n} = (x+a)^{2n} \;(\mathbf{40})$$

$$\text{y } (-x-a)^{2n+1} = (-(x+a))^{2n+1} = -(x+a)^{2n+1};$$

y, en el tercero, las potencias impares del término negativo serán negativas y, por tanto, negativos también los términos del desarrollo que contengan alguna de ellas.

52. De la fórmula de NEWTON y de las propiedades de su segundo miembro se deduce la siguiente regla:

Para elevar un binomio á una potencia se eleva á ella su primer término y se tendrá el primero de la potencia; se multiplica el coeficiente de éste por el exponente que en él tiene el primer término del binomio y se divide por el del segundo, más una unidad; se aumenta en 1 el exponente del segundo término del binomio y se disminuye también en 1 el del primero, y así se continúa hasta obtener la mitad de los términos del desarrollo, si el exponente de la potencia pedida es par, ó la mitad más uno, si es impar, y se reproducen después en órden inverso los coeficientes ya obtenidos, siguiendo la misma ley de crecimiento y decrecimiento sucesivo de los exponentes.

Ejemplos.

1.° $(3ax^2+2a^2x)^5=(3ax^2)^5+5(2a^2x)(3ax^2)^4+10(2a^2x)^2(3ax^2)^3$
$+10(2a^2x)^3(3ax^2)^2+5(2a^2x)^4(3ax^2)+(2a^2x)^5$
$=243a^5x^{10}+810a^6x^9+1080a^7x^8+720a^8x^7$
$+240a^9x^6+32a^{10}x^5$

2.° $(3ax^2-2a^2x)^5=243a^5x^{10}-810a^6x^9+1080a^7x^8-720a^8x^7$
$+240a^9x^6-32a^{10}x^5$

3.° $(3ax^2+2a^2x)^6=(3ax^2)^6+6(2a^2x)(3ax^2)^5+15(2a^2x)^2(3ax^2)^4$
$+20(2a^2x)^3(3ax^2)^3+15(2a^2x)^4(3ax^2)^2$
$+6(2a^2x)^5(3ax^2)+(2a^2x)^6$
$=729a^6x^{12}+2916a^7x^{11}+4860a^8x^{10}+4320a^9x^9$
$+2160a^{10}x^8+576a^{11}x^7+64a^{12}x^6.$

4.° $(3ax^2-2a^2x)^6=729a^6x^{12}-2916a^7x^{11}+4860a^8x^{10}-4320a^9x^9$
$+2160a^{10}x^8-576a^{11}x^7+64a^{12}x^6.$

Observación. Si representamos por a y b las decenas y las unidades de la raíz del grado m de un número entero y aplicamos la fórmula de NEWTON al binomio $(a.10+b)^m$, se tiene la igualdad

$$a.10+b)^m=(a.10)^m+mb(a.10)^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}b(a.10)^{m-2}+\ldots$$
$$+\frac{m(m-1).\,[m-(n-1)]}{1.2\ldots n}b^n(a.10)^{m-n}+\ldots+b^m$$

de la que, haciendo á m igual á 4, 5, etc., y, por consideraciones análogas á las hechas al tratar del cuadrado y cubo de la suma de dos números (ARIT. 67 y 68) y de las raíces cuadrada y cúbica de los enteros (ARIT. 72 y 76), se obtendrían las reglas para extraer de éstos la raíz cuarta, quinta, etc.

53. Potenciación de un polinomio. Conocida la potenciación de un binomio, como todo polinomio se puede considerar como un binomio cuyo segundo término sea la suma de todos los siguientes al primero, de tan sencilla consideración se desprende la siguiente regla:

Para elevar un polinomio á una potencia se le considera como un binomio, cuyo segundo término sea la suma de todos los siguientes al primero; se desarrolla la potencia de este binomio; las potencias del mismo grado de los polinomios resultantes en el desarrollo se consideran como la de un binomio de condiciones análogas á la indicada y así sucesivamente hasta obtener la potenciación, del grado propuesto, de un binomio cuyos términos sean los dos últimos del polinomio dado.

Aplicando esta regla al cuadrado y cubo de un polinomio, $a+b+c+d$, se tendrá:

1.° $(a+b+c+d)^2=a^2+2a(b+c+d)+(b+c+d)^2$
$=a^2+2a(b+c+d)+b^2+2b(c+d)+(c+d)^2$
$=a^2+2a(b+c+d)+b^2+2b(c+d)$
$+c^2+2cd+d^2$

ó sea $(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2a(b+c+d)$
$+2b(c+d)+2cd$

lo que indica que *el cuadrado de un polinomio es igual á la suma de los cuadrados de sus términos, más el duplo del producto de cada uno por la suma de los que le siguen.*

2.° $(a+b+c+d)^3=a^3+3a^2(b+c+d)+3a(b+c+d)^2$
$+(b+c+d)^3$
$=a^3+3a^2(b+c+d)+3a(b+c+d)^2$
$+b^3+3b^2(c+d)+3b(c+d)^2+(c+d)^3$
$=a^3+3a^2(b+c+d)+3a(b+c+d)^2$
$+b^3+3b^2(c+d)+3b(c+d)^2$
$+c^3+3c^2d+3cd^2+d^3$

ó sea $(a+b+c+d)^3=a^3+b^3+c^3+d^3+3a^2(b+c+d)$
$+3b^2(c+d)+3c^2d$
$+3a(b+c+d)^2+3b(c+d)^2+3cd^2$

lo que indica que *el cubo de un polinomio es igual á la suma de los cubos de sus términos, más el triplo del cuadrado de cada uno por la suma de los que le siguen, más el* *triplo de cada uno por el cuadrado de la suma de los que le siguen* (*).

Ejemplos.

1.º

$$
\begin{aligned}
(5x^3-4x^2y+7xy^2-3y^3)^2 &= 25x^6+16x^4y^2+49x^2y^4+9y^6\\
&\quad -40x^5y+70x^4y^2-30x^3y^3\\
&\quad -56x^3y^3+24x^2y^4-42xy^5\\
&= 25x^6-40x^5y+86x^4y^2-86x^3y^3\\
&\quad +73x^2y^4-42xy^5+9y^6.
\end{aligned}
$$

2.º

$$
\begin{aligned}
(2x^2-8xy+9y^2-5)^3 &= 8x^6-512x^3y^3+729y^6-125\\
&\quad +3[4x^4(-8xy+9y^2-5)+64x^2y^2(9y^2-5)+81y^4(-5)]\\
&\quad +3[2x^2(-8xy+9y^2-5)^2-8xy(9y^2-5)^2+9y^2\times 25]\\
&= 8x^6-512x^3y^3+729y^6-125\\
&\quad -96x^5y+108x^4y^2-60x^4+1728x^2y^4-960x^2y^2-1215y^4\\
&\quad +6x^2(64x^2y^2+81y^4+25-144xy^3+80xy-90y^2)\\
&\quad -24xy(81y^4+25-90y^2)+675y^2\\
&= 8x^6-512x^3y^3+729y^6-125\\
&\quad -96x^5y+108x^4y^2-60x^4+1728x^2y^4-960x^2y^2-1215y^4\\
&\quad +384x^4y^2+486x^2y^4+150x^2-864x^3y^3+480x^3y-540x^2y^2\\
&\quad -1944xy^5-600xy+2160xy^3+675y^2\\
&= 8x^6-96x^5y+492x^4y^2-60x^4-1376x^3y^3+480x^3y\\
&\quad +2214x^2y^4-1500x^2y^2+150x^2-1944xy^5\\
&\quad +2160xy^3-600xy+729y^6-1215y^4+675y^2-125.
\end{aligned}
$$

(*) Desarrollando los cuadrados de polinomios en el segundo miembro de la igualdad

$$
\begin{aligned}
(a+b+c+d)^3 &= a^3+b^3+c^3+d^3+3a^2(b+c+d)+3b^2(c+d)+3c^2d\\
&\quad +3a(b+c+d)^2+3b(c+d)^2+3cd^2
\end{aligned}
$$

se tiene

$$
\begin{aligned}
(a+b+c+d)^3 &= a^3+b^3+c^3+d^3+3a^2(b+c+d)+3b^2(c+d)+3c^2d\\
&\quad +3a(b^2+c^2+d^2+2bc+2bd+2cd)+3b(c^2+d^2+2cd)+3cd^2
\end{aligned}
$$

y, efectuando los productos por los términos que tienen el factor 2,

$$
\begin{aligned}
(a+b+c+d)^3 &= a^3+b^3+c^3+d^3+3a^2(b+c+d)+3b^2(c+d)+3c^2d\\
&\quad +3a(b^2+c^2+d^2)+3b(c^2+d^2)+3cd^2\\
&\quad +6abc+6abd+6acd+6bcd,
\end{aligned}
$$

lo que indica que también *el cubo de un polinomio es igual á la suma de los cubos de sus términos, más el triplo del cuadrado de cada uno por la suma de los que le siguen, más el triplo de cada uno por la suma de los cuadrados de los que le siguen, más el séxtuplo de sus combinaciones ternarias.*

CAPÍTULO VI.

DE LA EXTRACCIÓN DE RAICES.

54. La extracción de raíces de expresiones algebráicas *tiene por objeto hallar una expresión, llamada* RAIZ, *cuya potencia de un grado dado sea igual á otra expresión dada, llamada* RADICANDO.

55. Teorema. *Las raices de grado impar son del mismo signo que el radicando y las de grado par tienen el signo de ambigüedad* ($\pm$), *si el radicando es positivo, pero no tienen modo de ser alguno, si es negativo.*

En efecto, si r es la raíz del grado m de A, se tendrá $\sqrt[m]{A}=r$, en cuya igualdad, si m es impar, r será positivo ó negativo, según que A sea lo uno ó lo otro, pues las potencias impares tienen el mismo signo que la base (**40**); si m es par y A es positivo, r podrá ser positivo ó negativo, pues toda potencia par es positiva, pero si A es negativo, no se puede hallar un modo de ser para r, pues ninguna cantidad positiva ni negativa, elevada á una potencia par, dá un resultado negativo.

56. En el estudio de la extracción de raíces de expresiones algebráicas conviene distinguir la de un monomio y la de un polinomio.

57. Extracción de la raíz de un monomio.

La raíz de un monomio ha de ser necesariamente otro monomio; de modo, que si la raíz del grado m del monomio Ca^nb^q es $C'a^xb^y$, se tendrá $\sqrt[m]{Ca^nb^q}=C'a^xb^y$ y, por tanto, $(C'a^xb^y)^m=Ca^nb^q$ ó sea $C'^ma^{mx}b^{my}=Ca^nb^q$, de donde resulta $C'^m=C$, $a^{mx}=a^n$ y $b^{my}=b^q$, y de aquí, $C'=\sqrt[m]{C}$, $mx=n$, $my=q$ ó sea $x=n:m$; $y=q:m$; luego, $\sqrt[m]{Ca^nb^q}=\sqrt[m]{Ca^{n:m}\;b^{q:m}}$.

De aquí se deduce la siguiente regla:

Para extraer la raíz de cualquier grado de un monomio se extrae la raíz del coeficiente y se dividen por el índice los exponentes de las letras del monomio.

Ejemplos.

$$\sqrt{64a^4b^2c^6}=\pm 8a^2bc^3;\ \sqrt[3]{343a^6b^9c^3}=7a^2b^3c;\ \sqrt[3]{-216a^3b^6c^{12}}=-6ab^2c^4.$$

Escolio. La raíz de un monomio será inexacta cuando algún exponente no sea divisible por el índice.

58. Extracción de la raiz de un polinomio. Esta operación se funda en estos dos principios:

I. *Si un polinomio ordenado se eleva á la potencia del grado* **m**, *el primero y último término de la potencia son iguales, respectivamente, á la potencia del mismo grado del primero y último términos del polinomio propuesto*; pues, por el procedimiento natural para elevar un polinomio á una potencia, el primero y último términos del cuadrado del propuesto serán iguales, respectivamente, al cuadrado de su primero y último términos (27-4.ª), y por la misma razón, el primero y último términos de su 3.ª, 4.ª *emésima* potencia serán iguales, respectivamente, á la 3.ª, 4.ª *emésima* potencia de su primero y último términos.

II. *Si de un polinomio ordenado se resta la emésima potencia de la suma de los* **n** *primeros términos de su raiz del grado* **m**, *el primer término de la diferencia es igual á* **m** *veces la potencia del grado* **m—1** *del primer término de la raiz, multiplicada por el término que en ella ocupa el lugar* **n + 1**; pues, si el polinomio ordenado descendentemente,

$$a+b+c+d+\ldots+t_n+t_{n+1}+\ldots+u$$

es la raiz del grado m del polinomio $A+B+C+D+\ldots+U$, se tendrá la igualdad

$$A+B+C+D+\ldots+U=(a+b+c+d+\ldots+t_n+t_{n+1}+\ldots+u)^m$$

que, designando por α la suma $a+b+c+d+\ldots+t_n$ de los n primeros términos de la raíz y, por β, la suma $t_{n+1}+\ldots+u$ de los restantes, se transforma en

$$A+B+C+D+\ldots+U=(\alpha+\beta)^m=\alpha^m+m\beta\alpha^{m-1}+\ldots+C_n\beta^n\alpha^{m-n}+\ldots+\beta^m.$$

y, restando α^m de los dos miembros de ésta,

$$A+B+C+D+\ldots+U-\alpha^m=m\beta\alpha^{m-1}+\ldots+C_n\beta^n\alpha^{m-n}+\ldots+\beta^m$$

que, designando por $A'+B'+C'+D'+\ldots+U'$ la diferencia indicada en el primer miembro, se transforma en

$$A'+B'+C'+D'+\ldots+U=m\beta\alpha^{m-1}+\ldots+C_n\beta^n\alpha^{m-n}+\ldots+\beta^m.$$

Ahora bien, el término del segundo miembro de esta igualdad, en que la letra ordenatriz tendrá mayor exponente, será el $m\beta\alpha^{m-1}$, pues como se puede expresar en la forma $m\beta\alpha^{m-n}\alpha^{n-1}$, y cualquiera otro estará representado por el término general $C_n\beta^n\alpha^{m-n}$, que se puede expresar en la forma $C_n\beta\alpha^{m-n}\,\beta^{n-1}$, es evidente que la letra ordenatriz tendrá mayor exponente en $m\beta\alpha^{m-1}$ que en $C_n\beta^n\alpha^{m-n}$, y, el mayor de todos, en el primer término del producto $m\beta\alpha^{m-1}$, que será $ma^{m-1}t_{n+1}$, por ser a el primer término del polinomio α y t_{n+1} el primero del polinomio β; luego se tendrá $A'=ma^{m-1}t_{n+1}$.

59. Sentados estos principios, se tendrá que, si $A+B+C+D+\ldots+U$ es un polinomio ordenado cuya raiz del grado m sea el polinomio $a+b+c+d+\ldots+u$, según el principio I, será $A=a^m$, de donde, $a=\sqrt[m]{A}$.

Si del polinomio propuesto se resta a^m, en el resto $B+C+D+\ldots+U$, se tendrá, según el principio II, que $B=ma^{m-1}b$, de donde, $b=B:ma^{m-1}$.

Determinados a y b y, por tanto, su suma $a+b$, si del polinomio propuesto se resta $(a+b)^m$ y llamamos $A'+B'+C'+D'+\ldots+U'$ á la diferencia, se tendrá, también por el principio II, que $A'=ma^{m-1}c$, de donde $c=A':ma^{m-1}$.

Si del polinomio propuesto se resta ahora $(a+b+c)^m$ y llamamos $A''+B''+C''+D''+\ldots+U''$ á la diferencia, se tendrá, por la misma razón, que

$$A''=ma^{m-1}d,\ \text{de donde},\ d=A'':ma^{m-1}$$

y como este razonamiento podrá continuarse hasta obtener el término u de la raíz, indúcese de aquí la siguiente regla:

Para extraer la raiz del grado **m** *de un polinomio se le ordena respecto a una de sus letras; se extrae la raiz del grado* **m** *de su primer término y se tendrá el primero de la raiz; se divide el segundo término del polinomio dado por* **m** *veces la potencia del grado* **m — 1** *del primer término de la raiz y se tendrá el segundo término de ésta. Para hallar cada uno de los demás, se resta del polinomio dado la* **mma** *potencia de la suma de los términos hallados en la raiz y se divide el primer término de la diferencia, por el mismo divisor.*

Escolio 1.º Suponiendo á m igual á 2, 3, 4, etc., se obtendrían las reglas particulares para la extracción de la raiz cuadrada, cúbica, etc., de un polinomio, de las que, por vía de ejemplo, nos limitaremos á consignar la primera y más frecuente, que es ésta:

Para extraer la raiz cuadrada de un polinomio se le ordena respecto á una de sus letras; se extrae la raiz cuadrada de su primer término y se tendrá el primero de la raiz; se divide el segundo término del polinomio dado por el duplo del primer término de la raiz y se tendrá el segundo término de ésta. Para hallar cada uno de los demás, se resta del polinomio dado el cuadrado de la suma de los ya hallados y se divide el primer término de la diferencia, por el mismo divisor.

Ejemplo. *Extraer la raíz cuadrada del polinomio*

$$80a^5b^5-20a^3b^7+64a^6b^4+4a^2b^8-7a^4b^6.$$

Ordenando el polinomio se dispone la operación en esta forma:

$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{64a^6b^4+80a^5b^5-7a^4b^6-20a^3b^7+4a^2b^8} & 8a^3b^2+5a^2b^3-2ab^4 \\ \cline{2-2}
\qquad\qquad\quad -25a^4b^6 & 16a^3b^2+5a^2b^3 \\
\qquad\qquad\quad -32a^4b^6 & 16a^3b^2+10a^2b^3-2ab^4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad +20a^3b^7-4a^2b^8 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 \qquad\quad 0 &
\end{array}$$

La raíz cuadrada de $64a^6b^4$ es $8a^3b^2$, primer término de la raíz, que, elevado al cuadrado y restado de $64a^6b^4$, da de diferencia *cero*.

Dividiendo $80a^5b^5$ por $16a^3b^2$ (duplo de $8a^3b^2$), el cociente $5a^2b^3$ es el segundo término de la raíz.

Elevando al cuadrado el binomio $8a^3b^2+5a^2b^3$ y restando el reresultado del polinomio propuesto, se tendrá una nueva diferencia: pero, si se tiene en cuenta que ya se ha restado el cuadrado del primer término, $8a^3b^2$, bastará restar, de la diferencia obtenida, el producto del segundo término por el duplo del primero, más el cuadrado del segundo, los que se obtienen colocando á continuación de $16a^3b^2$ el término $5a^2b^3$ de la raíz y multiplicando éste por el binomio $16a^3b^2+5a^2b^3$.

Dividiendo el primér término, $-32a^4b^6$, del resto por $16a^3b^2$, el cociente, $-2ab^4$, es el tercer término de la raíz, que multiplicándole por el trinomio $16a^3b^2+10a^2b^3-2ab^4$ (duplo de los dos primeros, seguido del tercero) y restando el producto, de la diferencia $-32a^4b^6-20a^3b^7+4a^2b^8$, dá *cero* de resto, por lo que el polinomio $8a^3b^2+5^2ab^3-2ab^4$ es la raíz pedida exacta.

Escolio. 2.° Para que la raíz del grado m de un polinomio ordenado sea exacta, es necesario que sus términos primero y último sean potencias perfectas de dicho grado y que el segundo de sus términos, así como también el primero de cada una de las diferencias citadas en la regla general, sean divisibles por m veces la potencia del grado $m-1$ del primer término de la raíz.

De aquí se deduce que ningún binomio es cuadrado perfecto y que un trinomio lo será, cuando lo sean dos de sus términos y el otro sea igual al duplo del producto de sus raíces cuadradas.

Así, $49a^4b^6 \pm 56a^3b^3c^2 + 16a^2c^4$ es el cuadrado del binomio $7a^2b^3 \pm 4ac^2$.

LIBRO III.

DE LA CANTIDAD ALGEBRÁICA FRACCIONARIA.

CAPÍTULO PRIMERO.

TRANSFORMACIONES.

60. Fracción algebráica *es el cociente indicado de una expresión numérica ó literal, por otra literal.*

Las fracciones algebráicas constan, como las aritméticas, de dos términos, *numerador* y *denominador*, y se expresan en la misma forma que aquéllas: así, $\frac{a}{b}$ es una fracción algebráica, en la que el denominador, b, representa una expresión literal cualquiera y el numerador, a, un número ó una expresión literal.

61. Interpretación de las expresiones $\frac{a}{0}$, $\frac{a}{\infty}$ y $\frac{0}{0}$.

Si en la fracción $\frac{a}{b}$, el denominador, b, toma valores, sucesivamente decrecientes, la fracción pasará por valores sucesivamente crecientes; luego cuando, en el límite, el denominador tome el valor *cero*, el de la fracción llegará á ser mayor que cualquier cantidad, por grande que sea, á la que se llama *infinito* y se representa por el signo ∞; de modo que se tiene la expresión $\frac{a}{0}=\infty$.

Si el denominador, b, toma valores sucesivamente crecientes, la fracción pasará por valores sucesivamente decrecientes; luego cuando, en el límite, el denominador tome el mayor valor imaginable, que es *infinito*, el de la fracción llegará á ser menor que cualquier cantidad, por pequeña que sea, que es *cero;* de modo que se tiene la expresión $\frac{a}{\infty}=0$.

Si el numerador y el denominador se reducen á *cero*, la fracción $\frac{a}{b}$ toma la forma $\frac{0}{0}$, llamada *símbolo de indeterminación*, porque el cociente de la división indicada por ella puede ser una cantidad cualquiera, pues cualquier cantidad, multiplicada por *cero*, dá por producto *cero*.

Sin embargo, no se puede asegurar que siempre que una fracción algebráica tome la forma $\frac{0}{0}$ tiene un valor indeterminado, pues, á veces, sus dos términos tienen un factor común que se anula por ciertos valores dados á alguna de sus letras, que, suprimido en ambos términos y haciendo en la fracción resultante la hipótesis que reducía á cero los dos términos de la primera, dan para ésta un valor determinado. Así, la fracción $\frac{a^2+3a-40}{a^2-3a+10}$ se convierte en $\frac{0}{0}$, cuando a es igual á 5 (**38-Esc. 1.°**); pero si se tiene en cuenta que sus dos términos son divisibles por el binomio $a-5$ (**38-Cor.**), dividiéndolos por él, resulta

$$\frac{a^2+3a-40}{a^2-3a-10}=\frac{(a^2+3a-40):(a-5)}{(a^2-3a-10):(a-5)}=\frac{a+8}{a+2},$$

cuya fracción, haciendo $a=5$, se transforma en $\frac{13}{7}$.

62. Teorema. *Si los dos términos de una fracción algebráica se multiplican ó dividen por una misma cantidad, distinta de cero, la fracción que resulta es equivalente á la propuesta.*

En efecto, si suponemos que el cociente de a por b es q, se tendrá $\frac{a}{b}=q$ **(1)** y $a=bq$ **(2)**.

Multiplicando ó dividiendo los dos miembros de la igualdad **(2)** por la cantidad m, distinta de cero, resultan, respectivamente, las igualdades $am=bqm=bm.q$ y $a{:}m=bq{:}m=(b{:}m)q$ (ARIT. **54-Esc.** y **56-Esc.**) de las que, dividiéndolas por bm ó por $b{:}m$, se obtiene $\frac{am}{bm}=q$ y $\frac{a:m}{b:m}=q$, y de aquí y de la igualdad **(1)**,

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm} \text{ y } \frac{a}{b}=\frac{a:m}{b:m}.$$

63. Simplificar una fracción algebráica *es transformarla en otra equivalente cuyos términos no tengan ningún factor común.*

La simplificación de fracciones algebráicas, análoga á la de las aritméticas, se obtiene, como en éstas, dividiendo sus dos términos por su máximo común divisor; pero como la obtención de éste, en Álgebra, no es propia de la enseñanza elemental, limítase ésta á la simplificación de fracciones de términos monomios, por la siguiente regla:

Para simplificar una fracción algebráica, de términos monomios, se descomponen sus coeficientes en sus factores primos y se suprimen en los dos términos de la fracción los factores comunes, tanto numéricos como literales.

Ejemplo. *Simplificar la fracción* $\frac{90a^4b^3c^2d}{1500a^3b^5c^2e}$.

Se tendrá $\frac{90a^4b^3c^2d}{1500a^3b^5c^2e}=\frac{2.3^2.5a^4b^3c^2d}{2^2.3.5^3a^3b^5c^2e}=\frac{3ad}{2.5^2b^2e}=\frac{3ad}{50b^2e}$.

Observación. En algunos casos particulares se pueden simplificar fracciones de términos polinomios, en los que fácilmente se reconozca la existencia de un factor común; tales serían las de los siguientes ejemplos:

1.° *Simplificar la fracción* $\frac{7ac+7bc}{a^2-b^2}$.

Separando en el numerador el factor, $7c$, común á sus dos términos, se tiene

$\frac{7ac+7bc}{a^2-b^2}=\frac{7c(a+b)}{a^2-b^2}$, y como $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ (**26-Esc.**),

resulta $\frac{7ac+7bc}{a^2-b^2}=\frac{7c(a+b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{7c}{a-b}$.

2.° *Simplificar la fracción* $\frac{3a^5-3ab^4}{a^3-b^3}$.

Separando en el numerador el factor, $3a$, común á sus dos términos, se tiene

$$\frac{3a^5-3ab^4}{a^3-b^3}=\frac{3a(a^4-b^4)}{a^3-b^3}$$

y, como $\left.\begin{array}{l} a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3) \\ \text{y } a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2) \end{array}\right\}$ (**38-Esc. 2.°**),

resulta $\frac{3a^5-3ab^4}{a^3-b^3}=\frac{3a(a^4-b^4)}{a^3-b^3}=\frac{3a(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}$

$$=\frac{3a(a^3+a^2b+ab^2+b^3)}{a^2+ab+b^2}.$$

64. Reducir fracciones algebráicas á un común denominador *es transformarlas en otras equivalentes, del mismo denominador.*

La reducción de fracciones algebráicas á un común denominador, análoga á la de las aritméticas, se obtiene, como en éstas, multiplicando los dos términos de cada una por el factor ó factores que faltan á su denominador para componer el mínimo común múltiplo de los denominadores; pero como la obtención de éste, en Álgebra, no es propia de la enseñanza elemental, limítase ésta á la reducción de fracciones á un común denominador, por la siguiente regla:

Para reducir fracciones algebráicas á un común denominador, si son de denominadores monomios, se halla el producto de las mayores potencias de los distintos factores numéricos y literales de los denominadores y se multiplica el numerador de cada una por el factor ó factores que falten á su denominador para componer dicho producto; pero, si son de denominadores polinomios, se multiplican los dos términos de cada fracción por el producto de los denominadores de las demás.

Ejemplos.

1.° *Reducir á un común denominador las fracciones*

$$\frac{3c}{2a^3b},\ \frac{5}{6a},\ \frac{4c}{7b},\ \frac{9}{16a^2b},\ \frac{11c}{4b^2}.$$

Como el producto de las mayores potencias de los factores de los denominadores es $2^4 \times 3 \times 7a^3b^2 = 336a^3b^2$, que dividido por cada uno de ellos da, respectivamente, los cocientes

$$168b,\quad 56a^2b^2,\quad 48a^3b,\quad 21ab \quad \text{y} \quad 84a^3,$$

las fracciones pedidas serán

$$\frac{3c.168b}{336a^3b^2},\ \frac{5.56a^2b^2}{336a^3b^2},\ \frac{4c.48a^3b}{336a^3b^2},\ \frac{9.21ab}{336a^3b^2}\ \text{y}\ \frac{11c.84a^3}{336a^3b^2}.$$

2.° *Reducir á un común denominador las fracciones*

$$\frac{2a^3-b}{4a},\quad \frac{3b}{5c},\quad \frac{7c}{3a+b}.$$

Las fracciones pedidas serán

$$\frac{(2a^3-b)5c(3a+b)}{20ac(3a+b)},\ \frac{3b.4a(3a+b)}{20ac(3a+b)},\ \frac{7c.4a.5c}{20ac(3a+b)}.$$

CAPÍTULO II.

CÁLCULO DE CANTIDADES FRACCIONARIAS.

65. El cálculo de fracciones algebráicas tiene por objeto transformar en una fracción única, una expresión compuesta de dos ó más, ligadas por los signos de las operaciones.

66. Adición y sustracción.

Para sumar ó restar fracciones algebráicas se reducen á un común denominador, si no lo tienen, y se divide por él la suma ó diferencia de los numeradores; pues, si se supone $\frac{a}{m}=q$, $\frac{b}{m}=q'$ y $\frac{c}{m}=q''$, se tendrá la igualdad

$$q+q'-q''=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m},$$

de la que, multiplicando ambos miembros por m, se obtiene

$$(q+q'-q'')m=\frac{a}{m}m+\frac{b}{m}m-\frac{c}{m}m=a+b-c,$$

y, dividiendo por m el primero y último miembro de esta serie de igualdades, resulta

$$q+q'-q''=\frac{a+b-c}{m},\ \text{ó sea},\ \frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}=\frac{a+b-c}{m}.$$

Ejemplo. $\frac{3a^2b}{7c}+\frac{5ac^2}{4d}+\frac{8b^2}{2c^3}=\frac{24a^2bc^3d+70ac^6+224b^2cd}{56c^4d}.$

Escolio. La adición y sustracción de una expresión algebráica entera y una fraccionaria tienen la forma $a\pm\frac{b}{c}=\frac{ac}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{ac\pm b}{c}$ ó la $\frac{b}{c}\pm a=\frac{b}{c}\pm\frac{ac}{c}=\frac{b\pm ac}{c}$, de donde se deduce la siguiente regla:

Para sumar ó restar una expresión entera y una fraccionaria, ó viceversa, se multiplica la entera por el denominador, el producto se suma ó resta al numerador, ó al contrario, y el resultado se divide por el denominador.

Ejemplos.

1.° $3a^2b\pm\frac{5b^2}{7c^3}=\frac{21a^2bc^5\pm5b^2}{7c^5}$ | 2.° $\frac{8a^2b}{5c^2}\pm4b^3c=\frac{8a^2b\pm20b^3c^3}{5c^2}.$

67. Multiplicación.

Para multiplicar dos fracciones algebráicas se divide el producto de los numeradores por el de los denominadores; pues, si se supone $\frac{a}{b}=q$ y $\frac{c}{d}=q'$, se tendrán las igualdades, $bq=a$ y $dq'=c$, que, multiplicadas miembro á miembro, dan la igualdad $bqdq'=ac$, de la que, dividiendo por bd sus dos miembros, resulta

$$qq'=\frac{ac}{bd},\ \text{ó sea,}\ \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Ejemplo. $\frac{4ab^2}{9c^3d}\times\frac{3ac}{7bd^2}=\frac{4ab^2 \,.\, 3ac}{9c^3d \,.\, 7bd^2}=\frac{12a^2b^2c}{63bc^3d^3}=\frac{4a^2b}{21c^2d^3}.$

Escolio. Si uno de los factores $\frac{a}{b}$ ó $\frac{c}{d}$ fuese un entero, n, como de la igualdad $bq=a$ se deduce, $bqn=an$, y de la igualdad $dq'=c$ se deduce, $ndq'=nc$, dividiendo los dos miembros de la primera por b, resulta

$$qn=\frac{an}{b},\ \text{ó sea,}\ \frac{a}{b}\times n=\frac{an}{b}$$

y, dividiendo los dos miembros de la segunda por d, resulta

$$nq'=\frac{nc}{d},\ \text{ó sea,}\ n\times\frac{c}{d}=\frac{nc}{d};$$

lo que indica que *para multiplicar una expresión algebráica fraccionaria por una entera, ó viceversa, se multiplica la entera por el numerador y el producto se divide por el denominador.*

Ejemplos.

1.° $(3a^2+7b)\times\frac{5c}{6a^2d}=\frac{(3a^2+7b)\,5c}{6a^2d}=\frac{15a^2c+35bc}{6a^2d}.$

2.° $\frac{4a^2b+3cd^3}{9bc^3}\times 2e=\frac{(4a^2b+3cd^3)2e}{9bc^3}=\frac{8a^2be+6cd^3e}{9bc^3}.$

68. División.

Para dividir dos fracciones algebráicas se multiplica la fracción dividendo por la fracción divisor invertida; pues, si se supone $\frac{a}{b}=q$ y $\frac{c}{d}=q'$, se tendrán las igualdades, $bq=a$ y $c=dq'$, que, multiplicadas miembro á miembro, dan la igualdad $bqc=adq'$, de la que, dividiendo ambos miembros por bc, se obtiene $q=\frac{adq'}{bc}$ y, dividiendo los de ésta por q', resulta

$$q:q'=\frac{ad}{bc},\ \text{ó sea,}\ \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

Ejemplo. $\frac{3a^2b}{7c^3}:\frac{5ab^2d}{4c^2}=\frac{3a^2b\times 4c^2}{7c^3\times 5ab^2d}=\frac{12a^2bc^2}{35ab^2c^3d}=\frac{12a}{35bcd}.$

Escolio 1.° Si el divisor fuese un entero, n, como el segundo miembro de la igualdad, $a=bq$, no variará multiplicando uno de sus factores y dividiendo el otro por n, se tendría $a=(bn)(q:n)$, de donde, dividiendo ambos miembros por bn, resulta

$$\frac{a}{bn}=q:n\ \text{ó}\ q:n=\frac{a}{bn},\ \text{ó sea,}\ \frac{a}{b}:n=\frac{a}{bn};$$

lo que indica que *para dividir una expresión algebráica fraccionaria, por una entera, se multiplica el denominador por la expresión entera.*

Ejemplo. $\frac{3a^2b}{7c^3}:4ab^2c=\frac{3a^2b}{7c^3\times 4ab^2c}=\frac{3a^2b}{28ab^2c^4}=\frac{3a}{28bc^4}.$

Escolio 2.° Si el dividendo fuese un entero, n, como de la igualdad, $c=dq'$, se deduce $nc=ndq'$, dividiendo ambos miembros de ésta por cq', resulta

$$n:q'=\frac{nd}{c},\ \text{ó sea,}\ n:\frac{c}{d}=\frac{nd}{c}=n\times\frac{d}{c};$$

lo que indica que *para dividir una expresión algebráica entera, por una fraccionaria, se multiplica la entera por el denominador y el producto se divide por el numerador.*

Ejemplo. $7a^3b:\frac{5ab^2}{9c^3}=\frac{7a^3b\times 9c^3}{5ab^2}=\frac{63a^3bc^3}{5ab^2}=\frac{63a^2c^3}{5b}.$

69. **Elevación á potencias.**

Para elevar una fracción algebráica á una potencia se elevan á dicha potencia el numerador y el denominador y se divide la del primero por la del segundo; pues

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\cdots\cdots\times\frac{a}{b}=\frac{aa\ldots a}{bb\ldots b}=\frac{a^m}{b^m}.$$

Ejemplo. $\left(\frac{2a^4b}{-5c^2}\right)^3=\frac{(2a^4b)^3}{(-5c^2)^3}=\frac{8a^{12}b^3}{-125c^6}=-\frac{8a^{12}b^3}{125c^6}.$

70. **Extracción de raíces.**

Para extraer una raíz de una fracción algebráica se extrae la raíz del mismo grado del numerador y del denominador y se divide la del primero por la del segundo; pues

$$\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m=\frac{(\sqrt[m]{a})^m}{(\sqrt[m]{b})^m}=\frac{a}{b};$$

luego $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$, cantidad que elevada á la potencia m da el radicando $\frac{a}{b}$, es la raíz del grado m de la fracción $\frac{a}{b}$.

Ejemplo. $\sqrt[3]{\frac{64a^6b^{15}}{-343c^3d^{12}}}=\frac{\sqrt[3]{64a^6b^{15}}}{\sqrt[3]{-343c^3d^{12}}}=\frac{4a^2b^5}{-7cd^4}=-\frac{4a^2b^5}{7cd^4}.$

CAPÍTULO III.

DE LAS CANTIDADES CON EXPONENTES NEGATIVOS.

71. Si en la división, $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$, de dos potencias de una misma cantidad (Arit. **62-Cor.**), se supone $n=m+d$, se tendrá $\frac{a^m}{a^{m+d}}=a^{m-m-d}=a^{-d}$.

El último miembro de esta serie de igualdades carece de sentido, dada la idea que tenemos de la elevación á potencias; mas si se observa que el primero es equivalente á la fracción $\frac{a^m}{a^m a^d}=\frac{1}{a^d}$ (Arit. **62**), se tiene que $a^{-d}=\frac{1}{a^d}$, lo que indica que *toda cantidad con exponente negativo equivale á una fracción cuyo numerador es la unidad y cuyo denominador es la misma cantidad con el exponente positivo.*

Escolio. A toda fracción algebráica se le puede, pues, dar forma entera, cambiando los signos de los exponentes en el denominador y, por tanto, un polinomio fraccionario se podrá ordenar respecto á cualquiera de sus letras, dándole, previamente, forma entera.

Ejemplos.

1.º *Dar forma entera á la fracción* $\frac{6a^3b^2c}{7d^3f^4g}$.

Se tendrá $\frac{6a^3b^2c}{7d^3f^4g}=\frac{6}{7}a^3b^2cd^{-3}f^{-4}g^{-1}$.

2.º *Ordenar, respecto á la letra* **a**, *el polinomio*

$$\frac{5a}{b^2}+\frac{8b^4}{ac^3}+6a^2b-4b^3+\frac{7c}{a^2}.$$

Dándole forma entera, se tendrá

$$\frac{5a}{b^2}+\frac{8b^4}{ac^3}+6a^2b-4b^3+\frac{7c}{a^2}=5ab^{-2}+8b^4a^{-1}c^{-3}+6a^2b-4b^3+7ca^{-2},$$

y, teniendo en cuenta lo dicho acerca de los valores relativos de las cantidades negativas (**3**-3.º y 4.º), la ordenación descendente de este polinomio será $6a^2b+5ab^{-2}-4b^3+8b^4a^{-1}c^{-3}+7ca^{-2}$.

72. Cálculo de cantidades con exponentes negativos.

El cálculo de cantidades con exponentes negativos se reduce al de las fracciones equivalentes, resultantes de su transformación en fracciones.

Asi se tiene:

1.° $a^{-m} \times a^{-n} = \frac{1}{a^m} \times \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^m a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n}$,

lo que indica que *para multiplicar dos potencias negativas de una misma base, se suman los exponentes.*

2.° $a^{-m} : a^{-n} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^m} \times \frac{a^n}{1} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{-m+n}$,

lo que indica que *para dividir dos potencias negativas de una misma base, se restan los exponentes.*

3.° $(a^{-m})^{-n} = \left(\frac{1}{a^m}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^m}\right)^n} = \frac{1}{\frac{1}{a^{mn}}} = a^{mn}$.

lo que indica que *para elevar á una potencia negativa otra, también negativa, se multiplican los exponentes.*

4.° $\sqrt[m]{a^{-n}} = \sqrt[m]{\frac{1}{a^n}} = \frac{\sqrt[m]{1}}{\sqrt[m]{a^n}} = \frac{1}{a^{\frac{n}{m}}} (57) = a^{-\frac{n}{m}}$,

lo que indica que *para extraer una raiz de una potencia negativa, se divide el exponente del radicando por el índice de la raiz.*

Escolio. De todo lo expuesto se deduce que, para operar con cantidades de exponentes negativos, se siguen las mismas reglas que para operar con las de exponentes positivos.

LIBRO IV.

DE LA CANTIDAD ALGEBRÁICA RADICAL.

CAPÍTULO PRIMERO.

GENERALIDADES.

73. Las cantidades algebráicas radicales ó radicales algebráicos se clasifican en *reales* é *imaginarios*.

Radical real *es el que tiene un modo de ser positivo ó negativo*, y **radical imaginario** *el que no tiene ningún modo de ser.*

Las cantidades racionales y los radicales reales reciben la denominación común de *cantidades reales*, y á los radicales imaginarios se les da el nombre de *expresiones imaginarias.*

Llámase *valor aritmético* ó *determinación aritmética* de un radical real á la raiz, ya conmensurable, ya inconmensurable, del valor absoluto del radicando (*).

Los radicales reales se dividen en *simplificables* ó *irreducibles*, según que sean ó nó transformables en otros equivalentes de menor índice y de radicando de menor exponente.

Dos ó más radicales se llaman *homogéneos* si son del mismo índice: tales como $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[m]{b}$ y $\sqrt[m]{c}$, y *heterogéneos* si son de distinto índice: tales como $\sqrt[m]{a}$ y $\sqrt[n]{a}$ ó $\sqrt[m]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$.

Dos radicales homogéneos, del mismo radicando, se llaman *semejantes:* tales son $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[m]{a}$ y $\frac{3}{8}\sqrt[m]{a}$.

(*) En Algebra superior se demuestra que todo radical tiene tantos valores como unidades tiene su índice, siendo unos reales y otros imaginarios, pero en esta teoría nos referimos única y exclusivamente al valor aritmético.

CAPÍTULO II.

DE LOS RADICALES REALES.

ARTÍCULO PRIMERO.

TRANSFORMACIONES.

74. Las transformaciones convenientes, y en muchos casos necesarias, para el cálculo de radicales son *la simplificación de un radical y la reducción de radicales á un índice común.*

Simplificar un radical *es transformarle en otro equivalente cuyo índice y el exponente del radicando no tengan ningún factor común.*

Reducir radicales á un índice común *es transformarlos en otros homogéneos, equivalentes á ellos.*

75. **Teorema.** *El valor de un radical no varía multiplicando el índice y el exponente del radicando por un mismo número entero.*

En efecto, si se supone que x es el valor aritmético de $\sqrt[m]{a^p}$, se tendrá

$$\sqrt[m]{a^p} = x \quad (\alpha).$$

Elevando los dos miembros de esta igualdad á la potencia del grado m, se tendrá $a^p = x^m$ y, elevando los de ésta á la potencia del grado n, será $a^{pn} = x^{mn}$.

Extrayendo la raíz del grado mn de los dos miembros de ésta, se obtiene $\sqrt[mn]{a^{pn}} = x$.

De esta igualdad y la (α) resulta $\sqrt[m]{a^p} = \sqrt[mn]{a^{pn}}$.

Corolario. *El valor de un radical no varía dividiendo el índice y el exponente del radicando por un mismo número entero;* pues, de la expresión $\sqrt[mn]{a^{pn}}$ se retrocede á la expresión $\sqrt[m]{a^p}$, dividiendo por n el índice del radical y el exponente del radicando y, según lo demostrado, ambas expresiones son iguales.

Escolio. De aquí se deducen las siguientes reglas:

1.ª *Para simplificar un radical se dividen su índice y el exponente del radicando por el factor ó factores comunes que tengan.*

Si el índice y el exponente son números enteros se facilita la simplificación, dividiéndolos por su máximo común divisor, lo que reduce el radical á su más simple expresión.

2.ª *Para reducir radicales á un índice común se simplifican, si es posible, y se multiplica el índice de cada uno de los que resulten y el exponente de su radicando por el producto de los índices de los demás.*

Si los índices fuesen números enteros se facilita la transformación, hallando el mínimo común múltiplo de los índices y multiplicando el de cada uno de los radicales y el exponente de su radicando, por el cociente de dividir dicho mínimo común múltiplo por el respectivo índice.

Ejemplos.

1.° *Simplificar el radical* $\sqrt[21]{a^{14}}$.

Como el índice y el exponente del radicando tienen el factor común, 7, dividiéndolos por él, se tendrá $\sqrt[21]{a^{14}} = \sqrt[3]{a^2}$.

2.° *Simplificar el radical* $\sqrt[56]{a^{88}}$.

	1	2	3
88	56	24	8
32	8	0	

(Arit. **87**)

Como el máximo común divisor del índice, 56, y del exponente 88, es 8, según al márgen se obtiene, se tendrá

$$\sqrt[56]{a^{88}} = \sqrt[7]{a^{11}}.$$

3.° *Reducir á un índice común los radicales*

$$\sqrt[3]{a^2},\ \sqrt[4]{b},\ \sqrt[6]{c^5},\ \sqrt[12]{d^7},\ \sqrt[18]{e^{11}} \text{ y } \sqrt[35]{f^3}.$$

$12 = 2^2 \times 3$
$18 = 2 \times 3^2$
$35 = 5 \times 7$
$m.\,c.\,m. = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 1260$
(Arit. **100**)

Como el mínimo común múltiplo de los índices es 1260, según al márgen se obtiene, y los cocientes de éste por los índices 3, 4, 6, 12, 18 y 35 son, respectivamente 420, 315, 210, 105, 70 y 36 se tendrá que los radicales propuestos son, respectivamente, equivalentes á

$$\sqrt[1260]{a^{840}},\ \sqrt[1260]{b^{315}},\ \sqrt[1260]{c^{1050}},\ \sqrt[1260]{d^{735}},\ \sqrt[1260]{e^{770}},\ \sqrt[1260]{f^{108}},$$

76. Racionalización de denominadores.

En la práctica del cálculo se presentan con frecuencia expresiones radicales fraccionarias cuyo denominador contiene algún radical de segundo grado que conviene hacer desaparecer, á lo que se llama *racionalización del denominador*, y para conseguirlo en las expresiones más sencillas y frecuentes, que son las de las formas $\frac{N}{\sqrt{A}}$ y $\frac{N}{\sqrt{A}\pm\sqrt{B}}$, basta considerar:

1.° que, si los dos términos de la fracción $\frac{N}{\sqrt{A}}$ se multiplican por $\sqrt{A}$, se tendrá

$$\frac{N}{\sqrt{A}}=\frac{N\sqrt{A}}{\sqrt{A}\sqrt{A}}=\frac{N\sqrt{A}}{(\sqrt{A})^2}=\frac{N\sqrt{A}}{A}.$$

2.° que, si los dos términos de la fracción $\frac{N}{\sqrt{A}\pm\sqrt{B}}$ se multiplican por $\sqrt{A}\mp\sqrt{B}$, se tendrá

$$\frac{N}{\sqrt{A}\pm\sqrt{B}}=\frac{N(\sqrt{A}\mp\sqrt{B})}{(\sqrt{A}\pm\sqrt{B})(\sqrt{A}\mp\sqrt{B})}$$

$$=\frac{N(\sqrt{A}\mp\sqrt{B})}{(\sqrt{A})^2-(\sqrt{B})^2}\text{ (26-Esc.)}=\frac{N(\sqrt{A}\mp\sqrt{B})}{A-B}.$$

ARTÍCULO II.

CÁLCULO DE RADICALES REALES.

77. Como todo radical numérico tiene necesariamente un valor aritmético, conmensurable ó inconmensurable, para operar con radicales numéricos bastaría hallar sus valores aritméticos, ya exactos ya aproximados, y operar con los resultados; mas, como este procedimiento sería muy enojoso y además irrealizable tratándose de radicales de grados superiores al tercero ó de radicando algebráico, el cálculo de radicales reales tiene por objeto transformar en un radical único, una expresión compuesta de dos ó más radicales, ligados por los signos de las operaciones.

78. Adición y sustracción.

Para sumar ó restar radicales, si son semejantes, se separa el radical como factor común á todos los términos de la operación; pero, si son desemejantes, se deja ésta indicada; pues, en el primer caso, se tiene

$$a\sqrt[m]{p}+b\sqrt[m]{p}+c\sqrt[m]{p}=(a+b+c)\sqrt[m]{p}$$

$$\text{y } a\sqrt[m]{p}-b\sqrt[m]{p}=(a-b)\sqrt[m]{p}.$$

y, en el segundo, sin reducción posible,

$$a\sqrt[m]{b}+c\sqrt[n]{b}+d\sqrt[m]{e}=a\sqrt[m]{b}+c\sqrt[n]{b}+d\sqrt[m]{e}$$

$$\text{y } a\sqrt[m]{b}-c\sqrt[n]{d}=a\sqrt[m]{b}-c\sqrt[n]{d}.$$

Ejemplos.

1.° $7\sqrt[3]{a}+5\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a}=(7+5+1)\sqrt[3]{a}=13\sqrt[3]{a}.$

2.° $8\sqrt{a}-3\sqrt{a}=(8-3)\sqrt{a}=5\sqrt{a}.$

3.° $2\sqrt[3]{a}+9\sqrt{b}+3\sqrt[5]{a}=2\sqrt[3]{a}+9\sqrt{b}+3\sqrt[5]{a}.$

4.° $6\sqrt{a}-4\sqrt[3]{b}=6\sqrt{a}-4\sqrt[3]{b}.$

79. Multiplicación.

Para multiplicar radicales se reducen á un índice común, si no lo tienen, y se extrae la raíz del producto de los radicandos; pues, si suponemos

$\sqrt[m]{a}=x, \sqrt[m]{b}=y, \sqrt[m]{c}=z,$

se tendrá $x^m=a$; $y^m=b$; $z^m=c$ y, por tanto, $x^m y^m z^m=abc$ ó sea $(xyz)^m=abc$, de donde, extrayendo de ambos miembros la raíz del grado m, se tiene $xyz=\sqrt[m]{abc}$, y reemplazando x, y, z por sus iguales $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[m]{b}$, $\sqrt[m]{c}$, resulta

$$\sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b}\,\sqrt[m]{c}=\sqrt[m]{abc}.$$

Ejemplo. $3\sqrt{a}\times2\sqrt[3]{b}\times7\sqrt[6]{c}=3\times2\times7\sqrt[6]{a^3}\,\sqrt[6]{b^2}\,\sqrt[6]{c}$
$=42\sqrt[6]{a^3b^2c}.$

80. División.

Para dividir dos radicales se reducen á un índice común, si no lo tienen, y se extrae la raíz del cociente de los radicandos; pues, si suponemos

$\sqrt[m]{a}=x, \sqrt[m]{b}=y$, se tendrá $x^m=a$, $y^m=b$

y, por tanto, $\frac{x^m}{y^m}=\frac{a}{b}$, ó sea $\left(\frac{x}{y}\right)^m=\frac{a}{b}$, de donde, extrayendo de ambos miembros la raíz del grado m, se tiene $\frac{x}{y}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$, y reemplazando x é y por sus iguales $\sqrt[m]{a}$ y $\sqrt[m]{b}$, resulta

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}.$$

Ejemplo. $\frac{10\sqrt{a}}{5\sqrt[3]{b}}=\frac{10\sqrt[6]{a^3}}{5\sqrt[6]{b^2}}=2\sqrt{\frac{a^3}{b^2}}.$

81. Elevación á potencias.

Para elevar un radical á una potencia se eleva el radicando y del resultado se extrae la raíz; pues se tiene que

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n=\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{a}...\sqrt[m]{a}=\sqrt[m]{aa...a}=\sqrt[m]{a^n}.$$

Ejemplo. $\left(2\sqrt[5]{a^3b^2}\right)^3=2^3\left(\sqrt[5]{a^3b^2}\right)^3=8\sqrt[5]{(a^3b^2)^3}=8\sqrt[5]{a^9b^6}.$

82. Extracción de raíces.

Para extraer la raíz de un radical se extrae la raíz del grado expresado por el producto de los índices; pues, si suponemos que $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=x$ (α), elevando ambos miembros de esta igualdad á la potencia del grado m, se tendrá $\sqrt[n]{a}=x^m$, y elevando los de ésta á la del grado n, se tendrá $a=x^{mn}$, de donde, extrayendo la raíz del grado mn, se obtiene $\sqrt[mn]{a}=x$.

De esta igualdad y de la (α), resulta $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$.

Ejemplo. $\sqrt{\sqrt[3]{a^5b}}=\sqrt[6]{a^5b}.$

Escolio. El resultado de extraer una raíz cuyo índice sea un número compuesto es igual al resultado final de extraer sucesivamente las raíces cuyos índices sean los factores simples del primero, pues, por el anterior teorema, se tiene

$$\sqrt[mnpq]{a}=\sqrt[m]{\sqrt[npq]{a}}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[pq]{a}}}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}}}},$$

de donde se deduce la siguiente regla:

Para extraer una raíz cuyo índice sea un número compuesto, se extraen sucesivamente las raíces cuyos índices sean los factores simples del propuesto.

Ejemplo. $\sqrt[8]{6561}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{6561}}}=\sqrt{\sqrt{81}}=\sqrt{9}=3.$

ARTÍCULO III.

DE LAS CANTIDADES CON EXPONENTES FRACCIONARIOS.

83. Si, en la expresión $\sqrt[m]{a^n}$, se deja indicada la división necesaria para la extracción de la raíz (**57**), se tendrá $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ y, si se conviene en que las expresiones $\sqrt[m]{a^n}$ y $a^{\frac{n}{m}}$ son equivalentes, aun cuando n no sea divisible por m, se podrá establecer que *toda potencia de exponente fraccionario se puede considerar como un radical cuyo índice es el denominador del exponente y cuyo radicando es la base, potenciada por el numerador.*

84. Cálculo de cantidades con exponentes fraccionarios.

El cálculo de cantidades con exponentes fraccionarios se reduce al de los radicales equivalentes á ellas, resultantes de su transformación en radicales.

Así se tiene:

$$1.^{\circ}\quad a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \times \sqrt[nq]{a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq} \times a^{pn}}$$
$$= \sqrt[nq]{a^{mq+pn}} = a^{\frac{mq+pn}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}};$$

lo que indica que *para multiplicar dos potencias fraccionarias de una misma base, se suman sus exponentes.*

$$2.^{\circ}\quad a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} : \sqrt[nq]{a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq} : a^{pn}}$$
$$= \sqrt[nq]{a^{mq-pn}} = a^{\frac{mq-pn}{nq}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}};$$

lo que indica que *para dividir dos potencias fraccionarias de una misma base, se restan sus exponentes.*

$$3.^{\circ}\quad \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}}$$
$$= \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n}\times\frac{p}{q}};$$

lo que indica que *para potenciar una potencia fraccionaria por un exponente también fraccionario, se multiplican los exponentes.*

$$4.^{\circ}\quad \sqrt[p]{a^{\frac{m}{n}}} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[np]{a^m} = a^{\frac{m}{np}} = a^{\frac{m}{n}:p};$$

lo que indica que *para extraer una raíz, de una potencia fraccionaria, se divide el exponente del radicando por el índice de la raíz.*

CAPÍTULO III.

DE LAS EXPRESIONES IMAGINARIAS (*).

ARTÍCULO PRIMERO.

GENERALIDADES.

85. **Expresiones imaginarias** *son las raíces de grado par de cantidades negativas.*

Las expresiones imaginarias se clasifican por grados, segundo, cuarto, sexto, etc., según que el índice del radical es 2, 4, 6, etc.

Una expresión imaginaria de segundo grado se representa, en general, por $\sqrt{-A}$, que se transforma en $\sqrt{A\times-1}$ y, convencionalmente, por analogía con las cantidades reales, en $\sqrt{A}\sqrt{-1}$ (79), de donde, si se supone que el valor aritmético de $\sqrt{A}$ es a, se tiene $\sqrt{A}\sqrt{-1}=a\sqrt{-1}$ y, por tanto, $\sqrt{-A}=\sqrt{A}\sqrt{-1}=a\sqrt{-1}$; lo que indica que *toda expresión imaginaria de segundo grado es igual á la raíz cuadrada del valor absoluto del radicando, multiplicada por* $\sqrt{-1}$.

86. **Monomio imaginario** *es toda expresión de la forma* $a\sqrt{-1}$ y **binomio imaginario** *es toda expresión de la forma* $a+b\sqrt{-1}$.

Expresiones imaginarias conjugadas *son dos binomios imaginarios que se diferencian en el signo del término imaginario:* tales como $a+b\sqrt{-1}$ y $a-b\sqrt{-1}$.

87. **Teorema.** *La suma de una cantidad real y una expresión imaginaria es un binomio imaginario.*

En efecto, si $a+b\sqrt{-1}$ fuese igual á una cantidad real, h, se tendría la igualdad $a+b\sqrt{-1}=h$ de la que resultaría $b\sqrt{-1}=h-a$, igualdad absurda, pues la expresión imaginaria, $b\sqrt{-1}$, nunca puede ser igual á la cantidad real, $h-a$.

(*) La teoría de las expresiones imaginarias pertenece al Algebra superior, donde se demuestra que toda expresión imaginaria se puede reducir á una de segundo grado, por lo que limitamos á éstas el estudio elemental de dicha teoría.

ARTÍCULO II.

CÁLCULO DE EXPRESIONES IMAGINARIAS DE SEGUNDO GRADO.

88. **Operaciones fundamentales con monomios imaginarios.**

Adición y sustracción. *La suma y la diferencia de dos monomios imaginarios es otro monomio imaginario;* pues

$$a\sqrt{-1}\pm b\sqrt{-1}=(a\pm b)\sqrt{-1}.$$

Multiplicación y división. *El producto y el cociente de dos monomios imaginarios es una cantidad real;* pues $a\sqrt{-1}\times b\sqrt{-1}=ab\left(\sqrt{-1}\right)^2=ab\times-1=-ab$

y $a\sqrt{-1}:b\sqrt{-1}=a:b$.

Escolio. Como

$$(\sqrt{-1})^1=\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^2=-1$$
$$(\sqrt{-1})^3=(\sqrt{-1})^2\sqrt{-1}=-1\sqrt{-1}=-\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^4=((\sqrt{-1})^2)^2=(-1)^2=1,$$

si en la expresión $(\sqrt{-1})^m$ se designa por n el cociente del exponente m, por 4, como el resto de esta división no puede ser más que 0, 1, 2 ó 3, se tendrá

$$(\sqrt{-1})^{4n+1}=(\sqrt{-1})^{4n}(\sqrt{-1})=1.\sqrt{-1}=\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^{4n+2}=(\sqrt{-1})^{4n}(\sqrt{-1})^2=1.(-1)=-1$$
$$(\sqrt{-1})^{4n+3}=(\sqrt{-1})^{4n}(\sqrt{-1})^3=1.-(\sqrt{-1})=-\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^{4n}=((\sqrt{-1})^4)^n=1^n=1,$$

lo que indica que cualquier potencia de $\sqrt{-1}$ tiene necesariamente una de las cuatro formas $\sqrt{-1}$, -1, $-\sqrt{-1}$ y 1.

Según esto, la expresión $(\sqrt{-1})^m$ tendrá el valor real $+1$ ó el -1 cuando m sea igual á $4n$ ó á $4n+2$, respectivamente, y será la imaginaria $+\sqrt{-1}$ ó $-\sqrt{-1}$ cuando m sea igual á $4n+1$ ó á $4n+3$, respectivamente.

89. Operaciones fundamentales con binomios imaginarios.

La suma, diferencia, producto y cociente de dos binomios imaginarios es, en general, un binomio imaginario, pero también puede ser un monomio imaginario ó una cantidad real; pues se tiene:

Adición.

$$(a+b\sqrt{-1})+(c+d\sqrt{-1})=a+b\sqrt{-1}+c+d\sqrt{-1}$$
$$=(a+c)+(b+d)\sqrt{-1},$$

cuya suma, que es *un binomio imaginario*, se reduce al *monomio imaginario*, $(b+d)\sqrt{-1}$, si $a+c=0$, y á la *cantidad real*, $a+c$, si $b+d=0$.

Sustracción.

$$(a+b\sqrt{-1})-(c+d\sqrt{-1})=a+b\sqrt{-1}-c-d\sqrt{-1}$$
$$=(a-c)+(b-d)\sqrt{-1},$$

cuya diferencia, que es un *binomio imaginario*, se reduce al *monomio imaginario*, $b-d\sqrt{-1}$, si $a-c=0$, y á la *cantidad real*, $a-c$, si $b-d=0$.

Multiplicación.

$$(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1})=ac+bc\sqrt{-1}+ad\sqrt{-1}-bd$$
$$=(ac-bd)+(bc+ad)\sqrt{-1},$$

cuyo producto, que es un *binomio imaginario*, se reduce al *monomio imaginario*, $(bc+ad)\sqrt{-1}$, si $ac-bd=0$, y á la *cantidad real*, $ac-bd$, si $bc+ad=0$.

División.

Multiplicando los dos términos de la división indicada $(a+b\sqrt{-1}):(c+d\sqrt{-1})$ por el binomio imaginario $c-d\sqrt{-1}$ se tendrá la equivalente

$$(a+b\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1}):(c+d\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})$$
$$=[(ac+bd)+(bc-ad)\sqrt{-1}]:(c^2+d^2)=(ac+bd):(c^2+d^2)$$
$$+[(bc-ad)\sqrt{-1}]:(c^2+d^2)=(ac+bd):(c^2+d^2)$$
$$+[(bc-ad):(c^2+d^2)]\sqrt{-1},$$

cuyo cociente, que es un *binomio imaginario*, se reduce al *monomio imaginario*, $[(bc-ad):(c^2+d^2)]\sqrt{-1}$, si $(ac+bd):(c^2+d^2)=0$, y á la *cantidad real*, $(ac+bd):(c^2+d^2)$, si $(bc-ad):(c^2+d^2)=0$.

LIBRO V.

COMPLEMENTO DEL CÁLCULO ALGEBRÁICO.

CAPÍTULO PRIMERO.

DE LAS PROGRESIONES.

ARTÍCULO PRIMERO.

PROGRESIONES POR DIFERENCIA Ó ARITMÉTICAS.

90. Progresión por diferencia ó progresión aritmética *es una serie de valores tales que la diferencia entre cada uno de ellos y el que le precede es siempre la misma.*

Esta diferencia constante se llama *razón de la progresión* y puede ser *positiva* ó *negativa:* en el primer caso, la *progresión* se llama *creciente* y, en el segundo, *decreciente.*

Así, la serie de números 3, 7, 11,... es una progresión creciente, cuya razón es 4, y la serie 26, 22, 18,... es una progresión decreciente, cuya razón es —4.

Los valores que forman una progresión por diferencia se llaman *medios diferenciales,* porque con tres consecutivos se forma una equidiferencia continua, en la que el segundo es medio diferencial entre los otros dos.

Toda progresión por diferencia es, por su naturaleza, indefinida en ambos sentidos y, por lo tanto, creciente en uno de ellos y decreciente en el otro: así, la progresión

$$-24, -17, -10, -3, 4, 11, 18, 25, 32, 39...$$

considerada á partir de cualquiera de sus términos, es creciente, hacia la derecha, y decreciente, hacia la izquierda. Sin embargo, comunmente se consideran sólo varios términos y, en tal concepto, al primero y último de ellos se les llama *extremos* de la progresión limitada.

Una progresión por diferencia se indica, poniendo este signo ÷ delante de ella y un punto entre cada dos términos consecutivos. Así, una progresión por diferencia cuyo primer término sea t_1 y el último t_n tendrá la forma general

$$\div\, t_1 . t_2 . t_3 \ldots t_{n-2} . t_{n-1} . t_n$$

que se lee, *por diferencia*, t_1 es á t_2 es á t_3 etc...

91. Teorema. *Todo término de una progresión por diferencia es igual al primero, más tantas veces la razón como términos le preceden, ó al último, ménos tantas veces la razón como términos le siguen.*

En efecto: 1.° si en la progresión

$$\div\, t_1 \,.\, t_2 \,.\, t_3 \ldots t_{n-2} \,.\, t_{n-1} \,.\, t_n$$

se supone que la razón sea d, se tendrá

$$\begin{aligned} t_2 &= t_1 + d \\ t_3 &= t_2 + d = t_1 + d + d = t_1 + 2d \\ t_4 &= t_3 + d = t_1 + 2d + d = t_1 + 3d \\ &\vdots \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Por otra parte, si llamando t_{n-1} al término que ocupe el lugar $(n-1)^{mo}$, se tuviese $t_{n-1} = t_1 + (n-2)d$, conforme al enunciado del teorema, se tendría para el siguiente,

$$t_n = t_{n-1} + d = t_1 + (n-2)d + d = t_1 + (n-2+1)d = t_1 + (n-1)d,$$

lo que indica que, si un término cualquiera de la progresión se forma según el enunciado, también se formará el siguiente, y como acabamos de ver que así se verifica en el 3.°, se verificará en el 4.° y, por consiguiente, en el 5.°, 6.°, 7.°, etc. y se tendrá la fórmula $t_n = t_1 + (n-1)d$ (α), llamada *término general,* que es la expresión de cualquier término de una progresión por diferencia cuyo primer término sea t_1 y la razón d.

2.° Si se resta $(n-1)d$ de los dos miembros de la igualdad (α) y se invierten éstos, se tiene $t_1 = t_n - (n-1)d$ (β).

Ejemplos.

1.° *Hallar el undécimo término de la progresión* $\div\, 8 \,.\, 15 \ldots$

Como la razón es $15-8=7$, se tendrá $t = 8 + 10.7 = 8 + 70 = 78$.

2.° *Hallar el término que está cinco lugares antes del último de la progresión* $\div\, .\, .\, 47 \,.\, 23$.

Como la razón es -24, se tendrá $t = 23 - 4.(-24) = 23 + 96 = 119$.

Corolario. *El valor absoluto de un término de una progresión por diferencia puede ser mayor que cualquier cantidad;* pues designando por H una cantidad todo lo grande que se quiera, para que sea $t_n > H$ basta tener

$$t_1 + (n-1)d > H \text{ ó } (n-1)d > H - t_1 \text{ ó } n > \frac{H - t_1}{d} + 1,$$

lo que siempre es posible.

Escolio. El límite de los términos de una progresión aritmética es ∞, si es creciente, y $-\infty$, si es decreciente.

92. Interpolar medios diferenciales entre dos números dados *es hallar otros números que, con ellos, formen una progresión por diferencia de la que éstos sean el primero y último términos.*

Es evidente que si se conociese la razón de la progresión, sumándola con el primer término se tendría el segundo; sumando éste con la razón se tendría el tercero, y así sucesivamente todos los demás; de modo que, si llamamos m al número de términos que se quiere interpolar entre dos números dados a y b, el total de los de la progresión que se forme, después de la interpolación, será $m+2$, por lo que se tendrá $n = m+2$ y de aquí $n-1 = m+1$: luego la razón que se busca será $d = \dfrac{b-a}{m+1}$ (γ).

De aquí se deduce la siguiente regla:

Para interpolar entre dos números dados un cierto número de medios diferenciales se resta del segundo el primero; se divide la diferencia por el número de términos que se han de interpolar, más uno, y el cociente, que será la razón, se agrega sucesivamente al primero de los números dados y á las sumas que se vayan obteniendo.

Ejemplos.

1.° *Interpolar nueve medios diferenciales entre los 8 y 78.*

Puesto que el número 78 ha de ser el undécimo término, la razón será, $\dfrac{78-8}{10} = \dfrac{70}{10} = 7$, y se tendrá la progresión

$$\div\, \mathbf{8} \,.\, 15 \,.\, 22 \,.\, 29 \,.\, 36 \,.\, 43 \,.\, 50 \,.\, 57 \,.\, 64 \,.\, 71 \,.\, \mathbf{78}.$$

2.° *Interpolar seis medios diferenciales entre 5 y* -16.

Puesto que el número -16 ha de ser el octavo término, la razón será, $\dfrac{-16-5}{7} = \dfrac{-21}{7} = -3$, y se tendrá la progresión

$$\div\, 5 \,.\, 2 \,.\, -1 \,.\, -4 \,.\, -7 \,.\, -10 \,.\, -13 \,.\, -16.$$

Escolio. Si entre cada dos términos de una progresión por diferencia se interpola el mismo número, p, de medios diferenciales, la nueva serie de valores que resulta es también una progresión por diferencia, pues la razón de todas las progresiones parciales será $d' = \dfrac{d}{p+1}$, y el último término de cada una será el primero de la siguiente.

93. Teorema. *En toda progresión por diferencia, la suma de dos términos equidistantes de los extremos es igual á la suma de éstos.*

En efecto, en la progresión de n términos

$$\div\, t_1 \,.\, t_2 \,.\, t_3 \ldots t_m \ldots t'_m \ldots t_{n-2} \,.\, t_{n-1} \,.\, t_n$$

en la que t_m y t'_m representan dos términos distantes m lugares de los extremos t_1 y t_n, respectivamente, se tendrán las igualdades $t_m = t_1 + (m-1)d$ y $t'_m = t_n - (m-1)d$ (**91**), de las que, sumándolas miembro á miembro, se obtiene

$$t_m + t'_m = t_1 + t_n.$$

94. Teorema. *La suma de los términos de una progresión por diferencia es igual á la semisuma de los extremos, multiplicada por el número de términos.*

En efecto, designando por s la suma de los n términos de la progresión

$$\div\, t_1 \,.\, t_2 \,.\, t_3 \ldots t_m \ldots t'_m \ldots t_{n-2} \,.\, t_{n-1} \,.\, t_n,$$

se tendrá $s = t_1 + t_2 + t_3 + .. + t_m + .. + t'_m + .. t_{n-2} + t_{n-1} + t_n$
y también $s = t_n + t_{n-1} + t_{n-2} + .. + t'_m + .. + t_m + .. t_3 + t_2 + t_1$
cuyas igualdades, sumadas ordenadamente, dan la igualdad

$$2s = (t_1 + t_n) + (t_2 + t_{n-1}) + (t_3 + t_{n-2}) + \ldots + (t_m + t'_m)$$
$$+ (t'_m + t_m) + \ldots + (t_3 + t_{n-2}) + (t_2 + t_{n-1}) + (t_n + t_1)$$

que, según el teorema anterior, se transforma en

$$2s = (t_1 + t_n) + (t_1 + t_n) + (t_1 + t_n) \ldots + (t_1 + t_n) + (t_1 + t_n) + (t_1 + t_n)$$

cuyo segundo miembro consta de, n, sumandos iguales á $t_1 + t_n$ y, por consiguiente, podrá tomar la forma

$$2s = (t_1 + t_n)n, \text{ de donde resulta, } s = \frac{(t_1 + t_n)}{2}\, n \quad (\delta).$$

Escolio. Si en esta fórmula se sustituye t_n por su valor $t_1 + (n-1)d$ (**91**) se obtiene la nueva fórmula

$$s = \frac{t_1 + t_1 + (n-1)d}{2}\, n = \frac{2t_1 n + (n-1)dn}{2} = t_1 n + \frac{n(n-1)d}{2} \quad (\varepsilon)$$

que dá la suma en función del número de términos, el primero y la razón.

Ejemplo. *Hallar la suma de los diez primeros términos de la prógresión* $\div\, 3 \,.\, 7 \ldots$

Por la fórmula (ε) se tendrá $s = 3 \,.\, 10 + \dfrac{10.9.4}{2} = 210.$

ARTÍCULO II.

PROGRESIONES POR COCIENTE Ó GEOMÉTRICAS.

95. Progresión por cociente ó progresión geométrica *es una serie de valores tales que el cociente de cada uno de ellos por el que le precede es siempre el mismo.*

Este cociente constante se llama *razón de la progresión* y puede ser *mayor* ó *menor que la unidad:* en el primer caso, la progresión se llama *creciente* y, en el segundo, *decreciente.*

Así, la serie de números 2, 6, 18, ... es una progresión creciente, cuya razón es 3, y la serie 1215, 405, 135, ... es una progresión decreciente, cuya razón es $\frac{1}{3}$.

Los valores que forman una progresión por cociente se llaman *medios proporcionales,* porque con tres consecutivos se forma una proporción continua, en la que el segundo es medio proporcional entre los otros dos.

Toda progresión por cociente es, por su naturaleza, indefinida en ambos sentidos y, por lo tanto, creciente en uno de ellos y decreciente en el otro: así, la progresión

$$\frac{5}{16}, \frac{5}{8}, \frac{5}{4}, \frac{5}{2}, 5, 10, 20, 40, 80 \ldots,$$

considerada á partir de cualquiera de sus términos, es creciente, hacia la derecha, y decreciente, hacia la izquierda. Sin embargo, comunmente se consideran sólo varios términos y, en tal concepto, al primero y último de ellos se les llama *extremos* de la progresión limitada.

Una progresión por cociente se indica poniendo este signo $\div\!\div$ delante de ella y dos puntos entre cada dos términos consecutivos. Así, una progresión por cociente cuyo primer término sea T_1 y el último T_n tendrá la forma general

$$\div\!\div\, T_1 : T_2 : T_3 : \ldots : T_{n-2} : T_{n-1} : T_n$$

que se lee, *por cociente,* T_1 es á T_2 es á T_3 etc.

96. Teorema. *Todo término de una progresión por cociente es igual al primero, multiplicado por una potencia de la razón cuyo exponente es el número de términos que le preceden, ó al último, dividido por una potencia de la razón cuyo exponente es el número de términos que le siguen.*

En efecto: 1.º si en la progresión

$$\div T_1 : T_2 : T_3 : \ldots T_{n-2} : T_{n-1} : T_n$$

se supone que la razón sea c, se tendrá

$$T_2 = T_1 c$$
$$T_3 = T_2 c = T_1 cc = T_1 c^2$$
$$T_4 = T_3 c = T_1 c^2 c = T_1 c^3$$
$$\vdots$$

etc.

Por otra parte, si llamando T_{n-1} al término que ocupe el lugar $(n-1)^{mo}$, se tuviese $T_{n-1} = T_1 c^{n-2}$, conforme al enunciado del teorema, se tendría para el siguiente,

$$T_n = T_{n-1} c = T_1 c^{n-2} c = T_1 c^{n-1},$$

lo que indica que, si un término cualquiera de la progresión se forma según el enunciado, también se formará el siguiente, y como acabamos de ver que así se verifica en el 3.º, se verificará en el 4.º y, por consiguiente, en el 5.º, 6.º, 7.º, etc. y se tendrá la fórmula, $T_n = T_1 c^{n-1}$ (α'), llamada *término general*, que es la expresión de cualquier término de una progresión por cociente cuyo primer término sea T_1 y la razón c.

2.º Si se dividen por c^{n-1} los dos miembros de la igualdad (α') y se invierten éstos, se tiene $T_1 = \dfrac{T_n}{c^{n-1}}$ ($6'$).

Ejemplo. *Hallar el undécimo término de la progresión* $\div 4:12\ldots$

Como la razón es $\frac{12}{4}=3$, se tendrá $T=4.3^{10}=4\times59049=236196$.

Corolario. *Un término de una progresión por cociente puede ser mayor ó menor que cualquier cantidad, según que la progresión sea creciente ó decreciente*; pues, para lo primero, basta que, designando por H una cantidad todo lo grande que se quiera, se tenga $T_n > H$ ó $T_1 c^{n-1} > H$ ó $c^{n-1} > H:T$, lo que, por ser $c > 1$, es siempre posible; para lo segundo basta considerar que, por ser $c<1$, dando á n un valor conveniente será c^{n-1} menor que cualquier cantidad dada.

Escolio. El límite de los términos de una progresión por cociente es ∞, si es creciente, y 0, si es decreciente.

97. Interpolar medios proporcionales entre dos números dados *es hallar otros números que, con ellos, formen una progresión por cociente de la que éstos sean el primero y último términos.*

Es evidente que si se conociese la razón de la progresión, multiplicándola por el primer término se tendría el segundo; multiplicando éste por la razón se tendría el tercero, y así sucesivamente todos los demás; de modo que, si llamamos m al número de términos que se quiere interpolar entre dos números dados A y B, el total de los de la progresión que se forme, después de la interpolación, será $m+2$, por lo que se tendrá $n=m+2$ y de aquí $n-1=m+1$; luego la razón que se busca será $c = \sqrt[m+1]{\dfrac{B}{A}}$ (γ').

De aquí se deduce la siguiente regla:

Para interpolar entre dos números dados un cierto número de medios proporcionales se divide el último por el primero; del cociente se extrae la raíz del grado indicado por el número de términos que se han de interpolar, más uno, y la raíz, que será la razón, se multiplica sucesivamente por el primero de los números dados y por los productos que se vayan obteniendo.

Ejemplo. *Interpolar dos medios proporcionales entre los números 6 y 2,53125.*

Puesto que el número 2,53125 ha de ser el cuarto término, la razón será, $\sqrt[3]{2{,}53125:6} = 0{,}75$ (*), y se tendrá la progresión

$$\div \mathbf{6} : 4{,}5 : 3{,}375 : \mathbf{2{,}53125}.$$

Escolio. Si entre cada dos términos de una progresión por cociente se interpola el mismo número, p, de medios proporcionales, la nueva serie que resulta es también una progresión por cociente, pues la razón de todas las progresiones parciales será $c' = \sqrt[p+1]{c}$, y el último término de cada una será el primero de la siguiente.

(*) Si el ejemplo fuese tal que la raíz que hubiera que extraer fuese de un grado superior al tercero, se haría uso de la regla expuesta en el número **82 Escolio**, si su índice no tuviese más factores primos que 2 y 3, pero en otro caso, se aplicarían los logaritmos, como se verá más adelante.

98. Teorema. *La suma de los términos de una progresión por cociente es igual á la diferencia del último término multiplicado por la razón, ménos el primero, dividida por la razón ménos uno.*

En efecto, designando por S la suma de los n términos de la progresión

$$\div T_1 : T_2 : T_3 : \ldots\ldots : T_{n-2} : T_{n-1} : T_n,$$

se tendrá $S = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots\ldots + T_{n-2} + T_{n-1} + T_n$.

Multiplicando por c los dos miembros de esta igualdad, resulta la nueva igualdad

$$Sc = T_1c + T_2c + T_3c + \ldots\ldots + T_{n-2}c + T_{n-1}c + T_nc$$

la que, si se tiene en cuenta que el producto de cada término por la razón es igual al siguiente, tomará la forma

$$Sc = T_2 + T_3 + T_4 + \ldots\ldots + T_{n-1} + T_n + T_nc$$

ó $Sc = S - T_1 + T_nc$.

Restando, S, de los dos miembros de esta última igualdad, se obtiene $Sc - S = T_nc - T_1$ ó sea $S(c-1) = T_nc - T_1$, de donde resulta, $S = \dfrac{T_nc - T_1}{c-1}$ (δ').

Escolio. Si en esta fórmula se sustituye T_n por su valor T_1c^{n-1} (**96**) se obtiene la nueva fórmula

$$S = \frac{T_1c^{n-1}c - T_1}{c-1} = \frac{T_1c^n - T_1}{c-1} = \frac{T_1(c^n-1)}{c-1} = T_1\frac{c^n-1}{c-1} \quad (\varepsilon')$$

que dá la suma en función del número de términos, el primero y la razón.

Ejemplo. *Hallar la suma de los diez primeros términos de la progresión* $\div 3 : 12 \ldots..$

Por la fórmula (ε') se tendrá $S = 3.\dfrac{4^{10}-1}{4-1} = 1048575$.

CAPÍTULO II.

DE LOS LOGARITMOS (*).

ARTÍCULO PRIMERO.

GENERALIDADES.

99. Llámanse **logaritmos** *á los términos de una progresión por diferencia que empieza por* **cero**, *correspondientes á los de una progresión por cociente, de razón real, positiva y distinta de la unidad, que empieza por* **uno**: **números** ó **antilogaritmos** *á los términos de ésta respecto á sus correspondientes de aquélla*: **sistema de logaritmos** *al conjunto de ambas progresiones, y* **base del sistema** *al número cuyo logaritmo es la unidad.*

Así, las dos progresiones

$$\left.\begin{array}{l} 0 : \ldots : \dfrac{1}{c^n} : \ldots : \dfrac{1}{c^3} : \dfrac{1}{c^2} : \dfrac{1}{c} : 1 : c : c^2 : c^3 : \ldots : c^n : \ldots : \infty \\ -\infty \,..\, -nd \ldots . -3d . -2d . -d . \quad 0 . d . \ 2d . 3d \ \ldots\ldots \ nd \ \ldots . \infty \end{array}\right\} (\alpha)$$

siendo c una cantidad real positiva y distinta de la unidad, constituyen un sistema de logaritmos en el que el logaritmo de c^n es nd y el antilogaritmo de $-nd$ es $\dfrac{1}{c^n}$.

100. A la simple inspección de las progresiones que constituyen el sistema general (α) se observa:

1.º Que el logaritmo de la unidad es *cero*.

2.º Que todos los términos de la progresión por cociente serán positivos, pues todas las potencias de c lo serán, de donde se desprende que los números negativos no tienen logaritmo.

3.º Que, dando distintos valores á la razón de la progresión por cociente ó á la de la progresión por diferencia, se formarán diferentes sistemas de logaritmos, de donde se desprende que el número de sistemas de logaritmos es infinito.

(*) Aunque el completo desarrollo de esta importante teoría corresponde á estudios superiores, damos aquí de ella una sucinta idea, de carácter esencialmente práctico, con el fin de obtener en el cálculo las ventajas que proporciona su aplicación.

4.° Que cualquier número positivo ó negativo puede figurar en la progresión por diferencia y cualquier número positivo puede figurar en la progresión por cociente, aproximadamente, si no forma parte de ella; pues, si no es uno de sus términos, se pueden interpolar entre dos que le comprendan los términos suficientes para que aparezca con la aproximación que se desee y, por consiguiente, haciendo simultáneamente la conveniente interpolación del mismo número de términos entre dos correspondientes de ambas progresiones, á todo número corresponderá un logaritmo y á todo logaritmo corresponderá un número, antilogaritmo suyo.

5.° Que si las dos progresiones son, en el mismo sentido, crecientes ó decrecientes, los números mayores que la unidad tendrán logaritmos positivos y los menores que la unidad los tendrán negativos: á mayor número corresponderá mayor logaritmo y recíprocamente: el logaritmo del infinito será el infinito positivo y el de cero el infinito negativo: pero si una de las progresiones es creciente, en el sentido en que la otra es decreciente, sucederá todo lo contrario.

6.° Que designando por b la base de un sistema de logaritmos y por $h+1$ el lugar que, á contar del 1, ocupa en la progresión por cociente, se tendrá $b=1.c^h=c^h$ (**96**), y como su logaritmo, 1, ocupará, á partir de 0, el mismo lugar en la progresión por diferencia, se tendrá $1=0+hd$ (**91**), de donde se obtiene $h=\frac{1}{d}$, que sustituido en el valor de b, da $b=c^{\frac{1}{d}}=\sqrt[d]{c}$ (**83**), lo que indica que *para hallar la base de un sistema de logaritmos se extrae, de la razón de la progresión geométrica, la raiz del grado cuyo índice sea la de la aritmética.*

101. Si en la igualdad $b=\sqrt[d]{c}$ se elevan los dos miembros á la potencia del grado d, resulta $b^d=c$, y sustituyendo este valor de c en la progresión por cociente del sistema de logaritmos (α), toma éste la forma

$$\left.\begin{array}{l} 0:\ldots:b^{-nd}:\ldots:b^{-3d}:b^{-2d}:b^{-d}:1:b^{d}:b^{2d}:b^{3d}:\ldots:b^{nd}:\ldots:\infty \\ -\infty\ldots-nd\ldots-3d.-2d.-d.0.d.2d.3d\ldots\ldots nd\ldots\ldots\infty \end{array}\right\}(\delta)$$

en la que se observa que el logaritmo de cada potencia de b es su propio exponente, lo que justifica esta nueva definición:

Logaritmo de un número *es el exponente á que debe elevarse otro, positivo y distinto de la unidad, llamado base, para que la potencia sea igual al número dado.*

La relación que liga á la base, b, de un sistema de logaritmos con un número, N, y su logaritmo, l, se puede pues, expresar por la igualdad $b^l=N$, llamada *fórmula de un sistema de logaritmos,* de la que, sea cualquiera la base, se derivan las expresiones $\log N = l$ y $\text{antilog}\ l = N$ que se leen, respectivamente, *logaritmo de* N *igual á* l, y *antilogaritmo de* l, *igual á* N.

102. De esta manera de considerar los logaritmos se deducen fácilmente las siguientes propiedades de todo sistema de logaritmos:

1.ª *El logaritmo de un producto es igual á la suma de los logaritmos de los factores;* pues, si designamos por x' é y' los logaritmos de x y de y en el sistema de base b, se tendrán las igualdades $b^{x'}=x$ y $b^{y'}=y$, de las que, multiplicándolas ordenadamente, se obtiene $b^{x'+y'}=xy$: luego, $\log xy = x'+y' = \log x + \log y$.

2.ª *El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo, ménos el del divisor;* pues, dividiendo ordenadamente las igualdades $b^{x'}=x$ y $b^{y'}=y$, se obtiene $b^{x'-y'}=x:y$; luego, $\log (x:y) = x'-y' = \log x - \log y$.

3.ª *El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente, por el logaritmo de la base de la potencia;* pues, elevando á la potencia, del grado m los dos miembros de la igualdad $b^{x'}=x$, se obtiene $b^{mx'}=x^m$: luego $\log (x^m)=mx'=m \log x$.

4.ª *El logaritmo de una raiz es igual al logaritmo del radicando, dividido por el indice del radical;* pues, extrayendo la raíz del grado m de los dos miembros de la igualdad $b^{x'}=x$, se obtiene $\sqrt[m]{b^{x'}}=\sqrt[m]{x}$ ó sea $b^{x':m}=\sqrt[m]{x}$; luego, $\log \sqrt[m]{x} = x':m = \log x : m$.

103. Teorema. *La diferencia de los logaritmos de dos enteros consecutivos disminuye á medida que aumentan los números.*

En efecto, designando por n y $n+1$ dos enteros consecutivos, se tiene la serie de igualdades

$$\log (n+1) - \log n = \log \left(\frac{n+1}{n}\right) \ (\mathbf{102\text{-}2.^a}) = \log \left(1+\frac{1}{n}\right)$$

cuyo último miembro se aproxima tanto más al logaritmo de 1, que es 0, cuanto mayor sea n.

ARTÍCULO II.

LOGARITMOS VULGARES.

104. El sistema de logaritmos que se ha preferido para los cálculos ordinarios, por las ventajas que presenta sobre otro cualquiera, es el llamado *vulgar*, *décuplo* ó de BRIGGS, en el que la razón de la progresión por cociente es la base del sistema de numeración y la razón de la progresión por diferencia es la unidad.

Este sistema se expresa, pues, por las progresiones

$$\ldots:0{,}0001:0{,}001:0{,}01:0{,}1:1:10:100:1000:10000:\ldots$$
$$\ldots\ -4\ .\ -3\ .\ -2\ .\ -1\ .\ 0\ .\ 1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ \ldots$$

y como, evidentemente, la base es 10, su fórmula es $10^l=N$.

105. Teorema. *Los únicos números que, en el sistema vulgar, tienen logaritmos conmensurables son las potencias enteras de 10, positivas ó negativas.*

En efecto, si en la fórmula $10^l=N$, el exponente, l, es un número entero positivo, m, ó negativo, $-m$, se tendrá, en el primer caso, la expresión $10^m=N$, en la que el número N, cuyo logaritmo es m, es una potencia entera positiva de 10 ó sea una unidad décupla y, en el segundo, se tendrá la expresión $10^{-m}=N$ ó sea $\frac{1}{10^m}=N$, en la que el número N, cuyo logaritmo es $-m$, es una potencia entera negativa de 10 ó sea una unidad decimal.

Por otra parte, si supusiésemos que el logaritmo de un número, N, fuese la fracción $\frac{p}{q}$, se tendría $10^{\frac{p}{q}}=N$, de donde, elevando ambos miembros á la potencia del grado q, se obtendría la igualdad $10^p=N^q$, ó sea, $2^p.5^p=N^q$; mas como esta igualdad exige que 2 y 5 sean los únicos factores primos de N, haciendo $N=2^r.5^s$, se tendría $2^p.5^p=(2^r.5^s)^q=2^{rq}.5^{sq}$, igualdad que sólo puede verificarse siendo $p=rq$ y $p=sq$, es decir, siendo $r=s$, y, por tanto, $N=2^r.5^r=10^r$ ó sea una potencia entera de 10, positiva ó unidad décupla, si r es positivo, y negativa ó unidad decimal, si r es negativo.

Escolio. El logaritmo de un número que no sea potencia de 10 es inconmensurable y su expresión aproximada se compone de una parte entera, llamada *característica*, y otra decimal, llamada *mantisa*.

106. Teorema. *La característica del logaritmo de un número mayor que la unidad es positiva, de tantas unidades como cifras tenga la parte entera del número, menos una.*

En efecto, si un entero, A, tiene n cifras y es una potencia de 10 será de la forma 10^{n-1}, cuyo logaritmo es $n-1$; pero, si no es potencia de 10, se tendrá la limitación

$$10^{n-1}<A<10^n \text{ y, por tanto,}$$
$$n-1<\log A<n;$$

luego, la característica de su logaritmo será $n-1$.

107. Teorema. *La característica del logaritmo de un número menor que la unidad, expresado en fracción decimal, es negativa, de tantas unidades como ceros precedan á la primera cifra significativa.*

En efecto, si una fracción decimal, A, tiene n ceros delante de su primera cifra significativa y es potencia de $\frac{1}{10}$ será de la forma $\frac{1}{10^n}=10^{-n}$, cuyo logaritmo es $-n$; pero, si no es potencia de $\frac{1}{10}$, se tendrá la limitación

$$\frac{1}{10^n}<A<\frac{1}{10^{n-1}}, \text{ ó sea, } 10^{-n}<A<10^{-(n-1)} \text{ y, por tanto,}$$
$$-n<\log A<-(n-1);$$

luego la característica de su logaritmo será $-n$.

Escolio. Todo logaritmo de característica negativa equivale á una sustracción cuyo minuendo es la mantisa, precedida de *cero* enteros, y cuyo sustraendo es la característica; pues, si el logaritmo de A es $\bar{n},abcdef$, se tiene

$$\log A=\bar{n},abcdef=-n+0,abcdef=0,abcdef-n.$$

108. Teorema. *El logaritmo de una fracción ordinaria es igual al logaritmo del numerador, menos el del denominador.*

En efecto, puesto que una fracción es el cociente indicado del numerador por el denominador, se tendrá

$$\log\frac{a}{b}=\log a-\log b \ (\mathbf{102.}\ 2.^a).$$

Escolio. El logaritmo de una fracción es positivo, si el numerador es mayor que el denominador, y negativo, si el numerador es menor que el denominador.

109. Teorema. *Si un número se multiplica ó divide por la unidad seguida de* n *ceros, la característica de su logaritmo aumenta ó disminuye, respectivamente, en* n *unidades, pero la mantisa no varía.*

En efecto, si $\log A = m{,}abcdef$, se tendrá

$$\log (A.10^n) = \log A + n \ (102\text{-}1.^a) = m{,}abcdef + n = (m+n){,}abcdef$$

$$\text{y } \log \frac{A}{10^n} = \log A - n \ (102\text{-}2.^a) = m{,}abcdef - n = (m-n){,}abcdef.$$

Corolario. *La mantisa del logaritmo de un número no varía aunque en éste se corra la coma á la derecha ó á la izquierda, pero la característica aumenta ó disminuye en tantas unidades como lugares recorra la coma;* pues estas traslaciones de la coma equivalen á multiplicar ó dividir el número dado por las respectivas potencias de 10.

Así, la mantisa de los logaritmos de 5768000, 57,68 y 0,05768, cuyas características son, respectivamente, 6, 1 y $\overline{2}$, es la misma que la del logaritmo de 5768, cuya característica es 3.

110. Cologaritmo ó complemento logarítmico de un número *es la diferencia de su logaritmo á cero.*

El cologaritmo de un número se indica con la abreviatura *colog*, antepuesta á él.

Así, el cologaritmo de 10^n, cuyo logaritmo es n, es $0 - n = -n$; el de 10^{-n}, cuyo logaritmo es $-n$, es $0-(-n)=n$; y el cologaritmo de 352,3, cuyo logaritmo es 2,546913, es $0 - 2{,}546913$, sustracción cuyo resultado se puede obtener aumentando el minuendo en 3 unidades, por lo ménos, y disminuyendo la diferencia en las mismas, con lo que se tendrá

$$\operatorname{colog} 352{,}3 = 0 - 2{,}546913 = 3 - 2{,}546913 - 3 = 0{,}453087 - 3 = \overline{3}{,}453087.$$

De estas consideraciones se origina la siguiente regla:

Para hallar el cologaritmo de un número, si es potencia de 10 *se cambia el signo á su logaritmo y si no lo es se cambia el signo á la característica de su logaritmo, se la añade* $\overline{1}$ *y se restan de* 9 *todas las cifras de la mantisa, excepto la primera significativa de la derecha, que se resta de* 10.

111. Por medio del complemento logarítmico se transforma un logaritmo negativo en otro de característica negativa y mantisa positiva y se convierte en suma la diferencia de dos logaritmos; pues

$$\log A = -n{,}abcdef = 0 - n{,}abcdef$$

$$\text{y } \log A - \log B = \log A + 0 - \log B = \log A + \operatorname{colog} B,$$

de donde se deducen las siguientes reglas:

1.ª *Para transformar un logaritmo negativo, en otro de característica negativa y mantisa positiva, se halla su complemento, como si fuese positivo.*

Ejemplo. $\log A = -2{,}549632 = \overline{3}{,}450368.$

2.ª *Para convertir en suma la diferencia de los logaritmos de dos números se agrega al logaritmo del minuendo el cologaritmo del sustraendo.*

Ejemplo. Si $\log A = 3{,}549271$ y $\log B = 4{,}732514$, se tendrá $\log A - \log B = 3{,}549271 + \overline{5}{,}267486 = \overline{2}{,}816757.$

ARTÍCULO III.

TABLAS DE LOGARITMOS.

112. Tablas de logaritmos *son unos cuadros, ordenados por columnas, en una de las cuales se contienen los enteros consecutivos desde* 1 *hasta cierto límite y en otras sus respectivos logaritmos.*

Varias son las Tablas de logaritmos vulgares que se han construido, por procedimientos fundados en teorías propias de estudios superiores; pero no se diferencian unas de otras más que en el límite de los números que comprenden, en su disposición particular y en el mayor ó menor grado de aproximación de los logaritmos.

Todas van precedidas de su correspondiente explicación, por lo que, ante la dificultad de dar idea de ellas sin tenerlas á la vista, creemos conveniente aconsejar á los alumnos que examinen detenidamente las que elijan y se ejerciten en su manejo, resolviendo las dos cuestiones á que éste se reduce, que son las siguientes:

1.ª *Dado un número, hallar su logaritmo.*

2.ª *Dado un logaritmo, hallar su antilogaritmo ó sea el número á que corresponde* (*).

(*) Los cálculos de esta obra están hechos con las Tablas de Vázquez Queipo.

ARTÍCULO IV.

APLICACIONES DE LOS LOGARITMOS.

---

§ 1.º—Cálculo aritmético.—Interés compuesto.

113. Cálculo aritmético, por logaritmos. Las propiedades de los logaritmos permiten efectuar toda operación de multiplicar, dividir, elevar á potencias y extraer raíces, por medio de otra del grado inmediato inferior, aplicando para ello las reglas siguientes:

1.ª *Para multiplicar dos ó más números se suman sus logaritmos y se halla el antilogaritmo de la suma* (**102**-1.ª).

2.ª *Para dividir dos números se suma el logaritmo del dividendo con el cologaritmo del divisor y se halla el antilogaritmo de la suma* (**102**-2.ª y **111**. Regla 2.ª).

3.ª *Para elevar un número á una potencia se multiplica el exponente por el logaritmo del número y se halla el antilogaritmo del producto* (**102**-3.ª).

4.ª *Para extraer una raíz de un número se divide el logaritmo de éste por el índice de la raíz y se halla el antilogaritmo del cociente* (**102**-4.ª).

Ejercicios.

Hallar, por logaritmos, el valor de **x** *en las expresiones siguientes:*

Cálculo.

1.ª $x = 576 \times 2{,}784 \times 0{,}00643$..

$$\begin{aligned} \log 576 &= 2{,}760422 \\ \log 2{,}784 &= 0{,}444669 \\ \log 0{,}00643 &= \bar{3}{,}808211 \\ \hline x = \text{antilog}\ & 1{,}013302 = 10{,}311 \end{aligned}$$

2.ª $x = \dfrac{17896}{359}$ ....

$$\begin{aligned} \log 17896 &= 4{,}252756 \\ \text{colog}\ 359 &= \bar{3}{,}444906 \\ \hline x = \text{antilog}\ & 1{,}697662 = 49{,}849 \end{aligned}$$

3.ª $x = (2{,}548)^9$.........

$$\begin{aligned} \log 2{,}548 &= 0{,}406199 \\ & \quad\quad\quad\quad 9 \\ \hline x = \text{antilog}\ & 3{,}655791 = 4526{,}8 \end{aligned}$$

4.ª $x = \sqrt[7]{9753}$..........

$$\begin{aligned} \log 9753 &= \frac{3{,}989138}{7} = 0{,}569877 \\ x = \text{antilog}\ & 0{,}569877 = 3{,}714. \end{aligned}$$

114. Interés compuesto. El cálculo logarítmico suministra un procedimiento general para hallar solución, por medio de una fórmula, á cuantas cuestiones se presenten sobre el interés compuesto, de las que, por procedimientos aritméticos, sólo se obtiene la determinación del interés (ARIT. **232**).

Para obtener la fórmula general del interés compuesto, supongamos que sea c, el capital; r, el *tanto por uno* en una unidad de tiempo, es decir, *la centésima parte del tanto por ciento*, en la misma; t el tiempo, en unidades del órden de aquélla y S el valor del capital, c, al fin del tiempo, t, es decir, la suma del capital primitivo y sus intereses.

Si una unidad del capital produce r en una unidad de tiempo, las c unidades producirán cr; luego el imponente tendrá, al fin de ella un capital de $c + cr = c\,(1 + r)$, lo que indica que *para hallar el valor que en una unidad de tiempo adquiere un capital impuesto al* **r** *por uno se multiplica dicho capital por* $1 + \mathbf{r}$.

Por lo tanto, el nuevo capital $c\,(1 + r)$ será al fin del segundo periodo,

$$c\,(1 + r)\,(1 + r) = c\,(1 + r)^2,$$

y éste, al fin del tercero, será

$$c\,(1 + r)^2\,(1 + r) = c\,(1 + r)^3,$$

y, en general, al fin de t periodos, se tendrá la igualdad

$$S = c\,(1 + r)^t \quad (\alpha),$$

que se llama *fórmula del interés compuesto.*

Aplicando los logaritmos á esta fórmula, se tendrá

$$\log S = \log c + t \log\,(1 + r) \quad (\beta)$$

de la que se deducen,

$$\log c = \log S - t \log\,(1 + r) \quad (\beta')$$

$$\log\,(1 + r) = \frac{\log S - \log c}{t} \quad (\beta'')$$

$$t = \frac{\log S - \log c}{\log\,(1 + r)} \quad (\beta''').$$

Las fórmulas (β), (β'), (β'') y (β''') sirven, respectivamente, para hallar cada uno de los valores de S, c, r ó t, conocidos los otros tres.

Escolio. Si el tiempo, t, no estuviese expresado en unidades del mismo órden que aquélla á que se refiere el tanto por uno se transformará en incomplejo de aquel órden, antes de aplicar la fórmula correspondiente.

Ejemplos.

1° *¿En cuánto se convierte un capital de 20000 pesetas, impuesto por 3 años, 5 meses y 13 días al 6 por % de interés compuesto anual?*

Haciendo en la fórmula (6), $c=20000$, $t=3^{A},\ 5^{M},\ 13^{d}=\frac{1243}{360}a$ y $r=0{,}06$ se tendrá

$$\log S=\log 20000+\frac{1243}{360}\log 1{,}06$$

$$\begin{aligned}\log 20000 &= 4{,}301030\\ \frac{1243}{360}\log 1{,}06 &= 0{,}087376\\ S=\text{antilog } 4{,}388406 &= 24457{,}18 \text{ pesetas.}\end{aligned}$$

2.° *¿Qué capital hay que colocar á interés compuesto, al 6 por % anual, para que en 20 años se convierta en 2000 pesetas?*

Haciendo en la fórmula (6'), $S=2000$, $t=20$ y $r=0{,}06$, se tendrá

$$\log c=\log 2000-20\log 1{,}06$$

$$\begin{aligned}\log 2000 &= 3{,}301030\\ 20\log 1{,}06 &= 0{,}506120\\ c=\text{antilog } 2{,}794910 &= 623{,}60 \text{ pesetas.}\end{aligned}$$

3.° *¿A qué tanto por ciento anual se han de imponer 2000 pesetas para que, á interés compuesto, den en 8 años, un interés de 500 pesetas?*

Haciendo en la fórmula (6''), $S=2500$, $c=2000$ y $t=8$, se tendrá

$$\log(1+r)=\frac{\log 2500-\log 2000}{8}$$

$$\begin{aligned}\log 2500 &= 3{,}397940\\ \log 2000 &= 3{,}301030\\ 1+r=\text{antilog } 0{,}096910:8=\text{antilog } 0{,}012114 &= 1{,}0282\\ r &= 0{,}0282\end{aligned}$$

luego, el tanto por ciento pedido es 2,82.

4.° *¿Qué tiempo debe estar impuesto un capital á interés compuesto, al 6 por % anual, para que se duplique?*

Haciendo en la fórmula (6'''). $S=2c$ y $r=0{,}06$, se tendrá

$$t=\frac{\log 2c-\log c}{\log 1{,}06}=\frac{\log 2+\log c-\log c}{\log 1{,}06}=\frac{\log 2}{\log 1{,}06}$$

$$\begin{array}{r|l}\log 2=0{,}301030 & 0{,}025306=\log 1{,}06\\ \hline 047970 & 11^{A},89=11^{A},\ 10^{M}\text{ y }20^{d}\\ 226640 & \\ 241920 & \\ 14166 & \end{array}$$

§ 2.°—Amortizaciones y Rentas vitalicias.

115. Llámase **Amortización** *al reintegro de un capital y su interés compuesto por devoluciones parciales.* Si éstas se hacen anualmente y en cantidad igual, cada una de ellas recibe el nombre de *anualidad de amortización.*

Para resolver cualquier problema de amortización por anualidades basta considerar que la anualidad ha de ser tal, que la suma de todas ellas sea igual, al fin de los años convenidos, al capital primitivo más el interés que de él obtendría el acreedor si, desde el principio, lo hubiese colocado á interés compuesto al tanto por ciento fijado. Así, si dicho capital es c, el tanto por uno, r, y el número de años, t, dicha suma será igual á $c(1+r)^{t}$ (**114.** *Fórmula* α).

En tal concepto, llamando a á la anualidad, resultará que

la del primer año importará al final de los t años, $a(1+r)^{t-1}$
la del segundo.......................... $a(1+r)^{t-2}$
la del tercero.......................... $a(1+r)^{t-3}$
....
la del $(t-1)^{mo}$ ó sea el penúltimo............ $(a1+r)$
y la del último.......................... a.

La suma de estos valores dará la igualdad

$$a+a(1+r)+\ldots+a(1+r)^{t-3}+a(1+r)^{t-2}+a(1+r)^{t-1}=c(1+r)^{t}$$

la que, separando el factor a, común á todos los términos del primer miembro, se transforma en

$$a\{1+(1+r)+\ldots+(1+r)^{t-2}+(1+r)^{t-1}\}=c(1+r)^{t}.$$

Como el primer miembro de esta igualdad es el producto de a por la suma de los términos de una progresión geométrica cuya razón es $1+r$, el primer término 1 y el último $(1+r)^{t-1}$, se tendrá (98)

$$\frac{a\{(1+r)^{t}-1\}}{r}=c\,(1+r)^{t},$$

de donde, dividiendo ambos miembros por $\frac{(1+r)^{t}-1}{r}$, se obtiene la expresión general

$$a=\frac{cr\,(1+r)^t}{(1+r)^t-1}\quad \text{(A)},$$

llamada *fórmula de las anualidades de amortización* (*).

Aplicando á ella los logaritmos, se tiene

$$\log a=\log c+\log r+t\log(1+r)-\log[(1+r)^t-1]\quad \text{(A')}.$$

Ejemplo. *¿Qué anualidad se debe pagar para extinguir en 5 años, al 8 por $^0/_0$, una deuda de 10000 pesetas?*

Haciendo en la fórmula (A'), $c=10000$, $r=0{,}08$ y $t=5$, se tendrá:

$$\log a=\log 10000+\log 0{,}08+5\log 1{,}08-\log[(1{,}08)^5-1]$$

cuyo cálculo se dispondrá en la forma siguiente:

$\log 10000$ .... $=4$
$\log 0{,}08$ .... $=\bar{2}{,}903090$
$\log 1{,}08=0{,}033424$
$5\log 1{,}08=5\times 0{,}033424$ .... $=0{,}167120$
$3{,}070210$

$(1{,}08)^5=\text{antilog } 0{,}167120=1{,}46933$

$\log 0{,}46933$ .... $=\bar{1}{,}671479$
$a=\text{antilog } 3{,}398731=2504{,}56$ pesetas.

(*) De esta formula se obtienen fácilmente los valores de c y de t, pues multiplicando sus dos miembros por $(1+r)^t-1$, resulta $a[(1+r)^t-1]=cr(1+r)^t$, y dividiendo por $r(1+r)^t$ los dos de ésta é invirtiéndolos, resulta $c=\dfrac{a[(1+r)^t-1]}{r(1+r)^t}$.

Transformando sucesivamente la igualdad $a[(1+r)^t-1]=cr(1+r)^t$ en $a(1+r)^t-a=cr(1+r)^t$; $a(1+r)^t=a+cr(1+r)^t$; $a(1+r)^t-cr(1+r)^t=a$; $(1+r)^t(a-cr)=a$
y aplicando á ésta última los logaritmos, se obtiene
$t\log(1+r)+\log(a-cr)=\log a$, ó sea, $t\log(1+r)=\log a-\log(a-cr)$, de donde resulta $t=\dfrac{\log a-\log(a-cr)}{\log(1+r)}$.

El valor de r no puede obtenerse por un cálculo elemental, sinó por otro cuya exposición rebasa los límites de esta obra.

116. Un caso particular del cálculo de amortizaciones es el llamado de **Rentas vitalicias**, en el que el tiempo de extinción del capital es el de la vida probable del individuo que lo impone en una caja ó Sociedad, para que, percibiendo una cantidad fija cada año, se extinga á su fallecimiento dicho capital y los intereses correspondientes, al tanto por ciento que se estipule.

Se llama **vida probable** *de una persona al tiempo que se calcula necesario para que fallezca la mitad de las que tengan la misma edad.*

Con los datos suministrados por las estadísticas se han formado *Tablas de probabilidad de la vida humana*, en las que se encuentra el dato aplicable á cada caso particular que se trate de resolver (*).

Ejemplo. *¿Qué anualidad debe recibir una persona de 37 años de edad que impone, á renta vitalicia, un capital de 250.000 pesetas al 5 por $^0/_0$?*

Como la vida probable en este caso, según las Tablas más aceptables, es de 28,9 años, haciendo en la fórmula (A'), $c=250.000$, $r=0{,}05$ y $t=28{,}9$, se tendrá:

$$\log a=\log 250.000+\log 0{,}05+28{,}9\log 1{,}05-\log\left\{(1{,}05)^{28,9}-1\right\}$$

cuyo cálculo se dispone en la forma siguiente:

$\log 250.000$ .... $=5{,}397940$
$\log 0{,}05$ .... $=\bar{2}{,}698970$
$\log 1{,}05=0{,}021189$
$28{,}9\log 1{,}05=28{,}9\times 0{,}021189$ ...... $=0{,}612362$
$4{,}709272$

$(1{,}05)^{28,9}=\text{antilog } 0{,}612362=4{,}096$
$\log 3{,}096$ .... $=0{,}490801$
$a=\text{antilog } 4{,}218471=16537{,}54$ pesetas.

(*) Al resolver cualquier cuestión de rentas vitalicias se puede aplicar, á falta de unas Tablas de probabilidad, la siguiente regla, debida á las investigaciones del ilustrado catedrático D. Luis G. Gascó, regla cuyos resultados, para edades comprendidas entre 5 y 65 años, no difieren mucho de los contenidos en las Tablas españolas.

«*Se restan del número* 58 *los* OCHO DÉCIMOS *de la edad de un individuo, y el resto puede tomarse como su vida probable*»; de modo que, llamando e á su edad y v á su vida probable, se tiene la fórmula general $v=58-0{,}8e$.

§ 3.º—Capitalizaciones.

117. Llámase **Capitalización** *á la acumulación de imposiciones parciales hechas con objeto de retirar, á cierto plazo, su suma y la de sus respectivos intereses compuestos.* Si las imposiciones se hacen anualmente y en cantidad igual, cada una de ellas recibe el nombre de *anualidad de capitalización.*

La expresión general relativa al cálculo de capitalización, por anualidades, en t años, se obtiene fácilmente por las siguientes consideraciones.

Si a es la anualidad, se tendrá que, al final de los t años

la primera valdrá.......................... $a\,(1+r)^t$
la segunda.............................. $a\,(1+r)^{t-1}$
la tercera................................ $a\,(1+r)^{t-2}$
....
la $(t-1)^{\text{ma}}$.......................... $a\,(1+r)$.

La suma de estos valores será la capitalización y, designándola por S, se tendrá la igualdad

$$S=a(1+r)+a(1+r)^2+\ldots+a(1+r)^{t-1}+a(1+r)^t$$

que se transforma en

$$S=a\{(1+r)+(1+r)^2+\ldots+(1+r)^{t-1}+(1+r)^t\}$$

ó sea (98) $S=\dfrac{a(1+r)\,\{(1+r)^t-1\}}{r}$ (C),

llamada *fórmula de las anualidades de capitalización.*

Aplicando á ella los logaritmos, se tiene

$$\log S=\log a+\log\,(1+r)+\log\,\{(1+r)^t-1\}+\text{colog}\,r \quad (C').$$

Ejemplo. *¿Qué cantidad retirará, al cabo de 20 años, una persona que ha impuesto anualmente 250 pesetas en un Banco ó en una Caja de Ahorros, que da el 3 por % de interés compuesto?*

Haciendo en la fórmula (C′), $a=250$, $r=0{,}03$ y $t=20$, se tendrá:

$$\log S=\log 250+\log 1{,}03+\log\,[(1{,}03)^{20}-1)]+\text{colog}\,0{,}03,$$

cuyo cálculo se dispondrá en la forma siguiente:

log 250.................................. $=2{,}397940$
log 1,03................................. $=0{,}012837$
$20\log 1{,}03=20\times0{,}012837=0{,}256740$
$(1{,}03)^{20}=\text{antilog}\,0{,}256740=1{,}80609$
log 0,80609.............................. $=\bar{1}{,}906384$
colog 0,03............................... $=1{,}522879$

S=antilog 3,840040=6918,95 pesetas

SEGUNDA PARTE.

APLICACIONES ELEMENTALES DEL CÁLCULO ALGEBRÁICO.

LIBRO PRIMERO.

DE LAS ECUACIONES.

CAPÍTULO PRIMERO.

GENERALIDADES.

ARTÍCULO PRIMERO.

DEFINICIONES.

118. Se llama **identidad ó igualdad idéntica** *á toda igualdad cuyos miembros tienen siempre igual valor numérico, sea cualquiera el de sus letras:* tal es la igualdad

$$3a^2-ab+6c=a(3a-b)+2.3c.$$

Ecuación *es toda igualdad que contiene alguna cantidad desconocida y cuyos miembros no tienen igual valor numérico, más que por cierto valor de aquélla.*

Así, la igualdad $4x+8=\dfrac{x}{3}+7x-8\dfrac{2}{3}$ es una ecuación cuyos miembros no tienen el mismo valor, 28, más que cuando $x=5$, pues para otro valor de x, tal como 2, el valor numérico del primer miembro sería 16 y el del segundo, 6.

119. **Coeficientes de una ecuación** *son las cantidades, real ó hipotéticamente conocidas, que son factores de otras.* Por sus coeficientes se clasifican las ecuaciones en *numéricas* y *literales.*

Ecuación numérica *es la que tiene todos sus coeficientes numéricos y* **ecuación literal** *la que tiene alguno literal*

120. Incógnitas de una ecuación *son las cantidades desconocidas en ella.*

Las incógnitas, que dan el carácter de ecuación á una igualdad, pueden ser en cualquier número y se representan, en general, por las últimas letras del alfabeto, empleándose de preferencia la x cuando sólo hay una incógnita.

121. Grado de una ecuación *es la mayor suma de los exponentes de las incógnitas en uno de sus términos, no estando éstas en ningún denominador ni bajo ningún signo radical.* En este concepto se clasifican las ecuaciones por *grados*, primero, segundo, tercero, etc., y en *completas* é *incompletas*.

Se llama **ecuación completa de un grado cualquiera, m,** *á la que contiene términos de todos los grados desde* m *hasta* 0 *respecto á todas y cada una de sus incógnitas*. La ecuación á la que le falta alguno de estos términos es **incompleta.**

Así la ecuación $4x^3-5x^2+6x-8=0$ es numérica, con una incógnita, de tercer grado y completa, y la ecuación $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ es literal, con dos incógnitas, de segundo grado, y también completa.

122. Raíces de una ecuación *son los valores que, sustituidos en ella en vez de la incógnita ó incógnitas, la convierten en una identidad:* así, por ejemplo, el número 5 es raíz de la ecuación $4x+8=\frac{x}{3}+7x-8\frac{2}{3}$, porque sustituido en vez de x la convierte en la identidad $4.5+8=\frac{5}{3}+7.5-8\frac{2}{3}$, cuyos dos miembros valen 28; 3 y 7 lo son de la ecuación $3x^2+20x-32=60x-x^2-106$, porque cada uno de ellos la convierte en una identidad cuyos miembros valen, respectivamente, 55 y 255.

Solución de una ecuación *es el conjunto de sus raíces.* Solución y raíz son una misma cosa cuando se refieren á una ecuación de una sola raíz.

Resolver una ecuación *es hallar su solución ó soluciones.* A ésto se llama también *despejar las incógnitas.*

Bajo el punto de vista de su solución se clasifican las ecuaciones en **determinadas, indeterminadas** y **absurdas,** *según que tienen un número limitado de soluciones, un número ilimitado de ellas ó ninguna solución.*

Ecuaciones equivalentes *son las que tienen las mismas soluciones.*

123. Sistema de ecuaciones *es el conjunto de dos ó más ecuaciones distintas, equivalentes.*

Un sistema de ecuaciones puede constar de cualquier número de ellas, de cualquier grado y con cualquier número de incógnitas, y puede ser numérico ó literal, según que sean numéricas todas las ecuaciones que lo constituyen ó literal alguna de ellas.

Solución de un sistema *es el conjunto de valores de las incógnitas que satisfacen á todas las ecuaciones del sistema.*

Resolver un sistema de ecuaciones *es hallar sus soluciones.*

Los sistemas de ecuaciones, lo mismo que éstas, pueden ser, por su solución, *determinados, indeterminados* ó *absurdos*, según que tengan un número limitado de soluciones, un número infinito de ellas ó ninguna solución.

Sistemas equivalentes *son los que tienen las mismas soluciones.*

124. La resolución de ecuaciones y sistemas de cualquier grado constituye el fin principal del Álgebra y la de los de primero y segundo grado, el particular del Álgebra elemental.

Una vez resueltos una ecuación ó un sistema de ecuaciones, debe procederse á su *comprobación* y, si es literal, á su *discusión.*

Comprobar una ecuación ó un sistema de ecuaciones *es sustituir en la ecuación ó ecuaciones los valores hallados para las incógnitas, con el fin de ver si éstas satisfacen ó nó á aquéllas y, en este último caso, corregir el error que se hubiere cometido.*

Discutir una ecuación ó un sistema de ecuaciones *es hacer todas las hipótesis posibles sobre las cantidades conocidas, con el fin de obtener las soluciones correspondientes á cada una de las hipótesis.*

ARTÍCULO II.

TRANSFORMACIONES DE UNA ECUACIÓN.

125. Transformar una ecuación *es deducir de ella otra equivalente.* La ecuación resultante se llama *transformada* de la primera.

126. Teorema. *Si á los dos miembros de una ecuación se suman ó restan cantidades iguales, resulta una ecuación equivalente á la propuesta.*

En efecto, todo valor de la incógnita que satisfaga á la ecuación $A = B$, satisfará á la ecuación $A \pm m = B \pm m$, pues como siempre $m = m$ y se tiene por hipótesis $A = B$, es evidente que $A \pm m = B \pm m$. Recíprocamente, todo valor que satisfaga á la ecuación $A \pm m = B \pm m$ hará necesariamente $A = B$ y, por lo tanto, satisfará á esta ecuación.

Corolario 1.º *En toda ecuación se puede pasar un término de un miembro á otro, cambiándole el signo;* pues ésto equivale á sumar ó restar dicho término en ambos miembros.

Escolio. A esta transformación se la da el nombre de *transposición*, y de lo expuesto se deduce la siguiente regla:

Para transponer un término en una ecuación se le cambia de signo.

Ejemplo. *Transponer los términos* **b** *y* **cx** *de la ecuación*

$$ax - b = cx + d.$$

Se tendrá $ax - cx = d + b$.

Corolario 2.º *En toda ecuación, se pueden colocar todos los términos en el primer miembro;* pues ésto equivale á restar de ámbos la suma algebráica de los del segundo.

Escolio. A esta transformación se la da el nombre de *reducción de la ecuación á cero*, y de lo expuesto se deduce la siguiente regla:

Para reducir una ecuación á cero se pasan al primer miembro todos los términos del segundo, cambiándolos de signo.

Ejemplo. *Reducir á cero la ecuación* $ax - b = cx - d$.

Se tendrá $ax - b - cx + d = 0$.

127. Teorema. *Si los dos miembros de una ecuación se multiplican por una misma cantidad, distinta de cero é independiente de toda incógnita, resulta una ecuación equivalente á la propuesta.*

En efecto: 1.º Si m es una cantidad conocida, diferente de *cero*, todo valor de la incógnita que satisfaga á la ecuación $A = B$ satisfará á la ecuación $Am = Bm$, pues la primera se puede poner en la forma $A - B = 0$ y la segunda en la forma $(A - B)m = 0$, de la que resulta que, siendo $A - B = 0$ y m una cantidad finita, el producto $(A - B)m$ será igual á *cero*. Recíprocamente, todo valor de la incógnita que satisfaga á la ecuación $Am = Bm$ ó $(A - B)m = 0$ hará necesariamente $A - B = 0$ ó $A = B$ y, por lo tanto, satisfará á esta ecuación.

2.º Si m fuese *cero*, la igualdad $A \times 0 = B \times 0$ quedaría satisfecha por cualquier valor de la incógnita, es decir, que tendría un número ilimitado de soluciones, lo que puede no suceder á la ecuación $A = B$.

3.º Si m fuese dependiente de la incógnita, la ecuación $Am = Bm$ ó $(A - B)m = 0$ quedaría satisfecha siendo $A - B = 0$ y siendo $m = 0$ y, por lo tanto, dicha ecuación tendría las soluciones que dé la ecuación $A - B = 0$ ó sea $A = B$, que es la propuesta, y además, las que dé la ecuación $m = 0$, que serán, en general, extrañas á las de aquélla. Sin embargo, si m, aunque dependiente de la incógnita fuese divisor de algún término de la ecuación $A = B$, sin serlo de todos, al multiplicar por m sus dos miembros, no aparecería la incógnita como factor común en los de la ecuación resultante, y no existiendo ya en ésta las soluciones que dé la ecuación $m = 0$, sólo tendría las de la ecuación propuesta: luego *toda ecuación se puede multiplicar por una cantidad dependiente de la incógnita, que no sea denominador de todos los términos de la ecuación.*

Corolario 1.º *En toda ecuación se puede cambiar los signos á todos sus términos;* pues ésto equivale á multiplicarla por -1.

Así, por ejemplo, de la ecuación $ax - b = cx + d$ se obtiene, multiplicándola por -1, su equivalente

$$(ax - b) \times -1 = (cx + d) \times -1, \text{ ó sea, } -ax + b = -cx - d.$$

Corolario 2.º *En toda ecuación que tenga términos enteros y fraccionarios, del mismo denominador numérico, se puede suprimir éste y multiplicar por él, los términos enteros;* pues ésto equivale á multiplicar sus dos miembros por una misma cantidad conocida y distinta de cero.

Escolio. A esta transformación se le da el nombre de *supresión de los denominadores*, y de lo expuesto se deduce la siguiente regla:

Para suprimir los denominadores de una ecuación se halla el denominador común y se multiplica cada numerador por el factor que falte á su denominador para componer dicho denominador común y, por éste, los términos enteros.

Ejemplos.

1.° *Suprimir los denominadores de la ecuación*

$$\frac{3x}{2ab}-5x+\frac{11}{6a}-\frac{4x}{7}=6a^2x-\frac{9}{16b}.$$

El procedimiento de la operación es el siguiente:

$2ab=2ab$ $6a=2.3a$ $7=7$ $16b=2^4.6$	El mínimo denominador común, según la descomposición expuesta al márgen, es $2^4\times 3\times 7ab=336ab$, que, dividido por los denominadores $2ab$, $6a$, 7 y $16b$, dá, respectivamente, los cocientes 168, $56b$, $48ab$ y $21a$;

luego se tendrá la ecuación de términos enteros

$$3x.168-5x.336ab+11\times 56b-4x.48ab=6a^2x.336ab-9.21a, \text{ ó sea}$$

$$504x-1680abx+616b-192abx=2016a^3bx-189a,$$

equivalente á la propuesta.

2.° *Suprimir los denominadores de la ecuación*

$$\frac{3a}{2x}+4x=\frac{7x}{4ab}-\frac{5}{6bx}.$$

El procedimiento de la operación es el siguiente:

$2x=2x$ $4ab=2^2.ab$ $6bx=2.3bx$	El mínimo denominador común, según la descomposición expuesta al márgen, es $2^2\times 3abx=12abx$, que, dividido por los denominadores $2x$, $4ab$ y $6bx$, dá, respectivamente, los cocientes $6ab$, $3x$ y $2a$;

luego se tendrá la ecuación de términos enteros

$$3a.6ab+4x.12abx=7x.3x-5.2a \quad \text{ó sea}$$

$$18a^2b+48abx^2=21x^2-10a,$$

equivalente á la propuesta.

128. Teorema. *Si los dos miembros de una ecuación se dividen por una misma cantidad, distinta de cero é independiente de toda incógnita, resulta una ecuación equivalente á la propuesta.*

En efecto: 1.° Si m es una cantidad conocida, puesto que en el teorema anterior se ha demostrado la equivalencia de las ecuaciones $A=B$ y $Am=Bm$, y de ésta se obtiene aquélla, dividiendo sus dos miembros por m, queda demostrado el teorema.

2.° Si m fuese *cero*, como la igualdad $\frac{A}{0}=\frac{B}{0}$ no tiene sentido alguno, por ser infinitos sus dos miembros, no se podrá afirmar ni negar que sea equivalente á la propuesta.

3.° Si m fuese dependiente de la incógnita, dividiendo A y B por m y llamando A′ y B′ á los respectivos cocientes, se tendrá la ecuación $A'=B'$ que, multiplicada por m, dará $A'm=B'm$, ó sea la propuesta $A=B$; pero, como la ecuación $A'm=B'm$ tiene las soluciones de la ecuación $A'=B'$, más las que dé la ecuación $m=0$, la ecuación $A'=B'$, ó sea, $\frac{A}{m}=\frac{B}{m}$, tendrá, en general, las soluciones de la $A'm=B'm$ ó sea $A=B$, menos las de la ecuación $m=0$. Sin embargo, si m, aunque dependiente de la incógnita, fuese factor de algún término de la ecuación $A=B$, sin serlo de todos, al dividir por m sus dos miembros no aparecería la incógnita como divisor común en los de la ecuación resultante y ésta tendría las mismas soluciones que la propuesta; luego *toda ecuación se puede dividir por una cantidad dependiente de la incógnita, que no sea factor de todos los términos de la ecuación.*

Corolario 1.° *En toda ecuación se puede cambiar los signos á todos sus términos,* pues ésto equivale á dividirla por -1.

Así, por ejemplo, de la ecuación $ax-b=cx+d$ se obtiene, dividiéndola por -1, su equivalente

$$(ax-b):(-1)=(cx+d):(-1), \text{ ó sea, } -ax+b=-cx-d.$$

Corolario 2.° *En toda ecuación se puede suprimir un factor conocido, común á todos sus términos;* pues ésto equivale á dividir sus dos miembros por una misma cantidad conocida y distinta de cero.

Escolio. A esta transformación se la da el nombre de *simplificación de una ecuación*, y de lo expuesto se deduce la siguiente regla:

Para simplificar una ecuación se dividen sus coeficientes por el factor común que tengan.

Ejemplos.

1.° *Simplificar la ecuación* $21ax+15bc-42c^2=9x^3+33$.

Dividiendo sus coeficientes por el factor 3, común á todos ellos, se tiene la ecuación $7ax+5bc-14c^2=3x^3+11$, equivalente á la propuesta.

2.° *Simplificar la ecuación* $8abx-14a^2c+40a=6a^3b^2x^2-2ax$.

Dividiendo sus coeficientes por el factor $2a$, común á todos ellos, se tiene la ecuación $4bx-7ac+20=3a^2b^2x^2-x$, equivalente á la propuesta.

129. Se dice que una ecuación *está preparada para su resolución* cuando se presenta reducida á cero, sin denominadores, sin términos semejantes, simplificada, ordenada y con el primer término positivo.

Ejemplo. *Preparar, para su resolución, la ecuación*

$$\frac{3x}{5}+\frac{4x(8-x)}{2}-6=\frac{2x(x-3)}{8x}-\frac{9}{x}.$$

Se tendrá: **1.°** Reduciéndola á cero.

$$\frac{3x}{5}+\frac{4x(8-x)}{2}-6-\frac{2x(x-3)}{8x}+\frac{9}{x}=0.$$

2.° Suprimiendo los denominadores, cuyo mínimo común múltiplo es $40x$,

$$24x^2+80x^2(8-x)-240x-10x(x-3)+360=0.$$

3.° Reduciendo los términos semejantes, previa la obtención de los productos indicados,

$$654x^2-80x^3-210x+360=0.$$

4.° Simplificándola,

$$327x^2-40x^3-105x+180=0.$$

5.° Ordenándola,

$$-40x^3+327x^2-105x+180=0.$$

6.° Cambiando sus signos, para que el primero sea positivo,

$$40x^3-327x^2+105x-180=0.$$

CAPÍTULO II.

DE LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

ARTÍCULO PRIMERO.

RESOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA.

130. Toda ecuación de primer grado con una incógnita tiene, después de preparada, la forma general

$$ax+b=0.$$

Para resolverla, pasemos el término conocido al segundo miembro, con lo que resulta la transformada

$$ax=-b,$$

de la que, dividiendo ambos miembros por el coeficiente a, se tiene la fórmula general

$$x=-\frac{b}{a},$$

que expresa que *en toda ecuación de primer grado con una incógnita, ésta es igual al segundo término, cambiado de signo, dividido por el coeficiente del primero.*

Comprobación. Sustituyendo el valor de x en la ecuación propuesta, se obtiene la identidad

$$a\left(-\frac{b}{a}\right)+b=0,$$

puesto que $a\left(-\frac{b}{a}\right)=-b$ y, por lo tanto,

$$a\left(-\frac{b}{a}\right)+b=-b+b=0.$$

Discusión. Como el valor, $x=\frac{-b}{a}$, de la incógnita de la ecuación de primer grado, $ax+b=0$, depende de la modalidad y del valor numérico de los coeficientes, para discutir esta ecuación se debe atender al signo de b, puesto que el de a se puede hacer positivo si no lo fuera (**127** ó **128-Cor. 1.°**), y á los valores particulares de a y de b.

En el primer concepto, procede considerar las dos hipótesis siguientes:

Primera: b positivo.

En esta hipótesis, la solución $\frac{-b}{a}$ es *negativa*.

Segunda: b negativo.

En esta hipótesis, la solución $\frac{b}{a}$ es *positiva*.

Bajo el punto de vista del valor numérico de a y de b conviene examinar la solución de la ecuación en las tres hipótesis siguientes:

Primera: $b=0$, sin serlo a.

En esta hipótesis, resulta la solución $\frac{-0}{a}$, que es *cero*.

Segunda: $a=0$, sin serlo b.

En esta resulta la solución $\frac{-b}{0}$, que es *infinita* (**61**).

Para interpretar esta solución basta sustituir 0 en vez de a en la ecuación propuesta que, por ello, se transforma en la igualdad imposible $0.x+b=0$ ó $0.x=-b$, lo que nos autoriza á establecer que *la solución infinita revela que la ecuación que la produce es absurda.*

Tercera: $a=0$ y $b=0$.

En esta hipótesis, resulta la solución $\frac{0}{0}$ que, por no tener a y b ningún factor común, es *indeterminada* (**61**).

Para interpretar esta solución basta sustituir 0 en vez de a y de b en la ecuación propuesta que, por ello, se transforma en la identidad $0x=0$, que queda satisfecha por cualquier valor de x, lo que nos autoriza á establecer que *la solución indeterminada revela que la ecuación que la produce es una identidad.*

Como resumen de esta discusión se tiene que la solución de una ecuación de primer grado con una incógnita puede ser *positiva, negativa, cero, infinita* é *indeterminada*.

131. Ejercicios

DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA.

1.° *Resolver la ecuación* $3\frac{7}{8}x-4\frac{5}{12}=25\frac{39}{40}-\frac{7}{15}x.$

Preparación.... $\frac{31x}{8}-\frac{53}{12}=\frac{1039}{40}-\frac{7x}{15}.$

$12=2^2.3$
$40=2^3.5$
$15=3.5$
$m.\,c.\,m.=2^3.3.5=120$

$$\frac{31x}{8}-\frac{53}{12}-\frac{1039}{40}+\frac{7x}{15}=0.$$
$$15\ 31x-10\ 53-3.1039+8.7x=0$$
$$465x-530-3117+56x=0$$
$$521x-3647=0.$$

Solución: $x=\frac{3647}{521}=7.$

2.° *Resolver la ecuación* $5x+9+8x=4x-18.$

Solución: $x=-\frac{27}{9}=-3.$

3.° *Resolver la ecuación* $14x+12-9x=2x+12.$

Solución: $x=\frac{0}{3}=0.$

4.° *Resolver la ecuación* $6x-9+5x=3x+40+8x.$

Solución: $x=\frac{49}{0}=\infty.$

5.° *Resolver la ecuación* $7x+5-3x=4x+5.$

Solución: $x=\frac{0}{0}.$

6.° *Resolver la ecuación* $\frac{ax}{a+b}-\frac{b}{a-b}-1=1-\frac{ax}{a-b}+\frac{b}{a+b}.$

Preparación. $\frac{ax}{a+b}-\frac{b}{a-b}-1-1+\frac{ax}{a-b}-\frac{b}{a+b}=0.$

$$(a-b)ax-(a+b)b-(a^2-b^2)-(a^2-b^2)+(a+b)ax-(a-b)b=0$$
$$a^2x-abx-ab-b^2-a^2+b^2-a^2+b^2+a^2x+abx-ab+b^2=0$$
$$2a^2x-2ab-2a^2+2b^2=0$$
$$a^2x-ab-a^2+b^2=0.$$

Solución: $x=\frac{a^2+ab-b^2}{a^2}.$

ARTÍCULO II.

RESOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DE PRIMER GRADO CON MÁS DE UNA INCÓGNITA.

132. Toda ecuación de primer grado con más de una incógnita tiene, después de preparada, la forma general

$$ax + by + cz + dv + \ldots + k = 0.$$

Para resolverla se considerarán como conocidas á todas las incógnitas menos una, por ejemplo la x, y se tendrá la expresión

$$x = \frac{-by - cz - dv - \ldots - k}{a}$$

de la que, dando valores arbitrarios á las incógnitas y, z, v, etc. y deduciendo los correspondientes de x, se obtendrá un número ilimitado de soluciones, lo que revela que la ecuación propuesta es *indeterminada*.

Escolio. De aquí se deduce la siguiente regla:

Para resolver una ecuación de primer grado con más de una incógnita se despeja una de ellas, en función de las demás, y se dan á éstas sucesivamente valores arbitrarios, con lo que se tendrá un número ilimitado de soluciones de la ecuación propuesta (*).

Ejemplo. *Resolver la ecuación* $3x + 4y - 2 = 0$.

Se tiene $x = \dfrac{-4y+2}{3} = -\dfrac{4y-2}{3}$,

de donde, dando á y los valores 0, 1, 2, 3..... etc. resultan las soluciones

$$y = 0\ ;\ y = 1\ ;\ y = 2\ ;\ y = 3\ \ldots\ldots \text{etc.}$$

$$x = \frac{2}{3}\ ;\ x = -\frac{2}{3}\ ;\ x = -2\ ;\ x = -\frac{10}{3}\ \ldots\ldots \text{etc.}$$

(*) El número de soluciones se limitaría si se tratase de obtener solamente las enteras y, más aún, si las enteras y positivas, pero tales investigaciones rebasan los límites de un estudio elemental.

CAPÍTULO III.

DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

ARTÍCULO PRIMERO.

DE LA ELIMINACIÓN.

133. Sistema de ecuaciones de primer grado *es el formado por ecuaciones de primer grado.*

Todo sistema de m ecuaciones de primer grado tiene, después de preparado, la forma general

$$\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + k_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + k_2 = 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + \ldots + k_3 = 0 \\ \vdots \quad\ \ \vdots \quad\ \ \vdots \quad\quad\quad\ \ \vdots \\ a_m x + b_m y + c_m z + \ldots + k_m = 0 \end{array}$$

La resolución de cualquier sistema de ecuaciones exige una transformación previa del sistema, por la que se llega á obtener una ecuación que contenga solamente una de las incógnitas del sistema, lo que se consigue por medio de **la eliminación.**

134. Eliminar una incógnita en un sistema de ecuaciones *es transformarle en otro equivalente cuyas ecuaciones, excepto una, no contengan aquella incógnita.*

Para la eliminación de una incógnita en un sistema de ecuaciones pueden seguirse varios métodos, de los que los más sencillos son los llamados por *sustitución* y por *reducción*.

135. Eliminación por sustitución.

Teorema. *Si en un sistema de ecuaciones se despeja una de las incógnitas en una de ellas y se sustituye su valor en las demás, el sistema formado por aquélla y las resultantes de la sustitución es equivalente al propuesto.*

En efecto, sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{l} a_1 x+b_1 y+c_1 z+d_1 u+\ldots+k_1=0 \\ a_2 x+b_2 y+c_2 z+d_2 u+\ldots+k_2=0 \\ a_3 x+b_3 y+c_3 z+d_3 u+\ldots+k_3=0 \\ \vdots \\ a_m x+b_m y+c_m z+d_m u+\ldots+k_m=0, \end{array}$$

el que, representando los primeros miembros por A_1, A_2, A_3, .. A_m, respectivamente, tomará la forma

$$\left.\begin{array}{l} A_1=0 \\ A_2=0 \\ A_3=0 \\ \vdots \\ A_m=0 \end{array}\right\} \quad (1).$$

Si designamos por α el valor de la incógnita x, obtenido de la primera de las ecuaciones dadas, y por B_2, B_3....B_m, la forma que toman los primeros miembros de las demás, después de sustituir en ellas dicho valor en vez de x, se tendrá el sistema

$$\left.\begin{array}{l} x=\alpha \\ B_2=0 \\ B_3=0 \\ \vdots \\ B_m=0 \end{array}\right\} \quad (2).$$

Los sistemas (1) y (2) son equivalentes, pues cualquier solución del sistema (1) verificará á todas las ecuaciones que lo componen, así como también á la ecuación, $x=\alpha$, del sistema (2), que es una transformada de la ecuación, $A_1=0$, del sistema (1). Además, las restantes ecuaciones del sistema (2) son equivalentes á las restantes del (1), porque no son otra cosa que el resultado de reemplazar en éstas la incógnita x por su valor α.

Recíprocamente, cualquier solución del sistema (2) lo será también del (1), pues la que lo sea de la ecuación, $x=\alpha$, lo será de su transformada, $A_1=0$, y además, las restantes ecuaciones del sistema (1) son equivalentes á las restantes del (2), porque no son otra cosa que el resultado de reemplazar en éstas, α por su igual x.

Escolio. De aquí se deduce la siguiente regla:

Para eliminar, por sustitución, una incógnita en un sistema de ecuaciones se despeja en una de ellas, se sustituye su valor en las demás y se forma un sistema con aquella ecuación y las resultantes de la sustitución.

Ejemplos.

1.° *Eliminar la* **x**, *por sustitución, en el sistema de ecuaciones*

$$\begin{array}{l} 2x-7y+4z+21=0 \\ 5x+6y+3z-41=0. \end{array}$$

De la primera se obtiene, $x=\dfrac{7y-4z-21}{2}$,

cuyo valor, sustituido en la segunda, da la ecuación

$$\frac{35y-20z-105}{2}+6y+3z-41=0$$

ó sea $35y-20z-105+12y+6z-82=0$

ó sea $47y-14z-187=0$,

que, con la primera del sistema dado, forma el sistema equivalente á él,

$$\begin{array}{l} 2x-7y+4z+21=0 \\ 47y-14z-187=0. \end{array}$$

2.° *Eliminar la* **x**, *por sustitución, en el sistema de ecuaciones*

$$\begin{array}{l} x+2y+z+3u-24=0 \\ 2x-3y+z-2u+1=0 \\ 3x-2y-3z+u-6=0 \\ 5x-5y+2z-2u-13=0. \end{array}$$

De la primera se obtiene, $x=-2y-z-3u+24$,

cuyo valor, sustituido en las restantes, da las ecuaciones

$$\begin{array}{l} 7y+z+8u-49=0 \\ 4y+3z+4u-33=0 \\ 15y+3z+17u-107=0, \end{array}$$

que, con la primera del sistema dado, forman el sistema equivalente á él,

$$\begin{array}{l} x+2y+z+3u-24=0 \\ 7y+z+8u-49=0 \\ 4y+3z+4u-33=0 \\ 15y+3z+17u-107=0. \end{array}$$

136. Eliminación por reducción.

Teorema. *Si en un sistema de ecuaciones se suma ó resta miembro á miembro una de ellas con cada una de las demás, después de haber multiplicado aquélla y éstas por un factor conocido y distinto de cero, el sistema formado por la primera ecuación y las resultantes es equivalente al propuesto.*

En efecto: 1.º Sea el sistema de dos ecuaciones

$$\begin{aligned} ax + by + cz + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + k &= 0 \\ a'x + b'y + c'z + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + k' &= 0, \end{aligned}$$

el que, representando los primeros miembros por A y A', respectivamente, tomará la forma

$$\left.\begin{aligned} A &= 0 \\ A' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1).$$

Si después de multiplicar la primera de estas ecuaciones por a' y la segunda por a, las sumamos ó restamos miembro á miembro, la ecuación resultante tendrá la forma

$$Aa' \pm A'a = 0,$$

que, con la primera ecuación del sistema (1), formará el sistema de las dos ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} Aa' \pm A'a &= 0 \\ A &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (2).$$

Los sistemas (1) y (2) son equivalentes, pues cualquier solución, $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma \ldots$ etc. del sistema (1) hará á A y á A' iguales á *cero* y, por consiguiente, á $Aa' \pm A'a$; luego satisfará también al sistema (2).

Recíprocamente, cualquier solución, $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma\ldots$ etc. del sistema (2) hará á A y á $Aa' \pm A'a$ iguales á *cero*; mas para que esto último se verifique es necesario que sea también A' igual á *cero*, puesto que a no lo es, por hipótesis; luego dicha solución satisfará también al sistema (1).

2.º Sea el sistema de m ecuaciones

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1u + \ldots\ldots + k_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2u + \ldots\ldots + k_2 &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3u + \ldots\ldots + k_3 &= 0 \\ &\vdots \\ a_mx + b_my + c_mz + d_mu + \ldots\ldots + k_m &= 0, \end{aligned}$$

el que, representando los primeros miembros por A_1 A_2 $A_3 \ldots A_m$, respectivamente, tomará la forma

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= 0 \\ A_2 &= 0 \\ A_3 &= 0 \\ &\vdots \\ A_m &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (3).$$

Si designamos por n y n', p y p',.. q y q' los factores por que se multiplican las ecuaciones 1.ª y 2.ª, 1.ª y 3.ª... 1.ª y *emésima* para eliminar una de las incógnitas, se tendrá, después de la eliminación, el sistema

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= 0 \\ A_1n - A_2n' &= 0 \\ A_1p - A_3p' &= 0 \\ \vdots \quad\; \vdots \quad & \;\;\vdots \\ A_1q - A_mq' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (4).$$

formado por la primera ecuación del propuesto y las resultantes de eliminar dicha incógnita entre ella y las demás del sistema, una á una.

Los sistemas (3) y (4) son equivalentes, pues cualquier solución, $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma \ldots$ etc. del sistema (3) hará á A_1, A_2, A_3, ... A_m iguales á *cero* y, por consiguiente, á $A_1n - A_2n'$, $A_1p - A_3p', \ldots A_1q - A_mq'$; luego satisfará también al sistema (4).

Recíprocamente, cualquier solución, $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma \ldots$ etc. del sistema (4) satisfará al sistema (3), pues siendo $A_1 = 0$, las demás ecuaciones se convertirán en

$$\begin{aligned} -A_2n' &= 0 \\ -A_3p' &= 0 \\ &\vdots \\ -A_mq' &= 0, \end{aligned}$$

de las que, por no ser *cero* los factores n', p', ... q', se tendrá necesariamente

$$\begin{aligned} A_2 &= 0 \\ A_3 &= 0 \\ &\vdots \\ A_m &= 0 \end{aligned}$$

Escolio. De aquí se deduce la siguiente regla:

Para eliminar, por reducción, *una incógnita en un sistema de dos ecuaciones se hace que dicha incógnita tenga el mismo coeficiente en ambas, para lo cual, si no lo tiene, se multiplica cada una de ellas por el coeficiente que en la otra tiene la incógnita que se va á eliminar: se suman ó restan las ecuaciones resultantes, según que en ellas tengan signos contrarios ó iguales los términos que contienen á dicha incógnita, y se forma un sistema con la ecuación resultante y una de las del sistema propuesto.*

Si el sistema es de más de dos ecuaciones, se elimina la incógnita entre una de ellas y cada una de las demás y se forma un sistema con las ecuaciones resultantes y una de las del sistema propuesto.

Observación. Si los coeficientes de la incógnita que se elimina son numéricos, será preferible hallar su mínimo común múltiplo y multiplicar cada ecuación por el factor que falte al coeficiente de dicha incógnita en ella para componer aquél.

Ejemplos.

1.° *Eliminar la* **x**, *por reducción, en el sistema de ecuaciones*

$$2x - 7y + 4z + 21 = 0$$
$$5x + 6y + 3z - 41 = 0.$$

Como el mínimo común múltiplo de 2 y 5 es $2 \times 5 = 10$, se tendrá el sistema de ecuaciones

$$10x - 35y + 20z + 105 = 0$$
$$10x + 12y + 6z - 82 = 0$$

de las que, restadas, se obtiene la ecuación $47y - 14z - 187 = 0$

que, con la primera de las ecuaciones del sistema propuesto, forma el sistema equivalente á él,

$$2x - 7y + 4z + 21 = 0$$
$$47y - 14z - 187 = 0.$$

2.° *Eliminar la* **x**, *por reducción, en el sistema de ecuaciones*

$$x + 2y + z + 3u - 24 = 0$$
$$2x - 3y + z - 2u + 1 = 0$$
$$3x - 2y - 3z + u - 6 = 0$$
$$5x - 5y + 2z - 2u - 13 = 0.$$

De la eliminación de la x entre las ecuaciones

1.ª y 2.ª se obtiene la ecuación $7y + z + 8u - 49 = 0$

1.ª y 3.ª.................. $4y + 3z + 4u - 33 = 0$

1.ª y 4.ª.................. $15y + 3z + 17u - 107 = 0$

las que, con la primera del sistema propuesto, forman el sistema equivalente á él,

$$x + 2y + z + 3u - 24 = 0$$
$$7y + z + 8u - 49 = 0$$
$$4y + 3z + 4u - 33 = 0$$
$$15y + 3z + 17u - 107 = 0.$$

ARTÍCULO II.

RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE PRIMER GRADO CON TANTAS ECUACIONES COMO INCÓGNITAS.

137. Para facilitar el estudio de esta resolución conviene distinguir dos casos, según que las ecuaciones del sistema sean dos ó más de dos.

138. Primer caso. *Resolución de un sistema de dos ecuaciones de primer grado, con dos incógnitas.*

Sea, en general, el sistema

$$\left.\begin{array}{l} ax + by + k = 0 \\ a'x + b'y + k' = 0 \end{array}\right\} \quad (1).$$

Eliminemos en él una de las incógnitas, la x por ejemplo, y se tendrá el sistema, equivalente al propuesto,

$$\left.\begin{array}{r} ax + by + k = 0 \\ (ab' - ba')x + (ak' - ka') = 0 \end{array}\right\} \quad (2)$$

del que, resolviendo la segunda ecuación, se obtiene

$$y = \frac{ka' - ak'}{ab' - ba'} \quad (\alpha).$$

El valor de x se obtendrá de la ecuación que resulte de sustituir en la primera de las del sistema (2) el valor obtenido para y, de la segunda, lo que dará la ecuación

$$ax + b\left(\frac{ka' - ak'}{ab' - ba'}\right) + k = 0,$$

de la que se obtiene $x = \dfrac{bk' - kb'}{ab' - ba'}$ (β).

Si en vez de eliminar la x en el sistema (1), se hubiera eliminado la y, se habría obtenido el sistema de ecuaciones

$$ax + by + k = 0$$
$$(ab' - ba')x + (kb' - bk') = 0,$$

del que, por análogo procedimiento, se obtienen los valores

$$x = \frac{bk' - kb'}{ab' - ba'} \quad \text{é} \quad y = \frac{ka' - ak'}{ab' - ba'}$$

que son los mismos (β) y (α) hallados anteriormente.

Escolio. De lo expuesto se deduce la siguiente regla: *Para resolver un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas se elimina una de éstas entre las dos ecuaciones y se resuelve la ecuación resultante; el valor que se obtiene para la otra incógnita se sustituye en una de las ecuaciones del sistema y se resuelve la transformada que resulta.*

Ejemplos.

1.° *Resolver el sistema de dos ecuaciones, con dos incógnitas,*

$$2x - 5y + 7 = 0$$
$$6x - 11y + 9 = 0.$$

Eliminando la x por el método de reducción, que es el más usado, se tiene el sistema

$$2x - 5y + 7 = 0$$
$$-4y + 12 = 0,$$

de cuya segunda ecuación se obtiene, $y = 3$, cuyo valor, sustituido en la primera, la transforma en $2x - 8 = 0$, de la que se obtiene, $x = 4$.

Observación. Si en las fórmulas generales (α) y (β) se sustituyen a, b, k, a', b' y k' por $2, -5, 7, 6, -11$ y 9, respectivamente, se obtienen los valores

$$y = \frac{7 \times 6 - 2 \times 9}{2 \times (-11) - (-5) \times 6} = \frac{24}{8} = 3$$

$$x = \frac{(-5) \times 9 - 7 \times (-11)}{2 \times (-11) - (-5) \times 6} = \frac{32}{8} = 4,$$

que son los mismos hallados por la resolución directa del sistema propuesto.

2.° *Resolver el sistema de dos ecuaciones, con dos incógnitas,*

$$6x - 7y - 44 = 0$$
$$9y + 18 = 0.$$

Como la segunda ecuación de este sistema carece de la incógnita x, despejando en ella la y, se obtiene, $y = -2$, cuyo valor, sustituido en la primera, se transforma en $6x - 30 = 0$, de la que se obtiene, $x = 5$.

Observación. Si en las fórmulas generales (α) y (β) se sustituyen a, b, k, a', b' y k', por 6, -7, -44, 0, 9 y 18, respectivamente, se obtienen los valores

$$y = \frac{(-44) \times 0 - 6 \times 18}{6 \times 9 - (-7) \times 0} = \frac{-108}{54} = -2$$

$$x = \frac{(-7) \times 18 - (-44) \times 9}{6 \times 9 - (-7) \times 0} = \frac{270}{54} = 5.$$

que son los mismos hallados por la resolución directa del sistema propuesto.

139. Segundo caso. *Resolución de un sistema de* **m** *ecuaciones de primer grado, con* **m** *incógnitas.*

Sea, en general, el sistema de m ecuaciones con m incógnitas

$$\begin{aligned} A_1 &= 0 \\ A_2 &= 0 \\ A_3 &= 0 \\ &\vdots \\ A_m &= 0. \end{aligned}$$

Eliminando en él una incógnita entre las m ecuaciones y designando por $B_1 = 0$, $B_2 = 0 \ldots\ldots B_{m-1} = 0$ las ecuaciones resultantes de la eliminación, se tendrá el sistema de m ecuaciones

$$\begin{aligned} A_1 &= 0 \\ B_1 &= 0 \\ B_2 &= 0 \\ B_3 &= 0 \\ &\vdots \\ B_{m-1} &= 0, \end{aligned}$$

equivalente al propuesto, en el que la ecuación $A_1 = 0$ tiene m incógnitas y las demás, $m-1$.

Eliminando una nueva incógnita entre las $m-1$ ecuaciones obtenidas de la eliminación anterior y designando por $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, ... $C_{m-2} = 0$ las ecuaciones resultantes de esta nueva eliminación, se tendrá el sistema de m ecuaciones

$$\begin{aligned} A_1 &= 0 \\ B_1 &= 0 \\ C_1 &= 0 \\ C_2 &= 0 \\ C_3 &= 0 \\ &\vdots \\ C_{m-2} &= 0. \end{aligned}$$

equivalente al propuesto, en el que la ecuación $A_1 = 0$ tiene m incógnitas, la $B_1 = 0$ tiene $m-1$ y las demás, $m-2$.

Es evidente que si, en éste y en los sucesivos sistemas resultantes, se sigue el mismo procedimiento eliminatorio, se llegará á obtener un sistema de m ecuaciones, en el que habrá una ecuación con m incógnitas, otra con $m-1$, otra con $m-2$, y así sucesivamente hasta una ecuación con una incógnita.

Escolio. De lo expuesto se deduce la siguiente regla: *Para resolver un sistema de* m *ecuaciones de primer grado, con* m *incógnitas, se elimina una de éstas en el sistema propuesto; después otra entre las* m — 1 *ecuaciones que resultan, y así sucesivamente hasta formar un sistema de* m *ecuaciones, en el que la última sea de una sola incógnita. Se resuelve esta ecuación y el valor de la incógnita se sustituye en la ecuación con dos incógnitas, de la que se obtiene el valor de otra; estos dos valores se sustituyen en la ecuación con tres incógnitas, de la que se obtiene el valor de una tercera, y así se continúa hasta que, de la primera ecuación, se obtenga el valor de la última incógnita.*

Ejemplo. *Resolver el sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned} x+2y+z+3u-24&=0\\ 2x-3y+z-2u+1&=0\\ 3x-2y-3z+u-6&=0\\ 5x-5y+2z-2u-13&=0. \end{aligned}$$

Eliminando la z entre las 1.ª y 2.ª, 1.ª y 3.ª, 1.ª y 4.ª de las ecuaciones propuestas, resulta el sistema

$$\begin{aligned} x+2y+z+3u-24&=0\\ x-5y-5u+25&=0\\ 3x+2y+5u-39&=0\\ 3x-9y-8u+35&=0, \end{aligned}$$

el que, eliminando la x entre las 2.ª y 3.ª, 2.ª y 4.ª, da el sistema

$$\begin{aligned} x+2y+z+3u-24&=0\\ x-5y-5u+25&=0\\ 17y+20u-114&=0\\ 6y+7u-40&=0, \end{aligned}$$

el que, eliminando la y entre la 3.ª y 4.ª, da el sistema

$$\begin{aligned} x+2y+z+3u-24&=0\\ x-5y-5u+25&=0\\ 17y+20u-114&=0\\ u-4&=0. \end{aligned}$$

De la cuarta ecuación de este último sistema se obtiene, $u=4$; de la tercera, $y=2$; de la segunda, $x=5$, y de la primera, $z=3$; cuyos valores, sustituídos en las ecuaciones del sistema propuesto, las transforman en identidades.

140. Como para resolver un sistema de m ecuaciones de primer grado con m incógnitas se obtiene el valor de cada una de éstas resolviendo una ecuación de primer grado con una incógnita, la forma que podrá tener el valor de cada una de aquéllas será alguna de las cinco ya enumeradas (**130-Discusión**) *positiva, negativa, cero, infinita* ó *indeterminada*.

141. La incógnita que tenga un valor infinito, revelando el absurdo de la ecuación que la contiene (**130-Discusión**), indica que no hay valor alguno que la satisfaga y, por consiguiente, que no es posible que forme parte de un sistema. En este caso se dice que éste es *imposible* porque sus ecuaciones son *incompatibles.*

Ejemplo de sistemas imposibles es el siguiente:

$$\begin{aligned} x-y+z+u-2&=0\\ x+y+z-u+1&=0\\ x+y-z+3&=0\\ 3x+y-z+5&=0, \end{aligned}$$

el que, eliminando la u en la 1.ª y 2.ª de las ecuaciones propuestas, da el sistema

$$\begin{aligned} x-y+z+u-2&=0\\ 2x+2z-1&=0\\ x+y-z+3&=0\\ 3x+y+z+5&=0, \end{aligned}$$

el que, eliminando la y en la 3.ª y 4.ª, da el sistema

$$\begin{aligned} x-y+z+u-2&=0\\ 2x+2z-1&=0\\ x+y-z+3&=0\\ 2x+2z+2&=0, \end{aligned}$$

el que, eliminando la z en la 2.ª y 4.ª, da el sistema

$$\begin{aligned} x-y+z+u-2&=0\\ 2x+2z-1&=0\\ x+y-z+3&=0\\ 0.x-3&=0, \end{aligned}$$

que, manifiestamente, es imposible á causa del valor $x=\frac{3}{0}=\infty$ que se obtiene de la última ecuación $0.x-3=0$, evidentemente absurda.

Esta imposibilidad se podría haber reconocido, *à priori*, observando que la cuarta ecuación del sistema propuesto es incompatible con las demás, pues su segundo miembro y los términos literales del primero son las sumas de sus correspondientes en las tres primeras ecuaciones, lo que no sucede en los términos numéricos.

142. La incógnita que tenga un valor indeterminado, revelando una indeterminación en la ecuación que la contiene, indica que el sistema de que forma parte es también *indeterminado*.

Ejemplo de sistemas indeterminados es el siguiente:

$$\begin{aligned} x-y+z+u-2&=0 \\ x-y-z+1&=0 \\ x+z-u+3&=0 \\ 3x-2y+z+2&=0, \end{aligned}$$

el que, eliminando la u en la 1.ª y 3.ª de las ecuaciones propuestas, da el sistema

$$\begin{aligned} x-y+z+u-2&=0 \\ x-y-z+1&=0 \\ 2x-y+2z+1&=0 \\ 3x-2y+z+2&=0, \end{aligned}$$

el que, eliminando la y en las 2.ª y 3.ª, 2.ª y 4.ª, da el sistema

$$\begin{aligned} x-y+z+u-2&=0 \\ x-y-z+1&=0 \\ x+3z&=0 \\ x+3z&=0, \end{aligned}$$

el que, eliminando la z en la 3.ª y 4.ª, da el sistema

$$\begin{aligned} x-y+z+u-2&=0 \\ x-y-z+1&=0 \\ x+3z&=0 \\ 0.x&=0, \end{aligned}$$

que, manifiestamente, es indeterminado á causa del valor $x=\frac{0}{0}$ que se obtiene de la última ecuación $0.x=0$, que evidentemente es una identidad.

Esta indeterminación se podría haber reconocido, *à priori*, observando que la cuarta ecuación del sistema propuesto es la suma de las dos primeras, es decir, que es una ecuación nó distinta, sinó *consecuencia* de aquéllas.

ARTÍCULO III.

RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE PRIMER GRADO CON MÁS ECUACIONES QUE INCÓGNITAS.

143. Si en un sistema de m ecuaciones con $m-n$ incógnitas se resuelve el formado por $m-n$ de estas ecuaciones, se hallarán valores de las incógnitas que satisfarán á las ecuaciones elegidas; mas para que sean soluciones del sistema propuesto es preciso que satisfagan á las n ecuaciones restantes, llamadas *ecuaciones de condición*, pues si así no se verifica, el sistema es *imposible*, por ser *incompatibles* sus ecuaciones.

De aquí se deduce la siguiente regla:

Para resolver un sistema de m *ecuaciones de primer grado con* m—n *incógnitas se resuelve el formado por* m—n *de las ecuaciones con las* m—n *incógnitas, y las soluciones de este sistema lo serán del propuesto, si satisfacen á las* n *ecuaciones restantes.*

Ejemplo 1.º *Resolver el sistema*
$$\begin{aligned} 13x+7y-47&=0 \\ 5x+7y-31&=0 \\ 59x-7y-97&=0. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de las dos primeras ecuaciones se obtiene, $x=2$ é $y=3$, cuyos valores son la solución del sistema propuesto, porque satisfacen á la ecuación de condición $59x-7y-97=0$.

Ejemplo 2.º *Resolver el sistema*
$$\begin{aligned} 13x-7y-47&=0 \\ 5x+7y-31&=0 \\ 20x+2y+17&=0. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de las dos primeras ecuaciones, que son las mismas del ejemplo anterior, los valores, $x=2$ é $y=3$, no son la solución del sistema propuesto, porque no satisfacen á la ecuación de condición, $20x+2y+17=0$.

Los sistemas de primer grado con más ecuaciones que incógnitas son, en general, *imposibles*, pero si en sus ecuaciones hubiese algunos coeficientes literales, al sustituir en las ecuaciones de condición los valores de las incógnitas se tendrá un nuevo sistema cuyas incógnitas serán dichos coeficientes; de modo que, si éstos son en número igual ó mayor que el de ecuaciones de condición, el sistema propuesto será posible, siempre que se den á los coeficientes literales los valores obtenidos del segundo sistema.

ARTÍCULO IV.

RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE PRIMER GRADO CON MÉNOS ECUACIONES QUE INCÓGNITAS.

144. Si en un sistema de m ecuaciones con $m+n$ incógnitas se eliminan sucesivamente $m-1$ de éstas, se llegará á obtener una ecuación con las $n+1$ incógnitas restantes y, al resolverla, se obtendrá un número ilimitado de soluciones (**132**). Es, pues, evidente que sustituyendo cada una de éstas en cada una de las ecuaciones del sistema resultante de la eliminación, se obtendrá para cada una de las $m-1$ incógnitas eliminadas un número ilimitado de soluciones.

De aquí se deduce la siguiente regla:

Para resolver un sistema de m *ecuaciones de primer grado con* m+n *incógnitas se consideran* n *de éstas como conocidas; se resuelve, en función de ellas, el sistema de* m *ecuaciones con las restantes* m *incógnitas y en los valores de éstas se dan á aquéllas* n, *otros arbitrarios.*

Ejemplo. *Resolver el sistema* $3x+y-2z+1=0$
$2x-y+4z-21=0$.

Considerando á z como conocida y resolviendo este sistema, se obtiene $x=\dfrac{20-2z}{5}$ é $y=\dfrac{16z-65}{5}$;

de donde, dando á z los valores 0, 1, 2, 3 etc., resultan las soluciones

$z=0$; $z=1$; $z=2$; $z=3$......... etc.

$x=4$; $x=\dfrac{18}{5}$; $x=\dfrac{16}{5}$; $x=\dfrac{14}{5}$....... etc.

$y=-13$; $y=-\dfrac{49}{5}$; $y=-\dfrac{33}{5}$; $y=-\dfrac{17}{5}$..... etc.

Los sistemas de primer grado con ménos ecuaciones que incógnitas son, en general, *indeterminados*, pues su resolución conduce á la de una ecuación de primer grado con más de una incógnita que, como sabemos (**132**), es indeterminada (*).

(*) La obtención de las soluciones enteras y, más aún, la de las enteras y positivas limitaría el número de soluciones del sistema, según queda expuesto en la nota de la página 100.

CAPÍTULO IV.

DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

ARTÍCULO ÚNICO.

RESOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA.

145. Toda ecuación completa de segundo grado con una incógnita tiene, después de preparada, la forma general

$$ax^2+bx+c=0.$$

Para resolverla, multipliquémosla por $4a$ y resultará la transformada

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0.$$

Pasando en ésta el término $4ac$ al segundo miembro, se tendrá la nueva transformada

$$4a^2x^2+4abx=-4ac \ (\alpha),$$

cuyo primer miembro es igual á los dos primeros términos del cuadrado del binomio $2ax+b$.

Agregando, pues, b^2 á los dos miembros de la ecuación (α), se transforma en

$$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$$

ó sea, $(2ax+b)^2=b^2-4ac$,

de donde, extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros, resulta

$2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$ y, de aquí, $2ax=-b\pm\sqrt{b^2-4ac}$

y, finalmente,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

lo que indica que *en toda ecuación completa de segundo grado, con una incógnita, ésta es igual al coeficiente del segundo término, cambiado de signo, más ménos la raíz cuadrada del cuadrado de dicho coeficiente, disminuido en el cuádruplo del producto de los coeficientes de los términos extremos, dividido todo por el duplo del coeficiente del primero.*

Escolio. El doble signo que precede al radical en la expresión del valor de x manifiesta que, en toda ecuación de segundo grado, la incógnita tiene dos valores, que designándolos por x' y x'', serán, respectivamente,

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ y } x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Sumando y multiplicando estos valores, se obtienen las igualdades

$$x' + x'' = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a} \text{ y } x'x'' = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a},$$

que indican que las raíces de una ecuación de segundo grado tienen estas dos propiedades, que facilitan mucho su comprobación:

1.ª *su suma es igual al coeficiente del segundo término, cambiado de signo, dividido por el del primero.*

2.ª *su producto es igual al tercer término, dividido por el coeficiente del primero.*

Discusión. Como los valores x' y x'' de las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ dependen de la naturaleza del radical y del modo de ser y valor numérico de los coeficientes, para discutir esta ecuación se debe atender al valor de $b^2 - 4ac$, en todas las hipótesis posibles, considerando en cada una de ellas los signos de b y c, puesto que el de a se puede hacer positivo si no lo fuese (**127-Cor. 1.º**), y á los valores particulares de a, b y c.

En el primer concepto, procede hacer las tres hipótesis siguientes:

Primera: $b^2 - 4ac > 0$.

En esta hipótesis, el radical, $\sqrt{b^2 - 4ac}$, será real; las dos raíces de la ecuación serán, pues, *reales* y *desiguales* y, como sus signos dependerán de los de b y c, se tendrá:

1.º que si b y c son *positivos*, será $b^2 - 4ac > b^2$ y, por lo tanto, $\sqrt{b^2 - 4ac} > b$; luego las dos raíces x' y x'' serán *negativas*, siendo x' mayor que x'', por tener aquélla menor valor absoluto que ésta.

2.º que si b es *negativo* y c es *positivo*, será también $b^2 - 4ac > b^2$ y $\sqrt{b^2 - 4ac} > b$ y, como $-b$ será positivo, las dos raíces x' y x'' serán *positivas*, siendo x' mayor que x''.

3.º que si b y c son *negativos*, $b^2 - 4ac$ tomará la forma $b^2 + 4ac > b^2$ y, como $\sqrt{b^2 + 4ac} > b$ y $-b$ será *positivo*, la raíz x' será *positiva* y la x'' será *negativa*, siendo x' de mayor valor absoluto que x'', puesto que su suma será positiva (**Escolio** anterior-1.ª).

4.º que si b es *positivo* y c es *negativo*, $b^2 - 4ac$ será también de la forma $b^2 + 4ac > b^2$ y como $\sqrt{b^2 + 4ac} > b$, la raíz x' será *positiva* y la x'' será *negativa*, siendo x' de menor valor absoluto que x'', puesto que su suma será negativa. (**Escolio** anterior-1.ª).

Segunda: $b^2 - 4ac = 0$.

En esta hipótesis, el radical $\sqrt{b^2 - 4ac}$ será igual á *cero* y, por consiguiente, las dos raíces x' y x'' serán *reales* é *iguales* á $-\frac{b}{a}$, es decir, *negativas*, si b es *positivo*, y *positivas*, si b es *negativo*.

Tercera: $b^2 - 4ac < 0$.

En esta hipótesis, el radical $\sqrt{b^2 - 4ac}$ será una expresión imaginaria y la solución de la ecuación se podrá poner en la forma

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{(4ac - b^2) \times (-1)}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\sqrt{-1},$$

que es un binomio imaginario que indica que las dos raíces, x' y x'', serán *imaginarias conjugadas*.

Para interpretar esta solución basta multiplicar por $4a$ la ecuación propuesta, que tomará la forma

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0,$$

que, sumando y restando, b^2, en su primer miembro, se transforma en

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 + 4ac - b^2 = 0$ ó sea, $(2ax + b)^2 + (b^2 - 4ac) = 0$,

ecuación absurda, pues siendo positivos los dos sumandos $(2ax + b)^2$ y $b^2 - 4ac$, su suma no puede ser igual á *cero*, lo que nos autoriza á establecer que *la solución imaginaria de una ecuación de segundo grado revela un absurdo en la ecuación que la produce.*

Bajo el punto de vista del valor numérico de los coeficientes, a, b y c, procede considerar los casos en que alguno de ellos sea *cero* y, por tanto, examinar la solución de la ecuación en las cuatro hipótesis siguientes:

Primera: $b=0$, sin serlo a ni c.

En esta hipótesis, la solución de la ecuación tendrá la forma, $x=\dfrac{\pm\sqrt{-4ac}}{2a}=\pm\sqrt{\dfrac{-4ac}{4a^2}}=\pm\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$ y las dos raíces, serán $x'=\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$ y $x''=-\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$, *iguales y de signos contrarios, reales*, si c es *negativo*, é *imaginarias*, si c es *positivo*.

Observación. El mismo resultado se obtiene resolviendo la ecuación incompleta $ax^2+c=0$, que dá $x^2=-\dfrac{c}{a}$ y, de aquí, $x=\pm\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$.

Segunda: $c=0$, sin serlo a ni b.

En esta hipótesis, la solución de la ecuación tendrá la forma, $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2}}{2a}=\dfrac{-b\pm b}{2a}$, y las dos raíces serán $x'=\dfrac{-b+b}{2a}=\dfrac{0}{2a}=0$ y $x''=\dfrac{-b-b}{2a}=\dfrac{-2b}{2a}=\dfrac{-b}{a}$, siendo x'' *negativa*, si b es *positivo*, y *positiva*, si b es *negativo*.

Observación. El mismo resultado se obtiene resolviendo le ecuación incompleta $ax^2+bx=0$, de la que resulta la ecuación $x(ax+b)=0$, que queda satisfecha siendo $x=0$ y, también, siendo $ax+b=0$, que dá $x=-\dfrac{b}{a}$.

Tercera: $b=0$ y $c=0$, sin serlo a.

En esta hipótesis, la solución de la ecuación tendrá la forma $x=\dfrac{0}{2a}=0$, y las dos raíces serán $x'=0$ y $x''=0$.

Observación. El mismo resultado se obtiene resolviendo la ecuación incompleta $ax^2=0$, que sólo se satisface siendo $x=0$.

Cuarta: $a=0$.

En esta hipótesis, la solución de la ecuación tendrá la forma $x=\dfrac{-b\pm b}{0}$, y las dos raíces serán, la $x'=\dfrac{0}{0}$, *indeterminada*, y la $x''=\dfrac{-2b}{0}$, *infinita*.

Para interpretar la primera basta sustituir 0 en vez de a en la ecuación propuesta que, por ello, se transforma en la de primer grado, $bx+c=0$, de la que se obtiene $x=\dfrac{-c}{b}$.

Por otra parte, si se multiplican por $b+\sqrt{b^2-4ac}$ el numerador y el denominador del valor x', se tiene

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-4ac}{2a(b+\sqrt{b^2-4ac})}=\frac{-2c}{a(b+\sqrt{b^2-4ac})},$$

valor que, á medida que a disminuye, se aproxima á $\dfrac{-c}{b}$, que es el obtenido directamente de la ecuación $bx+c=0$.

Para interpretar la segunda, basta considerar que, á medida que disminuye a, el numerador de la expresión $x''=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ se aproxima á $-2b$, y como el denominador se aproxima á *cero*, se tendrá, en el límite, $x''=\dfrac{-2b}{0}$, lo que indica que esta raíz es el límite de la solución de la ecuación $ax^2+bx+c=0$, cuando a tiende á *cero*.

Si al mismo tiempo que $a=0$, fuese $b=0$, las raíces de la ecuación serían las mismas que acabamos de hallar y, si además fuese $c=0$, ambas raíces serían *indeterminadas*.

Como resúmen de esta discusión queda establecido que las raíces de una ecuación de segundo grado con una incógnita pueden ser *reales* ó *imaginarias*; que, en el caso de ser reales, pueden ser *positivas, negativas, cero, indeterminadas* é *infinitas*; y que, en el caso de ser imaginarias, son necesariamente *conjugadas*.

146. Ecuaciones bicuadradas.

Dependiente de la resolución de una ecuación de segundo grado con una incógnita es la de las particulares de cuarto grado, conocidas con el nombre de *ecuaciones bicuadradas*.

Llámase **bicuadrada** *á toda ecuación incompleta, de cuarto grado, que carece de términos en que la incógnita tenga exponentes impares.*

Una ecuación bicuadrada tiene, pues, en general, la forma

$$ax^4+bx^2+c=0.$$

Para resolverla, hagamos $x^4=y^2$, ó $x^2=y$, ó $x=\pm\sqrt{y}$ (α), con lo que se transforma en

$$ay^2+by+c=0,$$

que, resuelta, da $y=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,

de donde, sustituyendo este valor en la (α), resulta

$$x=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

La combinación de los dos signos de ambigüedad que aparecen en esta fórmula producen para x *cuatro valores*, que llamándolos, para abreviar, x', x'' x''' y x^{IV}, son

$$x'=\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},\quad x''=-\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

$$x'''=\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},\quad x^{\text{IV}}=-\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

147. Ejercicios

DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA Y DE ECUACIONES B CUADRADAS.

1.° *Resolver la ecuación,* $\dfrac{3x}{9}+x^2+\dfrac{42}{63}=-\dfrac{14x}{7}$.

Preparación... $\dfrac{3x}{9}+x^2+\dfrac{42}{63}+\dfrac{14x}{7}=0$

m. c. m. de los denominadores. 9.7=63.	$3x.7+63x^2+42+14x.9=0$
	$21x+63x^2+42+126x=0$
	$63x^2+147x+42=0$
	$21x^2+49x+14=0$
	$3x^2+7x+2=0.$

Solución: $x=\dfrac{-7\pm\sqrt{7^2-4.3.2}}{6}=\dfrac{-7\pm5}{6}$,

de donde, $x'=-\dfrac{1}{3}$ y $x''=-2$.

2.° *Resolver la ecuación,* $4x^2-51x+155=0$.

Solución: $x=\dfrac{51\pm\sqrt{51^2-4.4.155}}{8}=\dfrac{51\pm11}{8}$,

de donde, $x'=7{,}75$ y $x''=5$.

3.° *Resolver la ecuación,* $5x^2-13x-46=0$.

Solución: $x=\dfrac{13\pm\sqrt{13^2+4.5.46}}{10}=\dfrac{13\pm33}{10}$,

de donde, $x'=4{,}6$ y $x''=-2$.

4.° *Resolver la ecuación,* $8x^2+53x-21=0$.

Solución: $x=\dfrac{-53\pm\sqrt{53^2+4.8.21}}{16}=\dfrac{-53\pm59}{16}$,

de donde, $x'=0{,}375$ y $x''=-7$.

5.° *Resolver la ecuación,* $81x^2-90x+25=0$.

Solución: $x=\dfrac{90\pm\sqrt{90^2-4.81.25}}{162}=\dfrac{90}{162}=\dfrac{5}{9}$,

de donde, $x'=x''=\dfrac{5}{9}$.

6.º *Resolver la ecuación*, $x^2-18x+106=0$.

Solución: $x=\dfrac{18\pm\sqrt{18^2-4.1.106}}{2}=9\pm5\sqrt{-1}$,

de donde, $x'=9+5\sqrt{-1}$ y $x''=9-5\sqrt{-1}$.

7.º *Resolver la ecuación*, $7x^2-175=0$.

Solución: $x=\dfrac{0\pm\sqrt{4.7.175}}{14}=\dfrac{\pm70}{14}=\pm5$,

de donde, $x'=5$ y $x''=-5$.

8.º *Resolver la ecuación*, $2x^2+7x=0$.

Solución: $x=\dfrac{-7\pm\sqrt{7^2-4.2.0}}{4}=\dfrac{-7\pm7}{4}$,

de donde, $x'=0$ y $x''=-3{,}5$.

9.º *Resolver la ecuación*, $(b^2-c^2)x^2+a(b+3c)x-2a^2=0$.

Solución: $x=\dfrac{-a(b+3c)\pm\sqrt{a^2(b+3c)^2+4(b^2-c^2)2a^2}}{2(b^2-c^2)}$

$$=\frac{-a(b+3c)\pm a\sqrt{b^2+6bc+9c^2+8b^2-8c^2}}{2(b^2-c^2)}$$

$$=\frac{-a(b+3c)\pm a\sqrt{9b^2+6bc+c^2}}{2(b^2-c^2)}$$

$$=\frac{-a(b+3c)\pm a(3b+c)}{2(b^2-c^2)}=\frac{-ab-3ac\pm(3ab+ac)}{2(b^2-c^2)},$$

de donde, $x'=\dfrac{2ab-2ac}{2(b^2-c^2)}=\dfrac{2a(b-c)}{2(b+c)(b-c)}=\dfrac{a}{b+c}$

y $x''=\dfrac{-4ab-4ac}{2(b^2-c^2)}=\dfrac{-4a(b+c)}{2(b+c)(b-c)}=\dfrac{-2a}{b+c}$.

10. *Resolver la ecuación bicuadrada*, $x^4-1700x^2+160000=0$.

Haciendo $x^4=y^2$ ó $x^2=y$ ó $x=\pm\sqrt{y}$, se tiene la ecuación

$$y^2-1700\,y+160000=0,$$

que dá, $y=\dfrac{1700\pm\sqrt{1700^2-4.160000}}{2}=\dfrac{1700\pm1500}{2}$,

de donde, $y'=1600$ é $y''=100$

y, por tanto, $x'=\sqrt{1600}=40$, $x''=-\sqrt{1600}=-40$

$x'''=\sqrt{100}=10$, $x^{\text{IV}}=-\sqrt{100}=-10$.

CAPÍTULO V.

DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

ARTÍCULO ÚNICO.

RRSOLUCIÓN DE SISTEMAS DE SEGUNDO GRADO.

148. Sistema de ecuaciones de segundo grado *es el formado por ecuaciones de segundo grado ó de éstas y de primero, no conteniendo ninguna de grado superior.*

En el estudio elemental de la resolución de sistemas de segundo grado nos limitaremos á considerar el caso en que el sistema sea de dos ecuaciones con dos incógnitas cuya forma general, después de preparado, es

$$\left.\begin{aligned}ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f&=0\\ a'y^2+b'xy+c'x^2+d'y+e'x+f'&=0\end{aligned}\right\}\ (1).$$

Si en este sistema se elimina el cuadrado de una de las incógnitas, y^2, por ejemplo, resultará la ecuación de primer grado respecto á dicha incógnita

$$(a'b-ab')xy+(a'c-ac')x^2+(ad-a'd')y+(a'e-ae')x+a'f-af'=0,$$

la que, haciendo $a'b-ab'=m$; $a'c-ac'=n$; $a'd-ad'=p$; $a'e-ae'=q$ y $a'f-af'=r$, toma la forma

$$mxy+nx^2+py+qx+r=0$$

y, uniendo esta ecuación á cualquiera de las del sistema (1), á la primera, por ejemplo, se tendrá el sistema, equivalente á aquel,

$$\left.\begin{aligned}ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f&=0\\ mxy+nx^2+py+qx+r&=0\end{aligned}\right\}\ (2),$$

de cuya segunda ecuación se obtiene

$$y=\frac{-nx^2-qx-r}{mx+p}.$$

Sustituyendo este valor en la primera, resulta el sistema equivalente al (2) y, por consiguiente, al propuesto,

$$y=\frac{-nx^2-qx-r}{mx+p}$$

$$a\left(\frac{-nx^2-qx-r}{mx+p}\right)^2+(bx+d)\left(\frac{-nx^2-qx-r}{mx+p}\right)+cx^2+ex+f=0;$$

pero al verificar las operaciones indicadas en la segunda ecuación de este tercer sistema resulta, en general, una ecuación de cuarto grado, lo que hace que un sistema de dos ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas no se pueda resolver elementalmente más que en el caso de que el cálculo no exija la resolución de ecuaciones de grado superior al segundo, á no ser bicuadradas. (146).

Ejemplos.

1.° *Resolver el sistema,* $2x+3y-12=0$
$5x^2-4xy+y^2-7x+2y-8=0.$

Despejando y en la primera ecuación, se obtiene $y=\dfrac{12-2x}{3}$

y, sustituyendo este valor en la segunda, resulta la ecuación

$$73x^2-267x+144=0,$$

de la que se obtiene $x'=3$; $x''=\dfrac{48}{73}$ y, por tanto, $y'=2$; $y''=3\dfrac{41}{73}$.

2.° *Resolver el sistema* $xy=15$
$x^2+y^2=34,$

Despejando y en la primera ecuación, se obtiene $y=\dfrac{15}{x}$

y, sustituyendo este valor en la segunda, resulta la ecuación bicuadrada

$$x^4-34x^2+225=0,$$

de la que se obtiene, $x'=5$; $x''=-5$; $x'''=3$; $x^{\text{IV}}=-3$
y, por tanto, $y'=3$; $y''=-3$; $y'''=5$; $y^{\text{IV}}=-5$.

LIBRO II.

DE LOS PROBLEMAS.

CAPÍTULO PRIMERO.

GENERALIDADES.

149. **Problema algebráico** *es toda cuestión, de carácter práctico, en que las relaciones entre los datos y las incógnitas se pueden expresar, en general, por medio de una ó más ecuaciones.*

Plantear un problema algebráico ó ponerle en ecuación *es establecer la ecuación ó ecuaciones que expresen la relación entre los datos y las incógnitas.*

Aunque para plantear un problema no existe una regla general que comprenda todos los casos que puedan ocurrir, se puede establecer como precepto el siguiente procedimiento práctico:

Para plantear un problema algebráico se representan las incógnitas por letras (que generalmente son las últimas de nuestro alfabeto) y se indican todas las operaciones que, por las condiciones del enunciado, se harían con ellas si fuesen conocidas, con lo que se obtendrá una ecuación ó un sistema de ecuaciones.

Resolver un problema algebráico *es obtener de la ecuación ó del sistema resultante de su planteo, el valor de las incógnitas.*

Solución de un problema *es la de la ecuación originada por su planteo.*

Comprobación de un problema *es la de las ecuaciones que han servido para su resolución.*

Discutir un problema algebráico *es interpretar las soluciones obtenidas de su resolución, según las distintas hipótesis que puedan hacerse sobre los datos y sus relaciones con las incógnitas.*

En la discusión de todo problema algebráico se debe tener presente que las condiciones del enunciado pueden ser *cuantitativas* y *físicas*, y que sólo las primeras pueden representarse por cantidades algebráicas. Por lo tanto, aunque la solución satisfaga á la ecuación ó ecuaciones que la han producido, se hace preciso examinar si también satisface á las condiciones físicas del enunciado y, en caso negativo, interpretar su significación en el problema. Así se tiene:

1.º Que las soluciones *positivas* satisfarán al problema, si en él no hay condiciones físicas que lo impidan.

2.º Que toda solución *negativa* no satisfará al problema, si la incógnita no admite, por su naturaleza, dos sentidos opuestos; pero, si así fuese, serán soluciones de otro en que se cambie el sentido de la incógnita que la produce, por lo que se puede evitar el planteo del nuevo problema con sólo cambiar en el del primero el signo de dicha incógnita.

3.º Que la solución *cero* satisfará al problema, si las condiciones físicas de éste no la hacen inadmisible.

4.º Que las soluciones infinitas indican, en general, que el problema es *imposible*.

5.º Que las soluciones *indeterminadas* indican que el problema es *indeterminado*.

150. Los problemas algebráicos, por el número de incógnitas que contienen, por el grado de la ecuación ó ecuaciones que produce su planteo y por las solución de estas ecuaciones se clasifican en *problemas con una, dos, tres* etc. *incógnitas, problemas de primer grado, de segundo grado*, etc., y *problemas determinados*, *indeterminados* é *imposibles*.

También se dividen los problemas algebráicos en *particulares* y *generales*, según que los datos sean números ó cantidades hipotéticamente conocidas que se expresen por letras. Todo problema particular se puede hacer general, á lo que se llama *generalizarlo*, reemplazando las condiciones y datos particulares del enunciado, por otras condiciones y datos generales.

CAPÍTULO II.

PROBLEMAS DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA (*).

PROBLEMA I.

Preguntándole á un sujeto qué dinero tenía, respondió: si del cuádruplo de mis pesetas se resta la mitad, quedarán 100, ¿cuántas pesetas tenía?

Planteo y resolución. Sea x el número de pesetas, con lo que la ecuación del problema será:

$$4x - \frac{x}{2} = 100,$$

que, preparada, se transforma en $7x - 200 = 0$,

de la que se obtiene, $x = \frac{200}{7} = 28^{p},57$.

Discusión. La solución $x = \frac{200}{7} = 28^{p},57$ de la ecuación, lo es también del problema, que no tiene en su enunciado ninguna condición restrictiva (**).

Observación. Si el enunciado del problema hubiera sido éste:

Preguntándole á un pastor que cuántos corderos llevaba en su rebaño, respondió: si del cuádruplo de mis corderos se resta la mitad, quedarán 100, ¿cuántos corderos llevaba? El planteo, resolución y comprobación serían las mismas del anterior, pero la solución 28,57 que lo es de la ecuación, no lo sería del problema, porque sus condiciones físicas excluyen la idea de que el número de corderos sea fraccionario.

(*) Siendo tan numerosos los problemas que pueden proponerse, nos limitaremos á exponer algunos sencillos, como ejemplo de variadas soluciones, recomendando á los alumnos que se ejerciten en la resolución de otros cuyos enunciados se encuentran en colecciones publicadas con este fin.

(**) Como modelo de generalización de problemas particulares, en la que es muy conveniente que se ejerciten los alumnos, proponemos la de éste cuyo enunciado será:

Preguntándole á un sujeto qué dinero tenía, respondió: si de **m** *veces el que tengo se resta su* **enésima** *parte, quedarán* **a** *pesetas, ¿cuántas tenía?*

Planteo y resolución. Sea x el número de pesetas, con lo que la ecuación del problema será $mx - \frac{x}{n} = a$, de la que se obtiene, $x = \frac{an}{mn-1}$, que es la fórmula aplicable á todos los problemas de esta índole.

Problema II.

Un sujeto tiene 53 años y su hijo 21, ¿cuántos años han de transcurrir para que la edad del padre sea triple que la del hijo?

Planteo y resolución. Sea x el número de años pedido, al cabo de los cuales el padre tendrá $53+x$ y el hijo $21+x$; luego la ecuación del problema será:

$$53+x=3(21+x),$$

que, preparada, se transforma en $2x+10=0$,

de la que se obtiene, $x=-\frac{10}{2}=-5$.

Discusión. La solución $x=-5$ de la ecuación, no satisface al problema, puesto que en él se pregunta los años que *han de transcurrir;* pero si, teniendo en cuenta que el tiempo es susceptible de tomarse en dos acepciones opuestas, á partir de la fecha de la pregunta, consideramos como *positivo* el que ha de transcurrir desde ella y como *negativo* el que ha transcurrido, esta solución indicará que *han transcurrido* 5 años desde que la edad del padre fué triple de la del hijo, lo que en efecto es cierto, pues entonces tendría el padre 48 años y el hijo 16.

Problema III.

Un naranjero saca á vender una cesta de naranjas de las que le roban la tercera parte, vende la mitad y vuelve con la cesta vacía, ¿cuántas naranjas sacó?

Planteo y resolución. Sea x el número de naranjas que sacó, con lo que la ecuación del problema será:

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{2}=0,$$

que, preparada, se transforma en $5x=0$,

de la que se obtiene, $x=\frac{0}{5}=0$.

Discusión. La solución $x=0$ de la ecuación no satisface al problema, pues no es racional presumir que saliese á vender con la cesta vacía, ni es posible que, en tales condiciones, le robasen la tercera parte ni que vendiese la mitad de las naranjas.

Problema IV.

Hallar un número cuyos dos tercios, más sus cuatro quintos, sea igual á él, más sus siete quinceavos, más 10.

Planteo y resolución. Sea x este número, con lo que la ecuación del problema será

$$\frac{2x}{3}+\frac{4x}{5}=x+\frac{7x}{15}+10,$$

que, preparada, se transforma en $0x-150=0$,

de la que se obtiene, $x=\frac{150}{0}=\infty$.

Discusión. La solución $x=\infty$ de la ecuación indica que ésta es *absurda* y el problema, por lo tanto, *imposible*, es decir, que no hay número alguno que satisfaga á sus condiciones.

Problema V.

Una persona sale de su casa con una cantidad de dinero y se encuentra á un deudor suyo que la dá doble y á otro que la dá la mitad de lo que sacó; mas, por otra parte, gasta en una compra el triplo y en otra la mitad de dicha cantidad, y vuelve á su casa sin dinero, ¿qué cantidad sacó?

Planteo y resolución. Sea x la cantidad que sacó, con lo que la ecuación del problema será:

$$x+2x+\frac{x}{2}-3x-\frac{x}{2}=0,$$

que, preparada, se transforma en $0\,x=0$,

de la que se obtiene, $x=\frac{0}{0}$.

Discusión. La solución $x=\frac{0}{0}$ de la ecuación indica que ésta es *indeterminada*, como también el problema; pues sea cualquiera la cantidad que aquella persona sacase, después de los ingresos y gastos expresados por las condiciones del problema, necesariamente se quedaría sin dinero.

PROBLEMA VI. (*).

Dos móviles parten á un mismo tiempo de los puntos A *y* B *que distan entre sí* **d** *kilómetros y recorren, con movimiento uniforme, la línea* MN, *en la dirección de* M *á* N, *siendo sus respectivas velocidades* **v** *y* **v'**, *¿á qué distancia del punto* A *se encontrarán?*

Planteo y resolución. En la MECÁNICA se demuestra que *el tiempo empleado por un cuerpo en recorrer un espacio, con movimiento uniforme, es igual al cociente de dividir el espacio por la velocidad.*

En virtud de este principio, si se supone que sea E el punto de encuentro de los dos móviles y x la distancia AE, como AB $= d$, la BE se representará evidentemente por $x-d$. El tiempo empleado por el móvil que parte de A en recorrer la distancia AE será, pues, $\frac{x}{v}$, y el empleado por el móvil que parte de B en recorrer la distancia BE será $\frac{x-d}{v'}$, y como, por el enunciado, estos tiempos serán iguales, se tendrá la ecuación del problema

$$\frac{x}{v} = \frac{x-d}{v'} \ (\alpha),$$

que, preparada, se transforma en $(v-v')x-vd=0$, de la que se obtiene, $x = \frac{v}{v-v'}d$.

Discusión. Las hipótesis que sobre los valores relativos de v y v' pueden hacerse son las siguientes:

1.ª $v > v'$ 2.ª $v = v'$ 3.ª $v < v'$

1.ª Si $v>v'$, el valor de x es *positivo*, mayor que d y satisface al problema, pues es racional que, llevando el móvil que parte de A mayor velocidad que el que, al mismo tiempo, parte de B, se han de encontrar en un punto, tal como el E, á la derecha de B.

(*) Este problema, llamado *de los móviles, ó de los correos*, es el clásico de los de primer grado con una incógnita, porque en su discusión se sintetizan todas las soluciones de que estos problemas son susceptibles.

2.ª Si $v = v'$, el valor de x es *infinito*, lo que revela una imposibilidad en el problema, como la hay en efecto, puesto que saliendo los móviles al mismo tiempo de dos puntos distintos, de una recta, y caminando con la misma velocidad y en igual sentido, es imposible que se encuentren.

3.ª Si $v<v'$, el valor de x es *negativo* y revela una imposibilidad en el problema, pues las condiciones de su enunciado no admiten que los móviles se encuentren á la izquierda del punto B, toda vez que recorren la línea MN en el sentido de izquierda á derecha.

Sin embargo, esta solución lo sería de un problema en que, cambiándose el sentido de la incógnita, produjese su planteo la ecuación $\frac{-x}{v} = \frac{-x-d}{v'}$, ó sea, $\frac{x}{v} = \frac{x+d}{v'}$. El enunciado de este nuevo problema sería el mismo que el del propuesto, con la modificación de que los móviles recorriesen la línea MN en el sentido de N á M, pues llamando x á la distancia AE', la BE' se representaría por $x+d$ y, por lo tanto, el planteo del problema daría la ecuación $\frac{x}{v} = \frac{x+d}{v'}$.

La solución negativa del problema propuesto sería también perfectamente admisible y no revelaría imposibilidad en él, si en el enunciado se supusiese que los dos móviles, partiendo de otros puntos á la izquierda de A, pasasen por éste y por B al mismo tiempo, pues en este caso, admitiendo la incógnita valores positivos y negativos, los primeros expresarían distancias tomadas á la derecha de B y los segundos distancias tomadas á la izquierda.

Si, modificando algún tanto las condiciones del enunciado, se supone $d = 0$, el valor de x será *cero* si $v > v'$ ó $v<v'$, y el indeterminado, $\frac{0}{0}$, si $v=v'$, cuyas soluciones satisfacen á las condiciones físicas del problema.

CAPÍTULO III.

PROBLEMAS DE PRIMER GRADO CON VARIAS INCÓGNITAS.

PROBLEMA I.

Hallar tres números que, sumados dos á dos, den las sumas **a**, **b** *y* **c**.

Planteo y resolución. Si llamamos x, y y z á estos números las ecuaciones del problema formarán el sistema

$$x+y=a$$
$$x+z=b$$
$$y+z=c,$$

que, preparado, se transforma en

$$x+y-a=0$$
$$x+z-b=0$$
$$y+z-c=0,$$

del que se obtiene $x=\frac{a+b-c}{2}$; $y=\frac{a+c-b}{2}$; $z=\frac{b+c-a}{2}$.

PROBLEMA II.

Un platero tiene tres lingotes ó barras de plata cuyo peso total es de 45 kilógramos, de distinta ley; una de 0,900, otra de 0,800 y otra de 0,720: haciendo una aleación de los dos primeros, la ley del que resulta es de 0,840, y haciéndola del primero y del tercero es de 0,780, ¿cuánto pesa cada uno?

Planteo y resolución. Si llamamos x, y y z al peso de cada uno de los lingotes, las ecuaciones del problema formarán el sistema

$$x+y+z=45$$
$$900\,x+800\,y=(x+y).840$$
$$900\,x+720\,z=(x+z).780,$$

que, preparado, se transforma en

$$x+\ y+z-45=0$$
$$3\,x-2y=0$$
$$2\,x-z\ =0,$$

del que se obtiene $x=10^{\text{kg}}$; $y=15^{\text{kg}}$; $z=20^{\text{kg}}$.

CAPÍTULO IV.

PROBLEMAS DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA.

PROBLEMA I.

Varias personas ajustan un carruaje en 342 pesetas para pagarlo á escote; más, al pagar, se encuentran tres de ellas sin dinero y las otras suplen su parte dando cada una 19 pesetas más, ¿cuántas son las personas?

Planteo y resolución. Sea x el número de personas: si todas hubieran contribuido, la cuota parcial sería $\frac{342}{x}$, pero habiendo dejado de contribuir tres, será $\frac{342}{x-3}$; de modo que la ecuación del problema será

$$\frac{342}{x-3}-\frac{342}{x}=19,$$

que, preparada, se transforma en, $19x^2-57x-1026=0$,

cuya solución es $x=\frac{57\pm\sqrt{57^2+4.19.1026}}{38}=\frac{57\pm285}{38}$,

de la que se obtiene $x'=9$ y $x''=-6$.

Discusión. La solución $x''=-6$ no satisface al problema que, por sus condiciones físicas, no la admite negativa, pero sí á otro cuyo enunciado fuese éste: *varias personas ajustan un carruaje en 342 pesetas para pagarlo á escote; en el camino entran tres personas que contribuyen también al gasto en igual forma, por lo que cada una de aquellas dá 19 pesetas ménos, ¿cuántas son las personas?*; pues, por un razonamiento análogo al anterior, se tendría la ecuación

$$\frac{342}{x}-\frac{342}{x+3}=19$$

que, preparada, se transforma en $19x^2+57x-1026=0$,

cuya solución es $x=\frac{-57\pm\sqrt{57^2+4.19.1026}}{38}=\frac{-57\pm285}{38}$,

de la que se obtiene $x'=6$ y $x''=-9$, de cuyos valores es desechable el x''.

Problema II.

Dividir el número 80 en dos partes cuyo producto sea 2000.

Planteo y resolución. Sea x una de las partes; como la otra será $80-x$, la ecuación del problema será

$$x(80-x)=2000,$$

que, preparada, se transforma en $x^2-80x+2000=0$,

cuya solución es $x=40\pm20\sqrt{-1}$.

de la que se obtiene $x'=40+20\sqrt{-1}$ y $x''=40-20\sqrt{-1}$.

Discusión. La solución imaginaria de la ecuación indica que ésta es *absurda* y que el problema, por lo tanto, es *imposible*.

Problema III.

Hallar una fórmula para calcular la profundidad de un pozo, conocido el número **n** *de segundos transcurrido desde que se suelta una piedra en su boca hasta que se oye chocar en el fondo, designando por* **g** *la aceleración de la gravedad y por* **v** *la velocidad del sonido* (*).

Planteo y resolución. En la FÍSICA se demuestra que *el espacio en metros, recorrido por un cuerpo que cae, es igual á la mitad del producto de la aceleración de la gravedad por el cuadrado del número de segundos de duración del descenso y, que el espacio, en metros, recorrido por el sonido, es igual al producto de la velocidad de éste, referida al segundo de tiempo, por el número de segundos transcurridos entre su producción y su percepción.*

En virtud de estos principios, si se designa por x la profundidad del pozo, en metros, por t los segundos empleados en la caída de la piedra y por t' los transcurridos entre ésta y la percepción del sonido, se tendrá $x=\frac{1}{2}gt^2$, de donde se obtiene $t=\sqrt{\frac{2x}{g}}$, y $x=vt'$, y, de aquí, $t'=\frac{x}{v}$; por otra parte, la suma $t+t'$ es igual á n, según el enunciado, luego la ecuación del problema será $\sqrt{\frac{2x}{g}}+\frac{x}{v}=n$.

(*) El valor de g, variable con la latitud geográfica del lugar, es, en Madrid, igual á 9,8024 metros (*Salinas y Benítez.* ALGEBRA) y el valor de v, variable con la temperatura, es, á cero grados, igual á 330 metros, por segundo.

Para resolverla empezaremos por darla forma racional, para lo cual basta pasar al segundo miembro el segundo término del primero y elevar al cuadrado la ecuación resultante, con lo que se tendrá la ecuación

$$\frac{2x}{g}=n^2+\frac{x^2}{v^2}-\frac{2nx}{v},$$

que, preparada, se transforma en

$$gx^2-2v(ng+v)x-n^2v^2g=0.$$

La solución de esta ecuación es

$$x=\frac{2v(ng+v)\pm\sqrt{4v^2(ng+v)^2-4n^2v^2g^2}}{2g}$$

$$=\frac{2v(ng+v)\pm2v\sqrt{(ng+v)^2-n^2g^2}}{2g}$$

$$=\frac{v(ng+v\pm\sqrt{n^2g^2+2ngv+v^2-n^2g^2})}{g}=\frac{v(ng+v\pm\sqrt{v^2+2nvg})}{g}$$

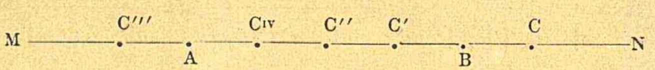
y, finalmente, $x=\frac{v}{g}(ng+v\pm\sqrt{v^2+2nvg})$,

de donde se obtiene, $x'=\frac{v}{g}(ng+v+\sqrt{v^2+2nvg})$

$$x''=\frac{v}{g}(ng+v-\sqrt{v^2+2nvg})$$

Discusión. Las dos raíces x' y x'' son *reales*, porque el radicando es positivo, y son *positivas*, porque su producto es positivo, $\frac{n^2v^2g}{g}=n^2v^2$, y su suma es también positiva, $\frac{2v(ng+v)}{g}$ (**145. Esc.**); pero como $\sqrt{v^2+2nvg}>v$, resulta $x'>nv$ y $x''<nv$, luego la primera raíz no satisface á las condiciones físicas del problema, pues de ella se deduce que $n<\frac{x}{v}$, lo que es absurdo, porque es imposible que el tiempo empleado en caer la piedra y percibir el sonido sea menor que el empleado sólo por éste.

PROBLEMA IV (*).



Dos luces que, á la unidad de distancia, alumbran con una intensidad **a** *y* **b**, *respectivamente, están situadas en los puntos* A *y* B *que distan entre sí* **d** *unidades lineales, y se desea saber cuál será el punto de la línea* MN, *que los une, que estará igualmente iluminado por ámbas.*

Planteo y resolución. En la FÍSICA se demuestra que *las intensidades de una luz están en razón inversa de los cuadrados de sus distancias á los puntos iluminados.*

En virtud de este principio, si se supone que sea C el punto pedido y x la distancia AC, como AB $= d$, la BC se representará evidentemente por $x - d$, y designando por y é y' las intensidades de las luces A y B en el punto C, se tendrá que $\frac{y}{a} = \frac{1}{x^2}$ y que $\frac{y'}{b} = \frac{1}{(x-d)^2}$, de donde se obtiene $y = \frac{a}{x^2}$ é $y' = \frac{b}{(x-d)^2}$, y como, por el enunciado, se supone el punto C igualmente iluminado por ambas luces, la ecuación del problema será

$$\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(x-d)^2},$$

que, preparada, se transforma en $(a-b)x^2 - 2adx + ad^2 = 0$, cuya solución es $x = \frac{d(a \pm \sqrt{ab})}{a-b}$.

Para dar una forma más sencilla á esta solución, multipliquemos sus dos términos por $a \mp \sqrt{ab}$, con lo que se tendrá

$$x = \frac{d(a \pm \sqrt{ab})(a \mp \sqrt{ab})}{(a-b)(a \mp \sqrt{ab})} = \frac{d(a^2 - ab)}{(a-b)(a \mp \sqrt{ab})} = \frac{da(a-b)}{(a-b)(a \mp \sqrt{ab})}$$

y, finalmente, $x = \frac{a}{a \mp \sqrt{ab}} d.$

(*) Este problema, llamado *de las luces*, es el clásico de los de segundo grado con una incógnita, porque en su discusión se sintetizan todas las soluciones de que estos problemas son susceptibles.

Racionalizando el denominador de esta fracción, para lo cual basta multiplicar sus dos términos por $\sqrt{a}$, resulta

$$x = \frac{a\sqrt{a}}{a\sqrt{a} \mp \sqrt{a}\sqrt{ab}} d = \frac{a\sqrt{a}}{a\sqrt{a} \mp \sqrt{a^2 b}} d = \frac{a\sqrt{a}}{a\sqrt{a} \mp a\sqrt{b}} d$$

y, finalmente, $x = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}} d,$

de donde se obtiene $x' = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} d$ y $x'' = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} d.$

Discusión. Las hipótesis que sobre los valores relativos de a y b pueden hacerse son las siguientes:

1.ª $a > b$; 2.ª $a = b$; 3.ª $a < b$.

1.ª Si $a > b$, será $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} > 1$ y $1 > \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} > \frac{1}{2}$ y las soluciones del problema serán las positivas x', mayor que d, que indica que el punto pedido será uno, tal como el C, situado á la derecha de B, y x'', menor que d y mayor que $\frac{1}{2} d$, que dá un punto, tal como el C', situado entre A y B, más cerca de éste que de aquél.

2.ª Si $a = b$, será $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \infty$ y $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{1}{2}$ y las soluciones serán la *infinita*, x', que indica la imposiblidad del problema, y la *positiva*, $x'' = \frac{1}{2} d$, que indica que el punto pedido es el punto medio, C'', de la distancia AB.

3.ª Si $a < b$, será $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ negativo y $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} < \frac{1}{2}$ y las soluciones serán la *negativa*, x', que indique que el punto pedido será uno, tal como el C''', á la izquierda de A, y la positiva, $x'' < \frac{1}{2} d$, que dá otro punto, tal como el C^IV, situado entre A y B, más cerca de aquél que de éste.

Si, modificando algún tanto las condiciones del enunciado, se supone $d = 0$, los dos valores de x serán $x' = 0$ y $x'' = \frac{0}{0}$, cuyas soluciones satisfacen á las condiciones físicas del problema.

CAPÍTULO V.

PROBLEMAS DE SEGUNDO GRADO CON DOS INCÓGNITAS.

PROBLEMA I.

Hallar dos números que estén en la relación $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$ *y tales que la suma de sus cuadrados sea un número dado,* **a**.

Planteo y resolución. Si llamamos x é y á estos números, las ecuaciones del problema formarán el sistema

$$\frac{x}{y}=\frac{m}{n};\quad x^2+y^2=a,$$

que, preparado, se transforma en $nx-my=0;\quad x^2+y^2-a=0,$

cuya solución es $x=\frac{m}{n}y$ é $y=\pm\frac{n\sqrt{a}}{\sqrt{m^2+n^2}}$, de donde,

$$y'=\frac{n\sqrt{a}}{\sqrt{m^2+n^2}};\quad y''=-\frac{n\sqrt{a}}{\sqrt{m^2+n^2}};\quad x'=\frac{m\sqrt{a}}{\sqrt{m^2+n^2}};\quad x''=-\frac{m\sqrt{a}}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

PROBLEMA II.

Hallar dos números cuyo producto sea el cuadrado de un número dado, **b**, *y la suma de sus cuadrados sea el cuadrado de otro número dado,* **a**.

Planteo y resolución. Si llamamos x é y á estos números, las ecuaciones del problema formarán el sistema

$$xy=b^2;\quad x^2+y^2=a^2,$$

que, preparado, se transforma en, $xy-b^2=0;\quad x^2+y^2-a^2=0,$
del que, eliminando la y, resulta $x^4-a^2x^2+b^4=0.$

Resolviendo esta ecuación bicuadrada se obtiene

$$x=\pm\sqrt{\frac{a^2\pm\sqrt{a^4-4b^4}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{a^2}{2}\pm\sqrt{\frac{a^4-4b^4}{4}}}$$

y, por la simetría del sistema respecto á x é y,

$$y=\pm\sqrt{\frac{a^2\pm\sqrt{a^4-4b^4}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{a^2}{2}\pm\sqrt{\frac{a^4-4b^4}{4}}}.$$

Observación. Haciendo, para abreviar, $\frac{a^2}{2}=m$ y $\frac{a^4-4b^4}{4}=n$, los valores de x y de y se pueden poner en la forma de

$$x=\pm\sqrt{m\pm\sqrt{n}}\quad\text{é}\quad y=\pm\sqrt{m\pm\sqrt{n}},$$

de donde se obtiene

$$x'=\sqrt{m+\sqrt{n}};\quad y'=\sqrt{m+\sqrt{n}}$$
$$x''=\sqrt{m-\sqrt{n}};\quad y''=\sqrt{m-\sqrt{n}}$$
$$x'''=-\sqrt{m+\sqrt{n}};\quad y'''=-\sqrt{m+\sqrt{n}}$$
$$x^{\mathrm{IV}}=-\sqrt{m-\sqrt{n}};\quad y^{\mathrm{IV}}=-\sqrt{m-\sqrt{n}}.$$

A primera vista parece que, por la combinación de cada uno de los *cuatro* valores de y con cada uno de los *cuatro* valores de x, resultarán *diez y seis* soluciones del problema; pero, teniendo en cuenta que el producto xy ha de ser igual á b^2, los signos que preceden á los valores de x y de y tendrán que ser iguales y los de m y $\sqrt{n}$ contrarios, pues sólo así se verifica esta condición, porque

$$\sqrt{m+\sqrt{n}}\times\sqrt{m-\sqrt{n}}=\sqrt{m^2-n}=\sqrt{\frac{a^4}{4}-\frac{a^4-4b^4}{4}}=\sqrt{b^4}=b^2,$$

lo que limita el número de soluciones á las cuatro siguientes:

$x'=\sqrt{m+\sqrt{n}}$	$x''=\sqrt{m-\sqrt{n}}$	$x'''=-\sqrt{m+\sqrt{n}}$	$x^{\mathrm{IV}}=-\sqrt{m-\sqrt{n}}$
$y''=\sqrt{m-\sqrt{n}}$	$y'=\sqrt{m+\sqrt{n}}$	$y^{\mathrm{IV}}=-\sqrt{m-\sqrt{n}}$	$y'''=-\sqrt{m+\sqrt{n}}$

mas como el 2.º y 4.º de estos sistemas de valores son respectivamente iguales al 1.º y 3.º, permutando x é y, no hay en realidad más soluciones del problema que las dos siguientes:

$x=\sqrt{\frac{a^2}{2}+\sqrt{\frac{a^4-4b^4}{4}}}$	$x=-\sqrt{\frac{a^2}{2}+\sqrt{\frac{a^4-4b^4}{4}}}$
$y=\sqrt{\frac{a^2}{2}-\sqrt{\frac{a^4-4b^4}{4}}}$	$y=-\sqrt{\frac{a^2}{2}-\sqrt{\frac{a^4-4b^4}{4}}}$

INDICE.

ÁLGEBRA.