9

LAURENT

TRAITÉ

D'ALGÈBRE

2

FACULTAD

TRAITÉ

D'ALGÈBRE.

TRAITÉ

D'ALGÈBRE.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Augustins, 55.

TRAITÉ D'ALGÈBRE,

A L'USAGE

DES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT,

PAR H. LAURENT,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

QUATRIÈME ÉDITION,
EN HARMONIE AVEC LES NOUVEAUX PROGRAMMES,
revue

Par J.-H. MARCHAND,
Ancien Élève de l'École Polytechnique.

DEUXIÈME PARTIE,
A l'usage des classes de Mathématiques spéciales.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1887

TRAITÉ D'ALGÈBRE.

DEUXIÈME PARTIE.

CHAPITRE PREMIER.

ANALYSE COMBINATOIRE.

I. — DES ARRANGEMENTS.

On appelle *arrangements* de m objets pris n à n les résultats obtenus en prenant n de ces objets de toutes les manières possibles, de telle sorte que deux quelconques de ces résultats diffèrent soit par les objets dont ils sont composés, soit par l'ordre de ces objets.

Proposons-nous de trouver le nombre des arrangements de m objets pris n à n, nombre que l'on désigne habituellement par le symbole A_m^n. A cet effet, supposons que l'on connaisse le nombre des arrangements de m objets pris i à i, ou A_m^i; si l'on veut former les arrangements de m objets pris $i+1$ à $i+1$, il faudra ajouter successivement à chaque arrangement des m objets pris i à i les $m-i$ objets qui n'y entrent pas. On formera ainsi $m-i$ nouveaux arrangements avec chacun des anciens, c'est-à-dire en tout $A_m^i(m-i)$ nouveaux résultats.

Je dis : 1° que tous ces résultats sont des arrangements différents, car ils diffèrent, soit par l'arrangement composé de i objets qui a servi à les former, soit par le dernier objet ajouté; 2° qu'un arrangement quelconque composé de $i+1$ objets s'y trouve, car, si à cet arrangement on enlève son dernier objet, on retrouve un arrangement de i objets. Or, comme ils ont été tous employés, l'arrangement composé de $i+1$ objets se trouve parmi ceux que nous avons formés; on a donc enfin

$$A_m^{i+1} = A_m^i(m-i).$$

Si l'on observe alors que A_m^1 est égal à m et si dans la formule précédente on fait $i=1, 2, 3, \ldots, n-1$, on trouve

$$A_m^2 = m(m-1),\quad A_m^3 = A_m^2(m-2),\quad \ldots,$$
$$A_m^n = A_m^{n-1}(m-n+1),$$

et, en multipliant ces égalités membre à membre, puis en supprimant dans les deux membres de la formule résultante des facteurs égaux,

$$A^n = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1).$$

C. Q. F. D.

II. — DES PERMUTATIONS.

On appelle *permutations* de n objets les résultats obtenus en disposant ces n objets les uns à côté des autres de toutes les manières possibles.

Proposons-nous de trouver le nombre des permutations de n objets; désignons ce nombre par P_n (*). Supposons

(*) On désigne quelquefois ce nombre par le symbole $n!$.

que l'on sache former le nombre P_i : à chaque permutation de i objets ajoutons un nouvel objet, en lui faisant occuper successivement la première, la seconde, ..., la $i+1^{\text{ième}}$ place; on formera ainsi $(i+1)P_i$ résultats différents, soit par la permutation de i objets qui a servi à les former, soit par le rang occupé par le nouvel objet. En second lieu, une permutation quelconque de $i+1$ objets fait partie de celles que l'on vient de considérer, car, en lui enlevant le dernier de ses objets, on retombe sur une des permutations de i objets, permutations qui ont été toutes employées. On a donc

$$P_{i+1} = P_i(i+1).$$

En faisant successivement $i=1, 2, \ldots, n-1$ et en observant que P_1 est égal à 1, on a

$$P_2 = 1.2,\quad P_3 = P_2.3,\quad \ldots,\quad P_n = P_{n-1}.n,$$

et par suite, en multipliant ces égalités membre à membre,

$$P_n = 1.2.3\ldots n.$$

On peut remarquer que

$$P_n = A_n^n.$$

Et, en effet, si dans la formule trouvée page 2 on fait $m=n$, on trouve

$$A_n^n = n(n-1)(n-2)\ldots 2.1 = P_n.$$

III. — DES COMBINAISONS.

On appelle *combinaisons* de m objets pris n à n les résultats obtenus en prenant n de ces objets de toutes les manières possibles, deux résultats différant seulement par la nature des objets qui entrent dans chacun d'eux et non par leur ordre.

Désignons par C_m^i le nombre des combinaisons de m objets pris i à i; pour former les combinaisons de m objets pris $i+1$ à $i+1$, on peut, à chaque combinaison composée de i objets, ajouter chacun des $m-i$ objets qui n'y entrent pas. On obtient ainsi $C_m^i \times (m-i)$ résultats qui contiendront toutes les combinaisons formées de $i+1$ objets, puisque, en retranchant un objet à l'une des combinaisons formée de $i+1$ objets, on retrouve une combinaison formée de i objets, et que toutes celles-ci ont été employées; mais les résultats que nous obtenons de la sorte ne sont pas tous différents. En effet, si nous considérons l'un quelconque d'entre eux, quel que soit l'objet que l'on en retranche, on retombe sur une combinaison différente formée de i objets; une combinaison quelconque de m objets pris $n+1$ à $n+1$ a donc été obtenue par notre procédé de $i+1$ manières différentes, en sorte que $C_m^i(m-i)$ représente $i+1$ fois C_m^{i+1}. On a donc

$$C_m^{i+1} = C_m^i \frac{m-i}{i+1},$$

d'où l'on conclut, en faisant $i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$, et en observant que le nombre des combinaisons de m objets pris un à un est m,

$$C_m^2 = m\frac{m-1}{2}, \quad C_m^3 = C_m^2 \frac{m-2}{3}, \quad \ldots,$$

$$C_m^n = C_m^{n-1} \frac{m-n+1}{n};$$

d'où l'on conclut

$$\text{(1)} \qquad C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}.$$

On voit, d'après ce qui précède, que

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}.$$

Cette formule peut du reste se démontrer directement en observant que les arrangements de m objets pris n à n peuvent s'obtenir en permutant les n objets de chaque combinaison de m objets pris n à n, de toutes les manières possibles. On a donc

$$A_m^n = C_m^n \times P_n,$$

d'où l'on déduit la formule précédente, et par suite, si l'on veut, la formule (1).

Si l'on adopte la notation $n!$ pour représenter le produit $1.2.3\ldots n$, la formule (1) peut encore s'écrire

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

IV. — REMARQUES AU SUJET DES THÉORIES PRÉCÉDENTES.

Problème I. — *Concevons qu'après avoir formé les arrangements de m lettres prises n à n on suppose i de ces lettres identiques à a, j de ces lettres identiques à b, etc. : combien obtiendra-t-on de résultats différents?*

Supposons d'abord qu'il n'y ait que i lettres identiques à a :

1° Les arrangements où a n'entre pas seront tous différents : ce sont les arrangements de $m-i$ lettres prises n à n; leur nombre est A_{m-i}^n ou

$$P_n C_{m-i}^n.$$

2° Les arrangements où a entre une fois seront encore tous différents : si nous voulons en connaître le nombre, considérons les combinaisons correspondantes; ôtons a, nous aurons les combinaisons de $m-i$ lettres $n-1$ à $n-1$. Si dans chacune de ces combinaisons nous permutons les n lettres qui y entrent y compris a, nous aurons $P_n C_{m-i}^{n-1}$ résultats différents ou $\frac{P_n}{P_1} C_{m-i}^{n-1}$.

3° Les arrangements où a entre deux fois ne seront pas tous différents; si nous ôtons deux fois a et si nous considérons les combinaisons correspondantes, elles sont en nombre C_{n-i}^{n-2}, et, si nous permutons les lettres qui y entrent en y comprenant deux fois a, nous aurons $P_n C_{m-i}^{n-2}$ résultats qui ne seront pas tous différents, car, en permutant les deux lettres a dans chaque combinaison, on ne la change pas; il n'y aura donc en tout que $\frac{P_n}{P_2} C_{m-i}^{n-2}$ résultats différents, etc. Le nombre cherché est donc

$$P_n\left(C_{m-i}^{n}+\frac{C_{m-i}^{n-1}}{P_1}+\frac{C_{m-i}^{n-2}}{P_2}+\frac{C_{m-i}^{n-3}}{P_3}+\ldots+\frac{C_{m-i}^{n-i}}{P_i}\right).$$

Supposons maintenant qu'il y ait i lettres égales à a, j lettres égales à b.

Le terme général de la quantité cherchée sera le nombre des arrangements dans lesquels a entre μ fois et b ν fois. Il est facile de voir que ce nombre est

$$\frac{P_n}{P_\mu P_\nu} C_{m-i-j}^{n-\mu-\nu},$$

en sorte que le nombre des résultats cherchés est

$$\sum \frac{P_n}{P_\mu P_\nu} C_{m-i-j}^{n-\mu-\nu},$$

μ et ν restant toujours moindres que i et j, etc.

Problème II. — *Trouver le nombre des permutations différentes que l'on obtient en supposant un certain nombre de lettres identiques dans les permutations de n lettres.*

P_n étant le nombre des permutations de n lettres, si parmi ces lettres il y en a i identiques à a, il est clair qu'en permutant ces lettres a on aura des résultats identiques; les permutations P_n se partagent en groupes de P_i permutations identiques : donc les permutations essentiellement différentes se réduisent au nombre de $P_m : P_i$ quand i lettres deviennent identiques à a; si, en outre, j lettres deviennent identiques à b, le nombre des permutations distinctes se réduira à $\frac{P_m}{P_i P_j}$, etc.

Problème III. — *Trouver le nombre des résultats différents obtenus en supposant, dans les combinaisons de m lettres prises n à n, i lettres identiques à a, j lettres identiques à b.*

Considérons une combinaison dans laquelle a entre μ fois, b ν fois, etc.; supprimons les lettres a et b de cette combinaison, nous trouvons une combinaison de $m-i-j$ lettres prises $n-\mu-\nu$ à $n-\mu-\nu$; donc le nombre des combinaisons distinctes où a entre μ fois et b ν fois est $C_{m-i-j}^{n-\mu-\nu}$, d'où l'on conclut facilement le nombre cherché.

V. — FORMULE DU BINOME.

On appelle *formule du binôme* celle qui fait connaître le développement d'une puissance quelconque d'un binôme. Cette formule (dans le cas où l'exposant de la puissance est entier et positif) paraît avoir été connue bien avant Newton, on la trouve dans les Œuvres de Pascal. On peut consulter à ce sujet : 1° l'article Binôme dans le *Dictionnaire des Mathématiques* de Montferrier; 2° un article de M. O. Terquem, inséré dans ses *Nouvelles Annales*, t. VI; 3° enfin, l'*Histoire des Mathématiques* de Montucla.

Voici comment on peut arriver à cette formule à l'aide de l'analyse combinatoire.

Multiplions entre eux les binômes

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+l).$$

Pour faire un produit de deux polynômes, on multiplie chaque terme du multiplicande par chaque terme du multiplicateur; en d'autres termes, le produit de deux polynômes est la somme des produits obtenus en prenant pour facteurs un terme dans chaque polynôme de toutes les manières possibles.

Le produit de trois polynômes est égal à la somme des produits obtenus en prenant pour facteurs un terme dans chaque polynôme de toutes les manières possibles, et ainsi de suite (t. I, p. 24).

Cela posé, le produit que nous cherchons est égal à la somme des produits obtenus en prenant pour facteurs un terme dans chacun des binômes $(x+a), (x+b), \ldots$ de toutes les manières possibles. Prenons d'abord x dans chacun des m binômes en question, nous formons le terme x^m; prenons ensuite x dans $m-1$ binômes et le second terme dans le $m^{\text{ième}}$ binôme restant; faisons cette opération de toutes les manières possibles, la somme des termes ainsi obtenus sera $x^{m-1}(a+b+\ldots+l)$, que l'on peut désigner par la notation abrégée

$$x^{m-1}\sum a,$$

déjà employée (Ire Partie, p. 65, 66). En général, si nous prenons x dans $m-n$ binômes, il faudra prendre les seconds termes dans chacun des n binômes restants; en répétant cette opération de toutes les manières possibles et en ajoutant les résultats, on trouve

$$x^{m-n}\sum abc\ldots f,$$

$\sum abc\ldots f$ désignant, pour abréger, la somme des produits obtenus en prenant pour facteurs n des m lettres $a, b, c, \ldots, l$ de toutes les manières possibles. $\sum abc\ldots f$ représente donc la somme des combinaisons des m lettres $a, b, \ldots, f$ prises n à n sous forme de produits. Si donc on vient à supposer $a=b=c=\ldots=l$, le terme que nous venons de calculer se réduit à

$$C_m^n x^{m-n} a^n.$$

Enfin, pour achever la formation du produit que nous cherchons, nous prendrons les seconds termes des binômes, et nous aurons le terme $abc\ldots l$; nous pourrons donc écrire

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &(x+a)(x+b)\ldots(x+l) \\ &= x^m + x^{m-1}\sum a + \ldots + x^{m-n}\sum ab\ldots f + \ldots + ab\ldots l. \end{aligned} \right.$$

Nous aurons plus loin occasion de faire usage de cette formule; si l'on y fait $a=b=c=\ldots=l$, il vient

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \ldots + C_m^n a^n x^{m-n} + \ldots + a^m.$$

Cette formule peut encore s'écrire, en remplaçant C_m^n par sa valeur

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} &(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2} + \ldots \\ &\quad + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}a^nx^{m-n} + \ldots + a^m. \end{aligned} \right.$$

Nous ferons, au sujet de cette formule, plusieurs remarques importantes.

1° *Deux coefficients également éloignés des extrêmes dans le développement de* $(x+a)^m$ *sont égaux.*

En effet, en changeant x en a et a en x, les coefficients des termes ne changent pas ; le premier membre de l'équation (2) ne change pas non plus. On a alors, en identifiant les deux développements de $(x+a)^m$ que l'on obtient ainsi, c'est-à-dire en égalant les coefficients des mêmes puissances de x, le théorème qu'il s'agissait d'établir ; il conduit à la formule

$$C_m^n = C_m^{m-n},$$

que l'on peut vérifier directement. Elle revient, en effet, à la suivante :

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n} = \frac{m(m-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots(m-n)}.$$

Si l'on réduit les deux membres de cette égalité au même dénominateur, les numérateurs deviennent égaux à $1.2.3\ldots n$.

2° Si l'on fait $a = x = 1$, on a

$$2^m = 1 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^n + \ldots + C_m^m.$$

3° Si l'on fait $a = -x = -1$, on a

$$0 = 1 - C_m^1 + C_m^2 - \ldots \pm C_m^n \mp \ldots \pm C_m^m.$$

4° Si, dans la formule (2), on met le terme général sous la forme

$$(3) \qquad \frac{m!}{n!(m-n)!} a^{m-n} x^n,$$

$i!$ désignant d'une manière générale le produit $1.2.3\ldots i$, si l'on change ensuite a en $a+b$, le terme général du développement de $(x+a+b)^m$ sera donné par le terme général du développement de l'expression (3) dans laquelle on aura changé a en $a+b$; il sera donc

$$\frac{m!(m-n)!}{n!(m-n)!(m-n-\alpha)!\alpha!} a^\alpha b^{m-n-\alpha} x^n$$
$$= \frac{m!}{n!(m-n-\alpha)!\alpha!} a^\alpha b^{m-n-\alpha} x^n.$$

En changeant ensuite b en $b+c$, on obtient de la même façon le terme général du développement de $(x+a+b+c)^m$, et, en continuant ainsi, on trouve, comme t. I, p. 67,

$$(x+a+b+\ldots+l)^m = \sum \frac{m!}{n!\alpha!\beta!\ldots\lambda!} a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda x^n,$$

formule dans laquelle on a toujours

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda + n = m;$$

les entiers $\alpha, \beta, \ldots$ pouvant être nuls, on y supposera a^0 égal à 1, et $0!$ égal à 1.

VI. — DU TRIANGLE ARITHMÉTIQUE.

Considérons les coefficients des puissances successives du binôme ; écrivons sur une première ligne les coefficients de la première puissance, c'est-à-dire 1 et 1 ; sur

1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

une seconde ligne écrivons les coefficients de la seconde puissance, c'est-à-dire 1, 2, 1, et ainsi de suite, de sorte que les coefficients des termes de même rang se correspondent dans une même colonne verticale. Le Tableau que nous formons ainsi porte le nom de *triangle arithmétique;* les propriétés de ce triangle ont été développées avec beaucoup de soin par Pascal dans son *Traité du triangle arithmétique;* toutefois il ne dispose pas son

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	
1	3	6	10		
1	4	10			
1	5				
1					

triangle tout à fait de la même façon que nous. Si nous concevons que, dans le triangle dont nous avons parlé en premier lieu, on fasse glisser chaque colonne verticale de manière à amener toutes les unités qui sont en tête sur une même ligne horizontale, on aura le triangle de Pascal. Les nombres qui sont inscrits dans la $(n+1)^{\text{ième}}$ colonne verticale du triangle portent le nom de *nombres figurés du $n^{\text{ième}}$ ordre;* les nombres du premier ordre, ou 1, 2, 3, 4, ..., portent aussi le nom de *nombres naturels,* les nombres du second ordre celui de *nombres triangulaires,* les nombres du troisième ordre celui de *pyramidaux,* les nombres du quatrième ordre celui de *triangulo-triangulaires.*

Théorème I. — *Le $i^{\text{ème}}$ nombre figuré de l'ordre n a pour expression*

$$\frac{i(i+1)\ldots(i+n-1)}{1.2.3\ldots n} \quad \text{ou} \quad \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+i-1)}{1.2.3\ldots(i-1)}.$$

En effet, les nombres figurés de l'ordre n sont les nombres de combinaisons n à n; le premier est relatif à n objets, le second à $n+1$, ..., le $i^{\text{ième}}$ à $n+i-1$, en sorte que le $i^{\text{ième}}$ nombre figuré de l'ordre n est C_{n+i-1}^{n}, ou, d'après un corollaire (p. 10), C_{n+i-1}^{i-1}, c'est-à-dire

$$\frac{(i+n-1)(i+n-2)\ldots i}{1.2.3\ldots n} \quad \text{ou} \quad \frac{(n+i-1)(n+i-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots(i-1)},$$

expressions identiques avec celles que nous avions annoncées.

Théorème II. — *Un nombre figuré est égal au nombre écrit immédiatement au-dessus de lui dans le triangle arithmétique, augmenté du nombre placé à la gauche de ce dernier.*

En d'autres termes,

$$C_{n+i}^{n} = C_{n+i-1}^{n} + C_{n+i-1}^{n-1}.$$

Cette formule se vérifie très-facilement en remplaçant les symboles C_{n+i}^{n}, C_{n+i-1}^{n}, C_{n+i-i}^{n-1} par leurs valeurs. Voici comment on peut l'établir directement. Considérons la formule

$$(x+a)^{n+i-1} = x^{n+i-1} + \ldots + C_{n+i-1}^{n} a^n x^{i-1} + \ldots,$$

démontrée pages 8 et 9; multiplions ses deux membres par $(x+a)$, nous aurons

$$(x+a)^{n+i} = x^{n+i} + \ldots + (C_{n+i-1}^{n} + C_{n+i-1}^{n-1}) a^n x^i + \ldots;$$

or, en identifiant cette formule avec celle que l'on obtient en appliquant directement la formule du binôme à l'expression $(x+a)^{n+i}$, on trouve

$$C_{n+i-1}^{n} + C_{n+i-1}^{n-1} = C_{n+i}^{n}.$$

C. Q. F. D.

Théorème III. — *Il résulte du théorème précédent* *qu'un nombre figuré quelconque est égal à la somme des nombres figurés de l'ordre précédent, placés immédiatement au-dessus de lui dans le triangle arithmétique.*

Ainsi, l'on a

$$\frac{i(i+1)\dots(i+n-1)}{1.2.3\dots n} = \frac{1.2.3\dots(n-1)}{1.2.3\dots(n-1)} + \frac{2.3.4\dots n}{1.2\dots(n-1)} + \dots + \frac{i(i+1)\dots(i+n-2)}{1.2.3\dots(n-1)}.$$

Le triangle arithmétique dont nous venons de parler est un cas particulier d'un triangle beaucoup plus général, que Pascal appelle aussi *triangle arithmétique* et que nous allons apprendre à former.

Dans une première colonne verticale écrivons le nombre a; dans une seconde colonne contiguë écrivons les nombres a, $a+b$, $2a+b$, ..., obtenus en ajoutant au nombre b les produits de a par les nombres figurés du premier ordre; dans une troisième colonne écrivons les produits des nombres du second ordre par a augmentés des produits des nombres du premier ordre par b, et ainsi de suite; nous formerons le Tableau ci-contre.

a				
a	b			
a	$a+b$	b		
a	$2a+b$	$a+2b$	b	
a	$3a+b$	$3a+3b$	$a+3b$	b
a	$4a+b$	$6a+4b$	$4a+6b$	$a+4b$
a	$5a+b$	$10a+5b$	$10a+10b$	$5a+10b$

Les propriétés connues des nombres figurés montrent : 1° qu'*un nombre inscrit dans le Tableau précédent est égal à celui qui est placé au-dessus de lui augmenté de celui qui est à gauche de ce dernier;* 2° qu'*un nombre quelconque est égal à la somme de tous ceux qui sont écrits au-dessus de lui dans la colonne précédente.*

Considérons la troisième colonne de notre dernier Tableau; faisons $b=1$, elle se composera de la suite

$$1,\quad a+2,\quad 3a+3,\quad 6a+4,\quad 10a+5,\quad \dots.$$

Lorsque $a=1$, on retrouve les *nombres triangulaires;* lorsque $a=2$, on obtient les *nombres carrés,* qui ne sont autre chose que les carrés des nombres naturels; lorsque $a=3$, on obtient ce que l'on appelle les *nombres pentagonaux;* lorsque $a=4$, on obtient les *nombres hexagonaux,* etc. Voici maintenant la raison de ces dénominations.

Fig. 5.

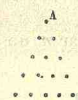
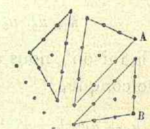


Fig. 6.

Fig. 7.



Considérons la *fig.* 5 : elle commence par un point; au-dessous on a placé deux points, puis trois, puis quatre, etc. Si n représente le nombre de points placés sur le côté AB, le nombre total des points contenus dans la figure sera

$$1+2+3+\dots+n,$$

somme des n premiers nombres naturels, c'est-à-dire représentera le $n^{\text{ième}}$ nombre triangulaire.

Si nous considérons maintenant la *fig.* 6, si nous désignons par n le nombre de points contenus dans le côté AB, il y aura n^2 points en tout dans la figure; or, on peut évaluer ce nombre d'une autre manière, en observant que l'on trouve de chaque côté de la diagonale AC

k points, k désignant le $(n-1)^{\text{ième}}$ nombre triangulaire; il y a donc en tout

$$2k+n=n(n-1)+n=n^2$$

points dans la figure, c'est-à-dire un nombre de points marqué par le $n^{\text{ième}}$ nombre carré.

Si nous considérons la *fig.* 7 et si le côté AB contient n points, nous voyons que la figure totale contiendra, en désignant par k le $(n-1)^{\text{ième}}$ nombre triangulaire, $3k+n$ points, et ainsi de suite.

VII. — SOMME DES PUISSANCES SEMBLABLES DES TERMES D'UNE PROGRESSION ARITHMÉTIQUE.

Considérons la progression arithmétique (*)

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_m,\ u_{m+1},\ \ldots.$$

Soit h la raison; nous aurons, en désignant par n un entier quelconque,

$$u_2^{n+1}=(u_1+h)^{n+1}=u_1^{n+1}+(n+1)u_1^n h+\frac{(n+1)n}{1.2}u_1^{n-1}h^2+\ldots,$$

$$u_3^{n+1}=(u_2+h)^{n+1}=u_2^{n+1}+(n+1)u_2^n h+\frac{(n+1)n}{1.2}u_2^{n-1}h^2+\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$u_{m+1}^{n+1}=(u_m+h)^{n+1}=u_m^{n+1}+(n+1)u_m^n h+\frac{(n+1)n}{1.2}u_m^{n-1}h^2+\ldots$$

(*) La théorie des nombres polygonaux et des progressions arithmétiques existe dans les œuvres de Diophante. Archimède a fait connaître la somme des carrés des n premiers nombres entiers, il l'a appliquée à la recherche de l'aire de la parabole; la somme des cubes des n premiers entiers a été donnée par Brahmegupta, au VII[e] siècle; la somme des quatrièmes puissances a été donnée par Djamchid ben Mas'oud ben Mahmoud, médecin arabe du XVI[e] siècle; Fermat a donné le premier une méthode générale pour la sommation des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique.

Ajoutons ces égalités membre à membre, il vient, en supprimant des termes communs de part et d'autre,

$$u_{m+1}^{n+1}-u_1^{n+1}=(n+1)h\sum_{i=1}^{i=m}u_i^n+\frac{(n+1)n}{1.2}h^2\sum_{i=1}^{i=m}u_i^{n-1}+\ldots,$$

d'où l'on tire

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}\sum u_i^n &= \frac{u_{m+1}^{n+1}-u_1^{n+1}}{(n+1)h}-\frac{n}{2}h\sum u_i^{n-1}\\ &\quad -\frac{n(n-1)}{2.3}h^2\sum u_i^{n-2}-\ldots.\end{aligned}\right.$$

Cette formule permet de calculer la somme des puissances $n^{\text{ièmes}}$ des termes d'une progression arithmétique lorsque l'on connaît la somme des puissances 1, 2, 3,..., $n-1$.

Proposons-nous par exemple de trouver la somme des carrés des p premiers nombres. Il faudra, dans la formule précédente, faire $h=1$ et $n=2$; il viendra alors

$$\sum_{i=1}^{i=p}i^2=\frac{(p+1)^3-1}{3}-\frac{p(p+1)}{2}-\frac{p}{3},$$

ou bien, réductions faites,

$$\sum_{i=1}^{i=p}i^2=\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}.$$

La même formule (1) donne ensuite, pour $n=3$,

$$\sum_{i=1}^{i=p}i^3=\frac{(p+1)^4-1}{4}-\frac{3}{2}\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$$
$$-\frac{3.2}{2.3}\frac{p(p+1)}{2}-\frac{3.2.1}{2.3.4}p,$$

c'est-à-dire, réductions faites,

$$\sum_{i=1}^{i=p} i^3 = \left[\frac{p(p+1)}{2}\right]^2.$$

VIII. — APPLICATION DES THÉORIES PRÉCÉDENTES A LA SOMMATION DES PILES DE BOULETS.

Dans les arsenaux, les projectiles emmagasinés sont aujourd'hui de deux espèces : les uns sont destinés aux pièces lisses et sont sphériques; les autres sont destinés aux pièces rayées et ont une forme cylindro-conique.

Nous nous occuperons d'abord de la sommation des piles de projectiles cylindro-coniques; ces piles sont formées d'une première rangée de projectiles se touchant tout le long d'une génératrice cylindrique. Soit n le nombre des projectiles placés dans cette rangée; au-dessus et entre les intervalles laissés par les projectiles de la première rangée, on place une seconde rangée de $n-1$ projectiles; au-dessus de cette rangée, on en place une troisième composée de $n-2$, et ainsi de suite. On forme ainsi une espèce de triangle dans lequel le nombre des projectiles employés est évidemment le $n^{\text{ième}}$ nombre triangulaire, ou $\frac{n(n+1)}{1.2}$; pour donner plus de solidité à la pile, on place plusieurs rangées verticales, semblables à celle dont nous venons de donner la description, les unes contre les autres. En désignant par p le nombre de ces rangées, le nombre total des boulets sera

$$p\,\frac{n(n+1)}{2}.$$

Donc, *pour avoir le nombre des projectiles oblongs contenus dans une pile, comptez le nombre des boulets contenus en long et en large à la partie inférieure de la pile; si n désigne le nombre contenu dans le sens du diamètre et p le nombre contenu dans le sens de la longueur des projectiles, $p\frac{n(n+1)}{2}$ représentera le nombre total des projectiles contenus dans la pile.*

Les boulets sphériques sont rangés le plus souvent sous forme de *piles rectangulaires;* les piles *carrées* ou *quadrangulaires* sont moins fréquemment usitées. Enfin on n'emploie que rarement les *piles triangulaires,* et seulement pour un petit nombre de projectiles, à cause de l'espace qu'elles exigent.

Occupons-nous d'abord de la pile triangulaire. Soit n le nombre des boulets contenus dans le côté du triangle équilatéral qui forme la base de la pile; cette base contient évidemment un nombre total de boulets égal au $n^{\text{ième}}$ nombre triangulaire, ou $\frac{n(n+1)}{2}$ boulets; au-dessus de cette base ou première rangée, on en a placé une seconde, en ayant soin de mettre les nouveaux boulets entre les interstices laissés par les premiers. Le côté de cette seconde rangée ne contient que $n-1$ boulets; par conséquent, la rangée elle-même contient un nombre de boulets représenté par le $(n-1)^{\text{ième}}$ nombre triangulaire, et ainsi de suite. Il y aura donc en tout dans la pile un nombre de boulets égal à la somme des n premiers nombres triangulaires, c'est-à-dire égal au $n^{\text{ième}}$ nombre pyramidal (de là le nom de *nombres pyramidaux* donné aux nombres du troisième ordre).

Donc, *si n désigne le nombre des boulets contenus dans le côté d'une pile triangulaire,*

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$$

représentera le nombre total des boulets contenus dans la pile.

Considérons maintenant une pile quadrangulaire. Dans cette pile, la base est formée de boulets tangents, les points de contact ayant lieu aux extrémités des diamètres rectangulaires; la forme générale de cette base est un carré, en sorte que, si n désigne le nombre des boulets contenus dans le côté, n^2 représentera le nombre total des boulets contenus dans la base. Au-dessus de la base se trouve une rangée de $(n-1)^2$ boulets, et ainsi de suite, en sorte que le nombre total des boulets contenus dans la pile est la somme des carrés des n premiers nombres, ou

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ainsi donc, *n désignant le nombre des boulets contenus dans le côté d'une pile quadrangulaire,*

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

représentera le nombre total des boulets contenus dans cette pile.

Considérons enfin une pile rectangulaire; sa base est construite de la même manière que celle de la pile quadrangulaire. Soient n et n' les nombres de boulets contenus dans les côtés de la base; au-dessus de la base, on place une rangée rectangulaire ayant $n-1$ et $n'-1$ boulets de côté, et ainsi de suite. Posons $n' = n + p$; le nombre total des boulets de la pile sera

$$n(n+p) + (n-1)(n-1+p) + \ldots + 1 + p,$$

c'est-à-dire

$$n^2 + (n-1)^2 + \ldots + 2^2 + 1 + [n + (n-1) + \ldots + 2 + 1]p,$$

ou bien

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}p,$$

c'est-à-dire

$$\frac{n(n+1)(3p+2n+1)}{6},$$

ou bien

$$\frac{n(n+1)(3n'-n+1)}{6}.$$

On aurait pu arriver à ce résultat en observant que la pile pouvait se décomposer en une pile quadrangulaire ayant n boulets de côté et en une autre pile analogue aux piles de projectiles oblongs, mais inclinée, et ayant p et n boulets de côté.

Donc, *n et n' désignant le nombre des boulets contenus dans le petit et le grand côté d'une pile rectangulaire, le nombre total des boulets contenus dans la pile sera*

$$\frac{n(n+1)(3n'-n+1)}{6}.$$

Si dans cette formule on fait $n' = n$, on retrouve la formule qui convient aux piles quadrangulaires.

NOTES ET EXERCICES.

1. Dans les problèmes relatifs à l'analyse combinatoire, on est souvent amené à évaluer le produit $1.2.3\ldots n = n!$; quand n est grand, le calcul de ce produit est presque impraticable. Voici une formule (dont nous ne proposons pas la démonstration) que l'on donne dans les Traités de Calcul intégral et qui permet de calculer rapidement $n!$:

$$\log n! = n(\log n - 0{,}4342945) + 0{,}3990899 + \frac{1}{2}\log n + \frac{1}{6n}$$

(les logarithmes ont pour base 10). L'erreur commise par l'emploi de cette formule est moindre que $\frac{1}{10n^2}$.

Il ne faut pas oublier que $C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}$, $A_m^n = \frac{m!}{n!}$, $P_n = n!$.

Exemple. — De combien de manières 100 personnes peuvent-elles se ranger à table? De 100! manières. On a $\log 100! = 157{,}97131$. Le nombre cherché a donc 158 chiffres; les premiers sont 93598.

2. De combien de manières peut-on écrire les unes à la suite des autres α lettres a et β lettres b?

Rép. $\dfrac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\,\beta!} = C_{\alpha+\beta}^{\alpha}$.

3. De combien de manières peut-on écrire les unes à la suite des autres α lettres a, β lettres b, ..., λ lettres l?

Rép. $\dfrac{(\alpha+\beta+\ldots+\lambda)!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}$.

4. Le nombre de manières dont on peut amener le point N avec μ dés à jouer est le coefficient de x^N dans le développement du polynôme $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^\mu$.

5. Trouver le plus grand terme du développement de $(a+b)^m$.

En appelant $\frac{m!}{\alpha!\,\beta!}a^\alpha b^\beta$ ce terme et en écrivant qu'il est plus grand que celui qui le précède et celui qui le suit, on trouve

$$\frac{\beta+1}{\alpha} > \frac{b}{a} > \frac{\beta}{\alpha+1},$$

d'où l'on tire

$$\alpha < \frac{(m+1)a}{a+b} < \alpha + 1.$$

Donc α est le plus grand entier contenu dans $\frac{(m+1)a}{a+b}$.

6. De ce que le nombre des combinaisons de m objets pris n à n est $\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}$ on peut conclure que le produit de

n entiers consécutifs est divisible par $1.2.3\ldots n$. Par des considérations analogues, prouver que, si $\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda = m$, le produit $1.2.3\ldots m$ est divisible par

$$1.2.3\ldots\alpha \times 1.2.3\ldots\beta \times \ldots \times 1.2.3\ldots\lambda.$$

7. On a, quels que soient $x, x_1, \ldots, x_n$,

$$(-1)^n \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{x_1 x_2 x_3 \ldots x_n} = 1 - \frac{x}{x_1} + \frac{x(x-x_1)}{x_1 x_2} - \ldots$$
$$\pm \frac{x(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{x_1 x_2 x_3 \ldots x_n}.$$

8. En appelant C_n^m, non plus le nombre des combinaisons de m objets n à n, mais la fraction $\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}$, où m peut être quelconque, entier ou fractionnaire ou même négatif et incommensurable, on a

$$C_m^n - C_m^1 C_m^{n-1} + C_{m+1}^2 C_m^{n-2} - C_{m+2}^3 C_m^{n-3} + \ldots \pm C_{m+n-1}^n = 0.$$

9. Démontrer la formule

$$(x+a)^m = x^m + \frac{m}{1}a(x+b)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a(a-2b)(x+2b)^{m-2}$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a(a-3b)^2(x+3b)^{m-3} + \ldots.$$

(Abel.)

10. On appelle *factorielle* un produit de facteurs en progression arithmétique. On pose, d'après Vandermonde,

$$[a, r]^n = a(a+r)(a+2r)\ldots(a+\overline{n-1}\,r).$$

Kramp remplaçait le signe $[a, r]^n$ par $a^{r/n}$ Cela posé, on demande de prouver que

$$[a, 0]^n = a^n, \quad [a, r]^n = [a, r]^{n-i}[a + \overline{n-i}\,r, r]^i,$$
$$A_m^n = [m-n+1, 1]^n, \quad P_n = [1, 1]^n,$$
$$[a+b, r]^m = [a, r]^m + C_m^1[a, r]^{m-1}[b, r]^1 + C_m^2[a, r]^{m-2}[b, r]^2$$
$$+ \ldots + C_m^n[a, r]^{m-n}[b, r]^n + \ldots.$$

Cette dernière formule est connue sous le nom de *binôme de Vandermonde* ou *des factorielles*.

11. On a

$$1.2.3\ldots n = n^n - C_n^1(n-1)^n + C_n^2(n-2)^n - \ldots \pm C_n^{n-1}1^n.$$

12. Si $n > 1$, on a

$$0 = n^i - C_n^1(n-1)^i + C_n^2(n-2)^i - \ldots \pm C_n^{n-1}1^i.$$

13. Combien y a-t-il de termes dans un polynôme de degré m? (Un de degré 0, $\frac{n}{1}$ du degré 1, $\frac{n(n+1)}{1.2}$ du degré 2, etc.; en tout $\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}{1.2.3\ldots m}$, n désignant le nombre des variables).

14. Avec des dames à jouer on forme une pile comme il suit : à la partie inférieure on forme une sorte d'hexagone régulier en plaçant n dames ayant leurs centres en ligne droite; contre cette rangée on place une seconde rangée contenant $n+1$ dames, puis une troisième en contenant $n+2$, ..., puis une $n^{\text{ième}}$ rangée, en contenant $n+n-1$, après quoi on place une $(n+1)^{\text{ième}}$ rangée contenant une dame de moins, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on ait placé une dernière rangée de n dames. Par-dessus cette figure on en place une autre formée de la même façon, mais contenant $n-1$ dames seulement sur son côté, et ainsi de suite, de sorte que la pile contienne une dame à sa supérieure, sept immédiatement au-dessous, puis dix-neuf, etc. Prouver que le nombre total des dames de la pile est n^3.

15. On peut toujours trouver pour A, B, C, ... des nombres rendant identiques les formules

$$n^2 = An(n+1) + B(n-1)n,$$
$$n^3 = A'n(n+1)(n+2) + B'(n-1)n(n+1) + C'(n-2)(n-1)n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

En conclure les valeurs de Σn^2, Σn^3, etc.

16. On peut toujours déterminer des nombres A, B, C, ... tels que l'on ait identiquement

$$n^i = A + Bn + C\frac{n(n+1)}{1.2} + \ldots + K\frac{n(n+1)\ldots(n+i-1)}{1.2\ldots i}.$$

En profiter pour calculer Σn^i.

17. On a

$$\sqrt{n^n} < 1.2.3\ldots n < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

18. L'expression

$$\frac{m^x.1.2.3\ldots m}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+m)} \quad \text{ou} \quad \frac{m^x}{xC_{x+m}^m},$$

étudiée avec soin par Gauss, se réduit, pour x entier, à

$$1.2.3\ldots(x-1)$$

quand on y suppose $m = \infty$.

19. Combien peut-on mener de diagonales à un polygone de n côtés?

20. Étant donnés n points, on les joint deux à deux de toutes les manières possibles : en combien de points les droites ainsi menées se rencontrent-elles?

21. Étant donnés n points, par tous ces points pris trois à trois on fait passer des cercles : en combien de points tous ces cercles se rencontrent-ils?

22. On appelle *probabilité* d'un événement le rapport du nombre de cas favorables à l'arrivée de l'événement au nombre total des cas possibles et également possibles qui peuvent se présenter quand on attend l'arrivée de l'événement.

Ainsi la probabilité d'amener le point 6 avec un dé est $\frac{1}{6}$, parce que six cas peuvent se présenter quand un dé est jeté sur un tapis et qu'un seul de ces cas est favorable à l'arrivée du point 6. Cela posé, on propose de résoudre les questions suivantes :

23. Calculer la probabilité d'amener le point 15 avec 3 dés.

Rép. $\frac{5}{108}$.

24. On prend m billets dans une loterie de N lots : quelle est la probabilité de gagner n lots?

Rép. $\dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{N(N-1)\ldots(N-n+1)}$.

25. Une urne contient quatre-vingt-dix numéros, on en tire cinq au sort, on désigne un, deux, trois, quatre ou cinq numéros à l'avance : quelle est la probabilité de deviner juste dans chaque hypothèse

Rép. :

La probabilité pour que	1	des numéros désignés	sorte est	$\dfrac{1}{81}$
»	2	»	»	$\dfrac{2}{801}$
»	3	»	»	$\dfrac{1}{11748}$
»	4	»	»	$\dfrac{1}{511038}$
»	5	»	»	$\dfrac{1}{43949268}$

26. L'expression

$$1-\frac{x^m-1}{x-1}+\frac{x^m-1}{x-1}\,\frac{x^{m-1}-1}{x^2-1}-\frac{x^m-1}{x-1}\,\frac{x^{m-1}-1}{x^2-1}\,\frac{x^{m-2}-1}{x^3-1}+\ldots$$

est nulle si m est impair; au contraire, elle est égale à

$$(1-x)(1-x^3)\ldots(1-x^{m-1})$$

si m est pair. (GAUSS.)

27. Soit T_n le $n^{\text{ième}}$ nombre triangulaire; le $n^{\text{ième}}$ nombre carré sera $T_{n-1}+T_n$, le $n^{\text{ième}}$ nombre pentagonal sera $2T_{n-1}+T_n$, le $n^{\text{ième}}$ nombre hexagonal $3T_{n-1}+T_n$, ...

CHAPITRE II.

NOTIONS GÉNÉRALES.

I. — INTRODUCTION.

Nous allons maintenant aborder cette partie de l'Algèbre appelée *Analyse algébrique* par Cauchy, *introduction à l'Analyse infinitésimale* par Euler. L'Analyse algébrique a pour but de préparer l'esprit à l'étude des branches élevées de l'Analyse, en ajoutant des conceptions plus philosophiques aux spéculations de l'Algèbre élémentaire.

Dans l'Analyse algébrique, les quantités que l'on considère sont systématiquement variables; l'emploi des lettres devient donc tout à fait indispensable pour les représenter. Les théorèmes sur les limites, la notion de l'infini et de l'infiniment petit reviennent à chaque instant et constituent le véritable fondement de la science que nous allons étudier.

Quelques auteurs ont défini les mots de *constante* et *variable*; nous ne pensons pas pouvoir substituer à ces mots des idées plus claires que celles que l'on y attache immédiatement (*).

(*) « Quantitas constans est quantitas determinata, perpetuo eumdem valorem servans.... Quantitas variabilis est quantitas indeterminata, quæ omnes omnino valores determinatos in se complectitur. »

EULER, *Introductio in analysin infinitorum*.)

Lorsque deux quantités dépendent l'une de l'autre de telle sorte que, l'une d'elles variant, l'autre varie aussi, et que, l'une d'elles restant constante, l'autre reste constante aussi, on dit qu'elles sont *fonctions* l'une de l'autre.

Les fonctions d'une quantité x se désignent par les notations $f(x)$, $F(x)$, ..., $\varphi(x)$, ..., $F'(x)$, $F_1(x)$, ... Si y est une fonction $\varphi(x)$ de x, x sera une fonction $\psi(y)$ de y; les deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont dites *inverses* l'une de l'autre.

On dit qu'une quantité f est *fonction de plusieurs autres* lorsque, celles-ci restant constantes, à l'exception d'une seule x d'entre elles, f et x sont fonctions l'une de l'autre; on représente les fonctions de plusieurs quantités par les notations $f(x, y, z, \ldots)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y, z)$ ....

« .... Le mot *fonction* a été employé par les premiers analystes pour désigner en général les puissances d'une même quantité; depuis, on a étendu la signification de ce mot à toute quantité formée d'une manière quelconque d'une autre quantité. Leibnitz et les Bernoulli l'ont employé les premiers dans cette acception générale.... » (LAGRANGE, *Équations numériques*.)

II. — RAPPEL DE QUELQUES DÉFINITIONS ET THÉORÈMES FONDAMENTAUX.

On appelle *limite* d'une quantité variable une quantité fixe dont elle approche indéfiniment, de manière à pouvoir en différer d'aussi peu que l'on veut.

La limite d'une somme ou d'un produit de plusieurs quantités variables EN NOMBRE LIMITÉ *est égale à la somme ou au produit des limites de ces quantités.*

La limite d'une différence ou d'un quotient de deux variables est égale à la différence ou au quotient des limites de ces variables.

Ces théorèmes s'étendent encore au cas où quelques-unes des variables seraient remplacées par des constantes, pourvu que l'on considère ces constantes comme étant à elles-mêmes leurs propres limites.

On dit qu'une quantité *variable est infinie* lorsqu'elle peut croître en valeur absolue au delà de toute limite.

On appelle *valeur d'une fonction pour une valeur infinie de sa variable* la limite vers laquelle tend cette fonction lorsque cette variable croît indéfiniment; ainsi on dira que $\frac{1}{x}$ est égal à zéro pour $x = \infty$.

On appelle *quantité infiniment petite* une quantité variable qui a pour limite zéro; ainsi on pourra dire que $\frac{1}{x}$ est infiniment petit pour x infini. Toutefois, il ne faut pas confondre ou assimiler le zéro à l'infiniment petit; le zéro est constant, l'infiniment petit est variable; il peut donc passer par des valeurs très-considérables avant d'atteindre sa limite zéro.

III. — DE LA CONTINUITÉ.

On dit qu'une quantité *varie d'une manière continue entre deux limites a et b* lorsqu'elle ne peut passer entre ces limites d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires.

On dit qu'une fonction $f(x)$ *est continue pour une valeur c* de sa variable quand elle possède pour $x = c$ une valeur unique finie et bien déterminée, et quand il est possible de déterminer une quantité positive H telle que, h étant moindre en valeur absolue que H, on ait, quel que soit d'ailleurs h,

$$f(c+h)-f(c)<\varepsilon,$$

ε étant aussi petit que l'on voudra du reste.

Ou bien, d'une manière abrégée, une fonction de x est *continue* pour une valeur c de sa variable quand à un accroissement infiniment petit quelconque donné à c correspond toujours un accroissement infiniment petit de la fonction; ou bien encore $f(x)$ est continue pour $x=c$ quand $\lim f(c+h)-f(c)=0$ pour $h=0$.

THÉORÈME I. — *Si une fonction $f(x)$ est continue pour toutes les valeurs de sa variable comprises entre deux limites a et b, elle passera par tous les états de valeur compris entre $f(a)$ et $f(b)$.*

En effet, subdivisons l'intervalle compris entre a et b en n parties égales à h_1, et, μ désignant une quantité donnée comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, cherchons dans la suite $f(a), f(a+h), \ldots, f(a+\overline{n-1}\,h)$ deux termes consécutifs $f(c_1)$ et $f(c_1+h_1)$ comprenant μ, si aucun d'eux n'est égal à μ. Subdivisons encore l'intervalle compris entre c_1 et c_1+h_1 en n autres égaux à h_2; cherchons dans la suite $f(c_1), f(c_1+h_2), \ldots, f(c_1+\overline{n-1}\,h_2)$ deux termes consécutifs $f(c_2)$ et $f(c_2+h_2)$ comprenant μ, si aucun d'eux n'est égal à μ, et ainsi de suite; les nombres $c_1, c_2, c_3, \ldots$ vont en croissant et les nombres $c_1+h_1, c_2+h_2, \ldots$ en décroissant. Mais $c_1, c_2, \ldots$ sont tous moindres que b; $c_1+h_1, c_2+h_2, \ldots$ sont plus grands que a : donc les uns et les autres ont une limite; cette limite est évidemment la même pour c_i et c_i+h_i, car h_i tend vers zéro avec i. J'appelle c cette limite commune; je dis que l'on a précisément $f(c)=\mu$. En effet, il est toujours possible de déterminer la quantité positive H de telle sorte que, pour $h<H$ en

valeur absolue, on ait $f(c+h)-f(c)<\varepsilon$; mais on peut toujours prendre i assez grand pour que c_i et c_i+h_i diffèrent de leur limite c d'une quantité moindre que H, et alors $f(c_i)-f(c)$ sera moindre que ε, $f(c_i+h_i)-f(c)$ également. Donc μ, qui est compris entre $f(c_i+h_i)$ et $f(c_i)$, différera *a fortiori* de $f(c)$ d'une quantité inférieure à ε; donc enfin $f(c)=\mu$. C. Q. F. D.

THÉORÈME II. — *Si une fonction $f(x)$ ne peut pas passer de la valeur $f(\alpha)$ à la valeur $f(\beta)$ sans passer par toutes les valeurs intermédiaires quand x varie d'une manière continue entre α et β, α et β désignant deux nombres quelconques compris entre a et b, si de plus entre α et β la fonction $f(x)$ ne passe qu'un nombre fini de fois par la même valeur* (*) *et possède pour chaque valeur de x une valeur finie et déterminée, elle est continue pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b.*

En effet, soit c une valeur comprise entre a et b; donnons à x une valeur k voisine de c et un peu plus grande que c. Quand x variera entre c et k, $f(x)$ variera entre des limites qui pourront être l'une supérieure et l'autre inférieure à $f(c)$. Supposons, pour fixer les idées, l'une d'elles supérieure à $f(c)$ et égale à $f(c)+\omega$; si l'on pose

$$(1)\qquad f(c+\mathrm{H})-f(c)=\varepsilon \quad \text{ou} \quad f(c+\mathrm{H})=f(c)+\varepsilon,$$

on trouvera toujours pour H une valeur satisfaisant à cette équation si ε est très-petit, parce que $f(x)$, passant par

(*) Cette condition, que l'on ne mentionne pas ordinairement, est cependant nécessaire : ainsi une fonction égale à $\sin\frac{1}{x}$ pour toutes les valeurs de x différentes de zéro et égale à zéro pour $x=0$ n'est pas continue pour $x=0$; elle satisfait cependant aux autres conditions de l'énoncé, et il est clair que $f(h)-f(0)$ ou $f(h)=\sin\frac{1}{h}$ ne tend pas vers zéro avec h.

la valeur $f(c)$ et par la valeur $f(c)+\omega$, doit passer par la valeur intermédiaire $f(c)+\varepsilon$. De plus, il n'y a par hypothèse, entre c et k, qu'un nombre limité de valeurs de H satisfaisant à l'équation (1). Si donc nous prenons H égal à la plus petite solution de (1), pour toute valeur de h moindre que H, on aura

$$f(c+h)-f(c)<\varepsilon \quad \text{ou} \quad f(c+h)<f(c)+\varepsilon,$$

sans quoi, $f(c+h)$ pouvant devenir plus grand que $f(c)+\varepsilon$, il passerait entre c et $c+\text{H}$ par la valeur $f(c)+\varepsilon$, et H ne serait pas la plus petite racine de (1).

Si $f(x)$ variait entre deux limites dont l'une soit inférieure à $f(c)$, on prouverait de même qu'il existe une quantité H' telle que pour $h'<\text{H}'$ on aurait

$$f(c)-f(c+h')<\varepsilon.$$

On verrait enfin d'une façon analogue qu'il existe une quantité H_1 telle que toute valeur négative h moindre en valeur absolue que H_1 satisfasse aux inégalités précédentes. La fonction f est donc continue pour $x=c$ compris entre a et b. C. Q. F. D.

Théorème II. — *La somme, la différence, le produit, le quotient de plusieurs fonctions continues sont encore des fonctions continues* (*).

En effet, prenons, par exemple, le produit de plusieurs fonctions continues $f_1(x)f_2(x)\ldots f_n(x)$; changeons x en $x+h$: le produit devient

$$f_1(x+h)f_2(x+h)\ldots f_n(x+h)$$

lorsque l'on fait tendre h vers zéro ; $f_1(x+h), f_2(x+h), \ldots$ tendent vers les limites $f_1(x), f_2(x), \ldots$. Or la limite du produit

$$f_1(x+h)f_2(x+h)\ldots$$

est égale au produit des limites de ses facteurs : donc $f_1(x+h)f_2(x+h)\ldots$ a pour limite $f_1(x)f_2(x), \ldots$ et par conséquent peut en différer d'aussi peu que l'on veut; donc $f_1(x)f_2(x)\ldots$ représente une fonction continue.

Il faut bien remarquer que, si $f(x)$ n'était pas continue pour la valeur a de sa variable, $f(a+h)$ n'aurait pas pour limite $f(a)$, ce qui peut arriver de deux manières : 1° la fonction $f(x)$ passe brusquement d'une valeur à une autre lorsque x ne varie pas sensiblement; ces cas sont très-rares : nous en verrons plus loin des exemples ; 2° la fonction $f(x)$ existe pour $x=a+h$, mais n'existe plus pour $x=a$; alors, $f(a)$ n'existant pas, $f(a+h)$ n'a pas de limite. Par exemple, la fonction $\frac{1}{x}$ n'existe pas pour $x=0$; elle est discontinue pour $x=0$; la fonction $\sqrt{1-x}$ est discontinue pour $x=1$, etc.

Remarque. — Un quotient de deux fonctions continues cesse d'être continu lorsque le diviseur passe par zéro. En effet, alors le raisonnement exposé plus haut tombe en défaut, car le quotient des limites de deux quantités dont le diviseur est nul n'existe plus.

Théorème III. — *Si $u=f(x)$ est une fonction continue de x pour $x=a$ et si y est une fonction continue de u pour $u=f(a)$, y sera une fonction continue de x pour $x=a$.*

(*) Les théorèmes qui précèdent ne sont généralement pas enseignés; c'est d'autant plus regrettable, qu'admis sans restriction ils peuvent conduire à des résultats inexacts. Il est assez remarquable que l'on tienne à démontrer avec tant de rigueur au commencement de la Géométrie des propositions évidentes, quand on admet sans démonstration en Algèbre des théorèmes qui ne sont vrais que sous certaines conditions.

En effet, à un accroissement infiniment petit de x correspond un accroissement infiniment petit de u, à un accroissement infiniment petit de u correspond un accroissement infiniment petit de y : donc, en définitive, à un accroissement infiniment petit de x correspond un accroissement infiniment petit de y; donc y est fonction continue de x.

Théorème IV. — *Si $f(u, v)$ est fonction continue de u et de v, et si u et v sont fonctions continues de x, $f(u, v)$ sera fonction continue de x.*

Mais, pour que ce théorème soit vrai, il ne suffit pas que $f(u, v)$ soit continu pour des valeurs déterminées de u et v, il faut que $f(u, v)$ soit continu pour toutes les valeurs de u comprises entre deux limites fixes $a+\varepsilon$, $a-\varepsilon'$ et de v comprises entre deux autres limites $b+\varepsilon_1$ et $b-\varepsilon'_1$, simultanément, ε, ε', ε_1, ε'_1 désignant des nombres finis. A ce prix seulement, $f(u+\alpha, v+\beta)-f(u, v)$ tendra vers zéro quand les accroissements α et β de u et v produits par l'accroissement très petit de x tendront vers zéro. En effet, cette différence peut s'écrire

$$f(u+\alpha, v+\beta)-f(u+\alpha, v)+f(u+\alpha, v)-f(u, v)$$

et les deux différences dont elle se compose ont pour limite zéro pour $\alpha=0$ et $\beta=0$.

Une somme ou un produit composé d'un nombre illimité de fonctions continues peut fort bien cesser d'être continu. Nous verrons plus loin des exemples de ce fait.

CHAPITRE III.

DE LA FONCTION SIMPLE ALGÉBRIQUE, DE LA FONCTION EXPONENTIELLE ET DES LOGARITHMES.

I. — PRÉLIMINAIRES.

Lemme I. — *Les puissances successives des nombres plus grands que 1 vont en croissant et peuvent dépasser toute limite.*

Lemme II. — *Les puissances successives des nombres moindres que 1 vont en diminuant et ont zéro pour limite.*

Lemme III. — *Les racines successives des nombres plus grands que 1 vont en diminuant et ont l'unité pour limite.*

Lemme IV. — *Les racines successives d'un nombre moindre que 1 vont en croissant et ont l'unité pour limite.*

Il était indispensable de rappeler ces propositions, déjà établies page 200 (Ire Partie).

II. — DE L'EXPOSANT FRACTIONNAIRE.

Désignons par a un nombre positif : si nous observons que l'on a

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$$

toutes les fois que m est divisible par n, nous serons conduits naturellement à représenter par le symbole $a^{\frac{m}{n}}$ l'expression $\sqrt[n]{a^m}$, lors même que le nombre m ne sera plus divisible par n. Mais, pour que cette notation soit logique, il est nécessaire que les règles de l'exposant entier s'appliquent encore à l'exposant fractionnaire; c'est ce qui a lieu. En effet,

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} . \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}}$$
$$= a^{\frac{mq}{nq}+\frac{np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

On a donc, pour toutes les valeurs positives et commensurables de α,

$$a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta};$$

on en conclut

$$a^\alpha a^\beta a^\gamma = a^{\alpha+\beta} a^\gamma = a^{\alpha+\beta+\gamma},$$

et, en général,

$$a^\alpha a^\beta a^\gamma \ldots = a^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}$$

On a aussi, pour toutes les valeurs positives et rationnelles de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots,$

$$a^\alpha : a^\beta = a^{\alpha-\beta},$$

car

$$a^{\alpha-\beta} \times a^\beta = a^\alpha.$$

On a encore

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\times\frac{p}{q}}.$$

En effet,

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^m})^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}}$$
$$= \sqrt[qn]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n}\times\frac{p}{q}}.$$

C. Q. F. D.

Enfin on vérifie aisément que

$$(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha, \quad (a:b)^\alpha = a^\alpha : b^\alpha, \quad \ldots.$$

III. — DE L'EXPOSANT INCOMMENSURABLE.

LEMME I. — *Supposons, pour fixer les idées, le nombre a plus grand que l'unité; alors, $\frac{m}{n}$ désignant un nombre commensurable, on aura*

$$a^{\frac{m}{n}} > 1.$$

En effet, $a^{\frac{m}{n}}$ est égal à $\sqrt[n]{a^m}$; or, a^m est plus grand que 1 : donc $\sqrt[n]{a^n}$ sera aussi plus grand que 1 (p. 35). Au contraire, si a était moindre que 1, on aurait

$$a^{\frac{m}{n}} < 1.$$

LEMME II. — $a^{\frac{m}{n}}$ *croît avec* $\frac{m}{n}$ *si a est plus grand que* 1; *il décroît dans le cas contraire.*

En effet,

$$a^{\frac{m}{n}+\frac{m'}{n'}} = a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{m'}{n'}}.$$

Si donc a est plus grand que 1, $a^{\frac{m}{n}+\frac{m'}{n'}}$ sera plus grand que $a^{\frac{m}{n}}$; il serait évidemment plus petit dans le cas contraire, ce qui démontre le lemme énoncé.

LEMME III. — *Si le nombre commensurable $\frac{m}{n}$ a pour limite zéro, $a^{\frac{m}{n}}$ aura pour limite l'unité.*

En effet, les racines croissantes de a ont pour limite l'unité (p. 35) : donc il existera toujours une racine, la $\mu^{\text{ième}}$ par exemple, qui sera telle que

$$\sqrt[\mu]{a} \quad \text{ou} \quad a^{\frac{1}{\mu}} < 1 \pm \delta,$$

δ étant une quantité aussi petite que l'on voudra, et, pour toutes les valeurs de $\frac{m}{n}$ inférieures à $\frac{1}{\mu}$, on aura *a fortiori*

$$a^{\frac{m}{n}} < 1 \pm \delta;$$

ceci revient à dire que $a^{\frac{m}{n}}$ a pour limite l'unité.

Ces préliminaires une fois posés, nous pouvons définir l'exposant incommensurable comme il suit.

Soient $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''}, \ldots$ une série de fractions ayant pour limite le nombre incommensurable x; la limite vers laquelle tendent les quantités $a^{\frac{m}{n}}, a^{\frac{m'}{n'}}, \ldots$ est ce que nous appellerons a^x. Cette limite existe, car, si l'on suppose $a > 1$ et $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \ldots$ croissants, $a^{\frac{m}{n}}, a^{\frac{m'}{n'}}, \ldots$ seront des nombres croissants inférieurs à a^θ, θ désignant un nombre commensurable supérieur à x : ils auront donc une limite λ. Supposons maintenant que $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \ldots$ tendent vers x d'une manière quelconque : on peut toujours prendre $\frac{p}{q}$ moindre que x, mais assez voisin de x pour que

$$\lambda - a^{\frac{p}{q}} < \frac{\delta}{2},$$

δ désignant un nombre aussi petit que l'on voudra ; mais quel que soit $\frac{m}{n}$, pourvu qu'il soit assez voisin de $\frac{p}{q}$ et par

conséquent de x, on pourra toujours poser, en vertu du lemme précédent,

$$\text{val. abs.} \left(a^{\frac{p}{q}} - a^{\frac{m}{n}} \right) < \frac{\delta}{2},$$

c'est-à-dire

$$\text{val. abs.} \left(\lambda - a^{\frac{m}{n}} \right) < \delta,$$

ce qui prouve que $a^{\frac{m}{n}}$ a pour limite λ, de quelque manière que $\frac{m}{n}$ tende vers x. Nous avons supposé $a > 1$; en supposant $a < 1$, le raisonnement se fait identiquement de la même façon.

Il va sans dire que les règles de l'exposant entier s'appliquent à l'exposant incommensurable ; en effet, on a

$$a^x a^z = \lim a^{\frac{m}{n}} \lim a^{\frac{p}{q}},$$

$\frac{m}{n}$ et $\frac{p}{q}$ étant les fractions qui ont pour limites x et z. On tire de là

$$a^x a^z = \lim a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{p}{q}} = \lim a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}};$$

or, $\lim a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}$ est ce que nous avons appelé a^{x+z}, car $x + z$ est la limite de $\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$; donc

$$a^x a^z = a^{x+z}.$$

De cette égalité on peut déduire, comme au paragraphe précédent, toutes les propriétés des exponentielles.

IV. — DE L'EXPOSANT NÉGATIF ET NUL.

Si l'on observe que pour $m > n$ on a

$$a^m : a^n = a^{m-n},$$

on est conduit à poser dans tous les cas, comme définition,

$$a^{m-n} = a^m : a^n,$$

et en particulier, si $m = n$,

$$a^0 = 1.$$

Or on a, dans le cas où $m < n$,

$$a^m : a^n = \frac{1}{a^{n-m}};$$

on est donc conduit à écrire

$$a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}},$$

ou enfin

$$a^{-s} = \frac{1}{a^s}.$$

Les règles de l'exposant négatif sont les mêmes que celles de l'exposant positif. En effet, on a

$$a^{-\alpha} \times a^\beta = a^\beta : a^\alpha = a^{\beta-\alpha},$$

$$a^{-\alpha} \times a^{-\beta} = 1 : (a^\alpha a^\beta) = 1 : a^{\alpha+\beta} = a^{-\alpha-\beta};$$

donc, quel que soit α et quel que soit β,

$$a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}.$$

On en conclut, comme à la page 36,

$$a^\alpha a^\beta a^\gamma \ldots = a^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots},$$

$$a^\alpha : a^\beta = a^{\alpha-\beta}.$$

Enfin, je dis que l'on a

$$(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}.$$

En effet, si α est négatif et égal à $-\alpha'$, on a

$$(a^\alpha)^\beta = (a^{-\alpha'})^\beta = \left(\frac{1}{a^{\alpha'}}\right)^\beta = \frac{1}{a^{\alpha'\beta}} = a^{-\alpha'\beta} = a^{\alpha\beta}.$$

Si β' est négatif et égal à $-\beta'$, on a

$$(a^\alpha)^\beta = (a^\alpha)^{-\beta'} = \frac{1}{(a^\alpha)^{\beta'}} = a^{-\alpha\beta'} = a^{\alpha\beta}.$$

Si α et β sont tous deux négatifs et égaux à $-\alpha'$, $-\beta'$, on a

$$(a^\alpha)^\beta = (a^{-\alpha'})^{-\beta'} = 1 : \left(\frac{1}{a^{\alpha'}}\right)^{\beta'} = 1 : \frac{1}{a^{\alpha'\beta'}}$$
$$= 1 : a^{-\alpha'\beta'} = a^{\alpha'\beta'} = a^{\alpha\beta}.$$

C. Q. F. D.

On verrait facilement que

$$(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha, \quad (a : b)^\alpha = a^\alpha : b^\alpha, \quad \ldots.$$

Si l'on considère x comme variable et si m désigne un nombre constant, x^m est ce que l'on appelle la *fonction simple algébrique*. Toutefois, Abel et quelques autres géomètres ne regardent la fonction x^m comme algébrique qu'autant que l'exposant m est commensurable [*voir* ABEL, *Sur les fonctions algébriques des différents ordres* (*Œuvres complètes*)].

« .... La position d'une grandeur à la suite d'une autre suffit pour exprimer leur produit; si ces grandeurs sont les mêmes, ce produit est le carré ou la seconde puissance de cette grandeur. Mais, au lieu de l'écrire deux fois, Descartes imagina de ne l'écrire qu'une fois (*), en lui donnant le nombre 2 pour exposant, et il exprima les puissances successives en augmentant successivement cet exposant d'une unité. Cette notation, en ne la considé-

(*) Étienne de Laroche avait eu avant Descartes l'idée des exposants, mais si Descartes n'a pas inventé les exposants il en a vulgarisé l'usage.

rant que comme une manière abrégée de représenter ces puissances, semble peu de chose; mais tel est l'avantage d'une langue bien faite, que ses notations les plus simples sont devenues souvent la source des théories les plus profondes, et c'est ce qui a eu lieu pour les exposants de Descartes. Wallis, qui s'est attaché spécialement à suivre le fil de l'induction et de l'analogie, a été conduit par ce moyen à exprimer les puissances radicales par des exposants fractionnaires.... Wallis supposa généralement que l'exposant $-\frac{m}{n}$ exprime l'unité divisée par la racine $n^{\text{ième}}$ de la grandeur élevée à la puissance m. Ce fut dans son Ouvrage intitulé *Arithmetica infinitorum* que Wallis exposa ces remarques.... » (LAPLACE, *Théorie analytique des probabilités*, I^{re} Partie, Livre I.)

V. — DE LA FONCTION EXPONENTIELLE.

Lorsque a désigne un nombre positif constant et x un exposant variable, la fonction a^x est ce que l'on appelle la *fonction exponentielle simple*. « .... L'extension la plus importante que cette notation (celle des exposants) ait reçue est celle des exposants variables, ce qui constitue le Calcul exponentiel, l'une des branches les plus fécondes de l'Analyse moderne. Leibnitz a indiqué le premier, dans les *Actes de Leipsick* pour 1682, les transcendantes à exposants variables.... » (LAPLACE, *Théorie analytique des probabilités*, Ire Partie, Livre II.)

VI. — CONTINUITÉ DE LA FONCTION ALGÉBRIQUE ET DE LA FONCTION EXPONENTIELLE.

THÉORÈME I. — *La fonction x^α, dans laquelle α désigne un exposant constant quelconque, est croissante et continue pour toutes les valeurs positives de sa variable.*

Faisons varier x entre les limites a et b; x^α prendra des valeurs comprises entre a^α et b^α. En effet, x^α croît avec x si α est positif; il décroît dans le cas contraire. Pour le démontrer, il suffit d'observer que, si par exemple α est positif et si l'on pouvait avoir

$$(x+h)^\alpha < x^\alpha,$$

on en déduirait

$$\frac{(x+h)^\alpha}{x^\alpha} < 1$$

ou

$$\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha < 1,$$

ce qui est impossible, puisque les puissances entières et les racines d'un nombre plus grand que 1 sont plus grandes que 1.

En second lieu, si μ est compris entre a^α et b^α, il est facile de voir que x^α passera par la valeur μ. En effet, il suffit pour cela de faire $x = \mu^{\frac{1}{\alpha}}$; donc x^α ne peut passer d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires; il ne passe d'ailleurs qu'une fois par la même valeur p; x^α est donc une fonction continue pour les valeurs positives de x.

Quand on donne à x des valeurs négatives, la continuité peut être interrompue; il y a plus, la fonction x^α est alors mal définie, car $(-8)^{\frac{1}{3}}$ et $(-8)^{\frac{2}{6}}$, dans lesquelles l'exposant est le même, représentent respectivement $\sqrt[3]{-8}$ ou -2 et

$$\pm\sqrt[6]{(-8)^2} = \pm\sqrt[6]{8^2} = \pm\sqrt[3]{8} = \pm 2.$$

Il est impossible de se faire une idée de la valeur d'une expression telle que $(-1)^{\sqrt{2}}$. Enfin, si le nombre α est une fraction telle que $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \dots,$ x^α n'existe pas.

Théorème II. — *La fonction a^x, dans laquelle a est constant et x variable, croît avec x si a est plus grand que 1; elle décroît dans le cas contraire; de plus, elle est continue.*

En effet, supposons, pour fixer les idées, $a > 1$; pour démontrer que a^x croît avec x, il suffit d'établir que l'on a

$$a^m > a^n \quad \text{pour} \quad m > n.$$

Si m et n sont commensurables et de la forme $m = \frac{p}{q}$, $n = \frac{r}{s}$, p, q, r, s désignant des nombres entiers, on a

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} a^m &= a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{sp}{sq}} = \left(a^{\frac{1}{sq}}\right)^{sp}, \\ a^n &= a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{rq}{sq}} = \left(a^{\frac{1}{sq}}\right)^{rq}. \end{aligned} \right.$$

Mais

$$\frac{p}{q} > \frac{r}{s} \quad \text{ou} \quad sp > rq.$$

Or $a^{\frac{1}{sq}}$ est plus grand que 1, puisque $a > 1$; donc

$$\left(a^{\frac{1}{sq}}\right)^{sp} > \left(a^{\frac{1}{sq}}\right)^{rq},$$

ou, en vertu des formules (1),

$$a^m > a^n.$$

Supposons maintenant l'une des quantités m ou n incommensurable; soit l un nombre commensurable compris entre m et n, de telle sorte que

$$m > l > n.$$

Faisons tendre l vers m, par exemple, en le faisant croître et passer par des valeurs commensurables; a^l ira en croissant, et la limite de a^l est ce que nous avons appelé a^m; cette limite est le plus petit des nombres auxquels a^l reste inférieur; donc, que m soit commensurable ou non, on a toujours

$$a^l < a^m.$$

On verrait de même que

$$a^l > a^n;$$

donc

$$a^m > a^n.$$

C. Q. F. D.

Donnons maintenant à x un accroissement infiniment petit h; a^x prendra l'accroissement

$$k = a^{x+h} - a^x.$$

Il est facile de prouver que cet accroissement est infiniment petit. En effet, on a

$$k = a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1).$$

Mais a^h a pour limite l'unité quand h tend vers zéro. Cette proposition a été établie pour les valeurs commensurables de h (p. 35); mais, comme a^h décroît avec h, il en résulte que la limite de a^h est encore l'unité pour les valeurs incommensurables de h, ce qui revient à dire que k a pour limite zéro; donc a^x est une fonction continue.

C. Q. F. D.

Nous avons supposé $a > 1$; la démonstration se fait de la même façon dans le cas contraire : il est bien entendu, du reste, que a est censé positif, la fonction a^x n'ayant été définie que dans ce cas.

VII. — SUR LA PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE DE L'EXPONENTIELLE.

Si l'on pose $a^x = \varphi(x)$, on aura

$$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x+y); \tag{1}$$

réciproquement, il est facile de prouver que toute fonction $\varphi(x)$ continue satisfaisant à cette formule est de la forme a^x.

En effet, si l'on multiplie par $\varphi(z)$ les deux membres de (1), on a

$$\varphi(x)\varphi(y)\varphi(z) = \varphi(x+y)\varphi(z) = \varphi(x+y+z).$$

En multipliant par $\varphi(t)$ les deux membres de cette nouvelle formule, on aurait

$$\varphi(x)\varphi(y)\varphi(z)\varphi(t) = \varphi(x+y+z+t),$$

et ainsi de suite. Donc, m étant entier, on trouvera

$$\varphi(x)^m = \varphi(mx), \tag{2}$$

en faisant $x = y = z = \ldots$. Je dis que cette formule a lieu pour les valeurs fractionnaires de m; on a, en effet, en supposant p et q entiers,

$$\varphi\left(\frac{x}{q}\right)^q = \varphi\left(q\frac{x}{q}\right) \quad \text{ou} \quad = \varphi(x),$$

d'où

$$\varphi\left(\frac{x}{q}\right) = \varphi(x)^{\frac{1}{q}},$$

et, en élevant les deux membres à la puissance p, en vertu de la règle (2),

$$\varphi\left(\frac{px}{q}\right) = \varphi(x)^{\frac{p}{q}}.$$

Si la fonction φ est continue, la formule (2), qui a lieu pour les valeurs fractionnaires de m, aura encore lieu pour les valeurs incommensurables de cette lettre.

Si dans (1) on fait $y = -x$, on a

$$\varphi(x)\varphi(-x) = \varphi(0),$$

et, en faisant $x = 0$,

$$\varphi(0)^2 = \varphi(0),$$

d'où l'on conclut, $\varphi(x)$ n'étant pas toujours nul, $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(-x) = \frac{1}{\varphi(x)}$, et par suite, en élevant à la puissance positive m,

$$\varphi(-mx) = \frac{1}{\varphi(x)^m} = \varphi(x)^{-m}.$$

La formule (1) est donc générale. On en conclut

$$\varphi(x)^m = \varphi(mx) = \varphi(m)^x,$$

et par suite

$$\varphi(x)^{\frac{1}{x}} = \varphi(m)^{\frac{1}{m}},$$

quels que soient m et x; donc $\varphi(x)^{\frac{1}{x}}$ est une constante a, et, par suite, $\varphi(x) = a^x$. C. Q. F. D.

VIII. — DES LOGARITHMES.

La fonction x^a reproduit une fonction algébrique quand on en prend l'inverse; la fonction inverse de a^x est ce que l'on appelle le *logarithme* de x pris dans la base a : on la désigne par le symbole

$$\log_a x.$$

Lorsque $a = 10$, on écrit simplement

$$\log x.$$

Ainsi le *logarithme* d'un nombre peut se définir : l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever un nombre constant appelé *base* pour reproduire le nombre proposé.

THÉORÈME I. — *Tout nombre positif a un logarithme; les nombres négatifs n'ont pas de logarithmes.*

En effet, si l'on désigne par x un nombre positif et si l'on pose

$$(1) \qquad a^y = x,$$

y sera ce que nous avons appelé le logarithme de x. Or, si nous faisons varier y d'une manière continue depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, a^y variera d'une manière continue (p. 44) entre zéro et $+\infty$; donc il passera par la valeur x; donc le nombre x a un logarithme. De plus, on voit qu'il n'en aura qu'un seul.

Si l'on avait supposé x négatif, on n'aurait pas pu satisfaire à l'équation (1), puisque a^y est toujours positif; donc les nombres négatifs n'ont pas de logarithmes.

REMARQUES. — On a toujours

$$\log_a 1 = 0, \qquad \text{car} \quad a^0 = 1,$$
$$\log_a 0 = -\infty \qquad \text{pour } a > 1, \quad \text{car alors } a^{-\infty} = 0,$$
$$\log_a 0 = +\infty \qquad \text{pour } a < 1, \quad \text{car alors } a^{+\infty} = 0,$$

. . . .

THÉORÈME II. — *Le logarithme est une fonction qui croît avec sa variable lorsque la base est plus grande que* 1; *elle décroît lorsque sa variable croît, dans le cas contraire.*

THÉORÈME III. — *Le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes de ses facteurs.*

En effet, si l'on pose

$$(1) \qquad y_1 = \log_a x_1, \quad y_2 = \log_a x_2, \quad \ldots, \quad y_n = \log_a x_n,$$

on a, par définition,

$$(2) \qquad x_1 = a^{y_1}, \quad x_2 = a^{y_2}, \quad \ldots, \quad x_n = a^{y_n};$$

donc

$$x_1 x_2 x_3 \ldots x_n = a^{y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n},$$

c'est-à-dire

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \log_a x_1 x_2 \ldots x_n,$$

ou bien

$$\log_a x_1 + \log_a x_2 + \ldots = \log_a x_1 x_2 \ldots x_n.$$

C. Q. F. D.

Des formules (2) on tire $x_1 : x_2 = a^{y_1 - y_2}$; $y_1 - y_2$ est donc le logarithme de $x_1 : x_2$. Donc :

THÉORÈME IV. — *Le logarithme d'un quotient est égal à la différence des logarithmes du dividende et du diviseur.*

On a également $x_1^m = a^{my_1}$. Donc my_1 ou $m \log x_1$ est le logarithme de x_1^m; donc enfin :

THÉORÈME V. — *Le logarithme d'une puissance quelconque de x est égal au logarithme de x multiplié par l'exposant de cette puissance.*

THÉORÈME VI. — *Soit* $\varphi(x)$ *une fonction continue de* x; *si l'on a*

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(xy),$$

la fonction $\varphi(x)$ *sera un logarithme de* x.

Nous laissons au lecteur le soin de faire la démonstration (*voir* p. 46).

IX. — CONCORDANCE DE LA DÉFINITION NÉPÉRIENNE DES LOGARITHMES AVEC LA DÉFINITION NOUVELLE.

Neper définissait, comme l'on a vu, les logarithmes au moyen des deux progressions

$$1,\ q,\ q^2,\ \ldots,\ q^n,\ \ldots,$$
$$0,\ r,\ 2r,\ \ldots,\ nr,\ \ldots.$$

nr était, d'après lui, le logarithme de q^n; cette définition s'accorde avec celle que nous avons donnée dans ce Chapitre. En effet, on a

$$q^n = \left(q^{\frac{1}{r}}\right)^{nr};$$

nr, logarithme de q^n d'après Neper, est donc bien *l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever le nombre constant* $q^{\frac{1}{r}}$ *pour avoir* q^n. Du reste, $q^{\frac{1}{r}}$ a bien pour logarithme 1 : c'est la base.

Réciproquement, si nous considérons des nombres en progression géométrique α, α^2, α^3, ..., leurs logarithmes dans la base a quelconque seront $\log\alpha$, $2\log\alpha$, $3\log\alpha$, ..., c'est-à-dire seront en progression arithmétique.

X. — DU MODULE D'UN SYSTÈME DE LOGARITHMES.

Il est souvent utile de savoir passer d'un système de logarithmes à un autre. Ainsi, par exemple, les premiers logarithmes calculés par les soins de Neper n'avaient pas pour base 10. Pour les calculer dans la nouvelle base, il suffit de les multiplier par un nombre constant : c'est ce que nous allons établir.

Soient x le logarithme de N dans la base a et y le logarithme du même nombre dans la base b; on aura

$$N = a^x;$$

en prenant les logarithmes des deux nombres dans la base b, on a

$$\log_b N = x \log_b a$$

ou bien

$$\log_b N = \log_a N . \log_b a. \tag{1}$$

De là le théorème suivant :

Théorème I. — *Le logarithme d'un nombre pris dans le nouveau système s'obtient en multipliant le logarithme de ce nombre dans l'ancien système par le logarithme de l'ancienne base dans le nouveau système.*

Si l'on fait $N = b$ dans la formule (1), on a

$$1 = \log_a b . \log_b a \quad \text{ou} \quad \log_b a = \frac{1}{\log_a b};$$

donc :

Théorème II. — *Le logarithme de l'ancienne base dans le nouveau système et celui de la nouvelle base dans l'ancien système sont inverses l'un de l'autre.*

Le nombre constant $\log_b a$ ou $1 : \log_a b$ est ce que l'on appelle le *module* qui sert à passer du système dont la base est b au système dont la base est a.

Lorsque Neper eut inventé les logarithmes, il ne tarda pas à s'apercevoir que, si α représente un nombre très-petit et si β est le logarithme de $1+\alpha$, le logarithme de $1+2\alpha$, qui diffère fort peu de $1+2\alpha+\alpha^2=(1+\alpha)^2$, différera fort peu de 2β; de même, 3β, logarithme de $(1+\alpha)^3$, différera fort peu du logarithme de $1+3\alpha$...; donc les nombres très-voisins de l'unité croissent proportionnellement à leurs logarithmes. La limite du rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ pour $\alpha = 0$ était ce que Neper appelait le *module* d'un système de logarithmes. Neper crut faire l'hypothèse la plus simple en posant

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1.$$

Il obtint alors un système de logarithmes que l'on a appelés *naturels, népériens* ou *hyperboliques*. Effectivement, les logarithmes népériens sont ceux que l'on rencontre le plus fréquemment en Analyse. Proposons-nous de calculer la base.

La base est le nombre qui a pour logarithme 1; or, $1+\alpha$ ayant pour logarithme β, $(1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}}$ aura pour logarithme $\frac{\beta}{\beta}$ ou 1; si donc nous supposons $\frac{\beta}{\alpha} = 1$, on aura, en appelant e la base des logarithmes naturels,

$$e = \lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}} \quad \text{pour} \quad \alpha = 0 \quad \text{et} \quad \lim \frac{\beta}{\alpha} = 1,$$

ou

$$e = \lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}\frac{\alpha}{\beta}} = \lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Nous calculerons plus loin la limite de l'expression $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$. Elle est égale à 2,718281828459045....

Cherchons maintenant le module qui sert à passer des logarithmes naturels aux logarithmes pris dans la base a. Ce module sera $1 : \log_e a$. Soit β le logarithme de $1+\alpha$ dans la base a; on aura

$$a = \lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}} \quad \text{pour} \quad \alpha = 0,$$

ou bien

$$\log_e a = \lim \left[\frac{1}{\beta}\log_e(1+\alpha)\right].$$

Or, pour α très-petit, on a $\log_e(1+\alpha) = \alpha$, ou, pour être plus rigoureux, $\log(1+\alpha)$ est un nombre qui, divisé par α, donne 1 pour quotient lorsque l'on passe aux limites et que l'on fait $\alpha = 0$; on en conclut

$$\log_e a = \lim \left[\frac{\alpha}{\beta}\frac{\log_e(1+\alpha)}{\alpha}\right] = \lim \frac{\alpha}{\beta}.$$

$\log_e a$ est donc ce que Neper appelait le *module*. Aujourd'hui c'est $\log_a e$ ou $\lim \frac{\beta}{\alpha}$ que l'on appelle le *module* d'un système de logarithmes; c'est, d'après ce que nous avons vu, le nombre par lequel il faut multiplier les logarithmes naturels pour avoir ceux du système dont la base est a.

EXERCICES ET NOTES.

1. Supposons que la somme a soit placée au taux r. Au bout du temps θ très-petit, qui sera, si l'on veut, $\frac{1}{n}$ d'année, elle deviendra $a\left(1+\frac{r}{n}\right)$; si on la retire alors pour la replacer au même taux, elle deviendra, après un nouvel intervalle de temps $\frac{1}{n}$, égale à $a\left(1+\frac{r}{n}\right)^2$; au bout du temps 3θ elle deviendra $a\left(1+\frac{r}{n}\right)^3$, ..., au bout du temps $t = m\theta = \frac{m}{n}$ elle deviendra $a\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{m}{n}n} = a\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^{tr}$. Or, pour $\alpha = 0$, $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ tend vers la limite $e = 2,7182845\ldots$ (nous l'avons admis, sauf à le démontrer rigoureusement plus loin). On a donc pour la valeur acquise par le capital a placé pendant le temps t, quand on suppose n indéfiniment croissant, ae^{rt}. On pose $e^r = (1+i)$ ou $r = \log(1+i)$; en appelant alors A la valeur du capital a au bout du temps t, on a

$$A = a(1+i)^t.$$

C'est la formule dont les financiers font usage. Cette autre,

$$A = a(1+i)^n(1+if),$$

où n est entier et où $t = n+f$, n'est pas usitée dans les affaires. i est dit le *taux instantané*.

2. Résoudre les équations

$$e^x + e^{-x} = 2,$$
$$10^{x^2-3x+2} = 7.$$

3. Trouver des fonctions φ, χ, ψ continues telles que l'on ait

$$\varphi(x)+\varphi(y)=\varphi(xy),$$
$$\chi(x)+\chi(y)=\chi(x+y),$$
$$\psi(x)+\psi(y)=\psi(xy).$$

4. Lorsque a est positif et moindre que 1, l'expression $a^{a^{a^{\cdots}}}$ tend vers une racine de l'équation $a^x = x$. (EISENSTEIN).

5. Dans un système de logarithmes, dont la base est entière, il n'y a que les puissances commensurables de la base qui ont des logarithmes commensurables.

6. On a construit des Tables qui, étant donné $\log x$, font connaître $\log(1+x)$ et $\log(1-x)$; à l'aide de ces Tables, on calcule facilement $\log(a+b)$, connaissant $\log a$ et $\log b$, ainsi :

$$\log(a\pm b) = \log a + \log\left(1\pm\frac{b}{a}\right);$$

ces Tables portent le nom de *Tables de Gauss*.

CHAPITRE IV.

DES IMAGINAIRES.

I. — PRÉLIMINAIRES.

Lorsque l'on cherche à résoudre une équation du second degré, telle que

$$(1) \qquad x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = 0,$$

et qui n'a pas de racines, on est conduit, en appliquant la formule générale, à un résultat impossible,

$$x = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - (\alpha^2+\beta^2)} = \alpha \pm \sqrt{-\beta^2},$$

et en l'écrivant ainsi

$$(2) \qquad x = \alpha \pm \beta\sqrt{-1},$$

on arrive à ce résultat singulier que, si l'on remplace dans la formule (1) x par sa valeur (2), en traitant le signe absurde $\sqrt{-1}$ comme une lettre dont on remplacerait le carré par -1, cette équation (1) se trouve satisfaite; en effet, on a

$$\begin{aligned}&(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})^2 - 2\alpha(\alpha\pm\beta\sqrt{-1}) + \alpha^2+\beta^2\\ &= \alpha^2 \pm 2\alpha\beta\sqrt{-1} + \beta^2(\sqrt{-1})^2 - 2\alpha^2\\ &\mp 2\alpha\beta\sqrt{-1} + \alpha^2 + \beta^2.\end{aligned}$$

Si l'on efface les termes qui se détruisent dans le second membre et si l'on remplace $(\sqrt{-1})^2$ par -1, on trouve bien zéro.

L'introduction du signe $\sqrt{-1}$ dans les calculs a souvent conduit à la découverte de résultats nouveaux et importants, reconnus exacts *a posteriori;* les géomètres se sont alors crus autorisés à faire usage de ce signe $\sqrt{-1}$, en le traitant comme une quantité dont le carré serait -1. Mais on sent tout ce qu'une pareille convention a de contraire à l'esprit de rigorisme qui caractérise les sciences mathématiques, et l'on a dû chercher si l'emploi du signe $\sqrt{-1}$ devait *nécessairement* ou seulement *accidentellement* conduire à des résultats exacts. Dans le premier cas, il y a toute une théorie nouvelle à édifier; dans le second, il faut renoncer à classer dans le domaine des faits acquis ceux que l'emploi du signe en question aura fait apparaître.

II. — EXPLICATION D'UN PARADOXE.

Reprenons l'équation (1) du paragraphe précédent.

$$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = 0$$

ou

$$(x-\alpha)^2 + \beta^2 = 0. \tag{1}$$

Il est clair que l'on ne peut y satisfaire si β n'est pas nul; mais, au problème impossible qui consisterait à résoudre l'équation (1), essayons de substituer un autre problème qui n'en diffère pas beaucoup et qui soit pour ainsi dire la rectification de son énoncé (c'est ainsi que l'on agit pour l'interprétation des solutions négatives des problèmes). On a vu que $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, mis à la place de x, satisfaisait à l'équation quand on remplaçait $(\sqrt{-1})^2$ par -1, en traitant $\sqrt{-1}$ comme une quantité ordinaire. Au lieu de remplacer x par $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, remplaçons-le par $\alpha + \beta i$, i désignant une indéterminée; on aura

$$(x-\alpha)^2 + \beta^2 = \beta^2 i^2 + \beta^2 = \beta^2(1+i^2).$$

Le premier membre de (1) devient, comme l'on voit, divisible par $1+i^2$, en sorte que, si $1+i^2$ pouvait s'annuler pour une certaine valeur de i, cette valeur de i fournirait pour $x = \alpha + \beta i$ une valeur satisfaisant à l'équation (1). Cette remarque nous permet de rectifier comme il suit le problème qui consiste à résoudre l'équation (1) :

Étant donné le polynôme $x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$, trouver une expression de la forme $a + bi$ qui, substituée à la place de x rende ce polynôme divisible par $i^2 + 1$ ou, ce qui revient au même, égal à zéro, à un multiple de $i^2 + 1$ près.

On trouve alors, comme nous l'avons vu, la solution $\alpha + \beta i$. Mais négliger $i^2 + 1$ dans les calculs, c'est regarder i^2 comme égal à -1 : on voit ici le germe d'un nouveau genre de calcul, qu'il importe de régulariser.

III. — DES QUANTITÉS IMAGINAIRES.

Désignons par i une variable susceptible de passer par tous les états de valeur entre $-\infty$ et $+\infty$. Tout polynôme entier en i est ce que nous appellerons une *imaginaire*. Nous conviendrons de regarder deux imaginaires comme égales entre elles quand elles ne différeront que par un multiple de $i^2 + 1$ ou quand les restes de leur division par i^2+1 seront effectivement égaux; cette convention n'aura rien d'absurde si l'on sous-entend toujours dans l'un des membres de l'égalité un multiple de $i^2 + 1$; et dans l'égalité

$$A = B + \text{multiple de } (i^2+1),$$

on peut sans inconvénient effacer ces mots *multiple de* (i^2+1), s'il est bien convenu, une fois pour toutes, qu'ils devraient y être écrits, ou que dans le langage ils doivent être sous-entendus.

D'après cela, *toute quantité imaginaire peut être ramenée à la forme $a+bi$, a et b désignant deux quantités indépendantes de i.*

En effet, dire qu'une imaginaire est égale à $a+bi$, c'est une manière abrégée de dire qu'elle est égale à $a+bi$ augmenté d'un multiple de i^2+1. Or soit P l'imaginaire en question ; en la divisant par i^2+1, on obtient un reste du premier degré. Appelons-le $a+bi$, on aura rigoureusement, en appelant Q le quotient,

$$P=Q(i^2+1)+a+bi.$$

Donc, en négligeant ou en sous-entendant un multiple de i^2+1,

$$P=a+bi. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Les quantités indépendantes de i s'appellent *quantités réelles.*

Une quantité imaginaire quelconque se ramenant à la forme $a+bi$ en la remplaçant par le reste de sa division par i^2+1, il importe de montrer comment on peut trouver le reste de la division de $f(i)$ par i^2+1.

Pour trouver le reste de la division d'un polynôme par i^2+1, il suffit d'y remplacer i^2 par -1, i^3 par $-i$, i^4 par 1, i^5 par i, ..., en général i^{4n} par 1, i^{4n+1} par i, i^{4n+2} par -1 et i^{4n+3} par $-i$ (c'est-à-dire d'y regarder i comme une quantité dont le carré serait -1).

En effet, soit $f(i)$ un polynôme en i. En appelant $\varphi(i^2)$ l'ensemble des termes de degré pair et $i\psi(i^2)$ l'ensemble

des termes de degré impair, on aura rigoureusement

$$(1) \qquad f(i)=\varphi(i^2)+i\psi(i^2).$$

Mais, le reste de la division de $\varphi(x)$ par $x+1$ s'obtenant en remplaçant, dans $\varphi(x)$, x par -1, on a, quel que soit x,

$$\varphi(x)=Q(x)(x+1)+\varphi(-1),$$

Q désignant un polynôme entier en x. Cette formule ayant lieu quel que soit x, on peut y faire $x=i^2$, et l'on a

$$\varphi(i^2)=Q(i^2)(i^2+1)+\varphi(-1);$$

on aurait de même

$$\psi(i^2)=Q'(i^2)(i^2+1)+\psi(-1),$$

et, en vertu de (1),

$$f(i)=(Q+Q'i)(i^2+1)+\varphi(-1)+i\psi(-1).$$

Le reste de la division de $f(i)=\varphi(i^2)+i\psi(i^2)$ par i^2+1 est donc $\varphi(-1)+i\psi(-1)$; on l'obtient bien en remplaçant i^2 par -1 dans $f(i)$. C. Q. F. D.

IV. — DES QUATRE OPÉRATIONS.

D'après nos conventions :

1° *Toute égalité de la forme*

$$(1) \qquad a+bi=c+di,$$

où a, b, c, d sont réels, entraînera, puisque i est arbitraire (c'est-à-dire puisque cette égalité doit avoir lieu quel que soit i),

$$(2) \qquad a=c, \quad b=d,$$

en sorte que la formule (1) sera une manière abrégée d'écrire les deux formules (2) (*).

2° *Le produit de deux imaginaires* $a+bi$, $c+di$ *sera*

(3) $$ac-bd+i(bc+ad),$$

car, rigoureusement, il est $ac+bdi^2+i(bc+ad)$; et, en remplaçant i^2 par -1, ce qui revient à négliger un multiple de i^2+1, on trouve bien l'expression (3).

3° *Le produit de plusieurs imaginaires est indépendant de l'ordre des facteurs; la somme de plusieurs imaginaires est indépendante de l'ordre dans lequel on écrit les parties,* etc.

4° *Pour qu'un produit de plusieurs imaginaires soit nul, il faut et il suffit que l'une de ces imaginaires soit nulle.*

Le sens de ce théorème est celui-ci : *Pour que le produit de plusieurs quantités telles que* $a+bi$, $c+di$, ..., *en nombre* n, *soit multiple de* i^2+1, *il faut que l'une d'elles soit nulle.* Supposons que l'on ait

$$(a+bi)(c+di)\ldots=(i^2+1)X,$$

X désignant un polynôme entier en i. Le premier membre de cette formule est de degré n en i; le second doit être du même degré : donc X est de degré $n-2$. Or le premier membre s'annule pour $i=-\frac{a}{b}, -\frac{c}{d}, \ldots$, en tout pour

(*) Il faut bien remarquer que cette conclusion est vraie lors même que la formule (1) est une manière abrégée d'écrire

$$a+bi=c+di+\text{multiple de }(i^2+1),$$

en sorte que cette formule exige que le multiple de i^2+1 soit nul aussi; en effet quand deux polynômes sont égaux, les restes de leur division $a+bi$ et $c+di$ par i^2+1 ou par un diviseur quelconque sont égaux (t. I, p. 50, ligne 20.)

n valeurs de i. Mais, i^2+1 ne s'annulant jamais, il faut que X s'annule pour les n valeurs de i, $-\frac{a}{b}$, $-\frac{c}{d}$, ... Or il est de degré $n-2$: donc il est identiquement nul; donc enfin on a *rigoureusement*

$$(a+bi)(c+di)\ldots=0,$$

qui exige que l'un des facteurs $a+bi$, $c+di$, ... soit nul.

Théorème. — *Il existe toujours une imaginaire qui, multipliée par une imaginaire donnée, appelée* diviseur, *reproduit une autre imaginaire donnée, appelée* dividende (à un multiple de i^2+1 près).

En effet, soit $a+bi$ le dividende, $c+di$ le diviseur; si l'on pose

$$a+bi=(c+di)(x+yi),$$

on en conclut

$$a+bi=cx-dy+i(dx+cy),$$

ce qui exige que l'on ait

$$a=cx-dy,\quad b=dx+cy.$$

Ces deux équations donnent pour x et pour y les valeurs finies et bien déterminées

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\quad y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

Si c^2+d^2 est différent de zéro, c'est-à-dire si c et d ne sont pas nuls à la fois, en d'autres termes si le diviseur $c+di$ n'est pas nul. On a donc

$$x+iy=\frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2}.$$

Ce résultat, qui est ce que l'on appelle le *quotient* de $a+bi$ par $c+di$, peut s'obtenir, comme il est facile de le vérifier, en effectuant les opérations dans l'expression

$$\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}.$$

Théorème. — *Le quotient de deux imaginaires* D *et* d *ne change pas quand on multiplie le dividende et le diviseur par une même quantité réelle ou imaginaire.*

En effet, en appelant q le quotient, on a

$$D = dq;$$

en multipliant par m, on a

$$Dm = dmq.$$

Donc q est le quotient de Dm par dm.

Si nous convenons de représenter par $\frac{D}{d}$ le quotient de D par d, on voit que l'on aura

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2},$$

comme tout à l'heure.

Nous appellerons *racine carrée* d'une imaginaire $a+bi$ l'expression imaginaire $x+iy$, qui, élevée au carré, reproduit $a+bi$ (à un multiple de i^2+1 près). Bornons-nous pour le moment à chercher la racine carrée de -1, nous réservant de revenir plus loin sur le cas général. En appelant $x+iy$ cette racine, si elle existe, on aura

$$(x+iy)^2 = -1$$

(à la rigueur, on devrait écrire dans le second membre un multiple de i^2+1, ce qui ne présente rien d'absurde *a priori*). L'égalité précédente revient à

$$x^2 - y^2 + 2ixy = -1,$$

ce qui exige que l'on ait (p. 59, ligne 18) rigoureusement

$$x^2 - y^2 = -1, \quad 2xy = 0.$$

Il faut donc que x ou y soit nul; or on ne peut pas supposer y nul, car on aurait $x^2 = -1$, équation absurde; on doit donc prendre $x = 0$, et l'on a alors $y^2 = 1$ ou $y = \pm 1$. Ainsi la racine cherchée $x+iy$ a deux valeurs $\pm i$; cela justifie les formules

$$i = \sqrt{-1}, \quad -i = -\sqrt{-1},$$

et dorénavant i sera toujours remplacé par le signe $\sqrt{-1}$. Toute imaginaire $a+bi$ pourra donc s'écrire $a+b\sqrt{-1}$. Quelques géomètres ne font pas usage du signe $\sqrt{-1}$ et conservent la lettre i dans les calculs.

En résumé :

1° $\sqrt{-1}$ *représente une quantité qui peut recevoir toutes les valeurs possibles entre* $-\infty$ *et* $+\infty$ *dans toutes les égalités dans lesquelles il se trouve écrit*, et 2° *dans ces égalités il faut toujours sous-entendre que l'on a écrit dans l'un des membres un multiple de* $(\sqrt{-1})^2+1$. Ce multiple peut d'ailleurs être nul.

V. — DU MODULE ET DE L'ARGUMENT.

Toute quantité imaginaire $x+y\sqrt{-1}$ peut être mise sous la forme suivante :

$$(1) \qquad x+y\sqrt{-1} = \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y\sqrt{-1}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Si l'on remarque alors que la somme des carrés des quantités $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ est égale à l'unité, on pourra poser

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\theta.$$

Si l'on pose, en outre,

$$r = \sqrt{x^2+y^2},$$

l'égalité (1) pourra s'écrire

$$x + y\sqrt{-1} = r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta).$$

La quantité r est ce que l'on appelle le *module* de l'expression $x + y\sqrt{-1}$; l'angle θ est son *argument*.

On convient de prendre le module toujours positif; quant à l'argument, il peut varier entre $-\infty$ et $+\infty$, en sorte que, cet argument n'étant absolument donné que par son sinus et son cosinus, sa valeur se trouve indéterminée et comprise dans la formule

$$\theta_1 + 2k\pi,$$

θ_1 désignant le plus petit argument positif répondant à l'imaginaire en question, et k pouvant prendre toutes les valeurs entières comprises entre $-\infty$ et $+\infty$.

Deux imaginaires qui ont le même module et qui ne diffèrent que par le signe de leur argument, en d'autres termes deux imaginaires de la forme

$$x + y\sqrt{-1}, \quad x - y\sqrt{-1}$$

sont dites *conjuguées* (*). Une imaginaire dont le module

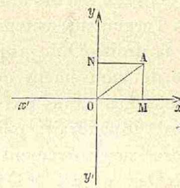
(*) Le produit de deux imaginaires conjuguées $x + y\sqrt{-1}$ et $x - y\sqrt{-1}$ est égal à $x^2 + y^2$, c'est-à-dire au carré de leur module commun.

est l'unité est ce que l'on appelle une *expression réduite;* la forme la plus générale des expressions réduites est

$$\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta.$$

Traçons dans un plan deux droites rectangulaires xOx', yOy' (*fig.* 8); donnons-leur le nom d'*axe des x* et d'*axe des y*.

Fig. 8.



Cela posé, considérons l'imaginaire

$$x + y\sqrt{-1}.$$

Prenons sur $x'x$, à partir du point O, une longueur OM égale en valeur absolue à x, dans le sens Ox si x est positif, dans le sens Ox' s'il est négatif; prenons de même ON égal à la valeur absolue de y et dans le sens Oy si y est positif, dans le sens Oy' si y est négatif. Construisons enfin un rectangle sur ON et OM; le sommet A de ce rectangle sera déterminé toutes les fois que l'on se donnera x et y, ou, ce qui revient au même, $x + y\sqrt{-1}$. Réciproquement, à tout point A du plan correspondra une imaginaire déterminée, et une seule, dont la partie réelle sera l'x du point A et dont le coefficient de $\sqrt{-1}$ sera l'y.

En sorte que nous confondrons souvent dans le langage les expressions *point* et *quantité imaginaire*. Si nous menons la diagonale OA, nous aurons

$$\mathrm{OA} = \sqrt{x^2+y^2},$$

$$\cos \mathrm{MOA} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\sin \mathrm{MOA} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

et, par conséquent, OA est le module de $x+y\sqrt{-1}$, l'angle MOA en est l'argument, cet angle MOA devant être compté depuis la droite OM jusqu'à la droite OA dans le sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre. Nous ne nous arrêterons pas à généraliser les formules précédentes; il faudrait, pour les établir en toute rigueur, supposer successivement le point M dans chacun des angles xOy, yOx', $x'Oy'$, $y'Ox$, et discuter les signes de x et de y. Nous laissons au lecteur le soin de compléter cette démonstration.

Voici un autre mode de représentation des quantités imaginaires, proposé par Mourey dans un excellent Ouvrage publié sur cette théorie.

A partir du point O, que l'on appelle *origine* des imaginaires, traçons une droite OA ayant pour longueur le module de l'imaginaire $x+y\sqrt{-1}$ et faisant avec Ox un angle égal à l'argument de cette imaginaire; la droite OA représentera l'imaginaire $x+y\sqrt{-1}$ aussi bien que le point A.

Théorème I. — *La somme de plusieurs imaginaires est représentée par la résultante des droites qui représentent les imaginaires en question.*

En effet, considérons les imaginaires

$$z_1=x_1+y_1\sqrt{-1},\quad z_2=x_2+y_2\sqrt{-1},\quad z_3=x_3+y_3\sqrt{-1},\quad \ldots;$$

leur somme est

$$Z = x_1+x_2+x_3+\ldots+(y_1+y_2+\ldots)\sqrt{-1}.$$

Or $x_1, x_2, \ldots$ représentent les projections sur l'axe des x des droites qui représentent respectivement $z_1, z_2, z_3, \ldots$; donc $x_1+x_2+x_3+\ldots$ représente la projection de la résultante de ces droites sur Ox, $y_1+y_2+y_3+\ldots$ représente la projection sur Oy de la résultante des mêmes droites; donc enfin Z est représenté par la résultante des droites qui représentent $z_1, z_2, \ldots$.

C. Q. F. D.

Corollaire. — De là résulte immédiatement que *le module d'une somme est moindre que la somme des modules de ses parties.*

Théorème II. — 1° *Le module d'un produit est égal au produit des modules de ses facteurs;* 2° *l'argument d'un produit est égal à la somme des arguments de ses facteurs.*

En effet, considérons les imaginaires

$$r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta) \text{ et } r'(\cos\theta'+\sqrt{-1}\sin\theta');$$

si nous en faisons le produit, il vient, en intervertissant l'ordre des facteurs,

$$rr'(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)(\cos\theta'+\sqrt{-1}\sin\theta'),$$

ou bien

$$rr'\left[(\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta')+\sqrt{-1}(\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta')\right],$$

c'est-à-dire

$$rr'\left[\cos(\theta+\theta')+\sqrt{-1}\sin(\theta+\theta')\right].$$

Mais, en multipliant ce résultat par une nouvelle imaginaire $r''(\cos\theta'' + \sqrt{-1}\sin\theta'')$, on trouvera

$$rr'r''\left[\cos(\theta+\theta'+\theta'') + \sqrt{-1}\sin(\theta+\theta'+\theta'')\right],$$

et ainsi de suite, ce qui démontre le théorème énoncé.

Théorème III. — *Lorsqu'un produit de plusieurs facteurs est nul, l'un de ses facteurs est forcément égal à zéro.*

En effet, le module d'un produit étant égal au produit des modules de ses facteurs, si le produit est nul, son module sera nul, et par conséquent le module de l'un des facteurs au moins devra être égal à zéro. Mais une imaginaire dont le module est zéro est évidemment nulle; donc, etc., comme on l'a prouvé plus haut (p. 60).

C. Q. F. D.

Théorème IV. — *Le module d'un quotient est égal au quotient des modules du dividende et du diviseur. L'argument d'un quotient est égal à la différence des arguments du dividende et du diviseur.*

En effet, soient $r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$ le dividende, $\rho(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega)$ le diviseur; le quotient sera donné par la formule

$$\frac{r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)}{\rho(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega)},$$

que l'on peut écrire

$$\frac{r}{\rho}\,\frac{(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)(\cos\omega - \sqrt{-1}\sin\omega)}{(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega)(\cos\omega - \sqrt{-1}\sin\omega)},$$

c'est-à-dire

$$\frac{r}{\rho}\left[\cos(\theta-\omega) + \sqrt{-1}\sin(\theta-\omega)\right],$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Remarque. — Le quotient de 1 par une expression réduite est l'imaginaire conjuguée de cette expression réduite; on a, en effet,

$$\frac{1}{\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega} = \cos\omega - \sqrt{-1}\sin\omega.$$

VI. — THÉORIE DES RADICAUX ALGÉBRIQUES.

Jusqu'ici, nous avons pu remarquer une analogie complète entre le calcul des imaginaires et le calcul des quantités réelles; cette analogie cesse dès que l'on essaye de généraliser la notion de radical ou d'exposant, ainsi que nous allons le constater.

Si nous représentons par le symbole

$$(x + y\sqrt{-1})^n$$

et si nous appelons *puissance* $n^{\text{ième}}$ de $x + y\sqrt{-1}$ le produit de n facteurs égaux à cette imaginaire, nous aurons, en vertu du théorème II (p. 67),

$$[r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + \sqrt{-1}\sin n\theta).$$

Si l'on suppose en particulier $r = 1$, on obtient la formule suivante,

$$(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \sqrt{-1}\sin n\theta,$$

restée célèbre sous le nom de *formule de Moivre*, du nom du géomètre français qui l'a découverte (¹).

(¹) Que signifie au fond la formule de Moivre? En toute rigueur, il faudrait écrire

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^m - (\cos m\theta + i\sin m\theta) = \text{multiple de } (i^2+1);$$

ainsi elle signifie que $(\cos\theta + i\sin\theta)^m - (\cos m\theta + i\sin m\theta)$ est divisible

On appelle *racine $n^{ième}$* d'une imaginaire A une quantité qui, élevée à la puissance n, reproduit A.

Théorème I. — *Toute imaginaire a n racines $n^{ièmes}$.*

En effet, considérons l'imaginaire

$$R(\cos\Theta + \sqrt{-1}\sin\Theta);$$

désignons par $r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$ sa racine $n^{\text{ième}}$; nous aurons, par définition,

$$[r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^n = R(\cos\Theta + \sqrt{-1}\sin\Theta),$$

c'est-à-dire, en vertu de la formule de Moivre,

$$r^n(\cos n\theta + \sqrt{-1}\sin n\theta) = R(\cos\Theta + \sqrt{-1}\sin\Theta).$$

Cette égalité se décompose en deux autres :

$$(1)\quad \begin{cases} r^n\cos n\theta = R\cos\Theta, \\ r^n\sin n\theta = R\sin\Theta; \end{cases}$$

si l'on élève au carré ces deux égalités et si l'on ajoute, on trouve

$$r^{2n} = R^2,$$

---

par i^2+1 : ce que l'on prouverait directement par les procédés ordinaires de l'Algèbre, en écrivant i au lieu de $\sqrt{-1}$ et en rétablissant partout le multiple de i^2+1 dans les formules du texte où il a été omis.

Si l'on réduit le premier membre de la formule de Moivre à la forme $a+b\sqrt{-1}$ en faisant usage de la formule du binôme, a devra être égal à $\cos m\theta$ et b à $\sin m\theta$; on trouve ainsi

$$\cos m\theta = \cos^m\theta - \frac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2}\theta\sin^2\theta + \ldots,$$

$$\sin m\theta = \frac{m}{1}\cos^{m-1}\theta\sin\theta - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3}\theta\sin^3\theta + \ldots;$$

mais l'étude de ces formules trouvera sa place dans la Trigonométrie et nous ne nous y arrêterons pas.

et, en observant que r doit être un nombre essentiellement positif ou nul,

$$(2)\qquad r^n = R \quad\text{ou}\quad r = \sqrt[n]{R};$$

les formules (1) donnent alors

$$\cos n\theta = \cos\Theta,\quad \sin n\theta = \sin\Theta,$$

et par suite

$$n\theta = \Theta + 2k\pi,$$

k désignant un entier quelconque, c'est-à-dire

$$\theta = \frac{\Theta + 2k\pi}{n}.$$

Si l'on désigne alors, avec Cauchy, par le symbole $\sqrt[n]{((A))}$ la racine $n^{\text{ième}}$ de l'imaginaire A, on voit que la racine $n^{\text{ième}}$ de $R(\cos\Theta + \sqrt{-1}\sin\Theta)$ aura n valeurs données par la formule

$$(3)\quad \begin{cases} \sqrt[n]{((R(\cos\Theta + \sqrt{-1}\sin\Theta)))} \\ \quad = \sqrt[n]{R}\left(\cos\dfrac{\Theta + 2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\dfrac{\Theta + 2k\pi}{n}\right), \end{cases}$$

formule dans laquelle il suffira de faire k successivement égal à $0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$. En effet, si l'on fait k égal à $ni+j$, j désignant un entier compris entre 0 et $n-1$ inclusivement, et i désignant un entier quelconque positif ou négatif, on obtient, pour la racine $n^{\text{ième}}$ de

$$R(\cos\Theta + \sqrt{-1}\sin\Theta),$$

une valeur dont l'argument ne diffère de $\dfrac{\Theta + 2j\pi}{n}$ que d'un multiple entier de la circonférence, c'est-à-dire une valeur déjà comprise parmi celles que l'on obtient en faisant k

égal à o, 1, 2, 3, ..., $n-1$ dans la formule (3); donc enfin la racine $n^{\text{ième}}$ d'une imaginaire a n valeurs, comme nous l'avions annoncé.

Au surplus, il est facile de voir que ces n valeurs sont toutes différentes, car les arcs compris dans les formules

$$\frac{\Theta}{n},\ \frac{\Theta+2\pi}{n},\ \frac{\Theta+4\pi}{n},\ \ldots,\ \frac{\Theta+2\overline{n-1}\pi}{n}$$

diffèrent de moins d'une circonférence; deux quelconques d'entre eux ne sauraient donc avoir à la fois même sinus et même cosinus.

Remarque I. — Si, dans la formule (3), on suppose $\Theta=0$, on trouve

$$(4)\qquad \sqrt[n]{((\mathrm{R}))}=\sqrt[n]{\mathrm{R}}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\right).$$

Remarque II. — La formule (3) peut encore s'écrire

$$\sqrt[n]{((\mathrm{R}(\cos\Theta+\sqrt{-1}\sin\Theta)))}$$
$$=\left[\sqrt[n]{\mathrm{R}}\left(\cos\frac{\Theta}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{\Theta}{n}\right)\right]\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\right).$$

Or, en vertu de la formule (4), dans laquelle on peut supposer $\mathrm{R}=1$, $\cos\frac{2k\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}$ désigne une quelconque des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité; Θ peut être censé représenter l'un quelconque des arguments de

$$\mathrm{R}(\cos\Theta+\sqrt{-1}\sin\Theta)$$

La formule précédente nous montre donc que les n racines $n^{\text{ièmes}}$ d'une imaginaire quelconque peuvent s'obtenir en multipliant l'une quelconque d'entre elles successivement par chacune des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

Dorénavant, lorsque nous ne spécifierons pas la valeur

d'une racine $n^{\text{ième}}$, nous la représenterons par le symbole $\sqrt{((\ ))}$; au contraire, lorsqu'il sera question d'une valeur bien déterminée de cette racine, par exemple lorsqu'il s'agira de celle qui a le plus petit argument positif, nous ferons usage du signe $\sqrt{\ }$ sans doubles parenthèses.

VII. — CALCUL DES RADICAUX ALGÉBRIQUES.

Théorème I. — *Si l'on multiplie chacune des valeurs de* $\sqrt[n]{((\mathrm{A}))}$ *par chacune des valeurs de* $\sqrt[n]{((\mathrm{B}))}$, *on reproduit chacune des valeurs de* $\sqrt[n]{((\mathrm{AB}))}$.

En effet, soit

$$\mathrm{A}=r_1(\cos\theta_1+\sqrt{-1}\sin\theta_1),$$
$$\mathrm{B}=r_2(\cos\theta_2+\sqrt{-1}\sin\theta_2);$$

on aura

$$\sqrt[n]{((\mathrm{A}))}=r_1^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta_1+2k_1\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{\theta_1+2k_1\pi}{n}\right),$$
$$\sqrt[n]{((\mathrm{B}))}=r_2^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta_2+2k_2\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{\theta_2+2k_2\pi}{n}\right),$$

et par suite

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}\sqrt[n]{((\mathrm{A}))}\times\sqrt[n]{((\mathrm{B}))}=r_1^{\frac{1}{n}}r_2^{\frac{1}{n}}\Big[&\cos\frac{\theta_1+\theta_2+2(k_1+k_2)\pi}{n}\\&+\sqrt{-1}\sin\frac{\theta_1+\theta_2+2(k_1+k_2)\pi}{n}\Big];\end{aligned}\right.$$

formules dans lesquelles k_1 et k_2, et par suite k_1+k_2, désignent des entiers tout à fait quelconques. D'un autre côté, on a

$$\mathrm{AB}=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\sqrt{-1}\sin(\theta_1+\theta_2)],$$
$$\sqrt[n]{((\mathrm{AB}))}=r_1^{\frac{1}{n}}r_2^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta_1+\theta_2+2i\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{\theta_1+\theta_2+2i\pi}{n}\right],$$

i désignant un entier quelconque. De la comparaison de cette formule avec la précédente on déduit

$$\sqrt[n]{((A))} \times \sqrt[n]{((B))} = \sqrt[n]{((AB))}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Si l'on voulait supprimer les doubles parenthèses, on le pourrait; mais il faudrait choisir convenablement les valeurs des radicaux.

THÉORÈME II. — *Si l'on divise chacune des valeurs de* $\sqrt[n]{((A))}$ *par chacune des valeurs de* $\sqrt[n]{((B))}$, *on obtient* n *résultats différents qui sont les* n *valeurs de* $\sqrt[n]{((A:B))}$.

THÉORÈME III. — *Si l'on élève à la puissance* m *les valeurs de* $\sqrt[n]{((A))}$, *on obtient les valeurs de* $\sqrt[n]{((A^m))}$.

THÉORÈME IV. — *Si l'on extrait les racines* $m^{\text{ièmes}}$ *des* n *valeurs de* $\sqrt[n]{((A))}$, *on obtient les valeurs de* $\sqrt[mn]{((A))}$.

REMARQUE. — Quand on a un radical de la forme

$$\sqrt[mn]{((A^m))},$$

il faut éviter de le simplifier et d'écrire

$$\sqrt[mn]{((A^m))} = \sqrt[n]{((A))};$$

en effet, le premier membre de cette formule a mn valeurs, le second n'en a que n; quand on n'agit pas avec précaution dans le calcul des radicaux imaginaires, on s'expose souvent à tomber dans de grossières erreurs; il ne faut pas en accuser l'emploi des symboles imaginaires, dont le calcul n'est pas tout à fait soumis aux mêmes règles que celui des quantités réelles. Ainsi, par exemple, on raisonnerait mal en écrivant

$$(1) \qquad \sqrt[2]{-2} \times \sqrt[2]{-2} = \sqrt[2]{(-2)(-2)} = \sqrt[2]{4} = 2,$$

puis

$$(2) \qquad \sqrt[2]{-2} \times \sqrt[2]{-2} = (\sqrt[2]{-2})^2 = -2,$$

d'où l'on déduirait

$$2 = -2.$$

En effet, dans la formule (1), $\sqrt[2]{-2}$ désigne une valeur particulière de $\sqrt[2]{((-2))}$, $\sqrt[2]{(-2)(-2)}$ désigne une valeur particulière de $\sqrt[2]{((4))}$; on ne peut, sans examen, égaler ces deux valeurs; et en effet, on a

$$\begin{aligned}\sqrt[2]{((-2))} &= \sqrt[2]{2(\cos\pi + \sqrt{-1}\sin\pi)} \\ &= \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) + \sqrt{-1}\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\right]\end{aligned}$$

ou

$$\sqrt[2]{((-2))} = \pm\sqrt{2}\sqrt{-1}.$$

Prenons les radicaux avec le signe $+$; on voit que l'on n'aura pas

$$\sqrt[2]{-2} \times \sqrt[2]{-2} = \sqrt[2]{4},$$

mais bien

$$\sqrt[2]{-2} \times \sqrt[2]{-2} = \sqrt{2} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{2} \times \sqrt{-1} = -2.$$

Si l'on prend les radicaux avec le signe $-$, on arrive encore au même résultat. Donc la formule (1) est toujours fausse si $\sqrt[2]{-2}$ y représente toujours la même valeur de $\sqrt[2]{((-2))}$.

VIII. — SUR LES ÉQUATIONS EN GÉNÉRAL.

Les règles de la multiplication et de la division algébriques s'appliquent évidemment aux quantités imaginaires comme aux quantités réelles; il en est de même de la formule du binôme.

On peut former des équations à l'aide de quantités réelles et imaginaires, et chercher s'il n'existe pas des quantités imaginaires satisfaisant à ces équations; les principes fondamentaux que nous avons démontrés sur la résolution des équations, dans la première Partie de cet Ouvrage, sont encore applicables aux cas où l'on considérerait des égalités entre quantités imaginaires; ces principes ne dépendent absolument que des quatre premières opérations de l'Algèbre, reconnues applicables aux quantités imaginaires. Ainsi, il n'y a rien à ajouter à la théorie des équations du premier degré et à la théorie des déterminants. Il n'en est pas de même des équations du second degré où interviennent des questions sur les radicaux; il y a donc lieu d'examiner de nouveau la théorie des équations du second degré : c'est ce que nous allons faire.

IX. — SUR LES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.

Nous conviendrons de ne pas écrire l'indice d'un radical lorsque cet indice sera 2.

Cela posé, cherchons la racine carrée de $a+b\sqrt{-1}$; désignons cette racine par $x+y\sqrt{-1}$, nous aurons

$$(x+y\sqrt{-1})^2 = a+b\sqrt{-1}$$

ou bien

$$x^2-y^2+2xy\sqrt{-1} = a+b\sqrt{-1}.$$

Cette équation équivaut aux deux suivantes :

$$(1)\qquad x^2-y^2=a,$$

$$(2)\qquad 2xy=b;$$

la dernière peut s'écrire, en la généralisant un peu,

$$(3)\qquad -x^2y^2=-\frac{b^2}{4}.$$

A l'inspection des équations (1) et (3), on reconnaît immédiatement que x^2 et $-y^2$ sont racines de l'équation en u

$$u^2-au-\frac{b^2}{4}=0,$$

d'où l'on déduit

$$u=\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2},$$

c'est-à-dire, en observant que y^2 doit être positif,

$$x^2=\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right),$$

$$y^2=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right).$$

On déduit de là

$$x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)},$$

$$y=\pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}.$$

L'équation (2) montre avec quels signes on doit prendre x et y; si, par exemple, b est positif, on prendra x et y de même signe, en sorte que l'on aura

$$\sqrt{((a+b\sqrt{-1}))}=\pm\left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right.$$
$$\left.+\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}\sqrt{-1}\right];$$

si b est négatif, on aura, au contraire,

$$\sqrt{((a+b\sqrt{-1}))} = \pm\left[\sqrt{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+b^2})} - \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a)}\sqrt{-1}\right].$$

Si l'on fait $b=0$, on trouve : en supposant $a>0$,

$$\sqrt{((a))} = \pm\sqrt{a};$$

en supposant $a<0$,

$$\sqrt{((a))} = \pm\sqrt{-a}\sqrt{-1},$$

ou, en explicitant les signes,

$$\sqrt{((-\alpha^2))} = \pm\alpha\sqrt{-1}.$$

Une équation du second degré a toujours deux racines lorsque l'on admet pour l'inconnue des valeurs imaginaires : voici comment il faut entendre cette proposition. Considérons l'équation

$$x^2+px+q=0.$$

Supposons $\frac{p^2}{4}-q<0$; on peut se proposer de chercher s'il existe pour x des valeurs de la forme $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ vérifiant cette équation, c'est-à-dire en sous-entendant dans le second membre un multiple de $(\sqrt{-1})^2+1$. On trouve alors successivement

$$\left(x+\frac{1}{2}p\right)^2 = \frac{p^2}{4}-q,$$

$$x+\frac{1}{2}p = \pm\sqrt{-1}\sqrt{q-\frac{p^2}{4}},$$

$$x = -\frac{1}{2}p \pm\sqrt{-1}\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}.$$

X. — DES FONCTIONS DE VARIABLES IMAGINAIRES.

Tout polynôme entier en $z=x+y\sqrt{-1}$ est ce que l'on appelle une fonction *entière* de z.

Soit $f(u,z)$ une fonction entière de u et z; toute expression de la forme $X+\sqrt{-1}Y$ qui, mise à la place de u dans l'équation

$$f(u,z)=0,$$

y satisfait, est ce que l'on appelle une fonction *algébrique* de z, mais il faut encore pour cela que X et Y soient des fonctions de x et y (*).

En général, toute expression qui peut être ramenée à la forme $X+Y\sqrt{-1}$ ou qui est définie par cette forme, X et Y désignant des fonctions de x et y, est ce que l'on appelle une fonction de $x+\sqrt{-1}y$. Toutes les fonctions qui ne sont pas algébriques sont *transcendantes*.

Une fonction $X+Y\sqrt{-1}$ de $x+y\sqrt{-1}$ est *continue* lorsqu'à un accroissement infiniment petit quelconque de $x+y\sqrt{-1}$ correspond un accroissement infiniment petit de $X+Y\sqrt{-1}$, et nous appelons ici *accroissement d'une quantité* la différence entre deux valeurs de cette quantité.

Pour qu'une fonction $X+Y\sqrt{-1}$ de $x+y\sqrt{-1}$ soit continue, il faut et il suffit évidemment que X et Y soient des fonctions continues de x et de y; il faut et il suffit aussi que son module et son argument soient des fonctions continues du module et de l'argument de sa variable. Ces

(*) Puiseux, *Mémoire sur les fonctions algébriques* (*Journal de Liouville*, t. XV); Briot et Bouquet, *Fonctions elliptiques*, sont peut-être les premiers qui aient adopté cette définition, aujourd'hui admise par tous les savants.

propositions deviennent évidentes si l'on représente les imaginaires à l'aide de points, comme il a été expliqué plus haut.

XI. — DÉFINITION DE LA FONCTION EXPONENTIELLE.

Nous avons défini le symbole

$$[r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)]^x,$$

pour toutes les valeurs entières et positives de x, comme étant le produit de x facteurs égaux à $r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)$; nous en avons déduit la formule

$$[r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)]^x = r^x(\cos\theta x+\sqrt{-1}\sin\theta x).$$

Nous pouvons maintenant nous servir de cette formule pour définir le symbole $[r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)]^x$ lorsque x sera fractionnaire, incommensurable ou négatif. Ainsi $r^x(\cos\theta x+\sqrt{-1}\sin\theta x)$ est ce que nous appellerons dorénavant la $x^{\text{ième}}$ puissance de $r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)$.

La puissance $x^{\text{ième}}$ de $r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)$ n'a qu'une seule valeur lorsque x est entier; mais il n'en est pas de même dans les autres cas. En effet, l'expression $r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)$ ne change pas quand on remplace θ par $\theta+2k\pi$, k désignant un entier quelconque; ainsi les valeurs de $[r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)]^x$ seront données par la formule

$$\begin{aligned}&[r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)]^x\\ &\quad = r^x[\cos(\theta x+2k\pi x)+\sqrt{-1}\sin(\theta x+2k\pi x)].\end{aligned}$$

Si x est incommensurable, les arcs compris dans la formule

$$\theta x+2k\pi x$$

auront pour sinus et cosinus une infinité de nombres différents, en sorte que la puissance $x^{\text{ième}}$ d'une quantité imaginaire a en général une infinité de valeurs.

Le lecteur se demandera sans doute pourquoi nous n'avons pas défini la puissance fractionnaire $\frac{p}{q}$ de $r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)$ à l'aide de la formule

$$(1)\quad [r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)]^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{[r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)]^p},$$

pourquoi enfin nous n'avons pas suivi dans la définition des puissances de quantités imaginaires la même marche que dans la définition des puissances de quantités positives. La raison en est simple : d'après notre définition, $[r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)]^x$ est une quantité qui possède plusieurs valeurs, il est vrai, mais dont le nombre des valeurs ne change qu'avec la valeur et non avec la forme de x; ainsi nous avons

$$(2)\quad [r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)]^{\frac{3}{2}} = [r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)]^{\frac{6}{4}} = \ldots.$$

Au contraire, en partant de l'équation (1) pour définir les puissances fractionnaires, on voit que

$$[r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)]^{\frac{p}{q}}$$

aurait q valeurs, et par conséquent varierait avec la forme de la fraction $\frac{p}{q}$, en sorte que, par exemple, la formule (2) serait inexacte. De la définition que nous venons de donner résulte la généralisation de la formule de Moivre, à savoir

$$(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)^x = \cos\theta x+\sqrt{-1}\sin\theta x.$$

Une quantité réelle étant assimilable à une imaginaire, on voit qu'une quantité réelle peut avoir une infinité de puissances $x^{\text{ièmes}}$ dont une seule est toujours réelle.

Les règles des exposants s'appliquent encore aux imaginaires, avec certaines restrictions toutefois; ainsi on a

$$\begin{aligned}
&[r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^x [r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^{x'} \\
&= r^x(\cos\theta x + \sqrt{-1}\sin\theta x) r^{x'}(\cos\theta x' + \sqrt{-1}\sin\theta x') \\
&= r^{x+x'}[\cos\theta(x+x') + \sqrt{-1}\sin\theta(x+x')] \\
&= [r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^{x+x'}.
\end{aligned}$$

Les autres propriétés des exposants se démontreraient d'une manière semblable.

THÉORÈME I. — *La fonction a^x est continue, lors même que l'on suppose a imaginaire.*

Cela résulte évidemment de la formule

$$[r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^x = r^x(\cos\theta x + \sqrt{-1}\sin\theta x),$$

dans laquelle r^x, $\cos\theta x$ et $\sin\theta x$ sont des fonctions continues. Nous verrons plus loin comment on peut encore généraliser davantage la fonction exponentielle, en supposant sa variable imaginaire, et nous verrons qu'alors encore elle reste continue.

THÉORÈME II. — *Si l'on a pour toutes les valeurs réelles de x et de y*

$$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x+y),$$

et si la fonction $\varphi(x)$ est continue, on a nécessairement

$$\varphi(x) = a^x,$$

a désignant une quantité réelle ou imaginaire.

En effet, en répétant le raisonnement de la page 46, on trouve que $\varphi(x)^{\frac{1}{x}}$ est une constante réelle ou imaginaire a.

EXERCICES ET NOTES.

1. On a

$$(a+b+c)(a+b\alpha+c\alpha')(a+b\alpha'+c\alpha) = a^3+b^3+c^3-3abc,$$

α et α' désignant deux racines imaginaires de $x^3 - 1 = 0$.

2. Résoudre l'équation $(x+1)^5 - x^5 = 1$.

3. Calculer et mettre sous la forme $a + b\sqrt{-1}$ les expressions

$$\sqrt{\sqrt{-1}},\quad \sqrt{\sqrt{\sqrt{-1}}},\quad \ldots.$$

4. Quelles sont les racines cubiques de $\sqrt{-1}$?

5. La théorie des imaginaires remonte aux premiers travaux des modernes sur la théorie des équations, mais elle n'a été assise sur des bases solides que dans ces derniers temps, grâce aux recherches de Français, Argand, Vallès, Mourey, Truel et Cauchy. La théorie exposée dans le texte a été ébauchée par Cauchy.

Mourey, dans sa *Vraie théorie*, etc., a présenté comme il suit la théorie des imaginaires :

Appelons *quantité imaginaire* une droite située dans un plan sur lequel est tracé un axe fixe de direction donnée. La longueur r de cette droite sera ce que nous appellerons son module; l'angle θ qu'elle fait avec l'axe fixe, compté comme on compte les angles en Trigonométrie, sera ce que nous appellerons son *argument*.

La droite en question sera représentée par la notation r_θ et l'on convient de ne pas écrire l'argument quand il est nul, ainsi $a_0 = a$. La résultante de $r_\theta, r'_{\theta'}, r''_{\theta''}, \ldots$ s'appellera aussi leur somme et sera représentée par $r_\theta + r'_{\theta'} + r''_{\theta''} + \ldots$. La différence de deux imaginaires se définira comme plus haut. Le produit de deux imaginaires r_θ et R_Θ sera, par définition, l'imaginaire ayant pour module rR et pour argument $\theta + \Theta$. Ce produit existe et est bien défini. Le carré de r_θ sera $r^2_{2\theta}$. D'après cela, on voit que $1_{\frac{\pi}{2}}$ a pour carré $1_\pi = 0 - 1$ ou -1. Ainsi l'on peut dire que la droite 1_π ou -1 est le carré de $1_{\frac{\pi}{2}}$, que l'on peut alors représenter par $\sqrt{-1}$. Toute droite pouvant être considérée comme la résultante de deux autres, l'une, a ou a_0, parallèle à l'axe fixe, et l'autre, $b_{\frac{\pi}{2}} = b_0 . 1_{\frac{\pi}{2}} = b\sqrt{-1}$, perpendiculaire à cet axe; elle pourra être représentée par un symbole tel que

$$a + b\sqrt{-1}, \text{ etc.}$$

Hamilton (*Lectures on quaternions*) a essayé d'étendre ces notions à la Géométrie de l'espace. M. Despeyrous (*Mémoires de l'Académie de Toulouse*) a fait une tentative du même genre. Les imaginaires de M. Despeyrous sont jusqu'ici la généralisation la plus naturelle des imaginaires de Mourey; les quaternions d'Hamilton sont soumis à des règles bizarres: ainsi le produit de deux quaternions peut changer avec l'ordre des facteurs.

6. Une droite étant déterminée par ses deux extrémités, on propose de trouver son milieu en faisant usage d'un compas, mais sans se servir de la règle. (MASCHERONI.)

Les propriétés de l'hexagone régulier et la théorie de Mourey permettent de donner un grand nombre de solutions de ce problème. (*Voir* MASCHERONI, *la Géométrie du compas*. Napoléon Ier faisait, paraît-il, grand cas de cet Ouvrage.)

7. Consulter la théorie des équipollences de Bellavitis, traduite par Laisant, député.

CHAPITRE V.

THÉORIE GÉNÉRALE DES SÉRIES.

I. — DÉFINITIONS.

On appelle *série* une suite illimitée de termes qui se forment et se suivent d'après une loi déterminée. On appelle encore les séries *suites infinies*.

Une série est dite *convergente* si la somme de ses n premiers termes tend vers une limite déterminée, lorsque n augmente indéfiniment, en suivant du reste une loi quelconque; cette limite est ce que l'on appelle la *valeur* de la série ou la *somme de ses termes* (*).

Une série qui n'est pas convergente est appelée *divergente*. La série

$$(\alpha_0 - \alpha_1) + (\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_4) + \ldots + (\alpha_{n-1} - \alpha_n) + \ldots,$$

dans laquelle α_n désigne un nombre qui a pour limite zéro, lorsque n augmente indéfiniment, est convergente, car la somme de ses n premiers termes est $\alpha_0 - \alpha_n$, et cette quantité a pour limite α_0 pour $n = \infty$.

(*) Quel est l'inventeur de la théorie des séries? C'est une question difficile à trancher; Archimède a sommé les progressions géométriques, Newton, Wallis, Leibnitz, Mercator, Maclaurin, Stirling, les Bernoulli, Euler, Lagrange, etc., ont sommé bien des séries, mais leurs raisonnements manquent en général de rigueur; Abel et Cauchy paraissent être les premiers qui aient raisonné juste dans cette branche de l'Analyse. (Lire l'*Histoire des Mathématiques* de Montucla.)

Au contraire, la série

$$+1-1+1-1+1-\ldots+1-1+\ldots$$

est divergente, car la somme de ses n premiers termes est alternativement zéro et 1; elle ne tend par conséquent pas vers une limite déterminée lorsque n croît d'une manière quelconque.

On comprend difficilement comment d'illustres analystes ont pu écrire des formules telles que

$$(A)\qquad +1-1+1-1+\ldots=\frac{1}{2}$$

(Leibnitz, *Lettre à Christian Wolff*. — Euler, *Institutiones Calculi differentialis et integralis*, Pars posterior, Cap. I, etc.).

Une série divergente ne saurait représenter $\frac{1}{2}$. En effet, quelle idée peut-on se faire d'une somme composée d'un nombre illimité de parties? En toute rigueur, on n'a pas même le droit d'écrire

$$(1)\qquad \alpha_0=(\alpha_0-\alpha_1)+(\alpha_1-\alpha_2)+\ldots+(\alpha_n-\alpha_{n+1})+\ldots$$

lorsque α_n tend vers zéro, c'est-à-dire lorsque la série est convergente. On le fait cependant, mais seulement en vertu d'une convention qui consiste à séparer une série convergente de la limite vers laquelle tend la somme de ses termes par le signe $=$. Ainsi la formule (1) est une manière abrégée d'écrire

$$\alpha_0=\lim[(\alpha_0-\alpha_1)+\ldots+(\alpha_n-\alpha_{n+1})]\ \text{pour}\ n=\infty.$$

La formule (A) est donc complétement absurde, puisque la limite de la somme de ses n premiers termes n'existe pas : elle n'est donc pas égale à $\frac{1}{2}$.

Si nous insistons sur ce point, c'est que malheureusement on trouve dans d'excellents auteurs, parmi les princes de la Science, des fautes analogues à celle dont nous venons de parler. Abel s'en plaint amèrement dans une de ses Lettres à Holmboë (voir *OEuvres complètes*).

II. — THÉORÈMES SUR LA CONVERGENCE.

Théorème I. — *Pour qu'une série soit convergente, il faut que ses termes diminuent indéfiniment.*

En effet, soit la série

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots,$$

et en général s_n la somme des n premiers termes; on a

$$(1)\qquad s_{n+1}-s_n=u_n.$$

Si l'on suppose la série proposée convergente et si l'on désigne sa valeur par s, on aura

$$\lim s_{n+1}=s,$$
$$\lim s_n=s;$$

donc

$$\lim s_{n+1}-\lim s_n=\lim(s_{n+1}-s_n)=0,$$

c'est-à-dire, en vertu de l'équation (1),

$$\lim u_n=0.$$

Remarque I. — La démonstration que nous venons d'employer, comme du reste toutes celles que nous emploierons dans l'exposition de ces principes, est basée sur le calcul des limites; elle précise le sens que nous devons attribuer à la locution *diminuer indéfiniment*. Quand nous disons que u_n doit diminuer indéfiniment, nous devons entendre par là que cette quantité, réelle ou imaginaire, doit avoir zéro pour limite, rien de plus : ainsi u_n peut tendre comme on veut vers zéro ; il n'est nullement nécessaire, par exemple, que l'on ait

$$u_n > u_{n+1} > u_{n+2} > \ldots.$$

Remarque II. — On aurait également pu écrire les équations suivantes,

$$\lim s_{n+p} = s,$$
$$\lim s_n = s,$$

d'où, retranchant la deuxième de la première,

$$\lim (u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p-1}) = 0,$$

résultat que nous énoncerons ainsi :

Pour qu'une série soit convergente, il faut que la somme des p termes qui suivent le $n^{ième}$ diminue indéfiniment quand n augmente indéfiniment, quel que soit du reste p.

Remarque III. — Il existe des séries dans lesquelles u_n peut tendre vers zéro sans que la série à laquelle appartient ce terme soit convergente ; par exemple, considérons la série suivante, appelée série *harmonique :*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots.$$

Il est facile de s'assurer que cette série est divergente, car, si l'on prend n termes après le $n^{ième}$, la somme

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

est plus grande que $\frac{1}{2n}$ répété n fois, c'est-à-dire que $\frac{1}{2}$. Si

donc on groupe les termes de la série harmonique ainsi qu'il suit,

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots$$
$$+ \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) + \ldots,$$

on voit que la somme de ses $2n$ premiers termes est plus grande que $\frac{1}{2}$ répété autant de fois que l'on veut, en prenant n suffisamment grand. La somme de ces $2n$ premiers termes croît donc au delà de toute limite ; donc la série est divergente. C. Q. F. D.

Il arrive souvent que l'on rend une série convergente par un simple changement des signes de quelques-uns de ses termes. Ainsi la série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \pm \frac{1}{n} \mp \frac{1}{n+1} \pm \ldots$$

est convergente. En général :

Théorème II. — *Si dans une série les termes sont, à partir de l'un d'eux, indéfiniment décroissants et alternativement positifs et négatifs, cette série est convergente.*

En effet, considérons la série

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n - u_{n+1} + u_{n+2} - \ldots + u_{n+2p} - u_{n+2p+1} \pm \ldots,$$

dans laquelle les termes sont indéfiniment décroissants et alternativement positifs et négatifs à partir de u_n.

Appelons en général S_m la somme des m premiers termes de la série. Si nous remarquons que les termes vont constamment en diminuant, les quantités

$$u_n - u_{n+1},\ u_{n+2} - u_{n+3},\ \ldots,\ u_{n+2p} - u_{n+2p+1}$$

seront toutes positives, et, par conséquent,

$$(1)\qquad S_{n+1} < S_{n+3} < S_{n+5} < \ldots < S_{n+2p+1} < \ldots.$$

Les quantités $-u_{n+1} + u_{n+2}, \ldots, -u_{n+2p-1} + u_{n+2p}, \ldots$ seront toutes négatives, et, par suite,

$$(2)\qquad S_{n+2} > S_{n+4} > S_{n+6} > \ldots > S_{n+2p} > \ldots.$$

Or

$$S_{n+2p} = S_{n+2p-1} + u_{n+2p}.$$

Donc S_{n+2p} est plus grand que S_{n+2p-1}, et, à cause de la suite d'inégalités (1), plus grand que S_{n+1}. Ainsi donc une somme quelconque comprise dans la suite S_{n+2}, S_{n+4}, $S_{n+6}, \ldots$ est plus grande que S_{n+1} ; il en résulte que ces sommes, allant constamment en décroissant et restant supérieures à S_{n+1}, qui est fixe, ont une limite S. Or on a

$$S_{n+2p} - u_{n+2p+1} = S_{n+2p+1}.$$

Faisons croître p indéfiniment; le premier membre de cette équation a pour limite S, car u_{n+2p+1} a pour limite zéro; donc S_{n+2p+1} a pour limite S également; donc, de quelque manière que croisse l'entier m, S_m a une limite, ce qui revient à dire que la série proposée est convergente.

Corollaire. — On voit que, la valeur de la série étant comprise entre S_n et S_{n+1}, l'erreur commise en prenant S_n pour valeur de la série est moindre en valeur absolue que u_{n+1}.

Théorème III. — *Quand une série à termes positifs a ses termes respectivement plus petits que ceux d'une autre série également à termes positifs et de plus convergente, la première série est aussi convergente.*

Soient, en effet,

$$(1)\qquad s = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

la série convergente donnée (on représente ordinairement une série convergente en séparant la somme d'un certain nombre de termes de sa valeur par le signe $=$, on supprime le mot *lim*) et

$$(2)\qquad v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

la série proposée. Soit s_n la somme des n premiers termes de la série (1), t_n la somme des n premiers termes de la série (2); comme $v_0 < u_0$, $v_1 < u_1, \ldots, v_n < u_n$, on a évidemment

$$t_n < s_n;$$

donc, *a fortiori*,

$$t_n < s.$$

Or, n croissant, t_n croît, mais t_n reste constamment inférieur à s; donc, en vertu d'un principe déjà invoqué, t_n a une limite; la série (2) est convergente.

C. Q. F. D.

Théorème IV. — *Une série à termes positifs et négatifs est convergente lorsque la série des valeurs absolues de ses termes est convergente.*

En effet, considérons à part les séries des termes positifs et des termes négatifs pris dans l'ordre dans lequel ils se succèdent dans la série proposée.

Soient

$$(1)\qquad a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_i + \ldots$$

la série des termes positifs et

$$(2)\qquad b_0 + b_1 + \ldots + b_k + \ldots$$

celle des termes négatifs pris chacun en valeur absolue.

Soient x_i la somme des i premiers termes de la série (1), y_k la somme des k premiers termes de la série (2), et s_n la somme des n premiers termes de la série proposée. Nous pouvons toujours supposer que $a_0, a_1, \ldots, a_i$ soient les ermes positifs de s_n, et $b_0, b_1, \ldots, b_k$ les termes négatifs; alors on a, en appelant s'_n la somme des n premiers termes de la série proposée rendus positifs,

$$(3)\qquad s'_n = x_i + y_k,$$

$$(4)\qquad s_n = x_i - y_k.$$

L'équation (3) montre que s'_n est plus grand que x_i et que y_k; donc, *a fortiori*, la limite de s'_n, qui par hypothèse existe, est supérieure à x_i et à y_k. Or x_i et y_k sont des nombres croissant avec i et k, mais constamment inférieurs à la limite de s'_n; donc ils ont une limite chacun; donc les séries (1) et (2) sont convergentes. L'équation (4) montre que s_n a une limite égale à la différence des limites de x_i et y_k, c'est-à-dire que la série proposée est convergente et a une valeur égale à la différence des valeurs des séries de ses termes positifs et de ses termes négatifs.

Théorème V. — *Quand une série ne perd pas sa convergence lorsque l'on rend tous ses termes positifs, on peut, sans altérer sa valeur, intervertir l'ordre de ses termes.*

En effet, considérons d'abord une série convergente à termes positifs :

$$(1)\qquad s = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_m + \ldots.$$

Intervertissons l'ordre de ses termes, et soit

$$(2)\qquad v_0 + v_1 + \ldots + v_n$$

la nouvelle série obtenue après ce changement. Soient s'_n la somme des n premiers termes de la série (2), s_m la somme des m premiers termes de la série proposée; on pourra toujours choisir m de telle sorte que tous les termes de s'_n soient contenus dans les m premiers termes de la série (1). On aura alors

$$s'_n \leqq s_m \quad \text{et} \quad s'_n < \lim s_m \quad \text{ou} \quad < s.$$

Nous voyons par là :

1° Que la série (2) est convergente, puisque s'_n croît avec n sans dépasser s;

2° Que la valeur $s' = \lim s'_n$ de la série (2) ne saurait surpasser s. Or on démontrerait de la même manière que la valeur s de la série (1) ne saurait surpasser s'; donc on doit avoir

$$s = s',$$

donc la série (1) n'a pas changé de valeur.

Supposons actuellement la série

$$(1)\qquad s = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

à termes quelconques.

Soient

$$(3)\qquad a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_i + \ldots$$

la série de ses termes positifs pris dans le même ordre que dans la série (1),

$$(4)\qquad b_0 + b_1 + \ldots + b_k + \ldots$$

la série de ses termes négatifs également pris dans l'ordre où ils se trouvent dans l'équation (1). Supposons que la série (1) conserve sa convergence quand on rend ses termes positifs. Les séries (3) et (4) sont convergentes, et, si x et y désignent les valeurs respectives de ces séries, on a

$$(5) \qquad s = x - y.$$

Cela posé, changeons l'ordre des termes de la série (1); la série de ses termes positifs sera encore la série (3), à l'ordre des termes près. Or, cette série est à termes positifs; donc elle conserve sa valeur. Même observation pour la série des termes négatifs et pour la série des valeurs absolues des termes de la série (1). Il en résulte, d'après le théorème IV, que la valeur de la série (1) transformée est encore $x - y$; donc la série (1) ne change pas de valeur quand on change l'ordre de ses termes.

C. Q. F. D.

Remarque. — Toute cette démonstration repose sur l'égalité (5); lors donc que x ou y n'existeront pas, c'est-à-dire quand dans la série proposée les termes positifs et négatifs ne formeront pas des séries convergentes, la démonstration précédente tombera en défaut. Il est facile, du reste, de donner un exemple dans lequel on voit une série changer de valeur quand on change l'ordre de ses termes.

Considérons, par exemple, la série convergente

$$(1) \qquad \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots \pm \frac{1}{n} \mp \frac{1}{n+1} \pm \ldots$$

Remarquons que la série des valeurs absolues de ses termes est identique avec la série harmonique qui est divergente.

Posons

$$f(n) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{2n},$$

et considérons la série

$$(2) \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} + \ldots$$

Arrêtons-nous au terme $\frac{1}{2n}$; cette série, comme on voit, renferme les mêmes termes que la série proposée; leur ordre est différent, et l'on prend d'abord deux termes positifs, puis un terme négatif, puis deux termes positifs, puis un terme négatif, ...; nous aurons

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} \\ &= f(n) + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \ldots + \frac{1}{4n-1}. \end{aligned} \right.$$

La quantité qui suit $f(n)$, composée de n termes, est évidemment plus grande que $n \times \frac{1}{4n-1}$ ou que $\frac{1}{4 - \frac{1}{n}}$. On a donc

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} > f(n) + \frac{1}{4 - \frac{1}{n}}.$$

Si nous supposons que n devienne infini, le premier membre de cette inégalité ou la valeur de la série (2) différera de $\lim f(n)$ ou de la valeur de la série (1) de plus de $\frac{1}{4}$; donc évidemment la série (2) a une valeur toute différente de celle de la série (1).

Jusqu'ici nous n'avons guère parlé que de séries à termes réels; mais on fait un fréquent usage en Analyse de séries à termes imaginaires.

Une série à termes imaginaires peut se mettre sous la forme

$$(1)\quad \begin{cases} (u_0 + v_0\sqrt{-1}) + (u_1 + v_1\sqrt{-1}) + (u_2 + v_2\sqrt{-1}) + \ldots \\ \qquad + (u_n + v_n\sqrt{-1}) + \ldots . \end{cases}$$

Cette série sera convergente si les deux séries

$$(2)\qquad u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

$$(3)\qquad v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots,$$

formées des parties réelles et des coefficients de $\sqrt{-1}$ dans tous ses termes, sont toutes deux convergentes.

En effet, soit s_n la somme des n premiers termes de la série (1), σ_n et τ_n les sommes des n premiers termes des séries (2) et (3); on a

$$s_n = \sigma_n + \tau_n\sqrt{-1}.$$

En passant aux limites et en désignant par σ et τ les valeurs des séries (2) et (3), on voit que

$$\lim s_n = \sigma + \tau\sqrt{-1};$$

donc la série (1) est convergente. C. Q. F. D.

Remarque. — Il est clair que, si l'une des séries (2) et (3) eût été divergente, la série (1) l'eût été pareillement.

Théorème VI. — *Dans une série à termes imaginaires, si la série des modules des différents termes est convergente, cette série est elle-même convergente et l'on peut, sans altérer sa convergence, intervertir l'ordre des termes.*

En effet, considérons la série (1). Les séries de ses termes réels et des coefficients de $\sqrt{-1}$ sont convergentes indépendamment des signes de leurs termes, car ceux-ci sont respectivement plus petits que ceux de la série des modules qui est à termes positifs. On peut donc changer l'ordre des termes de ces séries sans en altérer la valeur, ce qui revient à dire que l'on peut changer l'ordre des termes de la série proposée elle-même. C. Q. F. D.

III. — RÈGLES DE CONVERGENCE.

On connaît un grand nombre de règles permettant de reconnaître si une série donnée est convergente; mais un petit nombre de caractères suffisent dans la plupart des cas, et nous allons les faire connaître.

Théorème I. — *Toute progression géométrique dont la raison est un nombre réel ou imaginaire de module moindre que* 1 *est une série convergente.*

En effet, une telle progression peut se mettre sous la forme

$$(1)\qquad a + ax + ax^2 + \ldots + ax^n + \ldots.$$

Or, quel que soit x, la somme des $n+1$ premiers termes est égale à

$$a\frac{x^{n+1}-1}{x-1} \quad \text{ou} \quad a\left(\frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}\right).$$

Si le module de x est moindre que 1, x^{n+1} tend vers zéro, et la somme des n premiers termes tend vers la limite finie $\frac{a}{1-x}$ pour $n=\infty$. La série (1) est donc convergente, et l'on a

$$\frac{a}{1-x} = a + ax + ax^2 + \ldots + ax^n + \ldots.$$

Si l'on remplace x par $\frac{z}{\alpha}$, en supposant $\bmod \frac{z}{\alpha} < 1$, on a

$$\frac{a\alpha}{\alpha - z} = a + a\frac{z}{\alpha} + a\frac{z^2}{\alpha^2} + \ldots + a\frac{z^n}{\alpha^n} + \ldots,$$

et, en faisant $a = \frac{1}{\alpha}$,

$$\frac{1}{\alpha - z} = \frac{1}{\alpha} + \frac{z}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\alpha^3} + \ldots + \frac{z^n}{\alpha^{n+1}} + \ldots;$$

cette formule, qui nous sera utile plus tard, a lieu pour toutes les valeurs de z et de α telles que $\mathrm{mod}\, z < \mathrm{mod}\, \alpha$.

THÉORÈME II. — *Si, dans une série à termes positifs*

(1) $$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots,$$

la limite du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *d'un terme au précédent tend vers une limite inférieure à l'unité ou reste constamment inférieure à un nombre* α *fixe moindre que* 1, *cette série est convergente.*

Observons tout d'abord que, la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ étant moindre que l'unité, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ finira, pour des valeurs suffisamment grandes de n, par différer de sa limite de moins que cette limite ne diffère de l'unité, et par suite $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ finira par rester moindre qu'un nombre α fixe, moindre lui-même que l'unité; ainsi nous n'avons besoin de démontrer le théorème que pour le cas où l'on a, pour n suffisamment grand,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \alpha.$$

De là on tire

$$u_{n+1} < \alpha u_n,$$

et de même

$$u_{n+2} < \alpha u_{n+1}, \quad u_{n+3} < \alpha u_{n+2}, \quad \ldots.$$

On tire de ces formules

$$u_{n+1} < \alpha u_n, \quad u_{n+2} < \alpha^2 u_n, \quad u_{n+3} < \alpha^3 u_n, \quad \ldots.$$

La série considérée a donc ses termes respectivement moindres que les termes de la progression géométrique

$$\alpha u_n + \alpha^2 u_n + \alpha^3 u_n + \ldots,$$

dont la raison α est moindre que 1 et qui, par suite, est convergente; la série proposée elle-même est donc convergente.

COROLLAIRE. — *Si dans une série à termes quelconques la limite du rapport d'un terme au précédent a un module moindre que l'unité, ou si le rapport d'un terme au précédent conserve un module moindre qu'un nombre* α *fixe moindre que* 1, *cette série est convergente.*

Car la série formée des modules de ses termes est convergente, en vertu du théorème précédent (p. 96).

REMARQUE I. — *Si le rapport* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *tendait vers une limite supérieure à l'unité ou restait à partir d'un certain terme supérieur à l'unité, la série serait divergente, car les termes iraient en augmentant.*

REMARQUE II. — Si la limite $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ était l'unité, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ n'étant pas constamment supérieur à 1, on ne pourrait plus rien affirmer relativement à la convergence de la série, et il faudrait avoir recours à d'autres caractères pour décider si la série proposée est convergente ou divergente.

REMARQUE III. — Il est facile d'évaluer une limite de l'erreur commise quand pour calculer la valeur de la série (1) on se borne à faire la somme des n premiers termes. En effet, cette erreur est

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots;$$

or $u_{n+1} < \alpha u_n$, $u_{n-2} < \alpha^2 u_n$, ..., d'après ce que l'on a vu : donc l'erreur est moindre que la valeur de la progression

$$\alpha u_n + \alpha^2 u_n + \alpha^3 u_n + \ldots$$

ou que

$$\frac{\alpha u_n}{1-\alpha}.$$

Théorème III. — *Si l'on a deux séries à termes positifs, l'une convergente,*

$$(1) \qquad s = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots,$$

et l'autre,

$$(2) \qquad b_0 + b_1 + \ldots + b_n + b_{n+1} + \ldots,$$

telle que le rapport d'un terme au précédent, $\frac{b_{n+1}}{b_n}$, *soit constamment inférieur au rapport correspondant* $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *dans la première, cette dernière est convergente.*

En effet, la série (1) étant convergente, la suivante le sera aussi (*) :

$$b_0 + \frac{b_0}{a_0} a_1 + \frac{b_0}{a_0} a_2 + \ldots + \frac{b_0}{a_0} a_n + \frac{b_0}{a_0} a_{n+1} + \ldots.$$

(*) Si l'on éprouvait quelques doutes à cet égard, ils seront levés par le théorème II du paragraphe suivant, théorème qui pourrait trouver sa place ici.

Cette série peut s'écrire ainsi :

$$(3) \quad b_0 + b_0 \frac{a_1}{a_0} + b_0 \frac{a_2}{a_1}\frac{a_1}{a_0} + \ldots + b_0 \frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_1}{a_0} + \ldots.$$

Mais la série (2) peut se mettre sous la forme

$$b_0 + b_0 \frac{b_1}{b_0} + b_0 \frac{b_2}{b_1}\frac{b_1}{b_0} + \ldots + b_0 \frac{b_n}{b_{n-1}}\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdots \frac{b_1}{b_0} + \ldots;$$

or cette série a, en vertu de notre hypothèse, ses termes respectivement moindres que ceux de la série (3), qui est convergente; donc la série (2) est elle-même convergente. C. Q. F. D.

Il est facile de déduire de là le théorème précédent.

Théorème IV. — *La série*

$$(1) \qquad \frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \ldots + \frac{1}{n^k} + \frac{1}{(n+1)^k} + \ldots$$

est convergente ou divergente selon que k est plus grand ou plus petit que 1.

En effet, supposons d'abord k plus grand que 1; la série précédente peut s'écrire, en groupant les termes (ce qui n'altère pas la convergence ou la divergence de la série, puisqu'elle a ses termes positifs), de la manière suivante :

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \left(\frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k}\right) + \ldots \\ &\quad + \left[\frac{1}{(2^n+1)^k} + \frac{1}{(2^n+2)^k} + \ldots + \frac{1}{(2^{n+1})^k}\right] + \ldots. \end{aligned} \right.$$

Si l'on suppose $k > 1$, le terme général de la nouvelle série est moindre que $\frac{1}{2^{nk}}$ répété 2^n fois, c'est-à-dire moindre que $\frac{1}{2^{n(k-1)}}$; les termes de cette série sont donc moindres que ceux de la progression géométrique décroissante

$$\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{(2^{k-1})^2}+\ldots+\frac{1}{(2^{k-1})^n}+\ldots;$$

elle est par conséquent convergente.

Si au contraire $k<1$, alors la série (2) a ses termes plus grands respectivement que ceux de la série harmonique ; elle est donc divergente dans ce cas.

Dans la série (1), le rapport d'un terme au précédent est de la forme

$$\frac{1}{(n+1)^k}:\frac{1}{n^k}=\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^k;$$

si k est plus grand que 1, cette quantité est évidemment moindre que $\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot$ On peut donc énoncer le théorème suivant (*) :

Théorème V. — *Si dans une série le rapport d'un terme au précédent, ayant pour limite l'unité, peut se mettre sous la forme* $\frac{1}{1+\alpha}$, *et si* $n\alpha$ *tend vers une limite* k *plus grande que* 1, *cette série sera convergente.*

Les règles de convergence que nous venons de donner suffisent dans la plupart des cas; nous donnerons dans les exercices quelques règles nouvelles, en laissant au lecteur le soin de les démontrer.

Applications. — 1° Cherchons si la série

$$1+\frac{3}{5}x+\frac{8}{10}x^2+\ldots+\frac{n^2-1}{n^2+1}x^{n-1}+\ldots$$

(*) Raabe et Duhamel l'ont trouvé à peu près en même temps.

est convergente. On a ici, pour l'expression du rapport d'un terme au précédent,

$$\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2+1}\,\frac{n^2+1}{n^2-1}\,x;$$

pour $n=\infty$, la limite de cette expression est x. Donc la série est convergente si $\operatorname{mod} x<1$, divergente si $\operatorname{mod} x>1$; enfin, si $\operatorname{mod} x=1$, elle est encore divergente, parce que les modules des termes ont pour limite 1 et par suite ne tendent pas vers zéro.

2° Cherchons si la série

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{n^2-n}+\ldots$$

est convergente. Le rapport d'un terme au précédent a pour expression générale $\frac{n^2-n}{(n+1)^2-(n+1)}$, dont la limite est 1. Cette expression peut s'écrire :

$$1:\left(1+\frac{2n}{n^2-n}\right).$$

En multipliant $\frac{2n}{n^2+n}$ par n, on obtient une quantité dont la limite pour $n=\infty$ est 2. Donc la série est convergente.

IV. — DES CALCULS QUE L'ON PEUT EFFECTUER SUR LES SÉRIES.

Théorème I. — *Si l'on considère les séries convergentes*

$$A=a_0+a_1+\ldots+a_n+\ldots,$$
$$B=b_0+b_1+\ldots+b_n+\ldots,$$
$$C=c_0+c_1+\ldots+c_n+\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

la série dont le terme général est

$$u_n = a_n \pm b_n \pm c_n \pm \ldots$$

est convergente et a pour valeur $A \pm B \pm C \pm \ldots$.

En effet, on a

$$\sum_0^n u = \pm \sum_0^n a \pm \sum_0^n b \pm \sum_0^n c \pm \ldots.$$

Si l'on suppose que n augmente indéfiniment, on voit que $\sum_0^n u$ a une limite égale à $\pm A \pm B \pm C \pm \ldots$, ce qui démontre le théorème énoncé.

Théorème II. — *Si la série*

$$s = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

est convergente et a pour valeur s,

$$au_0 + au_1 + \ldots + au_n + \ldots$$

sera convergente et aura pour valeur as.

En effet,

$$\sum_0^n (au) = a \sum_0^n u.$$

Donc, si n augmente indéfiniment, $\sum_0^n (au)$ a une limite égale à $a \lim \sum_0^n u$ ou à as. C. Q. F. D.

Théorème III. — *Si la série*

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

est convergente et a tous ses termes positifs, si de plus $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ sont des nombres positifs qui ne croissent pas au delà de toute limite,

$$a_0 u_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n + \ldots$$

sera convergente.

En effet, en désignant par A un nombre plus grand que $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, cette série a ses termes respectivement plus petits que ceux de la série convergente

$$As = Au_0 + Au_1 + \ldots + Au_n + \ldots,$$

qui est aussi à termes positifs. Abel a démontré que le théorème précédent était encore vrai pour une série quelconque si les nombres $a_0, a_1, a_2, \ldots$ allaient constamment en décroissant; en effet, dans cette hypothèse, en posant

$$(1) \qquad u_0 + u_1 + \ldots + u_n = s_n,$$

$$(2) \qquad a_0 u_0 + a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n = t_n,$$

on a les relations suivantes,

$$u_0 = s_0, \quad u_1 = s_1 - s_0, \quad \ldots, \quad u_n = s_n - s_{n-1}, \quad \ldots,$$

et par conséquent, en portant ces valeurs dans l'équation (2),

$$t_n = a_0 s_0 + a_1 (s_1 - s_0) + \ldots + a_n (s_n - s_{n-1}),$$

ce que l'on peut écrire ainsi :

$$(3) \qquad t_n = (a_0 - a_1) s_0 + (a_1 - a_2) s_1 + \ldots + a_n s_n.$$

Dans cette équation, les coefficients de $s_0, s_1, \ldots$ sont tous positifs, car $a_0, a_1, \ldots$ vont en décroissant; mais, si θ désigne une moyenne entre les quantités $s_0, s_1, \ldots, s_n$, on aura

$$t_n = \theta[(a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \ldots + a_n] = a_0 \theta.$$

Or, n augmentant indéfiniment, θ conserve une valeur finie; donc t_n conserve une valeur finie. Supposons alors $s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots$ positives (s'il n'en était pas ainsi, on augmenterait convenablement u_0); t_n croît, en vertu de l'équation (3), avec n, sans devenir infini; il a donc une limite; par suite, la série (2) est convergente.

C. Q. F. D.

Théorème IV. — *Si les séries*

$$(1) \qquad s = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

$$(2) \qquad t = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

sont convergentes, la série dont le terme général est

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \ldots + u_n v_0$$

est convergente et a pour valeur st dans certains cas que nous allons examiner.

1° Supposons d'abord les séries (1) et (2) à termes positifs; nous aurons

$$(3) \left\{ \begin{aligned} \sum_0^n u \sum_0^n v = \sum_0^n w + u_1 \times v_n + u_2(v_{n-1} + v_n) + \ldots \\ + u_n(v_1 + v_2 + \ldots + v_n). \end{aligned} \right.$$

Considérons maintenant le produit $\sum_0^m u \sum_0^m v$. Le terme de ce produit dans lequel la somme des indices est la plus élevée est $2m$. Si donc $2m$ est moindre que $n+1$, ou si m est le plus grand entier contenu dans $\frac{n+1}{2}$, tous les termes de $\sum_0^m u \sum_0^m v$ se trouvent compris dans $\sum_0^n w$. On a donc

$$\sum_0^n w > \sum_0^m u \sum_0^m v.$$

Or, en vertu de l'égalité (3),

$$\sum_0^n w < \sum_0^n u \sum_0^n v.$$

Mais si l'on suppose que m et n augmentent indéfiniment, $\sum_0^n u \sum_0^n v$ et $\sum_0^m u \sum_0^m v$ tendront tous deux vers st. Alors $\sum_0^n w$, qui reste compris constamment entre ces deux produits, tendra aussi vers la limite st. Le théorème qui nous occupe est donc démontré pour le cas où les séries (1) et (2) sont à termes positifs.

2° Supposons que les séries (1) et (2) ne perdent pas leur convergence quand on rend leurs termes positifs. Considérons d'abord les termes des séries (1) et (2) en valeur absolue. Tout ce qui dans l'égalité (3) suit $\sum_0^n w$ a pour limite zéro, car $\sum_0^n u \sum_0^n v$ et $\sum_0^n w$ ont même limite, d'après ce que nous venons de voir tout à l'heure. Il en sera encore de même *a fortiori* quand on aura rendu aux termes des séries (1) et (2) leurs signes respectifs. Par conséquent, si dans l'égalité (3) nous supposons que n augmente indéfiniment, il vient, en passant aux limites,

$$st = \lim \sum_0^n w,$$

ce qui démontre que le théorème est encore applicable dans le cas où les séries ne perdent pas leur convergence quand on rend leurs termes positifs.

3° Considérons enfin le cas où les séries (1) et (2) seraient à termes imaginaires. Nous supposerons les séries des modules de leurs termes convergentes, et nous poserons en général

$$u_n = p_n(\cos\alpha_n + \sqrt{-1}\sin\alpha_n),$$
$$v_n = q_n(\cos\beta_n + \sqrt{-1}\sin\beta_n).$$

Alors, en vertu de ce que nous avons démontré dans le premier cas, la différence

$$\sum_0^n p \sum_0^n q - \sum_0^n pq = p_1 q_n + p_2(q_{n-1} + q_n) + \ldots + p_n(q_1 + q_2 + \ldots + q_n)$$

aura pour limite zéro; il en sera de même *a fortiori* de la quantité

$$\begin{aligned} &p_1(\cos\alpha_1 + \sqrt{-1}\sin\alpha_1)\,q_n(\cos\beta_n + \sqrt{-1}\sin\beta_n) \\ &+ p_2(\cos\alpha_2 + \sqrt{-1}\sin\alpha_2)[q_{n-1}(\cos\beta_{n-1} + \sqrt{-1}\sin\beta_{n-1}) \\ &\qquad + q_n(\cos\beta_n + \sqrt{-1}\sin\beta_n)] \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

qui n'est autre chose que $u_1 v_2 + u_2(v_{n-1} + v_n) + \ldots$. L'égalité (3), en passant aux limites, fournira donc encore $st = \sum_0^n w$, et le théorème est encore vrai dans ce dernier cas.

V. — THÉORÈME D'ABEL.

Lemme. — *Si une série ordonnée par rapport aux puissances croissantes d'une même lettre x est convergente pour le module R de x, elle l'est encore pour tout module moindre. Si elle est divergente pour le module R de x, elle l'est encore pour un module plus grand.*

En effet, considérons la série

$$(1) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots;$$

cette série étant convergente pour un certain module R de x, les modules de $a_0, a_1 R, \ldots, a_n R^n$ devront tendre vers zéro. Si l'on considère alors la progression

$$1 + \frac{\operatorname{mod} x}{R} + \ldots + \left(\frac{\operatorname{mod} x}{R}\right)^n + \ldots,$$

qui est une série convergente quand le module de x est moindre que R, en multipliant ses termes par les nombres $\operatorname{mod} a_0, \operatorname{mod} a_1 R, \operatorname{mod} a_2 R^2, \ldots, \operatorname{mod} a_n R^n$, qui ne croissent pas indéfiniment (p. 106), on obtient la série convergente

$$\operatorname{mod} a_0 + \operatorname{mod} a_1 x + \operatorname{mod} a_2 x^2 + \ldots + \operatorname{mod} a_n x^n + \ldots.$$

La convergence de cette série entraîne celle de (1).

C. Q. F. D.

Corollaire. — Il résulte de là qu'il existe un module R de x tel, que pour tout module moindre la série (1) est convergente, pour tout module plus grand elle est divergente; ce module s'appelle le *rayon de convergence* de la série. En représentant les imaginaires par des points, conformément aux méthodes de Cauchy, on voit que la série (1) est convergente pour toutes les valeurs de x contenues à l'intérieur d'un cercle décrit de l'origine comme centre avec un rayon égal au *rayon de convergence*. Ce cercle est ce qu'on appelle le *cercle de convergence de la série*.

Théorème. — *Une série convergente ordonnée par rapport aux puissances croissantes d'une même variable x représente une fonction continue de cette variable pour toutes les valeurs du module de x inférieures au rayon de convergence.*

Pour démontrer cette proposition, considérons la série (1); désignons par $f(x)$ sa valeur, nous aurons

$$(1)\qquad f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots.$$

Soit R le rayon de convergence, et supposons le module de x inférieur à R. En donnant un accroissement h assez voisin de zéro à x, $x+h$ aura un module moindre que R, et l'on pourra encore écrire

$$(2)\ f(x+h) = a_0 + a_1(x+h) + \ldots + a_n(x+h)^n + \ldots,$$

d'où l'on conclut

$$(3)\quad \begin{cases} f(x+h) - f(x) = a_1 h + a_2[(x+h)^2 - x^2] + \ldots \\ \qquad\qquad + a_n[(x+h)^n - x^n] + \ldots; \end{cases}$$

or, si nous posons

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$
$$\psi(x) = a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \ldots,$$

on pourra toujours choisir n assez grand pour que $\psi(x+h)$ ait et conserve un module moindre qu'une quantité donnée α lorsque h tend vers zéro; en effet, pour cela il suffit de prendre n assez grand pour que

$$\mathrm{R}^{n+1} \bmod a_{n+1} + \mathrm{R}^{n+2} \bmod a_{n+2} + \ldots$$

soit inférieur à α, R désignant toujours le rayon de convergence. Mais alors $\psi(x+h) - \psi(x)$ aura et conservera un module moindre que 2α, puisque le module d'une somme est moindre que la somme des modules de ses parties. Cela posé, la formule (3) peut s'écrire

$$f(x+h) - f(x) = \varphi(x+h) - \varphi(x) + \psi(x+h) - \psi(x);$$

or, en faisant tendre h vers zéro, $\varphi(x+h) - \varphi(x)$ tend vers zéro, car $\varphi(x)$ est une somme d'un nombre limité

de fonctions continues de x (p. 34); on peut donc prendre le module de $\varphi(x+h) - \varphi(x)$ moindre que α, et, comme $\psi(x+h) - \psi(x)$ conserve un module moindre que 2α quand h tend vers zéro, la formule précédente fournira la relation

$$\mathrm{mod}[f(x+h) - f(x)] < 3\alpha.$$

Ainsi le module de l'accroissement de $f(x)$, correspondant à l'accroissement h de x, peut être pris moindre que toute quantité donnée, ce qui revient à dire que $f(x)$ est continue. C. Q. F. D.

Les géomètres avaient, longtemps avant Abel, admis tacitement qu'une série dont les différents termes étaient des fonctions continues de x avait pour valeur une fonction continue de cette variable, assimilant ainsi une série à un véritable polynôme. Cette assimilation n'est pas légitime : on conçoit, en effet, qu'à un acccroissement infiniment petit de x puisse correspondre une infinité d'accroissements infiniment petits pour les termes de la série, et dont la somme donnerait un accroissement fini.

Remarque très importante. — *Deux séries ordonnées par rapport aux puissances de x et qui représentent la même fonction ont les mêmes cofficients; en d'autres termes, une même fonction ne peut pas, pour les mêmes valeurs de x, se développer de deux manières en série ordonnée suivant les puissances croissantes de x.*

En effet, si l'on avait

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots,$$

on aurait, pour $x = 0$,

$$a_0 = b_0;$$

divisant alors par x, on obtiendrait l'égalité

$$a_1 + a_2 x + \ldots = b_1 + b_2 x + \ldots,$$

qui subsiste même pour $x = 0$, car les deux membres de la formule précédente sont continus, en vertu du théorème d'Abel; on a donc $a_1 = b_1$, et ainsi de suite.

VI. — LIMITE DE $\left(1 + \dfrac{x}{m}\right)^m$ POUR $m = \infty$, m ÉTANT ENTIER.

On a souvent besoin, en Analyse, de connaître la limite vers laquelle tend $\left(1 + \dfrac{x}{m}\right)^m$ quand m croît indéfiniment. Pour trouver cette limite, nous nous appuierons sur le lemme suivant :

LEMME. — *Si α, β, ..., λ sont des nombres positifs moindres que l'unité et tels que $\alpha + \beta + \ldots + \lambda < 1$, on aura*

$$(1-\alpha)(1-\beta)\ldots(1-\lambda) = 1 - \theta(\alpha + \beta + \ldots + \lambda),$$

θ désignant un nombre compris entre 0 *et* 1.

En effet,

$$(1-\alpha)(1-\beta) = 1 - \alpha - \beta + \alpha\beta,$$

d'où

$$(1-\alpha)(1-\beta) > 1 - (\alpha + \beta). \tag{A}$$

En multipliant par $1 - \gamma$, on en déduit

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) > [1 - (\alpha+\beta)](1-\gamma),$$

ou, en vertu du théorème contenu dans la formule (A),

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) > 1 - (\alpha + \beta + \gamma);$$

en multipliant par $1 - \delta$, on trouvera de même

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta) > 1 - (\alpha + \beta + \gamma + \delta),$$

et ainsi de suite. On a donc

$$1 > (1-\alpha)(1-\beta)\ldots(1-\lambda) > 1 - (\alpha + \beta + \ldots + \lambda),$$

et, si θ désigne un nombre convenablement choisi entre 0 et 1, on peut écrire

$$(1-\alpha)(1-\beta)\ldots(1-\lambda) = 1 - \theta(\alpha + \beta + \ldots + \lambda).$$

C. Q. F. D.

Arrivons à la recherche de la limite de $\left(1 + \dfrac{x}{m}\right)^m$. En supposant d'abord que m croisse en passant par des valeurs entières et positives, la formule du binôme donne (p. 7)

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = 1 + \frac{m}{1}\left(\frac{x}{m}\right) + \frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2.3\ldots p}\left(\frac{x}{m}\right)^p + \ldots$$

ou bien

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m &= 1 + x + \left(1 - \frac{1}{m}\right)\frac{x^2}{1.2} + \ldots \\ &+ \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\cdots\left(1 - \frac{p-1}{m}\right)\frac{x^p}{1.2.3\ldots p} + \ldots \end{aligned}\right.$$

Supposons que m augmente au delà de toute limite; si l'on remplaçait dans le second membre de cette formule (1) chaque terme par sa limite, on s'exposerait à trouver un résultat inexact, parce que la limite d'une somme n'est égale à la somme des limites de ses parties qu'autant que le nombre m de ces parties est fini (t. I, p. 117, ligne 11). Quoi qu'il en soit, je dis que le second membre de la formule (1) a pour limite la valeur de la série

$$(2)\qquad S = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots,$$

qui est convergente, car l'expression générale du rapport d'un terme au précédent est $\frac{x}{n}$, quantité dont la limite est zéro pour $n = \infty$ (p. 99).

Pour le démontrer, observons qu'en vertu du lemme précédent on a, en désignant par $\theta_1, \theta_2, \ldots$ des nombres compris entre 0 et 1,

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\cdots\left(1 - \frac{p-1}{m}\right) = 1 - \theta_{p-2}\frac{p(p-1)}{2m},$$

car la somme $\frac{1}{m} + \frac{2}{m} + \ldots + \frac{p-1}{m}$ est $\frac{p(p-1)}{2m}$. La formule (1) peut alors s'écrire

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m &= 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^m}{1.2.3\ldots m} \\ &\quad - \frac{x^2}{2m}\left[1 + \theta_1\frac{x}{1} + \theta_2\frac{x^2}{1.2} + \ldots \right. \\ &\quad \left. + \theta_{m-2}\frac{x^{m-2}}{1.2\ldots(m-2)}\right]. \end{aligned}\right.$$

Si l'on suppose $m = \infty$, la quantité écrite sur la première ligne du second membre de cette formule tend vers la valeur S de la série (2); quant à la quantité écrite à la suite, elle se compose de deux facteurs, l'un $\frac{x^2}{2m}$ qui tend vers zéro et l'autre dont le module est inférieur à la valeur de la série convergente

$$1 + \frac{R}{1} + \frac{R^2}{1.2} + \ldots + \frac{R^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

dans laquelle R désigne le module de x. Cette quantité a donc pour limite zéro, et, par suite, la formule (3) devient, pour $m = \infty$,

$$(4)\qquad \lim\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = S = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots.$$

Cette formule est démontrée en supposant que m tend vers l'infini en passant seulement par des valeurs entières et positives; nous allons prouver qu'elle a encore lieu quand m devient infini en passant par des valeurs quelconques.

VII. — LIMITE DE $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$. ÉTUDE DU CAS OU m EST QUELCONQUE. DÉVELOPPEMENT DE e^x, CALCUL DE e.

Supposons x réel et m positif; soit n un entier tel que $n < m < n + 1$. On aura, en supposant d'abord $x > 0$,

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m > \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^n$$

ou

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\left(1 + \frac{x}{n}\right) > \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m > \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} : \left(1 + \frac{x}{n+1}\right).$$

Or, n et $n + 1$ étant entiers, $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ et $\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$ ont pour limite la quantité appelée S au paragraphe précédent quand $m = \infty$ ou $n = \infty$; les facteurs $1 + \frac{x}{n}$ et $1 + \frac{x}{n+1}$ ont évidemment pour limite 1. Donc $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$, qui est compris entre deux quantités ayant pour limite S, a lui-même pour limite S. La démonstration serait la même si l'on avait $x < 0$; il faudrait seulement changer le sens des inégalités précédentes.

Si m était négatif, en le remplaçant par $-n$, on aurait alors

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = \left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{n-x}\right)^n = \left(1+\frac{x}{n-x}\right)^n$$
$$= \left(1+\frac{x}{n-x}\right)^{n-x}\left(1+\frac{x}{n-x}\right)^x.$$

Or, la limite de $\left(1+\dfrac{x}{n-x}\right)^{n-x}$ pour $n-x=\infty$, c'est-à-dire pour $n=\infty$, est S, tandis que la limite de $\left(1+\dfrac{x}{n-x}\right)^x$ est 1; on a donc encore, dans le cas où m devient infini en passant par des valeurs négatives,

$$(1)\qquad \lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = S = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots.$$

Remarques. — Si dans cette formule (1) nous faisons $x=1$, nous aurons

$$\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}$$
$$+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots n}+\ldots.$$

On désigne par e le second membre de cette formule, en sorte que

$$(2)\qquad \lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e.$$

Ce nombre e est, comme on l'a vu, la base des logarithmes népériens; on peut, en posant $m=\dfrac{1}{\alpha}$, lui donner la forme

$$(3)\qquad e=\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}},$$

que l'on a rencontrée (p. 32).

On a

$$\lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = \lim\left[\left(1+\frac{x}{m}\right)^{\frac{m}{x}}\right]^x;$$

mais $\left(1+\dfrac{x}{m}\right)^{\frac{m}{x}}$, en vertu de (2) ou de (3), a pour limite e quand m ou $\dfrac{m}{x}$ croît indéfiniment; on a donc

$$\lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = e^x,$$

et par suite, en vertu de la formule (1),

$$(4)\qquad e^x = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots+\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}+\ldots$$

Si dans cette formule on remplace x par $z\log a$, elle donnera

$$a^x = 1+\frac{z\log a}{1}+\frac{z^2(\log a)^2}{1.2}+\ldots.$$

La formule (4) peut servir au calcul de e^x. Supposons que nous ne prenions que les $n+1$ premiers termes de cette formule; l'erreur commise sera

$$\frac{x^{n+1}}{1.2.\ldots(n+1)}\left[1+\frac{x}{n+2}+\frac{x^2}{(n+2)(n+3)}+\ldots\right];$$

si x est positif, cette erreur sera inférieure à

$$\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}\left[1+\frac{x}{n+1}+\frac{x^2}{(n+1)^2}+\ldots\right]$$

ou à

$$\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}\,\frac{n+1}{n+1-x}\quad\text{ou}\quad\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\,\frac{x}{n+1-x};$$

si l'on suppose x négatif, le premier terme négligé dans la série fera connaître une limite de l'erreur (p. 90).

En appliquant ces considérations au cas où $x = 1$, on peut calculer le nombre e au moyen de la formule

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n}.$$

On a, par exemple,

$$1.2.3\ldots12 = 47900160;$$

donc, en s'arrêtant au treizième terme inclusivement, l'erreur commise sur le calcul de e sera moindre que

$$\frac{1}{40000000}\,\frac{1}{12},$$

et l'on aura e avec huit chiffres exacts. On a trouvé

$$e = 2,718281828459045\ldots.$$

Le nombre e est incommensurable. En effet, si l'on pouvait avoir

$$(5)\qquad \frac{p}{q} = e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots q} + \ldots,$$

p et q désignant deux entiers, on en déduirait, en multipliant par $1.2.3\ldots q$,

$$1.2.3\ldots(q-1)p = 1.2.3\ldots q + 2.3\ldots q + 3.4\ldots q + \ldots$$
$$+ 1 + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots.$$

Or cette égalité est absurde. En effet, le premier membre est entier; quant au second, il est évidemment fractionnaire, car

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots < \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$< \frac{1}{q+1}\,\frac{1}{1 - \frac{1}{q+1}}$$

ou bien

$$< \frac{1}{q}.$$

La formule (5) est donc absurde, et le nombre e incommensurable. C. Q. F. D.

VIII. — LIMITE DE $\left(1 + \frac{x + y\sqrt{-1}}{m}\right)^m$ POUR $m = \infty$. SÉRIES DE NEWTON.

Soit

$$Z = \left(1 + \frac{x + y\sqrt{-1}}{m}\right)^m,$$

et proposons-nous de trouver la limite de Z pour $m = \infty$, x et y désignant deux nombres réels. Pour éviter toute ambiguïté dans la valeur de Z, nous supposerons que m ne passe que par des valeurs entières (ou que l'on prenne Z avec son plus petit argument); on a

$$\operatorname{mod} Z = \left(1 + \frac{2x}{m} + \frac{x^2+y^2}{m^2}\right)^{\frac{m}{2}}$$
$$= \left[\left(1 + \frac{2mx + x^2 + y^2}{m^2}\right)^{\frac{m^2}{2mx + x^2 + y^2}}\right]^{\frac{2mx + x^2 + y^2}{2m}}.$$

Quand m croît indéfiniment, la quantité entre crochets tend vers e (*), l'exposant de cette quantité tend vers x; donc

(*) En effet on a

$$\frac{2mx + x^2 + y^2}{m^2} = \frac{1}{m}\left(2x + \frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{m}\right),$$

on a

$$\lim \bmod \mathrm{Z} = e^x.$$

Calculons l'argument de Z. Soit φ l'argument de

$$1 + \frac{x + y\sqrt{-1}}{m};$$

celui de Z sera $m\varphi$ (p. 69), et l'on aura

$$(1)\quad \sin\varphi = \frac{y}{m}\,\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2x}{m} + \frac{x^2+y^2}{m^2}}},\qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{y}{m+x}.$$

Or l'arc φ a une tangente et un sinus très-petits; on peut le supposer très-petit, positif ou négatif, car son cosinus est très-voisin de $+1$; il est alors compris entre sa tangente et son sinus, dont on a les expressions (1). L'arc $m\varphi$, qui est l'argument de Z, sera donc compris entre

$$\frac{y}{\sqrt{1 + \frac{2x}{m} + \frac{x^2+y^2}{m^2}}} \quad \text{et} \quad \frac{y}{1 + \frac{x}{m}};$$

ces deux quantités ayant pour limite y quand on fait $m = \infty$, on en conclut que $m\varphi$ ou l'argument de Z a pour limite y; donc enfin

$$(2)\quad \lim\left(1 + \frac{x+y\sqrt{-1}}{m}\right)^m = \lim \mathrm{Z} = e^x(\cos y + \sqrt{-1}\sin y).$$

Mais on a trouvé (p. 115, l. 4)

$$\lim\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots$$

et il est manifeste que pour $m = \infty$ cette quantité tend vers zéro, de même $\frac{2mx + x^2 + y^2}{2m} = x + \frac{y^2+x^2}{2m}$ a pour limite x pour $m = \infty$.

quel que soit x; donc

$$\lim\left(1 + \frac{x+y\sqrt{-1}}{m}\right)^m = 1 + \frac{x+y\sqrt{-1}}{1} + \frac{(x+y\sqrt{-1})^2}{1.2} + \ldots,$$

et par suite, en vertu de (2),

$$(3)\quad \left\{ e^x(\cos y + \sqrt{-1}\sin y) = 1 + \frac{x+y\sqrt{-1}}{1} + \frac{(x+y\sqrt{-1})^2}{1.2} + \ldots. \right.$$

Voici maintenant les conséquences importantes à tirer de cette formule. Si l'on y fait $x = 0$, on a

$$\cos y + \sqrt{-1}\sin y = 1 + \frac{y\sqrt{-1}}{1} - \frac{y^2}{1.2} - \frac{y^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \ldots;$$

en égalant alors de part et d'autre les termes réels et les coefficients de $\sqrt{-1}$, on a

$$(4)\quad \cos y = 1 - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \ldots \pm \frac{y^{2n}}{1.2\ldots 2n} \mp \ldots,$$

$$(5)\quad \left\{ \sin y = y - \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5} + \ldots \pm \frac{y^{2n+1}}{1.2\ldots(2n+1)} \mp \ldots, \right.$$

formules remarquables dues à Newton et déduites d'un développement de $\arcsin x$ par une méthode peu usitée aujourd'hui et dite du *retour des suites;* ce développement de $\arcsin x$ avait d'ailleurs été découvert par Newton lui-même, ainsi que la méthode du retour des suites.

Les formules (3) et (4) peuvent servir au calcul des

Tables de sinus et de cosinus naturels; elles serviront à vérifier de temps en temps les résultats obtenus par la méthode de Simpson. Mais elles seront surtout utiles pour calculer un sinus ou un cosinus quand on n'aura pas de Tables à sa disposition, car elles sont très-convergentes. Pour les appliquer à un arc de μ secondes, on commencera par calculer la valeur y de cet arc en prenant le rayon du cercle trigonométrique pour unité; on aura alors

$$y = \frac{\pi\mu}{180.60.60};$$

ce serait une faute grossière que d'écrire

$$\sin\mu'' = \mu - \frac{\mu^3}{1.2.3} + \ldots,$$

et que je signale pour l'avoir vu commettre trop souvent par les élèves.

IX. — QUELQUES MOTS SUR LES TRANSCENDANTES IMAGINAIRES.

Reprenons la formule (3) du paragraphe précédent :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} e^x(\cos y + \sqrt{-1}\sin y) = 1 &+ \frac{x + y\sqrt{-1}}{1} \\ &+ \frac{(x + y\sqrt{-1})^2}{1.2} + \ldots \end{aligned}\right.$$

Le second membre de cette formule ne diffère du développement de e^x que par le changement de x en $x + y\sqrt{-1}$; il paraît donc tout naturel de prendre ce second membre comme définition de l'exponentielle $e^{x+y\sqrt{-1}}$; alors, par définition, on aura (p. 121, l. 5)

$$(2)\quad e^{x+y\sqrt{-1}} = e^x(\cos y + \sqrt{-1}\sin y).$$

Il est très-facile de constater que les propriétés des exponentielles imaginaires sont les mêmes que celles des exponentielles réelles. Ainsi, je dis que l'on aura

$$e^{x+y\sqrt{-1}}e^{x'+y'\sqrt{-1}} = e^{x+x'+(y+y')\sqrt{-1}};$$

en effet, cette formule équivaut à

$$\begin{aligned} &e^x(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)\,e^{x'}(\cos y' + \sqrt{-1}\sin y') \\ &\quad = e^{x+x'}\left[\cos(y + y') + \sqrt{-1}\sin(y + y')\right], \end{aligned}$$

qui a lieu en vertu de la formule de Moivre.

La propriété fondamentale des exponentielles étant démontrée, les autres s'en déduisent (p. 40).

Si dans (2) on fait $x = 0$, on a

$$(3)\quad e^{y\sqrt{-1}} = \cos y + \sqrt{-1}\sin y,$$

d'où l'on tire, en changeant y en $-y$,

$$(4)\quad e^{-y\sqrt{-1}} = \cos y - \sqrt{-1}\sin y.$$

Des formules (3) et (4) on tire les suivantes, dues à Euler :

$$(5)\quad \cos y = \frac{e^{y\sqrt{-1}} + e^{-y\sqrt{-1}}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{y\sqrt{-1}} - e^{-y\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Ces deux formules, à leur tour, peuvent servir de définition aux fonctions $\cos y$ et $\sin y$ quand y est imaginaire, et, quand on y remplace $e^{y\sqrt{-1}}$ et $e^{-y\sqrt{-1}}$ par leurs développements en série, on retrouve les formules (4) et (5) du paragraphe précédent, que l'on pourrait également prendre pour définitions des fonctions $\cos y$ et $\sin y$.

Toutes les formules de la Trigonométrie se retrouvent avec la plus extrême facilité en partant des formules (5); en les ajoutant après les avoir élevées au carré, on trouve

$\cos^2 y + \sin^2 y = 1$. Les formules d'addition des arcs se retrouvent aussi facilement. Les fonctions $\operatorname{tang} y$, $\cot y$, $\operatorname{séc} y$, $\operatorname{coséc} y$ seront définies par les équations

$$\operatorname{tang} y = \frac{\sin y}{\cos y}, \quad \cot y = \frac{\cos y}{\sin y}, \quad \cdots.$$

Il existe deux fonctions présentant avec le sinus et le cosinus la plus grande analogie : ce sont le cosinus et le sinus hyperboliques, définis par les relations

$$\cos h x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sin h x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

On vérifiera facilement que

$$\cos h(x+y) = \cos h x \cos h y + \sin h x \sin h y,$$
$$\sin h(x+y) = \sin h x \cos h y - \cos h x \sin h y,$$
$$\cos h^2 x - \sin h^2 y = 1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Maintenant posons

$$e^z = x;$$

z sera ce que l'on appelle le *logarithme népérien* de x, et, comme l'on a, par définition, en appelant $\log r$ le logarithme népérien ordinaire du nombre positif r,

$$e^{\log r + \theta\sqrt{-1}} = e^{\log r}(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) = r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta),$$

on voit que $\log r + \theta\sqrt{-1}$ est le logarithme de

$$r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta).$$

Donc :

Le logarithme d'une imaginaire est égal au logarithme réel de son module, augmenté de l'un quelconque de ses arguments multiplié par $\sqrt{-1}$; il a donc une infinité de valeurs différant entre elles d'un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$.

Le logarithme d'une quantité réelle et positive r, ou $r(\cos 2k\pi + \sqrt{-1}\sin 2k\pi)$, aura donc une infinité de valeurs $\log r + 2k\pi\sqrt{-1}$. Ainsi $\log 1 = 2k\pi\sqrt{-1}$; le logarithme de $-r$ sera $\log r + (2k+1)\pi\sqrt{-1}$, ... Il va sans dire que l'on a toujours, quand x et y sont imaginaires,

$$\log x + \log y = \log xy;$$

mais il ne faut pas oublier que, $\log x$ contenant l'arbitraire $2k\pi\sqrt{-1}$, les deux membres de l'égalité précédente ne sont vraiment égaux qu'en choisissant convenablement les arguments de x, y et xy.

Les fonctions $\operatorname{arc}\sin x$, $\operatorname{arc}\cos x$, $\operatorname{arc}\operatorname{tang} x$, ... sont naturellement définies par les équations

$$\sin y = x, \quad \cos y = x, \quad \operatorname{tang} y = x, \quad \cdots.$$

(*Voir* la *Trigonométrie* de J.-A. Serret.)

X. — GÉNÉRALISATION DE LA FORMULE DU BINOME, RÉSOLUTION DE $ax^2 + bx + c = 0$ QUAND a EST TRÈS PETIT.

Nous ferons une dernière application de la théorie des séries à la généralisation de la formule du binôme.

La série

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n + \ldots$$

[*qui pour m entier et positif est limitée et a pour valeur* $(1+x)^m$] *est convergente quand on suppose le module de x moindre que* 1 ; *elle est divergente quand le module de x est supérieur à* 1.

En effet, le rapport d'un terme au précédent a pour expression générale $\frac{m-n+1}{n}x$; pour $n=\infty$, il se réduit à x. Si donc le module de x est plus petit que 1, la série sera convergente; elle serait divergente si le module de x était supérieur à l'unité.

Supposons donc $\bmod x < 1$ et posons

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}\varphi(m) &= 1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\ldots\\ &+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n+\ldots,\end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}\varphi(m') &= 1+\frac{m'}{1}x+\frac{m'(m'-1)}{1.2}x^2+\ldots\\ &+\frac{m'(m'-1)\ldots(m'-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n+\ldots.\end{aligned}\right.$$

Si nous multiplions ces formules membre à membre en observant la règle donnée p. 106, nous trouvons

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}\varphi(m)\varphi(m') &= 1+\frac{m+m'}{1}x+\frac{(m+m')(m+m'-1)}{1.2}x^2+\ldots,\\ &+\left[\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}+\frac{m'}{1}\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1.2.3\ldots(n-1)}+\ldots\right]x^n+\ldots\end{aligned}\right.$$

Soit, pour abréger, A le coefficient de x^n dans cette formule; A est un polynôme entier du degré n en m et m'. Si l'on supposait m et m' entiers, $\varphi(m)\varphi(m')$ se réduirait à $(1+x)^{m+m'}$, car $\varphi(m)$ et $\varphi(m')$ se réduiraient à $(1+x)^m$ et à $(1+x)^{m'}$; le coefficient A serait donc égal au polynôme de degré n

$$\frac{(m+m')(m+m'-1)\ldots(m+m'-n+1)}{1.2.3\ldots n},$$

que nous désignerons, pour abréger, par B. Les polynômes

A et B sont égaux pour toutes les valeurs entières de m et m', c'est-à-dire que, m' étant entier, on a $A=B$ pour plus de n valeurs de m; on a donc $A=B$ pour m' entier, quel que soit m. Mais on a $A=B$, quel que soit m, pour plus de n valeurs de m'; donc enfin on a $A=B$ quel que soit m' et quel que soit m. En remplaçant A par B dans (3), on a alors

$$\begin{aligned}\varphi(m)\varphi(m') &= 1+\frac{m+m'}{1}x+\ldots\\ &+\frac{(m+m')\ldots(m+m'-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n+\ldots,\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(4)\qquad \varphi(m)\varphi(m')=\varphi(m+m').$$

Or $\varphi(m)$ est fonction continue de m, car, si l'on suppose m' très-petit, $\varphi(m')$, en vertu de (1), est très-voisin de 1; donc $\varphi(m+m')$ diffère très-peu, en vertu de la formule précédente, de $\varphi(m)$. La formule (4) exprime (p. 46) que $\varphi(m)$ est de la forme a^m, a désignant une quantité indépendante de m que l'on obtiendra en faisant $m=1$ dans la formule (1); on a alors

$$\varphi(1)=1+x=a \quad \text{et} \quad \varphi(m)=(1+x)^m.$$

La formule (1) devient ainsi

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}(1+x)^m &= 1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\ldots\\ &+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}x^n+\ldots;\end{aligned}\right.$$

c'est la formule du binôme généralisée. Le premier membre a en général plusieurs valeurs, mais il est facile de voir qu'il faut prendre celle qui a son argument compris entre $-\frac{m\pi}{2}$ et $+m\frac{\pi}{2}$. En effet, pour $x=0$, le premier membre de (5) doit se réduire à 1 comme le second; son argument peut alors être pris égal à zéro ainsi que celui de x; pour que l'argument de $(1+x)^m$ puisse franchir les limites $-\frac{m\pi}{2}$ et $+\frac{m\pi}{2}$, il faut que celui de $1+x$ puisse franchir les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; or c'est ce qui n'aura jamais lieu, car, si l'on pose $x=a+b\sqrt{-1}$, l'argument de $1+x$ aura pour cosinus $\frac{1+a}{\sqrt{(1+a)^2+b^2}}$, quantité toujours positive, car, x ayant un module moindre que un, a et b restent moindres que un en valeur absolue.

On voit que, si m est négatif, on aura

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^m} &= (1-x)^{-m} = 1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m+1)}{1.2}x^2 \\ &+\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}x^3+\ldots. \end{aligned}\right.$$

La formule du binôme permet de résoudre l'équation

$$ax^2+bx+c=0,$$

quand a est très-petit, avec beaucoup plus de rapidité qu'en appliquant la formule

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}.$$

On écrit cette formule ainsi, en ne prenant que le signe —,

$$x=\frac{b}{2a}\left[1-\left(1-\frac{4ac}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

et, si $\frac{4ac}{b^2}<1$, surtout s'il est très-petit, on aura, en appliquant à $\left(1-\frac{4ac}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ la formule du binôme,

$$x=-\frac{c}{b}\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{4ac}{b^2}\right)+\frac{1.3}{4.6}\left(\frac{4ac}{b^2}\right)^2+\ldots\right].$$

Si a et c sont de signes contraires, l'erreur commise en s'arrêtant à un terme quelconque sera moindre que le premier terme négligé. Si a et c sont de même signe, l'erreur, en s'arrêtant au terme en $\left(\frac{4ac}{b^2}\right)^n$, sera moindre que la somme des termes d'une progression géométrique dont la raison serait $\frac{4ac}{b^2}$ et le premier terme $\left(\frac{4ac}{b^2}\right)^n$, ou que

$$\left(\frac{4ac}{b^2}\right)^n:\left(1-\frac{4ac}{b^2}\right).$$

Soit à résoudre, par exemple,

$$0{,}01x^2-2x+1=0;$$

on aura

$$x=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{4}0{,}01+\frac{1.3}{4.6}0{,}0001+\ldots\right].$$

En se bornant aux termes écrits, l'erreur sera moindre que $\frac{1}{2}0{,}0000001$, et l'on aura

$$x=0{,}5012563\ldots;$$

l'autre racine s'obtiendra en retranchant celle-ci de $\frac{2}{0{,}01}$ ou de 200, ou encore en prenant 100 fois l'inverse de la première, puisque leur produit doit faire 100.

Il est bon d'observer qu'à un degré d'approximation toujours facile à évaluer on a, pour de petites valeurs de α,

$$\frac{1}{1\pm\alpha}=1\mp\alpha,$$

$$\sqrt{1\pm\alpha}=1\pm\frac{1}{2}\alpha,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1\pm\alpha}}=1\mp\frac{1}{2}\alpha.$$

La formule du binôme pour le cas où l'exposant m est fractionnaire a été donnée par Newton, mais l'illustre géomètre n'en a pas donné de démonstration bien satisfaisante.

XI. — SÉRIES LOGARITHMIQUES, CALCUL DE π.

La formule du binôme donne

$$(1-x)^{-m}=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m+1)}{1.2}x^2+\ldots + \frac{m(m+1)\ldots(m+n)}{1.2.3\ldots(n+1)}x^{n+1}+\ldots.$$

m peut être quelconque : nous le supposerons positif; quant à x, son module doit être plus petit que 1. On en tire

$$(1)\quad \frac{(1-x)^{-m}-1}{m}=x+(1+m)\frac{x^2}{2}+\ldots + (1+m)\left(1+\frac{m}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{m}{n}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots.$$

Faisons tendre m vers zéro; la limite du premier membre s'obtient en observant que

$$(1-x)^{-m}=e^{-m\log(1-x)}=1-\frac{m\log(1-x)}{1}+\frac{m^2\log^2(1-x)}{1.2}-\ldots$$

On en conclut

$$\frac{(1-x)^{-m}-1}{m}=-\log(1-x)+\frac{m}{2}\log^2(1-x)-\ldots,$$

et, pour $m=0$,

$$\lim\frac{(1-x)^{-m}-1}{m}=-\log(1-x).$$

On a donc

$$(2)\quad -\log(1-x)=\lim\left[\frac{x}{1}+(1+m)\frac{x^2}{2}+\ldots+(1+m)\cdots\left(1+\frac{m}{n}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots\right].$$

Soient S_n la somme des $n+1$ premiers termes de la série écrite entre crochets, R_n le reste; soient S'_n la somme des $n+1$ premiers termes de la série suivante et R'_n son reste :

$$S=\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots,$$

qui est évidemment convergente, puisque le rapport d'un terme au précédent a pour expression générale $\frac{nx}{n+1}$, quantité qui a pour limite x, lequel par hypothèse a un module moindre que 1.

Soit ρ le module de x; on peut toujours prendre n assez grand pour que R_n soit moindre qu'une quantité donnée ε lorsque x se trouve remplacé par ρ, et alors il est clair que l'on aura non-seulement

$$\operatorname{mod} R_n<\varepsilon,\quad \operatorname{mod} R'_n<\varepsilon,$$

mais que ces inégalités seront encore satisfaites quand m diminuera. On aura alors

$$\operatorname{mod}(R_n-R'_n)<2\varepsilon.$$

Cela fait, on pourra toujours prendre m assez petit pour que

$$\mathrm{mod}(S_n - S'_n) < \varepsilon,$$

car S_n a pour limite S'_n. Donc alors on aura

$$\mathrm{mod}(S_n - S'_n) + \mathrm{mod}(R_n - R'_n) < 3\varepsilon,$$

et *a fortiori*, puisque le module d'une somme est moindre que la somme des modules de ses parties,

$$\mathrm{mod}(S_n - S'_n + R_n - R'_n) < 3\varepsilon$$

ou bien

$$\mathrm{mod}(S_n + R_n - S) < 3\varepsilon.$$

ε étant aussi petit que l'on veut, cette formule exprime que $S_n + R_n$ a pour limite S. La formule (2) devient alors, pour les valeurs de x dont le module est plus petit que 1,

$$(3) \qquad -\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots.$$

En changeant x en $-x$, on a la série de Mercator (Kauffmann)

$$(4) \qquad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \pm \frac{x^n}{n} + \ldots,$$

et l'on doit toujours avoir $\mathrm{mod}\,x < 1$ (*). Néanmoins, s'il y a convergence, quand $\mathrm{mod}\,x = 1$, la formule sera encore

(*) Que x soit réel ou imaginaire, $\log(1+x)$ et $\log(1-x)$ ont une infinité de valeurs, et il est bien clair que quand x est réel, c'est la valeur réelle des quantités $\log(1-x)$, $\log(1+x)$ qu'il faut prendre dans les formules (3) et (4). Quand x est imaginaire, les valeurs qu'il faut prendre sont un peu plus difficiles à déterminer, mais avec un peu d'attention on y arrive; si l'on sépare les parties réelles des parties imaginaires, on obtient ainsi des formules curieuses, mais sur lesquelles nous ne croyons pas devoir nous arrêter.

vraie; ainsi, pour $x = 1$, on a

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots.$$

En ajoutant (3) et (4), on a

$$(5) \qquad \log\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ldots\right),$$

et, si l'on fait $x = \frac{1}{2N+1}$, on trouve

$$\log(N+1) - \log N = 2\left(\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \frac{1}{5(2N+1)^5} + \ldots\right).$$

Cette formule, très-convergente, sert pour le calcul des Tables de logarithmes. Si l'on y fait $N = 1$, on trouve $\log 2$; en triplant $\log 2$, on a $\log 8$; en faisant $N = 8$, on calcule $\log 9 - \log 8$, d'où l'on conclut $\log 9$; puis, faisant $N = 9$, on a le logarithme de 10. Les logarithmes ainsi calculés sont népériens. $\frac{1}{\log 10}$ est égal au logarithme vulgaire de e. Or on a $\log\mathrm{vulg}\,N = \log N \frac{1}{\log 10}$; la formule (5) donne alors

$$(6) \quad \log\mathrm{vulg}(N+1) - \log\mathrm{vulg}\,N = \frac{1}{\log 10}\left(\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \ldots\right).$$

Dans cette formule on fait $N = 1000, 1001, 1002, \ldots$. Comme le logarithme vulgaire de 1000 est connu et égal à 3, on a des séries très-convergentes pour calculer les logarithmes de 1001, 1002,... [la série qui figure dans la formule (6) est évidemment d'autant plus convergente, et, par suite, il est d'autant plus facile de calculer sa valeur que N est plus grand].

Si dans la formule (5) on remplace x par $x\sqrt{-1}$, on trouve

$$(7) \qquad \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots.$$

Soit alors

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}} = y;$$

on en tire

$$\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}} = e^{2y\sqrt{-1}} \quad \text{et} \quad x\sqrt{-1} = \frac{e^{y\sqrt{-1}} - e^{-y\sqrt{-1}}}{e^{y\sqrt{-1}} + e^{-y\sqrt{-1}}},$$

ou, en vertu des formules (p. 123, l. 16),

$$x = \operatorname{tang} y, \quad y = \operatorname{arc\,tang} x.$$

Remplaçant y ou $\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}$ par cette valeur dans (7), on a la formule suivante, due à Grégory et trouvée également par Leibnitz, mais postérieurement,

$$(8) \qquad \operatorname{arc\,tang} x = x - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \ldots,$$

pour toutes les valeurs du module de x moindres ou égales à 1 pour lesquelles le second membre est convergent (*).

Si l'on fait attention que, d'après Euler, on a

$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{239},$$

ce que le lecteur vérifiera sans peine, on pourra calculer

(*) La fonction arc tang$x$ a une infinité de valeurs, pour une valeur donnée de x, mais la valeur que l'on doit choisir quand x est réel doit évidemment se réduire à zéro pour $x = 0$, quand x varie d'une manière continue en se rapprochant de zéro, et c'est la valeur de arc tang$x$, comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, qu'il faut adopter.

$\frac{\pi}{4}$ au moyen de la formule précédente en y remplaçant arc tang $\frac{1}{5}$ et arc tang $\frac{1}{239}$ par leurs développements fournis par la formule (8). On a ainsi

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \ldots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \ldots\right).$$

Pour avoir $\frac{\pi}{4}$ avec dix décimales, il suffit de prendre sept termes dans la première série et deux dans la seconde; vingt minutes suffisent à un calculateur ordinaire pour effectuer l'opération complète.

XII. — CONCLUSION.

La théorie des séries est surtout utile, comme l'on voit, pour le calcul des fonctions transcendantes, ou même pour le calcul des fonctions algébriques, dans certains cas où le calcul arithmétique ordinaire entraînerait à des opérations trop compliquées.

Mais, à un point de vue plus abstrait, la théorie des séries permet de définir et d'étudier une foule de transcendantes nouvelles; ainsi elle nous a servi à généraliser la fonction exponentielle, et, en posant

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}\right), \quad \sin x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(e^{x\sqrt{-1}} - e^{x-\sqrt{-1}}\right),$$

elle nous a permis de donner une définition purement analytique du sinus et du cosinus, d'où il serait facile de déduire toute la Trigonométrie, sans employer de considérations géométriques (*).

(*) Terminons ce Chapitre par une réflexion que l'on ne fait pas assez

NOTES ET EXERCICES.

1. Les séries

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots,$$

$$1 + 3x + 6x^2 + \ldots + \frac{n(n+1)}{2}x^{n-1} + \ldots$$

sont convergentes pour $x < 1$ et divergentes pour $x \geqq 1$; la valeur de la première est $\frac{1}{(1-x)^2}$, celle de la seconde est $\frac{1}{(1-x)^3}$.

2. La série

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^n} + \ldots$$

est convergente : calculer sa valeur à 0,0001 près.

3. On a

$$1 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots,$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \ldots + \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} + \ldots,$$

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{2}{x(x+1)(x+2)} + \frac{3}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \ldots$$
$$+ \frac{n}{(x+n-2)(x+n-1)(x+n)} + \ldots.$$

4. Soit $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ une série quelconque, mais

souvent. Plus tard on fera connaître une formule dite *formule de Taylor*, qui donne les développements de e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\log(1+x)$ et $(1+x)^m$, mais cette formule ne donne que péniblement d'autres développements; en outre elle suppose la variable x réelle. On voudra donc bien reconnaître la supériorité et l'excellence des méthodes que nous venons d'exposer, à cause de leur grande généralité. Ajoutons que les développements en question étaient connus bien avant l'invention du théorème de Taylor et que les théories exposées ci-dessus se rapprochent beaucoup de celles des inventeurs.

divergente et à termes positifs; la série suivante sera convergente et aura pour valeur 1 :

$$\frac{u_0}{u_0+1} + \frac{u_1}{(u_0+1)(u_1+1)} + \frac{u_2}{(u_0+1)(u_1+1)(u_2+1)} + \ldots = 1,$$

formule remarquable en ce sens qu'elle renferme une infinité de quantités arbitraires. En y remplaçant u_n par $\frac{v_n}{w_n}$, on a

$$\frac{v_0}{v_0+w_0} + \frac{v_1 w_0}{(v_0+w_0)(v_1+w_1)} + \frac{v_2 w_1 w_0}{(v_0+w_0)(v_1+w_1)(v_2+w_2)} + \ldots = 1.$$

5. La série

$$\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \ldots + \frac{1}{n\log n} + \ldots$$

est divergente, le signe log désignant un logarithme népérien.

6. Considérons une série $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$, dans laquelle le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers une limite finie l; on pourra écrire

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = l + \varepsilon_1, \quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = l + \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \frac{u_{n+k}}{u_{n+k-1}} = l + \varepsilon_k;$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ étant tous moindres qu'une quantité η, que l'on peut prendre aussi petite que l'on veut en prenant n suffisamment grand. Multiplions toutes ces égalités membre à membre; on aura

$$\frac{u_{n+k}}{u_n} = (l+\varepsilon_1)(l+\varepsilon_2)\ldots(l+\varepsilon_k) = (l+\theta\eta)^k = \frac{(l+\theta\eta)^{n+k}}{(l+\theta\eta)^n},$$

θ désignant un nombre compris entre -1 et $+1$. On en conclut

$$\sqrt[n+k]{u_{n+k}} = (l+\theta\eta)\sqrt[n+k]{\frac{u_n}{(l+\theta\eta)^n}};$$

or, en prenant k suffisamment grand, la racine $(n+k)^{\text{ième}}$ de $\frac{u_n}{(l+\theta\eta)^n}$ aura pour limite 1; donc, pour $k = \infty$, on aura

$$\lim \sqrt[n+k]{u_{n+k}} = l + \theta\eta.$$

Mais n peut toujours être pris assez grand pour que η soit moindre qu'une quantité donnée; donc, enfin,

$$\lim \sqrt[n+k]{u_{n+k}} = l \quad \text{ou} \quad \lim \sqrt[m]{u_m} = l = \lim \frac{u_{m+1}}{u_m} \quad (m = \infty).$$

Il résulte de là (p. 99) que, la limite de $\frac{u_{m+1}}{u_m}$ étant la même que celle de $\sqrt[m]{u_m}$, *une série sera convergente ou divergente suivant que* $\lim \sqrt[m]{u_m}$ *sera plus petit ou plus grand que* 1. Démontrer ce théorème directement. (Cauchy, *Anal. algébr.*)

7. Supposons que, dans la série $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$, on ait

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^\lambda + An^{\lambda-1} + Bn^{\lambda-2} + \ldots}{n^\lambda + an^{\lambda-1} + bn^{\lambda-2} + \ldots}.$$

Si la première des différences $A - a$, $B - b$, ..., qui ne s'annule pas, est positive, la série est divergente. La série sera convergente ou divergente, suivant que $A - a + 1$ sera négatif ou positif.

(Gauss.)

8. La série dont le terme général est u_n est convergente ou divergente suivant que l'on a

$$\lim \frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n} > \text{ ou } < 1.$$

9. La série à termes positifs $\varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(n) + \ldots$, où $\varphi(x)$ désigne une fonction positive décroissante, est convergente ou divergente suivant que l'aire de la courbe $y = \varphi(x)$ comprise entre l'axe des x et les ordonnées $\varphi(1)$ et $\varphi(\infty)$ est finie ou infinie. (Ce caractère de convergence, dû à Cauchy, est l'un des plus puissants que l'on connaisse.)

10. La limite de $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{np}$ pour $n = \infty$ est égale à $\log p$.

11. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n$ tend vers une limite finie pour

$n = \infty$: prouver seulement l'existence de cette limite. (On lui donne le nom de *constante d'Euler*.)

12. Si $r_0, r_1, r_2, \ldots$ sont des nombres indéfiniment décroissants et si θ n'est pas un multiple de 2π, les séries

$$r_0 + r_1 \cos\theta + r_2 \cos 2\theta + \ldots + r_n \cos n\theta + \ldots,$$
$$r_1 \sin\theta + r_2 \sin 2\theta + \ldots + r_n \sin n\theta + \ldots$$

sont convergentes. (Faire usage du théorème des projections.)

(Björling.)

13. Étudier la série

$$1 - \frac{1 - x^m}{1 - x} + \frac{(1 - x^m)(1 - x^{m-1})}{(1 - x)(1 - x^2)} - \frac{(1 - x^m)(1 - x^{m-1})(1 - x^{m-2})}{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)} + \ldots.$$

Quand m est entier et positif, et quand on arrête le développement au terme égal en valeur absolue à l'unité, la valeur de la suite ainsi limitée est zéro pour m impair et $(1 - x)(1 - x^3)\ldots(1 - x^{m-1})$ pour m pair. (Gauss.)

14. Étudier la série

$$1 - \frac{m^p}{1^p} + \frac{m^p(m^p - 1)}{1^p . 2^p} - \frac{m^p(m^p - 1)(m^p - 2^p)}{1^p . 2^p . 3^p} + \ldots;$$

quand m est entier et positif, sa valeur est zéro.

15. $a, b, c, \ldots$ désignant les nombres premiers impairs, on a, pour $x < 1$,

$$\frac{x}{1 - x} - \sum \frac{x^a}{1 - x^a} + \sum \frac{x^{ab}}{1 - x^{ab}} - \sum \frac{x^{abc}}{1 - x^{abc}} + \ldots$$
$$= x + x^2 + x^4 + x^8 + \ldots.$$

(Catalan.)

16. On a

$$\lim \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2^n}} \; \frac{1}{1 - \frac{1}{3^n}} \; \frac{1}{1 - \frac{1}{5^n}} \cdots \frac{1}{1 - \frac{1}{p^n}} \cdots \right)$$
$$= 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \ldots;$$

n est supposé supérieur à 1; quant à p, il désigne un nombre premier. (LAMBERT.)

17. On a les formules

$$\text{arc}\sin x = \frac{1}{\sqrt{-1}} \log\left[\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right)\sqrt{-1}\right],$$

$$\text{arc}\cos x = \frac{1}{\sqrt{-1}} \log\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right),$$

$$\text{arc}\,\text{tang}\, x = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{1 + x\sqrt{-1}}{1 - x\sqrt{-1}}.$$

(J. BERNOULLI.)

Ces formules s'obtiennent en résolvant par rapport à u les équations qui donnent $\sin u$, $\cos u$ et $\text{tang}\, u$.

Montrer que ces formules mettent en évidence la périodicité des fonctions $\sin x$, $\cos x$ et $\text{tang}\, x$.

18. Si l'on considère des facteurs en nombre illimité, mais dans un ordre déterminé, on dit que leur produit est *convergent* si le produit des n premiers tend vers une limite déterminée différente de zéro, lorsque n augmente indéfiniment.

Un produit quelconque peut se mettre sous la forme

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_n)(1+\alpha_{n+1}) + \ldots,$$

et, pour qu'il soit convergent, il faut que α_n tende vers zéro.

En effet, en appelant P_n le produit des n premiers facteurs, on a

$$\frac{P_n}{P_{n-1}} = 1 + \alpha_n.$$

Or la limite de P_n, si le produit en question est convergent, doit être la même que celle de P_{n-1}; donc α_n doit avoir pour limite zéro.

Le produit suivant, dans lequel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont positifs,

$$(1) \qquad (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_n)\ldots,$$

est convergent ou divergent en même temps que la série

$$(2) \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n + \ldots.$$

En effet, on a

$$P_n \quad \text{ou} \quad (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_n) > 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n.$$

Si donc la série (2) diverge, $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ augmente indéfiniment; donc P_n augmente indéfiniment avec n et le produit (1) est divergent.

D'un autre côté, on a

$$1 + \alpha_1 < e^{\alpha_1}, \quad 1 + \alpha_2 < e^{\alpha_2}, \quad \ldots, \quad 1 + \alpha_n < e^{\alpha_n}, \quad \ldots;$$

donc

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_n) < e^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}.$$

Si donc la série (1) est convergente, P_n aura une limite pour $n = \infty$, et par suite le produit (1) sera convergent.

Lorsque le produit

$$(1) \qquad (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_n)\ldots$$

est convergent, la série

$$(2) \qquad \log(1+\alpha_1) + \log(1+\alpha_2) + \ldots$$

l'est aussi.

Si le produit (1) devient convergent quand on remplace $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ par leurs modules, il l'était primitivement. (CAUCHY, *Anal. algébr.*)

19. Le produit $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdots$ a pour valeur $\frac{\sin x}{x}$.

20. Soient $2, 3, 5, \ldots, n, \ldots$ les nombres premiers consécutifs; le produit $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots$ est divergent : en conclure que la série formée des inverses des nombres premiers est divergente.

21. Soient

$$s_2 = \sum_2^\infty \frac{1}{n^2}, \quad s_3 = \sum_2^\infty \frac{1}{n^3}, \quad \ldots, \quad s_k = \sum_2^\infty \frac{1}{n^k};$$

la série $s_2 + s_3 + s_4 + \ldots + s_k + \ldots$ est convergente valeur 1. Le produit $(1+s_2)(1+s_3)\ldots(1+s_k)$ est donc convergent

22. x étant moindre en valeur absolue que l'unité, trouver la valeur des produits

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^n})\ldots,$$
$$(1-x)(1-x^2)(1-x^4)\ldots(1-x^{2^n})\ldots.$$

23. Si le produit

$$P=(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n)\ldots$$

est convergent et a une limite différente de zéro, la série (considérée à l'ex. 4)

$$\frac{u_1}{1+u_1}+\frac{u_2}{(1+u_1)(1+u_2)}+\frac{u_3}{(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)}\cdots,$$

est convergente et a pour valeur $1-\frac{1}{P}$.

24. Trouver la limite de $\cos^m\frac{x}{m}$ pour $m=\infty$.

25. Trouver la limite de $\dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$ pour $x=0$.

CHAPITRE VI.

DES FRACTIONS CONTINUES.

I. — DÉFINITIONS.

On appelle *fraction continue* une expression de la forme (*)

$$a_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3+\ddots}}},$$

dans laquelle les quantités $a_1, a_2, a_3, \ldots, b_1, b_2, b_3, \ldots$ peuvent être en nombre illimité. Dans ce dernier cas, il est indispensable de définir ce que l'on appelle *valeur* de la fraction continue.

Lorsque l'expression

$$\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\ddots+\cfrac{a_n}{b_n}}},$$

(*) La théorie des fractions continues est due à lord Brouncker, qui a donné sous cette forme l'expression du nombre π. Quelques professeurs définissent la fraction continue en supposant $a_1, a_2, \ldots$ égaux à l'unité; cette définition n'est pas conforme à celle des bons auteurs dans lesquels nous avons puisé notre définition; d'ailleurs la théorie générale n'est pas plus compliquée que celle des fractions très-particulières dans lesquelles $a_1=a_2=a_3=\ldots=1$.

que nous désignerons par le symbole F_1^n, tend vers une limite finie quand n croît indéfiniment, la fraction continue est dite *convergente*, et la limite de F_1^n ou F_1^∞ est ce que l'on appelle la valeur de la fraction continue; dans le cas où F_1^n ne tend vers aucune limite, la fraction est *divergente*.

La valeur de F_1^n est ce que l'on appelle la $n^{\text{ième}}$ *réduite;* $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots$ sont ce que l'on appelle les *fractions intégrantes.*

$F_1^\infty, F_2^\infty, F_3^\infty, \ldots$ sont ce que l'on appelle le premier, le deuxième, le troisième *quotient complet;* ils jouent ici un rôle analogue aux restes dans les séries.

Occupons-nous de la formation des réduites. On a

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} F_1^1 &= \frac{a_1}{b_1},\\ F_1^2 &= \frac{a_1 b_2}{b_1 b_2 + a_2},\\ F_1^3 &= \frac{a_1 b_2 b_3 + a_1 a_3}{b_1 b_2 b_3 + a_2 b_3 + b_1 a_3}. \end{aligned}\right.$$

La loi de formation de ces réduites est exprimée par la formule suivante,

$$(2)\qquad \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n b_{n+1} + P_{n-1} a_{n+1}}{Q_n b_{n+1} + Q_{n-1} a_{n+1}},$$

dans laquelle P_i désigne d'une manière générale le numérateur et Q_i le dénominateur de la $i^{\text{ième}}$ réduite. Pour démontrer la formule (2), admettons qu'elle se vérifie jusqu'à une certaine valeur m de n, changeons m en $m+1$; nous allons voir qu'elle subsiste pour la nouvelle valeur de n. En effet, pour passer de la $m+1^{\text{ième}}$ réduite à la $m+2^{\text{ième}}$, il suffit de changer b_{m+1} en $b_{m+1} + \frac{a_{m+2}}{b_{m+2}}$; il vient alors

$$\frac{P_{m+2}}{Q_{m+2}} = \frac{(P_m b_{m+1} + P_{m-1} a_{m+1}) b_{m+2} + P_m a_{m+2}}{(Q_m b_{m+1} + Q_{m-1} a_{m+1}) b_{m+2} + Q_m a_{m+2}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{P_{m+2}}{Q_{m+2}} = \frac{P_{m+1} b_{m+2} + P_m a_{m+2}}{Q_{m+1} b_{m+2} + Q_m a_{m+2}}.$$

La formule (2) est donc vérifiée pour $n = m+1$; or elle est satisfaite pour $n = 2$, comme le prouve la relation (1); elle l'est donc pour $n = 3$, par suite pour $n = 4, \ldots$; donc elle est générale. C. Q. F. D.

Ainsi, on peut poser les formules

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{ll} P_0 = a_0, & Q_0 = 1,\\ P_1 = P_0 b_1 + a_1, & Q_1 = b_1,\\ P_2 = P_1 b_2 + P_0 a_2, & Q_2 = Q_1 b_2 + Q_0 a_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\\ P_{n+1} = P_n b_{n+1} + P_{n-1} a_{n+1}, & Q_{n+1} = Q_n b_{n+1} + Q_{n-1} b_{n+1}. \end{array}\right.$$

De là on pourrait tirer P_{n+1} et Q_{n+1} sous forme de déterminants en fonction des a et des b.

Théorème I. — On a

$$(4)\qquad P_{n+1} Q_n - Q_{n+1} P_n = (-1)^n a_1 a_2 \ldots a_{n+1}.$$

En effet, remplaçons dans le premier membre P_{n+1} et Q_{n+1} par leurs valeurs (3); on a

$$\begin{aligned} P_{n+1} Q_n - Q_{n+1} P_n = (P_n b_{n+1} + P_{n-1} a_{n+1}) Q_n \\ - (Q_n b_{n+1} + Q_{n-1} a_{n+1}) P_n \end{aligned}$$

ou

$$P_{n+1} Q_n - Q_{n+1} P_n = -(P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1}) a_{n+1}.$$

En remplaçant dans cette formule n par $1, 2, 3, \ldots, n$, on obtient des formules qui, multipliées entre elles, donnent

$$P_{n+1}Q_n - Q_{n+1}P_n = (-1)^n (P_1 Q_0 - Q_1 P_0) a_2 a_3 \ldots a_{n+1}$$

ou

$$(4) \qquad P_{n+1}Q_n - Q_{n+1}P_n = (-1)^n a_1 a_2 \ldots a_{n+1},$$

ce qu'il fallait établir.

Les conséquences de cette formule (4) sont très-nombreuses.

Corollaire I. — *On en déduit*

$$(4\,bis) \qquad \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = (-1)^n \frac{a_1 a_2 \ldots a_{n+1}}{Q_n Q_{n+1}}.$$

Si dans cette formule on fait $n = 1, 2, 3, \ldots$ et si l'on ajoute les résultats, on a

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \dfrac{P_1}{Q_1} - \dfrac{a_1 a_2}{Q_1 Q_2} + \dfrac{a_1 a_2 a_3}{Q_2 Q_3} - \ldots \\ \qquad + (-1)^n \dfrac{a_1 a_2 \ldots a_{n+1}}{Q_n Q_{n+1}}. \end{array} \right.$$

De là un moyen, si la fraction continue est limitée, de calculer sa valeur sans avoir besoin de former les P_i.

De là un moyen aussi de reconnaître si la fraction continue donnée est convergente; en effet, si elle est convergente (ou divergente), $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ aura (ou n'aura pas) une limite pour $n = \infty$, et la série (5) sera (ou ne sera pas) convergente pour $n = \infty$.

Corollaire II. — *La formule* (5) *fait connaître un développement de la fraction continue en série. Elle permet aussi, par l'identification de son second membre avec une série donnée, de convertir celle-ci en fraction continue.* (Consulter à ce sujet le *Calcul différentiel* de M. Bertrand.)

II. — ÉTUDE DU CAS OU LES NUMÉRATEURS DES FRACTIONS INTÉGRANTES SONT ÉGAUX A L'UNITÉ.

Lorsque les numérateurs des fractions intégrantes sont égaux à l'unité, les formules du paragraphe précédent se simplifient; mais, si l'on suppose de plus les dénominateurs entiers et positifs, la fraction continue jouira de propriétés arithmétiques intéressantes dont nous allons nous occuper.

1° *D'abord une telle fraction est toujours convergente*, car la série (5) du paragraphe précédent se réduit à

$$(1) \qquad \frac{P_1}{Q_1} - \frac{1}{Q_1 Q_2} + \ldots \pm \frac{1}{Q_n Q_{n+1}} \mp \ldots$$

Les formules (3) du même paragraphe donnent

$$\begin{array}{lll} Q_2 = b_1 b_2 + 1 & \text{ou} & Q_2 > Q_1 > 1, \\ Q_3 = Q_2 b_3 + b_1 & \text{ou} & Q_3 > Q_2 > 2, \\ Q_4 = Q_3 b_4 + Q_2 & \text{ou} & Q_4 > Q_3 > 3, \\ \ldots\ldots\ldots & & \end{array}$$

Ainsi $Q_{n+1} > n$, et par suite le terme général de la série (1), tend vers zéro; cette série, et par suite la fraction continue elle-même, est donc convergente en vertu du théorème de la page 89.

2° *Réciproquement, tout nombre peut être développé de cette manière en fraction continue.* En effet, soient en général $E(x)$ le plus grand entier contenu dans x et N le nombre à développer; on peut poser

$$N = E(N) + \frac{1}{N'},$$

et N' sera plus grand que l'unité. Si $N < 1$, on a d'ailleurs $E(N) = 0$. On posera de même

$$N' = E(N') + \frac{1}{N''},$$

$$N'' = E(N'') + \frac{1}{N'''}, \quad \ldots,$$

et l'on aura

$$N = E(N) + \cfrac{1}{E(N') + \cfrac{1}{E(N'') + \ldots}},$$

ce qui démontre notre proposition.

La fraction sera limitée si $N = \frac{a}{b}$, a et b désignant deux entiers. En effet, $E\left(\frac{a}{b}\right)$ ou $E(N)$ est alors le quotient de a par b, et, en appelant R le reste, on a $N' = \frac{b}{R}$; en appelant R' le reste de la division de b par R, on a $N'' = \frac{R}{R'}$, ... L'opération que l'on a à faire est identique avec celle du plus grand commun diviseur, en sorte qu'elle se terminera si a et b sont entiers.

3° *Les réduites sont des fractions irréductibles.*

En effet, la formule (4) du paragraphe précédent donne

$$P_{n+1}Q_n - Q_{n+1}P_n = \pm 1.$$

Tout facteur divisant P_n et Q_n devrait diviser ± 1. Ce facteur commun ne saurait être que l'unité, et par suite P_n et Q_n sont premiers entre eux; donc $\frac{P_n}{Q_n}$ est irréductible.

4° *La différence entre deux réduites consécutives, étant de la forme* $\pm \frac{1}{Q_n Q_{n+1}}$, *tend vers zéro en diminuant indéfiniment, car*

$$Q_1 < Q_2 < Q_3 < \ldots, \quad \text{et} \quad Q_n > n - 1.$$

5° *Le nombre* N *est compris entre deux réduites successives.* On peut le voir aisément sur la fraction elle-même; mais on peut observer que la série (5) du paragraphe précédent donne les valeurs successives des réduites quand on prend son premier, ses deux premiers, ses trois premiers... termes. Or, la valeur de la série ou de la fraction continue est comprise, comme l'on sait, entre deux sommes successives, c'est-à-dire entre deux réduites consécutives (p. 90); d'ailleurs, chaque somme ou chaque réduite se rapproche de plus en plus de N quand n augmente.

6° *Les réduites sont les fractions les plus simples que l'on puisse employer pour approcher du nombre* N.

En effet, soit $\frac{a}{b}$ un nombre approchant de N; il sera compris entre deux réduites consécutives, par exemple $\frac{P_n}{Q_n}$ et $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, et sa différence avec N sera moindre que $\frac{1}{Q_n Q_{n-1}}$: sa différence avec $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ sera aussi moindre que $\frac{1}{Q_n Q_{n-1}}$. Or, en faisant cette différence, on trouve

$$\pm \frac{P_{n-1}b - Q_{n-1}a}{bQ_{n-1}}.$$

Mais le numérateur de cette fraction est au moins égal à 1; donc la fraction précédente est au moins égale à $\frac{1}{bQ_{n-1}}$. Pour que cette quantité soit moindre que $\frac{1}{Q_n Q_{n-1}}$, il faut que $b > Q_n$; donc la fraction $\frac{a}{b}$ a son dénominateur plus grand que celui de $\frac{P_n}{Q_n}$.

Application. — Réduisons $\pi = 3{,}14159\ldots$ en fraction continue; on trouve

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}$$

Les réduites successives sont les nombres bien connus

$$3,\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \ldots.$$

III. — APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES FRACTIONS CONTINUES A L'ANALYSE NUMÉRIQUE.

Lorsqu'on veut démontrer l'incommensurabilité de certaines transcendantes, un excellent moyen consiste à les développer, si l'on peut, en fractions continues, et le théorème suivant permet alors, dans un grand nombre de cas, de trancher la question.

THÉORÈME I. — *Si les fractions* $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots$ *sont toutes en valeur absolue moindres que* 1, *la fraction*

$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ldots}}$$

représentera un nombre incommensurable, pourvu que la différence entre a_n *et* b_n *ne soit pas toujours égale à un.*

Nous supposons $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ *entiers, mais du reste quelconques, positifs ou négatifs.*

On aura d'abord en valeur absolue

$$\frac{a_1}{b_1} < 1;$$

mais, $\frac{a_2}{b_2}$ étant inférieur à l'unité, $b_1 + \frac{a_2}{b_2}$ sera encore plus grand que a_1, car la différence entre a_1 et b_1 est au moins d'une unité, en sorte que, quand même $\frac{a_2}{b_2}$ serait de signe contraire à b_1, on aurait toujours

$$\frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2}} < 1.$$

Soient $F_1^1, F_1^2, F_1^3, \ldots$ les réduites successives de la fraction continue considérée et $F_1^\infty, F_2^\infty, \ldots$ les quotients complets successifs. En continuant ce raisonnement, on voit que F_1^n, n étant un nombre fini, sera moindre que 1; mais on ne peut pas affirmer *a priori* que F_1^∞ soit moindre que 1. Tout ce que l'on peut dire, c'est que la limite de F_1^n est au plus égale à 1. Mais, pour que $F_1^\infty = 1$, il faudrait que b_1 différât de a_1 d'une unité et que l'on eût $F_2^\infty = 1$, c'est-à-dire que b_2 différât de a_2 d'une unité, etc., en sorte que l'on ne pourra avoir $F_1^\infty = 1$ que si la différence entre a_n et b_n est un, encore F_1^∞ sera-t-il moindre que un si a_1, $a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ sont tous positifs.

Ce cas est le cas d'exception signalé dans notre énoncé. Posons alors

$$\frac{B}{A} = F_1^\infty, \quad \frac{C}{B} = F_2^\infty, \quad \frac{D}{C} = F_3^\infty, \quad \ldots;$$

on aura

$$\frac{B}{A} = \frac{a_1}{b_1 + C : B},$$

c'est-à-dire

$$Bb_1 + C = a_1 A \quad \text{ou} \quad C = a_1 A - b_1 B.$$

Si donc B et A sont entiers, C le sera aussi, et ainsi de suite. Or, si F_1^∞ est commensurable, on peut supposer A et B entiers ; mais on a en valeur absolue

$$\frac{B}{A} < 1, \quad \frac{C}{B} < 1, \quad \ldots,$$

c'est-à-dire

$$A > B > C > D > \ldots.$$

Ainsi A, B, C, ... seraient des nombres entiers indéfiniment décroissants, ce qui est absurde ; donc F_1^∞ est incommensurable. C. Q. F. D.

Application. — La fraction

$$\cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \ddots}},$$

dans laquelle a et b sont des entiers positifs tels que $b < a$, est incommensurable. Supposons ces entiers constants, et soit z la valeur de la fraction ; on aura

$$= \frac{b}{a+z},$$

c'est-à-dire

$$z^2 + az - b = 0,$$

ou bien

$$z = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}.$$

$\sqrt{a^2+4b}$ est donc toujours incommensurable ; donc enfin $a^2 + 4b$ n'est jamais un carré parfait si l'on a $a > b$, ce qu'il est facile d'établir directement.

IV. — APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES FRACTIONS CONTINUES A LA RÉSOLUTION EN NOMBRES ENTIERS DES ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES DU PREMIER DEGRÉ.

Considérons l'équation

$$ax + by = c,$$

dans laquelle nous supposerons a, b, c entiers ; réduisons $\frac{a}{b}$ en fraction continue, et, à cet effet, soit b_0 le plus grand entier contenu dans $\frac{a}{b}$. Posons

$$\frac{a}{b} = b_0 + \frac{1}{z_1};$$

on déduit de là

$$z_1 = \frac{b}{a - b_0 b}.$$

On peut poser

$$z_1 = b_1 + \frac{1}{z_2},$$

et ainsi de suite ; on a alors

$$\frac{a}{b} = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \ddots + \cfrac{1}{b_n}}}.$$

Cette fraction est forcément limitée, sans quoi (p. 150) le second membre ne saurait représenter un nombre commensurable.

Soient $\frac{a'}{b'}$ l'avant-dernière réduite, $\frac{a''}{b''}$ la dernière ; on a (p. 145) pour deux réduites consécutives quelconques la relation

$$a''b' - b''a' = \pm 1;$$

$\frac{a''}{b''}$ est égal à $\frac{a}{b}$. Supposons que a et b soient premiers entre eux; on aura alors $a''=a$, $b''=b$ et

$$ab'-ba'=\pm 1,$$

d'où l'on tire

$$a(b'c)+b(-a'c)=\pm c.$$

On satisfera donc à l'équation proposée en prenant

$$x=\pm b'c,\quad y=\mp a'c.$$

Connaissant une solution, on connaît facilement toutes les autres. En effet, soit (x_0, y_0) une solution; on aura

$$ax_0+by_0=c;$$

on déduira de cette équation et de la proposée

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0,$$

et cette équation peut remplacer la proposée; on en déduit

$$y=a\frac{x_0-x}{b}+y_0.$$

Or, a et b étant premiers entre eux, pour que y soit une solution entière, il faut et il suffit que $\frac{x_0-x}{b}$ soit un entier, et l'on a alors, pour satisfaire à la question, les systèmes de valeurs suivants :

$$\begin{cases} x=x_0\pm b, \\ y=y_0\mp a, \end{cases}\quad \begin{cases} x=x_0\pm 2b, \\ y=y_0\mp 2a, \end{cases}\quad \begin{cases} x=x_0\pm 3b, \\ y=y_0\mp 3a, \end{cases}\quad \begin{matrix} \ldots, \\ \ldots. \end{matrix}$$

Nous avons supposé a et b premiers entre eux; s'ils ne l'étaient pas, et si du reste a, b, c n'avaient plus de diviseur commun, il est facile de voir que l'équation

$$ax+by=c$$

n'aurait pas de solutions entières, sans quoi le plus grand commun diviseur de a et b diviserait le premier membre de l'équation sans diviser le second.

Si a, b, c avaient un facteur commun, il faudrait le supprimer, après quoi on rentrerait dans le cas que nous venons de traiter.

EXERCICES ET NOTES.

1. Toute fraction continue qui devient périodique est racine d'une équation du second degré, dont les coefficients sont rationnels par rapport aux termes des fractions intégrantes.

2. Démontrer que, si N est premier avec a, b, c, ... et moindre que leur produit, on a

$$\frac{N}{abc\ldots}=\frac{A}{a}+\frac{B}{b}+\frac{C}{c}+\ldots,$$

A, B, C, ... désignant des entiers.

3. La fraction continue dont toutes les fractions intégrantes sont égales à $\frac{2ab}{a-b}$ est égale à $2b$.

4. Former les réduites successives de la fraction continue dont toutes les fractions intégrantes sont égales à $\frac{x}{1}$ ou à $\frac{1}{x}$; trouver l'expression générale de la $n^{\text{ième}}$ réduite.

5. Consulter le *Traité de Calcul différentiel* de M. Bertrand et l'*Algèbre* d'Euler avec les Notes de Lagrange. Consulter aussi le *Traité des équations numériques* de Lagrange. Pour la résolution des équations du premier degré en nombres entiers, *voir* l'*Analyse numérique* de M. V.-A. Lebesgue, un des plus grands arithmologues de notre époque.

6. Des ouvriers, hommes et femmes, ont gagné ensemble 246^{fr}, chaque homme est payé 10^{fr}, chaque femme 8^{fr} : combien y a-t-il d'hommes et de femmes?

7. Des ouvriers, hommes, femmes et enfants, au nombre de 34, ont été payés en tout 260fr; chaque homme a touché 10fr, chaque femme 8fr, chaque enfant 2fr : combien y avait-il d'hommes, de femmes et d'enfants ?

8. Prouver que, m et n étant deux nombres incommensurables quelconques, on peut toujours trouver deux nombres entiers x, y tels que

$$mx - ny < \varepsilon.$$

Trouver effectivement ces deux nombres.

Cette proposition très-importante se démontre en réduisant $\frac{m}{n}$ en une fraction continue dont les numérateurs des fractions intégrantes sont l'unité et dont les dénominateurs sont positifs. Soient $\frac{P_\mu}{Q_\mu}$ et $\frac{P_{\mu+1}}{Q_{\mu+1}}$ deux réduites successives; leur différence est $\frac{1}{Q_{\mu+1}Q_\mu}$. Or $\frac{m}{n}$ est compris entre deux réduites consécutives; donc

$$\frac{m}{n} - \frac{P_\mu}{Q_\mu} < \frac{1}{Q_{\mu+1}Q_\mu}$$

ou

$$mQ_\mu - nP_\mu < \frac{n}{Q_{\mu+1}}.$$

Il reste donc à prendre $\frac{n}{Q_{\mu+1}} < \varepsilon$, ce qui est toujours possible, car $Q_{\mu+1}$ croît indéfiniment avec μ.

9. *Incommensurabilité de π.* — Posons

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(z) = 1 + \frac{1}{1}\frac{x}{z} + \frac{1}{1.2}\frac{x^2}{z(z+1)} + \ldots \\ + \frac{1}{1.2.3\ldots n}\frac{x^n}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}. \end{aligned} \right.$$

Le second membre de cette formule est une série convergente, car le rapport d'un terme au précédent a pour expression générale

$$\frac{x}{n(z+n-1)},$$

quantité qui a pour limite zéro pour $n = \infty$. On a, en changeant z en $z+1$,

$$\varphi(z+1) = 1 + \frac{1}{1}\frac{x}{z+1} + \frac{1}{1.2}\frac{x^2}{(z+1)(z+2)} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{1.2.3\ldots n}\frac{x^n}{(z+1)(z+2)\ldots(z+n)} \ldots,$$

d'où l'on tire aisément

$$\varphi(z) - \varphi(z+1) = \frac{x}{z(z+1)}\varphi(z+2),$$

ou, en multipliant par $\frac{z}{\varphi(z+1)}$,

$$\frac{z\varphi(z)}{\varphi(z+1)} = z + \frac{x\varphi(z+2)}{(z+1)\varphi(z+1)}.$$

Si l'on pose alors

$$(2)\qquad \psi(z) = \frac{x\varphi(z+1)}{z\varphi(z)},$$

on pourra écrire l'équation précédente comme il suit :

$$\frac{x}{\psi(z)} = z + \psi(z+1)$$

ou bien

$$\psi(z) = \frac{x}{z + \psi(z+1)}.$$

En changeant z en $z+1$, $z+2$, ..., on a

$$\psi(z+1) = \frac{x}{z+1+\psi(z+2)},$$
$$\psi(z+2) = \frac{x}{z+2+\psi(z+3)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et par conséquent

$$(3)\quad \psi(z) = \cfrac{x}{z + \cfrac{x}{z+1+\cfrac{x}{z+2+\ldots+\cfrac{x}{z+i-1+\psi(z+i)}}}}.$$

Or, si l'on fait $z=\frac{1}{2}$, on a, en vertu de l'équation (2),

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right)=2x\frac{\varphi\left(\frac{3}{2}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$=2x\frac{1+\frac{4x}{1.2.3}+\frac{4^2x^2}{1.2.3.4.5}+\ldots+\frac{4^nx^n}{1.2.3\ldots(2n+1)}}{1+\frac{4x}{1.2}+\frac{4^2x^2}{1.2.3.4}+\frac{4^4x^4}{1.2.3.4.5.6}+\ldots+\frac{4^nx^n}{1.2.3\ldots 2n}}.$$

Cette équation peut encore s'écrire (p. 117)

$$(4)\qquad \psi\left(\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{x}\,\frac{e^{2\sqrt{x}}-e^{-2\sqrt{x}}}{e^{2\sqrt{x}}+e^{-2\sqrt{x}}}.$$

En second lieu, la fonction $\psi(z)$ peut se mettre sous la forme

$$\psi(z)=\frac{x}{z}\,\frac{1+\frac{1}{1}\frac{x}{z+1}+\frac{1}{1.2}\frac{x^2}{(z+1)(z+2)}+\ldots}{1+\frac{1}{1}\frac{x}{z}+\frac{1}{1.2}\frac{x^2}{z(z+1)}+\ldots};$$

et, si l'on fait augmenter i indéfiniment, $\psi(z+i)$ tend évidemment vers zéro, en sorte que pour $z=\frac{1}{2}$ l'équation (3) devient

$$2\sqrt{x}\,\frac{e^{2\sqrt{x}}-e^{-2\sqrt{x}}}{e^{2\sqrt{x}}+e^{-2\sqrt{x}}}=\cfrac{4x}{1+\cfrac{4x}{3+\cfrac{4x}{5+\ddots}}}$$

Changeons x en $\frac{x^2}{4}$, nous aurons

$$(5)\qquad \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{3+\cfrac{x^2}{5+\ddots}}}$$

Quel que soit x, les fractions $\frac{x^2}{3}$, $\frac{x^2}{5}$, $\frac{x^2}{7}$, ... finissent par devenir

moindres que 1. Si donc nous supposons x entier, nous voyons que $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ est une quantité incommensurable, en vertu du théorème de la page 150; donc e^x est aussi incommensurable. Ainsi :

Les puissances entières du nombre e sont incommensurables.

Dans la formule (5), changeons x en $x\sqrt{-1}$; nous aurons

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}=\cfrac{x\sqrt{-1}}{1-\cfrac{x^2}{3-\ddots}},$$

c'est-à-dire (p. 121), en vertu des relations connues,

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}=\sin x,\qquad \frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2}=\cos x,$$

$$\tang x=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\ddots}}};$$

ou bien, en changeant x en $\frac{p}{q}$,

$$\tang\frac{p}{q}=\cfrac{p}{q-\cfrac{p^2}{3q-\cfrac{p^2}{5q-\ddots}}}.$$

On voit donc que, si un arc $\frac{p}{q}$ est commensurable, sa tangente ne l'est pas, car les fractions $\frac{p^2}{3q}$, $\frac{p^2}{5q}$, $\frac{p^2}{7q}$, ... finissent par devenir moindres que l'unité; il en résulte que le nombre $\frac{\pi}{4}$ est incommensurable, car, s'il était commensurable, sa tangente, qui est 1, serait incommensurable. On en conclut le théorème suivant :

La circonférence d'un cercle est incommensurable avec son rayon.

10. Le rapport des vitesses de deux roues d'engrenage est le même que le rapport inverse de leur nombre de dents. Sachant que le rapport des vitesses doit être d'environ $\frac{1855}{1403}$, trouver un rapport commensurable plus simple approchant de celui-là, afin de construire moins de dents.

11. Développer e en fraction continue et calculer les premières réduites.

CHAPITRE VII.

THÉORIE DES FONCTIONS DÉRIVÉES.

I. — DÉFINITIONS.

On appelle *dérivée* d'une fonction la limite du rapport de l'accroissement de cette fonction à l'accroissement correspondant de sa variable lorsque celui-ci tend vers zéro.

Cette définition, pour être bien comprise, exige que nous entrions dans quelques détails. Lorsqu'une fonction $f(x)$ est continue, à un accroissement infiniment petit h de sa variable x correspond toujours un accroissement infiniment petit k de la fonction $f(x)$, mais il n'est pas évident *a priori* que la limite du rapport $\frac{k}{h}$, que nous avons appelée *dérivée de la fonction*, soit finie et déterminée; en d'autres termes, il n'est pas évident que, quelle que soit la manière dont h tend vers zéro, $\frac{k}{h}$ tende toujours vers la même limite.

Nous verrons dans la suite que les fonctions de variable réelle ont en général une dérivée unique et bien déterminée, et nous ne nous occuperons que de ces fonctions (*).

(*) Toute fonction $f(x)$ qui admet une dérivée finie et bien déterminée pour $x = a$ est évidemment continue, parce que l'accroissement de f est nécessairement infiniment petit avec celui de x; mais il n'est pas prouvé que toute fonction continue ait une dérivée : quelques auteurs ont cité des

Lagrange, dans sa *Théorie des fonctions analytiques*, propose de représenter la dérivée de la fonction y par y' (*); y' à son tour pouvant être considéré comme fonction de la même variable que y, sa dérivée sera représentée par y'' : elle porte le nom de *dérivée seconde* de y. La dérivée de y'' sera représentée par y''' : elle porte le nom de *dérivée troisième* de y, etc.

Théorème I. — *Soient $f(x)$ une fonction quelconque, $f'(x)$ sa dérivée, h un accroissement quelconque donné à x; on aura*

$$f(x+h)-f(x)=h[f'(x)+\varepsilon], \tag{1}$$

ε désignant une quantité qui s'annule avec h.

En effet, d'après la définition même que nous avons donnée de la dérivée, on a

$$\lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x),$$

c'est-à-dire, en désignant par ε une quantité qui s'annule avec h,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\varepsilon,$$

d'où l'on tire la relation (1).

fonctions continues ne possédant pas de dérivées; mais il ne m'est pas bien démontré que ces fonctions soient continues.

(*) Cette notation, dont Lagrange lui-même n'a jamais voulu faire usage dans ses recherches, nous est imposée en France par les programmes. La notation inventée par Leibnitz $\left(\dfrac{dy}{dx}\right.$ pour représenter la dérivée de y relative à $\left.x\right)$ est encore celle dont on fait usage aujourd'hui universellement; elle a de grands avantages sur celle de Lagrange (Leibnitz et Newton sont les inventeurs du Calcul des dérivées; le premier l'a appelé *Calcul différentiel*, le second *Calcul des fluxions*).

L'expression de la différence $f(x+h)-f(x)$ est susceptible de prendre une autre forme, qui nous sera très-utile dans la suite, et que nous allons faire connaître.

Théorème II. — *Soit $f(x)$ une fonction qui reste continue (*) quand x varie de a à b et qui ait dans cet intervalle une dérivée $f'(x)$ unique, déterminée et finie pour chaque valeur de x; si l'on a $f(a)=0$, $f(b)=0$, il existera entre a et b une valeur c telle, que l'on aura $f'(c)=0$.*

En effet, supposons $a<b$, x variant de a à b; $f(x)$ part de zéro pour redevenir nul pour $x=b$. Alors, s'il n'est pas resté constant, il a dû croître pour décroître ensuite, ou décroître d'abord et devenir négatif pour croître de nouveau afin de s'annuler. $f(x)$ passe donc par une valeur $f(c)$ ou plus grande ou plus petite que celles qui la précèdent ou la suivent immédiatement. En d'autres termes, pour des valeurs de h suffisamment petites,

$$f(c+h)-f(c) \quad \text{et} \quad f(c-h)-f(c)$$

sont de même signe

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \quad \text{et} \quad \frac{f(c-h)-f(c)}{-h}$$

sont alors de signes contraires. Mais, d'après la définition que nous avons donnée de la dérivée, chacune de ces expressions a pour limite $f'(c)$, dont la valeur, par hypothèse, est unique et bien déterminée; $f'(c)$ est donc la limite commune de deux quantités, l'une positive, l'autre négative, et par suite ne peut être que zéro. C. Q. F. D.

(*) Il est inutile, à la rigueur, de dire que $f(x)$ est continu, car, si la dérivée existe, la fonction est continue.

Cette démonstration, due à M. O. Bonnet, est extrêmement remarquable, en ce sens que l'on n'a pas besoin de supposer la dérivée $f'(x)$ continue.

Corollaire I. — *Si la fonction $f(x)$ conserve une dérivée bien déterminée entre les valeurs x et $x+h$ de sa variable, on a*

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h),$$

θ désignant un nombre compris entre zéro et 1.

En effet, posons $x+h=X$, $X-x=h$ et

$$\frac{f(X)-f(x)}{X-x}=A; \tag{1}$$

on en conclura

$$f(X)-f(x)-(X-x)A=0.$$

Si l'on considère alors la fonction de z,

$$f(X)-f(z)-(X-z)A,$$

elle s'annulera pour $z=x$. Mais elle s'annule aussi pour $z=X$; donc sa dérivée s'annule pour une valeur ζ de z comprise entre x et X. Cette dérivée est la limite de

$$\frac{f(X)-f(z+\varepsilon)-(X-z-\varepsilon)A-[f(X)-f(z)-(X-z)A]}{\varepsilon};$$

pour $\varepsilon=0$; cette quantité peut être remplacée par

$$-\frac{f(z+\varepsilon)-f(z)}{\varepsilon}+A,$$

dont la limite est, par définition, $-f'(z)+A$. Remplaçant z par ζ, on a donc $-f'(\zeta)+A=0$ ou $A=f'(\zeta)$; par suite, la formule (1) devient

$$\frac{f(X)-f(x)}{X-x}=f'(\zeta).$$

Remplaçons X par $x+h$ et la valeur ζ comprise entre x et $x+h$ par $x+\theta h$, θ désignant un nombre positif moindre que 1 ; nous aurons

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x+\theta h)$$

ou

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h).$$

II. — DÉRIVÉE D'UNE SOMME, D'UN PRODUIT, D'UN QUOTIENT.

Théorème I. — *La dérivée d'une somme composée d'un nombre limité de parties est égale à la somme des dérivées de ses parties* (*).

En effet, considérons la quantité

$$y=u+v-w\pm\ldots, \tag{1}$$

$u, v, w, \ldots$ désignant des fonctions quelconques de x *en nombre limité;* représentons par le symbole Δx un accroissement arbitraire donné à x (le signe Δ ne représentant plus ici une quantité, mais une opération). Soient Δy, Δu, Δv, Δw, ... les accroissements correspondants de y, u, v, w, ... ; en remplaçant dans l'équation (1) x par $x+\Delta x$, u deviendra alors $u+\Delta u$, v deviendra $v+\Delta v$, etc., et l'on aura

$$y+\Delta y=u+\Delta u+v+\Delta v-w-\Delta w\pm\ldots. \tag{2}$$

Si l'on retranche les équations (1) et (2) membre à membre, on a

$$\Delta y=\Delta u+\Delta v-\Delta w\pm\ldots,$$

(*) Nous supposerons toujours dans la suite que les fonctions sur lesquelles nous raisonnons ont une dérivée. L'existence de la dérivée cherchée sera seule à démontrer.

c'est-à-dire, en divisant par Δx,

$$(3)\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x} \pm \ldots.$$

Or, si l'on fait tendre Δx vers zéro, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tendra vers y' dérivée de y, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ tendra vers u', etc., en sorte qu'en prenant les limites des deux membres de l'équation précédente, et en observant que dans le second membre de cette équation *le nombre des parties est limité,* on a

$$y' = u' + v' - w' + \ldots,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Remarque. — Nous avons insisté sur ce point que le nombre des parties $u, v, w, \ldots$ devait être limité; en effet, quand nous avons fait tendre Δx vers zéro, nous avons admis que la limite de la somme $\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x} + \cdots$ était égale à la somme des limites de ses parties, ce qui cesse d'être vrai lorsque l'on suppose le nombre des parties illimité (*). Ainsi le théorème que nous venons de démontrer n'est pas applicable aux séries, ou du moins, pour qu'il devienne applicable aux séries, il faut nécessairement une nouvelle démonstration.

(*) On démontre par le Calcul intégral la formule

$$\frac{x}{2} = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots \pm \frac{\sin nx}{n} \pm \ldots.$$

Si l'on prend la dérivée des deux membres de cette équation, en procédant comme si le second membre avait un nombre limité de termes, on trouve, à l'aide de procédés qui seront expliqués plus loin, la formule

$$\frac{1}{2} = \cos x - \cos 2x + \cos 3x - \ldots \pm \cos nx, \ldots,$$

absurde, car le second membre est divergent.

Théorème II. — *La dérivée d'un produit de plusieurs fonctions en nombre limité est égale à la somme des produits obtenus en multipliant la dérivée de chacune de ces fonctions par toutes les autres.*

En effet, soient $u, v, w, \ldots$ différentes fonctions de x en nombre limité; posons

$$(1)\qquad y = uvw\ldots.$$

Changeons dans cette formule x en $x + \Delta x$; $y, u, v, w, \ldots$ deviendront $y + \Delta y$, $u + \Delta u$, $\ldots$, Δy, Δu, $\ldots$, représentant, comme plus haut, les accroissements de y, $u, \ldots$ correspondant à l'accroissement Δx de x. Nous aurons

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)(w + \Delta w)\ldots.$$

Or le produit des facteurs qui entrent dans le second membre de cette équation est égal à la somme des produits obtenus en prenant pour facteurs un terme dans chacun des binômes $u + \Delta u$, $v + \Delta v$, $\ldots$; on aura donc

$$(2)\qquad y + \Delta y = uvw\ldots + \Delta u . vw\ldots + \Delta v . uw\ldots + \omega,$$

ω désignant une somme de termes contenant en facteur au moins deux des quantités $\Delta u, \Delta v, \Delta w, \ldots$.

Or, des équations (1) et (2) on tire par soustraction

$$\Delta y = \Delta u . vw\ldots + \Delta v . uw\ldots + \Delta w . uv\ldots + \omega,$$

ou bien, en divisant par Δx,

$$(3)\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} vw\ldots + \frac{\Delta v}{\Delta x} uw\ldots + \frac{\omega}{\Delta x}.$$

Or, si l'on fait tendre Δx vers zéro, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\cdots$ auront pour limites y', u', ... Quant à $\frac{\omega}{\Delta x}$, il se compose de termes de la forme $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}\alpha$, dans lesquels α est un produit qui contient au moins un des facteurs Δu, Δv, ...; si nous supposons donc qu'aucune des dérivées u', v', ... ne soit infinie, $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}$ n'augmentera pas indéfiniment; d'un autre côté, α aura pour limite zéro, et par suite ω aussi; donc, si l'on suppose les facteurs u, v, w, ... en nombre limité, la formule (3) donnera, pour $\Delta x = 0$,

$$(4) \qquad y' = u'vw\ldots + v'uw\ldots + w'uv\ldots.$$

C. Q. F. D.

Corollaire I. — Si l'on divise les équations (1) et (4) membre à membre, on trouve

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w} + \ldots,$$

relation remarquable et dont on fait un fréquent usage. $\frac{y'}{y}$ est ce que l'on appelle la *dérivée logarithmique* de y; on peut donc dire que :

La dérivée logarithmique d'un produit est égale à la somme des dérivées logarithmiques de ses facteurs.

Corollaire II. — a désignant une constante, la dérivée de au sera au', car la dérivée de a est nulle. En effet, Δa est nul, et par suite $\frac{\Delta a}{\Delta x}$ aussi, quelque petit que soit Δx; donc la limite de $\frac{\Delta a}{\Delta x}$ sera zéro. C. Q. F. D.

Remarque. — On a quelquefois besoin de prendre n fois de suite la dérivée d'un produit uv. On peut le faire à l'aide

de la formule suivante, due à Leibnitz,

$$(1) \quad (uv)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)},$$

dans laquelle C_n^1, C_n^2, ... représentent les coefficients de la formule du binôme $\frac{n}{1}$, $\frac{n(n-1)}{1.2}$, ..., et dans laquelle $u^{(i)}$ désigne en général la dérivée $i^{\text{ième}}$ de u.

Pour démontrer cette formule, il suffit d'observer que l'on a

$$(uv)' = u'v + v'u,$$

et par suite, en prenant encore la dérivée,

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''.$$

La formule (1) a donc lieu pour $n = 1$, $n = 2$, ... Admettons qu'elle ait lieu pour la $n^{\text{ième}}$ dérivée, démontrons qu'elle a encore lieu pour la $(n+1)^{\text{ième}}$, et, comme elle a lieu pour $n = 2$, elle aura lieu pour $n = 3$, $n = 4$, ...; elle sera alors générale. Si nous prenons la dérivée des deux membres de (1), nous trouvons

$$(uv)^{(n+1)} = u^{(n+1)}v + (C_n^1 + 1)u^{(n)}v' + (C_n^2 + C_n^1)u^{(n-1)}v'' + \ldots.$$

Or, par un théorème connu, on a (p. 13)

$$C_n^1 + 1 = C_{n+1}^1, \quad C_n^2 + C_n^1 = C_{n+1}^2, \quad \ldots;$$

donc

$$(uv)^{(n+1)} = u^{(n+1)}v + C_{n+1}^1 u^{(n)}v' + C_{n+1}^2 u^{(n-1)}v'' + \ldots.$$

Cette formule n'est autre que (1), où l'on a remplacé n par $(n+1)$; donc enfin la formule (1) a lieu quel que soit n. C. Q. F. D.

Théorème III. — *La dérivée d'un quotient est égale au résultat obtenu en divisant par le carré du diviseur la dérivée du dividende multipliée par le diviseur, dimi-*

nuée de la dérivée du diviseur multipliée par le dividende.

En effet, soit

$$(1)\qquad y = \frac{u}{v}$$

le quotient des deux fonctions u et v de x. Changeons x en $x + \Delta x$; u, v, y deviendront $u + \Delta u$, $v + \Delta v$, $y + \Delta y$ et l'on aura

$$(2)\qquad y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}.$$

Des équations (1) et (2) on tire

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v},$$

c'est-à-dire

$$\Delta y = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)},$$

d'où l'on tire

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\Delta v}.$$

Si l'on fait tendre Δx vers zéro, il vient alors, en observant que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ ont pour limites y', u', v',

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire. — La dérivée de $\frac{1}{v}$ s'obtiendra en faisant $u = 1$ dans la formule précédente, et par suite $u' = 0$. On a alors

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$

III. — DÉRIVÉES DES FONCTIONS DE FONCTIONS ET DES FONCTIONS COMPOSÉES.

Soient v une fonction de x, w une fonction de v, y une fonction de w; y sera ce que l'on appelle une *fonction de fonction* de x.

Théorème I. — *La dérivée d'une fonction de fonction est égale au produit des dérivées des fonctions dont elle est formée.*

En effet, soit y une fonction de w, w une fonction de v, v une fonction de x. Changeons x en $x + \Delta x$; y deviendra $y + \Delta y$, w deviendra $w + \Delta w$, v deviendra $v + \Delta v$, et l'on aura identiquement

$$(1)\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta w}\,\frac{\Delta w}{\Delta v}\,\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Si l'on fait tendre Δx vers zéro, $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ aura pour limite v'. $\frac{\Delta w}{\Delta v}$ est le rapport de l'accroissement de w à l'accroissement correspondant de v; sa limite est donc la dérivée de w prise en considérant w uniquement comme fonction de v et non comme fonction de x : nous désignerons cette dérivée par w'_v pour ne pas la confondre avec w', qui est la dérivée de w considérée comme fonction de x. De même $\frac{\Delta y}{\Delta w}$ aura pour limite y'_w, dérivée de y prise en considérant y uniquement comme fonction de w. La formule (1) peut alors s'écrire

$$(2)\qquad y' = y'_w w'_v v',$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

REMARQUE I. — Nous avons tacitement supposé le nombre des fonctions intermédiaires w et v limité ; en effet, en passant aux limites dans la formule (1), nous nous sommes appuyés sur ce principe que la limite d'un produit était égale au produit des limites de ses facteurs : ce principe n'est pas applicable aux produits composés d'un nombre illimité de facteurs.

REMARQUE II. — Il ne faut pas confondre les expressions y'_w et y' ; elles sont, comme on voit, essentiellement différentes et liées entre elles par la relation (2).

Soient $u, v, w, \ldots$ des fonctions de x, et $f(u, v, w, \ldots)$ une fonction de $u, v, w, \ldots$; f sera par rapport *à* x ce que l'on appelle une *fonction composée*.

THÉORÈME II. — *La dérivée d'une fonction composée est égale à la somme de ses dérivées prises par rapport à chaque fonction dont elle est composée, respectivement multipliées par les dérivées de ces fonctions elles-mêmes.*

En effet, considérons la fonction $f(u, v, w)$, u, v, w désignant ici des fonctions de x ; on aura

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w) - f(u, v, w)}{\Delta x},$$

Δu, Δv, Δw, Δf désignant, comme plus haut, les accroissements de u, v, w, f correspondant à l'accroissement Δx de x. Or on peut écrire comme il suit l'équation précédente :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w) - f(u+\Delta u, v+\Delta v, w)}{\Delta x} \\ &+ \frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v, w) - f(u+\Delta u, v, w)}{\Delta x} \\ &+ \frac{f(u+\Delta u, v, w) - f(u, v, w)}{\Delta x}. \end{aligned}\right.$$

Or la première partie du second membre de cette équation

$$(2)\quad \frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w) - f(u+\Delta u, v+\Delta v, w)}{\Delta x}$$

est l'accroissement que prend $f(u+\Delta u, v+\Delta v, w)$ quand on change w en $w+\Delta w$. Or, en appliquant ici la formule

$$(\alpha)\quad f(x+h) - f(x) = hf'(x+\theta h)$$

démontrée (p. 164), nous pouvons écrire ainsi la quantité (2),

$$(3)\quad f'_w(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\theta\Delta w)\frac{\Delta w}{\Delta x},$$

où θ désigne un nombre compris entre zéro et 1. Pour bien comprendre cette formule, il faut voir dans la notation f'_w une dérivée prise *par rapport à* w, comme si $u+\Delta u$ et $v+\Delta v$ étaient des constantes ; et en effet, dans l'application de la formule (α), on ne suppose pas que la fonction $f(x)$ ne contient pas d'autres variables que l'on pourra ultérieurement regarder comme fonctions de x, et la dérivée qui y entre n'est relative qu'à la quantité recevant l'accroissement h. Ainsi f'_w, pour nous résumer, représente une dérivée prise comme si $u+\Delta u$, $v+\Delta v$ étaient indépendants de w ; la variable est w, et on la remplace par $w+\theta\Delta w$. En mettant le second et le troisième terme de (1) sous une forme analogue à (3), on aura

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'_w(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\theta\Delta w)\frac{\Delta w}{\Delta x}$$
$$+ f'_v(u+\Delta u, v+\theta_1 v, w)\frac{\Delta v}{\Delta x} + f'_u(u+\theta_2\Delta u, v, w)\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

θ_1 et θ_2 désignant comme θ des nombres compris entre zéro et 1. Si alors on suppose que x décroisse indéfiniment, Δu, Δv, Δw tendant vers zéro et $\frac{\Delta w}{\Delta x}$, $\frac{\Delta v}{\Delta x}$, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ vers les limites

w', v', u', il vient, en supposant les fonctions f'_u, f'_v, f'_w continues par rapport à u, v, w,

$$f'_x = f'_w(u,v,w)w' + f'_v(u,v,w)v' + f'_u(u,v,w)u'.$$

Telle est la formule qui fait connaître la dérivée d'une fonction composée; f'_u, rappelons-le, est la dérivée de $f(u,v,w)$ prise en supposant v et w constants et u seul variable (*voir* une application au § VIII).

IV. — THÉORÈME DES FONCTIONS HOMOGÈNES.

La fonction $f(x,y,z)$ de plusieurs variables est dite *homogène et de degré m* quand elle satisfait, quel que soit k, à la relation

$$(1) \qquad f(kx, ky, kz) = k^m f(x,y,z).$$

Ainsi $x^2 + y^2$ est homogène et du second degré, etc. Si nous prenons les dérivées des deux membres de (1) par rapport à k, nous aurons, en appliquant le théorème démontré au paragraphe précédent,

$$(2) \qquad f'_{kx}x + f'_{ky}y + f'_{kz}z = mk^{m-1}f(x,y,z),$$

qui devient, pour $k = 1$,

$$(3) \qquad xf'_x + yf'_y + zf'_z = mf.$$

En prenant encore la dérivée de (2) par rapport à k et en faisant $k = 1$, on trouve (*voir* § XII)

$$x^2 f''_{x^2} + 2yzf''_{yz} + \ldots = m(m-1)f(x,y,z).$$

Nous laissons au lecteur le soin de développer cette démonstration très-facile et de la généraliser.

C'est dans la formule (3) que consiste le théorème des fonctions homogènes, dont l'utilité se manifestera plus loin en Algèbre et dans toute la Géométrie analytique.

V. — DÉRIVÉES DES FONCTIONS IMPLICITES.

Lorsqu'une fonction est définie comme solution d'une ou de plusieurs équations dans lesquelles entre la variable, on dit qu'elle est implicite; elle est explicite dans le cas contraire.

Ainsi y, défini par l'équation

$$x^2 + y^2 = 1,$$

est *implicite;* si l'on tire de là

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2},$$

y devient *explicite*.

Nous allons trouver la dérivée d'une fonction implicite, mais nous ferons l'hypothèse que cette dérivée *existe*, en nous réservant de prouver plus loin l'existence de cette dérivée pour un grand nombre de cas.

1° Considérons d'abord la fonction y définie par la seule équation

$$f(x,y) = 0.$$

Cette équation étant une véritable identité quand y y est censé remplacé par sa valeur en x, ce que nous supposerons, $f(x,y)$ est identiquement nul; sa dérivée est donc nulle, et, *en supposant que y' existe*, la règle des fonctions composées, démontrée § III, donnera

$$(1) \qquad f'_x + y'f'_y = 0,$$

d'où l'on tire

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y}.$$

Pour bien comprendre comment on a obtenu l'équation (1), il faut remarquer que $f(x, y)$ est une fonction composée de x, composée des deux fonctions x et y. Sa dérivée se composera donc de la dérivée f'_x multipliée par x', qui est 1, et de la dérivée f'_y multipliée par y'.

2° Si y était donné par deux équations telles que

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0,$$

on prendrait les dérivées de ces deux équations en appliquant toujours la règle des fonctions composées, et l'on aurait

$$\varphi'_x + \varphi'_y y' + \varphi'_z z' = 0,$$
$$\psi'_x + \psi'_y y' + \psi'_z z' = 0.$$

On aurait ainsi deux équations permettant de calculer y' et z'. Il n'est pas nécessaire de montrer comment on obtiendrait la dérivée de y s'il était défini par un plus grand nombre d'équations.

VI. — DÉRIVÉES DES FONCTIONS SIMPLES.

Dérivée de a^x. — Posons

$$y = a^x;$$

en changeant x en $x + \Delta x$, y devient $y + \Delta y$, et l'on a

$$y + \Delta y = a^{x+\Delta x},$$

d'où l'on tire

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x$$

ou bien

$$\Delta y = a^x(a^{\Delta x} - 1).$$

On tire de là

(1) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Si, dans cette formule, on vient à poser

$$a^{\Delta x} = 1 + \alpha \quad \text{ou} \quad \Delta x = \frac{\log(1 + \alpha)}{\log a},$$

elle devient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x \log a}{\log(1 + \alpha)} \alpha$$

ou bien

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x \log a}{\log(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Si l'on fait alors tendre Δx vers zéro, α tend vers zéro, $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ tend vers e, et par conséquent on a

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = a^x \log a.$$

Remarque. — La dérivée de a^x étant $a^x \log a$, celle de e^x est e^x.

Dérivée de $\log x$. — En posant

$$y = \log x,$$

on a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log(x + \Delta x) - \log x}{\Delta x},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \log\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}},$$

ou enfin

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \log\left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]^{\frac{1}{x}};$$

si l'on fait alors tendre Δx vers zéro, la limite de

$\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]^{\frac{1}{x}}$ sera $e^{\frac{1}{x}}$, et l'on aura

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \log e^{\frac{1}{x}}$$

ou bien

$$y' = \frac{1}{x}\log e.$$

Si le logarithme est un logarithme népérien, on aura simplement

$$y' = \frac{1}{x}.$$

Dérivée de x^m. — Si m est entier et positif, la dérivée de x^m est la limite vers laquelle tend le rapport

$$\frac{(x+\Delta x)^m - x^m}{\Delta x}$$

ou bien

$$mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}\Delta x + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$mx^{m-1}.$$

Si m est négatif, mais entier, on posera $x^m = x^{-n} = 1 : x^n$ et la règle de la page 169 (l. 25) donnera $-nx^{-n-1} = mx^{m-1}$.

Si m n'est pas entier, il faut supposer x positif, soit :

$$y = x^m,$$

d'où

$$\log y = m \log x;$$

si l'on donne à x l'accroissement infiniment petit Δx, la fonction x^m étant continue, y prendra l'accroissement infiniment petit Δy, et l'on aura

$$\frac{\Delta \log y}{\Delta x} = \frac{m\,\Delta \log x}{\Delta x} \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta \log y}{\Delta y}\,\frac{\Delta y}{\Delta x} = m\,\frac{\Delta \log x}{\Delta x}$$

ou

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m\,\frac{\Delta \log x}{\Delta x} : \frac{\Delta \log y}{\Delta y};$$

si l'on fait tendre Δx vers zéro, on a

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{ou} \quad y' = m(\log x)'_x : (\log y)'_y = \frac{m}{x}y = mx^{m-1},$$

comme dans le cas où m est entier et positif.

Corollaire I. — La dérivée de $\sqrt[m]{x}$ est égale à celle de $x^{\frac{1}{m}}$, c'est-à-dire égale à $\frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}$ ou à $\frac{1}{m}\sqrt[m]{\frac{1}{x^{m-1}}}$.

Corollaire II. — En particulier, la dérivée de $\sqrt{x}$ sera $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Corollaire III. — Si u désigne une fonction de x, la dérivée de u^m s'obtiendra en prenant la dérivée de u^m par rapport à u, ce qui donnera mu^{m-1}, et en la multipliant par la dérivée u' de u, en sorte que (p. 171)

$$(u^m)' = mu^{m-1}u'.$$

Corollaire IV. — La dérivée de $u^{\frac{1}{2}}$ ou de $\sqrt{u}$ est $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

VII. — DÉRIVÉES DES FONCTIONS CIRCULAIRES.

Dérivée du sinus. — Posons

$$y = \sin x;$$

on a, d'après la définition même de la dérivée,

$$y' = \lim \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x},$$

c'est-à-dire

$$y' = \lim \frac{2 \sin \frac{1}{2} \Delta x \cos \left(x + \frac{1}{2} \Delta x\right)}{\Delta x}$$

ou

$$y' = \lim \left[\frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} \cos \left(x + \frac{1}{2} \Delta x\right) \right];$$

mais, si l'on observe que le rapport du sinus à l'arc a pour limite l'unité quand l'arc tend vers zéro, l'équation précédente devient, pour $\Delta x = 0$,

$$y' = \cos x.$$

Dérivée du cosinus. — La dérivée de $\cos x$ se trouve de la même manière que celle de $\sin x$; cependant on peut y arriver plus simplement en observant que

$$\cos x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

$\sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ est une fonction de fonction. Pour obtenir sa dérivée par rapport à x, il faut d'abord la prendre par rapport à $\frac{\pi}{2} - x$, ce qui donne $\cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ou $\sin x$, puis multiplier ce résultat par la dérivée de la somme $\frac{\pi}{2} - x$, qui est -1; on a donc

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Dérivée de la tangente. — On a

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

et, par conséquent, pour trouver la dérivée de $\operatorname{tang} x$, il faut prendre la dérivée d'un quotient; en appliquant la règle donnée (p. 169), on trouve

$$(\operatorname{tang} x)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x},$$

c'est-à-dire

$$(\operatorname{tang} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Dérivée de la cotangente, etc. — On trouve ainsi

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$(\operatorname{séc} x)' = \frac{\sin x}{\cos^2 x},$$

$$(\operatorname{coséc} x)' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

Dérivée de $\arcsin x$. — Si l'on pose

$$y = \arcsin x,$$

on en déduit

(1) $$\sin y = x;$$

si l'on prend les dérivées par rapport à x des deux membres de cette équation, il vient, en observant que $\sin y$ est une fonction de fonction,

$$y' \cos y = 1$$

ou bien

$$y' = \frac{1}{\cos y},$$

et, en remplaçant $\cos y$ par sa valeur tirée de (1),

$$y' = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 - x^2}};$$

le signe $+$ convient au cas où $\cos y$ est positif et le signe $-$ au cas où il est négatif, ce qui revient à dire que l'on aura

$$y' = + \text{ ou } - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

suivant que y sera compris entre $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ et $2k\pi + \frac{\pi}{2}$, ou entre $(2k+1)\pi - \frac{\pi}{2}$ et $(2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}$.

Cette démonstration suppose que l'on sait à l'avance que y a une dérivée ou que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ a une limite, mais ce fait est évident, puisque $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ a une limite qui est la dérivée $x'_y = \cos y$.

Dérivée de $\operatorname{arc}\cos x$. — On peut poser

$$\operatorname{arc}\cos x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}\sin x;$$

on déduit de là que les dérivées de $\operatorname{arc}\sin x$ et $\operatorname{arc}\cos x$ sont égales et de signes contraires.

Dérivée de $\operatorname{arc}\operatorname{tang} x$. — Si l'on pose

$$y = \operatorname{arc}\operatorname{tang} x,$$

on a

$$\operatorname{tang} y = x,$$

et, en prenant les dérivées des deux membres de cette équation,

$$\frac{y'}{\cos^2 y} = 1,$$

d'où l'on tire

$$y' = \cos^2 y,$$

c'est-à-dire

$$y' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

VIII. — APPLICATION DES PRINCIPES PRÉCÉDENTS.

Nous pouvons maintenant prendre les dérivées de toutes les fonctions qui sont jusqu'ici entrées dans nos calculs; nous allons le montrer sur quelques exemples.

Dérivée de x^x. — La fonction x^x est composée; pour bien le comprendre, considérons la fonction u^v, u et v désignant deux fonctions de x. Cette dernière expression est de la forme $f(u, v)$; sa dérivée sera donc de la forme

$$f'_u u'_x + f'_v v'_x,$$

c'est-à-dire

$$vu^{v-1} u' + u^v \log u v';$$

si l'on prend $u = v = x$, on a la dérivée de x^x, qui est ainsi

$$x^x (1 + \log x).$$

Dérivée de $\operatorname{arc}\operatorname{tang} \frac{a + x}{1 - ax}$. — Cette expression est une fonction de fonction; pour en obtenir la dérivée, il faut regarder $\frac{a + x}{1 - ax}$ comme seule variable, prendre la dérivée dans cette hypothèse, ce qui donne

$$1 : \left[1 + \left(\frac{a + x}{1 - ax}\right)^2\right],$$

et multiplier le résultat par la dérivée de $\frac{a + x}{1 - ax}$, qui est

$$\frac{1 - ax + a(a + x)}{(1 - ax)^2} \quad \text{ou} \quad \frac{1 + a^2}{(1 - ax)^2};$$

on obtient alors

$$\frac{1+a^2}{(1-ax)^2}:\left[1+\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)^2\right]$$

ou bien

$$\frac{1+a^2}{1+a^2+x^2+a^2x^2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{1+x^2},$$

résultat auquel on aurait pu arriver immédiatement en observant que

$$\text{arc tang}\,\frac{a+x}{1-ax}=\text{arc tang}\,a+\text{arc tang}\,x.$$

Dérivée de $\log(x+\sqrt{1+x^2})$. — Cette fonction peut être considérée comme fonction de fonction; en regardant $x+\sqrt{1+x^2}$ comme variable, la dérivée de cette fonction est

$$\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}.$$

Mais, comme x est la variable, il faut multiplier cette quantité par la dérivée de $x+\sqrt{1+x^2}$, c'est-à-dire par $1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, ce qui donne

$$\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}\quad\text{ou}\quad\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

IX. — DÉRIVÉES DES FONCTIONS DE VARIABLE IMAGINAIRE.

Si l'on appelle fonction de $x+y\sqrt{-1}$ toute expression de la forme $X+Y\sqrt{-1}$, où X et Y sont fonctions de x et y,

une fonction de x et y n'aura pas en général de dérivée, et l'on ne considère en Analyse que les fonctions admettant une dérivée. Pour faire comprendre cette espèce de paradoxe, observons que la dérivée de $X+Y\sqrt{-1}$ est la limite de

$$(1)\qquad \frac{\Delta X+\Delta Y\sqrt{-1}}{\Delta x+\Delta y\sqrt{-1}}$$

quand x et y tendent vers zéro. Or Δy et Δx peuvent tendre vers zéro en suivant des lois très diverses. De là une infinité de limites différentes pour le rapport considéré. Supposons, pour fixer les idées, x et y fonctions d'une variable t, qui pourra être x si l'on veut; le rapport (1) pourra s'écrire

$$\left(\frac{\Delta X}{\Delta t}+\frac{\Delta Y}{\Delta t}\sqrt{-1}\right):\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\Delta y}{\Delta t}\sqrt{-1}\right),$$

ou, en passant aux limites,

$$(2)\qquad \frac{X'_t+Y'_t\sqrt{-1}}{x'_t+y'_t\sqrt{-1}}=\frac{X'_x x'_t+X'_y y'_t+\sqrt{-1}\,(Y'_x x'_t+Y'_y y'_t)}{x'_t+y'_t\sqrt{-1}}.$$

La dérivée que nous trouvons ainsi dépend, comme l'on voit, du rapport $\frac{x'_t}{y'_t}$, et, pour qu'elle soit indépendante de ce rapport, en d'autres termes, pour que la dérivée de $X+Y\sqrt{-1}$ ne dépende pas du mode de variation de x et de y, il faut que les coefficients de x'_t et y'_t dans la fraction (2) soient proportionnels, ce qui donne

$$\frac{X'_x+\sqrt{-1}\,Y'_x}{1}=\frac{X''_y+\sqrt{-1}\,Y'_y}{\sqrt{-1}},$$

ou bien, en égalant les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$,

$$X_x=Y'_y,\quad X'_y=-Y'_x.$$

Ces relations ne seront pas, en général, satisfaites quand on prendra X et Y au hasard.

Quoi qu'il en soit, parmi les règles que nous avons données pour prendre la dérivée d'une fonction, il en est qui ne supposent pas la variable réelle; telles sont les règles relatives aux sommes, aux produits, aux quotients, aux fonctions de fonctions et aux fonctions entières. La règle des fonctions composées peut se généraliser ainsi :

Soit $f(u, v)$ une fonction composée de $x+y\sqrt{-1}$. Si u et v ont une dérivée unique et si de plus f'_u et f'_v sont bien déterminés, on supposera x et y fonctions de t, et l'on aura pour dérivée de f l'expression $\dfrac{f'_t}{x'_t+y'_t\sqrt{-1}}$, où la variable t est réelle. On a ainsi

$$\frac{f'_u u'_t + f'_v v'_t}{x'_t+y'_t\sqrt{-1}}.$$

Mais $\dfrac{u'_t}{x'_t+y'_t\sqrt{-1}}$ est la dérivée u' de u relative à $x+y\sqrt{-1}$; donc la dérivée cherchée de f est bien $f'_u u' + f'_v v'$ comme quand la variable est réelle.

La dérivée de $e^{x+y\sqrt{-1}}$ s'obtient en observant que cette fonction est égale à $e^x(\cos y+\sqrt{-1}\sin y)$. Supposons y et x fonctions de t et prenons la dérivée; nous aurons

$$\begin{aligned} &e^x x'(\cos y+\sqrt{-1}\sin y)+e^x(-\sin y+\sqrt{-1}\cos y)y' \\ &= e^x(\cos y+\sqrt{-1}\sin y)(x'+y'\sqrt{-1}) \\ &= e^{x+y\sqrt{-1}}(x'+y'\sqrt{-1}). \end{aligned}$$

En divisant par $x'+y'\sqrt{-1}$, on trouve la dérivée unique $e^{x+y\sqrt{-1}}$; la dérivée de $\log(x+y\sqrt{-1})$ s'en déduit facilement, et l'on reconnaît qu'elle est $\dfrac{1}{x+y\sqrt{-1}}$.

Il reste à montrer que la dérivée de $\sin x$ est toujours $\cos x$. On a

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}};$$

on en conclut

$$(\sin x)' = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = \cos x.$$

On verrait de même que la dérivée de $\cos x$ est $-\sin x$ (*).

X. — PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS DÉRIVÉES.

Théorème I. — *Toute fonction $f(x)$ réelle et continue entre les limites $x=a$ et $x=b$ de sa variable passe forcément au moins une fois par la valeur u comprise entre les valeurs $f(a)$ et $f(b)$ qu'elle prend pour les valeurs a et b de sa variable, et, en particulier, si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, l'équation*

$$f(x)=0$$

admet au moins une racine comprise entre a et b.

Ce théorème a déjà été démontré à la page 30 de ce volume.

Théorème II. — 1° *Une fonction réelle et continue dont la dérivée est positive croît avec sa variable*; 2° *une fonc-*

(*) On ne fait pas généralement dans les Cours les remarques que nous venons de faire, et cependant on ne se gêne en aucune façon, en Géométrie analytique, pour prendre des dérivées quand la variable est imaginaire; on a bien soin, il est vrai, de ne pas attirer l'attention de l'élève sur ce que la variable peut ne pas être réelle, et voilà comment l'étude des Mathématiques, qui devrait servir à rendre l'esprit juste, peut contribuer à *fausser le jugement.*

tion réelle et continue dont la dérivée est négative décroît lorsque sa variable croît.

En effet, considérons la fonction réelle $f(x)$; supposons $f'(x)$ positif entre les limites a et b de la variable x; on aura en général (p. 165)

$$f(x+h)-f(x)=h[f'(x)+\varepsilon],$$

ε désignant une quantité qui tend vers zéro avec h. Or, supposons x et $x+h$ compris entre les limites a et b; ε, ayant pour limite zéro, pourra être pris moindre en valeur absolue que $f'(x)$. Si donc nous supposons l'accroissement h positif, le second membre de la formule précédente sera de même signe que $f'(x)$; donc enfin

$$f(x+h)-f(x)$$

sera de même signe que $f'(x)$, ce qui revient à dire que $f(x)$ croît avec x quand sa dérivée est positive et décroît quand x croît dans le cas contraire. C. Q. F. D.

Théorème III. — *Une fonction $f(x)$ réelle et continue passe ordinairement par un maximum ou un minimum lorsque sa dérivée s'annule.*

En effet, supposons la fonction $f(x)$ continue ainsi que ses dérivées pour $x=a$; si l'on a $f'(a)=0$, trois cas peuvent se présenter :

1° $f'(x)$, en s'annulant pour $x=a$, passe du négatif au positif; cette fonction est donc croissante; donc sa dérivée $f''(x)$ doit être positive ou nulle pour $x=a$, car, si elle était négative, $f'(x)$ décroîtrait en faisant croître x (théorème II). Mais $f'(x)$ ayant changé de signe pour $x=a$, en passant du négatif au positif, $f(x)$ a dû être décroissante pour les valeurs de x moindres que a et croissante

pour les valeurs de x plus grandes que a; elle a donc dû passer par un minimum pour $x=a$.

2° Si $f'(x)$, en s'annulant, passe du positif au négatif, cette fonction est décroissante, et, par suite, sa dérivée $f''(x)$ est négative ou nulle pour $x=a$; en second lieu, $f'(x)$ passant du positif au négatif, $f(x)$ passe, pour $x=a$, d'une période croissante à une période décroissante, c'est-à-dire que $f(a)$ est un maximum de $f(x)$.

3° Si $f'(x)$ ne change pas de signe en s'annulant, cette fonction croît pour décroître ensuite ou décroît pour croître ensuite lorsque x passe par la valeur a; donc alors $f''(x)$ doit changer de signe pour $x=a$; donc enfin, dans ce cas, $f''(a)$ est nul.

Ainsi, en résumé, si l'on a $f'(a)=0$ et

$$f''(a)>0, f(a) \text{ est un minimum de } f(x),$$
$$f''(a)<0, f(a) \text{ est un maximum de } f(x).$$

Lorsque $f'(a)$ et $f''(a)$ sont nuls à la fois, trois cas peuvent se présenter comme tout à l'heure :

1° Si $f''(x)$ passe du positif au négatif, cette fonction décroît, et alors $f'''(a)$ est nul ou négatif; mais dans ce cas $f'(a)$ est un maximum de $f'(x)$, et $f(a)$ n'est ni un maximum ni un minimum; 2° si $f''(x)$ passe du négatif au positif, $f'''(a)$ est nul ou positif, $f(a)$ est un minimum de $f'(x)$ et $f(a)$ n'est ni maximum ni minimum; 3° si $f''(x)$ conserve le même signe en s'annulant, $f'(a)$ n'est ni un maximum ni un minimum, et il peut arriver que $f(a)$ soit maximum ou minimum.

Nous ne pousserons pas plus loin cette discussion; on voit que

$$f'(x)=0 \tag{1}$$

fournira *des* valeurs de x qui rendent $f(x)$ maximum ou minimum toutes les fois que $f''(x)$ ne s'annulera pas en même temps que $f(x)$; je dis *des* valeurs, parce qu'il ne suffit pas de résoudre l'équation (1) pour en déduire tous les maxima ou minima de $f(x)$.

XI. — THÉORÈME DE TAYLOR.

Considérons un polynôme entier

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

Si l'on change x en $x+h$, on a

$$F(x+h) = a_0 + a_1(x+h) + a_2(x+h)^2 + \ldots + a_n(x+h)^n,$$

et, en développant chaque parenthèse par la formule du binôme, puis en ordonnant par rapport à h,

$$\begin{aligned} F(x+h) = {} & a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \\ & + \frac{h}{1}(a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1}) \\ & + \frac{h^2}{1.2}[1.2 a_2 + 2.3 a_3 x + \ldots + n(n-1) a_n x^{n-2}] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} 1.2.3\ldots n a_n. \end{aligned}$$

Dans cette formule, le terme indépendant de h est $F(x)$, le coefficient de $\frac{h}{1}$ est $F'(x)$, le coefficient de $\frac{h^2}{1.2}$ est la dérivée de $F'(x)$, que l'on désigne par $F''(x)$, et ainsi de suite. On peut donc écrire la formule

$$F(x+h) = F(x) + \frac{h}{1}F'(x) + \frac{h^2}{1.2}F''(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2.3\ldots n}F^n(x),$$

qui fait connaître l'accroissement $F(x+h) - F(x)$ d'une

fonction entière, correspondant à l'accroissement h de sa variable.

Nous allons essayer de généraliser cette formule; à cet effet, désignons par Ph^i le terme qu'il faudrait ajouter au second membre pour qu'elle devînt exacte lorsque la fonction $F(z)$ cesse d'être entière. Le terme additionnel pourra toujours être mis sous la forme que nous lui avons assignée Ph^i, i désignant un entier, si nous supposons tous les termes de la formule précédente finis. Nous poserons donc

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} & F(x+h) - F(x) - \frac{h}{1}F'(x) - \frac{h^2}{1.2}F''(x) - \ldots \\ & \qquad - \frac{h^n}{1.2\ldots n}F^n(x) - h^i P = 0 \end{aligned} \right.$$

Cette formule est une identité : en d'autres termes, P a la valeur que l'on en déduirait en résolvant cette équation comme si P était une inconnue entrant au premier degré. Nous supposerons que la fonction $F(z)$ reste finie et continue, ainsi que ses n premières dérivées, quand z varie de x à $x+h$; quant à la dérivée $F^{n+1}(z)$, nous supposerons simplement qu'elle existe et qu'elle ait entre les limites en question une valeur *unique*. Alors la fonction suivante, où l'on a fait $X = x + h$,

$$\begin{aligned} \varphi(z) = {} & F(X) - F(z) - \frac{X-z}{1}F'(z) \\ & - \frac{(X-z)^2}{1.2}F''(z) - \ldots - \frac{(X-z)^n}{1.2.3\ldots n}F^n(z) - (X-z)^i P, \end{aligned}$$

sera finie et continue entre les limites $z = x$ et

$$z = x + h = X;$$

sa dérivée n'aura qu'une valeur bien déterminée. Or $\varphi(X) = 0$, et, si l'on suppose $X = x + h$, $\varphi(x)$ sera nul en vertu de l'équation (1).

Donc, en vertu du théorème II, démontré à la page 163, la dérivée de $\varphi(z)$ doit s'annuler pour une valeur de z comprise entre x et $x+h$, valeur que l'on peut représenter par $x+\theta h$, θ étant compris entre zéro et 1. Or la dérivée de $\varphi(z)$ est donnée, réductions faites, par la formule

$$\varphi'(z) = -\frac{(X-z)^n}{1.2.3\ldots n}F^{n+1}(z) + i(X-z)^{i-1}P.$$

Si l'on y fait $z = x+\theta h$, on a, d'après la remarque précédente,

$$0 = -\frac{(X-x-\theta h)^n}{1.2.3\ldots n}F^{n+1}(x+\theta h) + i(X-x-\theta h)^{i-1}P,$$

d'où l'on tire la valeur de P suivante, dans laquelle on a remplacé X par $x+h$,

$$P = \frac{h^{n-i+1}(1-\theta)^{n-i+1}}{i.1.2.3\ldots n}F^{n+1}(x+\theta h);$$

si l'on porte cette valeur de P dans la formule (1), il vient, en faisant passer dans le second membre tous les termes négatifs,

$$F(x+h) = F(x) + \frac{h}{1}F'(x) + \frac{h^2}{1.2}F''(x) + \ldots$$
$$+ \frac{h^n}{1.2\ldots n}F^n(x) + \frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n-i+1}}{i.1.2.3\ldots n}F^n(x+\theta h).$$

Le dernier terme porte le nom de *reste*; on lui attribue généralement deux formes : l'une correspond à $i = n+1$; elle conduit à la formule suivante, due à Lagrange et indiquée par d'Alembert :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} F(x+h) &= F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{1.2}F''(x) + \ldots \\ &+ \frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}F^{n+1}(x+\theta h). \end{aligned}\right.$$

En faisant $i = 1$, on a la formule suivante, due à Cauchy :

$$F(x+h) = F(x) + \frac{h}{1}F'(x) + \frac{h^2}{1.2}F''(x) + \ldots$$
$$+ \frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{1.2.3\ldots n}F^{n+1}(x+\theta h).$$

La formule (2) est celle dont on fait le plus fréquemment usage; on peut lui donner une autre forme, très-utile dans les applications, quand $F^{n+1}(x)$ est continue. On a, en effet,

$$F^{n+1}(x+\theta h) = F^{n+1}(x) + \varepsilon,$$

ε désignant une quantité qui s'annule avec h, et, par suite, la formule (2) donnera

$$F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{1.2}F''(x) + \ldots$$
$$+ \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}F^{n+1}(x) + \varepsilon h^{n+1},$$

et, pour que cette formule ait lieu, il suffit que $F(x)$ soit continu, ainsi que ses $n+1$ premières dérivées dans le voisinage de x.

XII. — EXTENSION AU CAS DE PLUSIEURS VARIABLES.

THÉORÈME. — *Soient $f(x, y)$ une fonction de x et de y, f'_x sa dérivée prise en regardant x comme seule variable et y comme une constante, f'_y sa dérivée prise par rapport à y en regardant x comme une constante; soient f''_{x^2} la dérivée prise par rapport à x de f'_x, f''_{xy} la dérivée de f'_x prise par rapport à y, f''_{yx} la dérivée de f'_y prise par rapport à x et f''_{y^2} la dérivée de f'_y par rapport à y; on a*

$$f''_{xy} = f''_{yx}.$$

En effet, on a, par le théorème de Taylor,

$$(1)\quad \begin{cases} f(x+h,y)=f(x,y)+hf'_x(x,y) \\ \qquad +\dfrac{h^2}{1.2}f''_{x^2}(x,y)+h^2\varepsilon, \end{cases}$$

et ceci suppose simplement $f(x,y)$ continu dans le voisinage de x et y, ainsi que ses dérivées premières et secondes prises par rapport à x; s'il en est de même des dérivées prises par rapport à x et y ou par rapport à y deux fois, on aura

$$(2)\quad \begin{cases} f(x,y+k)=f(x,y)+kf'_y(x,y)+\dfrac{k^2}{1.2}f''_{y^2}+k^2\alpha, \\ f'_x(x,y+k)=f'_x(x,y)+kf''_{xy}+k\beta, \\ f''_{x^2}(x,y+k)=f''_{x^2}(x,y)+\gamma, \end{cases}$$

ε, α, β, γ désignant des quantités qui tendent vers zéro quand h et k tendent vers zéro. Si dans la formule (1) on change y en $y+k$, elle devient

$$f(x+h,y+k)=f(x,y+k)+hf'_x(x,y+k)$$
$$+\frac{h^2}{1.2}f''_{x^2}(x,y+k)+h^2\varepsilon_1,$$

ε_1 jouissant toujours de la propriété de tendre vers zéro pour h et $k=0$; en vertu des formules (2), cette dernière s'écrit

$$(3)\quad \begin{cases} f(x+h,y+k)=f+(hf'_x+kf'_y) \\ \qquad +\dfrac{1}{2}(h^2f''_{x^2}+2hkf''_{xy}+k^2f''_{y^2})+\Omega, \end{cases}$$

Ω désignant un polynôme du deuxième degré en h et k, dont les coefficients α, β, γ, ε deviennent nuls pour $h=0$, $k=0$, et qui, par suite, tend vers zéro lors même qu'on

l'a divisé par hk, pourvu que le rapport $\frac{k}{h}$ reste fini. Or, on aurait trouvé de la même façon, en permutant l'ordre des opérations relatives à h et k,

$$f(x+h,y+k)=f+(hf'_x+kf'_y)$$
$$+\frac{1}{2}(h^2f''_{x^2}+2hkf''_{yx}+k^2f''_{y^2})+\Omega_1,$$

Ω_1 étant un polynôme de même espèce que Ω.

Comparant cette formule avec (3), on a

$$\frac{hk}{2}f''_{xy}+\Omega=\frac{hk}{2}f''_{yx}+\Omega_1$$

ou bien

$$f''_{xy}=f''_{yx}+2\frac{\Omega_1-\Omega}{hk}.$$

D'après ce que nous avons dit de Ω et Ω_1, si h tend vers zéro, le rapport $\frac{k}{h}$ restant arbitraire, mais fini, il vient à la limite

$$f''_{xy}=f''_{yx}.$$

On peut donc intervertir l'ordre de deux dérivations successives sans changer le résultat des opérations; mais ceci suppose la continuité des dérivées auxquelles on parvient et de toutes celles qui précèdent ou qui sont de même ordre. Si l'on avait plusieurs dérivées successives à prendre par rapport aux mêmes variables x, y, ou même à des variables différentes z, t, u, ..., on pourrait intervertir l'ordre des opérations. La démonstration de cette proposition est calquée sur celle que l'on donne en Arithmétique pour prouver qu'un produit est indépendant de l'ordre de ses facteurs.

Ceci justifie la notation

$$f^{\alpha+\beta+\gamma}_{x^\alpha y^\beta z^\gamma},$$

pour désigner le résultat obtenu en prenant la dérivée de f un nombre de fois égal à $\alpha+\beta+\gamma$, à savoir α fois par rapport à x, β fois par rapport à y, γ fois par rapport à z.

Théorème de Taylor. — Considérons une fonction de plusieurs variables, $f(x, y)$ par exemple ; la fonction

$$f(x+ht, y+kt)$$

pourra être considérée comme une fonction de la seule variable t, que nous appellerons pour un moment $\varphi(t)$. La formule de Taylor, appliquée à la fonction $\varphi(t)$, donne

$$\varphi(\omega+t) = \varphi(\omega) + t\varphi'(\omega) + \ldots + \frac{t^n}{1.2.3\ldots n}\varphi^n(\omega) + \varepsilon t^{n+1},$$

et, pour $\omega = 0$,

$$(1)\quad \varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \ldots + \frac{t^n}{1.2.3\ldots n}\varphi^n(0) + \varepsilon_1 t^{n+1},$$

ε et ε_1 désignant des nombres finis pour $t = 0$ et que nous avons appris à écrire sous diverses formes.

Calculons $\varphi'(\omega)$, $\varphi''(\omega)$, ... ; nous avons

$$\varphi(\omega) = f(x+h\omega, y+k\omega),$$

d'où, par le théorème des fonctions composées (p. 172),

$$\varphi'(\omega) = f'_x h + f'_y k,$$

où nous écrivons x et y en indice au lieu de $x+h\omega$ et $y+k\omega$, uniquement en vue de simplifier l'écriture. Soit en général à prendre la dérivée par rapport à ω de $\mathrm{G}f^{\alpha+\beta}_{x^\alpha y^\beta}$, G désignant un facteur indépendant de ω ; le résultat sera

$$\mathrm{G}\left(f^{\alpha+\beta+1}_{x^{\alpha+1}y^\beta}h + f^{\alpha+\beta+1}_{x^\alpha y^{\beta+1}}k\right),$$

c'est-à-dire le même que si l'on avait multiplié le terme

primitif par $f'_x h + f'_y k$ et traité les indices comme des facteurs de la lettre f ; on aura donc symboliquement et en corrigeant les résultats, comme nous l'avons dit,

$$\varphi''(\omega) = (f'_x h + f'_y k)^2,$$

et en général

$$\varphi^n(\omega) = (f'_x h + f'_y k)^n.$$

Si l'on fait $\omega = 0$, le second membre de cette formule ne change pas, car nous avons écrit x au lieu de $x+\omega h$, ..., et l'on a

$$\varphi^n(0) = (f'_x h + f'_y k)^n,$$

cette fois avec une notation plus régulière, mais en attachant toujours à l'exposant n le même sens que tout à l'heure ; on a alors, au lieu de la formule (1), en remplaçant $\varphi(t)$, $\varphi(0)$, ... par leurs valeurs et t par l'unité,

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \sum_1^n \frac{1}{1.2.3\ldots n}(f'_x h + f'_y k)^n + \mathrm{E},$$

E désignant une quantité nulle avec h et k, de la forme

$$\frac{1}{1.2\ldots(n+1)}(f'_{x+\theta h}h + f'_{y+\theta k}k)^{n+1},$$

par exemple si les dérivées de l'ordre $n+1$ existent, et qui peut toujours être remplacée par un polynôme de degré n en h et k, dont les coefficients sont nuls pour $h = 0$, $k = 0$ si les dérivées d'ordre n sont continues ainsi que les précédentes.

XIII. — SUR LA CONTINUITÉ DES FONCTIONS IMPLICITES.

Il va sans dire que la formule de Taylor s'applique à un nombre quelconque de variables.

Lorsque nous avons démontré la règle qui permet de trouver la dérivée de la fonction y définie par l'équation (p. 175) $f(x,y)=0$, nous avons admis que y avait une dérivée ; nous allons prouver que :

Si $f(x,y)$ est continue par rapport à x et à y quand x et y varient dans le voisinage des valeurs x_0 et y_0, y_0 désignant une racine simple de $f(x_0,y_0)=0$ telle que dans le voisinage de x_0 cette équation n'ait pas d'autre racine, 1° y est fonction continue de x pour des valeurs de x voisines de x_0, 2° si, en outre, f'_x et f'_y existent et si f'_y n'est pas nul, y aura une dérivée.

En effet, k désignant un nombre très petit, entre y_0-k et y_0+k, il n'y aura qu'une racine de $f(x_0,y)=0$; $f(x_0,y_0+k)$ et $f(x_0,y_0-k)$ seront de signes contraires ; mais, la fonction f étant continue, on pourra toujours disposer de h de telle sorte que $f(x_0+h,\ y_0+k)$ soit de même signe que $f(x_0,y_0+k)$ et que $f(x_0+h,\ y_0-k)$ soit de même signe que $f(x_0,y_0-k)$. Mais alors

$$f(x_0+h,\ y_0+k) \quad \text{et} \quad f(x_0+h,\ y_0-k)$$

seront de signes contraires, et entre y_0-k et y_0+k il y aura une racine de $f(x_0+h,\ y)=0$; donc cette racine sera aussi voisine que l'on voudra de y_0 quand h sera suffisamment petit ; donc enfin, si dans le voisinage de y_0 il n'y a pas deux racines de $f(x_0,y_0)=0$, y sera une fonction continue de x quand x et y seront voisins de x_0 et y_0.

Cela posé, la formule de Taylor donne

$$\begin{aligned} f(x+h,y+k)-f(x,y) &= hf'_x\,(x+\theta h,y+\theta k) \\ &\quad + kf'_y\,(x+\theta h,y+\theta k). \end{aligned}$$

Si l'on suppose $f(x+h,\ y+k)=0$, $f(x,y)=0$, on en tire

$$\frac{k}{h}=-\frac{f'_x\,(x+\theta h,y+\theta k)}{f'_y\,(x+\theta h,y+\theta k)};$$

si alors f'_y n'est pas nul en même temps que f, on aura, pour $h=0$, $k=0$, et

$$\lim\frac{k}{h}=-\frac{f'_x}{f'_y},$$

ce qui démontre rigoureusement la règle donnée plus haut.

XIV. — DES EXPRESSIONS QUI SE PRÉSENTENT SOUS LES FORMES $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\times\infty$, ETC.

Certaines fonctions se présentent pour une valeur particulière de la variable sous la forme $\frac{0}{0}$; cela tient souvent à la présence d'un facteur commun qui entre au numérateur et au dénominateur de la fraction qui constitue la fonction en question, facteur qui s'annule pour la valeur particulière de la variable qui donne à la fonction la forme illusoire $\frac{0}{0}$. Tel est le cas de la fonction

$$\frac{x^3-a^3}{x^2-a^2}.$$

Cette fonction prend la forme $\frac{0}{0}$ quand on suppose $x=a$; mais, comme on peut supprimer aux deux termes le facteur commun $x-a$, on a

$$\lim\frac{x^3-a^3}{x^2-a^2}=\lim\frac{x^2+ax+a^2}{x+a}=\frac{3}{2}a.$$

$\frac{3}{2}a$ est ce qu'on appelle la *vraie valeur* de la fonction

$$\frac{x^3-a^3}{x^2-a^2}$$

pour $x = a$. En général, si $f(x)$ se présente sous une forme illusoire pour $x = a$, on appellera *valeur de $f(x)$ pour $x = a$* et l'on désignera par la notation $f(a)$ la limite vers laquelle tend $f(x)$ lorsque x tend vers a.

La théorie des dérivées fournit un moyen assez général et assez rapide pour trouver la valeur d'une expression qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$; il repose sur la formule

$$(1) \qquad \frac{f(a+h)-f(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)} = \frac{f'(a+\theta h)}{\varphi'(a+\theta h)}.$$

Pour démontrer cette formule, où θ a la même valeur au numérateur et au dénominateur, on pose

$$(2) \qquad \frac{f(a+h)-f(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)} = k,$$

d'où l'on tire

$$f(a+h) - k\varphi(a+h) - [f(a) - k\varphi(a)] = 0.$$

Si l'on applique à la fonction $f(x) - k\varphi(x)$ la formule de Taylor, on a

$$f(a+h) - k\varphi(a+h) - [f(a) - k\varphi(a)]$$
$$= h[f'(a+\theta h) - k\varphi'(a+\theta h)];$$

or, le premier membre étant nul en vertu de la formule précédente, on a

$$f'(a+\theta h) - k\varphi'(a+\theta h) = 0,$$

d'où l'on tire

$$k = \frac{f'(a+\theta h)}{\varphi'(a+\theta h)}.$$

En éliminant k entre cette formule et (2) par comparaison, on obtient la formule (1), qu'il fallait démontrer.

Lorsque $f(a)$ et $\varphi(a)$ sont nuls, la formule (1) devient

$$\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \frac{f'(a+\theta h)}{\varphi'(a+\theta h)};$$

si alors on fait tendre h vers zéro, cette formule pourra s'écrire

$$\lim \frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \lim \frac{f'(a+\theta h)}{\varphi'(a+\theta h)} \quad \text{pour } h = 0,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \quad \text{pour } x = a.$$

Donc :

1° Si $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ pour $x = a$ a une limite bien connue, si par exemple $f'(a)$ et $\varphi'(a)$ ont des valeurs déterminées, la limite de $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ sera connue et égale à $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$.

2° Si, ce qui arrive souvent, $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ se présente aussi sous la forme $\frac{0}{0}$, on lui appliquera la règle que l'on vient d'appliquer à $\frac{f'(x)}{\varphi(x)}$, et l'on aura

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim \frac{f''(x)}{\varphi''(x)},$$

et ainsi de suite.

3° S'il arrive que $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ n'ait pas de limite, parce que $\varphi'(a) = 0$ et que $f'(a) \gtrless 0$, $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ n'aura pas de limite non plus. Ainsi :

Règle. — *Pour trouver la vraie valeur d'une expression qui se présente sous la forme* $\frac{0}{0}$, *on peut en général remplacer le numérateur et le dénominateur par leurs dérivées relatives au paramètre variable en vertu duquel la fraction devient* $\frac{0}{0}$.

Cette règle, due à L'Hôpital, n'est pas sans exception. En effet, elle s'appuie sur la formule de Taylor et elle tombera en défaut quand $f(x)$ et $\varphi(x)$ ne seront pas développables par cette formule pour $x = a$. Ainsi, en particulier, la démonstration ne s'applique pas au cas où $a = \infty$; mais alors, en posant $x = \frac{1}{z}$, on aura

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} \text{ (pour } x = \infty) = \lim \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)} \text{ (pour } z = 0),$$

et nous rentrerons dans le cas étudié plus haut; d'ailleurs

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)} = \lim \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)},$$

d'où

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)};$$

la règle démontrée plus haut subsiste donc encore.

Les expressions qui se présentent sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$ se ramènent immédiatement aux précédentes; si, par exemple,

$f(a) = \infty$, $\varphi(a) = \infty$, on aura

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{1 : \varphi(x)}{1 : f(x)} = \lim \frac{\varphi'(x) : [\varphi(x)]^2}{f'(x) : [f(x)]^2},$$

d'où l'on déduit

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

étant entendu que $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ne soit ni nul ni infini. Supposons donc

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0;$$

on aura

$$\lim \frac{f(x) + k\varphi(x)}{\varphi(x)} = k,$$

k désignant un nombre quelconque; de cette formule on déduira

$$\lim \frac{f'(x) + k\varphi'(x)}{\varphi'(x)} = k,$$

et par suite

$$\lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad = \lim \frac{f(x)}{\varphi(x)}.$$

Enfin, si $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ était infini, $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ serait nul, et l'on aurait

$$\lim \frac{\varphi'(x)}{f'(x)} = \lim \frac{\varphi(x)}{f(x)} = 0,$$

d'où

$$\lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty.$$

Ainsi, *pour trouver la vraie valeur d'une expression qui se présente sous la forme* $\frac{\infty}{\infty}$, *la règle à suivre est la même que si elle se présentait sous la forme* $\frac{0}{0}$.

Les expressions qui se présentent sous la forme $0 \times \infty$ se ramènent au cas précédent; ainsi, par exemple, si l'on a $f(a) = 0$, $\varphi(a) = \infty$, on aura

$$\lim f(x) \times \varphi(x) = \lim \frac{f(x)}{1 : \varphi(x)},$$

et le second membre de cette formule est de la forme $\frac{0}{0}$ pour $x = a$.

Si l'on a $f(a) = 0$, $\varphi(a) = \infty$, on aura

$$\lim [\varphi(x)]^{f(x)} = \lim e^{f(x) l \varphi(x)};$$

on est ainsi ramené au cas précédent. Les expressions de la forme ∞^0 se ramènent donc aux précédentes; celles-ci, 1^∞, $\infty - \infty$, ..., s'y ramènent à l'aide d'artifices analogues.

XV. — APPLICATIONS.

Problème I. — *Trouver la limite de* $\frac{F(x)}{f(x)}$ *pour* $x = \infty$, $F(x)$ *et* $f(x)$ *désignant deux polynômes entiers.*

Soient n le degré de $F(x)$, m celui de $f(x)$; si l'on suppose $n > m$ et si l'on remplace $F(x)$ et $f(x)$ par leurs dérivées, on trouve encore $\frac{\infty}{\infty}$ si m est > 1, et, si $m = 1$, la fraction se réduit à ∞. Pour se débarrasser de la forme illusoire, on voit qu'il faudra prendre m fois la dérivée des deux termes de la fraction, et, en faisant $x = \infty$ dans le résultat, on trouvera l'∞. Si au contraire on avait eu $n = m$, la fraction se serait réduite au rapport des coefficients de x^m dans $F(x)$ et $f(x)$. Enfin, si l'on avait eu $n < m$, on aurait trouvé zéro pour la limite cherchée. Ces résultats pouvaient se découvrir sans le secours du

calcul des dérivées. En effet, on a

$$\frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m} = \frac{\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + a_n}{\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \ldots + b_m x^{m-n}}.$$

Si l'on fait $x = \infty$, la seconde fraction devient manifestement $\frac{a_n}{b_m}$ si $m = n$, ∞ si $n > m$, et 0 si $n < m$.

Problème II. — *Trouver la limite de* $\frac{a^x}{x^m}$ pour $x = \infty$.

Nous supposerons $m > 0$, $a > 1$. On a (p. 117)

$$a^x = e^{x \log a} = 1 + \frac{x \log a}{1} + \frac{(x \log a)^2}{1.2} + \ldots;$$

donc

$$\frac{a^x}{x^m} = \frac{1}{x^m} + \frac{1}{x^{m-1}} \frac{\log a}{1} + \frac{1}{x^{m-2}} \frac{(\log a)^2}{1.2} + \ldots.$$

Tous les termes tendent vers zéro jusqu'à celui où l'exposant de x est négatif; à partir de celui-là tous les termes sont infinis et de même signe; donc $\frac{a^x}{x}$ est infini pour $x = \infty$. Il en serait de même *a fortiori* si m était négatif.

Corollaires. — $\lim \frac{x}{(\log x)^m} = \infty$ *pour* $x = \infty$, *lim* $\frac{x^m}{a^x} = 0$ *pour* $x = \infty$, etc.

Problème III. — *Trouver la limite de* $\frac{\sin x + x}{x}$ *pour* $x = \infty$.

Si l'on prend le rapport des dérivées des deux termes de cette fraction, on trouve $\frac{\cos x + 1}{1}$, et, $\cos x$ étant indéterminé, on pourrait en conclure que $\frac{\sin x + x}{x}$ n'a pas de limite. Or on a

$$\frac{\sin x + x}{x} = \frac{\sin x}{x} + 1;$$

or, $\sin x$ étant toujours moindre que l'unité, $\frac{\sin x}{x}$ a pour limite zéro. On a donc

$$\lim \frac{\sin x + x}{x} = 1.$$

A quoi tient cette contradiction?

Si l'on réfléchit à la démonstration de la règle que nous avons appliquée, on verra qu'elle s'appuie sur la formule de Taylor; notre règle du rapport des dérivées ne s'applique donc qu'aux fonctions $f(x)$ développables par la formule de Taylor. Pour rendre ce fait sensible, recommençons sur notre exemple la démonstration de la règle. On fera $\frac{1}{x} = z$, et l'on aura à chercher

$$\lim \frac{\sin\frac{1}{z} + \frac{1}{z}}{\frac{1}{z}} \text{ pour } z = 0,$$

ou enfin de

$$\frac{z}{1 : \left(\sin\frac{1}{z} + \frac{1}{z}\right)}.$$

Or $1 : \left(\sin\frac{1}{z} + \frac{1}{z}\right)$ n'est pas développable par la formule de Taylor, et c'est pourquoi la règle de L'Hôpital tombe en défaut.

Problème IV. — *Limite de* $\frac{(x-a)^{\frac{1}{2}}}{\sin^{\frac{1}{2}} x - \sin^{\frac{1}{2}} a}$ *pour* $x = a$.

En appliquant la règle de L'Hôpital, on a

$$\frac{\frac{1}{2}(x-a)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\sin^{-\frac{1}{2}} x \cos x},$$

dont la limite est ∞. Mais là encore il est à craindre que le résultat soit inexact, car $\sqrt{x-a}$ n'est pas développable suivant les puissances de $x-a$ par la formule de Taylor. Mais $\sqrt{\sin x} - \sqrt{\sin a}$ l'est, et le premier terme est

$$\frac{\cos a}{2\sqrt{\sin a}}(x-a);$$

la limite cherchée est donc bien infinie.

XVI. — QUELQUES MOTS SUR LES MAXIMA ET LES MINIMA.

Nous avons vu que $f(x)$ passait en général par un maximum quand on avait $f'(x) = 0$. La formule de Taylor rend parfaitement compte de ce fait; ainsi l'on a

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a+\theta h).$$

Si $f'(a)$ n'est pas nul et si h est suffisamment petit, $f'(a+\theta h)$ ne sera pas nul non plus et sera de même signe que $f(a)$; $f(a+h) - f(a)$ changera alors de signe avec h pour de petites valeurs de cette variable et ne sera ni maximum ni minimum. On sait en effet que $f(a)$ est maximum s'il est plus grand que $f(a+h)$, quel que soit le signe de h, et qu'il est minimum quand il est plus petit que $f(a+h)$, quel que soit le signe de h; le caractère du maximum et du minimum est donc que $f(a+h) - f(a)$ a le même signe quel que soit le signe de h.

D'après ce qui précède, $f(a)$ ne sera donc maximum que si $f'(a)$ est nul; la formule de Taylor donne alors

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h^2}{2}f''(a+\theta h).$$

Si $f''(a)$ n'est pas nul, le signe du second membre pour de petites valeurs de h sera celui de $f''(a)$, et, par suite, ce sera aussi celui de $f(a+h)-f(a)$. Ainsi

$f(a)$ sera maximum si $f'(a)=0$ et si $f''(a)<0$,
» minimum » $f''(a)>0$.

On ne peut plus rien dire si $f''(a)=0$. Mais soit $f^n(a)$ la première dérivée de $f(x)$ qui n'est pas nulle pour $x=a$; la formule de Taylor donne

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^n(a+\theta h).$$

La différence $f(a+h)-f(a)$ ne changera pas de signe avec h si n est pair, et il y aura maximum si $f^n(a)<0$ et minimum si $f^n(a)>0$; au contraire, si n est impair il n'y a ni maximum ni minimum, parce que $f(a+h)-f(a)$ change de signe avec h. Nous retrouvons ainsi des résultats déjà indiqués plus haut.

On obtient d'une façon analogue les conditions du maximum et du minimum des fonctions de plusieurs variables. Ainsi la formule de Taylor donne

$$\begin{aligned}f(a+h,b+k)-f(a,b)&=hf'_a(a+\theta h,b+\theta k)\\&+kf'_b(a+\theta h,b+\theta k).\end{aligned}$$

Pour que le premier membre ne change pas de signe avec h et k, il est nécessaire que f'_a et f'_b soient nuls tous deux. Ainsi, *pour qu'une fonction de plusieurs variables soit maxima ou minima, il faut que ses dérivées prises par rapport à chaque variable soient nulles.*

Nous ne pousserons pas plus loin cette discussion, qui n'offre aucune difficulté, mais qui appartient à un autre Cours. Nous ferons observer toutefois que nos conclusions ne sont exactes qu'autant que la formule de Taylor est applicable, et la recherche d'un maximum est pour cette raison une chose assez délicate.

Pour ne citer qu'un exemple bien connu des cas où les méthodes précédentes peuvent tomber en défaut, proposons-nous de trouver le maximum de la distance d'un point à un cercle situé dans le même plan.

Soient a la distance du centre au point, δ la distance d'un point du cercle au point donné; soit x la projection du rayon de ce point sur la droite qui joint le centre au point donné. On a, en appelant R le rayon,

$$\delta^2=r^2-x^2+(a-x)^2$$

ou

$$\delta^2=r^2+a^2-2ax.$$

Si pour avoir le maximum de δ^2 on prenait la dérivée par rapport à x, on aurait, en l'égalant à zéro, $-2a=0$, résultat absurde; cela tient à ce que δ^2 est maximum et minimum pour $x=\pm a$ et que la fonction δ^2 est discontinue pour $x=\pm a$: elle cesse en effet d'exister pour $x>a$ ou $x<-a$, et par conséquent de coïncider avec la fonction continue r^2+a^2-2ax. La formule de Taylor ne lui est donc pas applicable. δ^2 est une fonction qui n'existe pas pour $x<-a$, égale à r^2+a^2-2ax pour $-a<x<a$ et qui n'existe pas pour $x>a$.

PROBLÈME I. — *Discuter la fonction*

$$y=\frac{\sin x}{\cos 2x}.$$

Il s'agit de voir comment varie y quand x passe de $-\infty$

à $+\infty$ d'une façon continue; en formant la dérivée y', on voit d'abord, en discutant son signe, quand y croît et quand il décroît, ce qu'il serait sans cela difficile de décider quand le numérateur et le dénominateur varient dans le même sens. On a

$$y' = \frac{\cos x}{\cos^2 2x}$$

On peut observer tout de suite que y ne change pas de valeur quand x se change en $-x$, mais qu'il change de signe. Des valeurs de y pour x positif on déduira donc les valeurs correspondantes pour x négatif, et nous n'aurons pas besoin de discuter les valeurs de y pour les valeurs négatives de x si nous avons discuté ses valeurs pour les valeurs positives de x. Nous pouvons même observer que y reprend périodiquement les mêmes valeurs quand x prend des accroissements égaux à 2π. Nous n'aurons donc qu'à faire varier x de o à 2π, et par cela même nous connaîtrons la marche de la fonction y en dehors de ces limites.

Or, tant que x reste moindre que $\frac{\pi}{4}$, les deux termes de y' sont positifs; y croît donc dans cet intervalle; il est nul pour $x = 0$ et infini pour $x = \frac{\pi}{4}$; y passe alors brusquement du positif au négatif, mais, y' étant encore positif, y croît tant que l'on n'a pas $x = \frac{\pi}{2}$; alors y' s'annule, et, comme y est continu, il passe par un maximum; y' change de signe; y décroît jusqu'à ce que l'on ait $x = \frac{3\pi}{4}$; y redevient infini, mais, comme y' reste négatif, y passe du négatif au positif, décroît encore, s'annule pour $x = \pi$, décroît toujours, devient infini pour $x = \frac{5\pi}{4}$; la dérivée restant négative, il passe du négatif au positif et décroît pour atteindre un minimum quand $x = \frac{3\pi}{2}$; la dérivée alors passe du négatif au positif; y croît, devient infini pour $x = \frac{7\pi}{4}$, et, comme y' ne change pas de signe, y passe du positif au négatif et croît jusqu'au moment où $x = 2\pi$; alors y est nul et repasse par la série de valeurs que nous venons de trouver indéfiniment. L'un des objets de la Géométrie analytique est précisément la discussion des fonctions et leur représentation géométrique; nous renverrons donc pour cet objet le lecteur à un autre Cours, en bornant là ce genre de discussion, que nous ne saurions traiter complètement ici avec les seules ressources de l'Analyse.

Problème II. — *Trouver les maxima et les minima de la fonction xe^{-x}.*

La dérivée de cette fonction étant $e^{-x} - xe^{-x}$ ou $e^{-x}(1-x)$, on voit qu'elle s'annule pour $x = 1$ et $e^{-x} = 0$; or, e^{-x} n'étant nul pour aucune valeur finie de x, la fonction en question est maxima ou minima pour $x = 1$, car pour $x = 1$ elle est continue; la dérivée seconde de xe^{-x} est

$$-e^{-x} - (1-x)e^{-x},$$

c'est-à-dire négative pour $x = 1$; cette valeur de x rend donc xe^{-x} maximum.

Problème III. — *De tous les parallélépipèdes rectangles de même surface h^2 inscrits dans la sphère de rayon R, quel est celui dont le volume est maximum?*

Soient x, y, z les côtés du parallélépipède; on a

$$(1) \qquad xy + yz + zx = h^2,$$

$$(2) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Il faut rendre xyz maximum. Pour résoudre cette question, il semble qu'il soit nécessaire de calculer xyz en fonction de x, par exemple, pour égaler ensuite sa dérivée à zéro; mais on peut poser

$$(3)\qquad m = xyz$$

et prendre la dérivée de m comme celle d'une fonction implicite. Observons d'abord que l'équation (1) peut être remplacée par

$$(4)\qquad x+y+z=\sqrt{R^2+2h^2},$$

qui est plus simple. La variable indépendante pouvant être à volonté x, y, z ou toute fonction de ces variables, laissons-la indéterminée et prenons les dérivées des équations (2), (3), (4); en remplaçant m' par zéro, nous aurons

$$\begin{aligned} x'+y'+z' &= 0,\\ xx'+yy'+zz' &= 0,\\ x'yz+y'zx+z'xy &= 0; \end{aligned}$$

en éliminant x', y', z', nous aurons une relation qui, jointe aux conditions (1) et (2) ou (2) et (4), fera connaître x, y, z. En éliminant x', y', z', on a

$$x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)=0;$$

cette équation est satisfaite pour $y=z$. Les formules (4) et (2) donnent alors

$$\begin{aligned} 2y+x &= \sqrt{R^2+2h^2},\\ 2y^2+x^2 &= R^2, \end{aligned}$$

d'où l'on tirera les valeurs correspondantes de x et de y. Nous laissons au lecteur le soin d'achever le calcul.

Problème IV. — *De tous les cylindres inscrits dans un hémisphère, quel est celui dont la surface totale est maxima?*

En appelant R le rayon de la sphère, x le rayon de base variable, la surface à rendre maxima a pour expression

$$2\pi x^2 + 2\pi x\sqrt{R^2-x^2}.$$

Nous devons égaler la dérivée de cette quantité à zéro; nous trouvons alors

$$2x+\sqrt{R^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{R^2-x^2}}=0$$

ou

$$2x\sqrt{R^2-x^2}+R^2-2x^2=0.$$

Isolant le radical dans un membre et élevant au carré, on a

$$4x^2(R^2-x^2)=4x^4-4R^2x^2+R^4$$

ou

$$8x^4-8R^2x^2+R^4=0.$$

Cette équation bicarrée donne pour seule solution réelle et admissible

$$x=\frac{R}{2}\sqrt{2\pm\sqrt{2}}.$$

La solution correspondant à la plus petite valeur de x donne évidemment un maximum et l'autre un minimum.

Le calcul de la dérivée seconde serait, sinon difficile au moins de peu d'intérêt, à cause de sa complication.

On arrive au même résultat en posant $x=R\cos\varphi$; la quantité à rendre maxima ou minima est alors $\cos^2\varphi+\sin\varphi\cos\varphi$; en égalant sa dérivée à zéro, on trouve

$$\tan^2\varphi+2\tan\varphi-1=0.$$

on en déduit

$$\tang\varphi = -1 \pm \sqrt{2}, \quad \cos\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2 \pm \sqrt{2}},$$

ce qui donne la valeur de x trouvée plus haut.

XVII. — DES FONCTIONS PRIMITIVES.

La recherche de la dérivée d'une fonction est un problème résolu, d'après ce qui précède, pour toutes les fonctions que l'on a à considérer dans les éléments; il n'en est pas de même du problème qui a pour but la recherche d'une fonction dont on donne la dérivée. Ce problème, qui est de la plus haute importance en Analyse, est du ressort du Calcul intégral; nous n'en dirons ici qu'un seul mot.

La fonction qui admet $f(x)$ pour dérivée s'appelle la *fonction primitive* ou l'intégrale de $f(x)$. Bien que l'on ne sache pas toujours trouver cette fonction primitive, il est bien des cas dans lesquels on peut la deviner; ainsi l'on voit de suite que la fonction primitive de Ax^m est $A\frac{x^{m+1}}{m+1}$, excepté si $m=-1$; la fonction primitive de $\frac{A}{x}$ est $A\log x$, etc.

Mais on peut se demander si une fonction n'admet qu'une seule primitive; les théorèmes suivants ont pour but d'éclaircir cette question.

Théorème I. — *La dérivée d'une constante est nulle, et réciproquement, si la dérivée d'une fonction continue entre les limites a et b de la variable est nulle; cette fonction reste constante entre ces limites.*

En effet, soient $f(x)$ la fonction en question, x et $x+h$ deux valeurs de la variable comprises entre a et b; la formule de la page 165 lui est applicable, puisque la dérivée,

étant nulle par hypothèse, *existe* et est bien déterminée, et l'on a

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h).$$

Or, $f'(x)$ étant nulle pour $a < x < b$, on a $f'(x+\theta h) = 0$, et par suite $f(x+h) = (fx)$; donc $f(x)$ est constant, ce qu'il fallait prouver. La réciproque est évidente.

Théorème II. — *Deux fonctions ayant la même dérivée ne diffèrent entre elles que par une constante.*

En effet, soient $f(x)$ et $F(x)$ deux fonctions telles que l'on ait

$$f'(x) - F'(x) = 0.$$

La fonction $f(x) - F(x)$ a sa dérivée nulle; donc cette fonction est constante, et par suite

$$f(x) = F(x) + \text{const.}$$

Ce théorème reposant sur le précédent, il est sous-entendu que les fonctions $f(x)$ et $F(x)$ sont continues.

D'après cela, on voit que la fonction primitive de

$$\begin{array}{lcl}
x^m & \text{est} & \frac{x^{m+1}}{m+1} + \text{const.}, \\
\frac{1}{x} & \text{»} & \log x + \text{const.} = \log cx, \\
\sin x & \text{»} & -\cos x + \text{const.}, \\
\cos x & \text{»} & \sin x + \text{const.}
\end{array}$$

. . . .

Pour faire comprendre l'utilité des considérations précédentes, nous résoudrons quelques problèmes :

1° *Quelle est la fonction de x constamment égale à sa dérivée?*

Soit y la fonction inconnue; on a

$$y = y',$$

ce que l'on peut écrire

$$\frac{y'}{y} = 1.$$

Avec un peu d'habitude, on reconnaît que $\frac{y'}{y}$ est la dérivée de $\log y$; les deux quantités $\frac{y'}{y}$ et 1 sont donc les dérivées de $\log y$ et de x; comme ces dérivées sont égales, $\log y$ et x ne peuvent différer que par une constante c; on a donc

$$\log y = x + c, \quad y = e^{x+c}.$$

2° *Trouver le volume d'un segment sphérique à deux bases?*

Soient R le rayon de la sphère, h la hauteur du segment ou la distance de ses bases. Supposons l'une des bases variable de position; soient r son rayon et z sa distance au centre de la sphère. Si z reçoit l'accroissement Δz, le volume cherché V reçoit un accroissement ΔV que nous allons estimer. Ce volume ΔV est compris entre celui de deux cylindres ayant pour hauteur Δz et pour bases deux cercles de rayons r et $r + \Delta r$; donc

$$\pi r^2 \Delta z < \Delta V < \pi (r + \Delta r)^2 \Delta z;$$

on en conclut

$$\pi r^2 < \frac{\Delta V}{\Delta z} < \pi (r + \Delta r)^2.$$

Si l'on fait tendre Δz vers zéro, $\frac{\Delta V}{\Delta z}$ tend vers V'_z et la formule précédente donne, en passant aux limites,

$$V'_z = \pi r^2.$$

Or on a $r^2 = R^2 - z^2$; donc

$$V'_z = \pi (R^2 - z^2).$$

On reconnaît que le second membre de cette formule est la dérivée de $\pi \left(R^2 z - \frac{z^3}{3} \right)$; on peut donc écrire

$$V = \pi \left(R^2 z - \frac{z^3}{3} \right) + \text{const}.$$

Pour déterminer la constante, on observe que le volume V est nul pour une certaine valeur de z que nous appellerons z_0; il vient alors, en faisant $z = z_0$,

$$0 = \pi \left(R^2 z_0 - \frac{z_0^3}{3} \right) + \text{const.},$$

d'où, retranchant cette formule de la précédente,

$$V = \pi \left[R^2 (z - z_0) - \frac{1}{3} (z^3 - z_0^3) \right].$$

On peut remarquer que $z - z_0 = h$ et que

$$V = \frac{\pi h}{3} (3R^2 - z^2 - z_0^2 - z z_0).$$

On peut évidemment donner plusieurs formes à V suivant les données que l'on introduira dans la question.

EXERCICES ET NOTES.

1. Prendre les dérivées des fonctions suivantes :

$y = \operatorname{arctang} \frac{2cx + b}{\sqrt{4ac - b^2}}$. *Rép.* : $y' = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{a + bx + cx^2}$.

$y = \operatorname{arctang} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1 - x^2}}$. $y' = \frac{\sqrt{2}}{(1 + x^2)\sqrt{1 - x^2}}$.

$$y = \arcsin \frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}. \qquad \textit{Rép.} : \ y' = \frac{\sqrt{2}(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}.$$

$$y = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}\, e^{ax}. \qquad y' = e^{ax}\cos bx.$$

$$y = (3x^2-6)\sin x - (x^3-6x)\cos x. \qquad y' = x^3 \sin x.$$

$$y = \frac{1}{3}\cot x\left(\frac{1}{\sin^2 x} + 2\right). \qquad y' = -\frac{1}{\sin^4 x}.$$

$$y = \log(\log\sin x). \qquad y' = \frac{\cot x}{\log\sin x}.$$

$$y = \operatorname{arc\,coséc} x. \qquad y' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

$$y = \operatorname{arc\,tang} e^x. \qquad y' = \frac{1}{e^x + e^{-x}}.$$

$$y = \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \log\sqrt{1-x^2}. \qquad y' = (\arcsin x)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

$$y = x^{\log x}. \qquad y' = \frac{2\log x}{x}\, x^{\log x}.$$

$$y = \log\frac{(x-2)^3}{x-1}. \qquad y' = \frac{2x-1}{x^2-3x+2}.$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}. \qquad y' = (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

$$y = \operatorname{arc\,tang}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}. \qquad y' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}.$$

$$y = \log\sqrt{\frac{1-x}{x}}. \qquad \frac{1}{2x(x-1)}$$

$$y = x^{\frac{1}{x}}. \qquad x^{\frac{1}{x}-2}(1-\log x).$$

ı pose

$$x^y - y^x = 0,$$

on a

$$y' = \frac{y^x\log y - yx^{y-1}}{x^y\log x - xy^{x-1}}.$$

Si l'on pose

$$x^2+y^2+z^2 = 1,$$
$$x+y+z = 0,$$

on a

$$y' = \frac{y-x}{y-z}, \quad z' = \frac{z-x}{z-y}.$$

Si l'on pose

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = x,$$
$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = x^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$y_1^n + y_2^n + \ldots + y_n^n = x^n,$$

on a

$$y'_1 = \frac{P(x, y_2, \ldots, y_n)}{P(y_1, y_2, \ldots, y_n)},$$

P désignant le produit des différences que l'on peut former avec les quantités placées dans la parenthèse qui suit.

$$y = \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}}\left[1 + \frac{2n-3}{2n-4}(x^2+1) + \ldots + \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 5.3}{(2n-4)(2n-6)\ldots 4.2}(x^2+1)^{n-2}\right] + \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 5.3.1}{(2n-4)(2n-6)\ldots 4.2}\operatorname{arc\,tang} x.$$

$$\textit{Rép} : y' = \frac{1}{(x^2+1)^n}.$$

Prendre les dérivées de :

$$y = \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}},$$

$$y = \log(x \pm \sqrt{a^2 \pm x^2}),$$

$$y = x^{x^m}.$$

$$y = \frac{8}{3}\operatorname{arc\,tang} x + \frac{3}{8}\frac{x}{1+x^2} + \frac{x}{4(1+x^2)^2}.$$

$$y = e^{-x}[x^m + mx^{m-1} + m(m-1)x^{m-2}\ldots + 1.2.3\ldots m].$$

$$y = \sqrt{x^2+2x\cos\alpha+1} - \cos\alpha\log\left(x+\cos\alpha+\sqrt{x^2+2x\cos\alpha+1}\right).$$

(Les résultats sont simples).

2. Prendre les dérivées de

$$\log x,\ \log\log x = \log_2 x,\ \log\log_2 x = \log_3 x, \text{ etc.} \ldots \log_n x.$$

3. Trouver la $n^{\text{ième}}$ dérivée de uvw.

4. Trouver la $n^{\text{ième}}$ dérivée de $\arcsin x$: si l'on appelle cette fonction y, on se bornera à prouver que

$$y^{(n+1)}(1-x^2)-(2n-1)xy^{(n)}-(n-1)^2y^{(n-1)}=0.$$

5. Trouver la $n^{\text{ième}}$ dérivée de $\operatorname{arctang} x$; en appelant cette fonction y, on a

$$y^{(n+1)}(1+x^2)+2ny^{(n)}+n(n+1)y^{(n-1)}=0.$$

6. On étendra la formule du binôme au cas d'un exposant quelconque en développant $(1+h)^m$ par la formule de Taylor. On aura ainsi

$$(1+h)^m = 1+\frac{m}{1}h+\frac{m(m-1)}{1.2}h^2+\ldots$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}h^n+\text{R},$$

R étant donné par la formule

$$\text{R}=\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1.2.3\ldots n}h^{n+1}(1-\theta)^n(1+\theta h)^{m-n-1}.$$

Si l'on suppose $h^2<1$, on prouvera que R a pour limite zéro pour $n=\infty$ (mais c'est là un fort mauvais moyen d'établir la formule du binôme, parce que la variable h doit être supposée réelle; quoi qu'il en soit, on obtient ainsi une forme du reste qui peut être commode pour évaluer l'erreur commise en s'arrêtant à un terme de rang donné dans la série).

7. Démontrer, en s'appuyant sur la formule de Taylor, les équations suivantes :

$$l(1+h)=h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}\ldots\pm\frac{h^n}{n}\ldots \qquad h<1.$$

$$\sin h = h-\frac{h^3}{1.2.3}+\frac{h^5}{1.2.3.4.5}-\ldots.$$

8. La formule de Taylor permet d'évaluer une limite de l'erreur commise en admettant que les différences entre les nombres sont proportionnelles aux différences qui existent entre leurs logarithmes, lorsque l'on fait usage des tables.

En effet, soient x et $x+1$ deux nombres de la table, $x+h$ un nombre compris entre x et $x+1$, Δ la différence tabulaire, on a par la formule de Taylor

$$(1)\quad \log(x+h)-\log x = h\log'(x+\theta h)=\frac{h}{x+\theta h},$$

et θ est compris entre zéro et 1. Si l'on suppose $h=1$, on a

$$\log(x+1)-\log x \quad \text{ou} \quad \Delta=\frac{1}{x+\theta_1};$$

θ_1 étant compris entre zéro et 1, on établit ordinairement la proportion

$$\frac{\log(x+h)-\log x}{h}=\frac{\Delta}{1},$$

d'où

$$\log(x+h)-\log x = h\Delta=\frac{h}{x+\theta_1}.$$

Mais, en comparant ce résultat avec le résultat exact (1), on voit que l'erreur est $\frac{h}{x+\theta_1}-\frac{h}{x+\theta h}$; cette erreur est donc moindre que $\frac{h}{x}-\frac{h}{x+1}$ ou que $\frac{h}{x(x+1)}$ ou même que $\frac{h}{x^2}$, si x est un nombre de cinq chiffres; on voit que l'erreur est bien loin de porter sur le septième chiffre.

9. Évaluer d'une manière analogue une limite de l'erreur commise en faisant usage des tables trigonométriques, quand on admet la proportionnalité entre les différences des arcs et les différences entre leurs logarithmes sinus; l'erreur est de la forme $\frac{h\sin 10''}{\sin^2 x}$ pour le cas où les différences procèdent de $10''$ en $10''$; il faudra donc éviter l'usage des petits arcs x. — Étude analogue pour les logarithmes cosinus et tangentes.

10. Étant donnés un angle droit et un point dans son plan, par ce point faire passer une droite qui, limitée aux côtés de l'angle droit, soit de longueur minima.

11. Un point se meut avec une vitesse v dans un milieu A et avec une vitesse v' dans un milieu A'; ces deux milieux sont séparés par une surface plane : quelle doit être la trajectoire de ce point pour se rendre d'un point M situé dans le milieu A en un point M' situé dans le milieu A', pour que le temps du trajet soit un minimum (on doit trouver que l'angle d'incidence et l'angle de réfraction ont un rapport de sinus égal à $v : v'$)? (FERMAT.)

12. Trouver sur la droite qui joint deux lumières le point le moins éclairé.

13. Démontrer que, α, β, γ, ... étant des nombres quelconques et $x+y+z+\ldots$ étant constants, le maximum de $x^\alpha y^\beta z^\gamma \ldots$ a lieu quand $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}=\ldots$.

14. Étant donnés deux points A et B et une droite parallèle à AB, trouver sur cette droite un point M tel que $a\,\mathrm{MA}+b\,\mathrm{MB}$ soit un minimum, a et b désignant deux nombres donnés.

15. Sur la ligne des centres de deux sphères, trouver un point tel que la somme des calottes vues de ce point soit un maximum.

16. Démontrer que si $f(x)$ s'annule pour $x=a, x=b, \ldots x=l$ les quantités $a, b, c, \ldots l$ étant au nombre de n, on a

$$f(x)=(x-a)(x-b)\ldots(x-l)\frac{f^n(\mathrm{X})}{1.2.3\ldots n},$$

X désignant une quantité comprise entre la plus grande et la plus petite des quantités $x, a, b, \ldots l$.

17. Si l'on pose

$$\frac{f(x)-f(a_1)}{x-a_1}=f(a_1, x), \quad \frac{f(a_1, x)-f(a_1, a_2)}{x-a_2}=f(a_1, a_2, x),$$
$$\frac{f(a_1, a_2, x)-f(a_1, a_2, a_3)}{x-a_3}=f(a_1, a_2, a_3, x), \ldots,$$

on a

$$f(x)=f(a_1)+(x-a_1)f(a_1, a_2)+(x-a_1)(x-a_2)f(a_1, a_2, a_3)\ldots$$
$$+(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)f^n(\mathrm{X}),$$

X étant compris entre la plus grande et la plus petite des quantités $x, a_1, a_2, \ldots a_n$ (AMPÈRE). (On s'appuiera sur l'exercice précédent.)

18. Étant données les équations

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t),$$

on en déduit que y est une fonction de x. Cela posé, on demande de démontrer les formules

$$y'_x=\frac{\psi'}{\varphi'}, \quad y''_x=\frac{\psi''\varphi'-\psi'\varphi''}{\varphi'^3},$$
$$y'''_x=\frac{\psi'''\varphi'^3-\varphi'\varphi'''\psi'-3\varphi''\varphi'\psi''+3\varphi''^2\psi'}{\varphi'^5}\ldots.$$

19. Trouver une fonction égale à sa dérivée, ou égale à sa dérivée multipliée par une constante ($y=ce^{ax}$).

20. Trouver une fonction égale a sa dérivée seconde

$$(y=ce^x+c'e^{-x}).$$

21. Trouver une fonction égale et de signe contraire à sa dérivée seconde ($y=c\cos x+c'\sin x$).

22. Trouver la vraie valeur des fractions suivantes pour $x=0$:

$$\frac{\operatorname{tang} x}{x}, \quad \frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sin^4 x}, \quad \frac{x\sin x}{1-e^{-x^2}}.$$

23. Trouver la vraie valeur des fractions suivantes pour $x=\infty$:

$$\frac{\log x-x}{\log x+x}, \quad \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{2+x}}{\sqrt{x}}.$$

24. Démontrer que, si la fonction symétrique $f(x, y, z\ldots)$ reste constante, la fonction symétrique $\varphi(x, y, z\ldots)$ sera maxima ou minima quand on aura $x=y=z=\ldots$.

25. Soit Z une fonction imaginaire de la variable réelle x; le module

de Z croît ou décroît avec x suivant que la partie réelle de $\frac{Z'}{Z}$ est positive ou négative. (PUISEUX).

26. Trouver le poids d'un cône dont la base est B et la hauteur h, sachant que la densité reste constante dans chaque section parallèle à la base, mais vraie proportionnellement à la distance de la section au sommet. On donne la densité Δ sur la base B et la densité δ au sommet.

27. Démontrer que, si aucune cause ne s'oppose à l'accroissement de la population d'un pays, cette population à l'époque t sera donnée par la formule

$$P = P_0 e^{kt},$$

P_0 désignant la population à l'époque $t = 0$ et k un coefficient constant. C'est dans cette proposition que consiste la loi de MALTHUS.

CHAPITRE VIII.

CALCUL DES DIFFÉRENTIELLES.

I. — NOTIONS SUR LES INFINIMENT PETITS.

On appelle *infiniment petit* toute quantité *variable* qui a pour limite zéro (t. I, p. 115).

L'infiniment petit n'est donc pas une quantité nulle, et il y a cette différence entre le zéro et l'infiniment petit que le zéro est un nombre fixe, tandis que l'infiniment petit est essentiellement variable de sa nature.

On dit que deux infiniment petits α, β sont de même *ordre* quand la limite de leur rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ est finie et différente de zéro. Quand la limite de $\frac{\beta}{\alpha}$ est nulle, on dit que β est d'ordre supérieur à α.

Si la limite de $\frac{\beta}{\alpha^m}$ est finie et différente de zéro, on dit que β est d'ordre m par rapport à α : ainsi α^m est d'ordre m par rapport à α.

Dans une question d'Analyse, on prend en général l'un des infiniment petits de la question pour infiniment petit principal; tout infiniment petit de même ordre que l'infiniment petit principal est alors considéré comme étant du premier ordre, et, en général, tout infiniment petit d'ordre m par rapport à l'infiniment petit principal est simplement appelé un infiniment petit d'ordre m. Nous pouvons résumer ces notions dans une formule. Soit α l'infiniment petit principal ; β sera infiniment petit d'ordre m si

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^m} = p,$$

p désignant une quantité finie différente de zéro, et de cette formule on déduit, en appelant ε une quantité infiniment petite

$$\frac{\beta}{\alpha^m} = p + \varepsilon$$

ou

$$\beta = p\alpha^m + \alpha^m \varepsilon.$$

$\alpha^m \varepsilon$ est d'ordre supérieur à α^m, puisque son rapport à α^m est ε, qui par hypothèse est infiniment petit, c'est-à-dire a pour limite zéro. On voit donc que tout infiniment petit d'ordre m est de la forme $p\alpha^m +$ un infiniment petit d'ordre supérieur à m.

Il y a ici une remarque importante à faire : pour que l'ordre d'un infiniment petit β soit supérieur à l'ordre de α, il n'est pas nécessaire que l'ordre de β soit déterminé par rapport à α ; il suffit que $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$. Ainsi il y a des infiniment petits qui sont d'ordre supérieur à celui de α, sans être pour cela d'aucun ordre par rapport à α. $\alpha(\log \alpha)^{-1}$ n'est d'aucun ordre, parce que $\frac{(\log \alpha)^{-1}}{\alpha^m}$ ne tend vers aucune limite, quel que soit m, pour $\alpha = 0$. Il est cependant d'ordre supérieur à celui de α.

II. — THÉORÈME FONDAMENTAL.

Lorsque l'on cherche la limite du rapport de deux infiniment petits, on peut sans inconvénient remplacer ces infiniment petits par d'autres, pourvu que la limite du rapport de chaque infiniment petit à celui qu'on lui substitue soit l'unité.

En effet, supposons que $\lim \frac{\alpha}{\alpha'} = 1$, $\lim \frac{\beta}{\beta'} = 1$. Je dis que l'on aura

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}.$$

Cela résulte de la suite d'égalités

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\beta} \lim \frac{\alpha'}{\alpha} \lim \frac{\beta}{\beta'} = \lim \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{\alpha'}{\alpha}\,\frac{\beta}{\beta'} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}.$$

On peut donner à ce théorème fondamental une autre forme plus commode dans les applications. Remarquons en effet que, si $\lim \frac{\alpha}{\alpha'} = 1$, α' ne diffère de α que par un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à α et à α', qui sont de même ordre. En effet, si $\lim \frac{\alpha}{\alpha'} = 1$, c'est que $\frac{\alpha}{\alpha'} = 1 + \varepsilon$, ε tendant vers zéro avec α et α' ; donc

$$\alpha = \alpha' + \alpha'\varepsilon.$$

Or $\alpha'\varepsilon$ est d'ordre supérieur à celui de α', car $\frac{\alpha'\varepsilon}{\alpha'} = \varepsilon$, qui tend vers zéro. Donc, *deux infiniment petits tels que la limite de leur rapport soit* 1 *ne diffèrent que par un terme d'ordre supérieur.*

Réciproquement : *Si la différence de deux infiniment petits est d'ordre supérieur par rapport à chacun d'eux, la limite de leur rapport est* 1.

En effet, soient α et α' deux infiniment petits, ε leur différence ; on aura

$$\alpha = \alpha' + \varepsilon,$$

d'où

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = 1 + \frac{\varepsilon}{\alpha'}.$$

Si ε est d'ordre supérieur par rapport à α', $\frac{\varepsilon}{\alpha'}$ tendra vers zéro et l'on aura

$$\lim \frac{\alpha}{\alpha'} = 1.$$

De là résulte que nous pouvons énoncer notre théorème fondamental en ces termes :

Quand on cherche la limite du rapport de deux infiniment petits, on peut négliger, dans l'expression de chacun d'eux, des infiniment petits d'ordre supérieur.

Supposons, par exemple, que l'on veuille trouver la limite de $\frac{x^3 - x}{2x^2 - 3x}$ pour $x = 0$; on observera que, x étant infiniment petit principal, x^3 et x^2 sont d'ordre supérieur par rapport à $-x$ et à $-3x$; on peut donc les négliger, et la limite cherchée est celle de $\frac{-x}{-3x}$ ou $\frac{1}{3}$.

III. — DES DIFFÉRENTIELLES.

Soit y une fonction de x ayant une dérivée y'; on a

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' \quad (\text{pour } \Delta x = 0)$$

ou, si l'on veut,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \varepsilon,$$

ε désignant un infiniment petit, c'est-à-dire une quantité

nulle avec Δx, mais dont l'ordre précis nous est d'ailleurs inconnu, ce qui pour le moment est tout à fait indifférent. On en conclut

$$\Delta y = y' \Delta x + \mathrm{E},$$

E désignant le produit de ε par Δx, c'est-à-dire un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à Δx, et par suite par rapport à $y'\Delta x$, dont la limite du rapport à Δx ou y' est en général finie et différente de zéro.

Le produit $y'\Delta x$, différant de Δy par un infiniment petit d'ordre supérieur E, pourra remplacer Δy dans une limite de rapport, et, comme il sera généralement plus facile à calculer, il y a lieu de prendre ce produit en considération. On lui donne avec Leibnitz le nom de *différentielle* de y, et on le représente par dy. On a donc par définition

$$dy = y' \Delta x. \tag{1}$$

Ainsi :

1° *La différentielle d'une fonction est le produit de la dérivée de cette fonction par l'accroissement arbitraire Δx de la variable;*

2° *Quand l'accroissement donné à la variable est infiniment petit, la différentielle de la fonction est infiniment petite, et elle peut, dans la recherche des limites de rapports, remplacer l'accroissement de la fonction, dont elle diffère par un infiniment petit d'ordre supérieur ;*

3° *Quand l'accroissement de la fonction est égal à 1, sa différentielle est égale à sa dérivée.*

Cette dernière remarque n'a d'autre utilité que de faire bien observer que la différentielle d'une fonction n'est ni une quantité nulle, ni une quantité très petite, ni une quantité égale à l'accroissement de la fonction.

Il y a un cas remarquable dans lequel on a $\Delta y = dy$: c'est celui où l'on a $y = x$. En effet, si dans (1) on suppose $y = x$, on a, en observant que $x' = 1$,

$$dx = \Delta x.$$

Ainsi, *la différentielle de la variable est égale à son accroissement*. Si l'on remplace alors, dans (1), Δx par son égal dx, on a

$$dy = y'dx,$$

d'où

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Puisque la dérivée y' est égale au rapport $\frac{dy}{dx}$, rien n'empêche de représenter à l'avenir la dérivée de la fonction y par la notation $\frac{dy}{dx}$; c'est ce que l'on fait souvent.

IV. — AVANTAGES DE LA NOTATION LEIBNITZIENNE.

La notation $\frac{dy}{dx}$ présente sur la notation plus simple y' d'immenses avantages.

1° D'abord elle est expressive; elle rappelle par sa forme l'origine de la dérivée.

2° Un autre avantage de la notation différentielle consiste en ce que dy est toujours la différentielle de y, quelle que soit la variable indépendante, tandis que la notation y' représente des fonctions bien différentes, suivant la nature de la variable indépendante. Je m'explique. Soient y une fonction de x et t une autre fonction de x; alors y sera par cela même fonction de t. Soient y'_x la dérivée de y relative à x, y'_t sa dérivée relative à t; soient $d_t u$, en général, la différentielle d'une fonction u relative à t, $d_x u$ la différentielle de la même fonction relative à x; on a

$$\frac{d_x y}{d_x x} = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{y'_t d_t t}{x'_t d_t t} = \frac{d_t y}{d_t x} \quad (*).$$

Ainsi $\frac{dy}{dx}$ représente la dérivée de y relative à x, que x soit variable indépendante ou que t soit variable indépendante, puisque $\frac{d_x y}{d_x x} = \frac{d_t y}{d_t x}$; au contraire, y'_x n'est pas égal à y'_t, puisque $y'_x = y'_t t'_x$ ou $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

3° Mais la notation différentielle présente encore un autre avantage sur celle des dérivées, et celui-là est immense.

Supposons que, en négligeant des infiniment petits d'ordre supérieur à ceux que l'on a conservés, on soit parvenu à une équation de la forme suivante, où A, B, C, D, sont finis :

$$(1) \qquad A\,dx + B\,dy + C\,dz + D\,dt = 0.$$

Une pareille équation, en vertu de la notation dont on a fait usage, est *rigoureusement* exacte; les erreurs se sont compensées d'elles-mêmes.

Pour expliquer cette proposition un peu paradoxale, observons que, si l'équation (1) est inexacte, la suivante sera parfaitement exacte :

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz + D\,dt = \varepsilon,$$

ε désignant un terme d'ordre supérieur à dt, puisque, par

(*) Il est à peine nécessaire de faire observer que $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$, parce que l'on a

$$y'_x = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{\Delta y : \Delta t}{\Delta x : \Delta t} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

hypothèse, on n'a négligé que des termes d'ordre supérieur. Divisons alors par dt et observons que, quelle que soit la valeur de dt, on a

$$\frac{dx}{dt} = x'_t, \quad \frac{dy}{dt} = y'_t, \quad \frac{dz}{dt} = z'_t;$$

nous aurons

$$Ax'_t + By'_t + Cz'_t + D = \frac{\varepsilon}{dt}.$$

Or $\frac{\varepsilon}{dt}$ tend vers zéro avec dt, puisque ε est d'un ordre supérieur à celui de dt. Le premier membre de l'équation précédente, pouvant être pris aussi petit que l'on veut en prenant dt suffisamment petit, est rigoureusement nul, puisqu'il est indépendant de dt; on a donc *rigoureusement*

$$Ax'_t + By'_t + Cz'_t + D = 0.$$

En multipliant par dt et en observant que $x'_t dt = dx$, $y'_t dt = dy$, ..., on a aussi *rigoureusement*

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz + D\,dt = 0.$$

L'erreur ε était donc bien nulle.

V. — DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS.

Puisque la différentielle dy de y est le produit de sa dérivée y' par dx, on aura, en faisant $y = x^m, a^x, \ldots$ dans la formule $dy = y'dx$,

$$d.x^m = mx^{m-1}\,dx,$$
$$d.a^x = a^x \log a\,dx,$$
$$d.\sqrt{1-x^2} = \frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

On a

$$(u \pm v \pm w \pm \ldots)' = u' \pm v' \pm w' \pm \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et, en multipliant par dx,

$$d(u \pm v \pm w \pm \ldots) = du \pm dv \pm dw \pm \ldots.$$

On a

$$(uv)' = u'v + v'u.$$

On en conclura, en multipliant par la différentielle dx de la variable

$$d.uv = (u'\,dx)v + (v'\,dx)u$$

ou

$$d.uv = v\,du + u\,dv.$$

De la formule

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

on déduira, en multipliant par dx,

$$d\frac{u}{v} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

Le théorème des fonctions de fonctions donne l'égalité

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x,$$

et, en remarquant que $y'_u = \frac{dy}{du}$, $u'_v = \frac{du}{dv}$, $v'_n = \frac{dx}{dv}$, on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dv}\,\frac{dv}{dx}; \tag{1}$$

ou plus exactement, en mettant au bas de la lettre d la variable par rapport à laquelle on différentie,

$$\frac{d_x y}{d_x x} = \frac{d_u y}{d_u u}\,\frac{d_v u}{d_v v}\,\frac{d_x v}{d_x x};$$

mais on a vu que l'on pouvait supprimer les indices placés au bas de la lettre d et les supposer identiques (p. 230), en sorte que cette formule ou (1) est évidente.

Nous ferons au sujet du théorème des fonctions composées une remarque importante. Si $f(u, v)$ désigne une telle fonction, u, v désignant des fonctions de x, on a

$$f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x$$

ou, en multipliant par dx,

$$df = f'_u\, du + f'_v\, dv.$$

Je n'ai pas remplacé f'_u et f'_v par $\frac{df}{du}$ et $\frac{df}{dv}$ parce qu'il en résulterait une confusion; l'équation précédente pourrait en effet s'écrire

$$(2) \qquad df = \frac{df}{du}\, du + \frac{df}{dv}\, dv.$$

On serait tenté de simplifier, et alors, en supprimant des facteurs communs, on trouverait $df = 2df$, ce qui est absurde; mais il est facile de voir que cette simplification ne doit pas se faire, les trois df figurant dans ces formules ayant des significations distinctes.

df qui est écrit dans le premier membre représente, aux termes du second ordre près, l'accroissement de f dû à l'accroissement dx donné à x. Au contraire, le premier df qui est écrit dans le second membre représente, aux termes d'ordre supérieur près, l'accroissement que prend f quand u seul croît de du, v restant constant. Or on conçoit que f prendra des accroissements tout différents, quand on fera varier à la fois u et v par un accroissement donné à x ou quand on fera varier v tout seul. Pour éviter toute confusion et pour marquer que l'on ne doit pas chasser les dénominateurs, on représentera les dérivées partielles de f

par les notations $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$, et la formule (2) s'écrira

$$df = \frac{\partial f}{\partial u}\, du + \frac{\partial f}{\partial v}\, dv,$$

ou encore

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx},$$

et l'on convient de regarder $\frac{\partial f}{\partial u}$ comme un symbole irréductible (*). Si en particulier $u = x$, on a

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx},$$

équation qu'il serait difficile d'écrire avec les notations de Lagrange; en effet, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{df}{dx}$ sont essentiellement distincts, et avec la notation de Lagrange on les représenterait tous deux par f'_x. Si l'on considère la fonction x^u, on aura

$$\frac{\partial f}{\partial x} = u x^{u-1}, \quad \frac{df}{dx} = u x^{u-1} + x^u \log x \frac{du}{dx};$$

ainsi, on n'a pas $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dx}$.

VI. — DIFFÉRENTIELLES DES DIFFÉRENTS ORDRES.

La fonction y a pour différentielle $y'dx$, et l'on peut écrire

$$dy = y'\, dx;$$

(*) En d'autres termes, on n'attache plus aucun sens à ∂f et à ∂x tout seuls, de telle sorte que $\frac{\partial f}{\partial x}$ ne peut plus se simplifier quand on le multiplie par ∂x.

mais $y'dx$ ou dy a lui-même une différentielle que l'on désigne par d^2y et que l'on calculera en multipliant la dérivée de $y'dx$ par dx. En prenant cette dérivée, on doit regarder dx comme une constante, en d'autres termes, supposer $d\,dx$ ou d^2x nul, parce que l'accroissement de x est arbitraire, et par suite indépendant de x; on a donc

$$d^2y = y''dx.dx = y''dx^2.$$

Ainsi, ce qui caractérise la variable indépendante x, c'est que dx est indépendant de x ou que $d^2x = 0$. De même, d^2y ou $y''dx^2$ a une différentielle égale au produit de sa dérivée $y'''dx^2$ par dx; on représente cette différentielle par d^3y, et l'on a

$$d^3y = y'''dx^3.$$

En général,

$$d^ny = y^{(n)}dx^n;$$

d^ny est ce que l'on appelle la *différentielle $n^{\text{ième}}$* de y. La formule précédente donne

$$y^n = \frac{d^ny}{dx^n},$$

d'où la notation $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ pour représenter la dérivée $n^{\text{ième}}$ de y.

VII. — CHANGEMENT DE VARIABLE.

Lorsque l'on considère des dérivées d'ordre supérieur, la notation différentielle perd une partie de ses avantages. Ainsi, en convenant de représenter par dy, d^2y, ... les différentielles d'une fonction y prises par rapport à x et par ∂y, $\partial^2 y$, ... les différentielles de la même fonction prises par rapport à t, on a, comme on l'a vu (p. 231),

$$(1)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x};$$

mais on n'a pas

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Nous allons calculer $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, ... en fonction de ∂y, $\partial^2 y$, ..., ∂x, $\partial^2 x$, ... A cet effet, différentions la formule (1) par rapport à x; le premier membre deviendra $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. Pour obtenir la dérivée par rapport à x du second, nous appliquerons le théorème des fonctions de fonctions et nous prendrons sa dérivée par rapport à t, que nous multiplierons par la dérivée $\dfrac{dt}{dx}$ de t prise par rapport à x; nous aurons ainsi

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial\dfrac{\partial y}{\partial x}}{\partial t}\,\frac{dt}{dx}.$$

Mais $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{\partial t}{\partial x}$; quant à $\partial\dfrac{\partial y}{\partial x}$, il est égal à $\dfrac{\partial^2 y\,\partial x - \partial^2 x\,\partial y}{\partial x^2}$. On a donc

$$(2)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial^2 y\,\partial x - \partial^2 x\,\partial y}{\partial x^3},$$

résultat qui diffère de $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ par le terme $-\dfrac{\partial^2 x\,\partial y}{\partial x^3}$. Si l'on voulait calculer $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, il faudrait prendre la dérivée du second membre de la formule précédente par rapport à t et la multiplier par $\dfrac{dt}{dx}$ ou $\dfrac{\partial t}{\partial x}$; on aurait ainsi

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\partial\dfrac{\partial^2 y\,\partial x - \partial^2 x\,\partial y}{\partial x^3}}{\partial t}\,\frac{\partial t}{\partial x},$$

ou, réductions faites,

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{\partial^3 y\,\partial x^3 - \partial^3 x\,\partial y\,\partial x^2 - 3\,\partial^2 x\,\partial^2 y\,\partial x + 3\,\partial^2 x^2\,\partial x}{\partial x^5},$$

et ainsi de suite.

Ces formules servent à changer de variable. Le changement de variable est un problème qui a pour but, étant donnée une expression contenant les dérivées d'une fonction y de x, la fonction y et la variable x, de calculer cette expression en n'employant que les dérivées d'une autre fonction η prises par rapport à une autre variable ξ, la fonction η et la variable ξ. y et x sont donnés, bien entendu, en fonction de ξ et de η. Pour résoudre cette question, on remplacera d'abord y et x par leurs valeurs en ξ et η, qui sont censées données; puis, désignant par un ∂ les dérivées de η relatives à ξ, on aura

(1) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x},$$

(2) $$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial^2 y\,\partial x - \partial^2 x\,\partial y}{\partial x^3}, \quad \ldots,$$

et l'on remplacera ∂y, ∂x, $\partial^2 y$, $\partial^2 x$, ... par leurs valeurs tirées des équations donnant x et y en fonction de ξ et η.

EXEMPLE. — *Que devient l'équation* $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ *quand on remplace x et y par ξ et η donnés par les formules*

(a) $$x = \xi + \eta, \quad y = \xi - \eta.$$

En vertu de (2), on peut écrire l'équation proposée

(b) $$\frac{\partial^2 y\,\partial x - \partial^2 x\,\partial y}{\partial x^3} = 0;$$

or les équations (a) donnent

$$\partial x = \partial\xi + \partial\eta, \quad \partial^2 x = \partial^2\xi + \partial^2\eta,$$
$$\partial y = \partial\xi - \partial\eta, \quad \partial^2 y = \partial^2\xi - \partial^2\eta,$$

et (b) devient, en prenant ξ pour variable indépendante, c'est-à-dire en faisant $\partial^2\xi = 0$ (p. 236)

$$-\frac{\partial^2\eta(\partial\xi + \partial\eta) - \partial^2\eta(\partial\xi - \partial\eta)}{(\partial\xi + \partial\eta)^3} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2\eta}{\partial\xi^2} = 0.$$

VIII. — REMARQUE AU SUJET DE LA FORMULE DE TAYLOR.

La formule de Taylor peut s'écrire

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \ldots + \frac{h^n f^n(x)}{1.2\ldots n} + Rh^n,$$

R désignant une quantité nulle pour $h = 0$; ceci suppose seulement $f^n(x)$ continu. Si l'on fait $h = dx$, $f(x+h) - f(x)$ sera Δf et $hf'(x)$ sera df, $h^2 f''(x)$ sera égal à $d^2 f$, etc. (p. 236) par définition même; on pourra donc écrire

(1) $$\Delta f = df + \frac{1}{2}d^2 f + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n}d^n f + \varepsilon,$$

ε désignant un infiniment petit d'ordre supérieur à n. Cette formule montre bien que la différence entre Δf et df n'est pas nulle; on voit qu'elle est égale à $\frac{1}{2}d^2 f$, en négligeant des termes d'ordre supérieur au second. Il ne faut pas oublier d'ailleurs que la formule (1) suppose $f^n(x)$ continu pour la valeur de x à laquelle on applique cette formule.

IX. — DES DIFFÉRENTIELLES TOTALES.

Soit $f(x, y, z)$ une fonction de plusieurs variables; on appelle *différentielle totale*, ou simplement *différentielle* de f, et l'on dénote par df l'expression

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

dans laquelle dx, dy, dz sont des accroissements arbitraires donnés à x, y, z. Quant à $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, ce sont les dérivées partielles de f relatives à x, y, z; en d'autres termes, $\frac{\partial f}{\partial x}$ est la dérivée de f prise par rapport à x en laissant y et z constants, $\frac{\partial f}{\partial y}$ est la dérivée de f prise par rapport à y en laissant x et z constants, etc.

Si, conformément à l'usage, on suppose dx, dy, dz choisis de telle sorte que leurs rapports restent finis, en d'autres termes si on les suppose de même ordre, la différentielle df pourra remplacer dans la recherche d'une limite de rapport l'accroissement Δf de f. En effet, on a, en donnant à x, y, z des accroissements dx, dy, dz,

$$\Delta f=f(x+dx,y+dy,z+dz)-f(x,y,z)$$

ou

$$\begin{aligned}\Delta f=&f(x+dx,y+dy,z+dz)-f(x,y+dy,z+dz)\\&+f(x,y+dy,z+dz)-f(x,y,z+dz)\\&+f(x,y,z+dz)-f(x,y,z).\end{aligned}$$

Δf est ainsi décomposé en trois différences qui peuvent respectivement se mettre sous les formes (p. 164)

$$dx f'_x(x+\theta dx,y+dy,z+dz),\quad dy f'_y(x,y+\theta' dy,z+dz)$$

et

$$dz f'_z(x,y,z+\theta'' dz),$$

θ, θ', θ'' désignant des nombres compris entre 0 et 1. Mais, si les fonctions f'_x, f'_y, f''_z sont continues (ce que nous supposerons), les coefficients de dx, dy, dz dans les trois expressions précédentes diffèrent infiniment peu de f'_x, f'_y, f'_z ou de $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, et, par suite, ces trois expressions différeront de $\frac{\partial f}{\partial x}dx$, $\frac{\partial f}{\partial y}dy$, $\frac{\partial f}{\partial z}dz$ par des infiniment petits d'ordre supérieur; on aura donc

$$\Delta f=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial z}{\partial f}dz+\alpha\quad\text{ou}\quad \Delta f=df+\alpha,$$

α désignant un infiniment petit d'ordre supérieur.

C. Q. F. D.

La différentielle de df se désigne par d^2f: c'est la *différentielle totale seconde* de df. La différentielle de d^2f que l'on désigne par d^3f est la différentielle troisième de f, ...

De même que nous avons remplacé les notations f'_x, f'_y, f'_z par $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, de même nous remplacerons la notation $f^{\alpha+\beta+\cdots}_{x^\alpha y^\beta\cdots}$, assez incommode, par la notation symbolique irréductible $\frac{\partial^{\alpha+\beta\cdots}f}{\partial x^\alpha\partial y^\beta\cdots}$, sans d'ailleurs chercher à attacher un sens précis aux éléments ∂x^α, ∂y^β, ..., $\partial^{\alpha+\beta\cdots}f$.

Cela posé, calculons d^2f. On a, par définition,

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$$

et

$$d^2f=\frac{\partial.df}{\partial x}dx+\frac{\partial.df}{\partial y}dy+\frac{\partial.df}{\partial z}dz,$$

c'est-à-dire, en observant que dx, dy, dz ne sont pas fonctions de x, y, z, puisqu'ils sont arbitraires,

$$d^2f = dx\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dy + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}dz\right)$$
$$+ dy\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}dz\right)$$
$$+ dz\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz\right),$$

ou

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2$$
$$+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}dy\,dz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}dx\,dz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx\,dy.$$

On peut écrire cette formule symboliquement

$$d^2f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^2 f,$$

en traitant ∂ aux numérateurs comme une véritable quantité; puis, en effectuant la multiplication par f, en l'écrivant à côté et à droite de ∂^2 en numérateur, je dis que l'on a plus généralement

$$d^nf = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^n f,$$

pourvu que, après avoir développé le produit

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^n$$

en considérant ∂ aux numérateurs comme une véritable quantité, on écrive f immédiatement après la lettre ∂^n. Cela résulte de la formule

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

en vertu de laquelle, pour différentier une quantité f, il suffit de la multiplier symboliquement par

$$(1)\qquad \frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz.$$

Pour différentier df, il faudra différentier chacun de ses termes, c'est-à-dire multiplier chaque terme symboliquement par $\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz$, ce qui donnera

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^2 f.$$

Pour avoir d^3f, on multipliera cette expression par le symbole (1), comme il a été expliqué, ce qui donnera

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^3 f,$$

et ainsi de suite.

X. — QUELQUES THÉORÈMES SUR LES DIFFÉRENTIELLES TOTALES.

I. Le théorème de Taylor, appliqué à la fonction $f(x, y, z)$, donne, en appelant dx, dy, dz des accroissements arbitraires de x, y, z,

$$\Delta f = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz + \frac{1}{1.2}(f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz)^2 + \ldots$$

ou, par définition,

$$\Delta f = df + \frac{1}{2}d^2f + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n}d^nf + \text{E},$$

E désignant un infiniment petit d'ordre supérieur à n. Cette forme du théorème de Taylor est fréquemment employée.

II. *En général, si l'on trouve une relation de la forme*

$$df = \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy + \mathrm{R}\,dz,$$

il faudra, si dx, dy, dz sont arbitraires, que l'on ait

$$(1) \qquad \mathrm{P} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \mathrm{Q} = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \mathrm{R} = \frac{\partial f}{\partial z},$$

car, df étant égal à $\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$, on aura

$$\mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy + \mathrm{R}\,dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

et, comme cette relation a lieu quels que soient dx, dy, dz, elle entraîne les formules (1) (t. I, p. 45, dernière ligne).

III. *Si la différentielle totale d'une fonction est toujours nulle, cette fonction est constante.*

En effet, dire que $df = 0$, c'est dire que l'on a, quels que soient dx, dy, dz,

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0,$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Or, $\frac{\partial f}{\partial x}$ étant nul, f est constant quand, faisant varier x, on laisse y et z constants : donc f ne contient pas x. On voit de même que f ne contient ni y ni z. Donc enfin f, ne dépendant ni de x, ni de y, ni de z, est une constante ou, plus exactement, ne varie pas quand, toutes choses égales d'ailleurs, on fait varier x, y, z.

IV. *Si l'on a établi une formule telle que*

$$\mathrm{A}\,df + \mathrm{B}\,dg + \ldots + \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy + \ldots = 0,$$

en négligeant des infiniments petits d'ordre supérieur au premier, A, B, C, ... *ne contenant pas dx, dy, ..., df, dg, ..., différentielles des variables x, y, ... et des fonctions f, g, ..., cette formule se trouve rigoureusement établie en vertu de la notation employée.*

En effet, si cette formule n'est pas exacte, son second membre 0 doit être remplacé par un certain infiniment petit ε d'ordre supérieur ; en divisant par dx, elle devient alors

$$\mathrm{A}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\frac{\partial f}{\partial y} + \cdots\right)$$
$$+ \mathrm{B}\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \cdots\right) + \cdots + \mathrm{P} + \mathrm{Q}\frac{dy}{dx} + \cdots = \frac{\varepsilon}{dx}.$$

Or, si l'on fait tendre dx vers zéro en conservant aux rapports $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{du}$, ... des valeurs finies y', z', ..., fixes, $\frac{\varepsilon}{dx}$ tend vers zéro, et l'on a rigoureusement

$$\mathrm{A}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \cdots\right)$$
$$+ \mathrm{B}\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}y' + \cdots\right) + \cdots + \mathrm{P} + \mathrm{Q}y' + \ldots = 0,$$

ou, en multipliant par dx et en observant que $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, ... sont restés les mêmes bien que dx ait pu varier, on a rigoureusement

$$\mathrm{A}\,df + \mathrm{B}\,dg + \ldots + \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy + \ldots = 0.$$

C. Q. F. D.

On verrait de même que, *si une équation telle que*

$$\mathrm{A}\,d^2 f + \mathrm{B}\,d^2 g + \ldots + \mathrm{P}\,dx^2 + \mathrm{Q}\,dy^2 + \ldots = 0$$

a été établie en négligeant des termes d'ordre supérieur au second, elle est rigoureusement exacte, etc.

Nous terminerons ce qui est relatif aux différentielles totales en faisant observer que l'on a

$$d(u \pm v \pm w) = du \pm dv \pm dw,$$
$$duv = u\,dv + v\,du,$$
$$d\frac{u}{v} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2},$$

dans le cas où d représente une différentielle totale comme dans le cas où il n'y a qu'une variable indépendante. Ainsi, par exemple, dans le cas où il y a deux variables x, y, on a

$$\begin{aligned} duv &= \frac{\partial uv}{\partial x}dx + \frac{\partial uv}{\partial y}dy \\ &= u\frac{\partial v}{\partial x}dx + v\frac{\partial u}{\partial x}dx + u\frac{\partial v}{\partial y}dy + v\frac{\partial u}{\partial y}dy \\ &= u\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) + v\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) \\ &= u\,dv + v\,du. \end{aligned}$$

Les autres formules se démontrent de la même façon.

Si θ est fonction de u, v, et si u et v sont fonctions de x, y, la différentielle totale de θ sera

$$\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial x}dx + \frac{\partial\theta}{\partial u}dy = {} & \left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx \\ & + \left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy \\ = {} & \frac{\partial\theta}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) \\ & + \frac{\partial\theta}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) \\ = {} & \frac{\partial\theta}{\partial u}du + \frac{\partial\theta}{\partial v}dv. \end{aligned}$$

EXERCICES ET NOTES.

1. Les seules fonctions d'une variable dont les différentielles sont égales aux accroissements sont de la forme $ax + b$, a et b désignant des constantes.

2. Traiter les exercices 26 et 27 du paragraphe précédent en faisant usage de la méthode infinitésimale.

3. Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe entre les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ une relation de la forme $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0$ est que l'on ait

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0.$$

4. Déterminer l'ordre infinitésimal de $e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\sin x$, $1 - \cos x$ par rapport à x.

5. Déterminer l'ordre infinitésimal de $(1 + \alpha)^{\frac{1}{2\alpha}}$ par rapport à α, de $\log^2 x$ par rapport à $x - 1$, de $x^\alpha - 1$ par rapport à α.

6. Calculer les différentielles totales de

$$x^y + y^x, \quad \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}, \quad \log\sqrt{x^2 + y^2}.$$

7. Interpréter géométriquement les expressions dx, dy et d^2y.

FIN DE LA DEUXIÈME PARTIE.

TABLE DES MATIÈRES.

DEUXIÈME PARTIE.

12170 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55.