Claudio
D
Mar.
3
78
Tom. 2

A
29-99

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
GRANADA
Q
329
3
99

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
Dup 1º Incomp 1º
8-6-9
3-44-17
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
GRANADA
ARCHIVO DE LA UNIVERSIDAD
ARCHIVO DE LA UNIVERSIDAD
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA GRANADA

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA

Pr-11.169

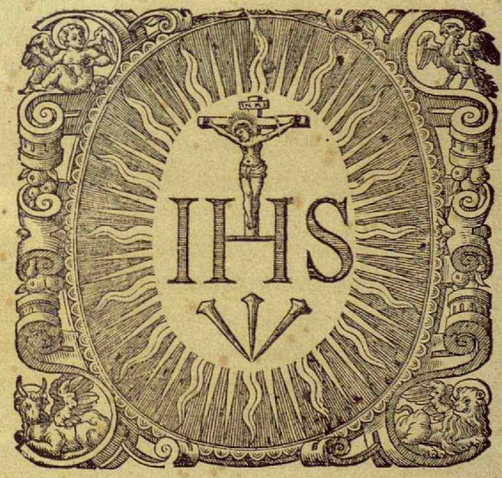
CHRISTOPHORI CLAVII BAMBERGENSIS E SOCIETATE IESV OPERVM MATHEMATICORVM

TOMVS SECVNDVS,

Complectens

GEOMETRIAM PRACTICAM,
ARITHMETICAM PRACTICAM,
ALGEBRAM.

Omnia in hac editione ab ipso auctore multis in locis correcta & aucta.



MOGVNTIÆ,
Sumptibus ANTONII HIERAT, excudebat
REINHARDVS ELTZ.
Cum Gratia & Priuilegio Sacræ Cæsar. Maiest.

ANNO M. DC. XI.

it1838103

CHRISTOPHORI CLAVII BAMBERGENSIS è SOCIETATE IESV

GEOMETRIA PRACTICA.

PRÆFATIO.

QVANDOQVIDEM Mathematicarum diſciplinarum ſtadium ſcribendo ingreſſi, nonnullam eius partem, fauente Deo, percurrimus: Geometriæ practicæ tractatio omittenda non fuit, vt niſi metam tangere licuerit, ab illa certe quam minime diſtemus. Ætatem ſenectute grauem allicit operis iucunditas, laborem leuat varietas, amicorum preces tantum non cogunt, quò mea ferebar ſponte, ſumma cum feſtinatione properare. Et vero, cum perpetua multorum annorum experientia compererim, admodum paucos eſſe, qui non in Mathematicis exerceantur eo conſilio, vt quæ didicerint, ad aliquem vſum trahant: in hoc quicquid eſt laboris veniebam alacer, vt qui fructus è Mathematicis percipi poſſint ad humanæ vitæ cõmoda, non inani venditatione, ſed re ipſa conſtaret. Etenim dum certa ratio traditur, qua camporum longitudines, altitudines montium, vallium depreſſiones, locorum omnium inæqualitates inter ſe, & interualla deprehendere metiendo debeamus: cuilibet liquet, vt arbitror, quantum commodi, vtilitatiſque ſubſtructioni ædificiorum, cultui agrorum, armorum tractationi, contemplationi ſiderum, aliiſque artibus, & diſciplinis ex horum cognitione manare poſſit. Hæc enim vna Mathematicarum rerum ſcientiæ pars, ſicut ab artificibus ob ſui neceſſitatem auide ſemper eſt arrepta: ita ob inſignes vtilitates, quas in re tota militari ſuppeditat, in maximorum Principum, Regumq; aulis omni tempeſtate verſata eſt. Quamobrem & multos, & eruditos viros habuit, qui partes illius omnes accurata, & diligenti ſcriptione perſecuti ſunt: Inter quos, vt Leonardus Piſanus, Frater Lucas Pacciolus, Nicolaus Tartalea, Orontius, Cardanus, aliique præcipuas obtinuerunt: ita eximia in cæteris laude floruerunt. Primas tamen adiudicarim Jo. Antonio Magino præſtanti Mathematico; qui tametſi tantum linearum dimenſiones docuit, ea tamen copia, doctrina, perſpicacitate cuncta tradidit, vt locum non modo iis,

qui ante ſcripſerunt, ſed ſpem poſteris, æqualis gloriæ ne dum maioris, ademiſſe videatur. Verum quoniam & hic de vnica tantum parte fuit ſollicitus: & alii, quamuis aggreſſi omnia, multa tamen inter ſcribendum præterierunt: decreui, ſi qua poſſem, perficere: vt, quicquid vtiliter in Geometria practica ab aliis traditum, à me etiam inuentum eſt, vnius operis gyro clauderetur. Quod opus, cum ſpecies tres quantitatis continuæ ſint, in tria membra, parteſq; præcipuas ſecuimus: In prima rectas lineas, in altera ſuperficies, corpora metientes in poſtrema: cui adnectuntur alia, quę non tam ad quantitatis dimenſionem, quam ad alias Geometriæ praxes, ac demonſtrationes pertinent, à noſtro inſtituto non aliena.

VNIVERSAM autem tractationem in octo libros partiti ſumus.

PRIMVS propoſitiones tres omnino neceſſarias, & per quam vtiles ad omnium magnitudinum dimenſionem accurate perficiendam continet.

IN ſecundo dimenſio linearum rectarum per Quadrantem Aſtronomicum tam pendulum, quam ſtabilem abſoluitur.

TERTIVS de earundem rectarum linearum dimenſione per Quadratum Geometricum tum pendulum, tum ſtabile, etiam per vnicam ſtationem agit. Vbi etiam, qua ratione ſine huiuſmodi inſtrumento earundem rectarum linearum Dimenſiones nonnullæ fieri poſſint, traditur.

QVARTVS ſuperficierum areas inquirit:

QVINTVS ſolidas magnitudines metitur.

ATQVE hiſce quinque libris omnes tres partes Geometriæ practicæ à nobis propoſitæ explicantur.

IN ſexto deinde libro de Geodæſia, id eſt, de ſuperficierum rectilinearum cuiuſque generis Diuiſione tam per rectas ex certo aliquo puncto ductas, quã per lineas parallelas, diſſeritur. Vbi nonnulla etiam alia problemata ad idem argumentũ ſpectantia ſoluuntur. Item qua ratione figuræ tam planæ, quam ſolidæ, vna cum circulo ac ſphæra in data proportione augendæ ſint, minuendæve. In cuius rei gratiam modi aliquot proponuntur inueniendarum duarum mediarum proportionalium inter duas rectas datas. Deniq; ars facilis, & expedita pro extrahendis radicibus cuiuſq; generis præſcribitur.

SEPTIMVS de figuris Iſoperimetris diſputat.

IN Octauo denique varia problemata ac theoremata Geometrica pertractantur.

GEO-

GEOMETRIÆ PRACTICÆ

LIBER I.

Tria capita ad dimenſionem linearum ſumme neceſſaria complectens,

VTmagnitudinum dimenſio omnibus ſuis numeris abſoluta, perfectaque reddatur, tria primo hoc libro diligenter explicanda prius erunt. Primum conſtruenda eſt norma quædam variarum partium, quam non incongrue Inſtrumentum partium vocare poſſumus; quod in eo variæ partes & ad lineas rectas, & ad circulos diuidendos, tum etiam ad alias operationes ſiue Geometricas, ſiue Aſtronomicas rite perficiendas contineantur. Huius enim vſus credi vix poteſt, quam late pateat tum in dimetiendis magnitudinibus ſine numerorum multiplicatione, tum vero maxime in horologiis Solaribus ea ratione, quam per lineas Tangentes in noua horologiorum deſcriptione tradidimus, deſcribendis, & in aliis rebus tam Geometricis, quam Aſtronomicis, vt ex iis, quæ capite primo huius libri, & alibi tradituri ſumus, perſpicuum fiet. Secundo loco conficiendus eſt quadrans, in quo, præter gradus, Minuta quoque ac Secunda (quamuis in eo deſignata non ſint) cognoſci, ac diſcerni queant; docendumque, qua ratione idem præſtari poſſit in quolibet quadrante in 90. gradus exquiſite diſtributo: parteſq; centeſimæ, atque milleſimæ in recta quauis linea in pauciſſimas partes æquales diuiſa dignoſcendæ ſint. Tertio atque poſtremo loco proponenda erunt, ac ſoluenda varia problemata triangulorum rectilineorum, vt & latera eorum, atque anguli ex quibuſdam datis, & cognitis facile poſſint cognoſci. Quamuis enim eadem hæc problemata ad finem Lemmatis 53. lib. 1. noſtri Aſtrolabii expoſita ſint, tamen ne ſtudioſus lector ad illud Lemma ſæpius, & non ſine moleſtia recurrere cogatur, libet ea hic repetere totidem pene verbis, quot in prædicto lemmate perſcripta ſunt. Sed ecce tria hæc, quæ præmittenda eſſe diximus, tribus capitibus explicata ſequuntur.

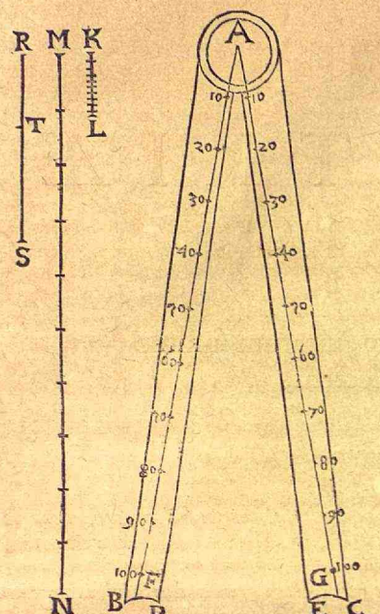
INSTRVMENTI PARTIVM Conſtructio, atque vſus.

CAPVT I.

Inſtrumentum partium quo pacto conſtruatur.

FIANT ex orichalco, vel alia materia ſolida duæ regulæ ABD, AEC, æquales omnino, quæ in A, ita coniungantur clauo aliquo tereti, vt circa A, vniformiter poſſint moueri, quemadmodum in Norma vulgari, quæ, prout opus eſt, conſtringi poteſt, & dilatari, fieri ſolet. Deinde ex A, in planis dictarum regularum duæ rectæ ducantur AF, AG, eæq; in 100. particulas æquales diſtribuantur, vel in 1000. ſi longiores ſint. Ita enim ex qualibet recta quotuis partes centeſimæ, aut milleſimæ abſcindi poterunt. Immo ſi ſumatur linea KL, continens 11. particulas ex illis 100. vel 1000. diuidaturque in 10. partes æquales, ſi quidem ſecta ſit vtraque regula in 100. partes æquales, poterunt beneficio rectæ KL, continentis 11. particulas eiuſmodi, & in 10. partes æquales diuiſæ, ex data recta qualibet accipi quotuis milleſimæ partes, perinde ac ſi partes ſingulæ centeſimæ in vtraque regula ſectæ eſſent in denas particulas æquales: ſi vero vtraque regula in 1000. particulas diſtributa ſit, & linea KL, talium 11. partium in 10. particulas diſſecta, poterunt ex quauis linea recta propoſita partes, quot quis voluerit, milleſimarum decimæ auferri, non ſecus ac ſi ſingulæ partes milleſimæ in regula diſtributæ eſſent in 10. particulas æquales, vt in vſu inſtrumenti dicemus.

RVRSVS si regula contineat 100. partes, & recta quæpiã MN constans ex 101. eiusmodi particulis distribuatur in 100. partes, poterimus ex data accipere partes decimas millesimarum. At si in regula notatæ sint 1000. partes & linea quæpiam continens eiusmodi partes 101. secetur in 100. partes, deprehendi poterunt in qualibet recta quotcunque partes centensimæ millesimarum, ac si partes singulę millesimæ in regula complecterentur partes 100. Si denique linea earum partium 1001, diuidatur in 1000. partes, capiemus in quauis recta partes millesimas millesimarum, perinde ac si partes millesimæ singulæ in regula partes 1000. comprehenderent, vt ex vsu instrumenti constabit. Atq; hæc est, constructio instrumenti in vna facie pro partibus linearum rectarum inquirendis.



IN altera vero instrumenti facie designantur chordæ omnium arcuũ quadrantis hoc modo. Ductis ex centro A, rectis AF, AG, vt in priori facie, sumendus est quadrans circuli chordam habens æqualem rectæ AF, & in rectas AF, AG, transferenda chorda gradus 1. illius quadrantis, deinde chorda grad. 2. 3. 4. 5. & sic deinceps vsq; ad chordam 89. graduum: ita enim ex quolibet quadrante abscindere licebit arcum quotcunq; graduum, vt Num. 16. dicetur: quamuis nos beneficio particularum æqualium in priori facie positarum capiemus ex quadrante proposito non solum gradus integros, sed etiam minuta, quod Num. 14. docebimus. Atque ita absoluta est constructio instrumenti in altera facie. Huius instrumenti vsus amplissimus est, vt diximus, & non obscure ex iis, quæ sequuntur, intelligi potest.

Centesima vel millesimæ partes in recta linea quo modo accipiantur.

1 QVANDO enim linea recta proposita rectæ AF, vel AG, in priori facie instrumenti æqualis est, nullo negotio ex ea abscindentur quotcunq; partes centesimæ, prout instrumentum in 100. aut 1000. partes fuerit diuisum; si nimirum partes, quæ desiderantur, ex instrumento in datam rectam transferantur.

2 QVANDO vero proposita linea non est æqualis rectæ AF, vel AG, in instrumento, dilatandum instrumẽtũ est, vel constringẽdũ, donec interuallũ inter F, G, datæ lineæ sit æquale. Nã circinus inter partes rectarũ AF, AG, quæ, desiderantur, extensus dabit in recta proposita partes quæsitas. Vt si data recta æqualis sit ipsi FG, & desiderentur 50. partes centesimæ, continebit interuallum inter partes 50. & 50. in lineis AF, AG, partes 50. ex 100. in quas recta FG, cogitatur esse diuisa, quod sic demonstratur. [a] Rectæ FG, & 50. (si concipiatur ducta recta à parte 50. ad partem 50.) parallelæ sunt, propterea quod latera AF, AG, proportionaliter secta sunt in 50. & 50. Sunt enim tam AF, AG, quam A 50. A 50. [b] æquales. Igitur erit vt A 50. ad rectam 50. 50. ita AF, ad FG. Et permutando vt A 50. ad AF, ita recta 50. 50. ad FG. Cum ergo A 50. contineat partes 50. ex 100. totius AF, continebit quoque recta 50. 50. partes 50. ex 100. in quas diuisa esse concipitur FG. Eademque ratio est de cæteris. Nam verbi gratia interuallum quoq; inter puncta 80. & 80. partes 80. complectetur ex 100. totius FG, &c. quæ demonstratio locum etiam habet, si in AF, contineantur 1000. partes vt constat.

a 2. sexti.

b 4. sexti.

Diuisa recta in quotuis partes æquales, quot eiusmodi partes in quauis alia cõtineantur.

NON aliter, propositis duabus rectis, quarum altera in quotlibet partes æquales cogitetur esse diuisa, cognoscemus, quotnam ex illis partibus altera recta contineat; hac scilicet ratione. Aperto instrumento, statuatur interuallum rectæ diuisæ inter partes, in quas diuisa intelligitur. Nam si altera per circinum transferatur inter duas alias partes easdem, vel inter duo puncta ab eisdem duabus partibus æqualiter distantia, continebit illa recta tot partes, quot in regula AF, includuntur inter centrum A, & circini pedem: [c] propterea quod eandem proportionem habet segmentum regulæ AF, vsque ad interuallum rectæ diuisæ, ad segmentum eiusdem regulæ vsque ad interuallum alterius lineæ, quam interuallum rectæ diuisæ ad interuallum alterius lineæ habet, &c. Quod si linea hęc altera esset nimis longa, auferendum ex ea primum esset interuallum inter 100. & 100. quoties fieri potest. Deinde reliquum segmentum transferendum in instrumentum, vt dictum est. Verbi gratia; si altera rectarum diuisa sit in 50. partes æquales, sumemus ei æquale interuallum inter 50. & 50. Si ergo altera habuerit interuallum æquale rectæ FG, inter 100. & 100. continebit ea 100. partes æquales. Et si in ea supereresset segmentum æquale interuallo 30. 30. contineret eadem recta partes 130. Quod si interuallum inter 100. & 100. ter in data recta contineretur, & insuper segmentũ æquale interuallo 40. 40. complecteretur ea recta particulas 340. &c.

c 4. sexti.

Tangentes quo modo accipiãtur respectu sinus totius 100.

3 ITAQVE si in Tangentibus nouæ descriptionis horologiorum (vt huius instrumenti vtilitatẽ quoq; in describendis horologiis aperiamus) sinus totus statuatur 100. quantuscunq; ille sit, eiq; interuallum FG, potest æquale, capiemus commodissime quamcunq; Tangentem tabulæ in noua descriptione positæ, si ea, abiecta prima tantum figura ad dexteram, minor fuerit quam 100. Vt si quæratur Tangens Gr. 39. min. 57. quoniam ea in tabula est 838. si abiiciatur prima figura 8. ad dexteram, erit Tangens 83. respectu sinus totius 100. vel potius 84. propterea quod figura 8. abiecta maior est, quam 5. ac proinde pro ea vnitas adiicienda est, cum constituat $\frac{8}{10}$. hoc est, plusquam $\frac{1}{2}$. Itaque accipiantur in instrumento partes 84. paulo minus, vt dictum est, habebitur Tangens quæsita: si vero Tangens in tabula, abiecta prima figura ad dexteram, maior fuerit quam 100. accipienda est Tangens per denas, atque vnitates expressa, relictis centenis, & illi Tangenti postea sinus totus adiiciendus est toties, quoties vnitas in centenis reperitur. Vt si quis velit Tangentem Gr. 68. min. 50. Quoniam ea in tabula est 2583. & adiecta prima figura, 258. sumenda est Tangans 58. cique sinus totus FG, bis adiiciendus, & sic de reliquis.

Millesimæ partes, quo modo capiantur, etiamsi in instrumento contineantur tantum partes 100.

4. QVOD si rectam KL, partium 11. in 10. æquales partes diuisam adhibere velimus accipere poterimus ex data recta partes millesimas. Quoniam enim ita se habet linea KL, ad vnam eius partem, vt portio A, 10. rectæ AF, decem partium ad vnam, cum vtrobique proportio sit decupla; erit permutando quoque KL, ad A, 10. vt vna particula ipsius A 10. Cum ergo KL, contineat ipsam A, 10. semel, & insuper partem ipsius decimam, (sumpta est enim KL, partium 11. qualium 10. est A, 10.) continebit quoque vna particula ipsius KL, vnam particulam ipsius A 10. semel, & decimam insuper eius partem: Atque adeo duæ illius includent duas huius cum $\frac{2}{10}$. & tres continebunt tres cum $\frac{3}{10}$. & sic deinceps. Quare si verbi gratia desiderentur $\frac{837}{1000}$. accipiendæ erunt octo partes ex 100. totius AF, & insuper $\frac{7}{10}$. sequentis partis nonæ, cum decima pars vnius centesimæ sit $\frac{1}{1000}$. quod ita fiet. Circino aliquo sumantur 7. partes ex KL, æque in AF, transferentur ex qualibet parte. Nam pes circini mobilis auferet $\frac{7}{10}$. ex octaua parte post pedem circini immobilem, quæ particula in nonam partem est transferenda. Ita enim, cum octo partes complectantur $\frac{80}{100}$. vnius centesimæ, (quod quælibet pars contineat $\frac{10}{100}$. vnius centesimæ) hoc est, $\frac{800}{1000}$. & $\frac{7}{100}$. vnius centesimæ contineant $\frac{7}{1000}$. comprehendet tota linea abscissa $\frac{837}{1000}$. Item si quis cupiat $\frac{17}{1000}$. accipienda erit vna pars ipsius AF, & $\frac{7}{10}$. sequentis partis secundæ, vt paulo ante dictum est. Vel sic agemus. Sumptis 7. partibus ex KL, transferemus eas in AF, vbicunque libuerit. Nam abscissæ partes erunt $7\frac{7}{10}$. Vna ergo pars cum $\frac{7}{10}$. continebit $\frac{17}{1000}$. Denique si optentur $\frac{457}{1000}$. sumendæ erunt ex recta AF, partes 45. cum hæ æquiualeant $\frac{450}{1000}$. Deinde $\frac{7}{10}$. ex sequenti parte quadragesima sexta, beneficio septem particularum rectæ KL, &c.

Tangentes quo modo inueniantur, posito sinu toto 100.

5 SI ergo sinus totus ponatur 1000. habebuntur Tangentes, vt in tabula nouæ descriptionis horologiorum positæ sunt, nulla figura abiecta. Sed quando Tangens maior est quam 1000. relictis millenis, accipiendæ sunt reliquæ partes millesimæ pro Tangente, eiq; toties sinus totus addendus, quoties vnitas in millenis relictis reperitur. Vt si quis velit Tangentem Grad. 40. min. 30. quæ in tabula est 854. accipiendæ sunt in regula AF, partes 85. & $\frac{4}{10}$. vnius. Ita enim Tangens continebit partes 854. ex 1000. At si quæratur Tangens continebit partes 854. ex 1000. At si quæratur Tangens Grad. 80. min. 0. quæ in tabula est 5671. relictis millenis, accipiendæ sunt partes 67. & $\frac{1}{10}$. vnius partis, & Tangenti 671. addendus sinus totus quinquies.

Decimæ partes millesimarum quo modo sumantur, etiamsi instrumẽtum diuisum sit in 1000. partes duntaxat.

6 PARI ratione si adhibeatur recta MN, partium 101. diuisa in 100. depromemus ex recta AF, partes decimas millesimarum; cum quælibet particula rectæ MN, contineat vnam particulam ipsius AF, semel, & insuper $\frac{1}{100}$. Ita vt quælibet particula rectæ AF, diuisa esse cogitetur in 100. particulas; ac proinde tota AF, sit 10000. particularum, quod eodem modo demonstrabitur. Est enim eadem proportio MN, ad vnam particulam suam centesimam, quæ rectæ AF, ad vnam suam centesimam, &c.

Tangẽtes, posito sinu toto 10000. quo pacto sumantur.

7 ATQVE hac ratione haberi poterunt Tangentes, posito sinu toto 10000. abiectis nimirum tribus figuris primis ex Tangentibus tabulæ in nostro Theodosio descriptæ. Vt si velimus Tangentem Grad. 78. Min. 30. quæ in tabula (abiectis tribus figuris) est 49151. relictis denis millenarum, accipiemus partes 9151. nimirum partes 91. ex 100. regulæ AF, & $\frac{51}{100}$. vnius quod fiet, si partes 51. rectæ MN, transferantur in AF. Circinus enim vltra partes 51. abscindet $\frac{51}{100}$. Nam quia singulæ particulæ rectæ AF cõcipiuntur sectæ in 100. particulas, continebuntur in 91. partibus particulæ 9100. quibus si addantur 51. habebitur Tangens 9151. Huic tandem apponendus est sinus totus quater, propter quatuor denas millenarum relictas. Facile autem ad 91. partes adiicies particulam continentem $\frac{51}{100}$. vnius centesimæ, si eam, (quæ nimirum vltra partes 51. regulæ AF, existit) cum vna parte regulæ AF, transferas, vt pes circini inter partes 91. & 92. cadat, hoc est, si eam cum vna parte transferas ex parte 90. vel cum duabus partibus, ex parte 89. &c.

Qua ratione ex inuenta parte millesima, vel decies millesima in AF, eadem reperiatur respectu datæ sinus totius.

8 INVENTA porro Tangente in vtraque regula AF, AG, dabit interuallum inter Tangentem regulæ AF, & Tangentem regulæ AG, eandem Tangentem respectu sinus totius FG.

9 QVANDO autem Tangens tam exigua est, vt eius interuallum prope punctum A, accipi nequeat, vtemur hoc artificio. Sit verbi gratia sumenda Tangens 7. partium respectu sinus totius FG. Sumptis duabus Tangentibus maioribus, quarum maior minorem septem vnitatibus superet, nimirum 30. & 37. vel 80. & 87. &c. dabit earum differentia (si nimirum vtraq; in aliquam rectam lineam transferatur) Tangentem 7. quæ quæritur: Atque ita semper sumendæ erunt duæ tangentes maiores prope medium instrumentis quarum differentia æqualis sit Tangenti exiguæ propositæ.

Quo pacto cognoscatur, quot decimæ in particula cuiusuis centesimæ partis contineantur.

10. SI vtraque regula AF, AG, contineat 1000. particulas, & sinus totus propositus constituatur 1000. eique interuallum FG, æquale sumatur, commodissime accipientur omnes Tangentes, vt in tabula nouæ descriptionis horologiorum positæ sunt. Nam verbi gratia Tangens 2430. Grad. 67. min. 38. habebitur, si relictis millenis, sumatur interuallum inter partes 430. vtriusque regulæ AF, AG, eique sinus totus FG, bis adijciatur.

11. ET si adhibeas lineam KL, partium 11. diuisam in 10. accipere poteris Tangentes respectu sinus totius 10000. Item si rectam partium 101. in 100. particulas distributam adhibeas, habebis Tangentes respectu sinus totius 100000. Si denique rectam partium 1001. partiaris in 1000. particulas, obtinebis Tangentes, posito sinu toto 1000000. vt ex dictis patet.

a 4. sexti.

12. QVOD dictum est de Tangentibus, intelligendum est etiam de sinubus, & secantibus. Nã si interuallũ FG, æquale sit sinui alicui toti, siue is partiũ sit 100. siue 1000. siue pluriũ, dabunt interualla inter sinus, vel secantes in vtraque regula AF, AG, acceptas, per ea, quæ Num. 4. docuimus, sinus & secantes respectu sinus totius FG, accepti; propterea quod per Lemma 5. lib. 1. nostri Astrolabii, eandem proportionem habet sinus totus AF, ad sinum totum FG, quam sinus verbi gratia A, 50. ad sinum arcus circuli, cuius semidiameter FG, qui arcus arcui sinus A, 50. similis est. [a] Cum ergo sit, vt AF, ad FG, ita A 50. ad rectam 50. 50. erit recta 50. 50. sinus arcus, qui arcui sinus A, 50. similis est. Eademque ratio est de secantibus.

13. Vicissim cognoscemus, quot particulas ex 1000. quælibet particula vnius partis rectæ AF, complectatur: hoc scilicet modo. Circino sumatur data particula, vna cum vna parte centesima, vel duabus, vel tribus, quatuorue; circinusque decies repetatur in recta AF, diligenterque notetur segmentum rectæ AF, quod circinus percucurrit. Nam si ex partibus centesimis in eo segmento contentis abiiciantur toties 10. quot partes vna cũ particula data sumptæ fuerunt, reliquus numerus indicabit partes decimas vnius centesimæ, hoc est, millesimas in data particula cõprehẽsas. Et si cũ reliqua particula eius segmẽti (si qua forte supersit) similiter agem°, re-

periemus partes decimas vnius milleſimæ, hoc eſt, partes $\frac{1}{10000}$. Et ſi iterum operationem repetemus, inueniemus partes $\frac{1}{100000}$. quod quidem ad finem libelli de fabrica, & vſu inſtrumenti horologiorum demonſtrauimus, eãdemque demonſtrationem breuiter capite inſequenti Num. 14. repetemus. Exempli cauſa. Si particula data cum tribus centeſimis decies repetita percurrat partes 37. abiectis 30. continebuntur in data particula $\frac{7}{10}$. vnius centeſimæ. Quare ſi ea particula data fuerit v. g. poſt vigeſimam partem centeſimam, continebit illud ſegmentum rectæ AF, $\frac{107}{10000}$. Nam $\frac{7}{10}$. vnius centeſimæ faciunt $\frac{7}{10000}$. & 20. centeſimæ, ſi ſingulæ in decem particulas cogitentur eſſe ſectæ, efficiunt $\frac{200}{10000}$. quippe cum omnes centum partes æquiualeant 1000. particulis. Quod ſi idem fiat cum reliqua particula (ſi qua forte ſuperfuerit poſt 37. partes percurſas) vna cum tribus centeſimis, & inciderimus verbi gratia in particulam 34. abiectis 30. continebit ea particula $\frac{4}{10}$. vnius milleſimæ, hoc eſt. $\frac{4}{10000}$. Et quia $\frac{107}{10000}$ æquiualent $\frac{1070}{100000}$. ſi addantur $\frac{4}{100000}$. vltimo loco deprehenſæ, habebimus $\frac{1074}{100000}$. Si denique cum reliqua particula (ſi qua forte remanſerit) vna cũ tribus centeſimis idem fiat, percurſæq; verbi gratia ſint 39. partes, abiectis 30. ſupererunt $\frac{9}{10}$. vnius partis $\frac{1}{10000}$. hoc eſt, $\frac{9}{100000}$. Cum ergo $\frac{1074}{100000}$. efficiant $\frac{10749}{1000000}$. ſi addantur $\frac{9}{100000}$. habebimus $\frac{10749}{1000000}$. Atq; adeo ſi recta AF, ſtatuatur ſinus totus partiũ 100000. erit ſegmentũ 20. partium cum particula data, ſinus partium 20749. Si particula data commode per circinum poſſit cõprehendi, & decies repetatur, dabũt centeſimæ partes percurſæ partes decimas vnius centeſimæ, &c. Si quoq; nonnunquam nulla ſuperſit particula, ita vt verbi gratia inuentæ ſint præciſæ $\frac{1074}{10000}$. multiplicandus erit tam numerator, quam denominator per 100. vt habeatur ſinus 20700. reſpectu ſinus totius 100000. quemadmodum & 40. centeſimæ conſtituunt ſinum 40000. reſpectu ſinu totius 100000. Si namque vterque numerus minutiæ $\frac{40}{100}$. ducatur in 1000. fiet minutia $\frac{40000}{1000000}$.

Ex circulo qua ratione abſcindatur arcus datorũ gr. ac min.

14. HOC eodem inſtrumento, & in eadem facie partium æqualium, ex data qualibet circumferentia auferemus arcum quotuis graduum, & minutorum, hac arte. Sit ex quadrante, cuius ſemidiameter interuallo F-G, æqualis ſit, abſcindẽdus verbi arcus gr. 53. min. 30. hoc eſt chorda huius arcus inuenienda. Sumatur ex tabula ſinuum ſinus ſemiſſis propoſiti arcus, graduũ videlicet 26. min. 45. qui ſinus, abiectis quatuor figuris ad dexteram, eſt 450. reſpectu ſinus totius 1000. Si ergo ſinus hic reſpectu ſinus totius AF, accipiatur in recta AF, vſque ad 45. per ea, quæ ſupra Num. 4. & 12. tradita ſunt, dabit interuallum inter 45. & 45. ſinum quoque eundem reſpectu ſinus totius FG. quod interuallum duplicatum dabit chordam dupli arcus grad. 26. min. 45. id eſt, chordam arcus grad. 53. min. 30. qui quæritur. Si ſinus totus ſtatuatur 10000. erit ſinus grad 26. min. 45. in tabula ſinuum 4501. abiectis nimirum tribus, figuris ad dexteram, qui in AF, capietur, vt Num. 6. & 12. dictum eſt.

Quot gradus, ac minuta in dato arcu contineantur, quo pacto cognoſcatur.

QVOD ſi vtraque regula AF, AG, continet 1000. partes, ſtatui poterit ſinus totus 100000. & etiam plurium partium, ſi nimirum adhibeatur recta MN, partium 101. diuiſa in 100. particulas, vel alia recta partium 1001. in 1000. particulas ſecta.

15. E CONTRARIO facile etiam cognoſcemus, quot gradus, & minuta in propoſito arcu cuiuſuis quadrantis contineantur. Sit enim in quadrante, cuius ſemidiameter FG, cui æqualis ſit recta RS, datus aliquis arcus, cuius chordæ ſemiſſis ſit RT. Huic RT, æqualis inueniatur recta 40. 40. inter rectas AF, AG, ita vt puncto 40. 40. vel abſcindant æquales partes, vt in dato exemplo, vel æqualiter diſtent à duabus partibus æqualibus. Deinde per ea, quæ Num. 13. ſcripſimus, inquiratur, quot partes ex 1000. vel 10000. vel 100000. in ſegmento ab A, vſque ad punctum inuentum 40. comprehendantur. In dato exemplo reperiuntur partes 400. vel 4000. vel 40000. prout ſinus totus conſtituitur 1000. vel 10000. vel 100000. atque tantus eſt ſinus 40. 40. reſpectu ſinus totius FG, cui reſpondent Grad. 23 min. 35. Duplus ergo arcus gr. 47. min. 10. qui chordæ ipſius RT, duplæ debetur, erit is, qui quæritur.

Quo pacto aliter ex circulo abſcindantur arcus datorum gr. & min.

16. IN altera facie inſtrumenti, in quam chordæ arcuum quadrantis ſunt translatæ, facilius arcum quotcunque graduum accipiemus, hoc modo, Chordæ quadrantis propoſiti ſumatur æquale interuallum FG: Vel etiam ſemidiametro Quadrantis, chordæ nimirum grad. 60. capiatur interuallum 60. 60. æquale. Si igitur verbi gratia deſideret quis arcum grad. 56. ſumendum erit per circinum interuallum inter puncta 56. & 56. Huic enim æqualis eſt chorda grad. 56. Si præter gradus accipienda ſint etiam minuta, oportebit per æſtimationem in ſequenti particula accipere talem partem ipſius, qualem minuta propoſita partem vnius gradus conſtituunt, Vt ſi cupiat quis min. 30. ſumenda eſt ſemiſſis, ſi 20. tertia pars, &c. Interuallum enim inter partem regulæ AF, & partem regulæ AG, acceptum dabit chordam quæſiti arcus.

Quo pacto aliter cognoſcatur, quot grad. & min. in dato arcu comprehẽdantur.

VICISSIM ſi cognoſcere velimus, quot gradus, ac minuta in dato arcu exiſtant, inueſtiganda erit eius chorda inter rectas AF, AG, ita vt puncta eius cadant vel in duas partes eaſdem, vel æqualiter à duabus eiſdem diſtent. Nam tot gradus continebuntur in dato arcu, quot gradus continentur in recta AF, à centro A, vſque ad punctum, è quo chorda dati arcus in rectam AG, translata eſt: ita vt ſi dati arcus chorda extiterit inter grad. 70. & 70. propoſitus arcus complectatur grad. 70. &c.

Qua ratione ex data recta pars imperata abſcindatur.

17. IAM vero nemo neſcit, ſi ex linea aliqua abſcindenda ſit $\frac{1}{2}$. vel $\frac{1}{3}$. vel $\frac{1}{7}$. vel denique quæcunque pars, cuius denominator maior non ſit quam 100. quo pacto id fieri debeat. Si namque interuallum FG, in priori facie inſtrumenti æquale fuerit datæ rectæ, dabit interuallum inter 50. & 50. partem $\frac{1}{2}$. Interuallum autem inter 25. & 25. partem $\frac{1}{4}$. Interuallum vero inter 20. & 20. partem $\frac{1}{5}$. Item ſi interuallum inter 90. & 90. vel inter 60. & 60. vel inter 30. & 30. fiat datæ rectæ æquale, dabit interuallum inter 30. & 30. vel inter 20. & 20. vel inter 10. & 10. partem $\frac{1}{3}$. Rurſus ſi interuallum inter 17. & 17. vel inter 34. & 34. datæ rectæ ſumatur æquale, dabit interuallum inter 1. & 1. vel inter 2. & 2. partem $\frac{1}{17}$. At interuallum inter 5. & 5. vel inter 10. & 10. dabit $\frac{1}{7}$. &c. Ex hiſce porro exemplis adductis facile intelliges, quo modo te in aliis partibus imperatis gerere debeas.

Qua ratione ex dato circuli latus polygoni propoſiti inuenitur.

18. NON aliter in poſteriori facie inſtrumenti latera polygonorum in quouis circulo reperiemus. Nam gradus 120. (qui facile accipientur, ſi quadranti graduum 90. adijciantur gradus 30.) dabunt latus trianguli æquilateri. Gradus 90. latus quadrati. Gradus 72. latus pentagoni. Gradus $51\frac{3}{7}$. hoc eſt, gradus 51. min. 26. paulo minus, latus heptagoni, &c. qui quidem gradus habebuntur, ſi gradus 360. totius circuli per numerum laterum polygoni propoſiti diuidantur.

Quo pacto

19. QVANDO in dato quadrante cognoſcere lubet, (quod non raro vſu venit) in quodnam punctum ſemidiametri perpendicularis ex quouis gradu ab altera ſemidiametro numerato demiſſa cadat, ita agendum erit

erit. Sit verbi gratia ſemidiameter alicuius quadrantis FG, quærendumque ſit punctum, in quod cadat perpendicularis ex grad. 26. min. 45. demiſſa. Sinus grad. 26, min, 45. eſt 45. poſito ſinu toto 100. Ergo & recta inter partes 45. & 45. erit ſinus grad. 26. min. 45. reſpectu ſinus totius FG, vt Num. 12. oſtenſum eſt. Quocirca recta 45. 45. in ſemidiametrum dati quadrantis ex centro translata, indicabit punctum quæſitum.

cognoſcatur in q̃ punctum ſemidiametri cadat perpendicularis ex quolibet gradu quadrãtis demiſſa.

20. NON aliter reperiemus in diametro Aſtrolabii (quod notatu dignum eſt) punctum cuiuſcunq; declinationis. Poſito enim ſinu toto ſemidiametro Æquatoris, ſi declinatio eſt Borealis, transferenda eſt in diametrum ex centro Tangens ſemiſſis complementi declinationis: ſi vero Auſtralis, Tangens ſemiſſis arcus ex quadrante & declinatione compoſiti. Vt Tangens grad. 33. min. 15. qui ſemiſſem complementi declinationis Cancri conſtituunt, dabit punctum extremum ſemidiametri paralleli Cancri, quod videlicet ab Æquatore in Boream grad. 23. min. 30. declinat. Tangens vero grad. 56. min. 45. qui ſemiſſem conſtituunt arcus ex quadrante & declinatione Capricorni conflati, dabit extremum punctũ ſemidiametri paralleli Capricorni, quod ab Æquatore in Auſtrum grad. 23. min. 30. recedit. Ratio huiuſce rei eſt, quod recta in Aſtrolabio ab extremitate diametri rectum Horizontem referentis vſque ad interſectionem paralleli Borealis, cum altera diametro Meridianum repræſentante ducta conſtituit cum altera diametro angulum ſemiſſis complementi declinationis borealis; ad interſectionẽ vero paralleli auſtralis cũ eadẽ poſteriore diametro educta, efficit angulũ ſemiſſis arcus ex quadrãte & declinatione auſtrali cõflati: atq; vtriuslibet anguli Tãgẽs ſemidiameter eſt paralleli, vt ex Aſtrolabio liquet.

Quo pacto in diametro Aſtrolabij punctum cuius uis declinationis reperiatur.

EODEMQVE modo, ſi conſtiterit, quem angulum in extremitate ſemidiametri Æquatoris in Aſtrolabio recta ad quodcunq; punctum diametri, quæ ad illam ſemidiametrum perpendicularis eſt, ducta conſtituat, reperiemus punctum illud per Tangentem illius anguli, ſicut in parallelis Cancri & Capric. factum eſt.

21 SI etiam quæcunq; linea ex centro inſtrumenti huius egrediens ſecetur quomodocunq; vt v. g. extrema & media ratione, vel (quod operæ pretium eſſet, vt expeditius horologia deſcribantur) ſicut æquinoctialis linea in horologio horizontali diuiſa eſt: ſecabitur quæuis alia ſimiliter, ſi nimirum ei æquale interuallum FG, ſumatur, vt ex dictis liquido conſtat. Satis tamen eſt, ſi horæ ex vna parte lineæ meridianæ, nimirum vel horæ antemeridianæ, vel pomeridianæ duntaxat in inſtrumentum transferantur.

Præceptũ generale ad diuidẽdam lineã datam, vt alia quæcũ que diuiſa eſt. Qua ratione quantitas anguli quæ latera inſtrumenti continẽt cognoſcatur.

22 PRÆTEREA aperto inſtrumento quomodocunq;, cognoſcemus quantitatem anguli FAG, in centro A, conſtituti, hoc modo. Circino ſumatur interuallum inter grad. 60. & 60. in poſteriori inſtrumenti facie, transferaturq; ex centro in alterutram lineam chordarum. Nam quot gradus in eo interuallo includuntur tot gradus continebit angulus FAG. Ratio eſt, quod arcus ex centro A, per grad. 60. & 60. deſcriptus portio eſt quadrantis, cuius chorda eſt tota linea AF: propterea quod chorda 60. graduum ſemidiameter eſt quadrantis dicti, cuius chorda eſt AF, vt ex inſtrumenti conſtructione manifeſtum eſt. Igitur interuallum inter grad. 60. & 60. eſt chorda anguli FAG. propoſiti, &c.

Quando ſi nus totus tam paruus eſt, vt in inſtrumentũ transferri nequeat, quid agendum.

23 SED neq; hoc omittendum eſt (quandoquidem de tangentibus, Sinubus & Secantibus in hoc inſtrumento reſpectu dati ſinus totius accipiendis verba fecimus) ſinum totum interdum eſſe tam exiguum, vt ex F, in G, transferri nequeat, etiamſi inſtrumentum prorſus claudatur. Vt ergo reſpectu illius ſinus totius Tangentes, ſinus, ac ſecantes accipere poſſimus ex inſtrumento ſumendus eſt ille ſinus totus in aliqua recta bis, ter, aut quater, &c. atq; ita ex F, in G, transferendus. Nam ſi Tangentium quæſitarum, vel ſinuum, aut ſecantium reſpectu ſinus totius 100. capiantur ſemiſſes, vel tertiæ partes, aut quartæ, &c. prout videl. ſinus totus bis, ter, quaterue, &c. acceptus fuit, habebuntur Tangentes quæſitæ, vel ſinus aut ſecantes. Vt ſi ſinus totus duplicetur, & poſito ſinu toto 100. Tangens verbi gratia ſit 378 ſumenda eſt tangens 189. &c. Sed commodiſſime res hæc peragetur, ſi ſinus totus, qui perpuſillus eſt, decupletur. Ita enim poſito ſinu toto 100. ſi ex Tangẽte v. g. propoſita (relicta prima figura ad dexteram) abiiciatur vna figura ad dexteram, quæ eſt ſecunda in tota Tangente habebitur decima eius pars. Habenda tamen ſemper eſt ratio figuræ abiectæ, vt ſcil. pro ea ſumatur 1. ſi maior eſt quam 5. &c. Hac ratione Tangente 2414 gr. 67. min. 30. propoſita (relictis $\frac{4}{10000}$.) transferenda erit Tangens 24. paulo amplius, nimirum pars decima Tangentis 241. reſpectu ſinus totius 100.

Quando Tangẽs ſuperat ſinũ totũ, quid agendum, vt per vnicam tranſlationẽ pun ctum quæſitum inueniatur.

24 SIC etiam, quando Tangens aliqua ſinum totum ſuperat, ne cogamur primum ſinum totum aliquoties transferre, deinde vero reliquas partes, vel contra; ſed vt ſtatim punctum, quod quæritur, per vnã tranſlationem poſſimus inuenire, diuidenda eſt tota Tangens tabulæ ad finem nouæ deſcriptionis Horologiorum poſitæ per 2. vel 3. vel per talem denique numerum, vt producatur in Quotiente Tangens trium figurarum. Tunc enim abiecta prima figura ad dextram, reliqua Tangens transferenda eſt reſpectu ſinus totius 100. multiplicati per eundem numerũ, per quem Tangens diuiſa fuit. Vt Tangens hor. 4. & 8. reſpectu ſinus totius 1000 eſt 1732. quæ diuiſa per 2. facit 866. Ergo transferenda eſt Tangens $86\frac{1}{2}$. paulo amplius reſpectu ſinus totius 100 duplicati. Item Tangens hor. 5. & 7. eſt 3732. quæ diuiſa per 4 facit 933. Ergo Tangens $93\frac{1}{30}$. transferenda eſt reſpectu ſinus totius 100. quadruplicati. Atq; ita de cæteris.

Quo pacto tertia & quarta proportionalis reperiatur.

25 IN hoc eodem deniq; inſtrumento facile duabus rectis tertiam proportionalem, & tribus quartã adiungemus. Nam ſi, duab. propoſitis, primæ in recta AF, regulæ AB, æqualis capiatur: & ſecunda à fine huius, aperto inſtrumento. per circinum transferatur in regulam AG, ad numerum ſimilem illi, qui in extremo primę in regula AB, appoſitus eſt (ita vt pedes circini ſtatuantur vel in ſimilibus partibus vt iuſq; regulæ, vel in duobus punctis æqualiter diſtantibus à ſimilibus partibus) eidemq; ſecundæ in regula AB, æqualis ſumatur, dabit interuallum inter finem huius ſecundæ, & numerum in regula AG ſimilem illi, qui prope finem ſecundæ ſcriptus eſt, tertiam proportionalem, vt ex demonſtratis Num 2. conſtare poteſt.

EADEM ratione, ſi, tribus rectis propoſitis, prima & ſecunda in inſtrumentum transferantur, vt dictũ eſt, tertiæ autem in regula AB, æqualis quoq; capiatur, dabit interuallum inter finem tertiæ, & numerum regulæ AG, ſimilem illi, qui ad extremum tertiæ in regula AB, notatus eſt, quartam proportionalem.

QVOD ſi lineæ propoſitę tam magnæ ſint, vel aliqua illarum, vt in inſtrumentum transportari nequeãt, ſumendæ erunt omnium ſemiſſes, vel tertiæ partes, vel quartæ, &c. atque cum illis procedendum, vt dictum eſt. Inuenta n. duplicata, vel triplicata, vel quadruplicata, &c. offeret tertiam aut quartã proportionalem quæſitã.

Cõſtructio alterius

26 LOCO prędicti inſtrumenti conſtrui poteſt in lamina aliqua, vel plano quolibet, figura eundẽ vſum habens, facillima hac ratione. Fiat angulus BAC, cuiuſcunq; magnitudinis; quo autẽ maior fuerit, eo maiores

ſinus

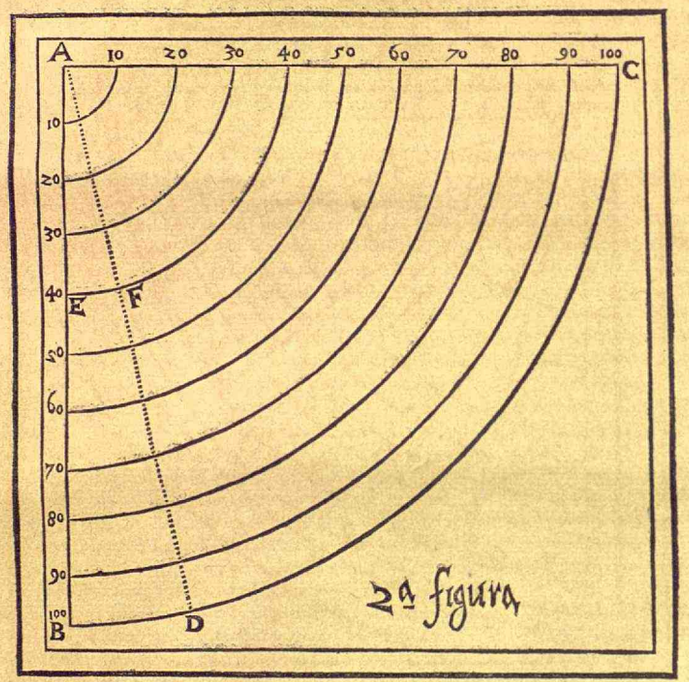
instrumenti pro eodem vsu.

sinus toti in figura assumi poterunt: ita vt non male feceris, si rectum constituas. Ita namque quadrantem quoque recto angulo oppositum obtinebis: Recta autem AB, in 100. particulas æquales secta, (posset etiam secari in 1000. si commode fieri posset, vt de superiore instrumento diximus) describantur ex centro A, per singulas partes 100. arcus circulorum, qui rectam quoque AC, in 100. particulas æquales distinebunt: parataq; erit figura.

NAM si in infimo arcu BC, sumatur interuallum BD, dato sinui toti æquale, ducaturque recta occulta AD, (hæc in ænea tabella ducenda erit atramento non admodum nigro, vel alio colore, vt postea deleri possit) fungentur rectæ AB, AD, officio regularum AF, AG, superioris instrumenti ad propositam magnitudinē BD, aperti, & dilatati. Quamobrem inuenientur in hac figura omnes Tangentes respectu sinus totius BD, vt supra.

a 2. sexti. Vt Tangens verbi gratia partium 40. erit interuallum EF, [a] cum ducta recta EF, parallela sit rectæ ductæ BD, propterea quod latera AB, AD, secta sunt in E, F, proportionaliter. Alij vsus supra explicati facile quoque ad hanc figuram aptabuntur: præsertim si in alteram faciem laminæ transferantur chordæ omnium arcuum quadrantis alicuius, vt ex dato circulo quotcunque gradus possint abscindi, &c. Habet figura hæc id commodi, quod periculum non est, ne clauus in centro atteratur, sicut in superiore instrumento. Deinde in eadem hac figura possunt accipi particulæ etiam minimæ, prope centrum, & in extremo quadrante sinus totus quamuis perpusillus, quod in superiore instrumento non licebat.

QVAMVIS autem ad magnitudinum dimensiones non omnes huius instrumenti partium vsus necessarii sint, sed solum ille, quem Num. 1. & 2. explicauimus, potissimum requiratur; placuit tamen tam varios eius vsus in vnum hunc locum congerere, tum vt instrumenti præstantia magis eluceat, tum vt studiosus lector habeat, vbi alios vsus, quos desiderat, inquirere debeat. Non sum etiam nescius, quam plurimos alios præclari huius instrumenti vsus posse excogitari, quos proprio Marte, atque industria quiuis facile, quando id res postulauerit, cogitando inueniet: nos præcipuos solum indicare voluimus hoc loco.

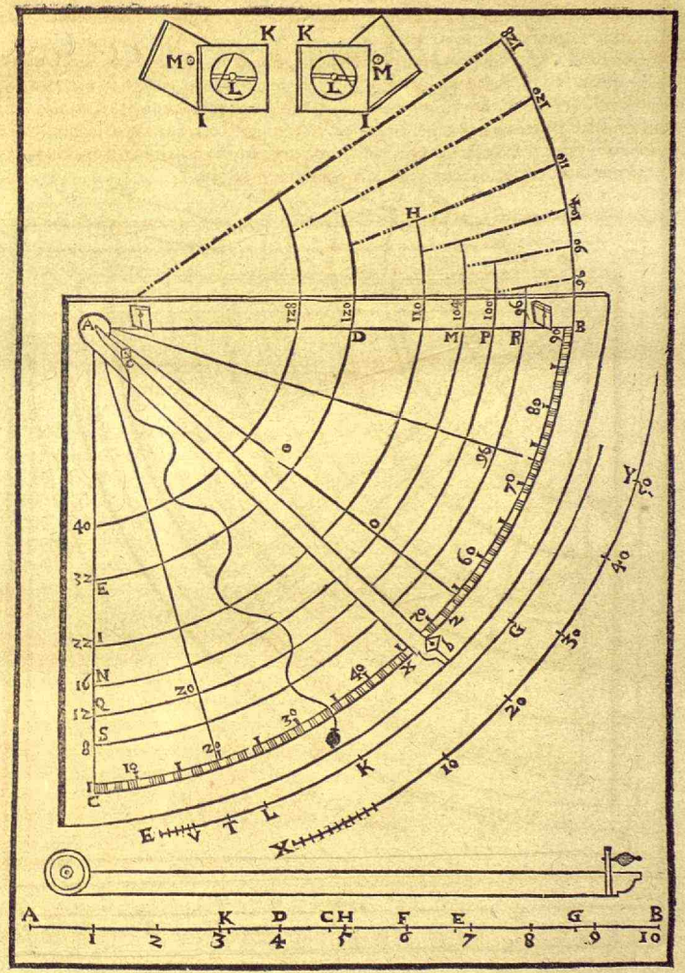


CONSTRVCTIO QVADRANTIS, IN QVO MINVta quoque, ac secunda deprehendantur, etiamsi gradus in ea sect i non sint. Et quo pacto eadem minuta, & sec. obtineri possint in quadrante in 90. gradus distributo. Ac denique qua ratione ex data recta in paucissimas partes æquales diuisa abscindi possint partes millesimæ, &c.

CAPVT II.

HOC est secundum, quod præmittendum esse diximus, qua videlicet via cognoscere possimus, quot minuta, & secunda in proposita particula cuiusuis gradus contineantur: Et quot partes millesimas quælibet particula datæ rectæ comprehendat, licet in paucissimas ea partes sit distributa. Qua de re multa quidem extant à nobis alias conscripta: sed ea vnum in locum colligere, & hic simul omnia, proponere visum fuit, quod id ad perfectam rei cognitionem multo fore commodius iudicaremus. Itaque Petrus Nonius Lusitanus summo ingenio Mathematicus ad hanc rem in libello de crepusculis propos. 3. partis secundæ tale excogitauit artifi-

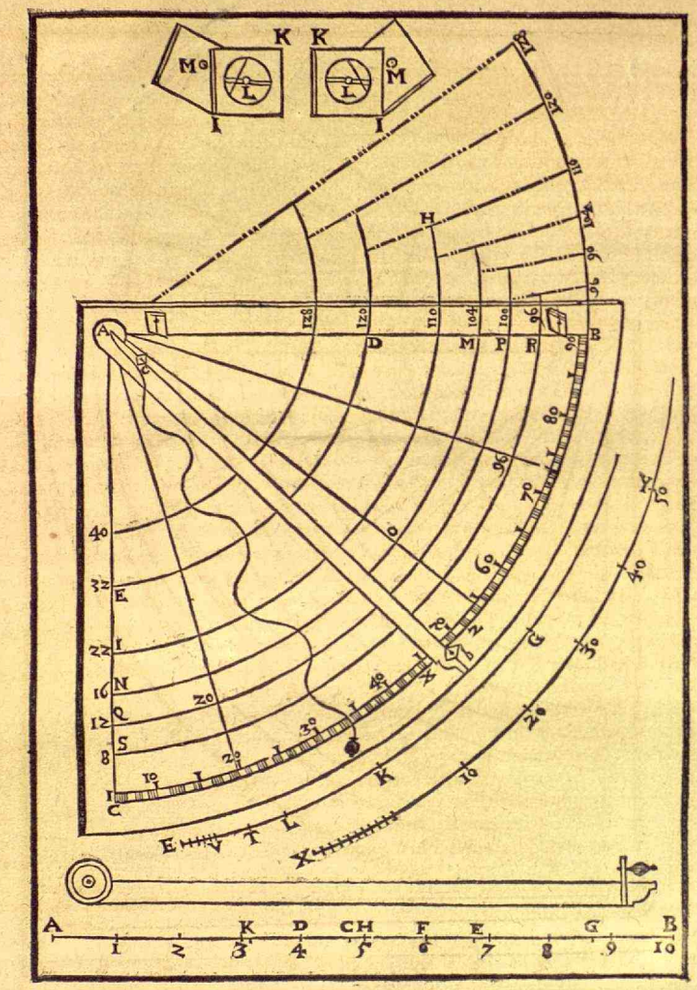
artificium. Descriptis ex A, centro quadrantis BC, intra eundem quadrantem aliis quadraginta quatuor quadrantibus minoribus quomodocunque inter se distantibus, vt in vniuersum sint 45. diuidit eum, qui quadranti BC, proximus est, & in 90. gradus distributus, in 89. partes æquales, sequentem in 88. alium in 87. atque ita deinceps, vt partes sequentis semper sint vna pauciores, quam partes proxime præcedentis quadrantis; adeo vt vltimus, & omnium minimus contineat 46. partes æquales. Plures quadrantes non est opus describere, quia eorum partes essent duplæ partium quadrantum iam descriptorum. Vt pars vna quadrantis in 45. partes diuisi contineret duos gradus quadrantis maximi in 90. gradus distributi: pars vero vna quadrantis in 44. partes distincti complecteretur $\frac{2}{88}$. quadrantis in 88. partes diuisi, & vna pars quadrantis diuisi in partes 43. includeret $\frac{2}{86}$. quadrantis in 86. partes distributi, &c. Hac ratione in primo quadrante in 90. gradus distributo assignabimus omnes has partes aliquotas, $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{7}$. &c. vsque ad $\frac{1}{90}$. Nam vnus gradus primi quadrantis est $\frac{1}{90}$. Vna autem pars secundi quadrantis est $\frac{1}{89}$. Vna tertii, $\frac{1}{88}$. atque ita deinceps vsque ad quadrantem 45. qui in 46. partes



distributs est, cuius pars vna continet $\frac{1}{4600}$. ita vt beneficio 45. quadrantum habeamus omnes partes à $\frac{1}{4600}$ vsque ad $\frac{1}{90}$. deinde quoniam quælibet res diuisa in quotuis partes numero pares diuisa etiam est in partes, quæ illarum medietatem constituunt, (nam linea secta in 10. partes, v.g. diuisa est etiam in 5. cum $\frac{2}{10}$. efficiant $\frac{1}{5}$. &c.) fit vt $\frac{2}{90}$. primi quadrantis exhibeant nobis $\frac{1}{45}$. & $\frac{2}{88}$. tertii quadrantis in 88. partes distributi, $\frac{1}{44}$. & $\frac{2}{86}$. quinti quadrantis distributi in 86. partes $\frac{1}{43}$. atque ita deinceps progrediendo per quadrantes partium numero parium vsque ad quadrantem partium 46. cuius $\frac{2}{4600}$ offerent nobis $\frac{1}{2300}$. Post hæc $\frac{1}{2300}$. dabunt $\frac{1}{2300}$. & $\frac{2}{2300}$. præbebunt $\frac{1}{2300}$. & sic deinceps vsque ad $\frac{2}{2300}$. quæ exhibebunt $\frac{1}{1150}$. Rursus $\frac{2}{2300}$. dabunt $\frac{1}{1150}$. & $\frac{2}{2300}$. dabunt $\frac{1}{1150}$. & ita deinceps vsque ad $\frac{2}{1150}$. quæ offerent $\frac{1}{575}$. Præterea $\frac{2}{1150}$. dabunt $\frac{1}{575}$. & $\frac{2}{575}$. dabunt $\frac{1}{288}$. & $\frac{2}{575}$. exhibebunt $\frac{1}{287}$. Ac tandem $\frac{2}{288}$. offerent $\frac{1}{144}$.

HÆC est constructio quadrantis, quam Petrus Nonius nobis reliquit, difficilis illa quidem cum vix quadrans in partes, quarum numerus primus est, vt in 89. 87. &c. à quoquam, etiamsi omnem adhibeat diligentiam sine errore diuidi possit. Vsus autem perfacilis est. Nam obseruaturus interdiu altitudinem solis, aut nocte serena

serena altitudinem alicuius stellæ, notet diligenter, in cuius quadrantis integram aliquam partem filum perpendiculi, aut linea fiduciæ incidat: (Vix autem, aut perraro continget, vt filum non cadat in partem aliquam integram alicuius quadrantis, propter multitudinem quadrantum, & partium diuersarum:) Deinde fiat vt numerus omnium partium illius quadrantis, in cuius partem aliquam integram filum cecidit, ad numerum partium à filo abscissarum, ita numerus graduum 90. in quos idem quadrans diuisus concipiendus est, ad aliud; produceturque numerus graduum dictis partibus abscissis respondentium. Et si quid in diuisione fuerit residui, illud per 60. multiplicatum, atque in eundem diuisorem, hoc est, in numerum omnium partium dicti quadrantis diuisum, dabit Minuta graduum: Et si adhuc quidpiam remanserit in hac diuisione, illud eodem modo per 60. multiplicatum, & in eundem diuisorem diuisum exhibebit secunda. Atque hoc modo progrediendo reperientur Tertia, Quarta, &c. donec nihil in diuisione supersit: sed satis est ad secunda vsque progredi. Exempli gratia. Ponatur quadrans DE, diuisus in 70. partes, & filum perpendiculi AD, abscidisse ex eo partes 40. in G. Fiat ergo vt 70. ad 40. ita 90. ad aliud producenturque gradus 51. Sed quia in diuisione supersunt 30. multiplicabimus ea in 60. & numerum productum 1800. per 70. rursus partiemur, vt prodeant Min. 25. Quoniam autem adhuc supersunt in diuisione 50. multiplicabimus ea in 60. & procreatum numerum 3000. per eadem 70. diuidemus vt producantur secunda 42. Rursum quia iterum supersunt 60. quæ multiplicata in 60. faciunt 3600. quo numero per 70. distributo, producentur Tertia 51. &c.



DEMONSTRATIO huius operationis perspicua est. Quoniam enim vt angulus DAE, ad angulum GAE,[a] ita arcus DE, ad arcum GE: Et vt idem angulus DAE, vel BAC, ad eundem angulum GAE, vel ZAC, ita arcus BC, ad arcum ZC, erit vt arcus DE, hoc est, quadrans in partes 70. diuisus, ad arcum GE, earundem partium 40.[b] ita arcus BC, id est, quadrans in 90. gradus distributus, ad arcum ZC, continentem numerum determinatum graduum, Minutorum, &c.

[a] 33. sexti.

[b] 11. quint.

SED

SED quoniam factu perdifficile est, vt dicti quadrantes in eiusmodi partes secentur, inuenit Illustrissimus Dominus Iacobus Curtius Cæsareus apud Summum Pontificem Legatus, exquisitæ doctrinæ & singularis industriæ vir, eiusmodi remedium. Descriptis ex A, quotlibet quadrantibus, producantur singuli vltra semidiametrum AB, proximus quidem extremo quadranti vsque ad gradum 91. hoc est, vsque ad lineam ex A, ad grad. 91. ductam: sequens deinde vsque ad grad. 92. & insequens vsque ad grad. 93. & sic deinceps vsque ad alios atque alios gradus. In figura exemplum habes in quadrantibus vsque ad grad. 96. 100. 104. 110. 120. & 128. tantum productis, ne multitudo, si ad singulos gradus essent producti, confusionem pareret. Deinde vnusquisque arcus ita productus secetur in 90. partes æquales: quæ diuisio longe facilior est illa superiore, cum quilibet horum arcuum non difficilius in 90. partes æquales distribui possit, quam quadrans in 90. gradus.

VSVS idem est qui superioris constructionis. Nam cadente filo perpendiculi in partem aliquam integram alicuius quadrantis, si fiat, vt 90. nempe vt numerus partium, in quas quilibet arcus productus diuisus est, ad numerum partium, quas filum abscidit, ita numerus graduum in illo arcu contentorum, in cuius partem aliquam integram filum cecidit, ad aliud, reperietur numerus graduum dictis partibus abscissis respondentium, &c. vt prius.

Quadrantis cõstructio ad min. & secund. cognoscenda.

ET quoniam facile est, (vt vulgo dici solet) inuentis addere, conabimur eam constructionem aliquanto faciliorem facere hoc modo. Descriptis ex A, centro quadrantis BC, intra eundem quadrantem alijs 39. quadrantibus æqualiter, si placet, inter se distantibus, vt venustior appareat figura: ita vt in vniuersum sint 40. quadrãtes, quorũ extimus in 90. gradus more solito secetur: proximus deinde in 128. partes æquales, primum videlicet in duas, & vtraque pars rursus in duas, & quælibet harum quatuor partium iterum in duas, & ita deinceps, donec 7. diuisiones absolutæ sint, atque adeo totus quadrans in 128. partes æquales distributus. Post hæc producantur alij quadrantes vltra semidiametrum AB, vt dictũ est, ille quidem, qui tertius est ab extremo BC, vsque ad gradũ 91. extremi quadrantis CB, producti, hoc est, vsque ad lineam ex A, ad gradum 91. ductam: sequens deinde vsque ad gradum 92. & insequens ad gradum 93. atque ita deinceps vsque ad alios gradus, ita vt quadragesimus quadrans vsque ad gradum 128. producatur. Hi arcus ita producti diuidantur singuli in 128. partes æquales, sicuti quadrans extimo quadranti proximus, qua diuisione peracta, partes supra semidiametrum AB, resecentur, tanquam superuacaneæ.

2 QVOD si quadrantes vltra semidiametrum AB, produci commode non possint, ob spatij angustias, instituenda erit diuisio hoc modo. In quadrante extremo BC, sumatur semissis numeri graduum, quem quilibet arcus productus continere deberet, & ex A, ad illam semissem linea occulta ducatur. Hæc enim secabit quadrãtem propositum in puncto, vbi arcus productus prima diuisione bifariam secaretur. Quare si arcus inter hoc punctum & semidiametrum AC, comprehendens 64. partes ex illis 128. totius arcus producendi, secetur bifariam continue sex diuisionibus, partesque illius in arcum inter idem punctum, & semidiametrum AB, transferantur, quæ transferri possunt, habebuntur in dato quadrante omnes partes, quæ ex illis 128. in quas totus arcus productus diuideretur, in quadrantẽ cadunt. Vt si diuidendus sit quadrans MN, vsq; ad gr. 104. producendus, ducemus ad gr. 52. nimirum ad semissem grad. 104. rectam, quæ secet quadrantẽ MN, in O. Nam si arcus ON, continens partes 64. ex illis 128. totius arcus producti, secetur continue bifariam sex diuisionibus, partesq; eius in arcũ OM, transferantur, habebuntur omnes partes in quadrantem MN, cadentes, non secus, ac si totus arcus productus in 128. partes distributus esset. Sic etiam, si quadrans ad gradum 125. producendus, diuidendus sit, ducenda erit linea occulta ad gradum $62\frac{1}{2}$. nimirum ad semissem graduum 125. Item si quadrans DE, 120. producendus, diuidendus sit, ducenda erit linea occulta ad gradum 60. &c.

Qui numeri quadrãtibus ascribendi sint.

3 HISCE quadrantibus ita diuisis duplices numeri ascribendi sunt, prope semidiametrum quidẽ AC, numeri quadrantum, vt 1. prope extremum; 2. iuxta sequentem, & 3. iuxta tertiũ &c. Ita vides quadranti, qui vsq; ad gradum 96. productus est, appositũ esse numerum 8, cum is octauus sit. Primus enim est quadrãs BC; secundus, qui sequitur, 90. graduum, Tertius graduum 91. quartus graduum 92. quintus graduũ 93. Sextus graduum 94. Septimus graduum 95. & Octauus graduum 96. Sic etiam quadranti vsq; ad grad. 100. producto cernis ascriptum esse numerũ 12. &c. At vero iuxta semidiametrum AB, numeri illorum graduum scribendi sunt, ad quos vsq; quilibet quadrans extenditur, vt in figura vides. Ita enim cadente filo perpendiculi in partem aliquam integram alicuius quadrantis, illico iuxta semidiametrum AB, apparebit, ad quem gradum vsque quadrans ille productus fuit. Qui quidem graduum numerus in regula trium tertium occupat locum, vt minuta, atq; secunda inquirantur, vt paulo post Num. 7. dicemus.

Pinnacidia quo pacto affigenda.

4 IVXTA semidiametrum AB, affigenda sunt duo pinnacidia ad angulos rectos, ita vt foramina, per quæ radius solis, vel visualis transire debet, ad perpendiculum rectæ AB, existant; alioquin non paruus error in dimensione linearum committeretur.

Pinnacidia pro radio visuali quo pacto construenda.

5 QVANDO porro per radium visualem altitudo stellæ inuestiganda est, vel punctũ aliquod lineę dimetiendæ inspiciendum, construi debent duo pinnacidia hoc modo. In tabella ænea quadrata IK, fiat foramen rotundum mediocris magnitudinis, in cuius medio relinquatur foramen L, quod sustineatur à diametro quadam tenui; Et circa I, circumuertatur alia tabella ænea quadrata subtilis, priori æqualis, in cuius medio sit etiam perexiguũ foramẽ M, respondens foramini L, quando hæc tabella priori superimponitur. Huiusmodi duo pinnacidia si fiant, dici vix potest, quã expeditè quamcunq; stellã; aut aliã quamlibet rem contueri liceat. Nam pinnacidiũ, quod ab oculo propius abest, claudendum est tabella illa quadrata circumducta circa punctum, I. aliud autem aperiendum. Sic enim fiet, vt radius visualis per foramen M, prope oculum immissus, illico conspiciat per maius foramen L, in pinnacidio remotiore stellam, vel aliam rem propositam: quia foramen illud maius apertum facile rem ipsam intueri, & sine vllo negotio foramen exiguum L, in eodem pinnacidio remotiore in ipsam rem visum dirigere nos sinit.

Constructio regulæ, loco fili.

6 POSTREMO ex centro A, egrediatur filum subtilissimum cum appenso perpendiculo. Aut certe loco fili construatur regula ænea admodum tenuis cum linea fiduciæ, in cuius extremitate promineat laminula

ex qua suspendatur perpendiculum hac conditione, vt regula libere pendente, filum aliquod cum perpendiculo demissum, ad vnguem lineæ fiduciæ respondeat. Atque in hoc summa diligentia adhibenda est, alioquin gradus non recte à linea fiduciæ indicarentur.

Quadrãs pendulus.

ATQVE hoc modo Quadrans in suo vsu erit pendulus, siue res in sublimi existens ex B, per A, siue res in plano posita ex A, per B, inspiciatur.

Quadrãs stabilis.

QVOD si circa centrum A, regula affigatur cum linea fiduciæ A b, & duobus pinnacidijs c, b, quorum foramina lineæ fiduciæ respondeant, ipsaque regula ita firmetur, vt circa centrum circumducta ad quemcunq; gradum immota permaneat, erit Quadrans in suo vsu stabilis eundem semper situm habens, siue res in sublimi existens inspiciatur ex A, per b, posito nimirum latere A C, Horizonti parallelo, in plano horizontali, siue rem in plano positam quis intueatur ex A, per b, latere A C, ad Horizontem existente perpendiculari, & latere A B, eidem Horizonti parallelo, superioremque locum occupante. Verum hæc planius intelligentur, cum de vtroque vsu lib. 2. agemus.

Vsus quadrantis proxime constructi in minutis exquirendis.

7. VSVS quadrantis hoc modo constructi in minutis, ac secundis exquirendis, præclarus est. Nam cadente filo perpendiculi, aut linea fiduciæ AB, in partem aliquam integrã alicuius Quadrantis (quod fere semper accidet propter diuersitatem partium in tanta quadrantum multitudine) si fiat vt 128. nimirum vt numerus partium, in quas quilibet arcus productus diuiditur, ad partes à filo abscissas, ita numerus graduum in toto arcu producto comprehensorum, in cuius partem aliquam integram filum incidit, ad aliud, reperietur numerus graduum in arcu abscisso contentorum. Et si quid in diuisione fuerit residui, illud per 60. multiplicatum, atque in eundem diuisorem, hoc est, in 128. diuisum, dabit minuta graduum. Et si adhuc quippiam remanserit in hac diuisione, illud eodem modo per 60. multiplicatum, & in eundem diuisorem 128. diuisum, exhibebit secunda. Atque hoc modo progrediendo, reperientur Tertia, Quarta, &c. donec nihil in diuisione supersit. Tunc enim vlterius progrediendum non est; Sed satis est, ad secunda vsque progredi. Exempli gratia. Ponatur ex Quadrante PQ, vsque ad gradum 100. producto, qualis est duodecimus, filum perpendiculi abscidisse partes 20. ex illis 128. in quas totus arcus productus distributus est. Fiat ergo, vt 128. ad 20. ita 100. ad aliud; inuenienturque gradus 15. supereruntque in diuisione 80. quæ ducta in 60. faciunt 4800. quæ diuisa per 128. dant minuta 37. & supersunt adhuc 64. quæ si ducantur in 60. & productus numerus 3840. diuidatur per 128. prodibunt Sec. 30. nihilque in diuisione supereſt. Arcus ergo Q, 20. vel arcus Quadrantis B C, inter C, & filum perpendiculi includit grad. 15. Min. 37. Sec. 30. Rursus ponamus ex octauo quadrante R S, vsque ad gradum 96. producto filum perpendiculi abscidisse partes 96. ex illis 128. quæ in toto arcu producto continentur. Fiat ergo, vt 128. ad 96. ita 96. ad aliud: reperienturque gradus 72. præcise arcui abscisso conuenire. Item ceciderit filum in partem 64. Quadrantis sextidecimi M N, vsque ad gradum 104. producti. Si ergo fiat, vt 128. ad 64. ita 104. ad aliud, producentur quoque grad. 52. præcise, atque ita de cæteris; dummodo sis memor, vt si quid in diuisionibus superfuerit, residua diuisionum multiplicentur per 60. & producti numeri per 128. diuidantur, vt dictum est.

DEMONSTRATIO huius operationis perspicua est. Quoniam enim est (in vltimo exemplo) vt arcus NM, vsque ad grad. 104. productus, quatenus in 128. partes sectus est, ad arcum N O, earundem partium 64. vt idem arcus NM, totus productus, quatenus grad. 104. complectitur, ad eundem arcum NO, respectu eorundem graduum; efficitur, vt si fiat quemadmodum partes 128. totius arcus NM, vsque ad grad. 104. producti ad partes 64. in arcu NO, contentas, ita idem arcus NM, productus graduum 104. ad aliud, reperiantur gradus in eodem arcu NO, contenti, &c.

8. IN gratiam autem studiosorum placet hic tabellam inserere, in qua ex residuo primæ operationis regulæ aureæ, qua gradus eliciuntur, mox apparet, quot minuta, & secunda illi residuo respondeant: Ita vt opus sit semel tantum regulam auream adhibere. Constructur autem tabella, si singula residua, quæ plura, quam 127. esse nequeunt, per 60. multiplicentur, productique numeri per 128. diuidantur. Atque vt structura, & vsus huiusce tabellæ facilius intelligatur, apponemus vnum exemplum. Cadat verbi gratia filum perpendiculi in partem 29. Quadrantis 32. ad gradum vsque 120. producti. Fiat igitur vt 128. ad 29. ita 120 ad aliud; producenturque grad. 27. Quia vero in diuisione supersunt 24. sub quo numero in tabella ponuntur duo hi numeri 11. 15. Prior ergo dat minuta, & posterior secunda; Ita vt arcus à filo abscissus complectatur grad. 27. Min. 11. Sec. 15. Atque hæc minuta, & Secunda producuntur, si residuum diuisionis, nimirum 24. ducatur in 60. & productus numerus per 128. diuidatur, &c. Eadem ratio est de reliquis tabellæ numeris. Nam semper superior numerus est ille, qui in diuisione remansit: Inferiorum autem numerorum prior ad minuta, & posterior ad secunda spectat.

Constructio & vsus tabellæ pro minutis & secundis.

SEQVITVR TABELLA.

TABEL-

TABELLA INDICANS, QVOT MINVTA, AC Secunda, residuo primæ operationis regulæ aureæ, qua gradus in supra nominatæ tabulæ constructione eruuntur, respondeant.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
0. 28	0. 56	1. 24	1. 52	2. 21	2. 49	3. 17	3. 45	4 13	4. 41	5. 9	5. 37
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
6. 6	6. 34	7. 2	7. 30	17. 58	8. 26	8. 54	9. 22	9. 51	10. 19	10. 47	11. 15
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M S.	M. S.	M. S	M. S.	M. S.
11. 43	12. 12	12. 39	13. 7	13. 36	14. 4	14. 32	15. 0	15. 28	15. 56	16. 24	16 52
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
17. 21	17. 49	18. 17	18. 45	19. 13	19. 41	20. 9	20. 37	21. 6	21. 34	22. 2	22. 30
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S	M. S.	M. S.
22. 58	23. 26	23. 54	24. 22	24. 51	25. 19	25. 47	26. 15	26. 43	27. 11	27. 39	28. 7
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
26. 36	29. 4	29. 32	30. 0	30. 28	30 56	31. 24	31. 52	32. 21	32. 49	33. 17	33. 45
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
34. 13	34. 41	35. 9	35. 37	36. 6	36. 34	37. 2	37. 30	37 58	38 26	38. 54	39. 22
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
39. 51	40. 19	40. 47	41. 15	41. 43	42. 11	42. 39	43. 7	43. 36	44. 4	44 32	45. 0
97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
45. 28	45. 56	46. 24	46. 52	47. 21	47. 49	48. 17	48. 45	49. 13	49. 41	50. 9	50. 37
109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
51. 6	51. 34	52. 2	52. 30	52. 58	53. 26	53. 54	54. 22	54. 51	55. 19	55. 47	56 15
121	122	123	124	125	126	127	128				
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.				
56. 43	57. 11	58. 7	57. 39	58. 36	59. 4	59. 32	60 0				

Cõstructio & vsus tabulæ sequentis.

9 PORRO vt studiosos omni labore supputandi leuaremus, composita à nobis est sequens tabula, in qua confestim apparet, quot gradus, minuta, ac secunda cuilibet parti cuiusuis Quadrantis respondeant. Nam si in latere tabulæ sinistro sumatur numerus illius quadrantis, in cuius partem aliquam integram filum perpendiculi cecidit, numerus, inquam, iuxta semidiametrum A C. illi quadranti appositus, in vertice vero eiusdem tabulæ accipiatur numerus partium à filo abscissarum, reperientur in angulo communi grad. Min. & Sec. arcus abscissi. Exemplum. Ceciderit filum in partem 30. Quadrantis 16. qui vsque ad grad. 104. productus fuit. Si ergo in vertice tabulæ sumatur numerus 30. partium, & in sinistro latere numerus quadrantis 16. deprehenduntur in communi angulo grad. 24. Min. 22. Sec. 30. Item cadente filo in partem 111. Quadrantis 15. qui vsque ad grad. 103. fuit productus; si in vertice tabulæ accipiatur numerus 111. partium, & in latere sinistro numerus Quadrantis 15, reperietur in angulo communi gradus 89. min. 19. sec. 13. Atq; ita de cæteris. Constructio tabulæ ex dictis obscura non est. Nam si fiat, vt 128, ad 1. ad 2. ad 3. ad 4. & ita deinceps, vsque ad 128. ita numerus gradum cuiuslibet arcus totius producti ad aliud, reperientur gradus. Minuta & Sec. pro partibus cuiusque Quadrantis. Continentur autem in tabula tantummodo 40. Quadrantes, quod hi satis esse videantur: Si quis tamen plures describere velit, facile tabulam extendere poterit secundum doctrinam traditam hoc loco ad quotuis Quadrantes. In eadem tabula quando in tertia operatione regulæ aureæ, qua secunda inquiruntur, numerus reliquus fuit maior quam 64. maior nimirum dimidio Diuisoris 128. assumpsimus vnum secundum integrum.

Quo pacto tabula 40. Quadrantum extendatur ad plures Quadrantes sine ope nouæ regulæ.

IAM vero si quis tabulam extendere velit ad plures Quadrantes, facere id poterit sine vlla operatione regulæ aureæ, hoc modo. Gradibus, Minutis ac secundis quadragesimi Quadrantis, qui vsque ad grad. 128. productus fuit, adijciantur differentiæ inter gradus, minuta, ac secunda quadragesimi Quadrantis, & gradus, Minuta, ac secunda aliorum quadrantum infra Quadragesimum. Ita namque conficientur gradus, minuta, ac secunda quadrantum supra quadragesimum. Nam gradus, minuta, ac secunda trium quorumlibet quadrantum, quorum vnus sit quadragesimus, alij vero duo æqualiter ab eo distent, obseruant proportionem Arithmeticam

cam continuam, vt hic apparet, Numeri enim Quadrantum 39. 40. 41. in prima columna ſuperant ſe continue ſecundis 28. In ſecunda vero columna ſecundis 56. & in tertia Minuto 1. Secundis 24. &c. Ita quoque nu-

Partes.	1			2			3			4			5			6		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
38	0	59	4	1	58	7	2	57	11	3	56	15	4	55	19	5	54	22
39	0	59	32	1	59	4	2	58	36	3	58	7	4	57	39	5	57	11
40	1	0	0	2	0	0	3	0	0	4	0	0	5	0	0	6	0	0
41	1	0	28	2	0	56	3	1	24	4	1	53	5	2	21	6	2	49
24	1	0	56	2	1	53	3	2	49	4	3	45	5	4	41	6	5	38

meri Quadrantum 38. 40. 42. in prima columna ſuperant ſe continue ſecundis 56. In ſecunda vero Minuto 1. ſecundis 53. & in tertia Minutis 2. ſecundis 49. &c. Quare ſi differentiæ inter gradus, minuta, ac ſecunda Quadrantis 39. & Quadrantis 40. adiiciantur ordine ad gradus, minuta, ac ſecunda Quadrantis 40. componetur gradus, minuta, ac ſecunda Quadrantis 41. Differentiæ auiem inter Gradus, Minuta, ac Sec. Quadrantis 38. & Quadrantis 40. additæ ordinatim gradibus, minutis, ac ſecundis Quadrantis 40. conficient gradus Minuta, ac Secunda Quadrantis 42. Sic quoque differentiæ inter gradus, minuta, ac ſecunda Quadrantis 30. & Quadrantis 40. appoſitæ gradibus, minutis, ac ſecundis Quadrantis 40. component gradus, minuta, & ſecunda Quadrantis 50. &c.

SEQVITVR TABVLA QVADRANTIS PAVLO ante conſtructi, vbi ſinguli arcus producti diſtribuuntur in 128. partes æquales: in qua ſtatim apparet, quot Gradus, Minuta, ac Secunda ſingulis particulis cuiuſuis quadrantis reſpondeant: cuius quidem vſum ſupra expoſuimus.

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes.	1			2			3			4			5			6			7		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	1	0	0	2	0	0	3	0	0	4	0	0	5	0	0	6	0	0	7	0	0
2	0	42	11	1	24	22	2	6	34	2	48	45	3	30	56	4	13	7	4	55	19
3	0	42	39	1	25	19	2	7	58	2	50	37	3	33	17	4	15	56	4	58	36
4	0	43	7	1	26	15	2	9	22	2	52	30	3	35	37	4	18	45	5	1	52
5	0	43	36	1	27	11	2	10	47	2	54	22	3	37	58	4	21	34	5	5	9
6	0	44	4	1	28	7	2	12	11	2	56	15	3	40	19	4	24	22	5	8	26
7	0	44	32	1	29	4	2	13	36	2	58	7	3	42	39	4	27	11	5	11	43
8	0	45	0	1	30	0	2	15	0	3	0	0	3	45	0	4	30	0	5	15	0
9	0	45	28	1	30	56	2	16	24	3	1	53	3	47	21	4	32	49	5	18	17
10	0	45	56	1	31	52	2	17	49	3	3	45	3	49	41	4	35	37	5	21	34
11	0	46	24	1	32	49	2	19	13	3	5	37	3	52	2	4	38	26	5	24	51
12	0	46	52	1	33	45	2	20	37	3	7	30	3	54	22	4	41	15	5	28	7
13	0	47	21	1	34	41	2	22	2	3	9	22	3	56	43	4	44	4	5	31	24
14	0	47	49	1	35	37	2	23	26	3	11	15	3	59	4	4	46	52	5	34	41
15	0	48	17	1	36	34	2	24	51	3	13	7	4	1	24	4	49	41	5	37	58
16	0	48	45	1	37	30	2	26	15	3	15	0	4	3	45	4	52	30	5	41	15
17	0	49	13	1	38	26	2	27	39	3	16	52	4	6	6	4	55	19	5	44	32
18	0	49	41	1	39	22	2	29	4	3	18	45	4	8	26	4	58	7	5	47	49
19	0	50	9	1	40	19	2	30	28	3	20	37	4	10	47	5	0	56	5	51	6
20	0	50	37	1	41	15	2	31	52	3	22	30	4	13	7	5	3	45	5	54	22
21	0	51	6	1	42	11	2	33	17	3	24	22	4	15	28	5	6	34	5	57	39
22	0	51	34	1	43	7	2	34	41	3	26	15	4	17	49	5	9	22	6	0	56
23	0	52	2	1	44	4	2	36	6	3	28	7	4	20	9	5	11	11	6	4	13
24	0	52	30	1	45	0	2	37	30	3	30	0	4	22	30	5	15	0	6	7	30
25	0	52	58	1	45	56	2	38	54	3	31	52	4	24	51	5	17	49	6	10	47
26	0	53	26	1	46	52	2	40	19	3	33	45	4	27	11	5	20	37	6	14	4
27	0	53	54	1	47	49	2	41	43	3	35	37	4	29	32	5	23	26	6	17	21
28	0	54	22	1	48	45	2	43	7	3	37	30	4	31	52	5	26	15	6	20	37
29	0	54	51	1	49	41	2	44	32	3	39	22	4	34	13	5	29	4	6	23	54
30	0	55	19	1	50	37	2	45	56	3	41	15	4	36	34	5	31	52	6	27	11
31	0	55	47	1	51	34	2	47	21	3	43	7	4	38	54	5	34	41	6	30	28
32	0	56	15	1	52	30	2	48	45	3	45	0	4	41	15	5	37	30	6	33	45
33	0	56	43	1	53	26	2	50	9	3	46	52	4	43	36	5	40	19	6	37	2
34	0	57	11	1	54	22	2	51	34	3	48	45	4	45	56	5	43	7	6	40	19
35	0	57	39	1	55	19	2	52	58	3	50	37	4	48	17	5	45	56	6	43	36
36	0	58	7	1	56	15	2	54	22	3	52	30	4	50	37	5	48	45	6	46	52
37	0	58	36	1	57	11	2	55	47	3	54	22	4	52	58	5	51	34	6	50	9
38	0	59	4	1	58	7	2	57	11	3	56	15	4	55	19	5	54	22	6	53	26
39	0	59	32	1	59	4	2	58	36	3	58	7	4	57	39	5	57	11	6	56	43
40	1	0	0	2	0	0	3	0	0	4	0	0	5	0	0	6	0	0	7	0	0

Numerus sive ordo Quadrantum.

Partes.	8			9			10			11			12			13			14		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	8	0	0	9	0	0	10	0	0	11	0	0	12	0	0	13	0	0	14	0	0
2	5	37	30	6	19	41	7	1	52	7	44	4	8	26	15	9	8	26	9	50	37
3	5	41	15	6	23	54	7	6	34	7	49	13	8	31	52	9	14	32	9	57	11
4	5	45	0	6	28	7	7	11	15	7	54	22	8	37	30	9	20	37	10	3	45
5	5	48	45	6	32	21	7	15	56	7	59	32	8	43	7	9	26	43	10	10	19
6	5	52	30	6	36	34	7	20	37	8	4	41	8	48	45	9	32	49	10	16	52
7	5	56	15	6	40	47	7	25	19	8	9	51	8	54	22	9	38	54	10	23	26
8	6	0	0	6	45	0	7	30	0	8	15	0	9	0	0	9	45	0	10	30	0
9	6	3	45	6	49	13	7	34	41	8	20	9	9	5	37	9	51	6	10	36	34
10	6	7	30	6	53	26	7	39	22	8	25	19	9	11	15	9	57	11	10	43	7
11	6	11	15	6	57	39	7	44	4	8	30	28	9	16	52	10	3	17	10	49	41
12	6	15	0	7	1	52	7	48	45	8	35	37	9	22	30	10	9	22	10	56	15
13	6	18	45	7	6	6	7	53	26	8	40	47	9	28	7	10	15	28	11	2	49
14	6	22	30	7	10	19	7	58	7	8	45	57	9	33	45	16	21	34	11	9	22
15	6	26	15	7	14	32	8	2	49	8	51	6	9	39	22	10	27	39	11	15	56
16	6	30	0	7	18	45	8	7	30	8	56	15	9	45	0	10	33	45	11	22	30
17	6	33	45	7	22	58	8	12	11	9	1	24	9	50	37	10	39	51	11	29	4
18	6	37	30	7	27	11	8	16	52	9	6	34	9	56	15	10	45	56	11	35	37
19	6	41	15	7	31	24	8	21	34	9	11	43	10	1	52	10	52	2	11	42	11
20	6	45	0	7	35	37	8	26	15	9	16	52	10	7	30	10	58	7	11	48	45
21	6	48	45	7	39	51	8	30	56	9	22	2	10	13	7	11	4	13	11	55	19
22	6	52	30	7	44	4	8	35	37	9	27	11	10	18	45	11	10	19	12	1	52
23	6	56	15	7	48	17	8	40	19	9	32	21	10	24	22	11	16	24	12	8	26
24	7	0	0	7	52	30	8	45	0	9	37	30	10	30	0	11	22	30	12	15	0
25	7	3	45	7	56	43	8	49	41	9	42	39	10	35	37	11	28	36	12	21	34
26	7	7	30	8	0	56	8	54	22	9	47	49	10	41	15	11	34	41	12	28	7
27	7	11	15	8	5	9	8	59	4	9	52	58	10	46	52	11	40	47	12	34	41
28	7	15	0	8	9	22	9	3	45	9	58	7	10	52	30	11	46	52	12	41	15
29	7	18	45	8	13	36	9	8	26	10	3	17	10	58	7	11	52	58	12	47	49
30	7	22	30	8	17	49	9	13	7	10	8	26	11	3	45	11	59	4	12	54	22
31	7	26	15	8	22	2	9	17	49	10	13	36	11	9	22	12	5	9	13	0	56
32	7	30	0	8	26	15	9	22	30	10	18	45	11	15	0	12	11	15	13	7	30
33	7	33	45	8	30	28	9	27	11	10	23	54	11	20	37	12	17	2	13	14	4
34	7	37	30	8	34	41	9	31	52	10	29	4	11	26	15	12	23	26	13	20	37
35	7	41	15	8	38	54	9	36	34	10	34	13	11	31	52	12	29	32	13	27	11
36	7	45	0	8	43	7	9	41	15	10	39	22	11	37	30	12	35	37	13	33	45
37	7	48	45	8	47	21	9	45	56	10	44	32	11	43	7	12	41	43	13	40	19
38	7	52	30	8	51	34	9	50	37	10	49	41	11	48	45	12	47	49	13	46	52
39	7	56	15	8	55	47	9	55	19	10	54	51	11	54	22	12	53	59	13	53	26
40	8	0	0	9	0	0	10	0	0	11	0	0	12	0	0	13	0	0	14	0	0

Numerus sive ordo Quadrantum.

Partes.	15			16			17			18			19			20			21		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	15	0	0	16	0	0	17	0	0	18	0	0	19	0	0	20	0	0	21	0	0
2	10	32	49	11	15	0	11	57	11	12	39	22	13	21	34	14	3	45	14	45	56
3	10	39	51	11	22	30	12	5	9	12	47	49	13	30	28	14	13	7	14	55	47
4	10	46	52	11	30	0	12	13	7	12	56	15	13	39	22	14	22	30	15	5	37
5	10	53	54	11	37	30	12	21	6	13	4	41	13	48	17	14	31	52	15	15	28
6	11	0	56	11	45	0	12	29	4	13	13	7	13	57	11	14	41	15	15	25	19
7	11	7	58	11	52	30	12	37	2	13	21	34	14	6	6	14	50	37	15	35	9
8	11	15	0	12	0	0	12	45	0	13	30	0	14	15	0	15	0	0	15	45	0
9	11	22	2	12	7	30	12	52	58	13	38	26	14	23	54	15	9	22	15	54	51
10	11	29	4	12	15	0	13	0	56	13	46	52	14	32	49	15	18	45	16	4	41
11	11	36	6	12	22	30	13	8	54	13	55	19	14	41	43	15	28	7	16	14	32
12	11	43	7	12	30	0	13	16	52	14	3	45	14	50	37	15	37	30	16	24	22
13	11	50	9	12	37	30	13	24	51	14	12	11	14	59	32	15	46	52	16	34	13
14	11	57	11	12	45	0	13	32	49	14	20	37	15	8	27	15	56	15	16	44	4
15	12	4	13	12	52	30	13	40	47	14	29	4	15	17	21	16	5	37	16	53	54
16	12	11	15	13	0	0	13	48	45	14	37	30	15	26	15	16	15	0	17	3	45
17	12	18	17	13	7	30	13	56	43	14	45	56	15	35	9	16	24	22	17	13	36
18	12	25	19	13	15	0	14	4	41	14	54	22	15	44	4	16	33	45	17	23	26
19	12	32	21	13	22	30	14	12	39	15	2	49	15	52	58	16	43	7	17	33	17
20	12	39	22	13	30	0	14	20	37	15	11	15	16	1	52	16	52	30	17	43	7
21	12	46	24	13	37	30	14	28	36	15	19	41	16	10	47	17	1	52	17	52	58
22	12	53	26	13	45	0	14	36	34	15	28	7	16	19	41	17	11	15	18	2	49
23	13	0	28	13	52	30	14	44	33	15	36	34	16	28	36	17	20	37	18	12	39
24	13	7	30	14	0	0	14	52	30	15	45	0	16	37	30	17	30	0	18	22	30
25	13	14	32	14	7	30	15	0	28	15	53	26	16	46	24	17	39	22	18	32	21
26	13	21	34	14	15	0	15	8	26	16	1	52	16	55	19	17	48	45	18	42	11
27	13	28	36	14	22	30	15	16	24	16	10	19	17	4	13	17	58	7	18	52	2
28	13	35	37	14	30	0	15	24	22	16	18	45	17	13	7	18	7	30	19	1	52
29	13	42	39	14	37	30	15	32	21	16	27	11	17	22	2	18	16	52	19	11	43
30	13	49	41	14	45	0	15	40	19	16	35	37	17	30	56	18	26	15	19	21	34
31	13	56	43	14	52	30	15	48	17	16	44	4	17	39	51	18	35	37	19	31	24
32	14	3	45	15	0	0	15	56	15	16	52	30	17	48	45	18	45	0	19	41	15
33	14	10	47	15	7	30	16	4	13	17	0	56	17	57	39	18	54	22	19	51	6
34	14	17	49	15	15	0	16	12	11	17	9	22	18	6	34	19	3	45	20	0	56
35	14	24	51	15	22	30	16	20	9	17	17	49	18	15	28	19	13	7	20	10	47
36	14	31	52	15	30	0	16	28	7	17	26	15	18	24	22	19	22	30	20	20	37
37	14	38	54	15	37	30	16	36	6	17	34	41	18	33	17	19	31	52	20	30	28
38	14	45	56	15	45	0	16	44	0	17	43	7	18	42	11	19	41	15	20	40	19
39	14	52	58	15	52	32	16	52	2	17	51	34	18	51	6	19	50	37	20	50	9
40	15	0	0	16	0	0	17	0	0	18	0	0	19	0	0	20	0	0	21	0	0

Numerus siue ordo Quadrantum.

Partes.	22			23			24			25			26			27			28		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	22	0	0	23	0	0	24	0	0	25	0	0	26	0	0	27	0	0	28	0	0
2	15	28	7	16	10	19	16	52	30	17	34	41	18	16	52	18	59	4	19	41	15
3	15	38	26	16	21	6	17	3	45	17	46	24	18	29	4	19	11	43	19	54	22
4	15	48	45	16	31	52	17	15	0	17	58	7	18	41	15	19	24	22	20	7	30
5	15	59	4	16	42	39	17	26	15	18	9	51	18	53	26	19	37	2	20	20	37
6	16	9	22	16	53	26	17	37	30	18	21	34	19	5	37	19	49	41	20	33	45
7	16	19	41	17	4	13	17	48	45	18	33	17	19	17	49	20	2	21	20	46	52
8	16	30	0	17	15	0	18	0	0	18	45	0	19	30	0	20	15	0	21	0	0
9	16	40	19	17	25	47	18	11	15	18	56	43	19	42	11	20	27	39	21	13	7
10	16	50	37	17	36	34	18	22	30	19	8	26	19	54	22	20	40	19	21	26	15
11	17	0	56	17	47	21	18	33	45	19	20	9	20	6	34	20	52	58	21	39	22
12	17	11	15	17	58	7	18	45	0	19	31	52	20	18	45	21	5	37	21	52	30
13	17	21	34	18	8	54	18	56	15	19	43	36	20	30	56	21	18	17	22	5	37
14	17	31	52	18	19	41	19	7	30	19	55	19	20	43	7	21	30	56	22	18	45
15	17	42	11	18	30	28	19	18	35	20	7	2	20	55	19	21	43	36	22	31	52
16	17	52	30	18	41	15	19	30	0	20	18	45	21	7	30	21	56	15	22	45	0
17	18	2	49	18	52	2	19	41	15	20	30	28	21	19	41	22	8	54	22	58	7
18	18	13	7	19	2	49	19	52	30	20	42	11	21	31	52	22	21	34	23	11	15
19	18	23	26	19	13	36	20	3	45	20	53	54	21	44	4	22	34	13	23	24	22
20	18	33	45	19	24	22	20	15	0	21	5	37	21	56	15	22	46	52	23	37	30
21	18	44	4	19	35	9	20	26	15	21	17	21	22	8	26	22	59	32	23	50	37
22	18	54	22	19	45	56	20	37	30	21	29	4	22	20	37	23	12	11	24	3	45
23	19	4	41	19	56	43	20	48	45	21	40	47	22	32	49	23	24	51	24	16	52
24	19	15	0	20	7	30	21	0	0	21	52	30	22	45	0	23	37	30	24	30	0
25	19	25	19	20	18	17	21	11	15	22	4	13	22	57	11	23	50	9	24	43	7
26	19	35	37	20	29	4	21	22	30	22	15	56	23	9	22	24	2	49	24	56	15
27	19	45	56	20	39	51	21	33	45	22	27	39	23	21	34	24	15	28	25	9	22
28	19	56	15	20	50	37	21	45	0	22	39	22	23	33	45	24	28	7	25	22	30
29	20	6	34	21	1	24	21	56	15	22	51	6	23	45	56	24	40	47	25	35	37
30	20	16	52	21	12	11	22	7	30	23	2	49	23	58	7	24	53	26	25	48	45
31	20	27	11	21	22	58	22	18	45	23	14	32	24	10	19	25	6	6	26	1	52
32	20	37	30	21	33	45	22	30	0	23	26	15	24	22	30	25	18	45	26	15	0
33	20	47	49	21	44	32	22	41	15	23	37	58	24	34	41	25	31	24	26	28	7
34	20	58	7	21	55	19	22	52	30	23	49	41	24	46	52	25	44	4	26	41	15
35	21	8	26	22	6	6	23	3	45	24	1	24	24	59	4	25	56	43	26	54	22
36	21	18	45	22	16	52	23	15	0	24	13	7	25	11	15	26	9	22	27	7	30
37	21	29	4	22	27	39	23	26	25	24	24	51	25	23	26	26	22	2	27	20	37
38	21	39	22	22	38	26	23	37	30	24	36	34	25	35	37	26	34	41	27	33	45
39	21	49	41	22	49	13	23	48	45	24	48	17	25	47	49	26	47	21	27	46	52
40	22	0	0	23	0	0	24	0	0	25	0	0	26	0	0	27	0	0	28	0	0

Numerus siue ordo Quadrantum.

Partes.	29			30			31			32			33			34			35		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	29	0	0	30	0	0	31	0	0	32	0	0	33	0	0	34	0	0	35	0	0
2	20	23	26	21	5	37	21	47	49	22	30	0	23	12	11	23	54	22	24	36	34
3	20	37	2	21	19	41	22	2	21	22	45	0	23	27	39	24	10	19	24	52	58
4	20	50	37	21	33	45	22	16	52	23	0	0	23	43	7	24	26	15	25	9	22
5	21	4	13	21	47	49	22	31	24	23	15	0	23	58	36	24	42	11	25	25	47
6	21	17	49	22	1	52	22	45	56	23	30	0	24	14	4	24	58	7	25	42	11
7	21	31	24	22	15	56	23	0	28	23	45	0	24	29	32	25	14	4	25	98	36
8	21	45	0	22	30	0	23	15	0	24	0	0	24	45	0	25	30	0	26	15	0
9	21	58	36	22	44	4	23	29	32	24	15	0	25	0	28	25	45	56	26	31	24
10	22	12	11	22	58	7	23	44	4	24	30	0	25	15	56	26	1	52	26	47	49
11	22	25	47	23	12	11	23	58	36	24	45	0	25	31	24	26	17	49	27	4	13
12	22	33	22	23	26	15	24	13	7	25	0	0	25	46	52	26	33	45	27	20	37
13	22	52	58	23	40	19	24	27	39	25	15	0	26	2	21	26	49	41	27	37	2
14	23	6	34	23	54	22	24	42	11	25	30	0	26	17	49	27	5	37	27	53	26
15	23	20	9	24	8	26	24	56	43	25	45	0	26	33	17	27	21	34	28	9	51
16	23	33	45	24	32	30	25	11	50	26	0	0	26	48	45	27	37	30	28	26	15
17	23	47	21	24	36	34	25	25	47	26	15	0	27	4	13	27	53	26	28	42	39
18	24	0	56	24	50	37	25	40	19	26	30	0	27	19	41	28	9	22	28	59	4
19	24	14	32	25	4	41	25	54	51	26	45	0	27	35	9	28	25	19	29	16	24
20	24	28	7	25	18	45	26	9	22	27	0	0	27	50	37	28	41	15	29	31	52
21	24	41	43	25	32	49	26	23	54	27	15	0	28	6	6	28	57	11	29	48	17
22	24	55	19	25	46	52	26	38	26	27	30	0	28	21	34	29	13	7	29	4	41
23	25	8	54	26	0	50	26	52	58	27	45	0	28	37	2	29	29	4	30	21	6
24	25	22	30	26	15	0	27	7	30	28	0	0	28	52	30	29	45	0	30	37	30
25	25	36	6	26	29	4	27	22	2	28	15	0	29	7	58	30	0	56	30	53	54
26	25	49	41	26	43	7	27	36	34	28	30	0	29	23	26	30	16	52	30	10	19
27	26	3	17	26	57	21	27	51	6	28	45	0	29	38	54	30	32	49	31	26	43
28	26	16	52	27	11	15	28	5	37	29	0	0	29	54	22	30	48	45	31	43	7
29	26	30	28	27	25	19	28	20	9	29	15	0	30	9	51	31	4	41	31	59	32
30	26	44	4	27	39	22	28	34	41	29	30	0	30	25	19	31	20	37	32	15	56
31	26	57	39	27	53	26	28	49	13	29	45	0	30	40	47	31	36	34	32	32	21
32	27	11	15	28	7	30	29	3	45	30	0	0	30	56	15	31	52	30	32	48	45
33	27	24	51	28	21	34	29	18	17	30	15	0	31	11	43	32	8	26	32	5	9
34	27	38	26	28	35	37	29	32	49	30	30	0	31	27	11	32	24	22	33	21	34
35	27	52	2	28	49	41	29	47	21	30	45	0	31	42	39	32	40	16	33	37	58
36	28	5	37	29	3	45	30	1	52	31	0	0	31	58	7	32	56	15	33	54	22
37	28	19	13	29	17	49	30	16	24	31	15	0	32	13	36	33	12	11	34	10	47
38	28	32	49	29	31	52	30	30	56	31	30	0	32	29	4	33	28	7	34	27	11
39	28	46	24	29	45	56	30	45	28	31	45	0	32	44	32	33	44	4	34	43	36
40	29	0	0	30	0	0	31	0	0	32	0	0	33	0	0	34	0	0	35	0	0

Numerus siue ordo Quadrantum.

Partes.	36			37			38			39			40			41			42		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	36	0	0	37	0	0	38	0	0	39	0	0	40	0	0	41	0	0	42	0	0
2	25	18	45	26	0	56	26	43	7	27	25	19	28	7	30	28	49	41	29	31	52
3	25	35	37	26	18	17	27	0	56	27	43	36	28	26	15	29	8	54	29	51	34
4	25	52	30	26	35	37	27	18	45	28	1	52	28	45	0	29	28	7	30	11	15
5	26	9	22	26	52	58	27	36	34	28	20	9	26	3	45	29	47	21	30	30	56
6	26	26	15	27	10	19	27	54	22	28	38	26	29	22	30	30	6	34	30	50	37
7	26	43	7	27	27	39	28	12	11	28	56	43	29	41	15	30	25	47	31	10	19
8	27	0	0	27	45	0	28	30	0	29	15	0	30	0	0	30	45	0	31	30	0
9	27	16	52	28	2	21	28	47	49	29	33	17	30	18	45	31	4	13	31	49	41
10	27	33	45	28	19	41	29	5	37	29	51	34	30	37	30	31	23	26	32	9	22
11	27	50	37	28	37	2	29	23	26	30	9	51	30	56	15	31	42	39	32	29	4
12	29	7	30	28	54	22	29	41	15	30	28	7	31	15	0	32	1	52	32	48	45
13	28	24	22	29	11	43	29	54	4	30	46	24	31	33	45	32	21	6	33	8	26
14	28	41	15	29	29	4	30	16	52	31	4	41	31	52	30	32	40	19	33	28	7
15	28	58	7	29	46	24	30	34	41	31	22	58	32	11	15	32	59	32	33	47	49
16	29	15	0	30	3	45	30	32	30	31	41	15	32	30	0	33	18	45	34	7	30
17	29	31	52	30	21	9	31	10	19	31	59	32	32	48	45	33	37	58	34	27	11
18	29	48	45	30	38	26	31	28	7	32	17	47	33	7	30	33	57	11	34	46	52
19	30	5	37	30	55	47	31	45	56	32	36	6	33	26	15	34	16	24	35	6	34
20	30	22	30	31	13	7	32	3	45	32	54	22	33	45	0	34	35	37	35	26	15
21	30	39	22	31	30	28	32	21	34	33	12	39	34	3	45	34	54	51	35	45	56
22	30	56	15	31	47	49	32	39	22	33	30	56	34	22	30	35	14	4	36	5	37
23	31	13	7	32	5	9	32	57	11	33	49	13	34	41	15	35	33	17	36	25	19
24	31	30	0	32	22	30	33	15	0	34	7	30	35	0	0	35	52	30	36	45	0
25	31	46	52	32	39	51	33	32	49	34	25	47	35	18	45	36	11	43	37	4	41
26	32	3	45	32	57	11	33	50	37	34	44	4	35	37	30	36	50	56	37	24	22
27	32	20	37	33	14	32	34	8	26	35	2	21	34	56	15	36	50	9	37	44	4
28	32	37	30	33	31	52	34	26	15	35	20	37	36	15	0	37	9	22	38	3	45
29	32	54	22	33	49	13	34	44	4	35	38	34	36	33	45	37	28	36	38	23	26
30	33	11	15	34	6	34	35	1	52	35	57	11	36	52	30	37	47	49	38	43	7
31	33	28	7	34	23	54	35	19	41	36	15	28	37	11	15	38	7	2	39	2	49
32	33	45	0	34	41	15	35	37	30	36	33	45	37	30	0	38	26	15	39	22	30
33	34	1	52	34	58	36	35	55	19	36	52	2	37	48	45	38	45	28	39	42	11
34	34	18	45	35	15	56	36	13	7	37	10	19	38	7	30	39	4	41	40	1	52
35	34	35	37	35	33	17	36	30	56	37	28	36	38	26	15	39	23	54	40	21	34
36	34	52	30	35	50	37	36	48	45	37	46	52	38	45	0	39	43	7	40	41	15
37	35	9	22	36	7	58	37	6	34	38	5	9	39	3	45	40	2	21	41	0	56
38	35	26	15	36	25	19	37	24	22	38	23	26	39	22	30	40	21	34	41	20	37
39	35	43	7	36	42	39	37	42	11	38	41	43	39	41	15	40	40	47	41	40	19
40	36	0	0	37	0	0	38	0	0	39	0	0	40	0	0	41	0	0	42	0	0

Numerus siue ordo Quadratorum.

Partes.	43			44			45			46			47			48			49		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	43	0	0	44	0	0	45	0	0	46	0	0	47	0	0	48	0	0	49	0	0
2	30	14	4	30	56	15	31	38	26	32	20	37	33	2	49	33	45	0	34	27	11
3	30	34	13	31	16	52	31	59	32	32	42	11	33	24	51	34	7	30	34	50	9
4	30	54	22	31	37	30	32	20	37	33	3	45	33	46	52	34	30	0	35	13	7
5	31	14	32	31	58	7	32	41	43	33	25	19	34	8	54	34	52	30	35	36	6
6	31	34	41	32	18	45	33	2	49	33	46	52	34	30	56	35	15	0	35	59	4
7	31	54	51	32	39	22	33	23	54	34	8	26	34	52	58	33	37	30	36	22	2
8	32	15	0	33	0	0	33	45	0	34	30	0	35	15	0	36	0	0	36	45	0
9	32	35	9	33	20	37	34	6	6	34	51	34	35	37	2	36	22	30	37	7	58
10	32	55	19	33	41	15	34	27	11	35	13	7	35	59	4	36	45	0	37	30	56
11	33	15	28	34	1	52	34	48	17	35	34	41	36	21	6	37	7	30	37	53	54
12	33	35	37	34	22	30	35	9	22	35	56	15	36	43	7	37	30	0	38	16	52
13	33	55	57	34	43	7	35	30	28	36	17	49	37	5	9	37	52	30	38	39	51
14	34	15	56	35	3	45	35	51	34	36	39	22	37	27	11	38	15	0	39	2	49
15	34	36	6	35	24	22	36	12	39	37	0	56	37	49	13	38	37	30	39	25	47
16	34	56	15	35	45	0	36	33	45	37	22	30	38	11	15	39	0	0	39	48	45
17	35	16	24	36	5	37	36	54	51	37	44	4	38	33	17	39	22	30	40	11	43
18	35	36	34	36	26	15	37	15	56	38	5	37	38	55	19	39	45	0	40	34	41
19	35	56	43	36	46	52	37	37	2	38	27	11	39	17	21	40	7	30	40	57	39
20	36	16	52	37	7	30	37	58	7	38	48	45	39	39	22	40	30	0	41	20	37
21	36	37	2	37	28	7	38	19	13	39	10	19	40	1	24	40	52	30	41	43	36
22	36	57	11	37	48	45	38	40	19	39	31	52	40	23	26	41	15	0	42	6	34
23	37	17	21	38	9	22	39	1	24	39	53	26	40	45	28	41	37	30	42	29	32
24	37	37	30	38	30	0	39	22	30	40	15	0	41	7	30	42	0	0	42	52	30
25	37	57	39	38	50	37	39	43	36	40	36	34	41	29	32	42	22	30	43	15	28
26	38	17	49	39	11	15	40	4	41	40	58	7	41	51	34	42	45	0	43	38	26
27	38	37	58	39	31	52	40	25	47	41	19	41	42	13	36	43	7	30	44	1	24
28	38	58	7	39	52	30	40	46	52	41	41	15	42	35	37	43	30	0	44	24	22
29	39	18	17	40	13	7	41	7	58	42	2	49	42	57	39	43	52	30	44	47	21
30	39	38	26	40	33	45	41	29	4	42	24	22	43	19	41	44	15	0	45	10	19
31	39	58	36	40	54	22	41	50	9	42	45	56	43	41	43	44	37	30	45	33	17
32	40	18	45	41	15	0	42	11	15	43	7	30	44	3	45	45	0	0	45	56	15
33	40	38	54	41	35	37	42	32	21	43	29	4	44	25	47	45	22	30	46	19	13
34	40	59	4	41	56	15	42	53	26	43	50	37	44	47	49	45	45	0	46	42	11
35	41	19	13	42	16	52	43	14	32	44	12	11	45	9	51	46	7	30	47	5	9
36	41	39	22	42	37	30	43	35	37	44	33	45	45	31	52	46	30	0	47	28	7
37	41	59	32	42	58	7	43	56	43	44	55	19	45	53	54	46	52	30	47	51	6
38	42	19	41	43	18	45	44	17	49	45	16	52	46	15	56	47	15	0	48	14	4
39	42	39	51	43	39	22	44	38	54	45	38	26	46	37	58	47	37	30	48	37	2
40	43	0	0	44	0	0	45	0	0	46	0	0	47	0	0	48	0	0	49	0	0

Numerus siue ordo Quadrantum.

Partes.	50			51			52			53			54			55			56		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	50	0	0	51	0	0	52	0	0	53	0	0	54	0	0	55	0	0	56	0	0
2	35	9	22	35	51	34	36	33	45	37	15	56	37	58	7	38	40	19	39	22	30
3	35	32	49	36	15	28	36	58	7	37	40	47	38	23	26	39	6	6	39	48	45
4	35	56	15	36	39	22	37	22	30	38	5	37	38	48	45	39	31	52	40	15	0
5	36	19	41	37	3	17	37	46	52	38	30	28	39	14	4	39	57	39	40	41	15
6	36	43	7	37	27	11	38	11	15	38	55	19	39	39	22	40	23	26	41	7	30
7	37	6	34	37	51	6	38	35	37	39	20	9	40	4	41	40	49	13	41	33	45
8	37	30	0	38	15	0	39	0	0	39	45	0	40	30	0	41	15	0	42	0	0
9	37	53	26	38	38	54	39	24	22	40	9	51	40	55	19	41	40	47	42	26	15
10	38	16	52	39	2	49	39	48	45	40	34	41	41	20	37	42	6	34	42	52	30
11	38	40	19	39	26	43	40	13	7	40	59	32	41	45	56	42	32	21	43	18	45
12	39	3	45	39	50	37	40	37	30	41	24	22	42	11	15	42	58	7	43	45	0
13	39	27	11	40	14	32	41	1	52	41	49	13	42	36	34	43	23	54	44	11	15
14	39	50	37	40	38	26	41	26	15	42	14	4	43	1	52	43	49	41	44	37	30
15	40	14	4	41	2	21	41	50	37	42	38	54	43	27	11	44	15	28	45	3	45
16	40	37	30	41	26	15	42	15	0	43	3	45	43	52	30	44	41	15	45	30	0
17	41	0	56	41	50	9	42	39	22	43	28	36	44	17	49	45	7	2	45	56	15
18	41	24	22	42	14	4	43	3	45	43	53	26	44	43	7	45	32	49	46	22	30
19	41	47	49	42	37	58	43	28	7	44	18	17	45	8	26	45	58	36	46	48	45
20	42	11	15	43	1	52	43	52	30	44	43	7	45	33	45	46	24	22	47	15	0
21	42	34	41	43	25	47	44	16	52	45	7	58	45	59	4	46	50	9	47	41	15
22	42	58	7	43	49	41	44	41	15	45	32	49	46	24	22	47	15	56	48	7	30
23	43	21	34	44	13	36	45	5	37	45	57	39	46	49	41	47	41	43	48	33	45
24	43	45	0	44	37	30	45	30	0	46	22	30	47	15	0	48	7	30	49	0	0
25	44	8	26	45	1	24	45	54	22	46	47	21	47	40	19	48	33	17	49	26	15
26	44	31	52	45	25	19	46	18	45	47	12	11	48	5	37	48	59	4	49	52	30
27	44	55	19	45	49	13	46	43	7	47	37	2	48	30	56	49	24	51	50	18	45
28	45	18	45	46	13	7	47	7	30	48	1	52	48	56	15	49	50	37	50	45	0
29	45	42	11	46	37	2	47	31	52	48	26	43	49	21	34	50	16	24	51	11	15
30	46	5	37	47	0	56	47	56	15	48	51	34	49	46	52	50	42	11	51	37	30
31	46	29	4	47	24	51	48	20	37	49	16	24	50	12	11	51	7	58	52	3	45
32	46	52	30	47	48	45	48	45	0	49	41	15	50	37	30	51	33	45	52	30	0
33	47	15	56	48	12	39	49	9	22	50	6	6	51	2	49	51	59	32	52	56	15
34	47	39	22	48	36	34	49	33	45	50	30	56	51	28	7	52	25	19	53	22	30
35	48	2	49	49	0	28	49	58	7	50	55	47	51	53	26	52	51	6	53	48	45
36	48	26	15	49	24	22	50	22	30	51	20	37	52	18	45	53	16	52	54	15	0
37	48	49	41	49	48	17	50	46	52	51	45	28	52	44	4	53	42	39	54	41	15
38	49	13	7	50	12	11	51	11	15	52	10	19	53	9	22	54	8	26	55	7	30
39	49	36	34	50	36	6	51	35	37	52	35	9	53	34	41	54	34	13	55	33	45
40	50	0	0	51	0	0	52	0	0	53	0	0	54	0	0	55	0	0	56	0	0

Numerus siue ordo Quadrantum.

Partes.	57			58			59			60			61			62			63		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	57	0	0	58	0	0	59	0	0	60	0	0	61	0	0	62	0	0	63	0	0
2	40	4	41	40	46	52	41	29	4	42	11	15	42	53	26	43	35	37	44	17	49
3	40	31	24	41	14	4	41	56	43	42	39	22	43	2	2	44	4	41	44	47	21
4	40	58	7	41	41	15	42	24	22	43	7	30	43	50	37	44	33	45	45	16	52
5	41	24	51	42	8	26	42	52	2	43	35	37	44	19	13	45	2	49	45	46	24
6	41	51	34	42	35	37	42	19	41	44	3	45	44	47	49	45	31	52	46	15	56
7	42	18	17	43	2	49	43	47	21	44	31	52	45	16	24	46	0	56	46	45	28
8	42	45	0	43	30	0	44	15	0	45	0	0	45	45		46	30	0	47	15	0
9	43	11	43	43	57	11	44	42	39	45	28	7	46	13	36	46	59	4	47	44	32
10	43	38	26	44	24	22	45	10	19	45	56	15	46	42	11	47	28	7	48	14	4
11	44	5	9	44	51	34	45	37	58	46	24	22	47	10	47	47	57	11	48	43	36
12	44	31	52	45	18	45	46	5	37	46	52	30	47	32	22	48	26	15	49	13	7
13	44	58	36	45	45	56	46	33	17	47	20	37	48	7	58	48	55	19	49	42	39
14	45	25	19	46	13	7	47	0	56	47	48	45	48	36	34	49	24	22	50	12	11
15	45	52	2	46	40	19	47	28	36	48	16	52	49	5	9	49	53	26	50	41	43
16	46	18	45	47	7	30	47	56	15	48	45	0	49	33	45	50	22	30	51	11	15
17	46	45	28	47	34	41	48	23	54	49	13	7	50	2	21	50	51	34	51	40	47
18	47	12	11	48	1	52	48	51	34	49	41	15	50	30	56	51	20	37	52	10	19
19	47	38	54	48	29	4	49	19	13	50	9	22	50	59	32	51	49	41	52	39	51
20	48	5	37	48	56	15	49	46	52	50	37	30	51	28	7	52	18	45	53	9	22
21	48	32	21	49	23	26	50	14	32	51	5	37	51	56	43	52	47	49	53	38	54
22	48	59	4	49	50	37	50	42	11	51	33	45	52	25	19	53	16	52	54	8	26
23	49	25	47	50	17	49	51	9	51	52	1	52	52	53	54	53	45	56	54	37	58
24	49	52	30	50	45	0	51	37	30	52	30	0	53	22	30	54	15	0	55	7	30
25	50	19	13	51	12	11	52	5	9	52	58	7	53	51	6	54	44	4	55	37	2
26	50	45	56	51	33	22	52	32	49	53	26	15	54	19	41	55	13	7	56	6	34
27	51	12	39	52	6	34	53	0	28	53	54	22	54	48	17	55	42	11	56	36	6
28	51	39	22	52	33	45	53	28	7	54	22	30	55	16	52	56	11	15	57	5	37
29	52	6	6	53	0	56	53	55	47	54	50	37	55	45	28	56	40	19	55	35	9
30	52	32	49	53	28	7	54	23	26	55	18	45	56	14	4	57	9	22	58	4	41
31	51	59	32	53	55	19	54	51	6	55	46	52	56	42	39	57	38	26	58	34	13
32	53	56	15	54	22	30	55	18	45	56	15	0	57	11	15	58	7	30	59	3	45
33	53	52	58	54	49	41	55	46	24	56	43	7	57	39	51	58	36	34	59	33	17
34	54	19	41	55	16	52	56	14	4	57	11	15	58	8	26	59	5	37	60	2	49
35	54	46	24	55	44	4	56	41	43	57	39	22	58	37	2	59	34	41	60	32	21
36	55	13	7	56	11	15	57	9	22	58	7	30	59	5	37	60	3	45	61	1	52
37	55	39	51	56	38	26	57	37	2	58	35	37	59	34	13	60	32	49	61	31	24
38	56	9	34	57	5	37	58	4	41	59	3	45	60	2	49	61	1	52	62	0	56
39	56	33	17	57	32	49	58	32	21	59	31	52	60	31	24	61	30	56	62	30	28
40	57	0	0	58	0	0	59	0	0	60	0	0	61	0	0	62	0	0	63	0	0

Numerus fiue ordo Quadrantum.

Partes.	64			65			66			67			68			69			70		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	64	0	0	65	0	0	66	0	0	67	0	0	68	0	0	69	0	0	70	0	0
2	45	0	0	45	42	11	46	24	22	47	6	34	47	48	45	48	30	56	49	13	7
3	45	30	0	46	12	39	46	55	19	47	37	58	48	20	37	49	3	17	49	45	56
4	46	0	0	46	43	7	47	26	15	48	9	22	48	52	30	49	35	37	50	18	45
5	46	30	0	47	13	36	47	57	11	48	40	47	49	24	22	50	7	58	50	51	34
6	47	0	0	47	44	4	48	28	7	49	12	11	49	56	15	50	40	19	51	24	22
7	47	30	0	48	14	32	48	59	4	49	43	36	50	28	7	51	12	39	51	57	11
8	48	0	0	48	45	0	49	30	0	50	15	0	51	0	0	51	45	0	52	30	0
9	48	30	0	49	15	28	50	0	56	50	46	24	51	31	52	52	17	21	53	2	49
10	49	0	0	49	45	56	50	31	52	51	17	49	52	3	45	52	49	41	53	35	37
11	49	30	0	50	16	24	51	2	49	51	49	13	52	35	37	53	22	2	54	8	26
12	50	0	0	50	46	52	51	33	45	52	20	37	53	7	30	53	54	22	54	41	15
13	50	30	0	51	17	21	52	4	41	52	52	2	53	39	22	54	26	43	55	14	4
14	51	0	0	51	47	49	52	35	37	53	23	26	54	11	15	55	59	4	55	46	52
15	51	30	0	52	18	17	53	6	34	53	54	51	54	43	7	55	31	24	56	19	41
16	52	0	0	52	48	45	53	37	30	54	26	15	55	15	0	56	3	45	56	52	30
17	52	30	0	53	19	13	54	8	26	54	57	39	55	46	52	56	36	6	57	25	19
18	53	0	0	53	49	41	54	39	22	55	29	4	56	18	45	57	8	26	57	58	7
19	53	30	0	54	20	9	55	10	19	56	0	28	56	50	37	57	40	47	58	30	56
20	54	0	0	54	50	37	55	41	15	56	31	52	57	22	30	58	13	7	59	3	45
21	54	30	0	55	21	6	56	12	11	56	3	17	57	54	22	58	45	28	59	36	34
22	55	0	0	55	51	34	56	43	7	57	34	41	58	26	15	59	17	49	60	9	22
23	55	30	0	56	22	2	57	14	4	58	6	6	58	58	7	59	50	9	60	42	11
24	56	0	0	56	52	30	57	45	0	58	37	30	59	30	0	60	22	30	61	15	0
25	56	30	0	57	22	58	58	15	56	59	8	54	60	1	52	60	54	51	61	47	49
26	57	0	0	57	53	26	58	46	52	59	40	19	60	33	45	61	27	11	62	20	37
27	57	30	0	58	23	54	59	17	49	60	11	43	61	5	37	61	59	32	62	53	26
28	58	0	0	58	54	22	59	48	45	60	43	7	61	37	30	62	31	52	63	26	15
29	58	30	0	59	24	51	60	19	41	61	14	32	62	9	22	63	4	13	63	59	4
30	59	0	0	59	55	19	60	50	37	61	45	56	62	41	15	63	36	34	64	31	52
31	59	30	0	60	25	47	61	21	34	62	17	21	63	13	7	64	8	54	65	4	41
32	60	0	0	60	56	15	61	52	30	62	48	45	63	45	0	64	41	15	65	37	30
33	60	30	0	61	26	43	62	23	26	63	20	9	64	16	52	65	13	36	66	10	19
34	61	0	0	61	57	11	62	54	22	63	51	34	64	48	45	65	45	56	66	43	7
35	61	30	0	62	27	39	63	25	19	64	22	58	65	20	37	66	18	17	67	15	56
36	62	0	0	62	58	7	63	56	15	64	54	22	65	52	30	66	50	37	67	48	45
37	62	30	0	63	28	36	64	27	11	65	25	47	66	24	22	67	22	58	68	21	34
38	63	0	0	63	59	4	64	58	7	65	57	11	66	56	15	67	55	19	68	54	22
39	63	30	0	64	29	32	65	29	4	66	28	36	67	28	7	68	27	39	69	27	11
40	64	0	0	65	0	0	66	0	0	67	0	0	68	0	0	69	0	0	70	0	0

Numerus fiue ordo Quadrantum.

Partes.	71			72			73			74			75			76			77		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	71	0	0	72	0	0	73	0	0	74	0	0	75	0	0	76	0	0	77	0	0
2	49	55	19	50	37	30	51	19	41	52	1	52	52	44	4	53	26	15	54	8	26
3	50	28	36	51	11	15	51	53	54	52	36	34	53	19	13	54	1	52	54	44	32
4	51	1	52	51	45	0	52	28	7	53	11	15	53	54	22	54	37	30	55	20	37
5	51	35	9	52	18	45	53	2	21	53	45	56	54	29	32	55	13	7	55	56	43
6	52	8	26	52	52	30	53	36	34	54	20	37	55	4	41	55	48	45	56	32	49
7	52	41	43	53	26	11	54	10	47	54	55	19	55	39	51	56	24	22	57	8	54
8	53	15	0	54	0	0	54	45	0	55	30	0	56	15	0	57	0	0	57	45	0
9	53	48	17	54	33	45	55	19	13	56	4	41	56	50	9	57	35	37	58	21	6
10	54	21	34	55	7	30	55	53	26	56	39	22	57	25	19	58	11	15	58	57	11
11	54	54	51	55	41	15	56	27	39	57	14	4	58	0	28	58	46	52	59	33	17
12	55	28	7	56	15	0	57	1	52	57	48	45	58	35	37	59	22	30	60	9	22
13	56	1	24	56	48	45	57	36	6	58	23	26	59	10	47	59	58	7	60	45	28
14	56	34	41	57	22	30	58	10	19	58	58	7	59	45	56	60	33	45	61	21	34
15	57	7	58	57	56	15	58	44	32	59	32	49	60	21	6	61	9	22	61	57	39
16	57	41	15	58	30	0	59	18	45	60	7	30	60	56	15	61	45	0	62	33	45
17	58	14	32	59	3	45	59	52	58	60	42	11	61	31	24	62	20	37	63	9	51
18	58	47	49	59	37	30	60	27	11	61	16	52	62	6	34	62	56	15	63	45	56
19	59	21	6	60	11	15	61	1	24	61	51	34	62	41	43	63	31	52	64	22	2
20	59	54	22	60	45	0	61	35	37	62	26	15	63	16	52	64	7	30	64	58	7
21	60	27	39	61	18	45	62	9	51	63	0	56	63	52	2	64	43	7	65	34	13
22	61	0	56	61	52	30	62	44	4	63	35	37	64	27	11	65	18	45	66	10	19
23	61	34	13	62	26	15	63	18	17	64	10	19	65	2	21	65	54	22	66	46	24
24	62	7	30	63	0	0	63	52	30	64	45	0	65	37	30	66	30	0	67	22	30
25	62	40	47	63	33	45	64	26	43	65	19	41	66	12	39	67	5	37	67	58	36
26	63	14	4	64	7	30	65	0	56	65	54	22	66	47	49	67	41	15	68	34	41
27	63	47	21	64	41	15	65	35	9	66	29	4	67	22	58	68	16	52	69	10	47
28	64	20	37	65	15	0	66	9	22	67	3	45	67	58	7	68	52	30	69	46	51
29	64	53	54	65	48	45	66	43	36	67	38	26	68	33	17	69	28	7	70	22	58
30	65	27	11	66	22	30	67	17	49	68	13	7	69	8	26	70	3	45	70	59	4
31	66	0	28	66	56	15	67	52	2	68	47	49	69	43	36	70	39	22	71	35	9
32	66	33	45	67	30	0	68	26	15	69	22	30	70	18	45	71	15	0	72	11	15
33	67	7	2	68	3	45	69	0	28	69	57	11	70	53	54	71	50	37	72	47	21
34	67	40	19	68	37	30	69	34	41	70	31	52	71	29	4	72	26	15	73	23	26
35	68	13	36	69	11	15	70	8	54	71	6	34	72	4	13	73	1	52	73	59	32
36	68	46	52	69	45	0	70	43	7	71	41	15	72	39	22	73	37	30	74	35	37
37	69	20	9	70	18	45	71	17	21	72	15	56	73	14	32	74	13	7	75	11	43
38	69	53	26	70	52	30	71	51	34	72	50	37	73	49	41	74	48	45	75	47	49
39	70	26	43	71	26	15	72	25	47	73	25	19	74	24	51	75	24	22	76	23	54
40	71	0	0	72	0	0	73	0	0	74	0	0	75	0	0	76	0	0	77	0	0

Numerus sive ordo Quadrantum.

Partes.	78			79			80			81			82			83			84		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	78	0	0	79	0	0	80	0	0	81	0	0	82	0	0	83	0	0	84	0	0
2	54	50	37	55	32	49	56	15	0	56	57	11	57	39	22	58	21	34	59	3	45
3	55	27	11	56	9	51	56	52	30	57	35	9	58	17	49	59	0	28	59	43	7
4	56	3	45	56	46	52	57	30	0	58	13	7	58	56	15	59	39	22	60	22	30
5	56	40	19	57	23	54	58	7	30	58	51	6	59	34	41	60	18	17	61	1	52
6	57	16	52	58	0	56	58	45	0	59	29	4	60	13	7	60	57	11	61	41	15
7	57	53	26	58	37	58	59	22	30	60	7	2	60	51	34	61	36	6	62	20	37
8	58	30	0	59	15	0	60	0	0	60	45	0	61	30	0	62	15	0	63	0	0
9	59	6	34	59	52	2	60	37	30	61	22	58	62	8	26	62	53	54	63	39	22
10	59	43	7	60	29	4	61	15	0	62	0	56	62	46	52	63	32	49	64	18	45
11	60	19	41	61	6	6	61	52	30	62	38	54	63	25	19	64	11	43	64	58	7
12	60	56	15	61	43	7	62	30	0	63	16	52	64	3	45	64	50	37	65	37	30
13	61	32	49	62	20	9	63	7	30	63	54	51	64	42	11	65	29	32	66	16	52
14	62	9	22	62	57	11	63	45	0	64	32	49	65	20	37	66	8	27	66	56	15
15	62	45	56	63	34	13	64	22	30	65	10	47	65	59	4	66	47	21	67	35	37
16	63	22	30	64	11	15	65	0	0	65	48	45	66	37	30	67	26	15	68	15	0
17	63	59	4	64	48	17	65	37	30	66	26	43	67	15	56	68	5	9	68	54	22
18	64	35	37	65	25	19	66	15	0	67	4	41	67	54	22	68	44	4	69	33	45
19	65	12	11	66	2	21	66	52	30	67	42	39	68	32	49	69	22	58	70	13	7
20	65	48	45	66	39	22	67	30	0	68	20	37	69	11	15	70	1	52	70	52	30
21	66	25	19	67	16	24	68	7	30	68	58	36	69	49	41	70	40	47	71	31	52
22	67	1	52	67	53	26	68	45	0	69	36	34	70	28	7	71	19	41	72	11	15
23	67	38	26	68	30	28	69	22	30	70	14	32	71	6	34	71	58	36	72	50	37
24	68	15	0	69	7	30	70	0	0	70	52	30	71	45	0	72	37	30	73	30	0
25	68	51	34	69	44	32	70	37	30	71	30	28	72	23	26	73	16	24	74	9	22
26	69	28	7	70	21	34	71	15	0	72	8	26	73	1	52	73	55	19	74	48	45
27	70	4	41	70	58	36	71	52	30	72	46	24	73	40	19	74	34	13	75	28	7
28	70	41	15	71	35	37	72	30	0	73	24	22	74	18	45	75	13	7	76	7	30
29	71	17	49	72	12	39	73	7	30	74	2	21	74	57	11	75	52	2	76	46	52
30	71	54	22	72	49	41	73	45	0	74	40	19	75	35	37	76	30	56	77	26	15
31	72	30	56	73	26	43	74	22	30	75	18	17	76	14	4	77	9	51	78	5	37
32	73	7	30	74	3	45	75	0	0	75	56	15	76	52	30	77	48	45	78	45	0
33	73	44	4	74	40	47	75	37	30	76	34	13	77	30	56	78	27	39	79	24	22
34	74	20	37	75	17	49	76	15	0	77	12	11	78	9	22	79	6	34	80	3	45
35	74	57	11	75	54	51	76	52	30	77	50	9	78	47	49	79	45	28	80	43	7
36	75	33	45	76	31	52	77	30	0	78	28	7	79	26	15	80	24	22	81	22	30
37	76	10	19	77	8	54	78	7	30	79	6	6	80	4	41	81	3	17	82	1	52
38	76	46	52	77	45	56	78	45	0	79	44	4	80	43	7	81	42	11	82	41	15
39	77	23	26	78	22	58	79	22	30	80	22	2	81	21	34	82	21	6	83	20	37
40	78	0	0	79	0	0	80	0	0	81	0	0	82	0	0	83	0	0	84	0	0

Numerus sive ordo Quadrantum.

Partes.	85			86			87			88			89			90			91		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	85	0	0	86	0	0	87	0	0	88	0	0	89	0	0	90	0	0	0	0	0
2	59	45	56	60	28	7	61	10	19	61	52	30	62	34	41	63	16	52	63	59	4
3	60	25	47	61	8	26	61	51	6	62	33	45	63	16	24	63	59	4	64	41	43
4	61	5	37	61	48	45	62	31	52	63	15	0	63	58	7	64	41	15	65	24	22
5	61	45	28	62	29	4	63	12	39	63	56	15	64	39	51	65	23	26	66	7	2
6	62	25	19	63	9	22	63	53	26	64	37	30	65	21	34	66	5	37	66	49	41
7	63	5	9	63	49	41	64	34	13	65	18	45	66	3	17	66	47	49	67	32	21
8	63	45	0	64	30	0	65	15	0	66	0	0	66	45	0	67	30	0	68	15	0
9	64	24	51	65	10	19	65	55	47	66	41	15	67	26	43	68	12	11	68	57	39
10	65	4	41	65	50	37	66	36	34	67	22	30	68	8	26	68	54	22	69	40	19
11	65	44	32	66	30	56	67	17	21	68	3	45	68	50	9	69	36	34	70	22	58
12	66	24	22	67	11	15	67	58	7	68	45	0	69	31	52	70	18	45	71	5	37
13	67	4	13	67	51	34	68	38	54	69	26	15	70	13	36	71	0	56	71	48	17
14	67	44	4	68	31	52	69	19	41	70	7	30	70	55	19	71	43	7	72	30	56
15	68	23	54	69	12	11	70	0	28	70	48	45	71	37	2	72	25	19	73	13	36
16	69	3	45	69	52	30	70	41	15	71	30	0	72	18	45	73	7	30	73	56	15
17	69	43	36	70	32	49	71	22	2	72	11	15	73	0	28	73	49	41	74	38	54
18	70	23	26	71	13	7	72	2	49	72	52	30	73	42	11	74	31	52	75	21	34
19	71	3	17	71	53	26	72	43	36	73	33	45	74	23	54	75	14	4	76	4	13
20	71	43	7	72	33	45	73	24	22	74	15	0	75	5	37	75	56	15	76	46	52
21	72	22	58	73	14	4	74	5	9	74	56	15	75	47	21	76	38	26	77	29	4
22	73	2	49	73	54	22	74	45	56	75	37	30	76	29	4	77	20	37	78	12	11
23	73	42	39	74	34	41	75	26	43	76	18	45	77	10	47	78	2	49	78	54	51
24	74	22	30	75	15	0	76	7	30	77	0	0	77	52	30	78	45	0	79	37	39
25	75	2	21	75	55	19	76	48	17	77	41	15	78	34	13	79	27	11	80	20	0
26	75	42	11	76	35	37	77	29	4	78	22	30	79	15	56	80	9	22	81	2	49
27	76	22	2	77	15	56	78	9	51	79	3	45	79	7	39	80	51	34	81	45	28
28	77	1	52	77	56	15	78	50	37	79	45	0	80	39	22	81	33	45	82	28	7
29	77	41	43	78	36	36	79	31	24	80	26	15	81	21	6	82	15	56	83	10	47
30	78	21	34	79	16	52	80	12	11	81	7	30	82	2	49	82	58	7	83	53	27
31	79	1	24	79	57	11	80	52	58	81	48	45	82	44	32	83	40	19	84	36	6
32	79	41	15	80	37	30	81	33	45	82	30	0	83	26	15	84	22	30	85	18	45
33	80	21	6	81	17	49	82	14	32	83	11	15	84	7	58	85	4	41	86	1	24
34	81	0	56	81	58	7	82	55	19	83	52	30	84	49	41	85	46	52	86	44	4
35	81	40	47	82	38	26	83	36	6	84	33	45	85	31	24	86	29	4	87	26	43
36	82	20	37	83	18	45	84	16	52	85	15	0	86	13	7	86	11	15	88	9	22
37	83	0	28	83	59	4	84	57	39	85	56	15	86	54	51	87	53	26	88	52	2
38	83	40	19	84	39	22	85	38	26	86	37	30	87	36	34	88	35	37	89	34	41
39	84	20	9	85	19	41	86	19	13	87	18	45	88	18	17	89	17	49	0	0	0
40	85	0	0	86	0	0	87	0	0	88	0	0	89	0	0	99	0	0	0	0	0

Numerus fiue ordo Quadrantum.

Partes.	92			93			94			95			96			97			98		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	64	41	15	65	23	26	66	5	37	66	47	49	67	30	0	68	12	11	68	54	22
3	65	24	22	66	7	2	66	49	41	67	32	21	68	15	0	68	57	39	69	40	19
4	66	7	30	66	50	37	67	33	45	68	16	52	69	0	0	69	43	7	70	26	15
5	66	50	37	67	34	13	68	17	49	69	1	24	69	45	0	70	28	36	71	12	11
6	67	33	45	68	17	49	69	1	52	69	45	56	70	30	0	71	14	4	71	58	7
7	68	16	52	69	1	24	69	45	56	70	30	28	71	15	0	71	59	32	72	44	4
8	69	0	0	69	45	0	70	30	0	71	15	0	72	0	0	72	45	0	73	30	0
9	69	43	7	70	28	36	71	14	4	71	59	32	72	45	0	73	30	28	74	15	56
10	70	26	15	71	12	11	71	58	7	72	44	4	73	30	0	74	15	56	75	1	52
11	71	9	22	71	55	47	72	42	11	73	28	36	74	15	0	75	1	24	75	47	49
12	71	52	30	72	39	22	73	26	15	74	13	7	75	0	0	75	46	52	79	33	45
13	72	35	37	73	22	58	74	10	19	74	57	39	75	45	0	76	32	21	77	19	41
14	73	18	35	74	6	34	74	54	22	75	42	11	76	30	0	77	17	49	78	5	37
15	74	1	52	74	50	9	75	38	26	76	26	43	77	15	0	78	3	17	78	51	34
16	74	45	0	75	33	45	76	22	30	77	11	15	78	0	0	78	48	45	79	37	30
17	75	28	7	76	17	21	77	6	34	77	55	47	78	45	0	79	34	13	80	23	26
18	76	11	15	77	0	56	77	50	37	78	40	19	79	30	0	80	19	41	81	9	22
19	76	54	22	77	44	32	78	34	41	79	24	51	80	15	0	81	5	9	81	55	19
20	77	37	30	78	28	7	79	18	45	80	9	22	81	0	0	81	50	37	82	41	15
21	78	20	37	79	11	43	80	2	49	80	53	54	81	45	0	82	36	6	83	27	11
22	79	3	45	79	55	19	80	46	50	81	38	26	82	30	0	83	21	34	84	13	7
23	79	46	52	80	38	54	81	30	56	82	22	58	83	15	0	84	7	2	84	59	4
24	80	30	0	81	22	30	82	15	0	83	7	30	84	0	0	84	52	30	85	45	0
25	81	13	7	82	6	6	82	59	4	83	52	2	84	45	0	85	37	58	86	30	56
26	81	56	15	82	49	41	83	43	7	84	36	34	85	30	0	86	23	26	87	16	52
27	82	39	22	83	33	17	84	27	11	85	21	6	86	15	0	87	8	54	88	2	49
28	83	22	30	84	16	52	85	11	15	86	15	37	87	0	0	87	54	22	88	48	45
29	84	5	37	85	0	28	85	55	19	86	50	9	87	45	0	88	39	51	89	34	41
30	84	48	45	85	44	4	86	39	22	87	34	41	88	30	0	89	25	19	0	0	0
31	85	31	52	86	27	39	87	23	26	88	19	13	89	15	0	0	0	0			
32	86	15	0	87	11	15	88	7	30	89	3	45	90	0	0	0	0	0			
33	86	58	7	87	54	51	88	51	34	89	48	17	0	0	0	0	0	0			
34	87	41	15	88	38	26	89	35	37	0	0	0	0	0	0						
35	88	24	22	89	22	2	0	0	0												
36	89	7	30	0	0	0															
37	89	50	37	0	0	0															
38	0	0	0	0	0	0															

Numerus fiue ordo Quadrantum.

Partes.	99			100			101			102			103			104			105		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	69	36	34	70	18	45	71	0	56	71	43	7	72	25	19	73	7	30	73	49	41
3	70	22	58	71	5	37	71	48	17	72	30	56	73	13	36	73	56	15	74	37	58
4	71	9	22	71	52	30	72	35	37	73	18	45	74	1	52	74	45	0	75	28	7
5	71	55	47	72	39	22	73	22	58	74	6	34	74	50	9	75	33	45	76	17	21
6	72	42	11	73	26	15	74	10	19	74	54	22	75	38	26	76	22	30	77	6	34
7	73	28	36	74	13	7	74	57	39	75	42	11	76	26	43	77	11	15	77	55	47
8	74	15	0	75	0	0	75	45	0	76	30	0	77	15	0	78	0	0	78	45	0
9	75	1	24	75	46	52	76	32	21	77	17	49	78	3	17	78	48	45	79	34	13
10	75	47	49	76	33	45	77	19	41	78	5	37	78	51	34	79	37	30	80	23	26
11	76	34	13	77	20	37	78	7	2	78	53	26	79	39	51	80	26	15	81	12	39
12	77	20	37	78	7	30	78	54	22	79	41	15	80	28	7	81	15	0	82	1	52
13	78	7	2	78	54	22	79	41	43	80	29	4	81	16	24	82	3	45	82	51	6
14	78	53	26	79	41	15	80	29	4	81	16	52	82	4	41	82	52	30	83	40	19
15	79	39	51	80	28	7	81	16	24	82	4	41	82	52	58	83	41	15	84	20	32
16	80	26	15	81	15	0	82	3	45	82	52	30	83	41	15	84	30	0	85	18	45
17	81	12	39	82	1	52	82	51	6	83	40	19	84	29	32	85	18	45	86	7	58
18	81	59	4	82	48	45	83	37	30	84	28	7	85	17	49	86	7	30	86	57	11
19	82	45	28	83	35	37	84	25	47	85	15	56	86	6	6	86	56	15	87	46	24
20	83	31	52	84	22	30	85	13	7	86	3	45	86	54	22	87	45	0	88	35	37
21	84	18	17	85	9	22	86	0	28	86	51	34	87	42	39	88	33	45	80	24	51
22	85	4	41	85	56	15	86	47	49	87	39	22	88	30	56	89	22	30	0	0	0
23	85	51	6	86	43	7	87	35	9	88	27	11	89	19	13	0	0	0	0	0	0
24	86	37	30	87	30	0	88	22	30	89	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	87	23	54	88	16	52	89	9	51	0	0	0									
26	88	10	19	89	3	45	89	57	11	0	0	0									
27	88	56	43	89	50	37	0	0	0	0	0	0									
28	89	43	7	0	0	0															
29	0	0	0	0	0	0															
30	0	0	0																		

Numerus fiue ordo Quadrantum.

Partes.	106			107			108			109			110			111			112		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	74	31	52	75	14	4	75	56	15	75	38	26	77	20	37	78	2	49	78	45	0
3	75	21	34	76	4	13	76	46	52	77	29	32	78	12	11	78	54	51	79	52	30
4	76	11	15	76	54	22	77	37	30	78	20	37	79	3	45	79	46	52	80	30	0
5	77	0	56	77	44	32	78	28	7	79	11	43	79	55	19	80	38	54	81	22	30
6	77	50	37	78	34	41	79	18	45	80	2	49	80	46	52	81	30	56	82	15	0
7	78	40	19	79	24	51	80	9	22	80	53	54	81	38	26	82	22	58	83	7	30
8	79	30	0	80	15	0	81	0	0	81	45	0	82	30	0	83	15	0	84	0	0
9	80	10	41	81	5	9	81	50	37	82	36	6	83	21	34	84	7	2	84	52	30
10	81	9	22	81	55	19	82	41	15	83	27	11	84	13	7	84	59	4	85	45	0
11	81	59	4	82	45	28	83	31	52	84	18	17	85	4	41	85	51	6	86	37	30
12	82	48	45	83	35	37	84	22	30	85	9	22	85	56	15	86	43	7	87	30	0
13	83	38	26	84	25	47	85	13	7	86	0	28	86	47	49	87	35	9	88	22	30
14	84	28	7	85	15	56	86	3	45	86	51	34	87	39	22	88	27	11	89	15	0
15	85	17	49	86	6	6	86	54	22	87	42	39	88	30	56	89	19	13	0	0	0
16	86	7	30	86	56	15	87	45	0	88	33	45	89	22	30	0	0	0			
17	86	57	11	87	46	24	88	35	37	89	24	51	0	0	0	0	0	0			
18	87	46	52	88	36	34	89	26	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
19	88	36	34	89	26	43	0	0	0												
20	89	26	15	0	0	0	0	0	0												
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0												

Numerus siue ordo Quadrantum.

Partes.	113			114			115			116			117			118			119		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	79	27	11	80	9	22	80	51	34	81	33	45	82	15	56	82	58	7	83	40	19
3	80	20	9	81	2	49	81	45	28	82	28	7	83	10	47	83	53	26	84	36	6
4	81	13	7	81	56	15	82	39	22	83	22	30	84	5	37	84	48	45	85	31	52
5	83	6	6	82	49	41	83	33	17	84	16	52	85	0	28	85	44	4	86	27	39
6	82	59	4	83	43	7	84	27	11	85	11	15	85	55	19	86	39	22	87	23	26
7	83	52	2	84	36	34	85	21	6	86	5	37	86	50	9	87	34	41	88	19	13
8	84	45	0	85	30	0	86	15	0	87	0	0	87	45	0	88	30	0	89	15	0
9	85	37	58	86	23	26	87	8	54	87	54	22	88	39	51	89	25	19	0	0	0
10	86	30	56	87	16	52	88	2	49	88	48	45	89	34	41	0	0	0	0	0	0
11	87	23	54	88	10	19	88	56	43	89	43	7	0	0	0	0	0	0			
12	88	16	52	89	3	45	0	0	0	0	0	0									
13	89	9	51	89	57	11	0	0	0												
14	0	0	0	0	0	0															
15	0	0	6																		

Partes.	120			121			122			123			124			125			126		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	84	22	30	85	4	41	85	46	52	86	29	4	87	11	15	87	53	27	88	35	37
3	85	18	45	86	1	24	86	44	4	87	26	43	88	9	22	88	52	2	89	34	41
4	86	15	0	86	58	7	87	41	15	88	24	22	89	7	30	89	50	37	0	0	0
5	87	11	15	87	54	51	88	38	26	89	22	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	88	7	30	88	51	34	89	35	37	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	89	3	45	89	48	17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	90	0	0	0	0	0															
9	0	0	0																		

Partes.	127			128		
	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0
2	89	17	49	90	0	0
3	0	0	0	0	0	0

Quo pacto per circinum deprehendatur Minuta, ac secunda in quauis gradus particula.

10 QVANDO intra Quadrantem non descripti sunt plures quadrantes, sed vnicus tantum adest in 90. gradus exquisitè distributus, cognoscemus solo circini beneficio, quot Minuta, ac secunda in quauis gradus particula contineantur: id quod etiam in Astrolabio fecimus, hoc scilicet modo. Sit data verbi gratia particula t u, in gradu 20. superioris Quadrantis BC. Sumatur ea diligentissime beneficio circini, & à principio Quadrantis, id est, à puncto C, incipiendo, eadem apertura circini accipiantur 60. æquales particulæ vsque ad punctum X, ita vt arcus CX, sexagecuplus sit arcus t u: Quot enim gradus integri in hoc arcu sexagecuplo comprehenduntur, tot minuta complectetur particula data t u. Et si vltra gradus integros in arcu CX, supersit aliqua particula, accipiatur ea sexagies quoque, initio facto à puncto C. Nam quot gradus integri in hoc arcu sexagecuplo continentur, tot secunda vltra Minuta inuenta continebuntur in data particula t u. Quod si adhuc aliquid supersit, reperientur eodem modo Tertia, &c. Itaque cum in arcu CX, qui sexagecuplus est particulæ t u, contineantur 40. gradus integri, comprehendet particula t u, quadraginta Minuta, & insuper tot secunda, quot gradus continentur in arcu, qui sexagecuplus sit particulæ vltra 40. gradus in arcu CX, contentæ, &c.

HOC autē ita demonstro. Quam proportionem habet arcus 60. graduū ad 1. gradum, eam habet arcus CX, ad particulam t u, cum vtrobique proportio sit sexagecupla. Igitur permutanda erit, vt arcus 60. graduum ad arcum CX, ita 1. gradus ad particulam t u: Ac proinde quot partes sexagesimæ arcus 60. graduum, hoc est, quot gradus in arcu CX. continentur, tot sexagesimæ partes vnius gradus, id est, tot minuta in particula t u, existent. Item quam proportionem habet arcus 60. Minutorum ad 1. Minutum, eam habet arcus sexagecuplus particulæ quæ vltra gradus integros vsq; ad X, superest ad hanc ipsam particulā. Permutando igitur erit, vt arc⁹ 60. Minutorum ad arcum sexagecuplum dictæ particulæ reliquæ, ita 1. Minutum, ad dictam particulam reliquam. Quare quot partes sexagesimæ arcus 60. Minutorum, hoc est, quot minuta in arcu dictæ particulæ sexagecuplo (sumendo nunc gradus Quadrantis BC, pro Minutis) continentur, tot partes sexagesimæ vnius Minuti, id est, tot Secunda, in reliqua illa particula includentur, & sic deinceps, si opus sit, de Tertijs, Quartis, &c. intelligatur. Sed satis est, meo iudicio, si minuta diligēter inquirantur. Et si quidem particula remanens maior fuerit semisse gradus, pro illa vnum Minutum assumatur, Minutisq; inuentis adjciatur, & tunc in illa particula contineantur plura Secunda quam 30. Si vero eadem particula semisse gradus fuerit minor, nihil Minutis inuentis adjciatur, quod tunc in illa particula pauciora Secunda includantur, quam 30. Si deniq; dicta particula semissi gradus fuerit æqualis, liberum sit addere Minutis inuentis vnum Minutum, vel non addere.

11 QVIA vero facile error cōmitti potest, si circino particulam dictam gradus, vel minuti sexagies ordine sumere velimus, rectius feceris, quando particula data semisse gradus minor est, si eam vna cū præcedente gradu acceptam primo loco quintuples: deinde hunc arcum quintuplū duples, tertio hunc arcū duplū triples, ac tandē quarto hunc arcum triplum iterum duples. Vltimus n. hic arcus erit datæ particulæ vna cum gradu accepto sexagecuplus. Quare si ex eo demantur 60. gradus, indicabunt reliqui gradus numerum minutorū in data particula contentorū. Quod si per æstimationem cognoueris, particulam semisse gradus minorem non superare min. 24. (Nam si superaret 24. minuta, non possemus ratione iam explicanda inquirere minuta; propterea quod circumducendo circinum, totum Quadrantem excederemus, vt patebit.) commodius minuta datæ particulæ cognoscemus hoc modo. Datam particulā cum gradu præcedenti primo loco quadruplicabimus: deinde hunc arcū quadruplū duplabimus, vt habeamus octuplum arcus ex particula, & vno gradu compositi, tertio arcum hunc octuplū iterum duplabimus, vt fiat arcus sedecuplus arcus ex data particula, & vno gradu compositi; quarto hunc arcū rursus duplabimus; & quinto tandem hunc duplū iterum duplabimus; vt habeatur arcus continens arcum ex particula proposita, & vno gradu sexagies & quater, cuius extremum punctum diligenter notetur. Nam si ex toto arcu ab eo puncto incipiendo, auferatur arcus quadruplus particulæ datæ vna cum vno gradu, supererit arc⁹ sexagecuplus eiusdē particulæ vnà cum vno gradu; ex quo deniq; si demantur 60. gradus, reliqui gradus numerum minutorum indicabunt. Quòd si data particula semisse gradus fuerit maior, explorabim⁹ eodē modo minuta in reliqua particula minore comprehensa. Hæc namq; minuta ex 60. detracta relinquent minuta in particula illa maiore comprehēsa. Bene autem vides, quando data particula minor parū à semisse gradus differt, tutius esse quintuplare illam vnà cum vno gradu; deinde hunc arcum duplare, tertio hunc arcum triplare, & postremo hunc iterum duplare. Hac enim ratione ex vltimo arcu duplato auferendi tantum sunt 60. gradus, & nunquam totus quadrans exhauritur, vt patet.

12 NEQVE vero semper opus est, vt particula illa gradus, vel particula minor vnà cum vno gradu sexagies repetatur, sed satis est; vt ea aliquoties repetita incidat precise in aliquem gradum; quod non raro accidere solet. Nam tunc constituetur fractio, cuius numerator est numerus graduum percursorum: Denominator autem numerus tot vnitatū, quoties particula circino repetita fuerit. Verbi gratia, si aliqua grad⁹ particula vicies repetita incidat in 6. gradum, complectetur particula illa $\frac{1}{3}$ 6. vnius gradus. Quare si numerator 6. per 60. multiplicetur, & productus numerus 360. per denominatorem 20. diuidatur, indicabit Quotiens 18. particulam illam continere 18. minuta. Sic si alia particula septies repetita incidat in tertium gradum, comprehendet ea $\frac{3}{20}$. vnius gradus. Si igitur numerator 3. per 60. multiplicetur, & numer⁹ productus 180. per denominatorē 7. diuidatur, reperientur 25. min. Et quia in diuisione supersunt 5. si ea rursum multiplicentur per 60. productusque numerus 300. per eundem denominatorem 7. diuidatur, dabit quotiens adhuc 42 6. secunda.

DEMONSTRATIO huius praxis hæc est. Quoniam in priori exemplo, ita se habent 20. gradus ad 1. gradum, vt particula vicies repetita ad vnam particulam; erit permutando arcus 20. graduum ad arcum continentem particulam vicies, hoc est, ad arcum 6. graduum, vt 1. gradus ad vnam particulam: & conuertendo 6. gr. ad 20. gr. vt 1. particula ad 1. grad. Cum ergo 6. grad. sint $\frac{6}{20}$. graduum 20. continebit quoque vna particula $\frac{6}{20}$. vnius gradus, quod est propositum. In posteriori vero exemplo; quia ita se habent 7. grad. ad 1. graduum, vt particula septies repetita, hoc est, vt 3. gradus ad 1. particulam; erit permutando arcus 7. graduum ad 3. gra. vt 1. grad. ad 1. particulam: & conuertendo 3. gradus ad 7. gr. vt vna particula ad 1. gra. Cum ergo 3. grad. sint $\frac{3}{7}$. septem graduum, complectetur quoq; 1. particula $\frac{3}{7}$. vnius gradus; quod est propositum. eademq; in cæteris ratio est.

QVANDO particula minor cū vno gradu repetita incidit in gradū aliquē præcisè, auferendi erūt ex gradibus percursis tot gradus, quoties particula illa cum vno gradu repetita fuit. Reliquus n. numerus erit Numerator fractionis: Denominator autem erit, qui pri⁹. Vt si particula illa minor cum 1. gradu repetita septies incidit

cidit in 10.gradum;demendi erunt 7.gradus repetiti. Atq; ita habebuntur iterū $\frac{3}{10}$.vnius gradus in data particula.

Quo pacto ex quouis gradu particula quotlibet Minutorum abscindatur.

13 SI vicissim ex quouis gradu auferre velimus particulam quotlibet minutorum,ita agendum erit. In quadrante superiore BC,accipiatur circino arcus tot graduum, quot minuta desiderantur; atq;(vt confusionē vitemus)in arcuum interuallo semidiametri quadrantis BC, describtum transferatur. Si enim hic arcus in 60. partes æquales secetur,(primū,videlicet in duas:deinde vna harū iterū in duas:Tertio vna harū in tres:ac postremo vna harū in quinq;)continebit vna particula sexagesima numerū minutorū propositū.Verbi gratia,si particula quæratur continens 50.min. accipiemus in arcu FG,ad interuallū semidiametri AC,descripto arcum FG, arcui CZ,graduū 50.æqualē,eumq; in 60.partes æquales secabimus,primū in duas in puncto K: Deinde arcum FK,iterum in duas in puncto L,tertio arcū FL,in tres in punctis T,V.Ac tandē arcum FV,in quinq;. Vna namque harum 5.particularum comprehendet 50.min.ac proinde si transferatur circino in quemlibet gradū Quadrantis BC,absscissa erunt 50.Min.ex eo gradu.Hoc ita demonstro. Quoniam est,vt arcus 60.graduū ad 1.gradū, ita arcus CZ,ad FG,graduū 50.ad sexagesimam partem eiusdē arcus FG;erit permutando,vt arc° 60.graduū ad arcum FG.graduū 50;ita 1.gradus ad sexagesimam particulā arcus FG:& conuertendo,vt arcus FG,graduū 50. ad arcum graduū 60,ita particula sexagesima arcus FG,ad 1.gradum.Cum ergo arcus FG,contineat $\frac{50}{60}$.arc° 60. graduū,continebit quoq; particula sexagesima arcus FG,$\frac{50}{60}$.vnius gradus,hoc est,50.Min.Quod est propositū.

SED hæc res incōmodissima est in paruis Quadrātib°,præsertim si pauca Minuta,vtpote 1.2.vel 3.abscindenda sint.Quis n. in Quadrante exiguo arcū 1.grad°,vel 2.vel.3.in 60.particulas distribuat? Quam ob rem cōmodius id,q̄ proponitur,efficiemus hac ratione.Ex eodem quadrante superioreBC,arcus grad.61.transferatur in arcum XY,ad interuallū semidiametri AC.descriptum,ab X,vsq; ad Y.Atq; hic arc° XY, in 6.partes æquales secetur;Primū scilicet in 2.deinde vtraq; semissis in 3.Deinde prima pars in 10.particulas æquales diuidatur,ita vt quælibet harū particularū sit $\frac{1}{360}$.arcus XY.Et quoniā vna harū particularū est ad arcum XY, vt 1. gradus Quadrantis BC,ad arcum 60.graduū;cum vtrobiq; proportio sit subsexagecupla; erit permutando vna illarū particularum ad 1.grad.vt arcus XY,ad arcum 60.graduum.Quocirca quemadmodū arcus XY,arcum grad.60.cōtinet semel,& insuper vnam eius partem sexagesimam,id est,1.grad.ex cōstructione;Ita quoq; vna illarum particularū cōprehendet 1.gradū semel,& insuper vnam partē sexagesimā vni° grad°,hoc est.1.Minutū.Ex quo fit,vt duæ particulæ complectantur 2.grad.Min.2.At vero 3.particulæ contineant 3.grad.& 3. Min.& sic deinceps.

ITAQVE si in Quadrantē BC,transferatur vna particula sexagesima arcus XY.à puncto C,vel à quouis gradu,habebitur 1.Min.in 2.gradu,vel quouis alio. Et si duæ particulæ transferantur,habebuntur in tertio gradu duo Minuta:tria autem Min.in 4.gradu,si tres particulæ transferantur,& sic de cæteris.

PARI ratione,si quis desideret quotlibet gradus,ac Minuta,inquirenda prius erit particula Minutorū, q̄ desiderātur, eaq; ad gradus propositos adijciēda.Quod si particula minutorū inuētorū tā exigua fuerit,vt circino vix accipi possit,accipienda ea erit vna cum 1.gradu:& hic arcus ex 1. gradu & particula conflatus adijciendus ad numerum graduum propositum minus vno.Vt si velit quis grad.89. Min.59.Inuenienda prius erunt 59. Minuta,quod fiet,si 59.particulæ arcus,XY,in Quadrantem BC,transferantur.Nam particula in 60, gradu cōplectetur 59.Min.vt dictum est.Si igitur arcus ex illa particula,& 1.gradu conflatus adijciatur ad arcum 88.grad. conficietur arcus grad.89.Min.59.Eademq; ratio est de cæteris. Accipientur autem in arcu XY, particulæ 59. si vnus pes circini in puncto 50. statuatur. & alter in nona particula primæ partis sextæ totius arcus XY, versus X. Ita accipientur quoque particulæ 49.48.39.34.&c.vt perspicuum est.

IAM vero si Minuta non in Quadrante BC,sed in maiori,minoriue accipienda sint, inquirenda ea erūt in Quadrante BC, beneficio arcus XY,vt docuimus ; Deinde arcui inter C,& finem particulæ inuentæ auferendus ex Quadrante proposito arcus similis,quod fiet,si ille Quadrans ex centro A, describatur, rectaque ex A,per finem particulæ in BC,inuentæ educatur,&c.

Quo pacto reperiatur fractio cuiusque particulæ in parte qua libet lineæ rectæ in partes æquales diuisæ.

14 QVAE Num.10.11.12.& 13.præcedentib°,dixim°, perbelle etiā quadrant in lineas rectas.Nam eadē ratione cognoscem°,si linea recta in quotuis partes æquales secetur,quantam fractionē quælibet particula vnius partis contineat:Et vicissim quo pacto ex vna parte absscindenda sit quæcunq; fractio proposita. Quę res incredibile est,quantam vtilitatem cum alijs rebus Geometricis;tum verò maxime Dimensionibus, quæ per scalam altimetrā fieri solēt,afferat,vt lib.3.cum de Quadrato Geometrico,vbi scalę altimetræ vsus apparebit,perspicuū erit.Sit enim recta linea AB,vt ad pedem Quadrantis superioris vides,secta in 10.partes æquales, (In tot n. partes libet tam vmbram rectam,quam versam scalæ altimetræ distribuere:quamuis ab alijs vtraq; in 12. diuidatur: quod per illam diuisionē facilius Dimensiones perficiantur, vt suo loco patebit. Magis tamen probarem, si vtrumq; vmbræ latus in 100.partes secaretur,si id magnitudo instrumenti cōmode permittit)propositumq; sit, quot partes decimas cōtineat particulaDC,partis quintę,beneficio circini sumpta particula DC,decupletur ab A,vsq; ad E.Et quoniā in AE,cōtinētur sex partes totius lineæ AB,continebit propterea particula DC,$\frac{6}{10}$.vnius partis decimæ,hoc est,$\frac{6}{100}$.totius lineæ.Ita vt si recta AB,diuisa cogitetur in 100.partes,tribuendo singulis decimis partib° denas particulas,segmentū AC,cōprehendat $\frac{46}{100}$.Quia vero vltra $\frac{6}{10}$. supereſt adhuc particula FE, vnius decimæ,si ea rursum decupletur ab A,vsq; ad G,reperientur in AG,octo partes totius lineæ AB, Continet ergo particula FE,$\frac{8}{10}$.vnius decimæ,hoc est,propositā particula DC,vltra $\frac{6}{10}$.vnius partis rectæ AB, continet insuper $\frac{8}{100}$.vnius decimæ,(vnius inquam decimæ ex illis $\frac{6}{10}$.quas in particula DC, diximus comprehendi) nimirum $\frac{8}{100}$.vnius partis,si singulæ partes decimæ rectæ AB,diuisæ essent in 100. particulas;atq; adeo, si recta AB,secta intelligatur in 1000.partes,tribuendo singulis decimis partibus centenas particulas, segmentum AC, complectetur $\frac{468}{1000}$.quippe cum in AD,contineantur $\frac{400}{1000}$.Et in DC,$\frac{68}{100}$.vnius partis rectæ AB, siue $\frac{68}{1000}$.totius lineæ AB;cum quælibet centesima particula vnius partis decimæ sit $\frac{1}{1000}$. Atque in hunc modum progredi licebit ad decimas vnius decimæ ex illis $\frac{6}{10}$.quæ in particula DC, continentur,nimirum ad fractionem à 10000. denominatam,&c.sed satis mihi videtur ad partes millesimas peruenire.

DEMONSTRATIO hic eadem est,quæ in gradibus,ac Minutis.Eandem enim proportionem habet recta 10.partium ad 1.partem,quam recta AE,ad particulā DC,cum vtrobiq; proportio sit decupla, ideoq; permutando erit vt recta 10.partium ad rectam AE,ita 1.pars ad particulam DC. Quamobrem sicut in AE,cōtinentur $\frac{6}{10}$.rectæ AB,decem partium,& insuper particula FE, respectu vnius partis lineæ AB,decem partium,

ita quo-

ita quoque in particula data DC,continebuntur $\frac{6}{10}$.vnius partis , & insuper talis particula respectu vnius decimæ qualis est FE,respectu vnius partis lineæ AB,decem partium,&c.

De nomi natio facilis fractionum millesimarum.

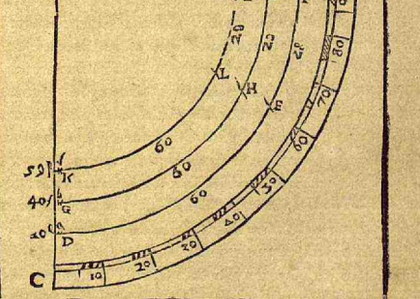
ITAQVE, vt vides, duab. operationib. ad millesimas partes peruenitur , ac si latus totum AB,in 100. partes sectum esset,quod consideratione dignum est.Et duo quidem Numeratores decimarū eo ordine positi, quo inuēti sunt,dant Numeratorē centesimarū: cui si præponatur ad siniſtrā numer° integrarū partiū,ante datam particulā existentiū,conflabitur Numerator millesimarū.Vt in superiori exemplo,quia ante datā particulam DC,reperiuntur 4.partes,inuētæq; sunt $\frac{6}{10}$.& $\frac{8}{10}$.erit tota fractio $\frac{468}{1000}$. Sic si inuentæ essent pro aliqua particula in octaua parte,$\frac{7}{8}$.$\frac{0}{10}$.constitueretur fractio $\frac{870}{1000}$.Item si in tertia parte inuentæ essent $\frac{0}{10}$.$\frac{7}{10}$.fieret fractio $\frac{107}{1000}$.& sic de cæteris.Quod si recta AB,id est,latus vtriusq; vmbræ diuideretur in 100 partes, reperirentur partes millesimæ vnica operatione;si nimirum particula data in vna centesima decuplaretur: quia tunc intelligerentur singulæ centesimæ in denas particulas subdiuisæ.Sed quia particula data in centesima aliqua parte perparua est,vt vix circino capi possit,accipiemus eam cum vna centesima,vel duabus,& ex decuplo abijciemus 10. vel 20.centesimas,vt reliquæ cētesimæ exhibeant decimas vni° centesimæ. Eadē ratione,quādo data particula in linea 10. partium est perpusilla,accipienda erit reliqua particula maior decies.Nam reliqua pars rectæAB,aB, vsq; ad finē illi° particulę decuplę dabit numerū decimarū in ꝓpposita minore particula,&c.Hac ratione,si particulā CH,decuples,incides in pūctū K.Ergo segmētū BK,dabit;$\frac{6}{10}$.& in super particulā DK,vt supra;cū DK,particulę FE,sit æqualis.Ratio hui° rei est,q̄ ambæ particulę DC,CH,decuplatę cōficere debeāt totā,AB.vt cōstat.

AD Maiorē quoq; commoditatem pro inuestigandis partib° decimis,hoc est, pro decuplanda particula proposita,construi poterit circinus duplicis aperturæ, in quo scilicet crura producta se mutuo intersecent,atq; vna apertura alterius sit semper decupla,instar circini, quo linea duas in partes æquales diuidi solet.Ita enim fiet, vt accepta per minorem aperturam particula absscissa,particula maior exhibeat eam particulam decies sumptā, vt non opus sit toties circinum circumducere: qua quidem in re facile error committi potest,qui illo circino,si recte fabricatus sit,facilius vitatur.Sed sine hoc circino idem fieri potest per instrumentum partiū, quod capite præcedenti construximus.Nam si particula data circino capiatur,& summa diligentia ei sumatur in instrumento interuallum inter 10.& 10.æquale,erit interuallum inter 100 & 100.datæ particulæ decuplum.

Quo modo ex data linea auferende sint quotcunq; partes decimæ vel alia partes.

15 IAM vero si vicissim ex qualibet parte rectæ AB,auferendæ sint quotcunq; decimæ partes vni°,diuidendū erit segmentū cōtinens numerū partiū decimarū in 10.partes æquales. Nā vna pars decima hui° segmēti continebit decimas partes q̄sitas.Vt si cupiat quis $\frac{7}{10}$ diuidendum erit segmentum rectæ AB, includens 7. partes,in 10.particulas:Quelibet namq; harum comprehendet $\frac{7}{10}$.vnius partis rectæ AB. Eademq; ratio est de cæteris.Sed commodius hunc vsum nobis præstabit instrumentum partium supra constructum. Eius enim beneficio ex quauis recta absscindemus non solum quotcunque decimas, sed etiam centesimas,nonagesimas nonas, nonagesimas octauas,& sic deinceps,vsque ad centesimam partem.Nam si velimus $\frac{1}{100}$.alicuius lineæ, capiem° ei lineæ interuallum inter 100.& 100.æquale.Circinus namq; extensus inter 3.&3.dabit $\frac{3}{100}$.quæsitas. Ita quoq; circini pedes inter 50 & 50.dabunt $\frac{50}{100}$.id est,$\frac{1}{2}$.Rursus pedes circini inter 20.& 20.dabunt $\frac{20}{100}$. hoc est, $\frac{1}{5}$.& sic de cæteris,vt fusius in vsu prædicti instrumenti partium cap.1.exposuimus.

16 QVIA vero alios alijs instrumentis delectari scio,addam hoc loco duo alia instrumenta ab eodem illustri D.Iacobo Curtio mecum communicata,quæ ad vsus Geometricos & Astronomicos perquam sunt vtilia.Primum est eiusmodi:sit quadrans BC,diuisus in 90.gradus, quorum initium progrediatur à C,versus B,& pinnacidia , in latere AB , collocentur. Nos eum ob spatij angustiam in quinos gradus partiti sumus. Intra hunc ex eodem centro A,describantur alij 59. quadrantes , qui diuidantur in gradus hoc modo. In primo,qui proximus est quadranti BC,in grad.90.diuiso,arcus continēs grad.61.secetur in partes 60.æquales,vel arc° graduū 30$\frac{1}{2}$.nimirū semissis ipsius,in partes 30.æquales,quarū quælibet cōtinebit grad.1.Min.1.hoc est,Minata 60.



c 19.sept.

c Nam eadem proportio est partium 60. in quas arcus graduum 61.diuisus est,ad gradus, 61.hoc est, ad Minuta 3660. quæ partis 1. ad Min.61. Idem enim numerus producitur ex 60. primo numero, in 61, quartum numerū, (producitur autem numerus minutorum 3660.) qui ex 1.tertio numero in 3660. secūdum numerum producitur. Aut eandem ob causam , eadem est proportio partium 30. in quas arcus graduum 30$\frac{1}{2}$. diuisus est, ad grad. 30.$\frac{1}{2}$. hoc est, ad Minuta 1830. quæ partis 1.ad Min.61.Hæc autem diuisio,vt confusio punctorum in primo illo quadrante vitetur,facienda est seorsum in quadrante alio, qui illi æqualis est.Deinde vna pars continensMin.61. transferatur beneficio circini in primum quadrantem prædictum,initio facto à semidiametro AC. Ex termino huius partis ad interuallū semidiametri proprię absscindatur arcus grad.60.quo diuiso in 60.gradus,continebit reliquus arcus vsq; ad semidiametrum AB,grad.28.Min.59.ac proinde in eum transferendi sunt grad.28.ita vt supersit particula Minutorum 59.

IN secundo quadrante arcus graduum 62.in 60.partes,vel arcus graduum 31.in 30.partes æquales secetur, vt quælibet contineat grad.1.Min.2.

IN tertio arcus graduū 63.in 60.partes,vel arc° graduū 31$\frac{1}{2}$. in partes 30. æquales diuidatur.In quarto idē fiat de arcu graduū 64.vel 32.& sic deinceps.Reliqua aūt perficiātur,vt de primo quadrāte dixim°. Quod vt plani° fiat,ponam° exēplū in quadrāte 20.40.& 59.siue vltimo&intimo.Itaq; in quadrate vigesimo eN,sit arc° eD, pars sexagesima arcus graduum 80. (nimirum tot graduum vltra 60. quotum locum ipse quadrans occupat,) ita vt complectatur grad.1.Min.20. d, cum fit,vt 60. arcus graduum 80.ad grad.80. hoc est, ad min.4800. ita 1. pars ad grad.1.Min.20,hoc est,ad Min.80.Vel certe arcus e D,sit pars trigesima arcus graduum 40.Ita enim rursus

d 19.sept.

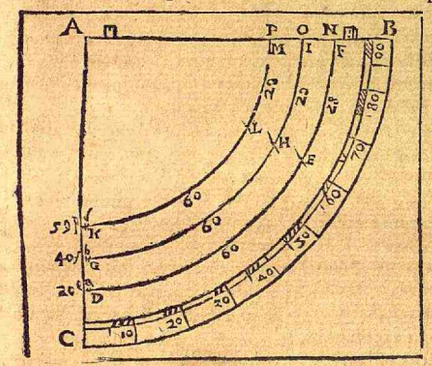
sus continebit gradus $1\frac{1}{2}$. hoc est, Min. 80. Deinde ad interuallum semidiametri A e, abscindatur arcus DE, grad. 60. qui propterea in 60. gradus distribuatur: arcus autem EF, contineat grad. 28. & arcus FN, Min. 40. quod arcus e F, complectatur grad. 89. Min. 20. Ita vt particula FN, sit complementum Minutorum, quæ in e D, vltra vdum gradum continentur: complementum, inquam, vsque ad 60.

RVRSVS in quadragesimo quadrante f O, arc^{o} f G, sit sexagesima pars arc^{o} graduũ 100. vel pars trigesima arc^{o} graduũ 50. qui illius semissis est; ita vt cõtineat grad. 1. Min. 40. Arcus vero GH, cõtineat grad. 60. & HI, 28. & deniq; IO, Min. 20. nimirum complementũ Minutorum 40. quę in f G, vltra vnum gradum comprehẽduntur.

POSTREMO in quadrante p P, quinquagesimo nono sit arcus p K, sexagesima pars arcus graduum 119. vel pars trigesima arcus graduum $59\frac{1}{2}$. qui semissis illius est; ita vt contineat grad. 1. Min. 56. Arcus autem KL, sit graduum 60. & LM. grad. 28. & deniq; MP, Min. 1. Ex his exemplis facile intelliges, quid faciendum sit in alijs quadrantibus. Semper enim in quolibet quadrante secandus est in 60. partes æquales arcus, qui tot gradus vltra 60. complectatur, quotum locum quadrans ipse tenet, excluso extremo BC. Ita enim continebit particula ipsius prope semidiametrum AC, vltra vnum gradum totidem Minuta, quotus ipse quadrans est inter quadrãtes, hoc est, quot gradus vltra 60. continentur in arcu diuiso in 60. partes æquales. Vltima verò particula iuxta semidiametrum AB, includet reliqua Minuta ex 60. Idemq; assequeris, si semissem illius arcus, quem in 60. partes secandum diximus, partieris in 30. æquales partes.

PERACTA diuisione omniũ quadrantũ, adscribendi sunt eorũ numeri iuxta semidiametrum AC, ita vt primus quadrans citra quadrantem BC, habeat numerum 1. secundus 2. tertius 3. vigesimus 20. quadragesimus 40. quinquagesimus nonus 59. &c.

17 VSVS quadrantis hoc modo constructi præclarus est, cũ eius beneficio in altitudinib. astrorum cognoscamus etiam Minuta. Nã cadẽte filo in aliquẽ gradũ quadrantis BC, altitudo cõtinebit tot gradus sine Minutis, quot à filo abscindũtur. Quando aũt filum nõ abscindit aliquẽ gradum ex quadrante BC, considera attente, ex quo quadrante partẽ integrã abscindat; quod fere semper accidet, propter partiũ multitudinẽ. Nam altitudo tunc cõtinebit vltra gradus ex quadrante BC, abscissos, tot insuper Minuta, quot vnitates adscriptę sunt illi quadranti, cuius pars integra fuit abscissa. Vt cadente filo vltra gradũ 30. in particulam aliquam integram quadrantis quadragesimi, complectetur altitudo Grad. 30. Min. 40.



18 VERVM quia hac ratione cognoscuntur solum Minuta vltra vnum, vel plures gradus; vt discernantur etiam Minuta citra vnum gradũ, transferantur ex terminis particularum illarum primarũ singulorum quadrantum, de quibus diximus, versus semidiametrum AC, singuli gradus. Ita enim cuiusuis quadrantis particula prope eandem semidiametrum continebit tot Minuta, quot vnitates Quadranti adscriptæ sunt, totidem nimirum, quot prior particula vltra vnum gradum continebat. Verbi gratia, si arcus Da, Gb, Kd, contineant singuli singulos gradus, complectetur arcus e a, Min. 20. fb, nebat. Verbi gratia, si arcus Da, Gb, Kd, contineant singuli singulos gradus, complectetur arcus e a, Min. 20. fb, Min. 40. & pd, Min. 59. Cadente ergo filo in aliquam particulam integrã citra puncta D, G, K, cõtinebit altitudo tot Min. quot vnitates quadranti, cuius particulam integram filum abscindit, adscriptæ sunt. Itaq; quando filum nullum gradum integrũ ex quadrãte BC, abscindit, caditq; in particulam primã integrã quadrãtis, verbi gratia eN, indicabitur arcus Min. 20. quando aũt abscindit vnum, vel plures gradus, & insuper cadit in aliquam particulam integram eiusdem quadrantis; offeretur arcus vnius gradus, vel pluriũ, & insuper Minutorũ 20. Idemq; dicendum est de alijs quadrantibus, habita semper ratione numerorum adscriptorũ: hi enim minuta numerant:

MANIFESTVM autem est, quo maior fuerit Quadrans ABC, eo magis exquisite omnes quadrantes in partes, quas diximus, posse distribui.

Ex quadrante arcum quot cunque graduum ac minutorum auferre & quot gradus, minuta, in dato arcu contineantur, cognoscere.

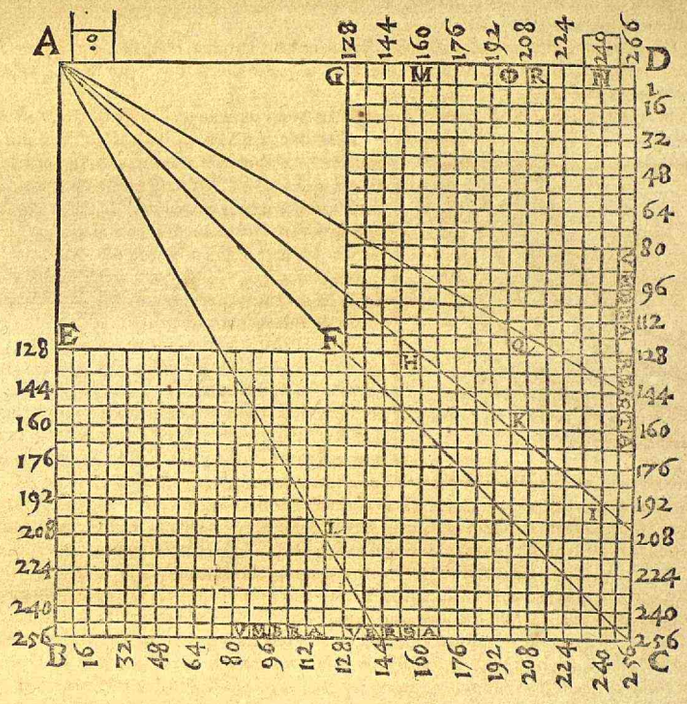
19 BENEFICIO hui^{us} quadrãtis cõmodissime quoq; accipi potest arcus quotcunq; graduũ ac Minutorũ, & vicissim cognosci, quot gradus, ac Minuta propositus arcus cõtineat. Nam si ex cẽtro A, per finẽ grad^{i} propositi in extimo quadrante BC, recta ducatur, vltra quam in alio quadrante, cui adscriptus est numerus Minutorum datorum, accipiatur primum punctum occurrens versus B, continebit arcus illius quadrantis inter dictum punctum, & semidiametrum AC, interiectus gradus & Minuta, quæ desiderantur. Huic ergo arcui similis auferendus est ex circulo proposito. Vicissim, vt cognoscamus, quot gradus, ac Minuta in oblato quouis arcu contineantur, accipiemus ei similem in aliquo quadrante intra quadrantem BC, descripto, vel certe in ipso quadrante, BC, & per eius finem ex centro A, rectam ducemus, quæ fere semper trãsibit per aliquam particulã integram alicuius quadrantis. Ea ergo particula dabit vltra gradus ab illa recta abscissos tot Minuta, quot vnitates illi quadranti adscriptæ sunt; atq; gradus illi ac Minuta in proposito arcu continebuntur. Vides ergo, si huiusmodi quadrans tantæ magnitudinis, quantam diuisiones supradictæ exigunt, summa cura ac diligentia cõstruatur, quàm præclare cum ipsa Astronomia agatur, cum non minus explorate Minuta beneficio ipsius comprehendamus, quam per sinuum multiplicationes, diuisionesq; : quæ res non parui facienda videtur.

Constructio quadrati, quo exquisitissime etiã astrorum altitudines obseruantur.

20 ALTERVM instrumentum est tale. Sit quadratum ABCD, tãtæ magnitudinis, vt cõmode singula latera recipere possint 256. partes æquales. Quãuis n. ipse latus quodlibet in 200. partes secet, facilius tamẽ in 256 diuidetur, cũ primùm bifariã secetur, deinde vtraq; medietas iterũ bifariã, & quęlibet harũ partiũ rursus bifariã, atq; ita deinceps vsq; ad octauã diuisionẽ, qua singula latera in 256. partes diuisa erũt. Accedit ad hãc diuisionis facilitatẽ hæc etiã vtilitas, q^{p} plures particulæ in toto quadrato cõtinẽtur. Certũ aũt est, quo plures partes sunt, eò perfectius esse instrumẽtũ; adeo vt quadratũ, q^{p} recipere possit adhuc alias subdiuisiones, vt nimirũ in singulis laterib. reperiãtur partes 512. vel 1024. videatur esse omnib. numeris absolutũ: sed satis nũc sit, singula latera in 256. part. æquales distribuisse. In exẽplo, ob spatij angustias, secta sũt singula in 32. part. ita vt q̃libet pars intelligaẽ subdi-

subdiuisa adhuc in 8. particulas. Ordo siue numerus partium progreditur ab A, versus B, & D, & à B, & D, versus C, vt in figura apparet. Puncta porro diuisionum respondentia iungantur rectis lineis, quæ omnes quadrati lateribus [a] parallelæ erunt: Hæ tamen non omnes ad opposita vsque latera producãtur, sed relinquant quadratum vacuum AEFG, quod totius quadrati quarta pars sit. Ita enim fiet, vt quomodocunque filum perpendiculi, vel linea fiduciæ ex A, egrediens cadat quasi semper in partem aliquam integram dictarum parallelarum, hoc est, transeat præcise per aliquem angulorum rectorum, qui ab intersectionibus illarum parallelarum efficiuntur, propter earum partium, angulorumve multitudinem. Relictum est autem quadratum AEFG, vacuum, propterea quod omnes partes in eo contentæ, si productæ essent lineæ, habent alias partes duplas, aut quadruplas, aut octuplas, &c. adeo vt filum perpendiculi in aliquam earum cadens cadat quoque necessario in aliquam aliam illius duplam, vel quadruplam, octuplamue, &c. vt necesse non sit particulas illas in quadrato AEFG, exprimere. Verbi gratia. Si accipiatur in latere AD, portio continens 40. partes, & filum perpendiculi AH, abscindat ex parallela à parte 40. lateris AD, ad partem 40. lateris BC, ducta partes 32. abscindet idem filum ex parallela à parte 160. lateris AD, ad partem 160. lateris BC, ducta partes 128. in H, quæ quadruplæ sunt partium 32. quemadmodum & partes 160. quadruplæ sunt partium 40. Sic quoque idem filum AH, ex parallela à parte 240.

[a] 33. primi.

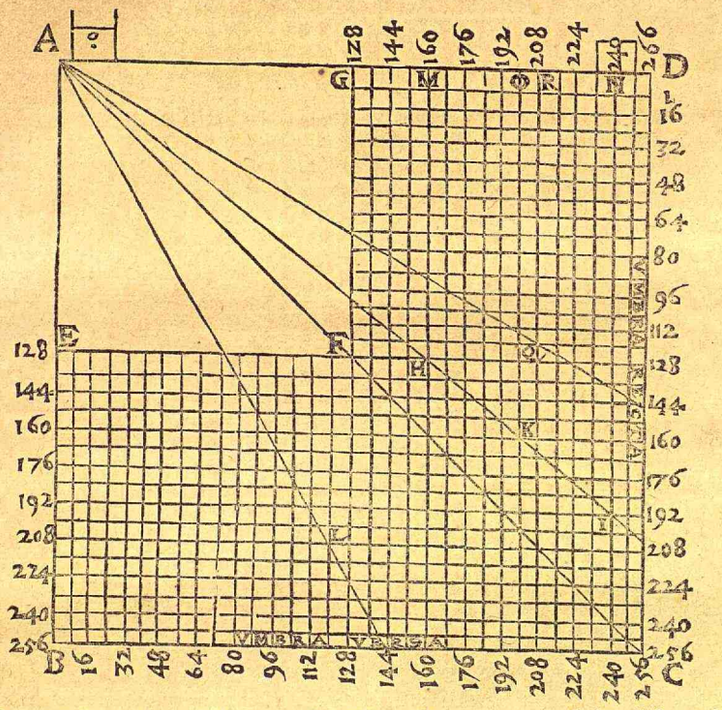


lateris AD, ad partem 240. lateris BC, ducta auferet partes 192. in I, quæ partium 32. sextuplæ sunt, quemadmodum & partes 240. in latere AD, partium 40. in eodem latere sextuplæ sunt. Denique idem filum ex parallela à parte 200. lateris AD, ad partem 200. lateris BC, ducta abscindet partes 160. quæ quintuplæ sunt partium 32. sicut & partes 200. lateris AD, partium 40. eiusdem lateris quintuplæ sunt. Eademque ratio est de cæteris. Ratio huius rei est, quod parallela à parte 40. lateris AD, ad filum AH, ducta constituit cum filo triangulum simile triangulo, quod cum eodem filo constituit parallela quæ v. g. à parte 160. lateris AD, demittitur, &c. Potest ergo quadratum AEFG, excindi, vt instrumentum minus reddatur ponderosum.

Vsus quadrati cõstructi in rebus Astronomicis.

HÆC est quadrati constructio non solum, vt vides, facillima, sed cuius etiam vsus immensus est tam in rebus Astronomicis, quam in Geometricis, vt ex ijs, quæ sequuntur, liquido constabit. Exordiemur autem à re bus Astronomicis Obseruaturus ergo quispiam altitudinem alicuius stellæ notet diligenter, in quam partem linearum parallelarum præcise filum perpendiculi cadat. Ex hac enim altitudo stellæ, hoc est, magnitudo anguli quam filum cum latere AB, facit, eruenda est, hoc modo. Ceciderit filum in punctum H, parallelæ à parte 160. lateris AD, nempe ex M, ad partem 160. lateris BC, ductæ, & parallelæ à parte 128. lateris AB, ad partem 128. lateris CD, ductę. Quoniam igitur in triangulo rectilineo rectangulo AMH, duo latera circa rectum angulum nota sunt, nempe AM, partium 160. & MH, partium 128. quos numeros iuxta parallelas per H, traiectas scriptos esse vides; notus fiet, ex praxi 5. nostrorum triang. rectil. angulus HAM, complementi altitudinis, hac ratione. Fiat, vt 160. latus AM, circa angulum rectum M, ad 10000000. sinum totũ. (Accuratior enim calculus in hoc negotio euadet, si ex sinubus, & tangentibus non abijciantur duæ figuræ, vt facere solemus, cum solis sinubus vtimur) ita 128. latus MH, angulo quæsito HAM, oppositum ad aliud, inuenieturque Tangens 8000000. anguli HAM, quæsiti, cui in tangentium tabula respondet arcus grad. 38. Min. 40. pro complemento altitudinis stellæ. Eandem Tangentem reperies ex lateribus AO, partium 200. & OK, partium 160. Item ex lateribus AN, partiũ 240. &

240. & NI. partium 192. vt patet: ita vt, quando filum in plures partes plurium parallelarum præcisè cadit, vt hic contingit in punctis H, K, I, assumi possit quæcunque illarum, sine vllo discrimine. Per solos sinus ex eadem praxi 5. nostrorum triang. rectil. idem prædictus angulus HAM, elici potest, sed non tam facile. Nam si quadrata laterum AM, & MH, hoc est, quadrata partium 160. & 128. simul addantur, & summæ 41984. radix quadrata eruatur, dabit hæc radix latus AH, recto angulo M. oppositum partium $204\frac{368}{400}$. fere. Quare si fiat, vt $204\frac{368}{400}$. latus AH, recto angulo oppositum ad 100000. sinum totum, ita 128. latus MH, quæsito angulo oppositum ad aliud, inuenietur sinus anguli HAM, quæsiti 62470. cui in tabula sinuum respondent iterum grad. 38. Min. 40. Ponamus rursus filum perpendiculi cecidisse in partem 208. parallelæ à parte 120. lateris AD, ad partem 120. lateris BC, ductæ, nimirum in punctum L: quem numerum 120. in latere BC, solum inuenies, cum minor sit, quam 128. atque adeo in latere AD, non reperiatur. Sic etiam numerus minor, quam 128. in solo latere CD, quærendus est, vt ex figura patet. Si igitur rursum fiat, vt 120. latus circa angulum rectum ad 10000000. sinum totum, ita 208. latus angulo quæsito LAD, oppositum ad aliud, producetur tangens quæsiti anguli 17333333. cui respondet in tangentium tabula arcus grad 60. Min. 1. Vel si fiat, vt 208. latus AP, circa angulum rectum P, ad 10000000. sinum totum, ita 120. latus LP, angulo LAP, oppositum ad aliud. (Quando enim filum in latus BC, cadit, assumemus triangulum ad latus AB, applicatum: quemadmodum eodem filo cadente in latus CD, assumptum fuit triangulum ad latus AD, applicatum, sed tunc angulus inuentus LAP, detrahendus non erit ex recto, vt reliquus fiat altitudinis angulus, sed ipsemet altitudinem indicabit) procreabitur tangens 5769231. anguli LAP, cui



tangenti respondet in tangentium tabula arcus grad. 29. Min. 59. Tantus ergo tunc est altitudinis angulus quæsitus LAP, complementum scilicet gr. 60. Min. 1. vt prius. Cadente filo in punctum C, non opus est calculo, sed altitudo stellæ comprehendet tunc grad. 45. præcisè, propter angulum semirectum CAB.

Quæ ratione fit construendæ tabulæ pro quadrato prædicto.

HAC via supputari poterit. (Id quod libenter hic præstitissem, si per tempus licuisset) tabula continens gradus & Minuta singulis particulis parallelarum respondentia, quemadmodum præcedens tabula à nobis supputata est pro singulis particulis quadrantum intra quadrantem principalem descriptorum. Satis autem erit tabulam supputare pro particulis parallelarum à latere AB, BC, ductarum in trapezio CBEF, comprehensis. Idem namque prorsus arcus respondebunt particulis trapezii CDGF, vt perspicuum est, cum eadem omnino triangula fiant ad latus AD, quæ ad latus AB, constituuntur. Verum tunc, cum deprehensum fuerit, filum cecidisse in latus CD, sumendum erit complementum anguli in tabula inuenti pro altitudine quæsita: Id quod patuit in angulo HAM, cuius complementum HAB, angulus fuit altitudinis quæsitæ. Esse autem triangula ad latus AD, applicata triangulis ad latus AB, applicatis omnino æqualia, manifestum est in triangulis AQR, ALP, in quorum primo filum perpendiculi transit per partem 120. parallelæ à parte 208. lateris AD, ad partem 208. lateris BC, nempe à puncto R, ductæ; in secundo vero filum perpendiculi ducitur per partem 120. parallelæ à parte 208. lateris AB, h. e. à puncto P, ad partem 208. lateris CD, ductæ. Quoniã n. latera AR, RQ, partium 208. 120. æqualia sunt lateribus AP, PL, partium 208. 120. anguloſq; continent rectos, [a] erunt triangula ipsa æqualia, & anguli QAR, LAP, æquales. Quare cadente filo in parte 120. parallelæ ex parte 208. lateris AD, ductæ si in tabula constructa erutus fuerit per partem 120. parallelę 208. angulus gr. 29. Mi. 59. dabit eius complementũ gr. 60. Mi. 1. angulũ QAB, altitudinis quæsitæ. Eademq; ratio est de cæteris. In tabula porro (vt hoc etiam studiosum moneamus) numerus parallelarum, incipiendo in nostro exemplo à 128. progrediendoq; vsq; ad 256. ponatur in vertice tabulæ, numerus vero partiũ cuiusq; parallelæ ab 1 vsq; ad 256. in sinistro latere eiusdem tabulæ, in angulis deniq; communibus scribantur gradus & Minuta.

[a] 4. primi.

IAM

IAM vero in scala altimetra (vt vsum quoque dicti quadrati in rebus Geometricis explicemus) dici non potest, quam præstantem vsum habeat idem quadratum hactenus constructum: vbi latus CD, vmbræ rectæ & BC, vmbræ versæ deputabitur, & omnis operatio vel per solam vmbram rectam, (quod periucundum est, & huius instrumenti propriam) vel per solam versam sine alterius ad alteram reductione, & sine vlla fractionum molestia fieri commodissime poterit. Solum gnomon hic non est idem semper, sed alius atque alius. Exempli gratia. Filo perpendiculi AQ, abscindente in Q, partem 120. vmbræ rectæ RQ, erit gnomon AR, partium 208. Quod si idem punctum Q, ponatur pertinere ad partem 208. vmbræ versæ, erit gnomon partium 120. Et quoniam, vt in quadrato Geometrico demonstrabimus, est vt vmbra recta ad gnomonem, ita distantia oculi à re, cuius altitudinem mensuramus, ad ipsam altitudinem: Item vt gnomon ad vmbram versam, ita eadem distãtia ad altitudinem; si fiat vt vmbra recta 120. ad gnomonem 208. Vel, vt gnomon 120. ad vmbram versam 208. ita distantia dicta ad aliud, reperietur altitudo rei mensurandæ. Sic etiam, cadente filo in punctum L, erit vmbra recta partium 208. & gnomon partium 120. Vmbra autem versa erit partium 120. & gnomon partium 208. atque ita de reliquis.

vsus eiusdem quadrati in rebus Geometricis.

PROBLEMATA VARIA
Triangulorum rectilineorum.

CAPVT III.

TERTIO loco præmissuros nos polliciti sumus varia problemata triangulorum rectilineorum, vt & latera eorum, atque anguli ex quibusdam datis, & cognitis prompte, atque expedite, cum id res postulauerit, possint erui: quod hoc tertio capite exequemur. Priori autem loco de triangulis rectangulis: posteriori vero de obliquangulis agemus. In margine porro adscripsimus propositiones nostri tractatus triangulorum rectilineorum, in Theodosio nostro editi, in quibus problemata hæc demonstrantur, vt studiosi intelligant, vnde eorum demonstrationes, quando libuerit, petere debeant.

TRIANGVLORVM RECTILINEORVM Rectangulorum problemata.

I. PROPORTIONES LATERVM

Ex datis omnibus angulis cuiusuis trianguli patefacere.

Singulis lateribus adscribantur sinus angulorum oppositorum. Latera enim eadem proportiones habent, quæ inter sinus angulorum lateribus oppositorum reperiuntur. *1. Triang. rectil.*

II. LATVS

Ex base, & alterutro angulorum acutorum, ac proinde & altero, notum efficere.

Vt sinus totus — *ad basem* — *Ita sinus anguli lateri quæsito oppositi* — *ad latus quæsitum in partibus basis.* *2. Triang. rectil.*

III. LATVS

Ex base, & altero latere cognoscere.

Vt basis — *ad sinum totum.* — *Ita datum latus.* — *ad sinum anguli dato lateri oppositi.* *3. Triang. rectil.*

Deinde, sumpto complemento anguli inuenti pro reliquo angulo.

Vt sinus totus — *ad basem* — *Ita sinus anguli, qui lateri quæsito opponitur,* — *Ad latus quæsitum in partibus basis, & alterius lateris.*

IV. LATVS

Ex altero latere, & alterutro angulo acuto, ac proinde & altero, eruere.

Vt sinus totus — *ad latus datum* — *Ita tangens anguli quæsito lateri oppositi* — *Ad latus quæsitum in partibus dati lateris.* *2. Triang. rectil.*

Vel

Vt sinus anguli dato lateri oppositi. — *ad latus datum,* — *Ita sinus alterius anguli.* — *ad latus quæsitum in partibus dati lateris.* *2. Triang. rectil.*

V. BASEM

Ex vno latere, & vno angulo acuto, ac proinde & altero, inuestigare.

Vt sinus totus — *ad latus datum.* — *Ita secans anguli dato lateri adiacentis* — *Ad basem in partibus lateris dati.* *2. Triang. rectil.*

Vel

Vt sinus anguli dato lateri oppositi. — *ad sinum totum* — *Ita latus datum* — *Ad basem in partibus lateris dati.* *2. Triang. rectil.*

VI. BASEM

Ex vtroque latere perſcrutari, vna cum angulis acutis.

3. Triang. rectil.	*Vt latus alterutrum datum*	*ad ſinum totum:*	*Ita alterum latus datum*	*ad tangentem anguli huic alteri lateri oppoſiti.*

Deinde, ſumpto complemento anguli inuenti pro reliquo angulo.

Vt ſinus totus	*ad latus alterutrum datum:*	*ita ſecans anguli accepto lateri adiacentis*	*ad baſem in partibus lateris dati.*

VII. ANGVLVM

Ex baſe, & vno latere inquirere.

3. Triang. rectil.	*Vt baſis*	*ad ſinum totum*	*ita latus datum*	*ad ſinum anguli dato lateri oppoſiti.*

Complementum anguli inuenti dabit alterum angulum.

VIII. ANGVLVM

Ex vtroque latere reddere cognitum.

3. Triang. rectil.	*Vt latus alterutrum*	*ad ſinum totum:*	*ita alterum latus datum*	*ad tangentem anguli huic alteri lateri oppoſiti*

Complementum anguli inuenti dabit alterum angulum.

TRIANGVLORVM RECTILINEORVM obliquangulorum Problemata.

IX. SEGMENTA LATERIS à Perpendiculari facta.

Ex datis tribus lateribus cognoſcere.

9. Triang. rectil.	*Vt latus, in quod cadit perpendicularis*	*ad ſummam aliorum duorum laterum:*	*ita differentia eorundem duorum laterum*	*ad quartum quendam numerum.*

ET ſi quidem quartus numerus inuentus minor fuerit latere, in quod cadit perpendicularis, auferendus is erit ex illo latere. Semiſſis enim reliqui numeri dabit minus ſegmentum, quod ex toto latere ſubductum relinquet ſegmentum maius.

SI vero quartus numerus inuentus maior fuerit latere, in quod cadit perpendicularis, auferendum erit hoc latus ex illo numero. Semiſſis enim reliqui numeri dabit ſegmentum minus, exterius videlicet inter perpendicularem, & angulum obtuſum: quod additum eidem lateri conflabit aliud ſegmentum maius inter perpendicularem, & angulum acutum.

X. LATERA DVO

EX tertio latere, & duobus quibuſuis angulis, ac proinde omnibus tribus, cum tertius ſit aliorum complementum ad ſemicirculum, hoc eſt, ad grad. 180. inuenire.

10. Triang. rectil.	1. *Vt ſinus anguli dato lateri oppoſiti*	*ad latus datum:*	*ita ſinus alterutrius reliquorum angulorum*	*ad latus huic angulo oppoſitum.*

Rurſus

2. Triang. rectil.	*Vt ſinus anguli dato lateri oppoſiti*	*ad latus datum:*	*ita ſinus tertij anguli*	*ad latus huic tertio angulo oppoſitum.*

2 IN Iſoſcele vnius tantum lateris inuentione opus eſt, cum vnum datum ſit cum angulis. In æquilatero vero trangulo, ſi vnum latus datum ſit, erunt & reliqua illi æqualia, data.

XI. LATVS

EX duobus reliquis lateribus, & duobus quibuſuis angulis, ac proinde omnibus tribus, cum tertius ſit aliorum complementum ad ſemicirculum, id eſt, ad grad. 180. addiſcere.

10. Triang. rectil.	*Vt ſinus anguli alterutri lateri dato oppoſiti*	*ad latus oppoſitum datum:*	*ita ſinus anguli quæſito lateri oppoſiti*	*ad latus quæſitum.*

XII. LATVS

EX duobus lateribus, & angulo ab ipſis comprehenſo colligere.

Problema 17. triang. ſphæric.	1. *Vt ſinus totus*	*ad ſecantem complementi arcus, qui ſemiſſi aggregati datorum laterum ad ſinus reuocatorum, vt ſinus, debetur:*	*Ita differentia inter eam ſemiſſem, & alterutrum datorum laterum ad ſinus reuocatorum*	*ad quartum quendam numerum.*

Latera data ad ſinus reuocabuntur, ſi vtrumque multiplicetur per 10. vel 100. vel 1000. &c. ita vt maioris lateris numerus habeat tot figuras, quot continentur in maioribus ſinubus tabulæ ſinuum, nimirum 5. ſi ſinus totus ſtatuatur 100000. vel 7. ſi ſinus totus ponatur 10000000.

Deind

Deinde.

Vt ſinus totus.	*ad tangentem ſemiſſis arcus qui detracto dato angulo ex ſemicirculo relinquitur:*	*ita quartus numerus inuentus*	*ad tangentem differentiæ inter ſemiſſem eiuſdem arcus, & alterutrum angulorum non datorum.*	

Hæc autem tangens hoc etiam modo inuenietur, qui priori præferendus videtur.

2 *Vt ſemiſſis aggregati duorum laterum datorum.*	*ad tangentem ſemiſſis arcus, qui detracto dato angulo ex ſemicirculo relinquitur:*	*ita differentia inter ſemiſſem aggregati duorum datorum laterum, & vtrũlibet laterũ*	*ad tangentem differentiæ inter ſemiſſem arcus prædicti, & alterutrum angulorum non datorum.*	*Alio modo qui priori præferendus videtur*

Arcus huius tangentis inuentæ additus ad ſemiſſem eiuſdem arcus (eſt autem hic arcus ſumma duorum angulorum non datorum, nimirum dati anguli complementum ad ſemicirculum, hoc eſt, ad grad. 180.) dabit maiorem angulum non datum, qui videlicet maiori lateri dato opponitur: ex eadem vero ſemiſſe detractus reliquum faciet minorem angulum non datum, qui nimirum lateri minori dato opponitur.

Poſt hæc.

Vt ſinus vtriuslibet anguli inuenti	*ad latus oppoſitum:*	*ita angulus datus*	*ad latus oppoſitum quod quæritur.*	*2. triang. rectil.*

Itaque antequam tertium latus inueniatur, diſquirendi prius ſunt reliqui duo anguli: qui commodius videntur poſteriori via Num. 2. expoſita indagari, quam priori illa ratione Num 1. explicata.

3. Si duo latera ſint æqualia;[a] erunt reliqui duo anguli æquales. Semiſſis ergo arcus, qui detracto angulo dato ex ſemicirculo relinquitur, dabit vtrumque, &c. [a] 5. primi.

XIII. LATVS.

EX duobus lateribus; & angulo vni eorum oppoſito (ſi modo conſtet ſpecies anguli alteri lateri dato oppoſiti, quando datus angulus acutus eſt) exquirere.

1 *Vt latus datum dato angulo oppoſitum*	*ad ſinum anguli dati:*	*ita alterum latus datum,*	*ad ſinum anguli huic alteri lateri oppoſiti.*	*13. triang. rectil.*

Hic ſinus inuentus dabit angulum alteri dato lateri oppoſitum, ſi acutus fuerit: (erit autem ſemper acutus, quando datus angulus eſt obtuſus) ſi vero fuerit obtuſus, arcus ſinus inuenti ex ſemicirculo demptus, reliquum faciet eum angulum: Propterea quando datus angulus eſt acutus, oportet dari huius alterius ſpeciem, vt ſciamus, num acutus ſit, vel obtuſus. Summa autem horum angulorum ex ſemicirculo ſubtracta relinquet tertium angulum quæſito lateri oppoſitum. Ergo

Vt ſinus dati anguli.	*ad datum latus ei oppoſitum;*	*ita ſinus tertij anguli inuenti quæſito lateri oppoſiti*	*ad latus quæſitum.*	*1. triang. rectil.*

2. SI duo latera data ſint æqualia: [b] erit angulus alteri dato lateri oppoſitus, dato angulo æqualis. [b] 5. primi.

XIV. ANGVLOS DVOS.

EX duobus lateribus, & angulo ab ipſis comprehenſo, reperire.

Inuenientur ex ijs, quæ data ſunt, duo anguli, vt in priori parte problematis 12. dictum eſt: ſi nimirum inquiratur tangens differentiæ inter ſemiſſem arcus, qui detracto angulo dato ex ſemicirculo relinquitur, & alterutrum angulorum, qui quæruntur, &c. quæ quidem tangens duobus modis inuenta eſt in priori parte problematis 12. in quo latus proponitur inueſtigandum ex duobus lateribus, & angulo ab ipſis comprehenſo. Quod vt fieret, inuenti prius fuerunt alij duo anguli, qui in hoc problemate 14. quæruntur.

XV. ANGVLOS DVOS.

EX duobus lateribus, & angulo vni eorum oppoſito (ſi modo conſtet ſpecies anguli alteri lateri dato oppoſiti, quando datus angulus acutus eſt) expiſcari.

Hic etiam adhibenda eſt prior operatio problematis 13. in quo latus opponitur inquirendum ex ijſdem datis: quod vt fieret, inuenti prius fuere reliqui duo anguli, qui in hoc problemate 15. indagandi proponuntur.

XVI. ANGVLOS OMNES TRES EX tribus omnibus lateribus perueſtigare.

21. triang. rectil. 1 *Ducta ad maximum latus perpendiculari ex angulo oppoſito 2 (vt nimirum perpendicularis ſemper intra triangulum cadat) inueniantur per problema 9. ſegmenta duo maximi lateris facta à perpendiculari. Deinde.*

1. triangul. rectil.	*Vt minimum latus*	*ad ſinum totum:*	*ita minus ſegmentum maximi lateris*	*ad ſinum complementi anguli medio lateri oppoſiti.*

Rurſus.

1. triangul. rectil.	*Vt medium latus*	*ad ſinum totum:*	*ita maius ſegmentum maximi lateris*	*ad ſinum complementi anguli minimo lateri oppoſiti.*

Inuentis duobus angulis ad maximum latus, qui medio lateri, & minimo opponuntur; ſi eorum ſumma ex ſemicirculo dematur, reliquus fiet tertius angulus lateri maximo oppoſitus.

a Schol 26. lib. 1. Eucl. 2 In Iſoſcele, ducta perpendiculari ad baſem [a], quam bifariam ſecabit,

Vt alterum laterum æqualium	*ad ſinum totum:*	*ita ſemiſis baſis*	*ad ſinum complementi vnius angulorum æqualium ad baſem.*

Summa duorum angulorum æqualium inuentorum ex ſemicirculo detracta, reliquum faciet tertium angulum.

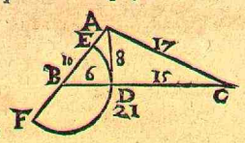
3 IN æquilatero triangulo dabuntur anguli, etiamſi latera non dentur, cum quilibet gradus 60. tertiam videl. partem duorum rectorum, vel duas tertias partes vnius recti, complectatur.

XVII. PERPENDICVLAREM IN LATVS QVODCVNQVE ex angulo oppoſito cadentem.

EX tribus omnibus lateribus efficere notam.

Per problema 9. inquirantur ſegmenta lateris facta à perpendiculari. Deinde differentia inter vtrumuis ſegmentum, & latus adiacens ducatur in ſummam eiuſdem ſegmenti, & lateris adiacentis. Radix namque quadrata numeri producti per pendicularem quæſitam indicabit.

Theorema



In triangulo enim ABC, ſit AB, 10. AC, 17. BC, 21. inueſtigandaq; ſit perpendicularis AD. Per problema 9. reperietur ſegmentum BD, 6. & CD, 15. Differentia inter BD, & AB, eſt 4. quæ ducta in 16. ſummam rectarum BD, & AB, faciet 64. cuius radix quadrata 8. dat perpendicularem AD. Quod quia in noſtro tractatu triangulorum rectilineorum demonſtratum non eſt, demonſtro hoc propoſito theoremate.

In triangulo rectangulo rectangulum ſub differentia baſis, & alterutrius lateris circa rectũ angulum & ſub ſumma baſis, & eiusdem lateris, æquale eſt quadrato alterius lateris circa angulum rectum.

a Coroll. 16 tertij. *Nam in triangulo rectangulo ABD, cuius angulus D, rectus, ſi ex B, per D, ſemicirculus deſcribatur EFD, erit AE, differentia inter baſem AB: & latus BD: At AF, ſumma erit baſis AB, & eiuſdem lateris BD, cum BD, BE, BF, rectæ ſint æquales.*
b 30. tertij. *Dico igitur rectangulum ſub AE, AF, æquale eſſe quadrato lateris AD. Recta enim AD, cum perpendicularis ſit ad ſemidiametrum BD, [a] ſemicirculum tanget in D. [b] Igitur rectangulum ſub AE, AF, quadrato tangentis AD, æquale erit, quod erat demonſtrandum.*

FINIS LIBRI PRIMI.

GEO-

GEOMETRIÆ PRACTICÆ

LIBER II.

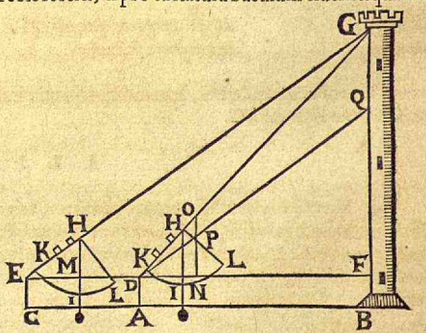
Linearum Rectarum per Quadrantem Aſtronmicum Dimenſionem explicans.

NOMINE *linearum rectarum intelligimus diſtantias locorum, ſeu interualla, longitudineſue: altitudines turrium, ædificiorum, arborum, & montium: ac poſtremo profunditates puteorum, vallium, atque foſſarum. Ad harum Dimenſiones varii varia adhibent inſtrumenta, quibuſdam enim placet ſcala altimetra in dorſo Aſtrolabii, ſeu planiſphærii deſcripta. Aliis radius Aſtronomicus Gemmæ Friſii, vel radius dictus Latinus, quod à Domino Latino Vrſino nobili Romano excogitatus ſit; vel baculus Iacob: Aliis annulus Aſtronomicus, vel Holometrum; Aliis denique alia inſtrumenta arrident. Mihi vero præ cæteris probatur Quadrans Aſtronomicus in 90. gradus diſtributus: & Quadratum Geometricum tum ſtabile, tum pendulum, cuius duo latera in certas quaſdam partes æquales ſint diuiſa. Hoc autem 2. lib. qua ratione per Quadrantem Aſtronomicum Dimenſio linearum rectarum perficiatur, docebimus. Quæ ratio vt intelligatur, in promptu, & ad manum eſſe debent tabulæ ſinuum, Tangentium atque ſecantium in noſtro Theodoſio, & in aliorum auctorum libris deſcriptæ, vnde petendæ erunt. Superuacaneum enim eſſe duximus, eaſdem hic repetere, ne opus in maiorem formam excreſcat.*

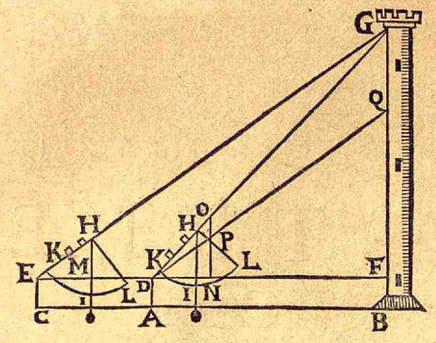
DISTANTIAM in plano, ſiue acceſſibilis ea ſit, ſiue inacceſſibilis, per duas ſtationes in eodem plano factas per Quadrantem metiri, quando in eius extremo erecta eſt altitudo aliqua perpendicularis, etiamſi infimum eius extremum non cernatur. Atque hinc altitudinem quoque ipſam elicere.

PROBLEMA I.

SIT diſtantia, ſiue longitudo inueſtiganda AB, in plano CB, erectaque ſit in extremo B, altitudo quæpiam perpendicularis BG, licet extemum B, non appareat. Statura menſoris ſit DA, ab oculo ad pedes vſque. Ne autem hæc ſtatura mutetur, ſed eadem ſemper maneat, recte feceris, ſi pro ea ſtatura baculum eidem æqualem accipias, ad cuius extremum oculum applices. Ducta autem cogitatione per D, ipſi CB, parallela EF, fiat prima ſtatio in D, Secunda vero in E, puncto remotiore: ſitque recta DE, quæ differentia ſtationum dicitur, nota ſecundum aliquam menſuram vulgarẽ. Deinde dirigatur latus quadrantis HK, in quo ſunt pinnacidia, verſus faſtigium G, ita vt oculus in D, poſitus per vtriuſq; pinnacidii foramina, faſtigium G, videat, libere pendente perpendiculo HI: diligenterque per ea, quæ cap. 2. lib. 1. Num. 7. & 10. tradita ſunt, notetur in gradibus, ac minutis angulus GDF, quem arcus IL, in Quadrante manifeſtabit, complementum videlicet arcus IK, Cum enim filum perpendiculi HI, ſit ad DF, rectum, erit angulus GDF, complementum anguli DHI, æqualis nimirũ angulo IHL, qui eiuſdẽ anguli DHI, complemẽtũ etiã eſt. Atq; hũc angulũ GDF, angulũ obſeruationis dicem°. Eodẽ modo obſeruet in ſecũda ſtatione angul° GEF, p radiũ viſualẽ ab oculo, & per pinnacidia Quadrãtis ad faſtigiũ G, directũ. Sumptis autem EM, DN, æqualibus,



Angulus obſeruationis.



æqualibus erigantur perpendiculares MH, NO, (in figura coincidit MH, cum filo perpendiculi; quod nihil refert.) Si igitur EM, DN, ſtatuantur ſinus toti, erunt MH, NO, tangentes angulorum obſeruationum E, & D. Ducta quoque DQ, ipſi EG, parallela ſecante NO, in P, [a] erit angulus NDP, angulo E, æqualis. Cum ergo duo anguli N, D, trianguli NDP, duobus angulis M, E, trianguli MEH, ſint æquales, (eſt enim rectus N, recto M, æqualis) lateraque DN, EM, quibus adiacent, æqualia; [b] erunt latera NP, MH, æqualia: ac proinde OP, differentia erit inter tangentes angulorum obſeruationum. [c] Quia vero eſt, vt OP, ad PN, ita GQ, ad QF; [d] Et vt GQ, ad QF, ita ED, ad DF; erit quoque vt OP, differentia Tangentium angulis obſeruationum reſpondentium ad PN, ſiue ad HM, tangentem remotioris ſtationis, ita ED, differentia ſtationum ad DF, diſtantiam quæſitam. Quocirca ſi fiat,

a 29. prim.
b 26. prim.
c Schol. 4. lib. 6.
d 2. ſexti.

Diſtantia inuētio per tangentes.

Vt OP, differentia inter Tangentes angulorum obſeruationum,	*ad PN, vel HM, Tangentem minorem:*	*Ita ED, differentia ſtationum nota in menſura aliqua vulgari*	*ad aliud; hoc eſt, ad DF,*

prodibit diſtantia DF, quæſita, ſiue AB, in eadem menſura differentiæ ſtationum: cui ſi adiiciatur differentia ſtationum ED, cognita etiam fiet diſtantia EF; vel CB, à remotiori ſtatione,

ALITER.

2 POSITO ſinu toto GF, erit DF, tangens anguli DGF, complementi anguli obſeruationis GDF, quem angulum DGF, indicat arcus Quadrantis IK, à perpendiculo verſus oculum, [e] cum angulus DHI, æqualis ſit angulo DGF, externus interno. Eodem modo EF, Tangens erit anguli EGF, complementi alterius anguli obſeruationis GEF. At ED, differentia inter eas Tangentes exiſtet. Si igitur fiat

e 29 prim.

Diſtantia inuentio alia per tangentes.

vt ED, differentia inter Tangentes angulorum, qui cōplemēta ſunt angulorū obſeruationū,	*ad DF, Tangentem complementi anguli obſeruationis GDF, in propinquiore ſtatione, hoc eſt, ad Tangentem minorem:*	*Ita ED, differentia ſtationum nota in aliqua menſura vulgari*	*ad aliud, hoc eſt, ad DF,*

procreabitur diſtantia minor quæſita DF, vel AB, in eadem menſura differentiæ ſtationum: cui ſi addatur differentia ſtationum ED, nota quoque fiet diſtantia maior EF.

f 4. ſexti.

3 Rurſus [f] ſi fiat,

Vt DN, ſinus totus	*ad NO, Tangentem anguli GDF, in propinquiore ſtatione:*	*Ita DF, diſtantia inuenta minor*	*ad aliud, hoc eſt, ad FG;*

Altitudinis inuētio per tangentes. Inuenietur altitudo FG, in menſura diſtantiæ inuentæ DF, minoris, cui ſi addatur menſoris ſtatura FB, cognita erit tota altitudo BG. Item [g] ſi fiat

g 4. ſexti. *Altitudinis inuentio alia per tangentes.*

Vt EM, ſinus totus	*ad MH, tangentem anguli GEF, in remotiore ſtatione:*	*ita EF, diſtantia inuenta maior*	*ad aliud, hoc eſt, ad FG,*

reperietur eadem altitudo FG, in menſura diſtantiæ inuentæ EF, maioris, cui ſi addatur, ſtatura menſoris FB, nota fiet tota altitudo BG.

ALITER.

4 SI per ſolos ſinus idem expedire lubeat, erit operatio aliquanto longior. Primum enim inuenienda eſt vtraq; hypotenuſa EG, DG, in aliqua menſura nota, hoc modo. [h] Quoniam angulus GDF, æqualis eſt duobus angulis E, EGD: ſi angulus E, in remotiore ſtatione obſeruatus detur ex angulo GDF, in propinquiore ſtatione deprehenſo, reliquus fiet angulus EGD, differentia nimirum inter duos angulos obſeruationum. [i] Quod ſi fiat,

h 32. prim.
i 10. Triangul. rectil.

Vt ſinus anguli EGD, differentiæ inter angulos duos obſeruationum	*ad ED, differentiam ſtationum notam:*	*Ita ſinus anguli DEG, vel. Ita ſinus anguli EDG, complementi anguli GDF, ad duos rectos,*	*ad DG, vel ad EG,*

produce-

producetur tam DG, quam EG, nota in partibus differentiæ ſtationum. Igitur [a] ſi fiat,

Inuentio Hypotenuſarum. a 10. triangul. rectil.

Vt ſinus totus anguli recti F,	*ad hypotenuſam DG, proxime inuentam*	*Ita ſinus anguli DGF, complementi anguli obſeruationis in propinquiore ſtatione*	*ad DF,*

nota fiet diſtantia DF, cui ſi adiiciatur differentia ſtationum ED, cognita etiam erit longior diſtantia EF, quam inuenies quoque, [b] ſi fiat,

Diſtantia inuentio per ſolos ſinus. b 10. Triang. rectil.

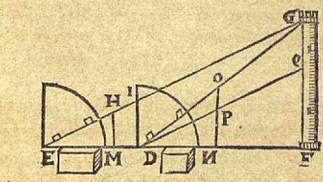
Vt ſinus totus anguli recti F,	*ad hypotenuſam EG, nuper inuentam:*	*Ita ſinus anguli EGF, complementi anguli obſeruationis in remotiore ſtatione*	*ad EF.*

Altitudo autem FG, per ſolos ſinus inuenietur, [c] ſi fiat,

c 10. Triang. rectil. *Altitudinis inuētio per ſolos ſinus.*

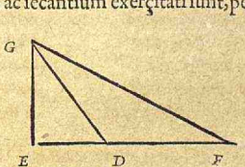
Vt ſinus totus anguli recti F,	*ad hypotenuſam EG, vel ad hypotenuſam DG:*	*Ita ſinus anguli E, obſeruati minoris, vel ita ſinus anguli GDF, obſeruati maioris*	*ad FG,* / *ad FG.*

5 PER Quadrantem ſtabilem eodem modo dimenſio fit: ſolum anguli obſeruationum in duabus ſtationibus hac ratione inueſtigātur. Collocato quadrante ſupra baſem aliquam planam Horizonti æquidiſtantem, ita vt rectus ſit ad Horizontem, quod beneficio alicuius perpendiculi efficies. Collocato, inquam, hoc modo Quadrante, eleua dioptram, donec per foramina pinnacidiorum faſtigium G, videas. Ita enim in propinquiore ſtatione D, angulus obſeruationis erit GDF; In remotiore vero GEF. Vtrumque autem metietur arcus quadrantis inter rectam EF, & dioptræ lineam fiduciæ. Reliqua omnia fient, ſicut in quadrante pendulo, vt figura demonſtrat. Solum ad alitudinem FG, inuentam adiicienda erit altitudo baſis, cui impoſitus eſt quadrans, non autem ſtatura menſoris, niſi altitudini baſis ſit æqualis.



6 IAM vero ſine numeris, id eſt, ſine multiplicatione ac diuiſione numrorū omnia hæc explorari poterunt (quod iis, qui parum in numeris & vſu ſinuum, tangentium, ac ſecantium exerçitati ſunt, pergratum fore non dubito) hoc modo. In charta aliqua, vel plano conſtruatur figura, illi omnino ſimilis, quam ab oculo, vſque ad altitudinem ſupra concepimus eſſe conſtructam: quod ita fiet. Ex inſtrumento partium cap. 1. ſuperioris libri fabricato, vel (ſi inſtrumentum non adſit) ex aliqua recta in particulas plurimas æquales diuiſa capiantur circino tot particulæ æquales, quot palmi, vel pedes inter duas ſtationes comprehendūtur; transferaturq; interuallum illud circini in rectam quamcunq; ex E, in D: atq; in D, & E, omni adhibita diligentia, anguli obſeruationū GDF, GEF, primæ & ſecundæ ſtationis fiant: Punctumq; G, in quo rectæ DG, EG, cōueniunt, diligenter notetur (ne in hoc puncto erretur, propter aliquam ſectionem, docebimus in ſequenti lemmate, quo pacto exquiſitiſſime deprehendi poſſit. Niſi enim hoc fiat, menſuræ non inuenientur accurate) ex quo perpendicularis demittatur GF. Figura ita conſtructa, ſi rectæ DF, EF, FG, DG, EG, per circinum tranſportentur in latus 100. partium prædicti inſtrumenti, vel in dictam rectam in plurimas partes æquales diuiſam, illico apparebit, quot particulæ inter pedes circini includantur. Atque tot palmos aut pedes quælibet illarum rectarum complectetur, quot particulæ in earum interuallis deprehenſæ fuerint.

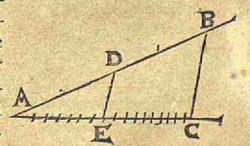
Problema hoc 1. quo pacto ſine numeris ab ſoluatur.



ALITER.

7 IDEM aſſequemur via quadam generali, quæ in omnes dimenſiones quadrat, videlicet. Fiat angulus quicunque BAC. Deinde ſumpta verbi gratia, in exemplum regula trium Num. 1. huius propoſitionis acciatur primæ quantitati OP, (hoc eſt, differentiæ Tangentium angulorum obſeruatorum) æqualis; vel ſi nimis parua eſt, multiplex AD. (Nos duplam accepimus) Item ſecundæ PN, (hoc eſt, Tangenti minoris anguli) æqualis, vel æque multiplex cum AD, nimirum DB. Poſt hæc ex inſtrumento partium capiantur tot particulæ AE, quot palmi, aut pedes in ED, differentia ſtationum continentur. Ducta autem recta DE, agatur ei parallela BC. Nam quot partes inſtrumēti partium includet interuallum EC, tot palmos, aut pedes diſtantia DF, complectetur; [d] cum quatuor quantitates AD, DB, AE, EC, proportionales ſint.

Problema hoc 1. qua ratione aliter ſine numeris abſoluatur



d 4. ſexti.

EODEM modo procedes in alijs exemplis, hoc obſeruato, vt quando ſinus alicuius anguli in regula trium reperitur, accipias ex tabula ſinuū ſinum, abiectis quinq; figuris, vt ſinus totus ſit 100. v. g. In vltimo exemplo Num. 4. recta AD, ſumenda eſſet æqualis 100. particulis inſtrumenti partiū, nimirū ſinui toti. At DB, æqualis hypotenuſæ EG, vel DG, in figura Nū. 6. Et AE, ſi angulus E, eſt gr. 30. min. 15. æqualis $50\frac{4}{10}$. fere partic. quia

tantus

tantus est sinus grad. 30. Min. 15. Vel si angulus GDF, est grad. 53. Min. 20. accipienda esset AE, æqualis particulis 80$\frac{7}{10}$. fere. Ita enim interuallum EC, dabit tot palmos, aut pedes rectæ FG, quot particulæ in eo comprehenduntur. Et sic de cæteris.

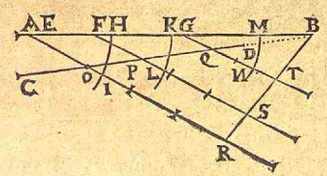
QVANDO autem tota regula 100. partium est nimis longa, sumi potest pro sinu toto quoduis interuallum inter 100. & 100. dummodo respectu huius sinus totius accipiantur postea sinus, vt cap. 1. lib. 1. Num. 12. declarauimus.

POTERIS autem nonnunquam ordinem immutare, ponendo nimirum secundam quantitatem DB, in recta AC; & tertiam AE, in recta DB, prout videlicet id expedire cognoueris ad parallelas DE, BC, ducendas.

LEMMA.

DATIS duabus rectis ad inuicem inclinatis, punctum, in quo conueniant, inuenire.

QVOD hic proponitur, demonstratum à nobis fuit lemmate 13. lib. 1. nostri Astrolabii pluribus viis. Sed quia eius insignis est vtilitas in puncto concursus duarum rectarum exquirendo, demonstrabimus illud ipsum hoc loco paulo aliter. Sint ergo duæ rectæ AB, CD, oblique se in concursu B, secantes. Ex quotlibet punctis E, F, G, vtcunque in altera earum assumptis describantur versus alteram ad quodcunque idem interuallum arcus HI, KL, MN, ex quibus arcus quadrante minores abscindantur in I, L, N, punctis, per quæ ex centris rectæ egrediantur secantes CD, in O, P, Q. Sumptis deinde in EI, productæ ipsi EO, tot partibus æqualibus vsque ad R, quot satis esse videbuntur, vt recta ex R, versus concursum ducta non valde oblique ipsas rectas secet, accipiantur in FL, GN, productis totidem partes ipsis FP, PQ, æquales vsque ad S, T. Dico tam rectam RS, quã RT, & quã ST, in punctum B, concursus cadere, ita vt puncta R, S, T, B, in vna recta linea iaceant. [a] *Quoniam enim anguli E, F, G, æquales sunt,* [b] *erunt rectæ ER, FS, GT, parallelæ.* [c] *Cum ergo ER, FS, GT, eaſdem proportiones habeant, quas EO, FP, GQ, hoc est,* [d] *EB, FB, GB, habent,* [e] *cadent rectæ RS, RT, ST, in punctum B, quod est propositum.*



a 27. tertij. b 28. prim. c 15. quint. d 4. Sexti, & permutando. e Schol. 4. sexti.

HOC ergo lemma si adhibeatur, satis exquisite in superiore figura Num. 6. punctum concursus G, deprehendetur, proindeq; mensuræ rectarum, quas sine numeris inuenire docuimus, non multum à vero aberunt.

Quo pacto in fig. Nu. 6. obliqua sectio in pũcto concursus G, vitatur.

8 VERVM commode obliquam illam sectionem in concursu G, vitabimus, si figuram, hoc alio modo construemus, Fiat in figura Num. 6. angulus rectus EFG, & in quolibet puncto G, vbi concursum esse volumus, constituantur anguli FGD, FGE, æquales complementis angulorum obseruationum. Ita enim DE, respondebit differentiæ stationum, &c. Quocirca si cogitetur DE, secta in tot partes æquales, quot palmi, vel pedes in differentia stationum fuerunt assumpti, cognoscemus per ea, quæ ad finem num. 1. cap. 1. lib. 1. docuimus, quot ex iis partibus in distantius DF, EF, & in altitudine FG, atque hypotenusis GD, GE, comprehendantur. Atque hoc modo punctum concursus G, dubium, aut incertum esse non potest, cum illud ante omnia elegerimus.

SCHOLIVM.

Vt etiam pro tyronibus semel explicemus, quid per nostrum loquendi modum intelligamus, cum dicimus verbi gratia, Num. 1. huius problematis, Fiat.

Altitudinis inuentio per vnicã stationẽ quando distantia nota est.

Vt OP, differentia inter tangentes angulorũ obseruationum		*ad PN, vel HM, Tangentem minorem.*	*Ita ED, differentia stationum*	*ad DF:*

Sciendum est, nos hoc modo redigere opus ad terminos regulæ trium. Quapropter si iuxta tenorem regulæ numerus in tertio loco positus ducatur in eum, qui secundum locum occupat, hoc est, differentia stationum in proposito exemplo multiplicetur per Tangentem minorem, productusque numerus per eum, qui in primo loco collocatur, id est, per differentiam Tangentium, diuidatur: (nisi quando primus numerus est sinus totus. Tunc enim diuisio non fit, sed ex producto quinque figuræ abiiciuntur, vel septem, prout sinus totus statuitur 100000. vel 10000000.) procreabitur in quotiente quartus numerus, qui quæritur, nimirum distantia DF. Eademque est ratio de cæteris.

COROLLARIVM. I.

ITAQVE quando distantia à loco mensoris vsque ad altitudinem ignotam cognita est, inuenietur altitudo per vnicam stationem. [f] Si fiat

f 4. triangul. rectil.

Vt sinus totus	*ad Tangentem anguli obseruationis:*	*Ita distantia nota*	*ad altitudinem.*

Hoc enim demonstratum est Num. 3. huius problematis 1. tam per angulum obseruationis GDF, & distantiam DF, quam per angulum obseruationis GEF, & distantiam EF. Vtroque enim modo inuenta est altitudo GF.

COROL-

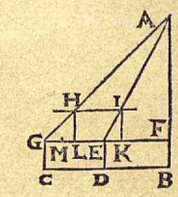
COROLLARIVM II.

PERSPICVVM etiam est, si G, sit cacumen alicuius montis, nos per hoc problema 1. eius altitudinem posse metiri per duas stationes D, E, in plano factas: si nimirum prius inuestigetur recta DF, vel EF, ab oculo mensoris vsque ad perpendicularem GF, quæ à cacumine G, in planum Horizontis cadit, etiamsi eius extremum F, non videamus. *Altitudo montis quo pacto inuestigetur.*

ALTITVDINEM inaccessibilem, quando distantia à loco mensoris ad basem altitudinis ignota est, per duas stationes in plano factas, per quadrantem dimetiri. Atque hinc distantiam quoque ipsam eruere etiam si extremus eius terminus non cernatur.

PROBLEMA II.

1. SIT inquirenda altitudo AB, siue ea turris sit, siue mons, siue aliquid aliud, licet non cernatur eius perpendiculi infimus terminus B, vt in omni monte contingit: planum autem, cui perpendicularis est altitudo, sit CB. Statura mensoris DE. Ducta autem cogitatione per E, ipsi CB, parallela GF, fiat prima statio in D, propinquior; secunda vero in G, remotior, vt differentia stationum sit GE. Deinde per radios visuales EA, GA, ad verticem A, directos diligenter obseruentur anguli AEF, AGF, siue per quadrantem pendulum, vt Num. 1. problematis præcedentis docuimus, siue per stabilem, vt Num. 5. eiusdem problematis præcepimus. Eodem enim semper modo dicti anguli obseruantur, quando è loco inferiori altitudinis fastigium inspicitur. Cogitetur quoque ducta HI, ipsi GF, parallela, [a] vt demissæ perpendiculares HL, IK, in parallelogrammo LI, sint æquales, pro sinubus totis: quorum tangentes sunt EK, GL. angulis I, H, qui complementa sunt angulorum obseruationum E, G, debitæ. Et quoniam angulus GAF, maior est angulo EAF, [b] estque priori angulus GHL, & posteriori angulus EIK, æqualis: erit quoque GHL, maior quam EIK, ideoque tangens GL, maior Tangente EK, quod sinus toti HL, IK, æquales sint. Abscindatur LM, ipsi EK, æqualis, vt GM, sit differentia Tangentium GL, EK, [c] Et quia est vt GL, ad LH, ita GF, ad FA, erit permutando, vt GL, ad GF, ita LH, vel IK, ad FA; [d] Vt autem IK, ad FA, ita quoque est EK, ad EF. Igitur erit, vt tota GL, ad totam GF, ita EK, vel LM, ex GL, ablata, ad EF, ex GF, ablatam: [e] ac proinde erit etiam vt GM, ex GL, reliqua ad GE, ex GF, reliquam; ita tota GL, ad totam GF, hoc est, [f] ita LH, sinus totus, ad FA. Quamobrem si fiat



a 34. primi. b 29. prim. c 4. sexti. d 4. sexti & permutando. e 19. quint. f 4. sexti. & permutando.

Vt GM, differentia Tangentium GL, EK, complementorum angulorum obseruationum	*ad GE, differentiam stationum.*	*ita LH, sinus totus*	*ad FA,*

inuenta erit altitudo FA, in partibus differentiæ stationum, cui si adijciatur FB, statura mensoris, tota altitudo AB, nota euadet. *Altitudinis inuẽtio per Tangentes.*

2. ITEM si fiat

Vt GM, differentia Tangentium complementorum angulorum obseruationum	*ad GE, differentiam stationum:*	*ita GL, Tangens complementi anguli obseruationis in remotiori statione*	*ad GF,*

efficietur nota GF, distantia maior, quandoquidem paulo ante demonstratum est, esse GM, ad GE, vt GL, ad GF. Quod si ex GF, inuenta detrahatur GE, differentia stationum, nota relinquetur EF, distantia minor. *Distantia inuentio.*

ALITER.

3. SI per solos sinus dimensio instituatur, inuestiganda primum erit alterutra hypotenusarum GA, EA, vel vtraque, hoc scilicet modo. [g] Quoniam angulus AEF, duobus G, GAE, æqualis est, si angulus G, in remotiore statione tollatur ex angulo AEF, in statione propinquiore, reliquus fiet angulus GAE, differentia inter duos angulos G, AEF, obseruationum.

g 32. primi.

[h] Ergo si fiat,

h 10. triangul. rectil.

Vt sinus anguli GAE, differentia inter duos angulos obseruationum	*ad GE, differentiam stationum:*	*ita sinus anguli AGE, vel ita sinus anguli GEA, complementi anguli AEF, ad duos rectos.*	*ad AE,*
			ad GA,

Hypotenusarum inuentio.

nota fiet tam AE, quam AG, in partibus differentiæ stationum.

[i] Si igitur fiat

i 10. Triang. rectil.

Vt si-

Vt sinus totus anguli recti F, *ad rectam EA: vel ad rectam GA, proxime inuentam.* *ita sinus anguli AEF, in propinquiore statione, vel ita sinus anguli AGF, in remotiore statione* *ad AF, ad AF,*

Altitudinis inuentio per solos sinus. gignetur altitudo AF, & si adiungetur FB, statura mensoris, tota altitudo AB, efficietur nota.

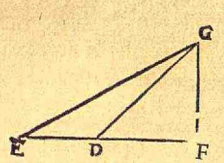
DISTANTIA autem vtraque EF, GF, per solos etiam sinus inuenietur, [a] si fiat

Vt sinus totus anguli recti F, *ad hypotenusam EA. vel ad hypotenusam GA:* *ita sinus anguli EAF, complementi anguli in propinquiore statione, vel ita sinus anguli GAF, complementi anguli in remotiore statione* *ad EF,*

a 10. triangul. rectil.

Distantiæ inuentio per solos sinus.

Problema quo pacto sine numeris soluatur.



4 SINE numerorum multiplicatione ac diuisione eadem inuestigabuntur, si illi figuræ, quam ab oculo mensoris ad altitudinem vsque concepimus esse construendam, similem omni diligentia constituamus, vt Num. 6. & 8. præcedentis problematis 1. diximus, vt manifestum est, si in ea figura Num. 6. altitudo intelligatur FG, & distantiæ FD, FE, &c. Idemque efficies per ea, quæ Num. 7. eiusdem problematis 1. tradita sunt.

COROLLARIVM. I.

Distantiæ inuentio per vnicã stationem, quando altitudo nota est.

ITAQVE si altitudo fuerit nota, inuenietur distantia per vnicam stationem, [b] si fiat

Vt sinus totus AF, *ad Tangentem FE, complementi anguli in propinquiore statione: vel ad Tangentem FG, complementi anguli in remotiore statione:* *ita altitudo nota AF,* *ad distantiam FE, vel ad distantiam FG.*

b 4 triang. rectil.

ITEM si distantia nota fuerit, reperietur altitudo per vnicam quoque stationem, si fiat

Vt sinus totus GF, *ad AF, Tangentem anguli G, obseruati in remotiori statione:* *ita GF, distantia nota* *ad AF, altitudinem*

Vel

Vt sinus totus EF, *ad AF, Tangentem anguli E, obseruati in statione propinquiore:* *ita EF, distantia nota,* *ad AF, altitudinẽ.*

COROLLARIVM. II.

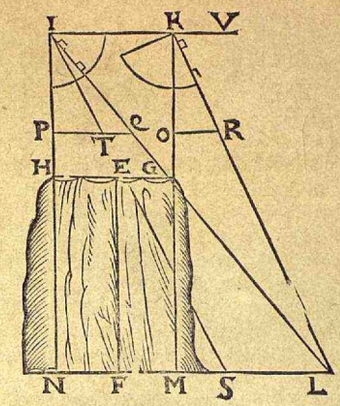
MANIFESTVM etiam est, si punctum A, sit cacumen alicuius montis, eodem pacto inuestigari posse lineam perpendicularem AF, quæ ex cacumine in Horizontis planum demittitur: si nimirum duæ stationes fiant in E, G.

EX vertice montis, aut turris, in cuius summitate duæ stationes fieri possint, è quibus signum aliquod in Horizonte appareat, altitudinem ipsius montis, turrisue dimetiri. Atq; hinc ipsam quoq; distantiam à turris basi, vel perpendiculo montis ad signum illud inuestigare.

PROBLEMA III.

1 SIT mons, aut turris GHNM, cuius altitudo perpendiculum EF, vel etiam latus turris GM, vel HN. Eligantur duæ stationes in G, H; & ab oculo mensoris tam in I, quam in K, posito cerni possit signum L, in Horizonte, vel plano, cui turris, aut mons insistit. Dirigatur latus Quadrantis penduli, in quo pinnacidia, versus L, diligenterque angulus K, notetur, quem arcus Quadrantis inter latus pinnacidiorum, & filum perpendiculi libere pendentis determinat. Eodemque pacto angulus I, obseruetur. Per Quadrantem stabilem vterque obseruabitur, si vnum eius latus ad Horizontem sit rectum, (quod tum demum fiet, quando filum perpendiculi ex centro pendentis illi lateri adhærebit) & dioptra attollatur, donec per pinnacidiorum foramina signũ L, cerni possit. Nam arcus inter dictum latus, & lineam fiduciæ in dioptra angulum obseruationis metietur. Intelligatur quoque filum perpendiculi in vtroque situ Quadrantis penduli, vel latus quadrantis stabilis ad Horizontem rectum productum vsq; ad basem montis, aut turris ad M, N. Sumptis deinde rectis æqualibus KO, IP, pro

IP, pro sinubus totis, ducantur PQ, OR, ad IN, KM, perpendiculares, [a] quæ parallelæ erunt plano Horizontis, hoc est, rectæ NL; & Tangentes angulorum obseruationum I, K. [b] Ipsæ autem HN, GM, altitudini EF, æquales erunt. Et quoniam in triangulis INL, KML, anguli recti N, M sunt æquales, & ILN, minor quam KLM, pars toto; erit reliquus NIL, reliquo MKL, maior, ideoq; & Tangẽs PQ, Tangente OR, maior. Abscissa ergo PT, ipsi OR, æquali; [c] quia est, vt IP, sinus totus ad PQ, Tangentem maioris anguli obseruationis, ita IN, ad NL: erit permutando, vt IP, ad IN, ita PQ, ad NL. Eademq; ratione erit vt KO, ad KM, hoc est, vt IP, ad IN, [d] (cum KO, KM, ipsis IP, IN, sint æquales) ita OR, hoc est, ita PT, ad ML; atque ideo erit, vt PQ, ad NL, ita PT, ad ML. Quia ergo est, vt tota PQ, ad totam NL, ita PT, ablata ad ML, ablatam, [e] erit quoq; reliqua TQ, differentia Tangentium, ad reliquam NM, differentiam stationum, [f] (quod NM, HG, æquales sint) vt tota PQ, ad totam NL, [g] hoc est, vt IP, ad IN. Quamobrem si fiat,



a 28. primi.
b 34. trim.
c 4. sexti.
d 34. prim.
e 19. quint.
f 34. primi.
g 4. sex. i.

Vt TQ, differentia inter Tangentes angulorum obseruationum *ad NM, vel HG, differentiam stationum:* *ita sinus totus IP,* *ad IN,*

reperietur recta IN, ex qua si demptur IH, statura mensoris, nota relinquetur HN, vel EF, altitudo quæsita. Et si rursus fiat,

Altitudinis inuentio.

Vt TQ, differentia Tangentium *ad NM, vel GH, differentiam stationum:* *ita PQ, Tangens maior* *ad NL, distantiam.*

nota fiet distantia NL, à qua si subtrahatur NF, vel HE, quam metiri licebit, cognita relinquetur FL, distantia à perpendiculo montis. Vel si demptur NM, differentia stationum, nota relinquetur distantia ML, à turri vsq; ad L. Item [h] si fiat,

Distantiæ inuentio.

h 4. sexti.

Vt IP, sinus totus *ad PQ, Tangentem maiorem:* *ita IN, paulo ante inuenta* *ad NL, distantiam,*

inuenietur rursus distantia NL, &c.

2 VERVM ita esse TQ, differentiam Tangentium ad NM, vel HG, differentiam stationum, vt est PQ, Tangens maior ad distantiam NL, vt paulo ante ostensum est, facilius demonstrabimus, si ducatur recta IT, quæ producta secet NL, in S. Nam in triangulis IPT, KOR, duo latera IP, PT, duobus lateribus KO, OR, æqualia sunt, angulosque continent æquales, vtpote rectos. [i] Igitur anguli T, R, æquales sunt, [k] ideoq; KL, IS, parallelæ. [l] Et quia ducta IK, æqualis est & ipsi SL, & differentiæ stationum HG, vel NM, [m] liquido constat, ita esse TQ, differentiam Tangentium ad SL, quæ differentiæ stationum IK, vel HG, æqualis est, vt est PQ, Tangens maior ad distantiam NL,

i 4. primi.
k 28. prim.
l 34. primi.
m schol. 4. sexti.

ALITER

3 PER solos sinus ita Problema efficiemus. Primum inquiremus hypotenusas IL, KL, hoc modo. [n] Quoniam angulus LKV, duobus angulis LIK, ILK, æqualis est; si LIK, angulus complementi maioris anguli obseruationis LIN, auferatur ex LKV, angulo complementi minoris anguli obseruationis LKM, reliquus fiet angulus ILK. [o] Si ergo fiat,

n 32. prim.
o 10. Triã. rectil.

Vt sinus anguli ILK, differentiæ inter duos angulos complemẽtorum angulorum obseruationum *ad IK, differentiam stationum:* *Ita sinus anguli IKL, conflati ex recto, & angulo obseruationis minore, vel Ita sinus anguli LIK, complementi maioris anguli obseruationis* *ad IL, ad KL,*

Hypotenusarum inuentio.

euadet nota tam IL, quam KL, in mensura differentiæ stationum. [p] Igitur si fiat,

p 10. Trian. rectil.

Vt sinus totus anguli recti N, *ad Hypotenusam proxime inuentam IL,* *Ita sinus anguli ILN, complementi maioris anguli obseruationis* *ad IN,*

Vel

Vt sinus totus anguli recti M, *ad Hypotenusam KL, nuper inuentam:* *Ita sinus anguli KLM, complementi minoris anguli obseruationis* *ad KM,*

Altitudinis inuentio per solos sinus. cognita fiet altitudo IN, vel KM, ex qua si demat̃ur ſtatura menſoris, altitudo quæſita relinquetur HN, vel GM, hoc eſt, EF.

DISTANTIA autem vtraque NL, ML, reperietur, [a] ſi fiat,

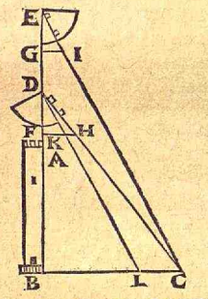
[a] *10. Tria. rectil. Diſtantiæ inuentio per ſolos ſinus.*

Vt ſinus totus anguli recti N, vel M,	*ad hypotenuſam inuentam IL, vel KL,*	*Ita ſinus anguli maioris obſeruati NIL, vel Ita ſinus anguli minoris obſeruati MKL,*	*ad NL, diſtantiam. ad ML, diſtantiam.*

Quo pacto problema conficiatur ſine numeris. 4 SINE numeris eædem rectæ IN, NL, IL, KL, &c. reperientur, vt in ſuperioribus: ſi nimirum (vtemur figura huius problematis, ne nouam conſtruere cogamur) ſumpta recta IK, tot partium, quot palmi pedeſue in differentia ſtationum exiſtunt, fiant anguli VKL, VIL, complementorum angulorum MKL, NIL, obſeruationum, & concurſus L notetur, ex quo ducatur LN, ipſi IK, parallela, & ad hanc perpẽdicularis in I, excitetur IN, &c. Vel ſi angulus rectus conſtituatur INL, & in aſſumpto puncto L, vbi concurſum eſſe volumus, fiat tam angulus NLI, complementi maioris anguli obſeruationis, quam angulus NLK, complementi minoris anguli obſeruationis, &c. Reliqua autem fiant, vt in problemate 1. Num. 6. & 8. dictum eſt. Idemque efficies per ea, quæ Num. 7. in eodem problemate 1. ſcripſimus.

EX vertice montis, vel turris per duas ſtationes in aliqua haſta erecta, vel in duabus feneſtris turris, quarum vna ſupra aliam exiſtat, factas, è quibus ſignum aliquod in Horizonte videri poſſit, altitudinem ipſius montis, aut turris metiri. Atque hinc diſtantiam quoque à perpendiculo montis, vel turris vſque ad ſignum viſum cognoſcere.

PROBLEMA IV.



1 NON poſſunt aliquando commode duæ ſtationes in ſummitate montis, vel turris fieri. Quare tunc ita agendum erit. Sit altitudo AB, ſupra planum BC, menſuranda ex ſummitate A. Erigatur haſta aliqua quotlibet palmorum, aut pedum. Et primum inſpiciatur ſignum C, in plano per angulum BDC; Deinde idem inſpiciatur ex loco ſuperiore haſtæ per angulum BEC. Vterque autem angulus obſeruabitur vel per quadrantem pendulum, vt in priori angulo vides, vel per ſtabilem cum dioptra, vt in poſteriori. Sumptis quoque æqualibus DF, EG, pro ſinubus totis, ducantur ad EB, perpendiculares FH, GI, pro Tangentibus angulorum obſeruationum. Ducta autem DL, ipſi EC, parallela ſecante FH, in K: [a] quoniam anguli BDL, & E, æquales ſunt, & F, G, recti, nec non & latera adiacentia DF, EG, æqualia; [b] erunt latera FK, GI, æqualia: atque adeo KH, differentia Tangentium. Quia vero ex ſchol. propoſitionis 4. lib. 6. Euclid. eſt, vt KH, ad FK, ita LC, ad BL: [c] Vt autem LC, ad BL, ita eſt, ED, ad BD; erit quoque vt KH, ad FK, ita ED, ad DB. Si igitur fiat,

[a] *29. prim.* [b] *26. prim.* [c] *2. ſexti.*

Vt KH, differentia inter Tangentes angulorum obſeruationum	*ad FK, vel ad GI, Tangentem minorem:*	*Ita ED, ſpatium inter angulos obſeruationum, quod notum eſſe poteſt per aliquam menſuram,*	*ad DB,*

Altitudinis inuentio. inuenietur DB, ex qua ſi demat̃ur portio haſtæ AD, inter altitudinis faſtigium A, & inferiorem angulum obſeruationis D, nota relinquetur altitudo propoſita AB.

EODEMQVE modo in turri eadem altitudo deprehendetur, ſi pro haſta AE, duæ feneſtræ eligantur, è quibus ſignum C, ſub iiſdem angulis videatur, vt patet. Sed tunc altitudini DB, inuentæ (ſi feneſtræ ſint D, E,) adicienda eſt portio turris inter punctum D, feneſtræ inferioris, & turris faſtigium E, vt tota altitudo turris habeatur EB. [d] Et ſi fiat,

[d] *4. ſexti.*

Vt DF, ſinus totus	*ad FH, Tangentem maiorem:*	*Ita DB, altitudo inuenta*	*ad BC,*

Diſtantiæ inuentio. inuenta erit diſtantia BC.

ALITER.

2 POSITO ſinu toto CB, erit BE, Tangens anguli BCE, complementi minoris anguli obſeruationis E, & BD, Tangens anguli BCD, complementi maioris anguli obſeruationis D; ideoque DE, differentia illarum Tangentium. Quamobrem ſi fiat,

Vt DE, differentia Tangentium complementorum angulorum obſeruationum	*ad DB, Tangentem minorem:*	*Ita DE, differentia ſtationum oculorum*	*ad DB,*

Altitudinis inuentio alia. prodibit altitudo DB, cognita ab oculo in prima ſtatione vſque ad baſem altitudinis, &c.

ALI-

ALITER.

3 VT per ſolos ſinus inſtituatur operatio, inueſtiganda prius eſt vtraque hypotenuſa CD, CE, vel alterutra earum, hoc modo: [a] Quoniam angulus BDC, duobus E, & DCE, æqualis eſt, ſi minor angulus obſeruationis E, ex maiori angulo obſeruationis BDC, ſubtrahatur, notus, relinquetur angulus DCE, [b] Itaque ſi fiat.

[a] *29 prim.* [b] *10. Triã. rectil.*

Vt ſinus anguli DCE, differentiæ angulorum obſertionum	*ad DE, differentiam ſtationum oculorum:*	*Ita ſinus minoris anguli obſeruationis E, Vel Ita ſinus anguli EDC, complementi maioris anguli obſeruationis ad duos rectos,*	*ad CD, ad CE,*

Hypotenuſarum inuentio. reperietur tam hypotenuſa CD, quam CE, in partibus differentiæ ſtationum DE. [c] Quapropter ſi iam fiat

[c] *10. Trian. rectil.*

Vt ſinus totus anguli recti B,	*ad hypotenuſam CD, Vel ad hypotenuſam CE, proxime inuentam:*	*Ita ſinus anguli BCD, complementi maioris anguli obſeruationis BDC, Vel Ita ſinus anguli BCE, complementi minoris anguli obſeruationis E:*	*ad DB, ad EB,*

cognita erit vtraque altitudo DB, EB, &c. Si autem fiat

Altitudinis inuentio per ſolos ſinus.

Vt ſinus totus anguli recti B,	*ad Hypotenuſam CD, Vel ad hypotenuſam CE, nuper inuentam*	*Ita ſinus anguli D, maioris obſeruati, Vel Ita ſinus anguli E, minoris obſeruati.*	*ad BC, ad BC,*

cognoſcetur quoque diſtantia BC, per ſolos ſinus.

Diſtantiæ inuentio per ſolos ſinus. Problematis ſolutio ſine numeris. 4 ABSQVE numeris problema efficiemus, vt in præcedentibus, ſi nimirum in recta EB, ſumatur portio ED, tot partium æqualium, quot palmi pedeſue in ED, differentia ſtationum oculorum exiſtunt, & tam angulus E, minor obſeruationis, quam BDC, maior conſtituatur, concurſusque C, notetur, à quo ad EB, perpendicularis ducatur CB, &c. vel ſi angulus rectus efficiatur B, & in quouis puncto C, vbi optamus eſſe concurſum, conſtituatur tam angulus BCD, complemẽto maioris anguli obſeruationis, quam angulus BCE, complemento minoris anguli obſeruationis æqualis, &c. Reliqua autem abſoluantur, vt in Problemate 1. Num. 6. & 8. dictum eſt. Idemque efficies per ea, quæ ibidem Num. 7. explicata ſunt.

COROLLARIVM.

IGITVR ſi diſtantia ſigni ex turre viſi vſque ad turrim nota fuerit, nimirum recta CB, reperietur altitudo turris per vnicam ſtationem in faſtigio A, factam: [d] ſi videlicet fiat,

[d] *4. trian. rectil.*

Vt ſinus totus CB,	*ad BD, Tangentem anguli BCD, qui complementum eſt anguli obſeruationis D,*	*Ita diſtantia nota CB,*	*ad BD,*

Et ſi ex inuenta BD, auferatur menſoris ſtatura AD, nota relinquetur altitudo turris BA.

VEL PER SOLOS SINVS.

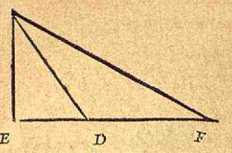
Altitudinis inuentio per vnicã ſtationẽ quando diſtantia nota eſt.

Vt ſinus anguli obſeruationis D,	*ad diſtantiam CB, notam*	*Ita ſinus anguli BCD, complementi anguli obſeruationis D.*	*ad BD,*

QVOD ſi oculus D, ſtatuatur in aliqua feneſtra turris, adiicienda erit portio turris inter oculum & faſtigium ad altitudinem DB, inuentam. Ita namque conficietur tota altitudo turris EB, ſi faſtigium ſit E, vt perſpicuum eſt.

EX vertice montis aut turris altitudinem ipſius, ſi in plano, cui inſiſtit, ſpacium aliquod è directo menſoris notum ſit, deprehendere.

PROBLEMA V.



1 QVANDO ſpatium aliquod DE, è directo menſoris à monte vel turri remotum fuerit notum, metiemur ipſam altitudinem FG, è faſtigio G, hac ratione. Inſpiciantur termini D, E, per angulos FGD, FGE, ſiue per Quadrantem pendulum, ſiue per ſtabilem. Et quoniam, poſito ſinu toto GF, Tangentes angulorum obſeruationum ſunt DF, EF, ipſarumque differentia DE, ſpatium propoſitum: Si fiat,

Vt DE, differentia Tangentium angulis obſeruationum debitarum	*ad ſinum totum GF:*	*Ita DE, ſpatium notum*	*ad GF,*

manifeſta erit altitudo GF, quæſita in partibus ſpatii noti DE,

ALITER.

2 PER ſolos ſinus eandem altitudinem GF, adipiſcemur, ſi prius hypotenuſam GD, venabimur, hoc modo.[a] Fiat,

a 10. Trian. rectil.

Vt ſinus anguli DGE, differentiæ angulorum obſeruationum	*ad DE ſpatium cognitum:*	*Ita ſinus anguli E, complementi maioris anguli obſeruationis*	*ad hypotenuſam GD,*

b 10. Trian. rectil. Numerus enim productus dabit hypotenuſam GD, in partibus ſpatii DE, notam. [b] Si ergo rurſus fiat,

Vt ſinus totus anguli recti F,	*ad hypotenuſam GD, proxime inuentam:*	*Ita ſinus anguli D, complementi minoris anguli obſeruationis*	*ad GF, altitudinem,*

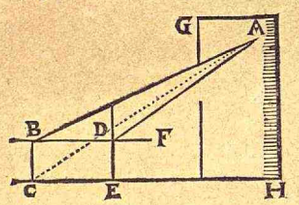
Solutio problematis ſine numeris, producetur altitudo GF, in partibus hypotenuſæ GD, ſiue ſpatii DE, nota.

3 SINE numeris agendum erit, vt in problemate 1. declaratum eſt.

DISTANTIAM ab oculo, vel pede menſoris ad quoduis punctum in aliqua altitudine notatum, per duas ſtationes in plano factas metiri.

PROBLEMA VI.

1 SIT inquirenda diſtantia puncti A, in muro GH, ſiue perpendiculari ad Horizontem, ſiue inclinato, vel etiam in tecto quopiam; ab oculo B, vel pede C, poſita ſtatura menſoris BC. Concipiatur ducta BD, ipſi plano CE parallela, ſitque primo punctum A, altius, quam oculus B. Inſpecto puncto A, notetur angulus ABD, quem latus pinnacidiorum in quadrante pendulo, vel linea fiduciæ in dioptra Quadrantis ſtabilis cum recta BD, facit. Deinde accede verſus punctum A, quotlibet palmis aut pedibus vſque ad D, vt BD, differentia ſtationum nota ſit. Rurſumq; ex D, punctum A, inſpiciatur, notato diligenter angulo ADF, exiſtentque rectæ AB, AD, BD, BC, DE, in eodem plano, in eo videlicet, quod per ſtaturas menſoris BC, DE, & per punctum A, ducitur.[a] Et quia angulus ADF, duobus B, & BAD, eſt æqualis: ſi angulus B, in remotiore ſtatione auferatur ex angulo D, in propinquiore, notus fiet reliquus angulus A. [b] Si igitur fiat,



a 32. primi.

b 10. triangul. rectil.

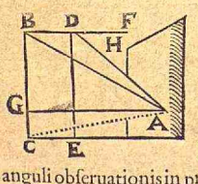
Vt ſinus anguli A, quo angulus minor B, à maiori differt,	*ad BD, differentiam ſtationum:*	*Ita ſinus anguli ADB, qui complementum eſt maioris anguli D, ad duos rectos,*	*ad AB, diſtantiam quæſitam*

reperta erit quæſita diſtantia AB, in partibus differentiæ ſtationum.

QVOD ſi oculus exiſtat in D, & recedatur à puncto D, vſque ad B, inuenietur eadem arte diſtantia DA, ſi loco anguli ADB, ſumatur angulus B, in remotiore ſtatione, vt liquet.[c] Eſt enim vt ſinus anguli A, quo angulus minor B, à maiori ADF, differt ad BD, differentiam ſtationum: ita ſinus anguli B, in remotiori ſtatione ad DA.

c 10. Trian. rectil.

2 DISTANTIA vero à puncto A, ad pedem menſoris C, hoc eſt, recta AC, cognoſcetur per Problema 12. triang. rectil. cap. 3. lib. 1. cum in triangulo obliquangulo ABC, duo latera AB, BC, nota ſint, nimirum diſtantia inuenta, & ſtatura menſoris, comprehendantque angulum ABC, notum, vtpote conflatum ex recto CBD, & angulo obſeruationis ABD.



3 SIT deinde punctum A, in muro HI, infra oculum B. Inſpecto puncto A, obſeruetur angulus CBA, quem latus pinnacidiorum cum perpendiculi filo, vel dioptræ linea fiduciæ cũ BC, facit: Deinde accede verſus A, vſq; ad D, & iterum conſidera angulum EDA: exiſtentq; rectæ AB, AD, BD, BC, DE, in vno eodemq; plano, in eo videlicet, quod per ſtaturas menſoris BC, DE, & per punctum A, ducitur. [d] Et quoniam angulus FDA, complementi anguli obſeruationis in propinquiore ſtatione æqualis eſt duobus DBA, DAB; ſi DBA, angulus complementi anguli remotioris ſtationis demetur ex angulo ADF, complementi anguli ſtationis propinquioris, reliquus fiet notus BAD. [e] Si ergo fiat,

d 32. primi.

e 10. Trian. rectil.

Vt ſinus anguli BAD, differentiæ inter angulos complementorum angulorum obſeruationum	*ad BD, differentiam ſtationum:*	*Ita ſinus anguli ADB, conflati ex recto BDE, & ex angulo obſeruationis ADE, in propinquiore ſtatione*	*ad AB, diſtantiã quæſitã.*

cognita erit diſtantia AB, quam quærimus, in partibus differentiæ ſtationum BD.

QVOD ſi oculus ponatur in D, & recedatur à puncto D, vſque ad B, reperietur eodem modo diſtantia DA, ſi pro angulo BDA, aſſumes angulum DBA, complementi anguli ABC, obſeruationis in remotiore ſtatione, vt manifeſtum eſt. [f] Nam eſt, vt ſinus anguli BAD, differentiæ inter angulos complementorum angulorum obſeruationum, ad BD, differentiam ſtationum: ita ſinus anguli DBA, complementi anguli ABC, in remotiore ſtatione, ad DA.

f 10. triang. rectil.

4 VT autem diſtantia CA, à pede ad punctum A, inueniatur, ita progrediemur. Quoniam in triangulo rectangulo ABG, (ſi ex puncto A, concipiatur ducta ad BC, ſtaturam menſoris perpendicularis AG,) baſis AB, nota eſt per inuentionem, & angulus BAG, notus, quippe cum ſit complementum anguli obſeruationis ABG; [g] Si fiat,

g 2. triang. rectil.

Vt ſinus totus	*ad baſem AB, proxime inuentam:*	*Ita ſinus anguli BAG, complementi anguli obſeruationis,*	*ad BG,*

cognoſcetur BG, in partibus baſis AB, hoc eſt in partibus differentiæ ſtationum BD, in quibus AB, inuenta fuit, Ablata autem BG, ex menſoris ſtatura BC, nota fiet reliqua CG. [h] Item ſi fiat,

h 2. triang. rectil.

Vt ſinus totus	*ad baſem AB, nuper inuentam:*	*Ita ſinus anguli obſeruationis ABG,*	*ad AG,*

nota etiam fiet AG, in partibus eiuſdem baſis AB, vel differentiæ ſtationum BD. Quia ergo in triangulo rectangulo ACG, duo latera AG, GC, per inuentionem nota facta ſunt, [i] cognoſcetur quoque baſis AC, quod eſt propoſitum.

i 3. triang. rectil.

5 MANIFESTVM autem eſt, eodem pacto vtramque diſtantiam AB, AC, reperiri, etiam ſi punctum A, in plano ſit, in quo menſor conſiſtit, nimirum in Horizonte, qui ponatur tranſire per rectam AG, ita vt ſtatura menſoris ſit BG. Immo tunc per vnicam ſtationem vtraque diſtantia AB, AG, reperietur. Nam poſito ſinu toto BG, ſtatura menſoris; AB, ſecans eſt anguli obſeruationis ABG, & AG, Tangens. Quocirca ſi fiat.

Vt BG, ſinus totus	*ad BA, ſecantem anguli obſeruationis ABG, Vel ad GA, Tangentem anguli obſeruationis ABG:*	*Ita BG, ſtatura menſoris*	*ad BA,* / *ad GA,*

vtraque diſtantia & BA, ab oculo B, & GA, à G. pede menſoris cognita fiet.

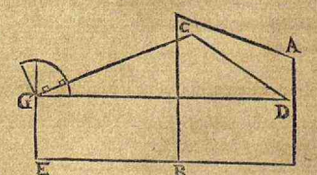
6 IAM vero ſine numeris operabimur, vt in præcedentibus, vt manifeſtum eſt, ſi recte figura conſtruatur, quemadmodum Num. 6. & 8. problematis 1. dictum eſt.

Problemæ quo pacto ſine numeris ſoluendum ſit.

INTERVALLVM inter duo puncta in quolibet plano eleuato, ſiue illud ad Horizontem rectum ſit, ſiue inclinatum, metiri.

PROBLEMA VII.

1 IN plano quolibet eleuato AB, propoſitum ſit interuallum CD, quod ex plano EB, inueſtigandum ſit. Poſito oculo in G, vt ſtatura menſoris ſit, GE, inueſtigetur per præcedens problema 6. vtraq; diſtantia GC, GD, in partibus ſtaturæ menſoris GE, ſiue differentiæ duarum ſtationum, è quibus ipſæ diſtantiæ inueſtigantur. Deinde applicato Quadrante ſtabili ad oculum G, ita vt eius planum per puncta C, D, tranſeat, & vna eius ſemidiameter ad punctum D, vergat, (quod fiet, ſi poſita linea fiduciæ dioptræ ſupra illam ſemidiametrum, punctum D, per foramina pinnacidiorum conſpiciatur) vertatur dioptra, donec per eam punctum C, appareat, arcuſque inter dictam ſemidiametrum, & lineam fiduciæ interceptus notetur, hic enim angulum G, metietur. Quod ſi altera ſemidiameter Quadrantis vltra rectam GC, exiſtat, erit angulus acutus CGD: Si vero altera illa ſemidiameter citra rectam GC, extiterit, dictus angulus erit obtuſus, qui cognoſcetur, ſi ad rectum adiiciatur reliquus angulus inter alteram illam ſemidiametrum, & rectam GC, quem quidem reliquum inueſtigabimus per Quadrãtem, vt de acuto CGD, diximus, ſi videlicet in recta CD, mente notemus punctum, in quod altera illa ſemidiameter incurreret producta. Si namq; tunc ſemidiameter illa rectæ GC, congruat, & dioptra ad illud punctum mente notatum dirigatur, indicabunt gradus inter illam ſemidiametrum, & dioptram prædictum angulum reliquum. Si deniq; altera illa ſemidiameter preciſe in C, tendat angulus CGD, rectus erit. Quia ergo in triangulo GCD, obliquangulo latera nota GC, GD, continent angulum notum G; cognoſcetur latus CD, per problema 12. triang. rectil. c. 3. lib. 1.

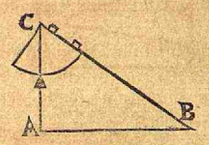


Problematis solutio sine numeris.

2. ABSQVE numeris facile problema soluetur, si fiat angulus G, æqualis ei, qui per Quadrantem obseruatus fuit, & in rectis GC, GD, ex instrumento partium tot particulę sumantur, quot palmi, aut pedes in distantiis GC, GD, inuenti sunt, &c.

LONGITVDINEM lineæ rectæ, quando mensor in vno eius extremo, vel in aliqua altitudine nota, quæ perpendicularis sit in eo extremo ad planum, in quo linea iacet, existens alterum extremum videre potest, per Quadrantem comprehendere.

PROBLEMA VIII.



1 SIT exquirenda longitudo AB, hoc est, distantia inter A, & B, etiamsi puncta intermedia siue propter tumores interiectos, siue propter valles, cerni nequeant, dummodo in extremo A, existens mensor, vel in aliqua altitudine cognita ad planum, in quo linea AB, perpendiculari, ita vt AC, sit vel statura mensoris, vel hasta aliqua erecta, vel turris. Inspecto extremo B, obseruetur angulus C. Et quia posito sinu toto AC, distantia AB, est Tangens anguli obseruati C, si fiat,

Vt sinus totus AC,	*ad AB, tangentem anguli obseruati C.*	*Ita AC, statura mensoris, vel altitudo nota,*	*ad AB, longitudinem.*

[a] 4. Trian. rectil. procreabitur longitudo AB, in partibus altitudinis notæ AC. Quæ per solos sinus etiam producetur, [a] si fiat,

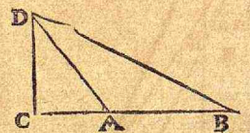
Vt sinus anguli B, complementi anguli C, obseruati	*Ad AC, staturam mensoris, vel altitudinem notam:*	*Ita sinus anguli C, obseruationis*	*ad AB, longitudinem*

Solutio problematis sine numeris.

2 SINE numeris eadem longitudo AB, cognoscetur, vt in præcedentibus dictum est: si videlicet ex instrumento partium accipiatur AC, tot particularum, quot palmi, pedesue in altitudine AC, existunt, constituaturq; angulus obseruationis C, ac tandem ad AC, perpendicularis excitetur AB, &c.

LONGITVDINEM, ad cuius extrema accedere non liceat, dummodo ea appareant, & ipsa longitudo producta ad pedes mensoris pertingat, ex altitudine aliqua nota dimetiri.

PROBLEMA IX.



1 SIT longitudo AB, è directo mensoris in C, existentis, ita vt recta BA, producta transeat per C. Sit quoque CD, vel statura mensoris, vel altitudo quæpiam nota. Si igitur per præcedens problema 8. inquiratur vtraq; longitudo CB, CA, & CA, ex CB, detrahatur, reliqua fiet AB, ac proinde cognita.

ALITER

2 POSITO sinu toto CD, si termini A, B, per angulos CDA, CDB, spectentur, erit CA, Tangens minoris anguli, & CB, maioris, at AB, differentia earum Tangentium. Quare si fiat,

Vt sinus totus CD,	*Ad AB, differentiam Tangentium angulorum obseruationum:*	*Ita CD, altitudo nota*	*Ad AB, longitudinem,*

efficietur longitudo AB, nota in partibus altitudinis notæ CD.

ALITER.

[a] 5 Triang. rectil. 3. PER solos sinus eandem longitudinem AB, cognoscemus: sed prius inuenienda est AD, [a] hac ratione fiat,

Vt sinus anguli CAD, complementi minoris anguli obseruationis	*ad CD, altitudinem notam:*	*Ita sinus totus anguli recti C,*	*ad AD,*

[b] 10. Triã. rectil. Productus enim numerus dabit AD, notam in partibus altitudinis notæ CD. [b] Si ergo rursus fiat,

Vt sinus anguli CBD, complementi maioris anguli obseruationis	*Ad AD, proximè inuentam*	*Ita sinus anguli ADB, differentiæ inter duos angulos obseruatos*	*ad AB, longitudinem,*

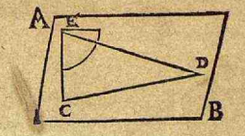
prodibit nota longitudo AB, in partibus rectæ AD, hoc est, altitudinis notæ CD, in quibus recta AD, fuit inuenta.

4 SINE numeris rem perficies, quemadmodum in præcedentibus, vt liquet.

LON-

LONGITVDINEM transuersam in Horizonte, cuius vtrumq; extremum inspici potest, notam efficere.

PROBLEMA X.

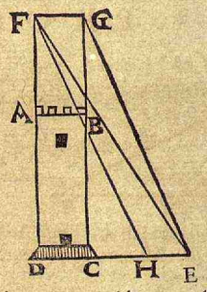


1 SIT planum Horizontis AB, in quo iaceat longitudo CD, in transuersum, pes autem mensoris sit in E, ita vt recta DC, per pedes mensoris in E, non transeat. Quando namque longitudo DC, è directo mensoris sita est, inuestigabitur ea per problema 9. præcedens. Vt ergo transuersa longitudo CD, nota efficiatur, inuestiganda primum erit vtriusque puncti extremi CD, distantia à pede mensoris E, & quidem per vnicam stationem in E, factam, vt problemate 6. Numer. 5. dictum est. Deinde per quadrantem cum dioptra angulus CED, exquirendus in plano Horizontis, quod fiet, si Quadrantis planum erectum transeat semel per puncta E, C, & iterum per puncta E, D, vt designari possint partes rectarum EC, ED. Quadrantis enim vno latere incumbente rectæ EC, dioptra vero rectæ ED, si angulus est acutus, indicabit arcus inter illud latus, ac dioptram angulum CED. Quod si alterum Quadrantis latus rectæ ED, congruet, erit angulus CED, rectus: Si vero recta ED, vltra alterum latus Quadrantis extiterit, dictus angulus obtusus erit: qui cognitus erit, si recto angulo addatur reliquus inter alterum latus & rectam ED: Qui quidem reliquus angulus per Quadrantem explorabitur, vt de acuto diximus in problemate 7. Atque ita habebimus triangulum ECD, cuius duo latera nota sunt EC, ED, angulumque notum comprehendunt CED. [a] Igitur & tertium latus CD, cognitum erit. [a] 12. trian. rectil.

2 QVO pacto autem sine ope numerorum problema perficiendum sit, traditum est in problemate 7. Numero 2.

LONGITVDINEM in horizonte inter turrim aliquam, & aliud quodpiam signum, ex turri per duas stationes in fastigio factas: vel in duabus fenestris, quarum vna sit sub altera ad perpendiculum, quando spacium inter illas fenestras notum est, etiamsi totius turris altitudo ignota sit, dimetiri. Atque hinc obiter altitudinem turris patefacere.

PROBLEMA XI.



1 QVAMVIS problema hoc solutum iam sit in problemate 3. & 4. occasione altitudinis inquirendæ, libet tamen idem hic per se, & paulo aliter expedire. Sit ergo turris ABCD, & longitudo proposita CE: statura autem mensoris BG, vel AF. Inspecto extremo E, in prima statione per angulum CGE, & in secunda per angulum DFE, ducatur FH, ipsi GE, parallela. Et quia in triangulis FDH, GCE, anguli D, C, recti sunt, [b] & H, E, æquales, [c] latusque FD, lateri GC, æquale: [d] erunt quoque & anguli G, DFH, æquales, & latera DH, CE. Posito autem sinu toto FD, erit DE, Tangens maioris anguli obseruationis DFE, & DH, Tangens anguli DFH, hoc est, anguli æqualis G, in prima statione obseruati: ac proinde HE, differentia erit earum Tangentium, [e] quæ quidem æqualis est differentiæ stationum FG, vel AB, vel DC. Si igitur fiat,

[b] 29. prim.
[c] 34. primi.
[d] 26. primi.

Vt HE, differentia Tangentium angulorum obseruationum	*Ad CE, Tangentem minoris anguli obseruationis CGE,*	*Ita HE, vel FG, differentia stationum*	*ad CE, longitudinem,*

[e] 34. primi.

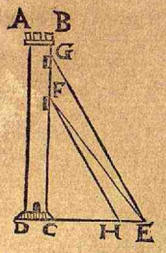
gignetur longitudo optata CE, in partibus differentiæ stationum HE, vel FG, &c. Quod si rursus fiat,

Vt HE, differentia Tangentiũ angulorũ obseruationũ	*Ad FD, sinum totũ*	*Ita HE, vel FG, differẽtia stationum*	*ad FD,*

inuenietur recta FD, à qua si tollatur statura mensoris AF, reliqua fiet altitudo turris AD.

2 SI Diam ex duabus fenestris F, G, inspiciatur extremum E, per angulos CFE, CGE, ducaturq; FH, ipsi GE, parallela. [f] Quoniam igitur angulus CFH, angulo CGE, æqualis est: si ponatur sinus totus CE, erit CG, Tangens anguli CEG, complementi minoris anguli obseruationis G, & CF, Tangens anguli CEF, complementi maioris anguli obseruationis CFE: at FG, differentia stationum, hoc est, interuallum inter fenestras, differentia erit dictarum Tangentium. [f] 29. primi.

Quam ob rem si fiat,



Vt FG, differentia Tangentium complementorum angulorum obseruationum, *Ad CE, sinum totum* *Ita FG, differentia stationum inter fenestras,* *ad CE, longitudinem propositam,*

cognita erit longitudo CE, desiderata. Et si rursum fiat,

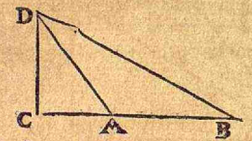
Vt FG, differentia Tangentium complementorum angulorum obseruationum *ad GC, Tangentem complementi minoris anguli obseruati* *Ita FG, differentia stationum inter fenestras* *ad GC,*

inuenta erit altitudo GC, à superiori fenestra ad basem, in partibus differentiæ stationum, cui si addatur portio GB, à superiori fenestra ad fastigium vsque, tota turris altitudo BC, non ignorabitur.

3. SINE auxilio numerorum procedendum est, vt in superioribus.

LONGITVDINEM rectæ è directo mensoris positæ, cuius extremum vtrumque, vel alterum non appareat, nisi ad dextram, vel sinistram accedat mensor, per quadrantem comprehendere.

PROBLEMA XII.



1 SIT longitudo AB, & mensor in extremo A, constitutus videre non possit alterum extremum, nisi ad dextram sinistramue recedat vsque ad D, punctum, è quo vtrumque extremum cerni possit. Erit igitur longitudo AB, mensori in D, existenti posita in transuersum. Quare ea per problema 10. inuestigabitur.

2. EODEM modo, si mensor existat in C, è directo longitudinis, sed vel neutrum extremum, vel alterum duntaxat intueri possit, longitudinem AB, venabimur. Si namque ex C, ad sinistram, vel dextram procedemus donec in D, vtrumque extremum videamus, inuenietur transuersa longitudo AB, per problema 10. vt prius. Neque vero refert, siue per angulum rectum BCD, recedatur in latus, siue per angulum obtusum BAD, &c.

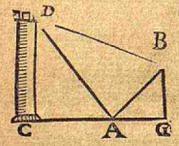
3. OPERATIO sine numeris instituenda est, vt in superioribus.

4. QVANDO mensor in A, existens videre potest extremum B, inuestigabitur longitudo AB, per problema 8.

SI autem è directo longitudinis existat in C, & vtrumque extremum cernat, explorabitur per problema 9. eadem longitudo AB.

DISTANTIAM alicuius signi in Horizonte positi, à summitate turris, vel muri alicuius, licet ad ipsum signum accessus non pateat, per quadrantem colligere.

PROBLEMA XIII.



1. IN Horizontis plano punctum A, distet à summitate D, alicuius altitudinis CD, per rectam AD, quam metiri iubemur. Vbicunque oculus mensoris existat, nimirũ in B, vt sit statura mensoris BG, inuestigentur per problema 6. distantiæ punctorum A, D, ab oculo mensoris B.

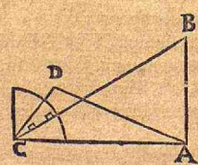
Deinde angulus exploretur ABD, quem nobis præbebit Quadrans cum dioptra, si ad oculum ita applicetur, vt eius planum per tria puncta B, A, D, transeat, posito centro in B; atque vnum eius latus rectæ BA, incumbat, dioptra vero ad punctum D, dirigatur &c. Itaque cum in triangulo BAD, duo latera nota BA, BD, angulum notum contineant B; [a] cognoscetur quoque latus AD.

a 10. Trian. rectil.

2. QVA ratione eadem distantia AD, exquirenda sit absque numeris, docuimus Num. 5. problematis 7.

ALTITVDINEM inaccessibilem, cuius basis non videatur, & ad quam per nullum spatium secundum lineam rectam accedere possimus, aut recedere, vt duæ stationes fieri possint, sed solum ad dextram, sinistramue ad locum è quo eius basis appareat, per Quadrantem explorare.

PROBLEMA XIV.



1 SIT altitudo AB, ad quam ex C, loco mensoris non liceat accedere, aut ab ea recedere secundum lineam rectã, sed solum in latus, verbi gratia vsque ad D, vnde basem videre possimus. Inquiratur per problema 10. longitudo transuersa AC, ex loco D: inspiciaturque vertex B, ex C, per angulum ACB. Et quia posito sinu toto AC, altitudo AB, Tangens est anguli obseruationis ACB, [a] si fiat

a 4. Trian. rectil.

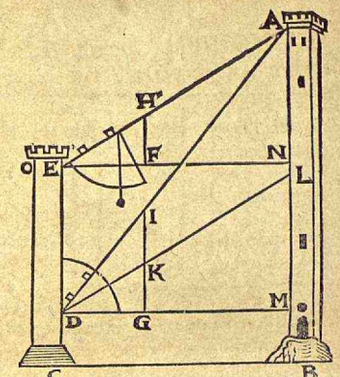
Vt sinus totus AC, *ad AB, Tangentem anguli obseruati ACB:* *Ita longitudo AC, per problema 10. inuenta* *Ad AB, altitudinem.*

prodibit nota altitudo AB, in partibus, in quibus AC, inuenta fuit.

2 NON erit autem difficile problema hoc sine numerorum auxilio exequi, si superiora præcepta consulantur.

ALTITVDINEM inaccessibilem, quando neque distantia à loco mensoris ad eius basem nota est, neque è directo ipsius duæ stationes in plano fieri possunt, neque denique basis appareat, per Quadrantem notam reddere. Atque hinc obiter ipsam quoque distantiam elicere.

PROBLEMA XV.



1 SIT altitudo AB, locus mensoris C, distantia CB, incognita: basis B, non appareat, & à loco C, non liceat accedere ad AB. neq; recedere, vt duæ stationes fiant in plano. Erigatur hasta CE, si non præsto sit turris aliqua CO, & statura mensoris sit CD. Sumpta deinde portione hastæ DE, notarum partium, concipiantur ductæ DM, EN, ipsi CB, parallelæ, obseruenturq; per Quadrantem anguli ADM, AEN. Sumptis quoq; rectis æqualibus EF, DG, pro sinubus totis, erigantur perpendiculares FH, GI, pro Tangentibus angulorum obseruationum. Sumpta item AL, æquali ipsi DE, ducatur recta DL, [a] quæ parallela erit ipsi EA, secabitque GI, in K. [b] Quoniam vero angulus DKG, angulo DLB, & hic angulo EAB, & hic angulo EHF, æqualis est; erit angulus DKG, angulo EHF, æqualis: Est autem & rectus G, recto F, æqualis, & latus DG, lateri EF, æquale; [c] erunt quoq; latera GK, FH, æqualia, & anguli D, E, æquales: ideoque IK, differentia erit inter Tangentes, GI, GK, angulorum GDI, GDK, siue FEH. [d] Et quia est, vt IK, ad KG, ita AL, ad LM; erit per contrariam compositionem à nobis in scholio propos. 18. lib. 5. demonstratam, ita quoque IK, ad IG, vt AL, hoc est, vt ED, differentia stationum, ad altitudinem AM. Igitur si fiat,

a 33. primi.
b 29. prim.
c 26. primi.
d schol. 4. sexti.

Vt IK, differentia Tangentium *ad IG, Tangentem maiorem:* *Ita AL, vel ED, differentia stationum* *ad AM, altitudinem,*

gignetur altitudo AM, cui si apponatur statura mensoris MB, tota altitudo AB, nota efficietur. [e] Iam si fiat,

e 4. sexti.

Vt GI, sinus totus *ad GD, Tangentem complementi maioris anguli obseruationis:* *Ita altitudo inuenta AM,* *ad MD, distantiam,*

inuenta erit distantia DM, vel CB.

2. PER solos sinus idem problema conficiemus, si prius inuestigetur hypotenusa AD, hoc modo. [f] Fiat,

f 10. Trian. rectil.

Vt sinus anguli ADL, differentiæ inter angulos obseruationum ADM, LDM, *ad AL, hoc est, ad DE, differentiam stationum:* *Ita sinus anguli ALD, qui relinquitur, si DLM, complementum minoris anguli LDM, obseruati ex duobus rectis subtrahatur.* *ad AD,*

Nam productus numerus offeret hypotenusam AD. [g] Si ergo rursus fiat,

g 10. Tria. rectil.

Vt sinus totus anguli recti M, *ad hypotenusam AD, inuentam:* *Ita sinus maioris anguli obseruationis ADM,* *ad AM,*

procreabitur altitudo AM, &c. [h] Si autem fiat,

h 10. Trian. rectil.

Vt sinus totus anguli recti M, *ad hypotenusam AD, proxime inuentam,* *Ita sinus anguli DAM, complementi maioris anguli obseruationis,* *ad DM,*

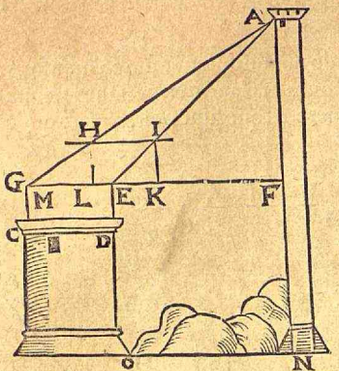
efficietur distantia DN, cognita.

3 SI sine numeris problema soluendum est, recurrendum erit ad superiora, præsertim ad Num. 6, 8. & 7. problematis 1.

ALTITVDINEM maiorem ex minori cognita, per duas stationes in summitate, vel in duabus fenestris factas, etiamsi solum maioris altitudinis vertex cernatur, per Quadrantem adinuenire. Atque hinc distantiam quoque inter altitudines colligere.

PRO-

PROBLEMA XVI.



1 MAIOR altitudo sit AN, minor turris CO, cognita, ex qua solum cacumen A, non autem basis N, appareat. Fiant in summitate duæ stationes in C,D, mensorisque statura sit CG, vel DE, & ad AN, intelligatur ducta perpendicularis GEF. Atque inspecto cacumine A, obseruentur anguli AEF, AGF. Reliqua fiant, vt in 2. problemate. Si ergo fiat, sicut in eo problemate demonstrauimus,

Vt GM, differentia Tangentium GL, EK, angulorum H,I, qui complementa sunt angulorum obseruationum, positis sinubus totis HL, IK. — *ad GE, differentiam stationum:* — *Ita LH, sinus totus* — *ad FA,*

Inuenietur altitudo AF, cui si adiiciatur FN, conflata ex altitudine turris CO, & statura mensoris, tota maior altitudo AN, nota euadet. Item si fiat,

Vt GM, differentiæ Tangentium earundem — *ad GE, differentiam stationum:* — *Ita GL, Tangens complementi minoris anguli obseruationis* — *ad GF,*

procreabitur distantia GF, à qua si demptur latitudo turris CO, reliqua erit distantia inter duas turres.

HÆC omnia in 2. problemate demonstrauimus: & ob hanc causam eisdem prorsus literis hic vsi sumus, quas ibi vsurpauimus, vt demonstratio ex illo loco in hunc transferri possit.

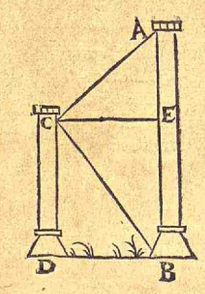
2. QVANDO in summitate turris minoris fieri duæ stationes nequeunt, eligantur duæ fenestræ, in quibus duæ stationes fiant. Vt in figura præcedentis problematis 15. in minori turri CE, deligantur duæ fenestræ D, E, & reliqua fiant, vt in hasta CE. Solum pro statura mensoris ad altitudinem inuentam AM, adiicienda est portio turris inter inferiorem fenestram D, & basem C, vt tota maior altitudo AB, nota efficiatur.

3 SINE numeris nihil noui præcipimus, sed ad superiora lectorem amandamus.

4 QVO etiam pacto problema hoc per solos sinus possit effici, docuimus probl. 2. & 15.

ALTITVDINEM maiorem ex minori incognita, dummodo basis maioris cerni possit, per Quadrantem perscrutari.

PROBLEMA XVII.



1 SIT maior altitudo AB, & minor CD, incognita possitq; basis maioris B, videri ex minori altitudine. Primum per duas stationes in summitate turris minoris, vel in duabus fenestris, inquiratur tam altitudo turris minoris CD, quam distantia DB, vt problemate 11. vel etiam 3. & 4. traditum est. Nam tunc ex minori altitudine nota CD, maior AB, explorabitur per ea, quæ in antecedente problemate 16. scripsimus.

2 AT ex altitudine CD, & distantia DB, cognitis discemus altitudinem maiorem AB, per solos sinus, hoc modo. Ex aliqua fenestra C, minoris altitudinis inspiciantur extrema A, B, maioris altitudinis per angulos ACE, BCD, (ducta prius CE, ipsi DB, parallela, vel ad vtramq; altitudinem perpendiculari.)[a] Deinde fiat,

a 10. Trian. rectil.

Vt sinus anguli CBD, complementi illius, quo basis inspicitur — *ad inuentam altitudinem CD:* — *Ita sinus totus anguli recti D,* — *ad BC,*

Vel

Vt sinus anguli BCD, quo basis inspicitur, — *ad inuentam distantiam BD:* — *Ita sinus totus anguli recti D,* — *ad BC,*

b 10. trian. rectil. vtroque enim modo cognita erit hypotenusa BC. [b] Si ergo rursus fiat, *Vt si-*

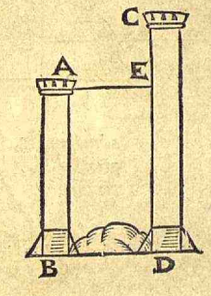
Vt sinus anguli A, complementi illius quo cacumen inspicitur, — *ad inuentam hypotenusam BC:* — *Ita sinus anguli ACB, conflati ex complemento anguli, quo basem intuemur, & ex angulo, quo fastigium cernitur.* — *ad AB,*

manifestabitur altitudo maior AB.

3 DE solutione problematis sine numeris nihil noui hic præcipimus, sed ea ex superioribus petenda est.

ALTITVDINEM minorem ex maiori cognita, licet basis minoris non cerni possit, ope Quadrantis peruestigare. Atque hinc distantiam quoque inter altitudines duas eruere.

PROBLEMA XVIII.



1 MINOR altitudo AB, ex maiore CD, cognita proponatur addiscenda, etiamsi basis B, non cernatur. Concipiatur ducta recta AE, ipsi BD, parallela, vt ED, minori altitudini AB, sit æqualis. Si igitur ex duabus stationibus in summitate maioris altitudinis CD, factis, per problema 3. vel ex duabus fenestris, per problema 4. inuestigetur tam altitudo CE, quam distantia AF, inspecto cacumine A, ac si esset signum aliquod in Horizonte AE, visum, & CE, ex toto altitudine CD, auferatur, reliqua ED, hoc est, minor altitudo fiet nota. Distantia autem AE, inuenta quæsitæ BD, est æqualis: ac proinde DB, cognita erit.

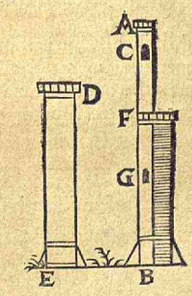
ALTITVDINEM minorem ex maiori incognita, dummodo basis minoris videri possit, per Quadrantem explorare. Atque hinc distantiam quoque inter duas altitudines conicere.

PROBLEMA XIX.

1 REPETATVR figura præcedentis problematis. Et quia basis B, minoris altitudinis ex maiore appareret; si punctum B, ex duabus stationibus in summitate maioris altitudinis CD, factis inspiciatur, reperietur per problema 3. tam altitudo maior CD, quam distantia BD. Quod etiam efficies per problema 4. si punctum B, ex duabus fenestris maioris altitudinis CD, inspiciatur. Cognita ergo altitudine maiori CD, inuenietur minor altitudo AB, vt in præcedenti problemate traditum est. Cum igitur & distantia BD, sit explorata, patet solutio problematis propositi.

PORTIONEM altitudinis maioris ex minore altitudine, & minoris portionem ex maiori cognoscere per Quadrantem.

PROBLEMA XX.



1 SIT portio AC, maioris altitudinis AB, exquirenda ex minore altitudine DE. Item portio FG, minoris altitudinis FB, ex altitudine maiore DE. Si DE, altitudo minor est proportione CB, inuestigetur tam altitudo maior AB, quam CB, ex minore altitudine DE, per problema 16. vel 17. prout videlicet DE, cognita fuerit aut incognita. Nam CB, ablata ex AB, notam relinquet portionem AC, quæsitam.

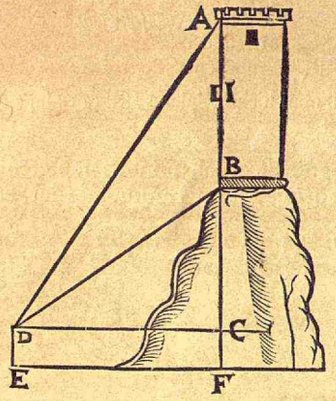
2 SI vero DE, maior est portione FB, explorandaque sit portio AF; inquirenda quidem erit maior altitudo AB, ex minore DE, per problema 16 vel 17. At vero altitudo minor FB, ex maiore DE, per problema 18. vel 19. exploranda erit. Nam rursus FB, detracta ex AB, notam relinquet portionem AF.

3 NON secus per problema 18. vel 19. indaganda erit vtraque altitudo minor FB, GB, ex maiore DE, vt illarum differentia FG, quæ quæritur, colligatur nota.

ALTITVDINEM, cuius basis imposita sit alteri altitudini, & vtraque illius extremitas cerni possit, etiamsi infimum punctum alterius, cui imponitur, lateat, & eiusdem puncti infima distantia à loco mensoris cognita non sit, per Quadrantem ex valle, aut ex plano Horizontis explorare.

PRO-

PROBLEMA XXI.



1 HVIVSCEMODI altitudo eſt turris ſupra montem poſita, & portio alicuius ædificii inter duas feneſtras, vel duo ſigna, quorum alterum altero ſuperius eſt. Sit igitur ſupra montem altitudo turris AB, propoſita. Ex aliquo loco E, in planitie, aut valle, vnde vtrumque extremum A, B, videatur, obſeruentur per Quadrantem anguli ADC, BDC, quos radij DA, DB, cum recta DC, quæ ex D, ad AB, producta intra montem eſt perpendicularis: ita vt ſtatura menſoris ſit DE. Deinde per problema 6. inueſtigetur longitudo vtriuſque radij DA, DB.[a] Nam ſi fiat in triangulo ABD,

a 10. Trian. rectil.

Vt ſinus anguli BAD, qui complementum eſt maioris anguli ADC, obſeruati,	*ad radium DB, proxime inuentum:*	*Ita ſinus anguli ADB, qui differẽtia eſt angulorum obſeruationum ADC, BDC,*	*ad AB, altitudinem*

b 10. trian. rectil. inuenta erit altitudo AB, quæſita in partibus, in quibus cognitus eſt radius DB.[b] Sic etiam, ſi fiat,

Vt ſinus anguli ABD, vel (quod idem eſt) anguli DBC, qui cõplementum eſt minoris anguli obſeruati BDC,	*ad radium DA, proxime inuentum:*	*Ita ſinus anguli ADB, differentiæ angulorum obſeruatorum ADC, BDC,*	*ad AB, altitudinem.*

prodibit rurſus altitudo quæſita AB, in partibus radii inuenti DA.

ALITER.

2 PER problema 2. vel 15. inueſtigetur tam altitudo inacceſſibilis AC, quam BC, ſecluſa menſoris ſtatura CF. Altitudo namque BC, ex altitudine AC, detracta notam relinquet altitudinem AB, quæ quæritur.

ALITER

c 4. Trian. rectil. 3 INVENTA diſtantia DC, per ea, quæ in problemate 1. & 2. tradidimus,[c] ſi fiat,

Vt ſinus totus DC,	*ad diſtantiam cognitam DC,*	*Ita AC. Tangens maioris anguli obſeruati ADC,*	*ad AC,*

d 4. trian. rectil. reperietur altitudo maior AC, in partibus diſtantiæ inuentæ DC.[d] Et ſi rurſus fiat,

Vt ſinus totus DC,	*ad diſtantiam inuentam DC,*	*Ita BC, Tangens minoris anguli obſeruati BDC,*	*ad BC,*

cognita fiet altitudo minor BC, in partibus eiuſdem diſtantiæ inuentæ DC, quæ dempta ex maiore altitudine AC, notam relinquet altitudinem turris BA, quæſitam.

ATQVE hæc ratio commodiſſima eſt, quando in turri aliqua, vel ædificio, cuius diſtantia à menſore cognita ſit, metiendum eſt interuallum perpendicularem inter duas feneſtras.

ALITER

4 INVENTA rurſum diſtantia DC, per ea, quæ in problemate 1. & 2. ſcripſimus; detrahatur Tangens BC, (poſito ſinu toto DC,) minoris anguli obſeruati ADC, vt nota remaneat AB, differentia dictarum Tangentium. Nam ſi fiat.

Vt ſinus totus DC,	*ad diſtantiam inuentam DC,*	*ita AB, differentia Tangentium AC, BC,*	*ad AB, altitudinem,*

procreabitur altitudo quæſita AB, in partibus diſtantiæ inuentæ DC.

ALITER

5 INVENTA per problema 2. vel 15. altitudine montis BC, obſeruentur anguli BDC, ADC, per radios DB, DA. Poſito namque ſinu toto DC, ſi fiat,

Vt BC, Tangens minoris anguli obſeruati BDC,	*ad BC, altitudinem inuentam;*	*Ita AB, differentia Tangentium AC, CB, angulorum obſeruatorum ADC, BDC.*	*ad AB,*

prodi-

prodibit rurſus altitudo nota AB, quam quærimus.

SCHOLIVM.

ITAQVE ſi AB, portio ſuperior totius alicuius altitudinis AC, deſideretur, inueſtiganda erit per Probl. 2. vel 5. tam tota altitudo AC, quam eius inferior portio BC. Earum enim differentia notam dabit ſuperiorem portionem AB.

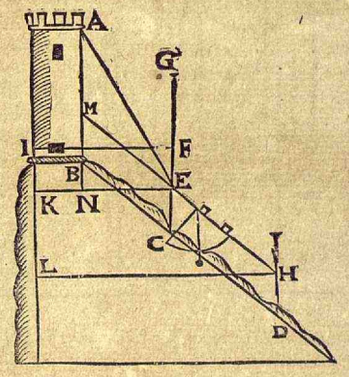
SI autem media aliqua portio IB, cognoſcenda eſt, coniicienda rurſus erit vtraque altitudo IC, BC, vt earum differentia IB, nota reddatur.

SI denique inferior pars BC, proponitur inquirenda, fiet id per probl. 2. vel 15.

DISTANTIAM accliuem montis à loco menſoris vſque ad baſem altitudinis monti impoſitæ, etiam non viſam, vna cum ipſa altitudine, quando menſor in aſcenſu montis conſiſtit, prope verum efficere cognitam, beneficio Quadrantis.

PROBLEMA XXII.

1 SIT turris AB, monti impoſita, in cuius aſcenſu ſeu latere menſor conſiſtat in C, ex quo loco baſem turris videre non poſſit. Erigatur haſta aliqua CG, ad Horizontem, non autem ad latus montis, perpendicularis, ſitque menſoris ſtatura CE. Cogitetur ducta EK, ad altitudinem perpendicularis: Et inſpecto cacumine A, per angulum AEK, fiat alia ſtatio ſuperior in F, ductaq; FI, ad altitudinem perpendiculari, inſpiciatur idem cacumen A, per angulum AFI. [a] Et quia angulus AFG, duobus angulis FEA, FAE, eſt æqualis: ſi demat AEF, complementum maioris anguli AEK, in prima ſtatione obſeruati, reliquus fiet angulus EAF.



a 32. primi.

[b] Igitur ſi fiat,

b 10. trian. rectil.

Vt ſinus anguli EAF, differentiæ complementorum angulorũ obſeruationum	*ad EF, differentiam ſtationum:*	*Ita ſinus anguli AFE, conſtati ex recto EFI, & minore angulo AFI, in ſecunda ſtatione obſeruati,*	*ad AE, hypotenuſam.*

efficietur nota hypotenuſa AE. Poſt hæc erigatur alius baculus DH, ad Horizontem rectus, ſumptaque menſoris ſtatura DH, ipſi CE, æquali, & ducta recta HL, ad altitudinem perpẽdiculari, inſpiciatur punctum E, per angulum EHL, & per radium HEM,[c] qui ipſi BCD, lateri montis parallelus erit. Concipienda enim ſunt tria puncta B, C, D, in vna recta iacere, ac ſi DC, producta ad baſem turris perueniret.[d] Quia vero angulus EHL, angulo MEK, æqualis eſt: ſi hic ex maiori angulo obſeruato AEN, in prima ſtatione demat, reliquus fiet angulus AEM. Eſt autem & angulus EAN, cognitus, quippe cum ſit complementorum maioris anguli obſeruati AEN. Igitur & AME, reliquus duorum rectorum cognitus erit: qui quidem etiam relinquitur, ſi complementum anguli MHL, in ſtatione D, obſeruati ex duobus rectis detrahatur.[e] Igitur ſi fiat,

c 33. prim. d 29. prim.

e 10. trian. rectil.

Vt ſinus anguli AME, qui relinquitur, ſi complementum poſtremi anguli obſeruati MHL, ex duobus rectis dematur	*ad hypotenuſam AE, nuper inuentam:*	*Ita ſinus anguli EAN, complementi maioris anguli obſeruati AEN,*	*ad ME,*

inuenta erit recta EM, hoc eſt, diſtantia quæſita CB,[f] Et ſi rurſum fiat,

f 10. trian. rectil.

Vt ſinus eiuſdem anguli AME,	*ad eandem hypotenuſam AE, nuper inuentam:*	*Ita ſinus anguli AEM, qui relinquitur, ſi angulus poſtremo loco obſeruatus MHL, vel MEK, ex angulo maiori obſeruato AEK, detrahatur,*	*ad AM,*

producetur AM, cui ſi addatur menſoris ſtatura MB, tota altitudo AB, cognita erit.

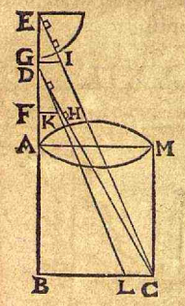
DANDA autem erit opera diligenter, vt tria puncta B, C, D, in vna recta iaceant, hoc eſt, vt recta ab vltima ſtatione D, per primam C, ducta per baſem B, tranſeat, quod plus minus iudicio ſenſuum aſſequemur. Nam per ea, quæ dicta ſunt hoc loco ſolum reperitur diſtantia à loco C, vſque ad punctum altitudinis, in quod recta

DC, protracta incidit, & altitudo ab A, vsque ad idem punctum, quod non multum à puncto B, distabit, si diligentia adhibeatur in stationibus C, D, captandis. Propter hanc causam in propositione diximus (prope verum efficere cognitam) quia neque distantia CB, neque altitudo AB, præcise cognoscitur, nisi quando tria puncta B, C, D, in recta linea iacent.

2 VT sine numerorum auxilio problema efficias, recurrendum erit ad superiora.

PROFVNDITATEM putei, vel ædificii cuiuscunque ad perpendiculum erecti, si modo angulus fundi, vel signum aliquod in fundo positum conspiciatur, per Quadrantem reperire.

PROBLEMA XXIII.



1 HOC nihil est aliud, nisi turrim ex eius vertice, quando in Horizonte signum aliquod apparet, per duas stationes in hasta aliqua factas metiri, vt prob. 4. factum est. Operationem ergo eius problematis hic repetemus. Sit puteus, seu ædificium erectum ABCM, cuius angulus C, in fundo, vel signũ C, in fundo positũ conspici possit. Erecta hasta AE, in orificio putei, vel summitate ædificii, fiant duæ stationes oculi mensoris in D, E, inspiciaturq; punctum C, per radios DC, EC, faciẽtes angulos BDC, BEC: Sumptis deinde DF, EG, æqualibus pro sinubus totis, ducantur ad EB, perpendiculares FH, GI, pro Tangentibus angulorum BDC, BEC, obseruatorum. Ducta quoq; DL, ipsi EC, parallela secante FH, in K, vt KH, differentia sit Tangentium, quemadmodum problemate 4. demonstrauimus. Si igitur, vt ibi, fiat hic,

Vt KH, *differentia inter Tangentes angulorum obseruatorum*	*ad* FK, *vel ad* GI, *Tangentem minorem:*	*ita* DE, *differentia stationum, hoc est, spatium inter oculos, vel angulos obseruationum,*	*ad* DB,

prodibit recta DB, nota, vt problemate 4. ostendimus: ex qua si subtrahatur segmentum hastæ AD, inter orificium, & oculum in prima statione, reliqua fiet profunditas, siue altitudo putei, vel ædificij AB.

ALITER

2 POSITO sinu toto BC, fiat.

Vt DE, *differentia Tangentium* BD, BE, *quæ complementis angulorum obseruationũ debẽtur,*	*ad* DB, *Tangentem minorem*	*Ita* DE, *differentia stationum oculorum*	*ad* DB,

Nam numerus procreatus notam exhibebit eandem rectam DB, &c.

ALITER

3 SI per solos sinus operari lubeat, ita agendum erit. [a] Quoniam angulus maior obseruatus BDC, duobus angulis E, DCE, æqualis est; si angulus E, minor obseruatus tollatur ex maiore BDC, notus remanebit angulus DCE, differentia angulorum obseruatorum.

a 32. primi.

[b] Igitur si fiat,

b 10. trian. rectil.

Vt sinus anguli DCE, *differentiæ angulorum obseruatorum*	*ad* DE, *differentiam stationum oculorum.*	*Ita sinus anguli* E, *minoris obseruati*	*ad* DC,

[c] 10. trian. rectil. prosiliet nota hypotenusa DC. [c] Quapropter si rursum fiat,

Vt sinus totus anguli recti B,	*ad hypotenusam* DC, *proxime inuentam:*	*Ita sinus anguli* BCD, *complementi maioris anguli obseruati*	*ad* DB,

euadet iterum cognita recta DC, &c.

4 IAM vero si latitudo orificii AM, vel fundi BC, cognita fuerit. (Non erit autem difficile eam aliqua mensura nota metiri) facilius in cognitionem altitudinis, profunditatisue AB, veniemus, per vnicam videlicet stationem in D, factam, hoc modo. Fiat,

Vt si-

Vt sinus totus CB,	*ad* BD, *Tangentem anguli* BCD, *complementi anguli obseruationis.*	*ita latitudo cognita* CB,	*ad* DB,

Numerus enim procreatus offeret DB, notam, vt supra, &c.

VEL per solos sinus, [a] si fiat,

[a] 10. trian. rectil.

Vt sinus anguli BDC, *obseruationis*	*ad latitudinem cognitam* BC:	*Ita sinus anguli* BCD, *complementi anguli obseruationis.*	*ad* DB,

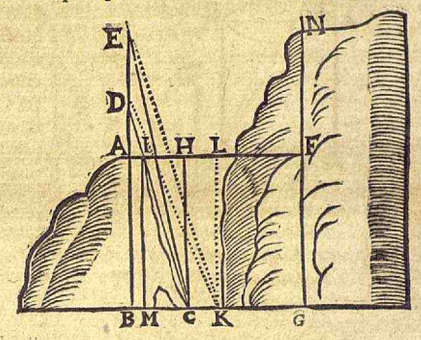
inuenietur rursus DB, &c.

5 VT idem assequaris sine auxilio numerorum, consule ea, quæ problemate 4. Num. 4. scripsimus.

PROFVNDITATEM vallis, eiusdemque descensum obliquum, si non sit valde inæqualis, eiusque terminus, vel aliquod in ea signum conspici possis, per Quadrantem scrutari.

PROBLEMA XXIV.

1 HOC etiam nihil aliud est, nisi altitudinem quampiam ex eius summo fastigio per duas stationes dimetiri, vt problemate 4. ostensum est. Sit enim vallis inter duos montes AB, FG, posita, & terminus ipsius C, ex monte AB, possit conspici. Erecta hasta aliqua AE, fiant in D, & E, duæ stationes, obseruenturque anguli D, & E, inspecto termino C, per radios DC, EC. Intelligatur autem recta EA, vsque ad basem montis extensa in B: & recta excurrens AF, ipsi BG, parallela, vel ad EB, perpendicularis: & deniq; CH, ipsi AB, parallela, [a] quæ altitudini AB, æqualis erit, ita vt AB, vel HC, sit profunditas vallis ab A, vsque ad basem montis, & IC, eius descensus obliquus. Liquido autem constat, profunditatem AB, vel CH, exquiri posse, vt problemate 4. altitudo turris AB, ex duabus stationibus in hasta AE, factis, vel in duabus fenestris, vel certe, vt in præcedenti problemate profunditas putei AB, inuenta fuit.



a 34. primi.

DESCENSVS autem obliquus IC, ita notus euadet. Quoniam, vt in antecedente problemate monstratum est, angulus DCE, differentia est angulorum BDC, BEC, obseruatorum: [b] si fiat,

b 10. trian. rectil.

Vt sinus anguli DCE, *differentiæ inter angulos obseruatos*	*ad* DE, *differentiam stationum oculorum:*	*Ita sinus anguli* E, *minoris obseruati*	*ad* DC,

cognita fiet recta DC, ex qua si detrahatur DI, (quam facile ab oculo vsque ad rectam AI, mensurare poteris, cum sit exigua) notus remanebit descensus obliquus IC.

2 QVOD si terminus C, in fundo cerni nequeat, inspiciendum erit ex D, & E, aliquod aliud signum K, in valle, & obseruandi anguli BDK, BEK, per radios DK, EK. Ex his enim rursus profunditas AB, vel KL, deprehendetur, vt in problemate 4. docuimus.

QVIN etiam, si in plano vallis commode duæ stationes fieri possint: cognosci ex illis poterit altitudo montis AB, vel IM, per ea, quæ in problem. 2. scripsimus: descensus vero obliquus IC, hoc est, interuallum inter I, & C, ex iis, quæ in probl. 7. tradita sunt.

3 EANDEM denique profunditatem CH, perscrutari licebit ex altiore monte NG, dummodo infimus terminus C, minoris montis ex cacumine N, appareat, vel aliquod aliud signum in valle; non aliter, quam in problemate 18. vel 19. altudinem minorem ex maiori incognita indagare docuimus. Nam hic maior altitudo est NG, & minor CH, cuius terminum C, ex N, cerni posse statuimus.

4 ABSQVE numerorum multiplicatione, ac diuisione res peragetur, vt in antecedentibus dictum est

FINIS LIBRI SECVNDI.

GEOMETRIÆ PRACTICÆ

LIBER III.

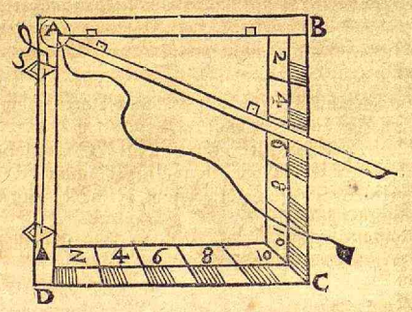
Earundem linearum rectarum dimensionem per Quadratum Geometricum exequens.

QVONIAM *dimensio rectarum linearum per Quadrantem Astronomicum superiori lib. exposita requirit tabulas Sinuum, Tangentium, & seeantium, non semper autem eiusmodi tabulas ad manum habere possumus, immo neque omnes in illis versati sunt, atque exercitati: propositum nobis tertio hoc libro est, lineas rectas, longitudines videlicet, latitudines, altitudines, & profunditates dimetiri per Quadratum Geometricum, vbi prædictis tabulis non indigemus. sed omnia per vmbram rectam, & versam; vt vocant, expediuntur. Qua tamen in re non nihil ab aliis scriptoribus dissidebimus, quippe cum aliter tam vmbram rectam, quam versam in partes diuisuri simus, quam ab illis fieri solet, vt nimirum per nostram partitionem expeditius dimensiones perficiantur, quod prudens Lector facile iudicabit, si nostram hanc diuisionis rationem cum aliorum partitione contulerit. Sed principio Quadratum Geometricum construendum est, explicandumq; quo pacto tam in Quadrato stabili, quam in pendulo vtraq; vmbra, recta videlicet, ac versa considerari debeat. Neq; enim semper eundem situm prædictæ vmbræ in instrumento seruant, sed pro varietate vsuum non raro eum permutare solent, vt ex iis, quæ sequuntur, liquido constabit.*

QVADRATI Geometrici constructio.

Compositio Quadrati Geometrici.

1 EX quauis materia solida & dura conficiatur quadratum ABCD, siue solidum totum, siue excauatum: vel potius ex quatuor regulis æqualibus AB, BC, CD, DA, ita compactum, vt omnes in vno eodemque plano existant. Deinde in duabus regulis BC, CD, ducãtur tres parallelæ extremitatibus quadrati pro partibus & numeris vtriusque vmbrę designandis, vt in figura apparet. Latus BC, vmbræ rectæ, & CD, vmbræ versæ destinatur à Geometris: Vtrumq; autem in 12. partes æquales partiri solent omnes, qui de vsu Quadrati Geometrici scripserunt: Et si capacitas instrumenti permittit, singulas partes in 60. subdiuidunt, vt tota vmbra partes 720. complectatur, vel in 100. vt partes 1200. in vtraque vmbra existant. Ego vtramque vmbram in 10. partes duntaxat æquales diuido, nisi instrumentum sit tantæ magnitudinis, vt commode vtraque recta BC, CD, in 100. aut 1000. partes secari possit, subdiuisis videlicet singulis decimis partibus in 10. vel 100. particulas. Figura porro ex vtraq; vmbra constans dici solet à Geometris Scala altimetra.



Vmbra recta, & versa in quadrato qua, & in quot partes à Geometris vtraque secetur.

In quot partes vtraq; vmbra in nostro quadrato diuidatur.

Scala altimetra quid

Quare nostra diuisio vmbra præferatur aliorum diuisioni.

2 ANTEPONO autem diuisioni consuetæ in 12. vel 720 vel 1200. partes diuisionẽ nostram in partes 10. vel 100. vel 1000. æquales, propterea quod, si instrumentum propter paruitatem sectum sit tantummodo in 10. partes, facili admodum negotio cognoscere possumus, quot centesimæ, vel etiam millesimæ partes in qualibet particula cuiuscunque partis decimæ rectarum BC, CD, assignata comprehendantur: non secus ac si vtraque recta in 100. vel 1000. partes secta foret, vt Num. 14. ca. 2. lib. 1. copiose exposuimus. Huc accedit, quod in dimetiendis lineis per Quadratum Geometricum fieri semper debeat multiplicatio, aut diuisio per omnes partes lateris BC, vel

BC, vel CD: Manifestum autem est, faciliorem esse multiplicationem, diuisionemue per 10. aut 100. vel 1000. quam per 12. aut 720. vel 1200. cum illa fiat per solam appositionem, vel detractionem 0. vel 00. vel 000. vt in nostra Arithmetica practica declarauimus.

INVENIO quidem latus quadrati à doctissimo Io. Antonio Magino diuisum quoq; esse, & quidem optimo consilio, in 100. partes æquales; quamuis ab eo regula non tradatur, qua cognoscendum sit, quot partes millesimæ in quauis particula vnius centesimæ comprehendantur, quod tamen omnino necessarium est, vt dimensiones, ac stellarum altitudines exquisitè obseruentur: præsertim si propter instrumenti paruitatem latus in 10. partes duntaxat commode possit diuidi. Id quod per nostram doctrinam, vt diximus, sine magno labore effici potest.

Quadratũ pendulum, ac stabile.

3 POST hæc è centro A, procedat filum cum perpendiculo, aut certe regula tenuis, cum linea fiduciæ, quæ pendens libere moueatur, vt lib. 1. cap. 2. Num. 6. tradidimus: & in latere AB, duo pinnacidia affigantur, de quibus lib. 1. cap. 2. Num. 5. dictum est, si quadratum in suo vsu debeat esse pendulum. Nam si illud stabile esse velis, affigenda est circa centrum A, dioptra, hoc est, regula cum linea fiduciæ, ac duobus pinnacidiis, eodem artificio constructis, vt libere possit circumduci, & in omni situ firmari, vt loco supra citato in Quadrante stabili faciendum esse præcepimus.

POSTREMO iuxta latus AD, in plano quadrati (Nam si hoc fieret extra, prope crassitiem instrumenti, non posset quadratum in plano Horizontis locari erectum supra latus AD, quod tamen vt fiat, non raro vsus quadrati postulat:) apponantur duæ tabellæ perforatæ cum filo, & perpendiculo, vt eius beneficio dignoscere possis, num instrumentum rectum sit ad Horizontem, nec ne, quod omnino necessarium est.

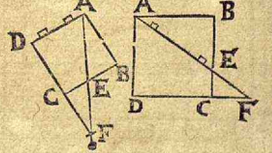
Vmbra recta, & versa, quo pacto in vtroq; quadrato cognoscenda sit.

4 SED doceamus, quem situm vttaque vmbra in vsu quadrati habeat. Res enim hæc non parui momenti est, vt in dimensionibus nulla confusio inter vmbras oriatur. In quadrato ergo pendulo vmbra versa opponitur semper lateri pinnacidiorum: recta autem cum eodem latere concurrit in puncto à centro A, remotiori, vt in figura latus vmbræ rectæ est BC, versæ autem CD. At in quadrato stabili, si metienda sit altitudo, & centrum A, inferiorem obtineat locum, in eoque oculus ponatur, latus vmbræ rectæ supremam occupabit sedem; latus vero vmbræ versæ vergere debebit versus ipsam altitudinẽ; ita vt tunc basis instrumẽti sit AD, quo pacto iterũ vmbra recta est BC, & versa CD. Si autã centrũ A, superiorẽ locũ possideat, & oculus in extremitate dioptræ existat, (qd etiã fieri potest) latus vmbræ rectæ erit basis CD, & latus vmbræ versæ BC, prope oculum, & ab altitudine metiẽda remotius. Si autẽ longitudo metienda proponatur, centrumq; A, in superiori loco situ fit, & in eo oculus collocetur, erit quoq; basis CD, latus vmbræ rectæ, latus autẽ BC, vmbræ versæ deputabitur, quod quidem versus longitudinem metiendam vergere debebit, & longius ab oculo abesse. At vero si centrum A, ponatur in loco inferiori, ita vt basis sit AD, oculus autem in extremitate dioptræ consistat, (quod etiam fieri potest, præsertim si quadratum in sublimi fuerit positum, vt in monte, vel turri aliqua) latus vmbræ rectæ erit BC, basi AD, oppositum, vmbræ vero versæ latus erit CD, quod scilicet longius à longitudine metienda recedit. In vtroque porro quadrato centrum A, per diametrum opponitur puncto, in quo vmbra recta cum versa concurrit: & in stabili vmbra recta perpetuo vel supremum locum occupat, quando videlicet centrum A, infimam sedem tenet; vel infimum locum, qnando scilicet centrum A, in superiori loco existit, vt ex dictis liquet. Hæc non negligenter consideranda sunt, ne in vario instrumenti vsu vmbram rectam pro versa accipias, aut contra; quandoquidem pro diuerso situ quadrati stabilis tam latus BC, quam CD, modo vmbræ rectæ, modo versæ munus obire potest, vt diximus.

5 QVAMVIS autem vel sola vmbra recta, vel versa satis sit ad altitudines, longitudines, profunditatesque perueſtigandas, vt ex sequentibus fiet manifestum: vtraque tamen assumitur à Geometris, eo quod interdum vmbra recta excedit latus BC, nimirum quando filum perpendiculi, aut linea fiduciæ secat latus CD: Tunc enim necessario latus BC, produci debet, vt secari possit. Item sæpe numero vmbra versa superat latus CD, quãdo videlicet filum perpendiculi, aut linea fiduciæ interfecat latus BC: Tunc enim necessario latus DC, productum versus C, secabitur, vt perspicuum est. Ne ergo cogamur vel latus BC, vel CD, producere, assumenda est vmbra quidem versa, quando recta latus BC, excedit: recta autem, quando versa suo latere CD, maior est.

Gnomon medio loco proportionalis est inter vmbrã rectam, & versam.

6 EST autem perpetuo latus quadrati, quod Gnomonem appellant, medio loco proportionale inter vmbram rectam ac versam. Secet namque in quadrato pendulo filum perpendiculi, vel in stabili linea fiduciæ, latus vmbræ BC, in E, & latus vmbræ DC, productum in F. Erunt igitur triangula ABE, ADF, æquiangula, cum anguli B, D, recti sint, [a] & tam alterni BAE, DFA, quam BEA, DAF, æquales. [b] Quamobrẽ erit vt BE, vmbra abscissa ad gnomonem BA, ita gnomon AD, ad vmbram abscissam DF: hoc est, gnomon BA, vel AD, medio loco est proportionalis inter duas vmbras BE, DF, quarum vna recta est, & altera versa.



a 29. pr im.

b 4. sexti

Reductio vmbra recta ad versam, & contra.

7 HINC facilis est reductio vnius vmbræ ad aliam, quod non raro vsu venit. Nam si gnomon complectens partes 1000. (in tot namque partes latus quadrati diuisum concipere lubet) in se multiplicetur, & productus numerus quadratus 1000000. lateris AB, per alterutram vmbram diuidatur, indicabit Quotiens partes alterius vmbræ: hoc est, si fiat,

Vt alterutra vmbra ad gnomonem ita gnomon ad alteram vmbram

hoc est, si quadratus numerus lateris quadrati, vel gnomonis, videlicet 1000000. per alterutrã vmbram diuidatur. Verbi gratia si ponatur BE, vmbra recta partium 700. diuidaturq; numerus quadratus 1000000. lateris AB, per 700. producetur vmbra versa DF, partium $1428\frac{4}{7}$. Sic etiam, si BE, statuatur vmbra versa partium 700. reperietur vmbra recta DF, partium $1428\frac{4}{7}$. Quod si vna vmbra sit 400. erit altera 2500. & sic de cæteris. Sed iam ad vsum vtriusque quadrati accedamus.

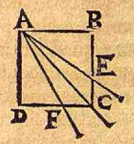
ALTITVDINEM Solis, vt ſtellæ cuiuſuis per quadratum Geometricum obſeruare.

PROBLEMA I.

Altitudo ſolis, vel ſtellæ, quo pacto per quadratũ cognoſcatur.

1. PRÆPARETVR baſis plano Horizonti æquidiſtans, vt ſupra illam Quadratum ſtabile erectum, ſit ad Horizontem perpendiculare. Eleuetur deinde pendulum quadratum, centro A, ad Solem, vel ſtellam verſo, ita vt eius planum per centrum Solis, aut ſtellæ tranſeat, donec radius Solis per duo foramina pinnacidiorum tranſire deprehendatur: vel radius viſualis per eadem foramina pinnacidiorum ſtellam videat. Idem que fiat cum quadrato ſtabili, collocando nimirum eius latus AD, vel CD, ſupra baſem præparatam, ipſumque circumducendo, ita vt eius planum per centrum Solis aut ſtellæ incedat; ac denique eleuando dioptram, donec radius Solis per foramina pinnacidiorum tranſeat, vel radius viſualis per eadem foramina ſtellam conſpiciat. Quo peracto, conſideretur ſumma diligentia angulus, quem filum perpendiculi, vel linea fiduciæ in dioptra cum proximo latere quadrati conſtituit, inueſtigando magna cum cura, & diligentia per ea quæ lib. 1. cap. 2. Num. 14. tradidimus, quot partes milleſimæ ex vmbra ſiue recta, ſiue verſa abſciſſæ ſint à filo perpendiculi, vel linea fiduciæ. Ille enim angulus, ſi quidem vmbra recta interſecetur, (quæ in quadrato ſtabili vel ſupremum, vel infimum occupat: In pendulo vero cum latere pinnacidiorum coniungitur, vt ſupra diximus) dabit, vt Numero 2. demonſtrabimus, complementum altitudinis Solis aut ſtellæ: Si vero vmbram verſam filum, aut dioptra interſecet, ipſemet angulus altitudinem exhibebit. Quantitatem porro huius anguli ita cognoſcemus. Sit quadratum ſiue pendulum ſiue ſtabile (eadem enim eſt in vtroque ratio) ABCD, abſciſſaque ſit vmbra recta BE, quæ in partibus milleſimis lateris BC, reperietur, vt cap. 2. Num. 14. lib. 1. docuimus, etiamſi latus ipſum ſit ſolum in 10. vel 100. partes diuiſum: quæ quidem vmbra BE, ſtatuatur, verbi gratia, eſſe partium 850. Quia ergo duo latera AB, BE, trianguli rectanguli ABE, nota ſunt, cum AB, ſit 1000. & BE, 850. [a] ſi fiat,

Complemẽtum altitudinis.



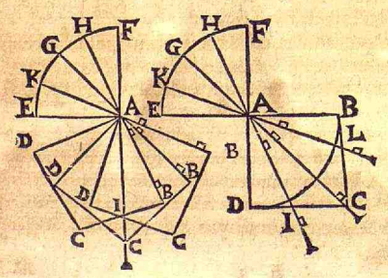
[a] 8. triang. rectil.

Vt latus quadrati AB, 1000.	*ad ſinum totum 100000.*	*Ita latus, vel vmbra BE, 850.*	*ad Tangentem anguli BAE,*

(quod quidem factum erit, ſi ad latus BE, hoc eſt, ad 850. duæ cifræ apponãtur) reperietur Tangés anguli BAE, 85000. quæ in tabula Tangentium non reperietur; ſed proxime minor eſt 84956. cui reſpondent gradus 40. min. 21. Et quia differentia inter Tangentem inuentam 85000. & 84956. in tabula ſumptam, eſt 44. Differentia autem inter duas Tangentes proximas 84956. & 85006. eſt 50. cui debetur 1. minutum, ſiue Sec. 60. propterea quod poſteriori Tangenti 85006. reſpondet vnum minutum amplius, quam Tangenti priori 84956. reperiemus per regulam trium, quot ſecunda differentiæ 44. congruant; ſi dicamus. Si differẽtia 50. poſcit, ſec. 60. quot ſecunda poſcit differentia 44? inueniemuſque ſec. 52 ¾. hoc eſt, ſec. 53. fere. Angulus ergo BAE, continet grad. 40. Min. 21. ſec. 53. paulo minus. Complementum igitur, nimirum grad. 49. Min. 38. ſec. 7. fere, oſtendet altitudinem Solis, & ſtellæ. Et ſi vmbra DF, eſt verſa partium quoq; 850. erit ipſemet angulus DAF, inuentus grad. 40. Min. 21. ſec. 53. altitudo Solis, & ſtellæ. Atque hoc modo ſi diligenter partes vmbræ explorabimus reſpectu lateris BC, vel CD, 1000. quemadmodum lib. 1. cap. 2. Num. 14. traditum eſt, inuenietur ſemper altitudo Solis, aut ſtellæ in grad. Min. & ſec. Sed quia moleſtum eſt, ac laborioſum, per differentias Tangentium Secunda inquirere, ſatis erit Tangentem anguli inuentam in tabula quærere, & ſi quidem reperta fuerit, accipere gradus, & minuta reſpondentia; ſi vero non fuerit inuenta, ſumere Tangentem, vel minorem, vel maiorem, quæ nimirum minus ab inuenta, differat, &c. Hac ratione ſumenda erit in noſtro exemplo Tangens 85006. cui reſpondent grad. 40. Min. 22. complementum autem erit grad. 49. Min. 38. veluti prius, ſolum deſunt ſec. 7. quæ nullius ſunt momenti. Vt autem ſtudioſos moleſtia hac ſupputandi liberem, conſtruxi ſequentem tabulam pro ſingulis partibus milleſimis vtriuſque vmbræ: In qua ſi centenæ in vertice, & reliquæ vnitates in latere ſumantur, illico in angulo communi reperientur gradus, ac Min. pro angulo quæſito: qui videlicet altitudinem Solis aut ſtellæ indicabit, ſi partes milleſimæ ad vmbram verſam ſpectent: ſi autem partes ad vmbram rectam pertinent, Complementum eius anguli altitudinem Solis ſtellæue oſtendet, vt paulo infra demonſtrabimus. Componetur autem tabula hæc ſi ſingulis partibus milleſimis vmbræ apponantur ad dextram quinque cifræ, & ex toto illo numero abijciantur tres cifræ: quod idem eſt, ac ſi apponantur tantum duæ cifræ, vt Tangentes angulorum habeantur. Ita factum eſſe vides ſupra. Nam ad partes vmbræ 850. adiectæ ſunt duæ cifræ, vt Tangens fieret 85000. Hac enim ratione fit multiplicatio vmbræ abſciſſæ per ſinum totum 100000, & diuiſio per 1000. vt in Arithmetica noſtra practica ſcripſimus. Quod ſi quatuor cifræ partibus milleſimis apponantur, habentur eadem ratione Tangentes poſito ſinu toto 10000000.

Vſus tabulæ gnomonicæ ſequentis.

Compoſitio tabulæ gnomonicæ facillima.



[b] 27. tertij.

2 VERVM demonſtremus prius, angulum, quem filum perpendiculi, vel linea fiduciæ ſecans vmbram rectam cum proximo latere facit, in vtroque Quadrato eſſe complementum altitudinis Solis, ſeu ſtellæ; illum vero, quem filum aut fiduciæ linea vmbram verſam ſecans efficit, exhibere ipſam altitudinem. Sit ergo primum quadratum pendulum ABCD, & Quadrans circuli verticalis per ſtellam ducti AEF, ita vt AE, Horizonti æquidiſtet: ſintque tres altitudines ſtellæ EG, gr. 45. EH, maior & EK, minor. Quando ergo latus pinnacidiorum AB, cum radio GA, coincidit, erit angulus altitudinis ſemirectus GAE, [a] qui æqualis eſt ſuo complemẽto FAG, propter æquales arcus EG, FG,

EG, FG, [c] hoc eſt, angulo quem filum cum latere AB, facit. Cum ergo diameter quadrati [d] ſecet angulos eius rectos bifariam, in ſemirectos nimirum, tranſibit filum per angulum C: Ac proinde tam CAB, quam CAD, æqualis tunc erit angulo altitudinis EAG. Quando autem pinnacidiorũ latus cum radio HA, coincidit, erit angulus altitudinis EAH, ſemirecto maior, & angulus cõplemẽti FAH, ſemirecto minor, [e] cui æqualis eſt angulus IAB: ac propterea filũ vmbrã rectã interſecabit, facietque angulũ complementi altitudinis IAB, ſemirecto minorem. Quando deniq; latus AB, idem efficitur cũ radio KA, erit angulus altitudinis EAK, ſemirecto minor, & angulus cõplementi FAK, ſemirecto maior, [f] cui æqualis eſt angulus IAB: ac proinde filũ vmbram verſam abrumpet, cõſtituetque angulũ altitudinis IAD, ſemirecto minorẽ. Idem prorſus cernitur in quadrato ſtabili ABCD, in quo vmbræ rectæ latus eſt infimũ CD, cum centrum A, ſupremũ occupet locũ, vt ſupra in conſtructione Quadrati Num. 4. dictũ eſt. Vbi rurſus perſpicitur, quando altitudo EG, eſt gr. 45. radium GA, cadere in angulũ oppoſitũ C, ac proinde tam angulum CAB, quam CAD, æqualem eſſe angulo altitudinis, nimirum ſemirectum. Quando autem altitudo EH, maior eſt, quam grad. 45. angulum IAD, quem linea fiduciæ AI, vmbram rectam auferens DI, cum latere AD, facit, [g] æqualem eſſe angulo FAH, qui complementum eſt anguli altitudinis EAH. Quando denique altitudo EK, minor eſt, quam grad. 45. angulum IAB, quem linea fiduciæ AI, vmbram verſam BI, aſcindens cum latere AB, conſtituit, [h] æqualem eſſe angulo ipſi altitudinis EAK: quæ omnia demonſtranda erant. Sed ecce tibi tabulam, de qua dixi, continentem gradus ac minuta angulorum, quos filum perpendiculi, vel linea fiduciæ in omnibus partibus milleſimis vtriuſque vmbræ cum proximo latere quadrati efficit. In qua vides, angulum ſub parte 800. in vertice ſumpta, & è regione partis 50. continere gradus 40. Min. 22. fere, vt ſupra diximus: ac tantus erit angulus altitudinis, ſi partes 850. ſpectent ad vmbram verſam: eius vero complementum grad. 49. Min. 38. fere altitudinem exhibebit, ſi dictæ partes ex vmbra recta abſciſſæ fuerint.

Filum perpendiculi ſecans vmbram rectæ facit angulum cõplementi altitudinis ſecans vero vmbram verſam angulum conſtituit ipſius altitudinis.

[c] 15. primi. [d] ſchol. 34. primi. [e] 15. primi. [f] 15. primi. [g] 15. primi. [h] 15. primi.

Tabula porro hæc dici poteſt Gnomonica, quod in quadrato ſtabili dicti anguli in tabula comprehenſi efficiantur à gnomone AD, vel AB, cum linea fiduciæ, vt patet.

Tabula gnomonica cur ſic dicatur.

SEQVITVR TABVLA Gnomonica.

Tabula Gnomonica.

	0		100		200		300		400		500		600		700		800		900	
	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M
0	0	0	5	43	11	19	16	42	21	48	26	34	30	58	35	0	38	40	41	59
1	0	3	5	46	11	22	16	45	21	51	26	37	31	0	35	2	38	42	42	1
2	0	7	5	49	11	25	16	48	21	54	26	39	31	3	35	4	38	44	42	3
3	0	10	5	53	11	29	16	51	21	57	26	42	31	5	35	6	38	46	42	5
4	0	14	5	56	11	32	16	55	22	0	26	45	31	8	35	9	39	48	24	7
5	0	17	6	0	11	35	16	58	22	3	26	48	31	10	35	11	38	50	24	9
6	0	21	6	3	11	38	17	1	22	6	26	50	31	13	35	13	38	52	24	11
7	0	24	6	6	11	42	17	4	22	9	26	53	31	15	35	16	38	54	24	12
8	0	28	6	10	11	45	17	7	22	12	26	56	31	18	35	18	38	56	24	14
9	0	31	6	13	11	48	17	10	22	15	26	59	31	20	35	20	38	58	24	16
10	0	34	6	17	11	52	17	13	22	18	27	1	31	23	35	22	39	0	42	18
11	0	38	6	20	11	55	17	17	22	21	27	4	31	26	35	25	39	3	41	20
12	0	41	6	23	11	58	17	20	22	24	27	7	31	29	35	27	39	5	42	22
13	0	45	6	27	12	1	17	23	22	26	27	9	31	31	35	29	39	7	42	24
14	0	48	6	30	12	5	17	26	22	29	27	12	31	34	55	32	39	9	42	26
15	0	52	6	34	12	8	17	29	22	32	27	15	31	36	35	34	39	11	42	28
16	0	55	6	37	12	11	17	32	22	35	27	18	31	38	35	36	39	13	42	29
17	0	58	6	40	12	15	17	35	22	38	27	20	31	40	35	38	39	15	42	31
18	1	2	6	44	12	18	17	38	22	41	27	23	31	43	35	41	39	17	42	33
19	1	5	6	57	12	21	17	42	22	44	27	26	31	45	35	43	39	19	42	35
20	1	9	6	51	12	24	17	45	22	47	27	28	31	48	35	45	39	21	42	37
21	1	12	6	54	12	28	17	48	22	50	27	31	31	50	35	48	39	23	42	39
22	1	16	6	57	12	31	17	51	22	53	27	34	31	53	35	50	39	25	42	41
23	1	19	7	1	12	34	17	54	22	56	27	37	31	55	35	52	39	27	42	42
24	1	22	7	4	12	38	17	57	22	59	27	39	31	58	35	54	39	29	42	44
25	1	26	7	8	12	41	18	0	23	2	27	42	32	0	35	57	39	31	42	46
26	1	29	7	11	12	44	18	3	23	4	27	45	32	3	35	59	39	33	42	48
27	1	33	7	14	12	47	18	6	23	7	27	47	32	5	36	1	39	35	42	50
28	1	36	7	18	12	51	18	10	23	10	27	50	32	8	36	3	39	37	42	52
29	1	40	7	21	12	54	18	13	23	13	27	53	32	10	36	6	39	40	42	54
30	1	43	7	24	12	57	18	16	23	16	27	55	32	13	36	8	39	42	42	55
31	1	47	7	28	13	0	18	19	23	19	27	58	32	15	36	10	39	44	42	57
32	1	50	7	31	13	4	18	22	23	22	28	1	32	18	36	12	38	46	42	59
33	1	53	7	35	13	7	18	25	23	25	28	3	32	20	36	14	39	48	43	1
34	1	57	7	38	13	10	18	28	23	28	28	6	32	22	36	17	39	50	43	3
35	2	0	7	41	13	13	18	31	23	31	28	9	32	25	36	19	39	52	43	5
36	2	4	7	45	13	17	18	34	23	33	28	11	32	27	36	21	39	54	43	6
37	2	7	7	48	13	20	18	37	23	36	28	14	32	30	36	23	39	56	43	8
38	2	11	7	51	23	23	18	41	23	39	28	17	32	32	36	26	39	58	43	10
39	2	14	7	55	13	27	18	44	23	42	28	19	32	35	36	28	40	0	43	12
40	2	17	7	58	13	30	18	47	23	45	28	22	32	37	36	30	40	2	43	14
41	2	21	8	2	13	33	18	50	23	48	28	25	32	40	36	32	40	4	43	16
42	2	24	8	5	13	36	18	53	23	51	28	27	32	42	36	35	40	6	43	17
43	2	28	8	8	13	40	18	56	23	54	20	30	32	44	36	37	40	8	43	19
44	2	31	8	12	13	43	18	59	23	56	28	33	32	47	36	39	40	10	43	21
45	2	35	8	15	13	46	19	2	23	59	28	35	32	49	36	41	40	12	43	23
46	2	38	8	18	13	49	19	5	24	2	28	38	32	52	36	43	40	14	43	25
47	2	41	8	22	13	52	19	8	24	5	28	41	32	54	36	46	40	16	43	26
48	2	45	8	25	13	56	19	11	24	8	28	43	32	57	36	48	40	18	43	28
49	2	48	8	28	13	59	19	14	24	11	28	46	32	59	36	50	40	20	43	30
50	2	52	8	32	14	2	19	17	24	14	28	49	33	1	36	52	40	22	43	32

Tabula Gnomonica.

	0		100		200		300		400		500		600		700		800		900	
	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M
51	2	55	8	35	14	5	19	20	24	17	28	51	33	4	36	54	40	24	43	34
52	2	59	8	39	14	9	19	24	24	19	28	54	33	6	36	57	40	26	43	35
53	3	2	8	42	14	12	19	27	24	22	28	57	33	9	36	59	40	28	43	37
54	3	5	8	45	14	15	19	30	24	25	28	59	33	11	37	1	40	30	43	39
55	3	9	8	49	14	18	19	33	24	28	29	2	33	13	37	3	40	32	43	41
56	3	12	8	52	14	22	19	36	24	31	29	4	33	16	37	5	40	34	43	43
57	3	16	8	55	14	25	19	39	24	34	29	7	33	18	37	8	40	36	43	44
58	3	19	8	59	14	28	19	42	24	36	29	10	33	21	37	10	40	38	43	46
59	3	23	9	2	14	31	19	45	24	39	29	12	33	23	37	12	40	40	43	48
60	3	26	9	5	14	34	19	48	24	42	29	15	33	25	37	14	40	42	43	50
61	3	29	9	9	14	38	19	51	24	45	29	18	33	28	37	16	40	44	43	52
62	3	33	9	12	14	41	19	54	24	48	29	20	33	30	37	18	40	46	43	53
63	3	36	9	15	14	44	19	57	24	51	29	23	33	33	37	21	40	48	43	55
64	3	40	6	19	14	47	20	0	24	53	29	25	33	35	37	23	40	50	43	57
65	3	43	6	22	14	51	20	3	24	56	29	28	33	37	37	25	40	52	43	59
66	3	47	9	26	14	54	20	6	24	59	29	31	33	40	37	27	40	54	44	1
67	3	50	9	29	14	57	20	9	25	2	29	33	33	42	37	29	40	56	44	2
68	3	53	9	32	15	0	20	12	25	5	29	36	33	45	37	31	40	57	44	4
69	3	57	9	36	15	3	20	15	25	8	29	38	33	47	37	34	40	59	44	6
70	4	0	9	39	15	7	20	18	25	10	29	41	33	49	37	36	41	1	44	8
71	4	4	9	42	15	10	20	21	25	13	29	44	33	52	37	38	41	3	44	9
72	4	7	9	46	15	13	20	24	25	16	29	46	33	54	37	40	41	5	44	11
73	4	11	9	49	15	16	20	27	25	19	29	49	33	56	37	42	41	7	44	13
74	4	14	9	52	15	19	20	30	25	22	29	51	33	59	37	44	41	9	44	15
75	4	17	9	56	15	23	20	33	25	24	29	54	34	1	37	47	41	11	44	16
76	4	21	9	59	15	26	20	36	25	27	29	57	34	4	37	49	41	13	44	18
77	4	24	10	2	15	29	20	39	25	30	29	59	34	6	37	51	41	15	44	20
78	4	28	10	6	15	32	20	42	25	33	30	2	34	8	37	53	41	17	44	22
79	4	31	10	9	15	35	20	45	25	36	30	4	34	11	37	55	41	19	44	24
80	4	34	10	12	15	39	20	48	25	38	30	7	34	13	37	57	41	21	44	25
81	4	38	10	16	15	42	20	51	25	41	30	9	34	15	37	59	41	23	44	27
82	4	41	10	19	15	45	20	54	25	44	30	12	34	18	38	2	41	25	44	29
83	4	45	10	22	15	48	20	57	25	47	30	15	34	20	38	4	41	27	44	31
84	4	48	10	26	15	51	20	0	25	50	30	17	34	22	38	6	41	29	44	32
85	4	52	10	29	15	54	21	3	25	57	30	20	34	25	38	8	41	31	44	34
86	4	55	10	32	15	58	21	6	25	55	30	22	34	27	38	10	41	32	44	36
87	4	58	10	36	16	1	21	9	25	58	30	25	34	29	38	12	41	34	44	37
88	4	2	10	39	16	4	21	12	26	1	30	27	34	32	38	14	41	36	44	39
89	5	5	10	42	16	7	21	15	26	4	30	30	34	34	38	16	41	38	44	41
90	5	9	10	45	16	10	21	18	26	6	30	32	34	36	38	19	41	40	44	43
91	5	12	10	49	16	14	21	21	26	9	30	35	34	39	38	21	41	42	44	44
92	5	15	10	52	16	17	21	24	26	12	30	38	34	41	38	23	41	44	44	46
93	5	19	10	55	16	20	21	27	26	15	30	40	34	43	38	25	41	46	44	48
94	5	22	10	59	16	23	21	30	26	17	30	43	34	46	38	27	41	48	44	50
95	5	26	11	2	16	26	21	33	26	20	30	45	34	48	38	29	41	50	44	51
96	5	29	11	5	16	29	21	36	26	23	30	48	34	50	38	31	41	52	44	53
97	5	32	11	9	16	32	21	39	26	26	30	50	34	53	38	33	41	54	44	55
98	5	36	11	12	16	36	21	42	26	28	30	53	34	55	38	35	41	55	44	57
99	5	39	11	15	16	39	21	45	26	31	30	55	34	57	38	37	41	57	44	58
100	5	43	11	19	16	4221	48	26	34	30	58	35	0	38	40	41	59	45	0	

3 SIMILEM tabulam gnomonicam composuit quoque Georgius Purbachius in suo quadrato Geometrico, posito latere partium 1200. eamque ad secunda extendit: quod etiam fecit Io. Antonius Maginus, constituto quadrati latere partium 1000. quod quidem serius animaduerti. Incidi enim casu quodam in eam cum hanc meam pene absolueram, alioquin hoc supputandi labore supersedissem, tabulamque Magini huc transtulissem. Itaque si quis in altitudinibus astrorum desideret etiam secunda, petere ea debebit ex Magini tabula: quæ sane fideliter, & accurate ab eo supputata est, velcerte per calculum eadē elicere, vt supra Nu. 1. docuimus in hoc problem. Sed meo iudicio contenti esse possumus hac nostra, quæ ad Minuta solum vltra gradus progreditur. In qua, si eam cum illa Magini conferre quis volet, deprehendet, in nostra Minutis graduum additum esse semper vnum minutum, quando in ea reperiuntur plura secunda, quam 30. Sed, vt verum fatear, neque nostra, neque illa Magini omnino necessaria est, cum ipsemet partes millesimæ lateris quadrati, si apponantur duæ cifræ, sint tāgentes altitudinum respectu sinus totius 100000. & cædem, si addantur quatuor cifræ, Tangentes easdem, posito sinu toto 10000000. exhibeant: ac proinde ex tabula Tangentium altitudines excerpi possint cuicunq; parti millesimæ congruentes, si ei prius adiungantur duæ, aut quatuor cifræ, vt supra ad finem Numer. 1. ostendimus. Quia tamen molestia non caret, per Tangentes hac ratione formatas ex tabula Tangentium angulos altitudinum eruere, quod raro admodum Tangentes illæ in tabula præcise reperiantur, ac propterea pro illis accipiendæ sint vel proxime minores, vel maiores, illæ videlicet, quæ paucioribus vnitatibus ab inuentis differunt: non abs re fuerit, vel tabulam hanc nostram gnomonicam, vel illam Magini, si secunda etiam desiderentur, adscíscere.

Tabulam gnomonicā non esse absolute necessariam.

Quo pacto partes millesimæ lateris Quadrati offerant tangentes, posito sinu toto 100000. vel 10000000.

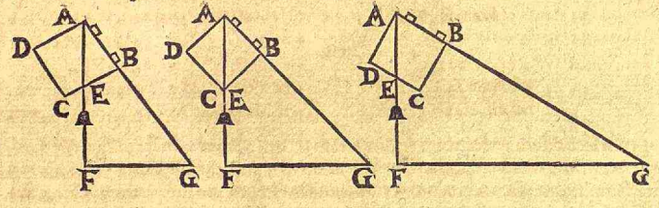
4 QVAMVIS autem tabula Gnomonica per solas partes millesimas integras progrediatur; tamen si quando ex doctrina cap. 2. Numer. 14. lib. 1. tradita vltra millesimas integras supersit adhuc aliqua particula, non magnus error in altitudinibus astrorum obseruandis committi potest. Cum enim anguli in tabula crescant ordine per tria duntaxat minuta, vel duo, vel vnum, non fiet error nisi vnius aut alterius minuti, etiamsi fractio illa millesimæ partis negligatur. Quod si errorem hunc, licet minimum, vitare cupis, considera fractionem millesimæ, an sit tertia pars, an semissis, an vero duæ tertiæ partes, quod iudicio sensus facile cognosces ex particula illa quæ vltra partes decimas circino percursas supereſt. Nam vbi anguli in tabula per tria Minuta augentur, addendum erit vnum minutum, vel duo, prout particula illa reliqua fuerit $\frac{1}{3}$. vel $\frac{2}{3}$. Idem faciendum erit si dicta particula fuerit maior, quam $\frac{1}{3}$. minor tamen, quam semissis. Tunc enim addendum erit etiam vnum Minutum. Item quando particula illa maior fuerit, quam semissis, addi possunt duo minuta. At quando anguli tabulæ augentur per duo Minuta, addendum erit vnum minutum pro semisse vnius partis millesimæ, &c.

Non magnus error in altitudinib. committitur, etiamsi per integras millesimas tabula progrediatur, & quo pacto error hic corrigendus sit.

DISTANTIAM inter te, & signum quodcunque in plano Horizontis positum, per Quadratum Geometricum perueſtigare.

PROBLEMA II.

1 SIT distantia metienda FG. Hoc per quadratum pendulum sic fiet. Erigatur ex F, altitudo quæpiam nota FA, Horizonti ad angulos rectos, siue ea sit statura mensoris ab oculo ad planum, siue maior quædam altitudo. Inspiciatur extremum G, per radium AG, ab oculo A, per foramina pinnaçidiorum incedentem, filo per-



pendiculi libere pendente, & instrumentum radente, punctumque E, notetur, vbi filum latus quadrati intersecat, quod fiet vel in latere BC, vmbræ rectæ, vel in angulo C, vel in latere DC, vmbræ versæ. Cadente namque filo in vmbram rectam, vel in punctum C, vt in 1. & 2. figura, fiet triangulum ABE, triangulo AFG, æquiangulum, cum anguli B, F, sint recti, & angulus A communis.[a] Si igitur fiat,

Vt latus AB,	*ad vmbram rectam*	*Ita altitudo*	*ad FG, distantiam,*
partium 1000.	*abscissam BE,*	*nota AF,*	

euadet nota distantia quæsita FG, in partibus altitudinis AF. Cadente autem puncto E, in vmbram versam, vt in 3 figura, abscindetur rursus triangulum ADE, triangulo AFG, æquiangulum, cum anguli D, F, recti sint,[b] & alterni AED, FAG, æquales.[c] Ergo si fiat,

Vt vmbra versa	*ad latus DA,*	*Ita altitudo*	*ad FG, distantiam,*
abscissa DE,	*partium 1000.*	*nota AF,*	

nota quoque efficietur distantia quæsita FG, in partibus altitudinis AF. Ex quo illud intelligere poteris, quando punctum E, intersectionis fili cum latere quadrati cadit in vmbram rectam, altitudinem AF, maiorem esse distantia FG, quando in punctum C, æqualem; quando denique in vmbram versam, minorem.

a 4. sexti.

b 29. p. im. c 4. sexti.

Quando altitudo maior est, quam distantia, & quando æqualis, & quando minor.

d coroll. 4. sexti.

e 4. sexti

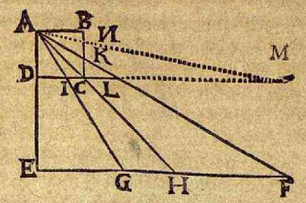
2 QVADRATO stabili ita eandem distantiam explorabimus. Erigatur in extremo distantiæ E, altitudo quædam perpendicularis notarum partium, & quadratum ita accommodetur, vt centrum A, superiorem locum occupet, & vmbra recta DC, Horizonti æquidistet. Directa igitur dioptra ad signum propositum, notetur diligenter vmbra abscissa: quæ si recta fuerit, nimirum DI, erit altitudo AE, maior, quam distantia EG,[d] triangulumque ADI, triangulo AEG, simile erit.[e] Si igitur fiat,

Vt la-

Vt latus quadrati AD, 1000.	*ad partes vmbræ rectæ DI:*	*Ita altitudo AE, cognita*	*ad EG, distantiam,*

reperietur distantia quæsita EG, in partibus altitudinis assumptæ AE.

SI autem dioptra per C, transierit, erit altitudo AE, distantiæ quæsitæ EH, æqualis: [c] cum sit vt AD, ad DC, æqualem, ita AE, ad EH.



c 4. sexti.

SI denique vmbra abscissa fuerit versa, vt BK, erit altitudo AE, minor, quam distantia EF, quod plerunque in distantiis metiendis accidere solet; eritq; triangulum ABK, triangulo AEF, æquiangulum, cum anguli B, E, recti sint,[d] & alterni BAK, AFE, æquales.[e] Quare si fiat,

d 29 primi. e 4. sexti.

Vt partes vmbræ versæ BK,	*ad latus quadrati AB, 1000.*	*Ita altitudo nota AE,*	*ad EF, distantiam,*

producetur quæsita distantia EF, in partibus altitudinis erectæ AE.

3 QVANDO distantia non valde magna est, vel extremum eius punctum facile videri potest satis erit, si quadratum supra planum Horizontis constituatur, ita vt vmbræ versæ latus BC, ad punctum illud recta vergat. Vt si distantia horizontalis DM, metienda sit, eique imponatur Quadratum erectum, mouenda est dioptra, donec linea fiduciæ in extremum M, dirigatur. Qua ratione semper vmbra versa BC, abscindetur. Nam si linea fiduciæ per C, transiret, aut vmbram rectam CD, intersecaret, esset distantia vel æqualis lateri CD, vel minor: ac proinde dimensione non indigeret. Quoniam igitur rursus triangulum NBA, triangulo ADM, æquiangulum est, propter rectos angulos B, D,[f] & alternos æquales BAN, AMD;[g] Si fiat,

f 29. primi. g 4. sexti.

Vt partes vmbræ versæ BN,	*ad latus quadrati AB, 1000.*	*Ita latus quadrati AD, 1000.*	*ad DM, distantiam,*

cognita erit distantia DM, in partibus millesimis lateris quadrati AD.

4 SOLENT nonnulli scriptores non inquirere distantiam propositam in partibus altitudinis assumptæ AE, vel in partibus millesimis lateris quadrati AD; sed solum inuestigant, quoties altitudo electa AE, vel latus quadrati AD, in distantia proposita contineatur: quod idem est, ac si altitudo, aut latus vmbræ statuatur 1. Atque ita diuidunt vel partes vmbræ rectæ abscissas per totum latus partium 1000. vel totum latus vmbræ versæ per partes vmbræ versæ abscissas. Nam Quotiens numerus indicat, quoties altitudo AC, vel latus Quadrati in proposita distantia comprehendatur: cum sit,

Vt totum latus AD, partium 1000.	*ad partes vmbræ rectæ DI,*	*Ita altitudo AE, vel latus AD, vt 1.*	*ad distantiam EG, vel DI.*

Item.

Vt partes vmbræ versæ BN,	*ad totum latus AB, 1000.*	*Ita altitudo AE, vel latus AD, vt 1.*	*ad distantiam EF, vel DM,*

Hinc enim fit, vt cum secundum præceptum regulæ trium tertius numerus in secundum sit ducendus, productusque numerus per primū diuidendus, satis sit, si secundus per primum diuidatur: quandoquidem vnitas in tertio loco posita, si multiplicet secundum numerum, eundem secundum numerum procreat, &c.

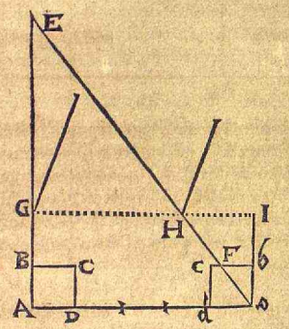
HAC ratione, si duæ partes millesimæ abscindantur ex vmbra versa, continebitur altitudo AE, vel latus AD, in distantia secundum hunc numerum 500. quod 1000. diuisa per 2. dent Quotientem 500. At vmbra versa trium millesimarum dabunt Quotientem $333\frac{1}{3}$. qui à priori differt hoc numero, $166\frac{2}{3}$. Ex quo intelligi licet, quando vmbra versa abscissa valde parua est, magnum posse errorem committi in distantia inuestiganda. Cum enim partes millesimæ sint perexiguæ, facile decipi possumus, vt nimirum putemus, abscissas esse tres millesimas cum fortassis solum duæ abscissæ sint: ac proinde error committi poterit $166\frac{2}{3}$. altitudinum AE, vel laterum AD, qui error conetmnendus non est. At quando partes vmbræ versæ plures millesimas continent, non tantus error committitur, etiamsi vnam millesimam pro altera accipiamus. Nam si verbi gratia putemus, abscissas esse partes $\frac{100}{1000}$. ex vmbra versa, cum vere abscissæ sint $\frac{101}{1000}$. error fieri poterit solum in 1. altitudine AE, vel latere AD, & $\frac{2}{3}$. cum $\frac{300}{1000}$. dent Quotientem $33\frac{1}{3}$. at $\frac{301}{1000}$. Quotientem offerant $32\frac{8}{9}$. Itaque magis probo, vt Quadratum in altiori loco statuatur, quam in plano Horizontis, quia ibi plures partes vmbræ versæ abscindūtur, quam hic, vt constat in distantiis æqualibus EF, DM. Vides ergo magnam esse adhibendam diligentiam, vt accurate partes millesimæ reperiantur per ea, quæ lib. 1. cap. 2. Num. 14. scripsimus.

IAM vero, si quadratum constructum sit, ad certam aliquam mensuram, hoc est, vt latus contineat vel 1. passum, vel 1. cubitū, vel 2. pedes, aut palmos, aut 3. aut 4. &c. res erit expeditissima, si semel tantū latus particularū 1000, ducatur in mensuras, quib. latus æquialet. Ita n. in longitudinib. exquirendis, si quadratum supra planum, in quo est longitudo, statuatur, (vt fit in omnibus hypotenusis, siue distantiis à loco mensoris vsque ad aliquod punctū mesore sublimius, depressiusue, quemadmodum patuit in proxima figura, quando longitudo D-M, inquisita est, patebitq; in scholio problem. 7. & in scholio problem 9. Item in problem. 15. Num. 5. & in problem. 26. Num. 3. & in problem. 27. Num. 3. nec non in problem. 37. & 38. Num. 3. & denique in proble. 43. & 44.

& in aliis locis) diuidendus solum est numerus productus per partes vmbræ versæ (quæ semper abscinditur) notatas. Quotiens enim dabit longitudinem quæsitam in data mensura. Verbi gratia, si in vno latere comprehendantur 3. pedes, multiplicabimus latus 1000. per 3. efficiemusque 3000. Itaq; si in inuestiganda longitudine quæpiam abscissæ sint partes 200. ex vmbra versa, partiemur 3000. per 200. Nam quotiēs 15. dabit 15. pedes pro quasita longitudine.[a] Nam cum in proxima figura sit, vt vmbra versa NB. 200. ad latus BA, 1000. Ita latus AD, 3. pedum ad DM, multiplicandum est latus 1000. per 3. pedes, & productus numerus 3000. per 200. diuidendus. Eademque de cæteris ratio est. Sic si latus contineret $\frac{1}{2}$. cubiti, diuidendus esset numerus 500. ex $\frac{1}{2}$. in 1000. procreatus per vmbram versam. Pari ratione si latus complecteretur 10. palmos, diuidendus esset numerus 10000. genitus ex 10. in 1000. per vmbram versam: vt in Quotiente prodeant palmi in longitudine contenti, &c. quod non indiligenter notandum est.

a 4. sexti.

ALITER.



5 QVANDO distantia metienda magna est, & adest bona planities campi, vti poterimus Quadrato stabili commodissime hoc modo. Sit distantia oblata AE. Erigatur quadratum ad Horizontem ad rectos angulos, circumducaturque, donec per eius planum oculus in A. constitutus signum E, perspiciat, atque linea notetur AG. Demisso deinde Quadratovsq; ad Horizontis planum, ita vt latus AB, recta tendat ad signū E, hoc est, à recta notata AG, non recedat, protendatur linea recta per latus AD, in qua accipiantur quotcunque partes lateri AD, æquales: vel quotcunq; aliæ mensuræ æquales, vt passus, vel cubiti, vsque ad punctum a, in quo rursus erigatur quadratum. (In hoc secundo quadrato ascripsimus literas minusculas, ne literæ vnius quadrati cum literis alterius cōfundantur, quod in sequentibus etiam obseruabimus) vertaturq; donec per eius planum idem signum E, appareat per rectam aH. Post hæc quadratum Horizonti incumbat, latusque a d, rectæ Aa, congruat, & dioptra circumducatur, donec eius linea fiduciæ rectæ aH, præcisæ sit supposita, notenturque partes millesimæ in portione vmbræ versæ bF, quam diligentissime. Abscindetur autem semper vmbra versa, propterea quod distantia AE, proponitur magna, saltem maior, quam Aa: alioquin mensurari posset sine quadrato, quemadmodum & Aa. Quibus peractis, erūt triangula a b F, a AE, æquiangula, cum angulos habeant rectos[b] b, A, & alternos æquales baF, AEa.[c] Si ergo fiat,

b 29. prim.
c 4. sexti.

Vt vmbra bF, ad latus b a, 1000. Ita aA, nota ad AE, distantiam,

inuenietur distantia AE, in partibus rectæ Aa. Vel si diuidatur latus b a, 1000. per partes millesimas vmbræ BF, procreabitur numerus, secundum quem recta Aa, in distantia eadem AE, continetur: posita nimirum recta Aa, vt 1. vt Num. 4. ostendimus.

6 QVOD si ad manum non habeamus Quadratum, obtinebimus eandem distantiam beneficio baculi, vel arundinis hoc artificio. Figatur baculus, vel arūdo in G, ad rectos angulos plano Horizontis, quod per filum aliquod cum perpendiculo facile fiet. Deinde recede per quotlibet passus vsque ad A, ita vt visus per baculum incedens feratur in signum E. Post hæc ducatur linea Aa, ad AE, perpendicularis, in qua numera quotlibet etiam passus vsque ad a. Ducta tandem GI, ad AE, quoque perpendicularī, & ipsi Aa, æquali, figatur rursum baculus ad angulos rectos in tali puncto rectæ GI, nimirum in H, vt oculus iterum ex a, per baculum incedens feratur in signum E, inquirantur que exquisitissime passus vna cum fragmentis vnius passus in HI, contenti. His enim peractis, quoniam rursus triangula HIa, aAE, æquiangula sunt, ob angulos rectos I, A, & alternos æquales IaH, AEa,

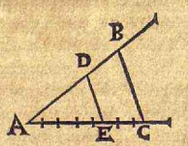
d 4. sexti

d si fiat,

Vt HI, nota ad Ia, notam: Ita aA, nota ad AE, distantiam,

efficietur nota distantia AE, in partibus rectarum GA, Aa, aI. Vel si diuidatur aI, nota per IH, notam, reperiemus, quoties Aa, in distantia AE, contineatur, si nimirum recta Aa, ponatur vt 1.

7 IAM vero absque numerorum auxilio problema absoluemus, si attente ea considerentur, quæ lib. 2. problem. 1. Num. 7. scripsimus. Nam si fiat angulus quicunque BAC, & pro primo exemplo Num. 1. huius prob. sumatur AD, æqualis lateri quadrati AB, vel si esset nimis magnum, æqualis semissi, vel tertiæ parti, aut quartæ, &c. eiusdem lateris. Deinde DB, æqualis vmbræ abscissæ BE, (quæ summa cura per circinum in quadrato accipienda est) vel eius semissi, vel tertiæ parti, aut quartæ &c. vt nimirum AD, DB, sint æque submultiplices lateris AB, & vmbræ BE, si eis æquales non sunt. Post hæc ex instrumento partium sumatur AE, tot particularum, quot palmi, aut pedes in altitudine AF, continentur. Si enim iunctæ rectæ DE, parallela agatur BC, continebit distantia FG, tot palmos, aut pedes, quot particulæ instrumenti partium in interuallo EC, comprehenduntur. Vt si altitudo AF, sit pedum 5. erit distantia FG, pedum 3. & sic de cæteris. Atque hoc modo procedendum erit in aliis exemplis omnibus, considerando videlicet attente primas tres magnitudines Regulæ trium, &c. quod semel monuisse satis est.



DISTANTIAM in plano per duas stationes in eodem plano factas per quadratum Geometricum metiri, quando in eius extremo erecta est altitudo aliqua perpendicularis, etiamsi infimum eius extremum non cernatur.

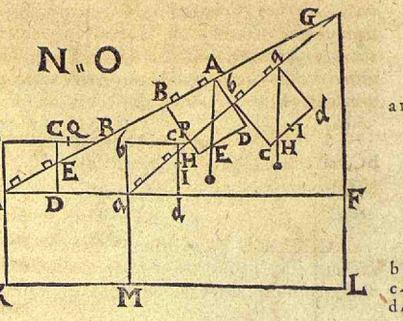
PRO-

PROBLEMA III.

1 DISTANTIA inuestiganda sit AF. Intelligatur planum Horizontis KL; erecta altitudo GL: statura mensoris AK, vel alia quædam mensura cognita. Supra aliquam basem Horizonti æquidistantem collocetur quadratum stabile, ita vt eius latus AD, cogitatione productum occurrat altitudini erectæ in F, ad angulos rectos. Inspiciatur summitas G, per dioptram, fecetq; eius linea fiduciæ vmbram versam CD, in E, quod semper continget, quando distantia AF, maior est altitudine FG,

a 18. primi.

[a] quod tunc angulus A, minor fiat angulo G, ac proinde semirecto minor, quem cum AD, in A, faceret radius per C, emissus. Deinde accede magis, vel recede per longitunem notam Aa, & collocato quadrato supra eandem basem, fecet iterum dioptra ad punctum G, directa vmbrā versam c d, in H: eritq; vmbra versa dH, in propinquiore statione maior, quam vmbra versa DE, in statione remotiore,[b] quod angulus a, sit maior angulo A. Auferatur d I, ipsi DE, æqualis, vt HI, differentia sit vmbrarum versarum. [c] Et quia est, vt AD, ad DE, ita AF, ad FG: [d] erit rectangulo sub AD, FG, æquale rectangulum sub DE, AF. Eadem ratione erit rectangulo sub a d, FG, rectangulum sub dH, aF, æquale: propterea quod etiam est [e] vt a d, ad dH, ita aF, ad FG. Cum ergo rectangulum sub AD, FG, æquale sit rectangulo sub a d, FG, quod rectæ AD, a d, æquales sint: erit quoq; rectangulū sub dH, aF, rectangulo sub DE, AF, hoc est, sub dI, AF, æquale, [f] ideoq; erit, vt dH, prima ad dI, secundam, ita AF, tertia ad aF, quartam: Et permutando, vt tota dH, ad totam AF, ita ablata dI, ad ablatam aF. [g] Igitur erit quoque reliqua HI, ad reliquam Aa, vt tota dH, ad totam AF. Quocirca si fiat,



b 16. prim.
c 4. sexti.
d 16. sexti.
e 4. sexti.
f 16. sexti.
g 19. quin.

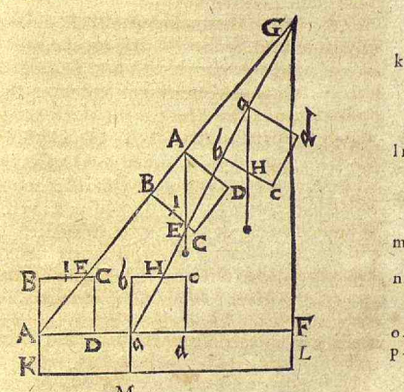
Vt HI, differentia vmbrarum versarum ad Aa, differentiam stationum: Ita dH, vmbra versa propinquioris stationis, siue maior, ad AF, distantiam,

producetur AF, distantia nota in partibus differentiæ stationum Aa, notæ.

2 EADEM prorsus ratio est in quadrato pendulo. Nam filum perpendiculi abscindit quoque triangula ADE, ad H, triangulis AFG, aFG, æquiangula: propterea, quod tam anguli D, F, recti sunt, [h] & angulus F, hoc est, alternus BAE, angulo AGF, externus interno æqualis, quam anguli d, F, recti & angulus H, id est, alternus baH, angulo aGF, externus interno æqualis. Reliqua demonstrabuntur, vt prius: sunt enim vmbræ versæ in pendulo quadrato vmbris in stabili æquales. Nam cum duo anguli D, E, in triangulo ADE, quadrati penduli æquales sint duobus angulis D, E, in triangulo ADE, quadrati stabilis, quod ea triangula sint, vt ostendimus, æquiangula: sint autem & latera AD, AD, æqualia; [i] erunt & rectæ DE, DE, hoc est vmbræ versæ, æquales. Eademque ratione versæ vmbræ dH, dH, æquales erunt, &c.

h 29. primi.
i 26. primi.

3 SI in vtraque statione vmbra recta abscindatur à linea fiduciæ, vel à filo perpendiculi, vt in E, & H, quod quidem semper continget, quando distantia AF, minor est altitudine FG, [k] quod tunc angulus A, maior fiat angulo G, ac proinde semirecto maior, quem cum AD, constitueret radius per C, emissus. Eritque vmbra recta BE, in remotiore statione maior, quam vmbra recta bH in statione propinquiore, [l] quod angulus FaG, maior sit angulo FAG; ac proinde baH, minor angulo BAE. Auferatur BI, ipsi bH, æqualis, vt IE, differentia sit vmbrarum rectarum. Et quia triangula ABE, AFG, æquiangula sunt, propter angulos rectos B, F, [m] & alternos æquales BAE, AGF, [n] erit vt AB, ad BE, ita FG, ad AF, & permutando, vt AB, ad FG, ita BE, ad AF. Eadem ratione, quia triāgula abH, aFG, æquiāgula sunt, propter rectos angulos b, F, [o] & alternos æquales baH, aGF, [p] erit vt a b, ad bH, ita FG, ad aF: Et permutando vt ab, ad FG ita bH, ad aF. Cum ergo sit, vt AB, ad FG, ita a b, ad FG, propter rectas æquales AB, a b, [q] erit quoque vt BE, tota ad AF, totam, ita BI, ablata ipsi bH, æqualis, ad ablatam aF, [r] Igitur erit & reliqua IE, ad reliquam Aa, vt tota BE, ad totam AF. Quapropter si fiat,



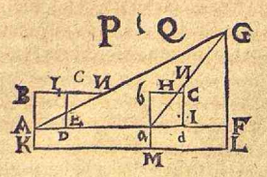
k 18. primi.
l 16. primi.
m 29. prim.
n 4. sexti.
o 29. prim.
p 4 sexti.
q 11. quint.
r 19. quint.

Vt IE, differentia vmbrarum rectarum ad Aa, differentiam stationū: Ita BE, vmbra recta remotioris stationis, siue maior ad AF, distantiam,

procreabitur AF, distantia nota in partibus differentiæ stationum Aa, notæ.

4 EADEM omnino in quadrato pendulo est ratio. Nam filum perpendiculi abscindit quoque triangula ABE, ab H, triangulis AFG, aFG, æquiangula; quod tam anguli B, F, recti sint, [s] & angulus BAE, angulo AGF, externus interno æqualis, quam anguli b, F, recti & angulus baH, angulo aGF, æqualis, externus interno. Reliqua demonstrabuntur, vt in stabili quadrato. Sunt enim vmbræ rectæ in quadrato pendulo vmbris rectis in stabili æquales. Nam cum duo anguli B, E, in triangulo ABE, quadrati penduli, æquales sint duobus angulis B, E, in triangulo ABE, quadrati stabilis; quod hæc triangula sint, vt ostensum est, æquiangula, vtpote æquiangula triangulo AGF, [t] erunt & rectæ BE, BE, hoc est, vmbræ rectæ æquales. Eademque ratione vmbræ rectæ bH, bH, æquales erunt, &c.

s 29. primi.
t 26. primi.



5 Si deniq; in remotiore ſtatione ſecetur vmbra verſa CD, in E, & recta b c, in H, in ſtatione propinquiore, reducenda erit alterutra earum ad alteram, vt habeantur ſimiles vmbræ, per ea, quæ in quadrati conſtructione Num. 7. ad initium huius lib. tradidimus, diuidendo nimirum quadratum lateris AB, per vmbram, quæ reduci debet, &c. Nam ſi fiat vt IN, differentia vmbrarum ſiue rectarum, ſiue verſarum, ad Aa, differentiam ſtationum: Ita BN, maior vmbra recta vel dN, vmbra verſa maior ad aliud, ignetur diſtantia AF, vt demonſtratum eſt Num. 3. & 1.

6 QVOD ſi quando in vna ſtatione linea fiduciæ tranſierit per C, aſſumi poterit vel latus vmbræ rectæ BC, vel verſæ CD, prout in altera ſtatione abſciſſa erit vmbra recta, vel verſa; vt nimirum vmbræ ſint ſimiles.

COROLLARIVM. I.

Eundem eſſe modum operandi in vtroque quadrato.

COLLIGITVR ex demonſtratis, eundem eſſe operandi modum in vtroque quadrato: quandoquidem eædem vmbræ in quadrato pendulo, quæ in ſtabili, abſcinduntur, vt oſtendimus: Itaque præcepta, quæ in vno præſcribuntur, in altero quoque obſeruanda ſunt.

COROLLARIVM II.

Eundem eſſe operandi modum per vmbras verſas, & per rectas.

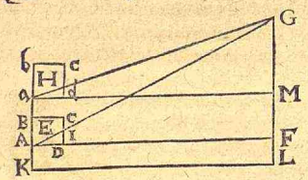
PATET etiam ex dictis, operationem non variari, ſiue per vmbras verſas, ſiue per rectas inſtituatur: quandoquidem ſemper eſt, vt differentia vmbrarum ad differentiam ſtationum, ita vmbra maior, ad diſtantiam, quæ inueſtiganda proponitur, vt demonſtratum eſt.

CÆTERVM in ſcholio problematis 7. præſcribemus rationem, qua eandem diſtantiam AF, metiri licebit per vnicam ſtationem.

DISTANTIAM eandem per duas ſtationes in aliqua altitudine erecta factas, ope quadrati perſcrutari.

PROBLEMA IV.

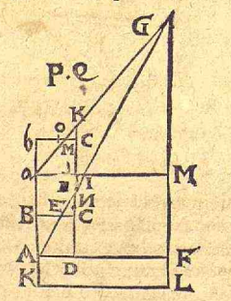
a QVANDO in plano commode fieri nequeunt duæ ſtationes, erigatur haſta aliqua Kb, in qua fiant duæ ſtationes oculi menſoris in A, a: Vel in duabus feneſtris alicuius turris, quarum vna ſuperſtet alteri ad perpendiculum: abſcindatur que primum latus vmbræ verſæ in vtraque ſtatione in E, H. Eritq; inferioris ſtationis vmbra verſa DE, maior, quam vmbra verſa dH, ſtationis ſuperioris, quod angulus A, maior ſit angulo a; quippe cum AGF, minor ſit, quam aGM; & anguli F, M, recti. Sumatur DI, ipſi dH, æqualis; [a] Et quoniam eſt, vt AD, ad DE,



a 4. ſexti. ita AF, ad FG: erit permutando, vt AD, ad AF, ita DE, ad FG. Eademque ratione, erit vt ad, ad aM, ita dH, ad
b 11. quint. MG. Cum ergo eadem ſit proportio AD, ad AF, quæ ad, ad aM, propter æqualitatem linearum AD, a d, & AF,
c 19. quint. aM; [b] Erit vt DE, tota ad totam FG, ita d H, hoc eſt, DI, ablata ad ablatam MG. [c] Igitur erit quoque reliqua IE, ad reliquam FM, hoc eſt, ad reliquam Aa, vt tota DE, ad totam FG, hoc eſt, vt AD, ad AF; cum oſtenſum ſit eſſe AD, ad AF, vt DE, ad FG. Quocirca ſi fiat,

Vt IE, differentia vmbrarum verſarum	*ad A a, differentiam ſtationum,*	*Ita AD, latus quadrati*	*ad AF, diſtantiam,*

manifeſta colligetur diſtantia AF, in partibus differentiæ ſtationum A a.



2 SI in vtraque ſtatione latus vmbræ rectæ interſecetur in E, H, reducenda eſt vtraque vmbra recta BE, bH, ad verſam, per ea, quæ tradita ſunt ad initium huius lib. in conſtructione quadrati Num. 7. diuidendo videlicet quadratum numerum lateris quadrati per vtramque vmbram rectam abſciſſam ſigillatim. Nam ſi producantur latera DC, d c, vmbræ verſæ vſque ad radios AG, aG, ad puncta I, K, erit iterum, vt demonſtrauimus Numer. 1. vt IN, differentia vmbrarum verſarum ad Aa, differentiam ſtationum, ita AD, latus quadrati ad AF, diſtantiam. Ergo vt Num. 1. oſtenſum eſt, inuenietur diſtantia AF, in partibus differentiæ ſtationum A a.

ALITER

d 4. ſexti. SINE reductione vmbrarum rectarum ad verſas hoc alio modo eandē diſtantiam AF, eliciemus. Ex OH, differentia vmbrarum rectarum in latus a b, fiat P: & ex bH, vmbra recta maiore in minorem BE, fiat [d] Q. Et quia

quia eſt, vt ID, ad DA, ita AB, ad BE; [b] erit rectangulum ſub ID, BE, æquale quadrato ex AD, vel AB. Eodemq; modo rectangulum ſub Kd, bH, quadrato ex a d, vel a b, hoc eſt, eidem quadrato ex AD, vel AB, æquale erit: ac proinde rectangula ſub ID, BE, & ſub Kd, bH, æqualia inter ſe erunt. [c] Igitur erit, vt ID, ad Kd, ita bH, ad BE: & permutando vt ID, ad bH, ita Kd, ad BE, hoc eſt, vt ID, tota ad totam bH, ita Kd, hoc eſt, ita DN, ablata ad BE, hoc eſt, ad bO, ablatam: [d] Ideoque erit & reliqua IN, ad reliquam OH, vt tota ID, ad totam bH; & permutando IN, ad ID, vt OH, ad bH. Quia vero proportio IN, ad DA, (poſita media ID,) componitur ex proportionibus IN, ad ID, & ID, ad DA: Eſt autem, vt proxime monſtratum eſt, vt IN, ad ID, ita OH, ad bH; [e] & vt ID, ad DA, ita AB, ad BE: componetur quoque proportio IN, ad DA, ex proportionibus OH, ad bH, & AB, ad BE:
f Sed proportio etiam producti P, ad productum Q, componitur ex eiſdem proportionibus, nimirum ex lateribus. Igitur eadem eſt proportio P, ad Q, quæ IN, ad DA. Cum ergo, vt in 1. modo huius Num. 2. oſtendimus, ſit IN, ad Aa, vt AD, ad AF, hoc eſt, permutando vt IN, ad DA, ita Aa, ad AF: Erit quoque P, ad Q, vt Aa, ad AF. Quapropter ſi fiat,

b 17. ſexti.
c 16. ſexti.
d 19. quin.
e 4. ſexti.
f 23. ſexti.

Vt P, numerus, qui fit ex OH, differentia vmbrarum rectarum in a b, latus quadrati,	*ad Q, numerum, qui fit ex vmbra recta bH, maiore in minorem BE,*	*Ita Aa, differentia ſtationum*	*ad AF, diſtantiam,*

producetur eadem diſtantia quæſita AF, in partibus differentiæ ſtationum Aa.

ALITER.

g QVONIAM eſt, vt bH, ad a b, ita aM, ad MG, ſi fiat, g 4. ſexti.

Vt bH, vmbra recta,	*ad a b, latus quadrati 1000.*	*Ita aM, quatenus 1.*	*ad MG,*

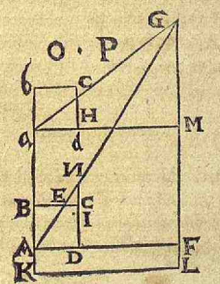
hoc eſt, (quia 1. multiplicans latus quadrati 1000. producit idem latus 1000.) ſi quadrati latus 1000. a b, diuidatur per vmbram rectam bH, exibit Quotiens MG, indicans, quoties aM, quatenus 1. in MG, comprehendatur. Eodem pacto, ſi fiat,

Vt BE, vmbra recta	*ad AB, latus quadrati 1000.*	*Ita AF, quatenus 1.*	*ad FG,*

hoc eſt, ſi quadrati latus 1000. AB, diuidatur per vmbram rectam BE, fiet Quotiens FG, ſignificans, quoties AF, quatenus 1. continetur in FG. Si igitur ex poſteriore hoc Quotiente FG, prior ille Quotiens MG, detrahatur, reliqua fiet FM, vel Aa, differentia ſtationum cognita in partibus, quarum AF, eſt 1. Quocirca ſi fiat,

Vt Aa, differentia Quotientum, qui fiunt, ſi latus quadrati per vtramque vmbram rectam dividatur,	*ad Aa, differentiam ſtationum notam in menſura aliqua:*	*Ita AF, vt 1.*	*ad AF, diſtantiam,*

hoc eſt, ſi differentia ſtationum diuidatur per differentiam Quotientum, efficietur nota diſtantia AF, in partibus differentiæ ſtationum Aa, &c.



3 SI denique in ſtatione inferiori latus vmbræ rectæ ſecetur in E, & in ſuperiori ſtatione latus vmbræ verſæ in H, reducenda quoque erit vmbra recta ad verſam, vt diximus, & producendum latus DC, vmbræ verſæ vſque ad punctum N, ſumendaque DI, ipſi dH, æqualis. Nam vt Numer. 1. oſtendimus, ſi fiat,

Vt NI, differentia vmbrarum verſarum	*ad Aa, differentiam ſtationum:*	*Ita AD, latus quadrati*	*ad AF, diſtantiam,*

cognita rurſus erit diſtantia AF, in partibus differentiæ ſtationum Aa.

ALITER.

SINE reductione vmbræ rectæ ad verſam ita quoque agemus. Numerus qui fit ex recta vmbra BE, in vmbram verſam dH, auferatur ex 1000000. quadrato lateris 1000. reſiduumque ſit, O. Item ex vmbra recta BE, in latus quadrati 1000. fiat P. Et quoniam, vt initio huius lib. in conſtructione quadrati Num. 6. oſtendimus, latus quadrati medio loco proportionale eſt inter vmbras BE. DN. [h] Erit rectangulum ſub BE, DN, quadrato lateris æquale. [i] Cum ergo rectangulum ſub BE, DN, æquale ſit rectangulis ſub BE. DI, & ſub BE, NI: Si rectangulum ſub BE, DI, auferatur ex rectangulo ſub BE, DN, id eſt, ex 1000000. quadrato lateris AD, reliquum fiet rectangulum ſub BE, NI; ac proinde cum DI, ipſi dH, ſit æqualis, fiet rectangulum ſub BE, DI, ex vmbra BE, in vmbram dH; atque idcirco reliquum rectangulum ſub BE, NI, (quod videlicet relinquitur, ſi rectangulum ſub

h 16. ſexti.
i 1. ſecund.

BE,DI,ex quadrato lateris detrahatur, vt dictum est,) numero O, æquale erit: Est autem ex constructione rectangulum quoque sub BE,vmbra recta, & latere AD, numero P, æquale. Igitur cum numerus BE,multiplicans NI,AD,producat O,P,[c] erit O,ad P,vt NI, ad AD. Sed vt Num.1.huius problematis demonstrauimus,vt NI,differentia vmbrarum versarum ad Aa,differentiam stationum,ita est AD, latus quadrati ad AF, & permutando vt NI,ad AD,ita Aa,ad AF.Igitur erit quoque O,ad P,vt Aa,ad AF. Quamobrem si fiat,

c 17. septi.

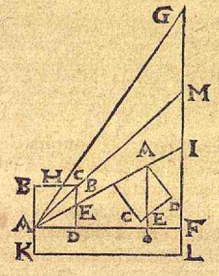
Vt O,numerus,qui relinquitur si numerus genitus ex vmbra recta in versam ex quadrato lateris detrahatur,	*ad numerum P,qui ex vmbra recta BE, in latus AD, producitur:*	*Ita Aa, differentia stationum*	*ad AF,distantiam,*

procreatur distantia quæsita AF, in partibus differentiæ stationum Aa.

4 HIC etiam si forte in vna statione linea fiduciæ,aut filum perpendiculi, transierit per punctum C,assumendum erit vel latus vmbræ rectæ,vel versæ,vt Num.6.præcedentis problematis dictum est.

ALTITVDINEM cuiuslibet rei erectæ per eius distantiam ab oculo mensoris, beneficio quadrati coniicere.

PROBLEMA V.



1 SIT altitudo coniicienda GL, vel ML, vel IL, ad Horizontem perpendicularis. Statura mensoris, vel aliqua alia mensura nota sit FL. vel AK,paretur-que planum Horizonti parallelum AF, in quo quadratum erigatur,cuius latus AD, intelligatur productum occurrens altitudini in F. Inspecto cacumine I,secet primum dioptra vel filum perpendiculi latus CD, vmbræ versæ in E, quod accidet, quando distantia AF,maior est, altitudine FI, vt problemate 1. Num. 1. ostendimus. Quoniam igitur triangulum ADE, triangulo AFI, æquiangulum est, vt ibidem monstratum est; [a] erit vt AD, ad DE, ita AF, ad FI. Quamobrem si fiat,

a 4. sexti.

Vt latus quadrati 1000.	*ad vmbram versam DE:*	*Ita distantia AF, vel data, vel inuenta per probl. 3. aut 4.*	*ad FI,*

patefacta erit altitudo FI,in partibus distantiæ AF,quæ si data non est,exquirenda erit vel per problema 3.vel 4. Et si ad FI,adiicietur mensura,vel statura mensoris FL,tota altitudo proposita IL, nota fiet.

2 DEINDE linea fiduciæ transeat per punctum C, quod fiet, quando distantia AF, altitudini FM æqualis est;[b] quod tunc angulus CAD,semirectus sit,ac proinde & reliquus M, in triangulo FAM. [c] Ideoque latera AF,FM,æqualia sint. Quanta ergo est distantia AF, quæ vel data est, vel inuenienda per problema 3.vel 4. tanta erit altitudo FM,cui addita FL, nota patefaciet totam altitudinem ML.

b schol. 34. primi.

c 6. primi.

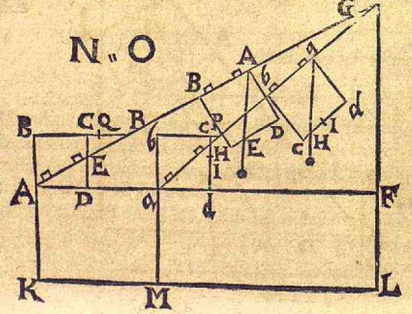
3 POSTREMO intersecetur vmbræ rectæ latus in H,quod eueniet,quando distantia AF,minor est altitudine FG:eritque triangulum ABH,triangulo AFG,æquiangulum,vt problemate 3. Num.3. demonstrauimus.Igitur erit,vt BH,ad AB,ita AF,ad FG:ac proinde si fiat,

Vt vmbra recta BH,	*ad AB,latus quadrati 1000.*	*Ita distantia AF, vel data,vel inuenta per probl.3.aut 4.*	*ad FG,*

nota euadet FG,cui si addetur mensura vel statura mensoris FL,efficietur nota tota altitudo GL, proposita.

ALTITVDINEM eandem,etiamsi eius distantia ab oculo mensoris neque data sit, neque inuenta,per duas stationes in plano factas patefacere auxilio quadrati.

PROBLEMA VI.



1 PROPOSITA sit altitudo metienda FG, secluſa mensoris statura FL. Fiant duæ stationes, vt in problemate 3. cuius figura 1. hic repetatur, secetur que primum vmbra versa in vtraque statione in punctis E, H. Et quia propter similitudinem triangulorum ADE,AFG,est vt DE,ad AD, ita FG, ad AF, si fiat,

Vt DE,

Vt DE,vmbra versa abscissa	*ad AD,latus quadrati 1000.*	*Ita FG,quatenus 1.*	*ad AF.*

hoc est, (cum 1. multiplicans latus quadrati 1000. producat idem latus 1000.) si quadrati latus 1000. diuidatur per vmbram versam DE, prodibit Quotiens AF, indicans, quoties FG, in AF, contineatur. Eodem pacto si fiat,

Vt vmbra versa dH,	*ad a d, latus quadrati 1000.*	*Ita FG,quatenus 1.*	*ad aF,*

hoc est, si quadrati latus 1000. diuidatur per vmbram versam dH, gignetur Quotiens aF, monstrans, quoties FG, in aF, contineatur. Si igitur posterior hic Quotiens aF,ex priori Quotiente AF, detrahatur, relinquetur differentia Aa,cognita in partibus,quarum FG,est 1.Si ergo fiat,

Vt Aa,differentia Quotientum,diuiso latere Quadrati per vtramque vmbram versam,	*ad Aa, differentiam stationum.*	*Ita FG,vt 1.*	*ad FG,*

producetur altitudo FG, in partibus differentiæ stationum Aa, nota, & adiecta mensoris statura FL, nota altitudo GK,nota fiet.

ALITER

EX differentia HI, vmbrarum versarum in latus quadrati gignatur numerus N, & ex vmbra versa DE, in versam dH, fiat O. Productis autem lateribus BC,bc,vsque ad R,P,in radiis,abscindatur BQ, ipsi bP, æqualis. Et quia,vt problemate 3. Numer.3. demonstratum est,ita est QR, differentia vmbrarum rectarum ad Aa, differentiam stationum, vt vmbra recta maior BR, ad AF, distantiam: [a] Vt autem BR, ad BA, ita est AF, ad FG:& permutando vt BR,ad AF,ita BA,ad FG;erit quoque QR,ad Aa,vt BA, ad FG.& permutando QR,ad BA.ad Aa,ad FG. Dico iam,vt est QR,ad AB,ita esse numerum N,ad numerum O. [b] Cum enim sit,vt DE, ad DA,ita AB,ad BR;[c] erit rectangulum sub DE,BR,rectangulo sub DA,AB,hoc est, quadrato lateris æquale. Eadem q; ratione erit rectangulum sub dH, bP,eidem quadrato lateris æquale; ideoq; rectangulum sub DE,BR,rectangulo sub dH,bP,æquale erit. [d] Igitur erit,vt DE,ad dH,ita bP, ad BR:& conuertendo,vt dH,ad DE, ita BR,ad bP,vel ad BQ:& permutãdo vt tota dH,ad totam BR,ita DE,vel dI,ablata ad bP,vel ad BQ, ablatam.[e] Igitur & reliqua HI,ad reliquam QR, erit, vt tota dH, ad totam BR, vel vt ablata dI, ad ablatam BQ;& permutando,vt HI,ad dI,ita QR,ad BQ,vel ad bP. [f] Proportio autem numeri N, ad numerum O, componitur ex proportionibus HI, ad dI, vel ad DE, & lateris a d, ad dH, propterea quod N, factus est,ex HI,differentia vmbrarum versarum in latus quadrati a d; At vero O, ex vmbra versa DE, in versam dH, ex constructione. Cum ergo sit,vt paulo ante ostendimus, quemadmodum HI, ad dI, ita QR,ad bP,[g] Item vt latus a d,ad dH, ita bP,ad b a, componetur quoque proportio N,ad O,ex proportionibus QR.ad bP, & bP, ad ba. Sed ex his eisdem componitur proportio QR,ad b a.Igitur eadem est proportio N,ad O,quæ QR,ad b a,vel BA, quod ostendere volebamus. Est autem vt QR, ad BA, ita Aa, differentia stationum ad altitudinem FG, vt supra ostendimus prope initium huius demonstrationis.Igitur si fiat,

a 4. sexti

b 4. sexti.

c 16 sexti

d 16 sexti.

c 19. quint.

f 23. sexti.

g 4. sexti.

Vt N,numerus,qui fit ex HI, differentia vmbrarum versarum in latus quadrati 1000.	*ad numerum O, factum ex vmbra versa DE, in versam dH.*	*Ita Aa, differentia stationum*	*ad FG,altitudinem,*

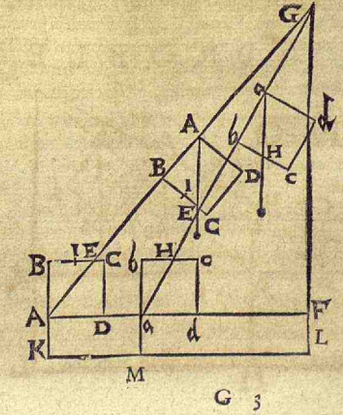
deprehensa erit altitudo FG,in partibus differentiæ stationum Aa,&c.

ALITER

REDVCATVR vtraque vmbra versa ad rectam,vt ad initium huius lib. in quadrati constructione Nu. 7.docuimus.Nam per has vmbras rectas altitudinem FG,nanciscemur,vti Num.2. sequenti tradetur,

2 SECETVR deinde vtraque vmbra recta in E,H,vt in 2. figura problematis 3.quæ hic repetatur. Et quoniam ob similitudinem triangulorum ABE, AFG, [h] est,vt BE,ad AB,ita AF,ad FG; erit permutando,vt BE,ad AF,ita AB,ad FG. Eademque ratione erit vt bH, ad aF , ita a b, ad FG;ac proinde erit, vt tota BE, ad totam AF, ita ablata bH, vel BI, ad ablatam aF, cum vtraque proportio sit, quæ AB, vel a b, ad FG.

Igitur erit quoque reliqua IE, ad reliquam Aa, vt tota BE, ad totam AF, hoc est,vt AB,ad FG,cum duæ hæ proportiones eædem inter se sint, vt paulo ante demonstrauimus.Quocirca si fiat,



h 4. sexti.

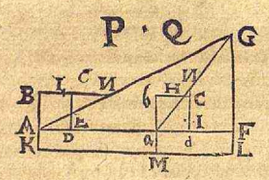
Vt IE, differentia vmbrarum rectarum	*Ad Aa, differentiam ſtationum:*	*Ita AB, quadrati latus 1000.*	*ad FG,*

proſiliet nota altitudo FG, & adiuncta menſoris ſtatura FL, tota altitudo GL, quæſita nota efficietur.

ALITER

DIVIDE quadrati latus 1000. per vtramque vmbram rectam, & minorem Quotientem duc in differentiam ſtationum, numerumque productum partire per differentiam Quotientum. Si namque hic vltimus Quotiens ducatur in Quotientem maiorem ex prioribus duobus Quotientibus, producetur altitudo quæſita in partibus differentiæ ſtationum. Quod ita perſpicuum fiet.

SIT vmbra recta minor bH, 50. verbi gratia, & maior BE, 125. at differentia ſtationum Aa, ſit 16. paſſuum.
a 4. ſexti. [a] Et quia eſt, vt bH, ad a b, ita aF, quatenus 1. ad FG; ſi a b, 1000. diuidatur per bH 50 indicabit Quotiens 20. rectam aF, in FG, contineri vicies.
b 4. ſexti [b] SIC etiam, quia eſt, vt BE, ad AB, ita AF, quatenus 1, ad FG; ſi AB, 1000. diuidatur per BE, 125. monſtrabit Quotiens 8. rectam AF, in FG, contineri octies. Quia itaque Aa, 16. paſſuum vna cum aF, continetur in FG, octies, fit vt Aa, 16. paſſuum octies ſumpta, vna cum aF, octies quoque ſumpta, faciat 128. paſſus, & aF, octies ſumptam; nimirum numerum ipſi FG, æqualem. Eſt autem AF, vicies ſumpta eidem FG, æqualis. Igitur 128. paſſus, vna cum aF, octies ſumpta æquiualent ipſi aF, vicies ſumptæ. Si ergo vtrobiq; auferatur aF, octies ſumpta, reliqui erunt 128. paſſus æquales ipſi aF, duodecies ſumptæ. Quare ſi 128. diuidantur per 12. prodibunt $10\frac{2}{3}$. paſſus pro recta, aF, cum hic Quotiens in 12. ductus producat 128. Cum igitur AF, contineatur vicies in FG: ſi aF, $10\frac{2}{3}$. paſſuum ducatur in 20. procreabitur altitudo FG, $213\frac{1}{3}$. paſſuum. Vides ergo minorem Quotientem 8. in differentiam ſtationum paſſuum 16. ductam eſſe, vt gignerentur 128. & hunc numerum diuiſum eſſe per 12. differentiam Quotientum, vt prodirent paſſus $10\frac{2}{3}$. pro recta aF: ac tandem hunc Quotientem $10\frac{2}{3}$. ductum eſſe in 20. Quotientem maiorem, vt produceretur altitudo FG, paſſuum $213\frac{1}{3}$. vt in regula præcepimus. Quam altitudinem etiam reperies per præcedentem viam, ſi nimirum fiat, vt 75. differentia vmbrarum rectarum, ad differentiam ſtationum, nimirum ad 16. paſſus, ita quadrati latus 1000. ad aliud. Nam 16. ducta in 1000, & productus numerus 16000. diuiſus per 75. facit Quotientem $213\frac{1}{3}$. veluti prius.



3 DENIQVE in remotiore ſtatione interſecetur vmbra verſa in E, & in propinquiore vmbra recta in H, vt in 3. figura probl. 3. Reducta vmbra verſa ad rectam, vt in Quadrati conſtructione Num. 7. principio huius lib. ſcripſimus: ſi fiat, vt IN, differentia vmbrarum rectarum ad Aa, differentiam ſtationum, ita AB, latus Quadrati 1000. ad aliud, procreabitur altitudo FG, quemadmodum Num. 2. oſtendimus.

4 SI forte in vna ſtatione tranſiret linea fiduciæ, aut filum perpendiculi per punctum C, aſſumendum eſſet in primo caſu latus CD, vmbræ verſæ: In duobus autem alijs caſibus latus BC, vmbræ rectæ.

ALITER

SINE reductione vmbræ verſæ ad rectam ita agendum erit. Numerus, qui fit ex vmbra verſa DE, in vmbram rectam bH, auferatur ex 1000000. quadrato lateris 1000. reſiduum que ſit P. Item ex vmbra verſa DE, in
c 4. ſexti. latus 1000. fiat Q. [c] Et quoniam ob triangulorum ſimilitudinem eſt, vt BN, ad BA, ita AF, ad FG: Et permutando, vt BN, ad AF, ita BA, ad FG. Sed vt BN, vmbra recta maior ad AF, diſtantiam, ita eſt IN, differentia vmbrarum rectarum ad Aa, differentiam ſtationum, vt Num. 5. in probl. 3. dictum eſt. Igitur erit quoque IN, ad Aa, ſi-
d 4. ſexti. cuti AB, ad FG: Et permutando IN, ad AB, vt Aa, ad FG. Dico iam ita eſſe P, ad Q, vt IN, ad AB. [d] Quoniam e-
e 17. ſexti. nim eſt, vt DE, ad AD, ita AB, vel AD, ad BN. [e] erit rectangulũ ſub DE, BN, æquale quadrato num. 1000000.
f 1. ſecund. lateris AB, 1000. [f] Eſt autem rectangulum ſub DE, BN, æquale rectangulis ſub DE, BI, & ſub DE, IN. Igitur ſi productum ex vmbra verſa DE, in BI, hoc eſt, in vmbram rectam bH, dematur ex rectangulo ſub DE, BN, hoc eſt, ex quadrato 1000000. remanebit rectangulum ſub DE, IN. Ac propterea P, fiet ex DE, in IN. Fit autem Q,
g 17. ſepti. ex eadem vmbra verſa DE, in latus AB, 1000. Igitur cum DE, multiplicans IN, & AB; producat P, Q, [g] erit P, ad Q, ſicut IN, ad AB; hoc eſt, ſicut Aa, ad FG. Quocirca ſi fiat,

Vt P, numerus, qui relinquitur, ſi productus ex vmbra verſa DE, in vmbram rectam bH, ex quadrato 1000000. detrahatur,	*ad Q, numerum, qui fit ex vmbra verſa DE, in latus AB, 1000.*	*Ita Aa, differentia ſtationum*	*ad FG, altitudinem,*

producetur altitudo FG, nota in partibus differentiæ ſtationum Aa: cui ſi adiicietur ſtatura menſoris FL, tota altitudo GL, nota efficietur.

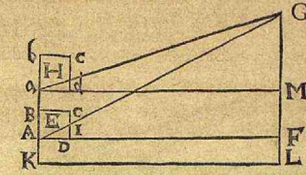
IN ſcholio porro ſequentis problematis idem hoc problema per vnicam ſtationem abſoluemus.

ALTITVDINEM eandem, quando diſtantia ab oculo menſoris neque data eſt, neque inuenta, neque è directo altitudinis duæ ſtationes fieri poſſunt, per duas ſtationes in aliqua haſta erecta factas, indagare per Quadratum.

PRO-

PROBLEMA VII.

1 CVM in plano duæ ſtationes fieri commode nequeunt, erigatur haſta aliqua Kb, ad Horizontem recta, niſi forte adſit aliquod ædificiũ erectum, ibiq; fiant duæ ſtationes in A, & a, vt in problemate 4. Cadat autem primum dioptra, vel filum perpendiculi in vtraque ſtatione in vmbram verſam, vt in 1. figura problematis 4. quæ hic repetita eſt. [a] Et quoniã propter triangulorum ſimilitudinem eſt, vt AD, ad DE, ita AF, ad FG; erit permutando vt AD, ad AF, ita DE, ad FG. Eademque ratione erit vt, a d, ad aM, ita dH, ad MG. Cum ergo eadem ſit proportio AD, ad AF, quæ a d, ad aM, propter æqualitatem rectarum AD, a d, & AF, aM; [b] erit vt tota DE, ad totam FG, ita dH, hoc eſt, ita DI, ablata ad ablatam MG. [c] Igitur erit quoque reliqua IE, ad reliquam FM, hoc eſt, ad Dd, vt tota DE, ad totam FG. Quocirca ſi fiat,



a 4. ſexti.
b 11. quint.
c 19. quint.

Vt IE, differentia vmbrarum verſarum	*ad Dd, differentiam ſtationum:*	*Ita DE, maior vmbra verſa*	*ad FG, altitudinem,*

euadet cognita altitudo FG, in partibus differentiæ ſtationum Dd. Appoſita autem ſtatura menſoris FL, tota altitudo GL, quæſita cognita erit.

2 ABSCINDAT deinde dioptra in vtraque ſtatione vmbram rectam, vt in 2. figura problematis 4. quæ poſita eſt in pagina 92. [d] Et quia propter triangulorum ſimilitudinem eſt vt bH, ad a b, ita aM, ad MG: [e] erit rectangulum ſub bH, MG, æquale rectangulo ſub a b, aM. Eadem ratione erit rectangulum ſub BE, FG, æquale rectangulo ſub AB, AF, [f] quod eadem quoque ſit proportio BE, ad AB, quæ AF, ad FG. Cum ergo rectangulum ſub a b, aM, rectangulo ſub AB, AF, æquale ſit, ob æqualitatem rectarum a b, AB, & aM, AF, erit etiam rectangulum ſub bH, MG; rectangulo ſub BE, FG, æquale. [g] Quare erit vt tota bH, ad totam FG, ita BE, vel bO, ablata ad ablatam MG; [h] Ac propterea erit quoq; reliqua OH, ad reliquam FM, ſiue ad Aa, vt tota bH, ad totam FG. Quamobrem ſi fiat,

d 4. ſexti.
e 16. ſexti.
f 4. ſexti.
g 16 ſexti
h 19. ſexti

Vt OH, differentia vmbrarum rectarum	*ad Aa, differentiam ſtationum:*	*Ita bH, maior vmbra recta*	*ad FG, altitudinem,*

altitudo FG, prodibit cognita, quæ cum ſtatura menſoris FL. totam altitudinem LG, efficiet notam. Vbi vides eundem prorſus eſſe operandi modum in vmbris rectis, & in verſis.

3 POSTREMO in ſtatione inferiori reſecetur vmbra recta BE, & verſa dH: in ſuperiori ſtatione, vt in 3. figura problematis 4. quæ poſita eſt in pagina 94. Reducta ergo vmbra recta ad verſam, vt ad initium huius libri in conſtructione Quadrati Numer. 7. declarauimus: ſi fiat, vt IN, differentia vmbrarum verſarum ad Aa, differentiam ſtationum, ita DN, vmbra verſa maior ad aliud, procreabitur FG, altitudo in partibus differentiæ ſtationum Aa, quemadmodum Num. 1. demonſtrauimus. Quod ſi malueris reducere vmbram verſam ad rectam, eandem altitudinem reperies per duas vmbras rectas, ceu Num. 2. monſtrauimus.

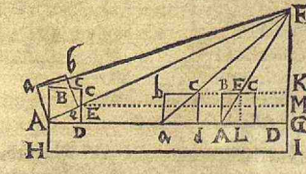
4 QVANDO fortaſſe in altera ſtationum linea fiduciæ tranſiret per punctum C, in arbitrio tuo erit, vel totum latus vmbræ verſæ, vel rectæ aſſumere.

SCHOLIVM.

1 EANDEM altitudinem, eiuſque diſtantiam ab oculo menſoris, vna cum hypotenuſa ab oculo ad faſtigium altitudinis extenſa, venari licebit ope quadrati ſtabilis per vnicam ſtationem, etiamſi ſolum faſtigium rei erectæ cernatur: adeo vt ſcholium hoc omnia præſtet, quæ in problemate 3. 4. 5. 6. & 7. per plures ſtationes inueſtigauimus, ac proinde diligenter perdiſcendum.

Quo pacto præcedētia 5. problemata, ope quadrati ſtabilis per vnicam ſtationem abſoluantur.

SIT enim altitudo metienda IF; ſtatura menſoris IG, vel HA. Paretur planum Horizonti æquidiſtans per A, tranſiens, in quo Quadratum firmari poſſit, aut collocari. Primum ergo inueſtiganda eſt hypotenuſa AF, hoc modo. Inclinetur quadratum, ita vt centrum dioptræ occupet ſuperiorem locum lateris aA, cuius inferius punctum ſtatuatur in A, oculo menſoris. Et totum quadratum tamdiu eleuetur, aut deprimatur, donec latus Ae, recta in cacumen F, vergat. Manente ſic Quadrato, menſor oculum transferat ad a, & per dioptram inſpiciat cacumen F, notenturque partes vmbræ verſæ ablciſſæ b c. Deinde fiat,



Vt b c, vmbra verſa	*ad latus a b, 1000.*	*Ita latus aA, notum in data menſura, quod nunc ponamus continere 3. pedes,*	*ad AF,*

Nam inuentus numerus dabit hypotenuſam AF, cognitam in partibus lateris aA. Verbi gratia. ſi c b, contineat 50. partes vmbræ verſæ, & aA, tribus pedibus ſit æqualis: ſi fiat vt 50. ad 1000. ita 3. ad aliud, reperietur AF, complecti 60. pedes. Si vero aA, ponatur 1000. comperietur eadem AF, particularum 200000. qualium 1000. in aA, comprehenduntur.

2 POST hæc deprimatur quadratum, ita vt latus AD, Horizonti æquidistet, centrumque dioptræ sit in A, quo posito, videbitur cacumen F, per inuentam hypotenusam AF, quæ primum secet vmbram versam CD, in E, vt in primo quadrato, inquiraturque portio dioptræ AE, in partibus laterum AD, DE, [a] quod fiet vel ex vtroque latere AD, DE, cognito: [b] Vel ex cognito per problema 1. ex vmbra DE, angulo DAE, ex latere DE, noto: [c] Vel denique si ex summa quadratorum ex AD, DE, descriptorum radix quadrata extrahatur. Inuenta portione AE, in partibus millesimis lateris AD, ductaque EM, ipsi AG, parallela, [d] si fiat,

a 6. Trian. rectil. b 5. triang. rectil. c 47. prim. d 2. sexti & componendo.

Vt AE, inuenta in partibus millesimis lateris AD,	*ad AF, in ijsdem partibus inuentam:*	*Ita GM, in ijsdem partibus cognita, cum æqualis sit ipsi DE,*	*ad GF,*

nota efficietur GF, in partibus millesimis lateris AD. Quod si rursus fiat,

Vt latus AD, 1000.	*ad 3. pedes, quos ponimus in AD, continueri:*	*Ita GF: in millesimis partibus lateris AD, inuenta,*	*ad GF,*

reperietur eadem GF, in mensura pedum. Et si adijciatur, statura mensoris GI, nota in eadem mensura, cognita fiet tota altitudo IF, in mensura pedum.

Vbi vides, nos eadem opera inuenisse quoque distantiam AF, ab oculo A, ad cacumen vsque F.

3 SECET deinde hypotenusa aF, inuenta (inuenietur autem vt Num. 1. dictum est) vtrumq; latus vmbræ in C, vt in 2. quadrato. [e] Si igitur fiat,

e 2. sextic. & componendo.

Vt portio dioptræ ac, inuenta in partibus a d, lateris, 1000. vt Num. 2. diximus	*ad aF, hypotenusam in ijsdem partibus inuentam:*	*Ita GK, 1000.*	*ad GF,*

prodibit GF, nota in partibus millesimis lateris dc: Et si rursus fiat,

Vt latus dc, 1000.	*ad 3. pedes, quibus æquale ponimus latus dc,*	*Ita GF, in millesimis partibus lateris dc, inuenta,*	*ad GF,*

inuenta erit eadem GF, in mensura pedum. Et si addatur statura mensoris GI, nota in eadem mensura, cognoscetur tota altitudo IF, in mensura pedum.

4 TERTIO secet hypotenusa inuenta AF (quæ inuenietur vt Num. 1. docuimus) vmbram rectam in E, vt in tertio quadrato. [f] Si ergo fiat.

f 2. sexti & componendo.

Vt portio dioptræ AE, inuenta, vt Num. 2. docuimus	*ad AF, hypotenusam inuentam*	*Ita GK, 1000.*	*ad GF,*

exibit GF, nota in partibus millesimis lateris DC. Et si iterum fiat,

Vt latus DC, 1000.	*ad 3. pedes in DC, contentos:*	*Ita GF, in partibus millesimis lateris Dc, inuenta,*	*ad GF,*

cognita erit eadem GF, in mensura pedum, &c.

AT QVE hac eadem ratione omnes aliæ lineæ inuentæ in partibus millesimis lateris Quadrati reuocabuntur ad quamcunque aliam mensuram, vt ad pedes, vel cubitos, &c.

5 DISTANTIA autem AG, vel HI, cognita euadet, [g] si fiat,

g 2. sextic. & componendo.

Vt portio dioptræ AE, in primo Quadrato, vel a c, in 2. Quadrato,	*ad hypotenusam AF, vel aF,*	*Ita latus AD, in 1. Quadrato vel a d, in 2. Quadrato*	*ad AG, in 1. quadrato vel ad aG, in secundo.*

VEL

Ducta EL, lateri AB, parallela in tertio quadrato,

Vt AE, portio dioptræ	*ad hypotenusam AF,*	*Ita vmbra recta BE, ipsi AL, æqualis,*	*ad AG.*

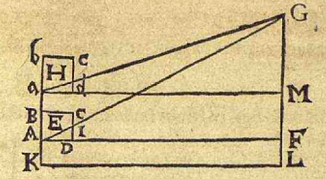
VIDES igitur, in hac ratione dimetiendæ altitudinis, ac distantiæ, etiam inaccessibilis, opus non esse duabus stationibus siue in plano, siue in hasta aliqua erecta faciendis; Quod non parum molestiæ plerunque afferre solet: sed solum inuestigandam esse prius hypotenusam per quadratum stabile inclinatum, Deinde portionem dioptræ inter eius centrum, & latus Quadrati, quod intersecat: quæ inuentio difficilis non est, vt patuit, cum mensor nunquam locum mutare cogatur.

ALTI-

ALTITVDINEM turris aut montis, ex eius summitate per Quadratum dimetiri, quando in plano summitatis Horizonti æquidistante, duæ stationes fieri possunt, & signum aliquod in Horizonte cernitur.

PROBLEMA VIII.

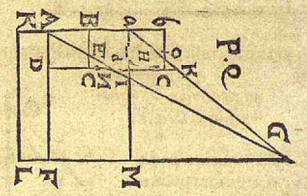
1 SIT altitudo DFMd, in cuius summitate, nimirum in plano Dd, duæ stationes fieri possint, ex quibus signum aliquod in Horizonte, videlicet G, videri possit. (Nos ne nouam cogeremus describere figuram, repetiuimus primam problematis 4. in uerso tamen ordine positam, ita vt literæ rectum situm non habeant. Et quamuis signum G, non cernatur ex A, propter planum Dd, eadem tamen erit ratio, si aliud signum longius distans eligatur, quod ex A, inspici possit.) Collocetur instrumentum in vtraque statione, vt latus vmbræ rectæ DC, vergat deorsum. Et primum vtraque vmbra recta secetur in E, H. (In hac enim inuersione latus DC, vmbræ rectæ, & BC, versæ deputatur, vt in constructione Quadrati Num. 4. initio huius libri declaratum est) atque vmbræ dH, in propinquiore statione, quæ semper minor est, æqualis abscindatur DI. Itaq; si fiat,



Vt IE, differentia vmbrarum rectarum	*ad Aa, differentiam stationum.*	*Ita AD, latus quadrati 1000.*	*ad AF,*

cognita erit recta AF, ex qua si demptur latus quadrati AD, notum in partibus differentiæ stationum, nota relinquetur altitudo DF, vel dM, quæsita. Inueniri autem hac ratione rectam AF, demonstratum est in problemate 4. Num. 1.

2 QVOD si in vtraque statione latus vmbræ versæ secetur in F, H, vt in 2. figura problematis 4. hic repetita, inuersa tamen, habebimus tres vias inuestigandi altitudinem AF, ex qua si tollatur latus Quadrati AD, manifesta relinquetur quæsita altitudo DF, vel dM. Nam reducta vtraque vmbra versa ad rectam, si fiat,



Vt IN, differentia vmbrarum rectarum,	*ad Aa, differentiam stationum:*	*Ita AD, latus quadrati 1000.*	*ad AF,*

Vel sine reductione.

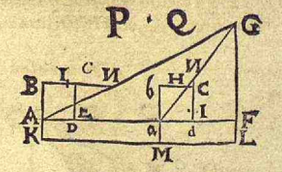
Vt P, numerus; qui fit ex OH, differentia vmbrarum versarum in a b, latus, quadrati,	*ad numerum, Q, qui fit ex vmbra versa bH, maiore in minorem BE,*	*Ita Aa, differentia stationum*	*ad AF,*

V E L

Vt Aa, differentia Quotientum, qui fiunt, si latus quadrati per vtramque vmbram versam dividatur,	*ad Aa, differentiam stationum notam in mensura aliqua:*	*Ita AF, vt 1.*	*ad AF,*

procreabitur semper altitudo AF, ab oculo inspectoris A, numerata: quemadmodum in problemate 4. Numer. 2. demonstratum est.

3 SI denique in vna statione secetur latus vmbræ versæ in E, & in altera latus vmbræ rectæ in H, vt in 3. figura problematis 4. hic inuerso ordine repetita: si vt in eodem problemate 4. Num. 3. demonstrauimus, reducatur vmbra versa ad rectam, & fiat,



Vt NI, differentia vmbrarum rectarum	*ad Aa, differentiam stationum:*	*Ita AD, latus quadrati*	*ad AF,*

Vel sine reductione.

Vt O, numerus, qui relinquitur, si numerus genitus ex vmbra versa in rectam ex quadrato lateris dematur,	*ad numerum P, qui ex vmbra versa BE, in latus AD, producitur:*	*Ita Aa, differentia stationum*	*ad AF,*

producetur AF, altitudo in partibus differentiæ stationum Aa, &c.

4 IAM vero si distantia FG, à turri ad signum G, in Horizonte visum nota fuerit, facilius per vnicam stationem in A, factam altitudinem coniiciemus. Nã si vmbra recta DC, secetur in E, vt in 1. figura: [a] Fiat autem.

a 4. sexti.

Vt vmbra recta DE,	*ad latus AD:*	*Ita distantia cognita FG,*	*ad AF,*

Vel quando vmbra versa BC, secetur in E, vt in 2. figura; [b] si fiat.

b 4. sexti.

Vt latus AB,	*ad vmbram versam BE,*	*Ita distantia cognita FG,*	*ad AF, efficie-*

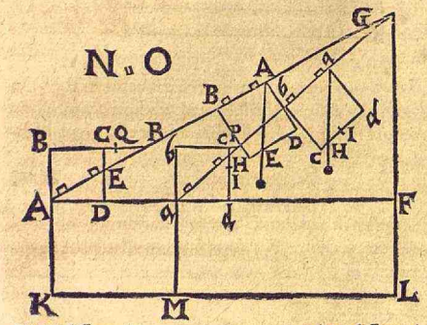
efficietur nota recta AF, in partibus distantiæ FG, à qua si dematur latus quadrati AD, notum in eisdem partibus distantiæ FG, nota relinquetur altitudo DF.

a 6. primi. QVOD si dioptra per C, transeat,[a] erit distantia FG, altitudini AF, æqualis. Dempto ergo latere quadrati AD, altitudo turris DF, cognita fiet.

HOC idem problema in scholio sequentis problematis absoluemus per vnicam stationem.

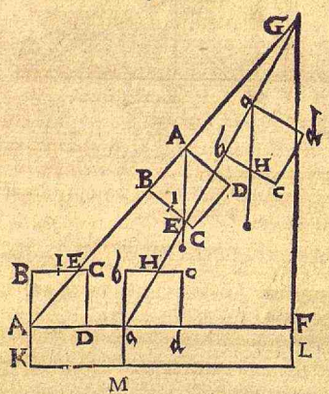
ALTITVDINEM turris vel montis ex eius summitate per duas stationes in hasta aliqua erecta factas, inuestigare per quadratum, quando signum aliquod in Horizonte videri potest.

PROBLEMA IX.



1 QVANDO in summitate non est planities tanta, vt in ea duæ stationes possint fieri, erigatur hasta aliqua in qua duæ stationes fiant. Vt si altitudo inuestiganda sit dF, erigatur hasta d A, & centro dioptræ applicato ad hastam primum in a, deinde in A, inspiciatur signum aliquod G, in Horizonte per radios aG, AG. secenturque primum vtraque vmbra recta in H, E, vt in prima figura problematis 3. quam hic inuerso ordine repetiuimus. Nam vt in præcedenti problemate diximus, in hac inuersione DC, sit latus vmbræ rectæ, & BC, versæ. Si ergo, vt in problemate 1. demonstrauimus Num. 1. fiat,

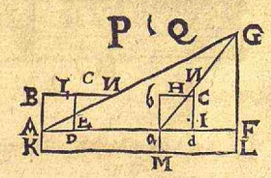
Vt HI, differentia vmbrarum rectarum — *ad Aa, differentiam stationum:* — *Ita dH, vmbra recta maior* — *ad AF,*



nota fiet tota recta AF, ex qua si dematur portio hastæ Ad, quod duo quadrata occupant, cognita fiet reliqua altitudo dF.

2 SI vero in vtraque statione vmbra versa à radiis intersecetur, vt in 2. figura problematis 3. hic repetita ordine inuerso, & fiat,

Vt IE, differentia vmbrarum versarum, — *ad Aa, differentiam stationum:* — *Ita BE, vmbra versa maior* — *ad AF,*



prodibit recta AF, ex qua si detrahatur portio hastæ A d, à principio primi quadrati ad finem secundi, reliqua dF, altitudo fiet quoque nota: veluti in problemate 3. Num. 3. ostendimus,

3 AT si in vna statione secetur latus vmbræ rectæ, & in altera latus vmbræ versæ, vt in 3. figura problematis 3. quæ inuersa huc translata est, reducenda erit vel recta vmbra ad versam, vel versa ad rectã. Nam vt in problemate 3. nu. 5. ostendimus si fiat,

Vt IN, differentia vmbrarum siue versarum, siue rectarum, — *ad Aa, differentiam stationum:* — *Ita BN, maior vmbra versa, vel dN, maior vmbra recta,* — *ad AF,*

efficietur nota recta AF, ex qua si dematur portio hastæ Ad, nota relinquetur altitudo dF.

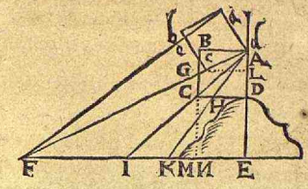
4 QVOD si turris esset AF, & ex duabus fenestris d, D, obseruatiõ fieret, deprehenderetur eodem modo altitudo turris AF, vt patet.

SCHOLIVM.

1 QVOD præcedentia duo problemata per duas stationes siue in plano summitatis turris, vel montis, siue in hasta aliqua erecta factas docuerunt, possumus per vnicam stationem quoque efficere, & simul distantiam à perpendiculo montis, vel à turre vsque ad signum in Horizonte propositum inuenire.

SIT

SIT enim montis alicuius, aut turris alitudo DE, & signum in Horizonte visum F. Erigatur ex D, hasta aliqua DA, & sumpta DA, æquali lateri quadrati stabilis, accommodetur quadratum ab c d, in A, ita vt centrum dioptræ a, sit superius, & latus inferius recta ad signum F, vergat. Posito deinde oculo in a, dirigatur dioptra versus F, notenturque partes in vmbra versa b C. Nam si fiat,



Altitudinem montis, vel turris ex eius vertice per vnicam stationem, vna cum distãtia à turre, vel perpendiculo montis ad signum in Horizonte propositum metiri.

Vt be, vmbra versa — *ad latus ba, 1000.* — *Ita latus a d, 1000.* — *ad AF,*

reperietur hypotenusa AF, in partibus lateris a d. Accommodetur rursus quadratum ABCD, vt centrum dioptræ A, sit superius, & latus CD, Horizonti æquidistet, hoc est, latus AD, hastæ rectæ congruat. Quo posito, videbitur signum F, per inuentam hypotenusam AF, quæ primum secet latus vmbræ versæ BC, in G, inquiraturque portio dioptræ AG, vt in schol. problem. 7. Num. 2. docuimus,[a] Nam si fiat,

a 4. sexti & componendo.

Vt portio dioptræ AG, inuenta — *ad inuentam hypotenusam AF,* — *Ita AL, vmbræ versæ BG, æqualis (ducta GL, parallela ipsi EF,)* — *ad AE,*

comperta erit AE, in partibus hypotenusæ AF. Et si detur latus quadrati AD, in ijsdem partibus notum, reliqua fiet DE, altitudo montis, aut turris. Quod si rursus fiat,

Vt portio dioptræ AG, inuenta — *ad inuentam hypotenusam AF,* — *Ita EM, (producta BC, vsque ad M,) lateri CD, æqualis,* — *ad EF,*

exibit nota distantia EF, in iisdem partibus hypotenusæ AF.

VBI vides eadem opera inueniri distantiam ab oculo A, vsque ad signum F, in Horizonte.

NON erit autem difficile ipsam DE, vel EF, si inuenta fuerit in partibus millesimis lateris AD, vel CD, in alia mensura, vt in pedibus, efficere notam; si fiat,

Vt AD, latus 1000. — *ad AD, notam in pedibus, vel bigratia in 3. vel in semisse vnius cubiti:* — *Ita DE, vel EF, inuenta in millesimis partibus,* — *ad aliud*

Atque hac eadem ratione omnes aliæ lineæ inuentæ in millesimis partibus lateris quadrati, reducentur ad aliam mensuram vel pedũm, vel cubitorum &c. Quod etiam in scholio problem. 7. monuimus.

2. SECET deinde hypotenusa AI, (quæ reperietur vt AF, inuenta est) quadratum in C: inuestigeturq; portio dioptræ AC, vt in schol. problem. 7. Num. 2. tradidimus.[b] Deinde fiat,

b 2. sexti & componendo.

Vt portio dioptræ AC, inuenta — *ad inuentam hypotenusam AI,* — *Ita AD, latus 1000.* — *ad AE,*

Nam numerus productus dabit AE, in partibus hypotenusæ AI. Atque totidem partes complectetur distantia EI;[c] quod AE. EI, æquales sint ob angulos semirectos EAI, EIA, æquales.

c 6. primi.

3 POSTREMO hypotenusa AK, inuenta eo modo, quo AF, cognita est, secet latus CD, vmbræ rectæ in H, reperiaturque portio dioptræ AH, vt in schol. problem. 7. Num. 2. docuimus.[d] Nam si fiat,

d 2. sexti & componendo.

Vt portio dioptræ AH, inuenta — *ad inuentam hypotenusam AK,* — *Ita AD, latus quadrati* — *ad AE,*

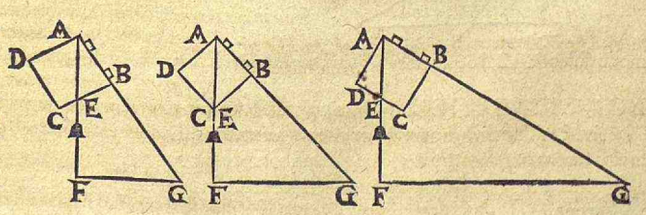
cognoscetur AE, in partibus hypotenusæ AK, &c. Et si rursus fiat, ducta prius HN, ipsi AE, parallela,

Vt portio dioptræ AH, inuenta — *ad inuentam hypotenusam AK,* — *Ita EN, vmbræ rectæ DH, æqualis* — *ad EK,*

nota quoque reddetur distantia EK, in iisdem partibus hypotenusæ AK, &c. Quod si ex vertice D, appareret radix montis, inueniretur eodem modo distantia à radice vsque ad E, quæ ablata ex distantia FE, inuenta notam quoque relinquet distantiam ab F, vsque ad radicem montis, quæ nonnumquam posset desiderari.

EX summitate turris, vel aliqua eius fenestra, distantiam à base turris ad signum propositam in Horizonte per quadratum cognoscere.

PROBLEMA X.



1 SIT turris aliqua A-F, & distantia metiẽda FG. Si igitur altitudo turris cognita est, aut eius portio inter fenestrã A, & basem F; inspiciatur signum G, per pinnacidia quadrati pẽduli Et si quidem filum perpẽdiculi intersecet latus vmbræ rectæ in E, vel per punctum C, transeat, Fiat autem.

Vt latus

Vt latus AB, partium 1000. *ad vmbram rectam BE,* *Ita AF, altitudo turris nota* *ad FG,*

cognita erit distantia FG, quæsita in partibus turris notæ.

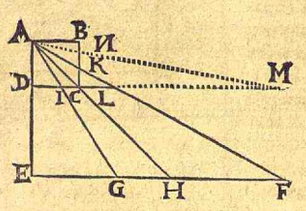
SI autem vmbra versa secetur in E, & fiat,

Vt vmbra versa DE, *ad latus DA, partium 1000.* *Ita AF, altitudo turris cognita* *ad FG,*

efficietur quoque nota eadem distantia FG, in partibus turris cognitæ.

2 Per quadratum stabile eandem quoque distantiam adipiscemur. Sit enim rursus turris quæpiam DE, & distantia metienda EG, vel EH, vel EF. Si igitur dioptra secet latus vmbræ rectæ in I. Et fiat,

Vt latus quadrati AD, 1000. *ad vmbram rectam DI:* *Ita altitudo AE, ex turre & latere quadrati AD, conflata.* *ad EG,*



prodibit distantia quæsita EG.

SI autem dioptra per C, transeat, erit distantia EH, altitudini AE, notæ æqualis.

SI denique vmbra versa intersecetur in K; fiat autem,

Vt vmbra versa BK, *ad latus quadrati 1000.* *Ita altitudo nota AE,* *ad EF,*

inuenietur distantia EF, in partibus altitudinis AE.

HÆC enim omnia in 2. problem. Num. 1. & 2. demonstrata sunt.

3 QVOD si altitudo turris cognita non sit, inuestiganda ea primum erit per problema 8. vel 9. vel potius per scholium problem. 9. aut certe, si commode fieri possit, per chordam aliquam cum appenso perpendiculo demissam exploranda. Deinde procedendum erit, vt Num. 1. & 2. dictum est.

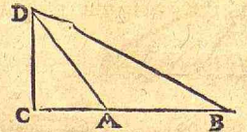
VERVM sine cognitione turris idem assequemur ea ratione, qua in problem. 6. vel 7. altitudinem propositam indagauimus, etiamsi distantia vsque ad altitudinem sit ignota. Nam si in 6. problemate turris sit D, F, distantia autem metienda FG, efficiemus illud, si in hasta aliqua erecta DA, fiant duæ stationes oculi in a, A. Solum quod ibi dictum est de vmbra versa, hic de recta intelligatur, & contra.

PARI ratione, si in 7. problemate turris sit DF, & distantia metienda FG, inueniemus eam, si in plano summitatis turris fiant duæ stationes oculi in A, a. Solum quod ibi dicitur de vmbra versa, hic etiam de recta intelligatur. Nam si figuræ problem. 6. & 7. hoc est, figuræ proble. 3. & 4. inuertantur, vt altitudines fiant AF, AF, latus quadrati DC, ad vmbram rectam, & BC, ad versam pertinebit, vt initio huius libri in constructione quadrati Num. 4. explicauimus.

SED hanc distantiam longe facilius in scholio præcedentis problematis inuenimus per vnicam stationem, vt patuit in distantia EF, &c.

EX altitudinis alicuius fastigio, etiamsi altitudo sit mensoris statura, distantiam inter duo signa in plano, cui altitudo insistit, si ea distantia è directo mensoris iaceat, & vtrumque eius extremum cerni possit, per quadratum comprehendere.

PROBLEMA XI.



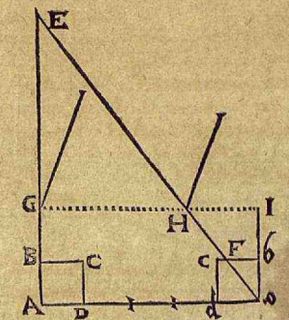
1 SIT distantia metienda AB, è directo altitudinis CD, in qua oculus mensoris existat in D, fastigio. Per problema antecedens inuestigetur ex vertice D, tam distantia CB, quam CA. Minor enim hæc ex illa maiore detracta notam relinquet distantiam AB, inter signa A, & B, in partibus altitudinis CD, in quibus videlicet distantiæ etiam CB, CA, inuentæ sunt.

2 SI altitudo CD, sit statura mensoris, reperietur eodem modo distantia AB, si oculus mensoris in D, vtrumque extremum A, B, cernere possit, vt liquet.

LONGITVDINEM in Horizonte extensam metiri per Quadratum, quando mensor in vno eius extremo existens alterum extremum videre non potest, propter tumorem aliquem interiectum, neque altitudo in promptu est, sed solum ad dextram, vel sinistrā per lineam perpendicularem recedere potest ad locum, è quo alterum extremum appareat.

PRO-

PROBLEMA XII.



1 SIT longitudo metienda AE, cuius extremum E, ex A, mensor videre non possit, neq; adsit altitudo, sed tamen si ad dextram, vel sinistram recedat per lineam perpendicularem Aa, vsque ad a, illud videre possit. Quadratum stabile ita erigatur, vt eius planum longitudini AE, congruat. Debet namque constare, quænam recta ad extrema A, E, pertineat, hoc est, rectam constituat, cum data longitudine. Deinde collocato quadrato in Horizontis plano, ita vt latus AB, a longitudine non recedat, extendatur recta per latus AD, vsque ad a, vnde extremum, E, appareat, sitq; spatium Aa, per aliquam mensuram notum. Erectum autem in a, quadratum circumducatur, donec per eius planum extremum E, cernatur. Post hæc idem quadratum in Horizonte collocetur, latusque a d. perpendiculari Aa, congruat: Et dioptra circumuoluatur, donec eius linea fiduciæ rectæ aH, per quam extremum E, inspectum fuit, respondeat, noteturque vmbra versa bF, abscissa. Eruntque triangula abF, aAE, æquiangula, propter rectos angulos b, A, & alternos baF, AEa, æquales. [a] Quamobrem si fiat,

a 4. sexti.

Vt vmbra versa bF, *ad quadrati latus a b, 1000.* *Ita spatium Aa, notum* *ad AE,*

cognita erit longitudo AE, in partibus spatii Aa.

SI forte dioptra latus d c, vmbræ rectæ intersecet, (quod raro continget, cum plerunque AE, maior sit, quam Aa,) [b] erit tunc

b 4. sexti.

Vt latus a d, 1000. *ad vmbram rectam abscissam:* *Ita spatium Aa,* *ad longitudinem,*

vt perspicuum est, si ducatur ex a, recta secans latus dc, &c.

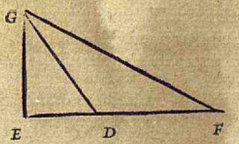
SI denique dioptra fortassis per c, transiret, [c] esset spatium Aa, longitudini quæsitę æquale; propterea quod tunc fieret angulus semirectus d a c, ideoque & recta a c, si duceretur, faceret cum AE, angulum semirectum, atque adeo angulo d a c, æqualem.

c 6. primi.

2 EADEM distantia longitudine AE, cognoscetur, si tam in G, quam in H, baculus, seu arundo ad angulos rectos figatur, ita vt ex A, a, radii per arundinem incedentes ad E, ferantur, spatiumque Aa, cognitum sit: vt in 2. probl. Num. 6. traditum est.

LONGITVDINEM in Horizonte è directo mensoris iacentem cognoscere, ad cuius extrema neque accedere liceat, neque è loco mensoris eam dimetiri, neque vlla adsit altitudo, dummodo ad dextram vel sinistram per lineam perpendicularem ad locum aliquem ire possit mensor, ex quo vtrumque extremum appareat.

PROBLEMA XIII.

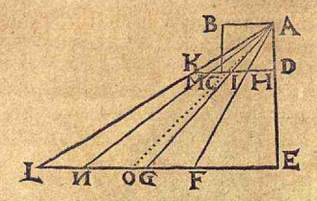


1 LONGITVDO metienda sit ED, è directo mensoris in F, existentis, ita vt neque ad eam accedere liceat, neque eam è loco F, metiri, neque vlla adsit altitudo: Sed solum per lineam perpendicularem FG, ad locum G, vnde vtrumque extremum D, E, videatur, possit accedere. Per problema præcedens inquiratur ex G, tam longitudo FE, quam FD. Hæc enim ex illa detracta notam relinquet propositam longitudinem DE.

ALTITVDINEM montis, vel turris ex eius fastigio, quando è directo mensoris interualIum aliquod inter duo signa, vel etiam inter signum quodpiam ac turrim cognitum est, per quadratum coniicere.

PROBLEMA XIV.

1. SIT mons, aut turris DE, ſitque primum è directo menſoris in faſtigio D, exiſtentis interuallum FG, notum. Accommodetur quadratum ſtabile in ſummitate D, ita vt latus AD, perpẽdiculare ſit ad Horizontem, & CD, Horizonti parallelum. Inſpecto igitur per dioptram vtroque termino F, G, ſecetur vmbra recta in H, I. [a] Quoniam igitur eſt, vt IH, ad HD, ita GF, ad FE: [b] Item ob triangulorum ſimilitudinem, vt HD, ad DA, ita FE, ad EA; erit ex æquo, vt IH, ad DA, ita GF, ad EA. Igitur ſi fiat,



a *ſchol. 4. ſexti.*
b *4. ſexti.*

Vt IH, differentia vmbrarum rectarum	*ad DA, latus quadrati*	*Ita interuallum GF, cognitum*	*ad EA,*

exibit nota recta EA. Et ſi demptur latus quadrati DA, (quod fieri debet notum in partibus interualli GF,) reliqua fiet nota altitudo DE, in partibus interualli GF.

c *4. ſexti.*

2 SIT tota deinde diſtantia EG, nota. Inſpiciendum ergo ſolum eſt extremum G. [c] Nam ſi fiat,

Vt ID, vmbra recta	*ad DA, latus quadrati:*	*Ita diſtantia nota GE,*	*ad EA,*

efficietur rurſus nota recta EA, &c.

3 QVANDO vmbra verſa BC, interſecatur, vt ſi ſpatium notum ſit LN, reducenda eſt vtraque vmbra verſa ad rectas DK, DM. Nam rurſus erit, vt KM, differentia vmbrarum rectarum ad latus DA, ita ſpatium notum LN, ad EA.

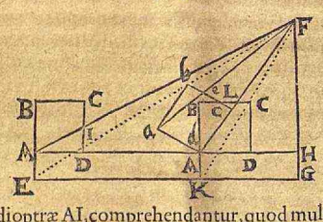
SIC etiam quando vnus radius vmbram rectam, & alter verſam interſecat, vt in ſpatio LG, contingit, reuocanda erit vmbra verſa ad rectam DK, vt iterum ſit KI. differentia vmbrarum rectarum ad DA, latus, vt ſpatium notum LG, ad EA.

4 SI denique radius per C, tranſiret, ſumendum eſſet totum latus CD, pro vmbra recta, at vmbra verſa, ſi qua eſſet, ad rectam reducenda.

DISTANTIAM ab oculo, vel pede menſoris (vbicunque exiſtat) ad quoduis punctum in aliqua altitudine notatum per quadratum exquirere.

PROBLEMA XV.

1 EXPLORANDA ſit diſtantia puncti F, in muro aliquo ſiue perpendiculari ad Horizontem, ſiue inclinato, vel etiam in tecto quopiam ab oculo A, vel à pede E, poſita ſtatura menſoris AE. Et ſit primum altius punctum F, quam oculus A. Concipiatur ex F, demiſſa perpendicularis FG, & ad hanc ducta ab oculo A, alia perpendicularis AH. Collocato ergo ita quadrato, vt latus AD, Horizonti æquidiſtet, inſpiciatur punctum F, radiuſque AF, vel dioptra auferat vmbram verſam DI. Per problema 3. vel 4. vel potius per ſcholium problem. 7. inueſtigetur diſtantia AH, etiamſi punctum H, non appareat: diligenterque inquiratur, quot partes milleſimæ lateris AD, in ſegmento dioptræ AI, comprehendantur, quod multis modis, vt in ſchol. probl. 7. Num. 2. docuimus, exequemur hoc modo. Primum quoniam duo latera AD, DI, in rectangulo triangulo ADI, data ſunt, [a] ignorari non poterit baſis in partibus laterum. Deinde quia per probl. 1. ex vmbra DI, notus ſit angulus DAI, [b] cognoſcetur rurſus baſis AI. Tertio [c] quia quadrata AD, DI, quadrato AI, æqualia ſunt; ſi ex aggregato eorum radix quadrata eruatur, exhibebit ea radix baſem AI, notam. His peractis, [d] ſi fiat,



a *6. triang. rectil.*
b *5. triang. rectil.*
c *47. prim.*
d *4. ſexti.*

Vt latus AD, 1000.	*ad portionem dioptræ AI, nuper inuentam:*	*ita diſtantia AH, nuper etiam inuenta*	*ad AF,*

cognita erit diſtantia AF, quæſita in partibus inuentæ diſtantiæ AH.

DISTANTIA autem EF, à pede ad datum punctum F, ita reperiemus. Quoniam in triangulo AEF, duo latera AF, AE, cognita ſunt, cum illud proxime ſit inuentum, & hoc ſtaturæ menſoris æquale ſit; comprehenduntque angulum notum EAF, vtpote conflatum ex recto EAH, & DAI, qui per problema 1. inuentus eſt ex vmbra verſa DI: [e] notum efficietur latus quoque EF, quod quæritur.

e *12. trian. rectil.*

2 QVOD ſi vmbra recta ſecetur in L, vt in altero quadrato, vbi iterum menſoris ſtatura eſt AK: Inuenta portione dioptræ AL, in partibus milleſimis lateris quadrati ex angulo BAL, &c. necnon diſtantia AH, ex problem. 3. vel 4. vel ex ſcholio probl. 7. [f] Si fiat,

f *4. ſexti.*

Vt BL,			

Vt BL, vmbra recta	*ad LA, portionem dioptræ inuentam:*	*Ita diſtantia AH, inuenta*	*ad AF,*

prodibit rurſus nota diſtantia AF, in partibus diſtantiæ inuentæ AH.

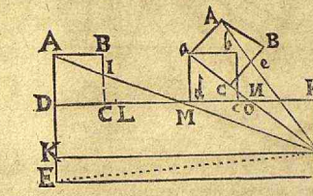
NON aliter procedes, ſi dioptra per C, tranſeat: [g] Cum tunc etiam ſit, vt AD, latus ad partem dioptræ AC, inuentam, vt prius, ita diſtantia inuenta AH, ad diſtantiam quæſitam AF.

g *4. ſexti.*

DISTANTIA autem KF, à pede K, vſque ad F, [h] inuenietur, vt prius, ex duobus lateribus notis AF, AK, & angulo ab ipſis comprehenſo FAK; qui nimirum conflatur ex recto A, & DAL, complemento anguli BAL, quem per problema 1. cognitum efficit vmbra recta BL.

h *12. trian. rectil.*

3 SED ſit iam punctum F, oculo A, depreſſius, & ſtatura menſoris ſit AE. Concipiatur ex F, ducI FK, Horizonti parallela, vel ad AE, perpendicularis. Item per F, recta GH, ipſi AE, parallela. Accommodato autem quadrato, vt latus AD, rectum ſit ad Horizontem, & DC, Horizonti æquidiſtans, cogitetur DC, latus productum vſque ad H, punctum perpendicularis GH. Primum itaque reperiatur altitudo AK, per problema 8. vel 9. duabus ſtationibus factis in recta DH, vel in haſta DA, protracta, vel certe per ſcholium problematis 9. Quamuis enim ſtatura menſoris AE, cognita ſit, ignoratur tamen, quanta ſit eius pars AK, quam parallela FK, per imaginationem ducta abſcindit: ita vt omnino neceſſarium ſit altitudinem AK, inquirere, quod per 8. problema facile exequemur, ſi in vtraque ſtatione vmbra verſa ſecetur in I, N, (quod plerunque hic continget) & vtraque abſciſſa BI, bN, ad rectas DM, dO, reuocetur: Nam ſi fiat,



Vt LM, differentia vmbrarum rectarum	*ad Dd, differentiam ſtationum:*	*Ita AD, latus*	*ad AK,*

inuenta erit altitudo AK, oculo poſito in eius ſummitate A, vt in dicto problem. 8. Numer. 2. diximus, &c. Quæ tamen altitudo AK, facilius per ſcholium problem. 9. reperiri poteſt.

ITAQVE quia vmbra BI, per 1 problema patefacit angulum BAI, hoc eſt, alternum AFK, ſibi æqualem, nec non & eius complementum FAK; erunt in triangulo rectangulo AKF, duo anguli acuti cogniti, vna cum latere AK, proxime inuento; [i] Itaque ſi fiat,

i *5. triang. rectil.*

Vt ſinus totus	*ad latus AK, inuentum:*	*Ita AF, ſecans anguli FAK,*	*ad AF,*

cognita fiet AF, in partibus lateris inuenti AK. Vel inuenta parte dioptræ AI, in partibus milleſimis lateris quadrati, vt ſupra dictum eſt prope initium huius problematis, [k] ſi fiat,

k *4. ſexti.*

Vt BI, vmbra verſa	*ad IA, partem dioptræ inuentæ:*	*Ita KA, altitudo inuenta*	*ad AF,*

nota rurſus efficietur diſtantia AF, in partibus rectæ AK, inuentæ.

PORRO diſtantiam EF, à pede menſoris ad punctum F, [l] inueniemus, vt ſupra: propterea quod in triangulo AEF, duo latera AE, AF, nota ſunt, cum illud ſit ſtatura menſoris, hoc autem ſit proxime inuentum, angulumque continent notum FAK, vt paulo ante diximus.

l *12. triang. rectil.*

4 NON aliter vtraque diſtantia cognoſcetur, ſi punctum F, in Horizonte ſit poſitum, qui Horizon per FK, intelligatur tranſire, ita vt ſtatura menſoris, vel aliqua alia altitudo nota, ſit AK. Nam cognita portione dioptræ AI, vt ſupra traditum eſt; [m] ſi fiat,

m *4. ſexti.*

Vt BI, vmbra abſciſſa	*ad IA, portionem dioptræ inuentam:*	*Ita AK, altitudo, vel ſtatura menſoris*	*ad AF,*

nota euadet diſtantia AF, in partibus ſtaturæ menſoris, vel altitudinis notæ AK,

[n] Rurſus ſi fiat,

n *4. ſexti*

Vt BI, vmbra abſciſſa	*ad AB, latus quadrati 1000.*	*Ita AK, altitudo vel ſtatura menſoris*	*ad KF,*

cognita etiam fiet diſtantia KF, à pede menſoris vſque ad punctum F, in partibus eiuſdem ſtaturæ menſoris, vel altitudinis notæ AK. Vbi vides, vtramque diſtantiam cognoſci per vnicam ſtationem, quando punctum datum eſt in Horizonte.

5 SED vbicunque punctum F, exiſtat, ſiue in Horizonte, ſiue in ſublimi, vel infra oculum, inueniemus nihilominus vtramque diſtantiam per vnicam ſtationem, hoc modo. Quando punctum F, eſt in ſublimi, vt in prima figura, accommodetur quadratum ita, vt dioptræ centrum a, ſit ſuperius, & latus d c, verſus punctũ F, dirigatur. Inſpecto enim per dioptram puncto F, notetur vmbra verſa e b. [o] Et fiat,

o *4. ſexti*

Vt vmbra verſa e b,	*ad latus b a:*	*Ita latus a d,*	*ad AF,*

Nam numerus productus notam faciet diſtantiam AF, in partibus lateris quadrati. Non aliter diſtantiam KF, à pede menſoris elicies, ſi eodem pacto quadratum ad punctum K, applicabis, vt conſtat.

QVANDO autem punctum F, depressius est oculo, vt in secunda figura, erigendus est baculus a d minor, quam statura mensoris, & in a, applicandum quadratum, vt rursus centrum dioptræ A, sit superius, & latus a c, ad punctum F, vergat. Nam viso puncto F, ex A, per dioptram, notataque vmbra versa e B, si fiat,

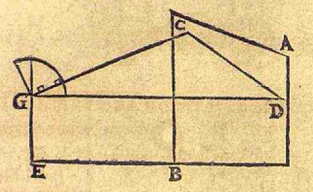
Vt vmbra versa e B, ad latus B A, Ita latus A a, ad a F,

exibit distantia a F, nota in partibus lateris Aa. Distantia porro EF, à pede mensoris conijcietur, si quadratum in E, applicetur, vt in prima figura dictum est. Quando denique punctum F, est in Horizonte, inuenietur vtraque distantia, vt Num. 4. tradidimus.

INTERVALLVM inter duo signa, vel puncta in quolibet plano siue recto ad Horizontem, siue inclinato, per quadratum metiri.

PROBLEMA XVI.

1 IN quolibet plano eleuato AB, inquirendum sit interuallum CD, ex plano EB. Posito oculo in G, vt statura mensoris sit G E, inuestigetur per præcedens problema, vtraque distantia GC, GD, in partibus staturæ mensoris G E. Deinde applicato quadrato stabili ad oculum G, ita vt eius planum per puncta C, D, transeat, atque vnum eius latus ad punctum D, recta vergat (quod fiet, si posita linea fiduciæ dioptrę supra illud latus, punctum D, per foramina pinnacidiorum conspiciatur) vertatur dioptra, donec per eam punctum quoque C, appareat, & vmbra abscissa notetur, per quam ex problemate 1. anguli CGD, magnitudo addiscatur. Quod si alterum latus quadrati vltra rectam GC, existat, erit angulus CGD, acutus: si vero citra rectam GC extiterit, dictus angulus erit obtusus: quem cognoscemus, si ad rectum adijciemus reliquum angulum, inter alterum illud latus, & rectam GC, quem quidem inuestigabimus, vt de acuto CGD, diximus, si nimirum in recta CD, mente notemus punctum, in quod alterum illud latus productum incideret. Nam si tunc latus illud rectæ GC, congruat, & dioptra ad punctum notatum vergat, indicabit vmbra inter latus illud, & lineam fiduciæ angulum prædictum reliquum, vt in problemate 1. dictum est. Si denique alterũ illud latus præcise rectæ GC, congruat, angulus CGD, rectus erit. His peractis, quia in triangulo CGD, latera GC, GD, nota continent angulum G, etiã cognitum; [a] cognoscetur quoq; tertiũ latus CD, quod quæritur.



a 12. Trian. rectil.

2 VERVM inuentis distantiis GC, GD, in aliqua mensura, vna cum angulo G, facilius, licet non tam certo, interuallum CD, cognoscemus hoc pacto. Descripto angulo G, seorsum, sumatur in GC, portio quotlibet partium lateris quadrati, verbi gratia 500. id est, semissis lateris. Et fiat, vt distantia inuenta GC, ad distantiam inuentam GD, ita partes acceptæ 500. ad aliud. Nam Quotiens dabit numerum quartum proportionalem earundem partium lateris quadrati; quibus si capiatur in GD, portio æqualis, [b] erit interuallum inter extrema puncta dictarum portionum, æquidistans interuallo CD; vt constat, si illæ portiones in rectas GC, GD, in figura transferrentur; propterea quod in illis extremis punctis rectæ GC, GD, sectæ essent proportionaliter. Quare si illud interuallum circino mensuretur in eisdem partibus lateris quadrati, continebit interuallum CD, totidem particulas rectæ GC, in 500. partes æquales diuisæ, quot in illo interuallo comprehenduntur ex particulis lateris quadrati: cum sit vt portio particularum 500. ad interuallum illud, ita GC, diuisa in partes æquales 500. ad CD. Quæ particulæ reducentur ad mensuram, in qua inuentæ sunt GC, GD: si fiat, vt GC, quatenus 500. ad mensuras in GC, inuentas, ita CD, inuenta in particulis rectæ GC, in 500. partes diuisæ, ad aliud.

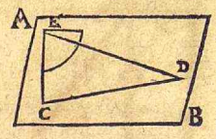
b 2. sexti

QVIA vero vix per circinum accurate reperiri potest interuallum illud inter extremitates proportionalium, magis exquisite, licet laboriosius, interuallum propositum cognoscetur per 12. triang. rectilineorum.

INTERVALLVM transuersum in Horizonte, cuius vtrumque extremum videri potest, per quadratum metiri.

PROBLEMA XVII.

1 IN Plano Horizontis AB, iaceat interuallum CD, in transuersum, pes autem mensoris in E, ita vt longitudo CD, in vtramque partem producta per E, non transeat. Nam quando recta CD, è directo mensoris iacet, inuestigabitur ea per problema 11. Itaque vt transuersum interuallum CD, cognoscatur, inquirenda erit primum vtriusque extremi puncti C, D, distantia à pede mensoris E, vt Num. 4. problematis 15. traditum est, per vnicam stationem. Deinde angulus CED, explorandus, quod fiet, si vnum latus quadrati rectæ EC, cõgruat, & dioptra rectæ ED. Nam vmbra abscissa inter latus illud, ac dioptram ostendet quantitatem anguli CED, vt in problemate 1. dictum est: qui quidem acutus erit, si alterum latus vltra rectam ED, existet: rectus vero si præcise rectæ ED, congruet: obtusus denique, si citra rectam ED cadet; quem cognoscemus, si recto angulo adiiciemus reliquum acutum, qui deprehendetur, vt in præcedenti problemate docuimus. Quoniam ergo triangulum habemus CED, cuius duo latera EC, ED, cognita sunt, vna cum angulo comprehenso E: [a] cognitũ quoq; erit tertiũ latus CD, in partibus rectarũ EC, ED.



a 12. Trian. rectil.

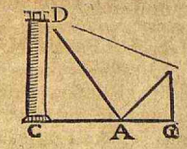
EADEM recta CD, cognita erit, si in rectis EC, ED, seorsum descriptis cum angulo E, inuento sumantur partes ipsis EC, ED, proportionales, &c. vt Num. 2. præcedentis problematis factum est.

DISTANTIAM alicuius signi in Horizonte positi à summitate turris, vel muri alicuius, licet ad ipsum signum accessus nõ pateat, per quadratum eruere, vbicunq; mensor existat.

PRO-

PROBLEMA XVIII.

1 IN Horizontis plano punctum A, distet à summitate D, alicuius altitudinis per rectam AD, quam sic venabimur. Vbicunque oculus mensoris existat, nimirum in B, indagentur per problema 15 distantiæ punctorum A, D, ab oculo mensoris B. Deinde angulus exploretur ABD, vt in problemate 16. docuimus. Nam sic habebimus triangulum ABD, cuius duo latera nota sunt BA, BD, vna cum angulo B. [a] Igitur tertium quoque latus AD, cognitum erit.



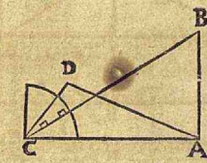
QVOD etiam inuenietur, vt Num. 2. problem. 16. docuimus, si in rectis BA, BD, cum angulo B, seorsum ductis sumentur partes ipsis BA, BD, proportionales, &c.

a 12. Trian. rectil.

ALTITVDINEM inaccessibilem, cuius basis non videatur, & ad quam per nullum spatium secundum rectam lineam accedere possit mensor, aut recedere, vt duæ stationes fieri possint, sed solum ad dextram, sinistramue ad locum, è quo eius basis cernatur, per quadratum explorare.

PROBLEMA XIX.

1 ALTITVDO metienda sit AB, inaccessibilis, ad quam ex C, loco mensoris non liceat accedere, aut ab ea recedere secundum lineam rectam, sed solum in transuersum vsque ad D, vnde basem A, videre possimus. Per problema 17. inuestigetur ex D, interuallũ transuersum AC. Nam per 5. problema, quando iam distantia CA, manifesta est, altitudo AB, reddetur nota, quam quærimus in partibus distantiæ inuentæ CA.

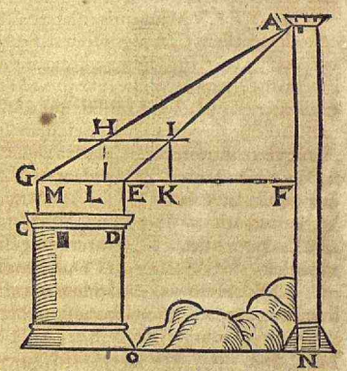


CÆTERVM ex scholio problematis 7. facilius per vnicam stationem in C, factam inuestigabitur & altitudo AB, & distantia AC, vna cum hypotenusa BC.

LONGITVDINEM maiorem ex minori cognita, etiamsi solum maioris altitudinis vertex cernatur, per quadratum efficere notam.

PROBLEMA XX.

1 MAIOR altitudo AN, metienda proponatur ex minori aliqua turri CO, cognita, ex qua solum cacumen A, non autem basis N, appareat. Fiant in summitate duæ stationes in C, & D, si planum summitatis id permittat, staturaq; mensoris sit CG, vel DE, & ad AN, intelligatur ducta perpendicularis GEF. Per 6. problema reperietur altitudo AF, ad quam si adiicietur altitudo minor DO, vna cum mensoris statura CG, hoc est, recta FN, cognita fiet tota altitudo maior AN.



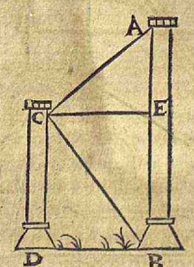
2 QVOD si in summitate tanta planities non sit, vt duæ stationes fieri possint, erigenda est hasta aliqua ad Horizontem recta, nisi forte adsit ædificium quodpiam erectum, ibique faciendæ duæ stationes. Nam tunc per problema 7. inuenietur altitudo inter cacumen maioris altitudinis, & rectam, quę ab inferiori statione Horizonti dicitur parallela. Cui si apponetur altitudo minor ab inferiore statione vsque ad eius basem, conflabitur tota altitudo maior. Vt in figuris problematis 4. si maior altitudo sit GL, & minor AK, fiantq; duæ stationes in A, a, inferior vna, & altera superior, reperietur per 7. problema altitudo GF, cui si addetur minor altitudo AK, ab inferiore statione vsque ad basem, componetur tota altitudo maior GL.

PORRO facilius ex scholio problem. 7. altitudinem AF, eruemus, si in G, bis quadratum accommodetur, vt in eo scholio diximus. Vt si in figura eius scholii maior altitudo foret IF, & minor cognita AH, inuenirętur GF, vt ibi ostensum est, &c.

ALTITVDINEM maiorem ex minori incognita, si tamen basis maioris cerni possit, per quadratum venari.

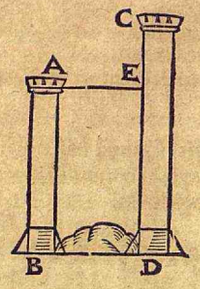
PROBLEMA XXI.

1 IN figura problematis 17. lib. 2. addiscatur altitudo AE, vel per problema 6. vel 7. aut potius per scholium problema. 7. si C, sit summitas minoris altitudinis CD. Deinde quia basis B, maioris altitudinis ponitur posse videri ex C, inquiratur etiam altitudo minor CD, per problema 8. aut 9. vel potius per scholium problem. 9. si C, fuerit summitas minoris altitudinis CD. Hæc enim adiecta ad inuentam altitudinem AE, conficiet totam maiorem altitudinem AB, notam, quæ desideratur.



ALTITVDINEM minorem ex maiori cognita, licet basis minoris cerni non possit, per quadratum scrutari.

PROBLEMA XXII.



1 MINOR altitudo AB, ex maiore CD, cognita proponatur dimetienda. Intelligatur ducta recta AE, Horizonti BD, æquidistans, vt ED, fiat minori altitudini AB, æqualis. Si igitur ex summitate C, per problema 8. vel 9. aut potius per scholium probl. 9. exploretur altitudo CE, inspecto nimirum cacumine A, ac si esset signum aliquod in Horizonte AE, ex C, visum: atq; hæc altitudo inuenta CE, ex maiore altitudine CD, quæ cognita ponitur, detrahatur, reliqua fiet minor altitudo AB, quam inquirimus.

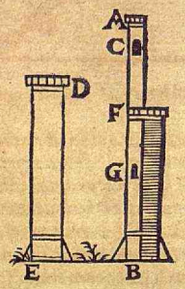
ALTITVDINEM minorem ex maiori incognita, dummodo basis minoris appareat, per quadratum elicere.

PROBLEMA XXIII.

1 FIGVRA præcedentis problematis repetatur. Et quia basis B, minoris altitudinis, tanquam signum quodpiam in Horizonte positum, videri potest, ex hypotenusi, nota efficietur per problema 8. aut 9. vel potius per scholium problemat. 9. maior altitudo CD. Quare, vt in præcedenti problemate dictum est, minor altitudo AB, ex maiore CD, proxime inuenta cognoscetur. Quod est propositum.

PORTIONEM altitudinis maioris ex minore altitudine, & minoris portionem ex maiore, per quadratum percipere.

PROBLEMA XXIV.

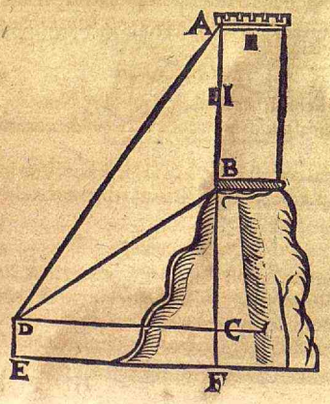


1 SIT portio AC, maioris altitudinis AB, exquirenda ex minore altitudine DE; Item portio GF, altitudinis minoris FB, ex maiore altitudine DE. Si altitudo DE, minor est reliqua portione CB, maioris altitudinis, inuestiganda erit per problema 20. vel 21. vtraque altitudo maior AB, CB, ex minori DE, prout videlicet DE, cognita fuerit, aut incognita. Nam CB, ablata ex AB, notam relinquet propositam portionem AC. Si vero DE, maior est reliqua portione FB, si nimirum maioris altitudinis portio AF, metienda proponatur: inuestiganda quidem erit maior altitudo AB, ex minore DE, per problema 20. vel 21. At vero minor altitudo FB, ex maiore DE, per problema 22. vel 23. explorandaerit, prout videlicet DE, nota fuerit, aut ignota. Nam rursus FB, detracta ex AB, notam relinquet portionem propositam AF.

2 NON secus per problema 22. vel 23. indaganda erit vtraque altitudo minor FB, GB, ex maiore DE, si forte illarum differentia FG, inuenienda sit.

ALTITVDINEM, cuius basis imposita sit monti, vel alteri cuipiam altitudini, & vtraque illius extremitas cerni possit, etiamsi infimum punctum alterius, cui imponitur, lateat, & eiusdem puncti infimi distantia à loco mensoris cognita non sit, per quadratum ex valle, aut ex plano Horizontis explorare.

PROBLEMA XXV.



1 HVIVSCEMODI altitudo est turris supra montem posita, & portio alicuius ædificii inter duas fenestras, vel duo signa, quorum alterum altero superius est. Sit igitur supra montem BF, altitudo turris AB, proposita. Ex aliquo loco E, in planitie, aut valle, vnde vtrumq; turris extremum conspiciatur, inuestigetur per probl. 6. vel 7. tam altitudo AF, quâ BF, prout scilicet duę stationes fiunt aut in plano, aut in aliqua hasta erecta. Vtraq; tamen altitudo AF, BF, facilius inuenietur per scholium proble. 7. si in E, bis quadratum accommodetur, vt in eo scholio factum est. Vtraque altitudine inuenta, altitudo montis BF, dempta ex tota altitudine AF, notam relinquet optatam altitudinem AB.

SCHO-

SCHOLIVM.

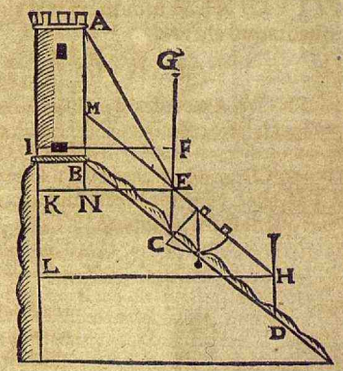
ITAQVE si AB, portio superior totius alicuius altitudinis AF, desideretur, indaganda erit per probl. 6. vel 7. aut potius per scholium probl. 7. tam tota altitudo AF, quam eius portio BF. Earum enim differentia notam dabit superiorem portionem AB, desideratam. *Suprema, media atque infima pars altitudinis, quo pacto metienda sit.*

SI autem media aliqua portio IB, cognoscenda sit, coniicienda rursum erit per problem. 6. vel 7. aut potius per scholium probl. 7. vtraque altitudo IF, BF; vt earum differentia IB, nota reddatur.

SI denique infima pars BF, proponatur inquirenda, exploranda ea erit per problema quoque 6. vel 7. aut potius pet scholium probl. 7.

DISTANTIAM accliuem montis à loco mensoris vsque ad basem altitudinis monti impositæ, etiam non visam, vna cum ipsa altitudine, quando mensor in ascensu montis consistit, prope verum, beneficio quadrati efficere cognitam.

PROBLEMA XXVI.



1 SIT turris AB, monti imposita, in cuius ascensu, seu latere mensor consistat in C, ex quo loco basem turris videre non possit. Erigatur hasta aliqua CG, ad Horizontem, non autem ad latus montis, perpendicularis, sitque mensoris statura CE. Cogitetur ducta EK, ad altitudinem perpendicularis, aut Horizonti æquidistans. Applicato autem quadrato stabili ad hastam in puncto E, (si pendulum adhibeatur, constituendus etiam erit oculus in E,) dirigatur dioptra versus cacumen A; & per vmbram abscissam inueniatur angulus AEK, vt in problemate 1. tradidimus. Deinde fiat alia statio superior in F, in hasta, ductaque per cogitationem recta FI, ad altitudinem perpendiculari, dirigatur rursus dioptra versus A, atq; eodem modo angulus eruatur AFI,[a] Et quia angulus AFG, duobus angulis FEA, FAE, æqualis est, si auferatur AEF, complementum prioris anguli AEK, in statione inferiori E, inuenti, ex AFG, complemento posterioris anguli in superiori statione F, deprehensi, reliquus fiet angulus EAF, cognitus. Quonim igitur in triangulo AEF, duo anguli A, E, cogniti sunt, vna cum latere EF, hoc est, cum differentia stationum,[b] nota fient reliqua latera AE, AF. [a] 32. primi. [b] 10. Tria. rectil.

2 POST hæc erigatur alius baculus DH, ad Horizontem rectus, sumptaque mensoris statura ipsi CE, æquali, & ducta recta HL, ad altitudinem perpendiculari, applicetur ad H, quadratum, ac dioptra in punctum E, dirigatur, rursumque per problema 1. ex vmbra abscissa angulus eliciatur EHL, ac radius visualis HE, altitudini occurrere concipiatur in M,[c] qui ipsi BCD, lateri montis parallelus erit. Concipienda etenim sunt tria puncta B, C, D, in vna recta linea iacere, ac si DC, producta ad basem turris pertineret. [d] Quia vero angulus EHL, angulo MEK, internus externo æqualis est, si EHL, cognitus, hoc est, MEK, ex angulo AEN, in priori statione E, obseruato, detrahatur, notus relinquetur angulus AEM: Est autem & angulus EAM, cum complementum sit anguli AEN, in priori statione E, obseruati, cognitus. Igitur & AME, reliquus duorum rectorum cognitus erit: qui quidem etiam relinquitur, si NMH, complementum anguli MHL, in statione postrema H, inuenti ex duobus rectis detrahatur. Quapropter cum in triangulo AEM, omnes anguli noti sint, vna cum latere AE, quod paulo ante inueniemus,[e] cognoscentur quoque reliqua duo latera ME, AM, ac propterea distantia EM, vel CB, inuenta erit. Et si rectæ AM, inuentæ addatur mensoris statura MB, tota turris altitudo AB, cognita erit. [c] 33. primi. [d] 29. pri. [e] 10. Tria. rectil.

CVRANDVM autem est magnopere, vt tria puncta B, C, D, in vna linea recta iaceant, id quod in problemate 22. lib. 2. faciendum esse monuimus.

3 QVOD si basis altitudinis ex latere montis videri possit, nullo ferme labore problema per vnicam stationem efficiemus. Nam si in D, statuatur quadratum, ita vt centrum dioptræ sit superius, & latus infimum recta in B, feratur, dirigenda erit dioptra versus idem punctum B.[f] Nam si fiat [f] 4. sexti.

Vt vmbra versa abscissa *ad latus quadrati:* *Ita latus quadrati* *ad aliud,*

inuenietur distantia DB, in partibus lateris quadrati, vt liquido constat ex iis, quæ in probl. 15. Numer. 5. scripsimus, patetque in 1. figura eiusdem problematis; si in ea cogitetur ascensus montis AF, in secundo quadrato, & F, basis altitudinis monti impositæ.

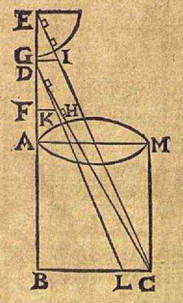
DEINDE si idem quadratum in D, ita statuatur, vt rursus centrũ dioptræ sit in sublimi, & latus infimum ad fastigium altitudinis A recta tendat, idemque punctum A, per dioptram inspiciatur, reperietur eodem pacto distantia à D, vsque ad A; si fiat,

Vt vmbra versa abscissa *ad latus quadrati:* *Ita latus quadrati* *ad aliud,*

POSTREMO, accommodato quadrato, ita vt vnum latus rectæ DB, congruat, & dioptra in A, dirigatur, inuenietur angulus, quem rectæ DB, DA, efficiunt, vt in problem. 16. Num. 1. docuimus. Si ergo hic angulus seorsum describatur, & in rectis DB, DA, capiantur duæ portiones proportionales, vt in eodem problem. 16. Numer. 2. tradidimus, reperietur altitudo AB, per interuallum inter duas illas portiones, vt ibi interuallum CD, indagauimus.

PROFVNDITATEM putei, vel ædificii cuiusuis ad perpendiculum erecti, si modo angulus fundi, vel signum aliquod in fundo positum conspiciatur, per quadratum efficere cognitam.

PROBLEMA XXVII.



1 HOC nihil est aliud, nisi turrim ex eius vertice, quando in Horizonte signum aliquod apparet, per duas stationes in hasta aliqua factas metiri, vt in problem. 9. factum est. Quare eius problematis praxim hic breuiter repetemus. Sit puteus, seu ædificium erectum ABCM, cuius angulus C, in fundo, vel signum quodpiam C, in fundo positum conspici possit. Erecta hasta AE, in orificio putei, vel summitate ædificii, fiant duæ stationes oculi mensoris in D, E, & applicato latere quadrati ad hastam bis, vt modo centrum dioptræ in D, & modo in E, statuatur, dirigatur dioptra versus C. Si igitur in vtraque statione dioptra vmbram rectam intersecet, quod plerunque in puteorum dimensione fieri solet: Fiat autem,

Vt differentia vmbrarum rectarum	*ad DE, differentiam stationum:*	*Ita vmbra recta maior*	*ad EB,*

exibit recta EB, nota in partibus differentiæ stationum DE. Si ergo auferatur recta EA, composita ex differentia stationum DE, & portione hastæ DA, quæ plerunq; staturæ mensoris esse solet æqualis, vel certe facile mensurari potest, nota relinquetur altitudo AB, quæsita.

2 SI vero in vtraque statione vmbra versa intersecetur, & fiat,

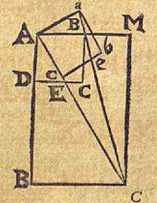
Vt differentia vmbrarum versarum	*ad DE, differentiam stationum:*	*Ita vmbra versa maior*	*ad EB,*

fiet rursus nota recta EB, &c.

3 SI denique in vna statione latus vmbræ rectæ secetur, & in altera latus vmbræ versæ, reducenda erit vel vmbra recta ad versam, vel versa ad rectam. Nam si rursus fiat

Vt differentia vmbrarum siue versarum, siue rectarum,	*ad DE, differentiam stationum:*	*Ita vmbra versa vel recta maior*	*ad EB,*

iterum producetur recta EB, in partibus differentiæ stationum DE, &c.



PER vnicam quoque stationem assequemur altitudiem putei, quemadmodum in scholio probl. 9. ex montis vertice eius altitudinem mensi sumus: si videlicet in A, quadratum ita statuatur, vt centrum a, dioptræ superius sit, & latus infimum AC, ex A, ad punctum C, vergat, ad inueniendam distantiam, vel hypotenusam AC, &c. vt in eo scholio factum est, atq; hæc figura apposita declarat. Secundo enim quadratum ita locandum est, vt A, centrum dioptræ sit in A, & latus AD, lateri putei AB, adhæreat; adeo vt per dioptram puncto C, inspecto, radius visualis ab hypotenusa AC, non differat. Itaque si fiat.

Vt e b, vmbra versa	*ad latus b a,*	*ita latus a A,*	*ad aliud,*

inuenietur hypotenusa AC. Inuenta deinde portione dioptræ AE, in secundo quadrato, vt in scholio probl. 7. docuimus: [a] Si rursus fiat,

Vt portio dioptræ AE, inuenta	*ad hypotenusam inuentam AC:*	*ita latus AD,*	*ad aliud*

a 22. sextic. componendo.

prodibit altitudo, siue profunditas AB.

4 QVOD si latitudo orificij AM, vel fundi BC, cognita fuerit, quæ facile per aliquam mensuram cognosci poterit, facilius per vnam duntaxat stationem in D, factam, & per vnicam applicationem quadrati, profunditatem AB, coniiciemus. Nam si fiat,

Vt vmbra recta, si ea abscissa fuerit,	*ad latus quadrati:*	*Ita latitudo cognita BC,*	*ad AB,*

Vel

Vt latus quadrati	*ad vmbram versam, si ea fuerit abscissa:*	*Ita latitudo cognita BC,*	*ad AB,*

producetur AB, profunditas nota in partibus latitudinis.

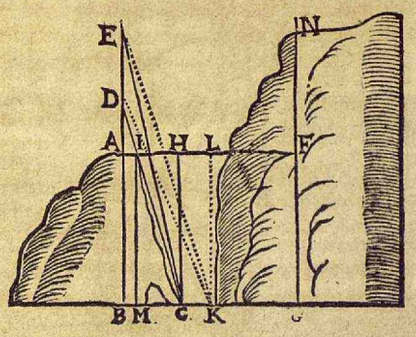
Et si

ET si forte dioptra per punctum C, in quadrato transeat, erit latitudo BC, rectæ AB, æqualis.

HÆ porro praxes demonstratæ sunt omnes in prædicto probl. 9. hac vltima Numer. 4. excepta, quam in problem. 8. Num. 4. demonstrauimus.

PROFVNDITATEM vallis, eiusdemque descensum obliquum, si non sit valde inæqualis, & eius terminus, vel aliquod in ea signum conspici possit, per quadratum cognoscere.

PROBLEMA XXVIII.



1 HOC etiam aliud nihil est, nisi altitudinem quampiam ex eius summo fastigio per duas stationes in hasta aliqua erecta dimetiri, vt in problem. 9. factum est, & in præcedenti problemate repetitum. Sit enim vallis inter duos montes AB, NG, posita, & terminus ipsius C, ex monte AB, conspici possit. Erecta hasta AE, in qua duæ stationes oculi mensoris fieri possint in D, E, si reliqua construantur, vt in problemate 24. lib. 2. cuius hic figuram iterauimus; inuestigabitur recta EB, vt in 1. figura præcedentis probl. recta EB, fuit inuenta. Et si demat portio hastæ AE, altitudo montis AB, vel profunditas vallis HC, reliqua fiet nota.

2 DESCENSVS autem obliquus IC, ita colligetur. Per vmbram à dioptra ad C, directa abscissam eliciatur angulus BDC, ex 1. problemate, hoc est, angulus CIM, [a] qui ei æqualis est, externus interno; eritque proinde reliquus angulus ICM, notus, vt pote illius complementum. Quocirca cum in triangulo CIM, anguli acuti cogniti sint, vna cum latere IM, nuper inuento; [b] basis IC, ignorari non poterit.

a 29. prim.

b 15. Trian. rectil.

SED hæc omnia facilius per vnicam stationem inuestigabuntur, si in D, puncto hastæ quadratum bis applicetur, vt in præcedenti problemate Num. 2. & in scholio problem. 9. factum est in puncto A, &c.

3 QVOD si terminus C, non cernatur, eligatur aliquod signum K, in valle, quod ex stationibus D, & E, appareat. Ita enim per problema 9. vel potius per eius scholium, eadem altitudo IM, vel HC, inuenietur.

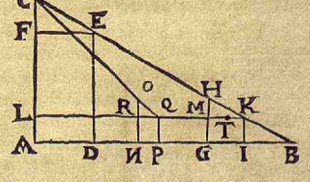
IMMO si in plano vallis duæ stationes commode fieri possint, percipietur ex illis eadem altitudo IM, per problem. 6. vel per scholium probl. 7. Descensus vero obliquus IC, tanquam interuallum inter duo signa I, & C, per problema 16. indagandus erit.

4 EANDEM denique profunditatem CH, venari licebit ex altiore monte NG, si modo terminus C, minoris montis, vel aliquod signum in valle appareat ex cacumine N, non aliter, quam in problemate 22. vel 23. minorem altitudinem ex maiore deprehendimus. Nam hic minor altitudo inquirenda est CH, & maior NG, ex cuius vertice N, terminum C, videri posse statuimus.

DISTANTIAM inter pedes mensoris, & signum aliquod in plano Horizontis beneficio baculi metiri, quando extremus terminus distantiæ videri potest.

PROBLEMA XXIX.

1 ABSOLVTIS dimensionibus, quæ per quadrantem, & quadratum fieri solent, libet nonnullas alias rationes dimetiendi adiungere, vt illis, quando neque quadrans, neque quadratum adest, vti possimus. Ex pluribus autem modis illas solum seligemus, quæ faciliorem vsum habent.



SIT ergo distantia metienda DB. In D, erigatur baculus DE, minor altitudine AC, ab oculo mensoris ad pedes, rectus ad Horizontem, quod fiet, si filum cum perpendiculo baculo adhærebit, vel lapillus ex E, demissus in punctum D, cadet. Deinde retrocedat mensor vsq; ad A, donec radius visualis ex C, prodiens, & per extremum E, baculi transiens occurrat puncto B; intelligaturque duci recta EF, ipsi AB, parallela. Quoniam igitur triangula CFE, EDB, æquiangula sunt; quod anguli F, D, sint recti, [a] & ECF, BED, æquales, internus & externus, &c. [b] Si igitur fiat.

a 29. prim.

b 4. sexti.

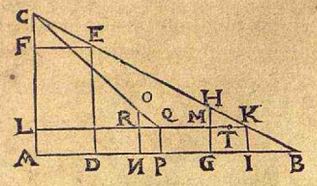
Vt CF, differentia inter baculum DE, & mensoris staturam AC,	*ad FE, spatium inter mensorem & baculum:*	*Ita ED, longitudo baculi noti*	*ad DE,*

nota prodibit distantia quæsita DB, in partibus baculi DE, vel staturæ mensoris AC. Debent enim baculus, & statura mensoris per vnam eandemque mensuram esse cognita.

ALTITVDINEM turris, aut alterius rei per baculum indagare.

PRO-

PROBLEMA XXX.



1 SIT in figura præcedentis problematis metienda altitudo AC. Figatur in terra baculus GH, rectus ad Horizontem, & aliquantulum maior statura mensoris ab oculo ad pedes quæ sit IK. Deindè retrocedat mensor vsque ad I, ita vt eius oculus in K, constitutus fastigium C, inspiciat: intelligaturque ducta recta KL, Horizonti AB, parallela, secans baculum in M. [a] Quoniã igitur triangula KMH, KLC, similia sunt, propter parallelas MH, LC: si fiat,

[a] *coroll. 4. sexti.*

Vt KM, spatium inter mensorem, & baculum	*ad MH, differentiam inter baculum & staturam mensoris:*	*Ita distantia KL, quæ nota fiat per aliquam mensuram,*	*ad LC,*

producetur recta LC, cui si adiicietur statura mensoris AL, tota altitudo proposita AC, cognita erit in partibus staturæ mensoris, vel distantiæ KL.

2 QVOD si accessus non pateat ad altitudinem AC, vt distantiam IA, metiri possimus, figatur idem baculus, vel alius illi æqualis NO, accedendo videlicet propius ad altitudinem. Deinde mensor retrocedat ad P, vt eius oculus in Q, existens per summitatem baculi O, iterum fastigium C, videat: secetur que baculus NO, à recta KL, in R. [b] Et quia est, vt KM, ad MH, ita KL, ad LC: Item vt QR, ad RO, ita QL, ad LC: [c] Est autem maior proportio KL, ad LC, quam QL, ad eandem LC; erit quoque maior proportio KM, ad MH, quam QR, ad RO, ipsi MH, æqualem. (Cum enim & totæ GH, NO, & ablatæ GM, NR, æquales sint, erunt quoque reliquæ MH, RO, æquales) [d] Igitur KM, maior erit, quam QR. Abscissa ergo KT, æquali ipsi QR, [e] quoniam est, vt KM, ad MH, ita KL, ad LC, erit permutando, vt KM, tota ad totam KL, ita MH, ad LC. Eadem ratione erit QR, hoc est, KT, ablata ex KM, ad QL, ablatam ex KL, vt RO, ad LC, hoc est, vt MH, ad LC. Igitur & reliqua TM, ad reliquam KQ, erit vt tota KM, ad totam KL : Vt autem KM, ad KL, ita paulo ante ostendimus esse MH, ad LC. Quapropter si fiat.

[b] *4. sexti.*
[c] *8. quinti.*
[d] *ro. quint.*
[e] *4. sexti.*

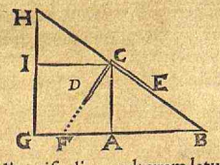
Vt TM, differentia inter spatia KM, & QR, vel KT, à mensore vsque ad baculos,	*ad KQ, differentiam stationum:*	*Ita MH, differentia inter baculum, & mensoris staturam,*	*ad LC,*

efficietur nota LC, cui si addetur statura mensoris AL, nota quoque cuadet proposita altitudo AC.

3 IAM si prima statio fiat in Q, & secunda in K, recedendo magis ab altitudine, non variabitur praxis & demonstratio, vt liquet.

DISTANTIAM in plano Horizontis inter mensorem, & signum quoduis beneficio normæ adinuenire.

PROBLEMA XXXI.



1 PROPOSITA sit distantia AB. In A, loco mensoris figatur ad angulos rectos baculus AC, paulo minor statura mensoris, & per mensuram, per quam mensoris statura cognita est, notus. Angulus deinde rectus normæ C, summitati baculi applicetur, & eius latus CE, circa C, paulatim attollatur, deprimaturue, donec radius visualis per latus interius normæ CE, incedens feratur in punctum extremum B, diligenterque notetur punctum F, in quod radius visualis per alterum latus interius CD, transiens incidit. [a] Et quoniam AC, media est proportionalis inter AF, quæ in partibus baculi nota efficiatur, & distantiam AB: si fiat,

[a] *coroll. 8. sexti.*

Vt AF, inter baculum, & punctum F, cognita	*ad baculum AC:*	*Ita baculus AC,*	*ad AB,*

Hoc est, si quadratus numerus baculi per AF, diuidatur, prodibit in Quotiente distantia AB, nota in partibus baculi.

2 NON abs re foret, si duo clauiculi in vtroque latere normæ interiori affigerentur, vt radius visualis per illos incedens rectius in B, & F, feratur.

ALTITVDINEM turris, aut alterius rei per normam inuestigare.

PROBLEMA XXXII.

1 IN figura præcedẽtis problematis sit metiẽda altitudo GH. Figatur rursus in A, loco mensoris baculus AC, cuius summitati C, angulus rectus normæ applicetur, eiusque latus CE, paulatim eleuetur, deprimaturue, donec

donec per latus interius CE, vertex altitudinis H, conspiciatur, punctumq; F, in quo alterum latus CD, incurrit, notetur. Et quoniam ducta recta CI, Horizonti parallela, triangula ACF, HCI, æquiangula sunt; quod anguli A, I, recti sint, & ACF, HCI, reliqui ex rectis ACI, HCD, (si nimirum communis auferatur DCI,) æquales: [a] si fiat,

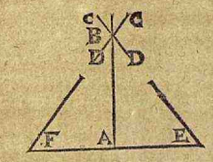
[a] *4. sexti.*

Vt baculus AC,	*ad AF, inter baculum, & punctum F, cognitam:*	*Ita distantia CI, vel AG, quæ nota fiat per aliquam mensuram*	*ad IH,*

procreabitur IH, nota, ad quam si adiicietur longitudo baculi AC, vel GI, proposita altitudo GH, cognita erit.

DISTANTIAM in plano Horizontis, quæ non sit valde magna, alio modo facillimo dimetiri.

PROBLEMA XXXIII.



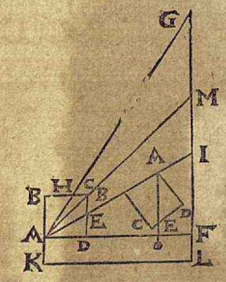
1 QVANDO planum aliquod exiguam habet longitudinem, sed tamen mensurari non potest, ob aliquod impedimentum, cuiusmodi sunt latitudines fluminum, & stagnorum, quorum latitudines, quas nunc pro longitudinibus accipimus, mensurari nequeunt, ob interiectam aquam, vtemur inter alia hoc etiam artificio. Prope ripam fluminis, aut stagni, vel alterius cuiuscunque rei metiendæ, figatur baculus AB, ad Horizontem rectus, cui in puncto B, accommodetur virgula CD, ita vt circa B, deprimi aut eleuari possit, donec radius visualis per CD, transiens occurrat extremo E, distantiæ AE, metiendæ. Deinde virgula CD, manente immobili, ne angulus DBA, mutetur, vertatur baculus AC, ad rectos semper angulos Horizonti insistens, donec radius visualis per eandem virgulam CD, incedens occurrat plano alicui prope flumen, aut stagnum, in quo nimirum mensor existit, & quod mensurari possit, in puncto F. Quoniam ergo duo anguli A, B, trianguli ABE, duobus angulis A, B, trianguli ABF, æquales sunt, & latus AB, commune: [a] erunt latera AE, AF, æqualia: atque idcirco, si FA, in plano per aliquam mensuram efficiatur nota; distantia quoque AE, cognita erit.

[a] *26. primi.*

2 ALII hoc ipsum efficiunt sine baculo, hac ratione. Erigunt se ad angulos rectos cum Horizonte: Deinde deprimunt pileum, qui sit aliquantulum latus, donec radius visualis per extremitatem pilei excurrens incidat in terminum E, distantiæ AE, metiendæ: Pileo vero immobili manente, vertunt se versus planum aliquod mensurabile, notantque in eo punctum F, in quo radius visualis ipsi plano occurrit. Nam rursus longitudo AF, quæ per mensuram aliquam cognoscenda est, distantiæ AE, propositæ æqualis est: propterea quod statura mensoris fungitur tunc munere baculi AB, & pileus depressus vices gerit virgulæ CD, vt constat.

ALTITVDINEM cuiusque rei erectæ ex eius vmbra, quam Sole lucente proiicit, si nota fuerit, per quadratum deprehendere.

PROBLEMA XXXIV.



1 HOC problema à quinto non differt, nisi quod hic vtimur radio Solis pro radio visuali, & longitudine vmbræ, quam altitudo, Sole lucente, proiicit, pro distantia à mensore ad altitudinem vsque. Sit ergo altitudo FG, vel FI, vel FM, eiusque vmbra proiecta FA. Dirigatur quadratum versus Solem (licet hoc non fiat è directo altitudinis) & transeunte radio Solis per foramina pinnacidiorũ, notetur quanta vmbra siue recta, siue versa à dioptra, vel filo perpendiculi in quadrato abscindatur. Nam ita fese habebit vmbra recta HB, in quadrato ad latus AB, vt vmbra proiecta AF, ad altitudinem FG. Item ea est proportio lateris AD, ad vmbram versam DE, in quadrato, quæ vmbræ proiectæ AF, ad altitudinem FI. Denique dioptra, vel filo perpendiculi per punctum C, incedente, tanta erit vmbra proiecta AF, quanta est altitudo FM, quæ omnia in problemate 5. demonstrata sunt. Igitur si fiat

Vt vmbra recta, HB, in quadrato abscissa	*ad latus AB,*	*Ita longitudo vmbræ proiectæ AF,*	*ad FG,*

Vel

Vt latus AD,	*ad vmbram versam, DE, abscissam in quadrato:*	*Ita longitudo vmbræ proiectæ AF,*	*ad FI,*

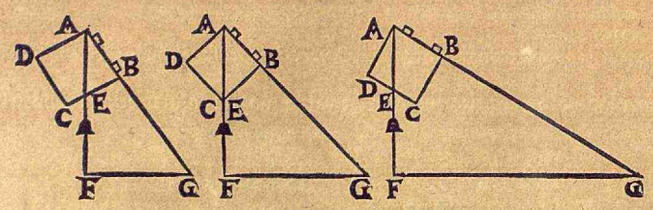
altitudo proposita FG, vel FI, proueniet nota, &c.

LONGITVDINEM vmbræ ab altitudine, Sole lucente, quando altitudo est cognita, ope quadrati apertam, & manifestam facere.

PRO-

PROBLEMA XXXV.

1 HOC etiam problema à secundo diuersum non est: solum hic pro distantia accipimus longitudinem vmbræ, quam altitudo nota, Sole lucente, proiicit. Sit ergo altitudo AF, eiusque vmbra proiecta FG. Dirigatur quadratum versus Solem, vbicunque mensor extra vmbram cõstiterit, & transeunte radio Solari per pinnacidiorum foramina obseruetur vmbra siue recta, siue versa, quam filum perpendiculi, vel dioptra abscindet. Ita namque se habebit latus quadrati BA, ad vmbram eius rectam BE, abscissam, vt altitudo AF, ad vmbram proiectam FG. Item sic erit vmbra versa DE, in quadrato ad latus AD, vt altitudo AF, ad vmbram proiectam FG. Dioptra denique, vel filo perpendiculi per punctum C, transeunte, altitudo AF, longitudini vmbræ proiectæ FG, æqualis est, quæ omnia in problemate 2. demonstrauimus. Quamobrem si fiat,



Vt latus AB, ad vmbram rectam abscissam BE, Ita altitudo nota AF, ad FG,

Vel

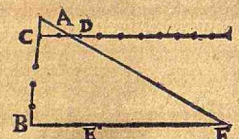
Vt vmbra versa DE, abscissa in quadrato ad latus AD, Ita altitudo nota AF, ad FG,

exibit nota longitudo vmbræ proiectæ FG, &c.

DISTANTIAM in Horizonte inter mensorem, & signum aliquod visum, beneficio simplicissimi cuiusdam instrumenti comperire.

PROBLEMA XXXVI.

1 CONSTRVATVR instrumentum hoc modo. Accipiatur baculus rectus AB, paulo minor, quam mensoris statura, diuidaturque in 5. partes, vel etiam plures, paucioresue æquales, & in prima eius parte C, vel in alia quacunque, infigatur alius baculus CD, ad rectos angulos, in quo sumantur ordine quotcunq; palmi, aut pedes. In extremitate quoq; baculi AB, infigatur alius baculus BE, ad angulos rectos: cõstructumq; erit instrumentũ, quo varias magnitudines licebit metiri, vt patebit: Sit enim primum metienda distantia BF, cuius terminum F, mensor in altero termino B, existens videre possit ex A, etiamsi in medio sint valles, & alia impedimenta. Constituatur instrumentum in tali situ, vt AB, sit ad Horizontem perpendicularis, & BE, eidem æquidistans. Inspecto extremo F, ex A, notetur summa cura ac diligentia punctum D, in baculo CD, per quod radius visualis transit. [a] Nam cum triangula ACD, ABF, sint similia [b] si fiat,



Vt AC, ad AB, Ita CD, ad BF,

inuenta erit distantia BF, in partibus CD. Itaque si AC, est quinta pars, verbi gratia, baculi AB, erit quoque CD, quinta pars distantiæ BF. Et quia in nostro exemplo CD, continet 2. pedes, si eos multiplicemus per 5. producentur 10. pedes pro distantia BF.

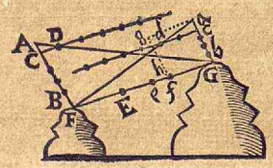
a *coroll. 4. sexti.*
b *4. sexti.*

2 CVRANDVM autem erit diligenter, vt quando radius visualis non transit per aliquem pedem integrum baculi CD, inuestigetur, quot decimæ, vel centesimæ vnius pedis in particula abscissa contineantur, per ea, quæ lib. 1. cap. 2. Num. 14. scripsimus, quod fiet, si in regula CD, decem pedes comprehendantur. Idemque de quacunque alia mensura intelligendum est, si ea in CD, loco pedum signetur.

3 VERVM hoc eadem facilitate præstitimus ope quadrati, tum penduli, tum stabilis.

DISTANTIAM inter duo montium aut turrium cacumina, ope prædicti instrumenti coniicere.

PROBLEMA XXXVII



1 SINT duo cacumina montium F, G. Posito puncto B, prædicti instrumenti in cacumine F, minoris montis, deprimatur baculus AB, donec baculus BE, recta in cacumen G, tendat, quod per duos clauiculos in B, E, infixos, facile fiet, vt Numer. 2. problem. 31. diximus. Manente in hoc situ instrumento, inspiciatur cacumen G, ex A, obseruetur punctum D, intersectionis radii AG, cum baculo CD. [a] Nam cum æquiangula sint triangula ACD, ABG, si fiat,

a *coroll. 4. sexti.*

Vt AC,

Vt AC, nota in partibus AB, ad AB, notarum partium: Ita CD, nota in data mensura ad BG,

cognoscetur distantia BG, in partibus CD. Vt si AC, est quinta pars ipsius AB, & CD, contineat 1. pedem, & insuper $\frac{2}{3}$. si $1\frac{2}{3}$. quinquies sumatur, efficietur distantia BG, pedum $8\frac{1}{3}$.

2 NON aliter distantia bF, ex maioris montis cacumine G, inuestigabitur, vt figura indicat.

EODEM modo procedet, si puncta F, G, sint fastigia duarum turrium, aut si vnum sit fastigium turris & alterum cacumen montis, vt constat.

3 IDEM hoc per quadratum fiet hoc modo. Sit quadratum a b f g, statuaturque angulus b, in cacumine G, & latus b f, deprimatur, ita vt recta in cacumen F, tendat, si productum intelligatur, obseruetur q; vmbra versa abscissa g h, à radio visuali aB. Nam quia triangula a g h, Bb a, æquiangula sunt, [a] si fiat

a *4. sexti.*

Vt g h, vmbra versa ad g a, latus quadrati: Ita latus quadrati a b, ad B b,

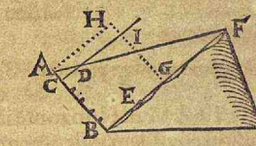
hoc est, si quadratus numerus lateris, nimirum 100000. diuidatur per vmbram versam, gignetur in Quotiente distantia Bb.

IDEMQVE fieret, si angulus Quadrati in B, collocetur, infimumque latus recta à B, in cacumen G, tenderet, &c.

LONGITVDINEM ascensus alicuius montis, si eius cacumen ab oculo in radice constituto, videatur, eiusdem instrumenti beneficio cognoscere.

PROBLEMA XXXVIII.

1 ACCOMMODETVR prædictum instrumentum, vt punctum B, in radice montis statuatur, & baculus BE, beneficio duorum clauiculorum infixorum, vt Num. 2. problematis 31. dictum est, recta in cacumen F, vergat; noteturq; intersectio D, radij visualis cum baculo CD, inspecto cacumine F, ex A. [a] Nam iterum triangula ACD, ABF, similia erunt. [b] Quare si fiat,



a *coroll. 4. sexti.*
b *4. sexti*

Vt AC, nota in partibus AB, ad AB, notarum partium: Ita CD, nota in data mensura ad BF,

cognoscetur ascensus obliquus montis B, F, in partibus CD.

2 PARI ratione, si F, sit fastigium alicuius turris, inuestigabis distantiam à puncto B, in terra vel alibi posito, vsque ad F, hoc est hypotenusam BF, vt perspicuum est. Atque hoc eodem instrumento complures aliæ dimensiones absolui poterunt, quod prudens lector facile perspiciet.

3 IDEM assequemur quadrato ABGH, si eius angulus B, in radice statuatur, & latus BG, eleuetur, ita vt recta tendat in cacumem F. Obseruata enim vmbra versa HI, quam dioptra in cacumen F, directa abscindit, fiunt triangula AHI, FBA, æquiangula. [c] Quamobrem, si fiat,

c *4. sexti.*

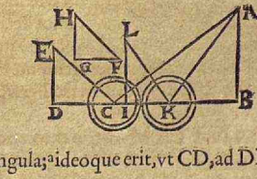
Vt HI, vmbra versa ad AH, latus quadrati: Ita latus quadrati AB, ad BF,

id est, si quadratus numerus 1000000. lateris diuidatur per vmdram versam, dabit quotiens numerus longitudinem ascensus obliqui BF.

ALTITVDINEM, ad cuius basem pateat accessus, beneficio speculi plani, vna cum distantia speculi à cacumine altitudinis deprehendere.

PROBLEMA XXXIX.

1 SIT altitudo AB, à cuius base B, recedatur per quotuis passus, aut pedes, vsque ad C, punctum, in quo speculi plani centrum collocetur, & secundum rectam BC, retrocedatur, donec mensoris oculus in E, constitutus cacumen A, intueri possit per radium reflexum ECA, ita vt DE, sit statura mensoris ab oculo vsq; ad planum. Et quoniam angulus incidentiæ DCE, æqualis est angulo reflexionis ACB, vt Perspectiui docent, & anguli D, B, recti sunt; erunt triangula DCE, BCA, æquiangula; [a] ideoque erit, vt CD, ad DE, ita CB, ad BA. Quocirca si fiat,



a *4. sexti.*

Vt CD, distantia mensoris à speculo C, ad DE, staturam mensoris: Ita CB, distantia speculi ab altitudine ad BA,

producetur altitudo BA, quam quærimus, nota in partibus staturæ mensoris DF.

ALITER.

2 MENSVRETVR per quadrantem angulus DCE, BCA, (Hoc fiet, si angulus rectus constituatur FGH, & recta FG, tot particulas æquales contineat, quot passus, vel pedes in CD, distantia continentur: Item

tem recta GH, tot particulas eaſdem, quot paſſus aut pedes ſtatura menſoris DE, complectitur. Iuncta namque
b 4. primi. recta FH,[b] erit angulus F, angulo C, æqualis, quem angulum F, nullo negotio per quadrantem aliquem in gradus diuiſum cognoſcemus.) Nam ſi poſito ſinu toto CB, fiat,

Vt ſinus totus CB,	*ad BA, tangentem anguli reflexionis BCA, vel incidentiæ DCE, quem proxime inuenimus:*	*Ita CB, diſtantia cognita*	*ad BA,*

prodibit altitudo BA, nota in partibus diſtantiæ CB. Et ſi rurſum fiat,

Vt ſinus totus CB,	*ad CA, ſecantem eiuſdem anguli BCA:*	*Ita CB, diſtantia cognita*	*ad CA,*

cognita etiam erit CA, diſtantia à ſpeculo C, vſque ad cacumen A, in partibus diſtantiæ CB.

ALITER.

3 PER ſolos ſinus ita progrediemur, ſi libet.[c] Fiat,
c 10. Tria. rectil.

Vt ſinus anguli A, complementi anguli C, reflexionis, vel incidentiæ,	*ad CB, diſtantiam cognitam:*	*Ita ſinus anguli C, incidentiæ, vel reflexionis,*	*ad BA,*

d 10. trian. rectil. Nam productus numerus dabit altitudinem BA, notam in partibus diſtantiæ CB.[d] Rurſus fiat,

Vt ſinus anguli A, complementi anguli eiuſdem C,	*ad CB, diſtantiam cognitam:*	*Ita ſinus totus recti anguli B,*	*ad CA,*

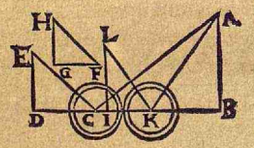
Numerus enim prouueniens dabit hypotenuſam CA, in partibus diſtantiæ CB, cognitam.

ALTITVDINEM inacceſſibilem beneficio ſpeculi plani, vna cum ſpeculi diſtantia tam à baſe, etiam non viſa, quam à cacumine altitudinis, cognoſcere.

PROBLEMA XL.

1 SIT rurſus in præcedenti figura altitudo AB, ſupra planum BD, erecta. Collocato ſpeculo plano in C, recedatur ab altitudine ad D, donec cacumen A, per radium reflexum ECA, cerni poſſit, obſerueturque per quadrantem angulus ECD, ideoque & angulus ACB, vt in problemate præcedenti Num. 2. dictum eſt. Deinde collocato ſpeculo in K, puncto, quotuis paſſibus à C, verſus altitudinem diſtante, recedatur iterum ad I, donec cacumen A, inſpiciatur rurſum per radium reflexum LKA; inquiraturque magnitudo anguli IKL, ideoque & anguli AKB. Et quoniam poſito ſinu toto AB, rectæ BK, BC, tangentes ſunt angulorum BAK, BAC, qui complementa ſunt angulorum K, C, reflexionum per quadrantem cognitorum; cognita erit KC, earum tangentium differentia. Si ergo fiat.

Vt KC, differentia tangentium, quæ complementis angulorum incidentiæ debentur,	*ad AB ſinum totum*	*Ita KC, differentia poſitionum ſpeculi*	*ad AB,*



procreabitur numerus, qui altitudinem AB, notam exhibebit in partibus differentiæ poſitionum ſpeculi KC.

RVRSVS ſi fiat,

Vt KC, differentia tangentium complementorum angulorum incidentiæ ſpeculi	*ad CB, tangentem maiorem:*	*Ita KC, differentia poſitionum ſpeculi*	*ad CB,*

reperietur CB, maior diſtantia ſpeculi C, ab altitudine. Ex qua ſi auferatur KC, differentia poſitionum ſpeculi, nota remanebit KB, minor diſtantia ſpeculi K, ab eadem altitudine. Quæ etiam inuenietur, ſi fiat, vt KC, differentia tangentium prædictorum angulorum, qui complementa ſunt angulorum incidentiæ in ſpeculo, ad KB, tangentem minorem: Ita KC, differentia poſitionum ſpeculi ad aliud vt perſpicuum eſt.

a 32. prim. [a] DEINDE quia angulus AKB, in propinquiore ſpeculi poſitione duobus angulis ACK, CAK, æqualis eſt, ſi angulus ACK, remotioris poſitionis detrahatur ex angulo AKB, poſitionis propinquioris: remanebit an-
b 20. trian. rectil. gulus CAK, notus.[b] Si igitur fiat,

Vt ſinus anguli CAK, differentia angulorum incidentiæ	*ad KC, differentiam poſitionum ſpeculi:*	*Ita ſinus anguli AKC, complementi anguli AKB, ad duos rectos in propinquiore poſitione ſpeculi*	*ad CA,*

c 10. triang. rectil. gignetur hypotenuſa CA, remotioris poſitionis ſpeculi, in partibus differentiæ poſitionum ſpeculi KC.[c] Et ſi rurſus fiat,

Vt ſ

Vt ſinus anguli CAK, differentia angulorum incidentiæ	*ad KB, differentiam poſitionum ſpeculi:*	*Ita ſinus anguli reflexionis ACK, in remotiori poſitione ſpeculi,*	*ad KA,*

procreabitur quoque hypotenuſa KA, propinquioris poſitionis ſpeculi, in eiſdem partibus differentiæ poſitionum ſpeculi KC.

ALITER

2 PER ſolos ſinus idem aſſequemur hoc modo. Inuenta hypotenuſa CA, vt proxime diximus, per ſi-
d 10. trian. rectil. nus[d] fiat

Vt ſinus totus anguli recti B,	*ad hypotenuſam inuentam CA,*	*Ita ſinus anguli ACB, remotioris poſitionis ſpeculi*	*ad AB,*

c 10. trian. rectil. Prodibit enim in Quotiente altitudo AB, nota in partibus hypotenuſæ inuentæ CA.[c] Quod ſi rurſus fiat,

Vt ſinus totus anguli recti B,	*ad hypotenuſam inuentam CA,*	*Ita ſinus anguli BAC, complementi anguli in remotiore poſitione ſpeculi*	*ad CB,*

Producetur CB, maior ſpeculi diſtantia ab altitudine. Ex qua ſi ſubtrahatur KC, differentia poſitionum ſpeculi, cognita etiam relinquetur diſtantia minor KB. Quæ etiam, ſi inueſtigetur hypotenuſa KB, vt ſupra traditum eſt, reperietur: ſi fiat, vt ſinus totus anguli recti B, ad hypotenuſam inuentam KB, ita ſinus anguli BAK, complementi anguli in propinquiore poſitione ſpeculi, ad aliud, vt manifeſtum eſt.

ALTITVDINEM monti impoſitam, ſi modo altitudinis baſis poſſit conſpici, vel portionem ſuperiorem alicuius turris, beneficio ſpeculi plani efficere notam.

PROBLEMA XLI.

1 QVANDO ad turrim patet acceſſus, vt eius à menſore diſtantia cognoſci poſſit; ſi per probl. 39. inueſtigetur tam altitudo à ſummitate portionis propoſitæ, vſque ad baſem turris, quam altitudo ab infima parte eiuſdem portionis, vſque ad eandem turris baſem: & minor hæc altitudo ab illa maiore dematur, reliqua fiet portio, quæ inquiritur.

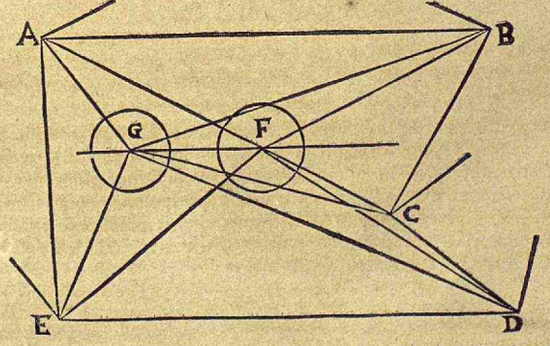
2 AT vero, quando altitudo monti eſt impoſita, & baſis altitudinis apparet, aut ad turrim non patet acceſſus: exquirenda erit per præcedens problema vtraque altitudo prædicta. Nam rurſus minor detracta ex maiore, reliquam faciet altitudinem, vel portionem, quæ deſideratur.

SITVM cuiuslibet campi, aut atrij, vel templi, vel etiam vrbis, aut regionis cuiuſuis in plano deſcribere, ſi è duobus locis intra ipſum ſitum aſſumptis baculi ex omnibus campi angulis erecti, vel certe ipſi anguli in ædificio, aut vrbe, vel loca regionis videri poſſint: ſimulque longitudines laterum campi, vel ædificij, nec non diſtantias inter angulos, & vtrumuis locorum aſſumptorum in data menſura cognoſcere. Quod ſi talia duo loca intra ſitum eligi nequeant, idem efficere, dummodo ſitum poſſimus circumire.

PROBLEMA XLII.

Situs cāpi cuiuſuis, quo pacto ex duobus locis intra ipſum aſſumptis delineetur.

1 ETSI problema hoc vel Geographicum eſt, vel Architectonicum; tamen quia ſine dimenſione linearum abſolui non poteſt, lubet illud hoc loco paucis explicare. Sit ergo cāpus quinque lateribus AB, BC, CD, DE, EA, cinctus. Figantur in quinque angulis A, B, C, D, E, quinque baculi ad angulos rectos cum Horizonte, naturq; circa medium areæ planum aliquantulum altum Horizonti æquidiſtans, in quo duo puncta F, G, quantumlibet inter ſe diſtantia, verbi gratia 100. pedibus, è quibus omnes quinque baculi cerni poſſint. Per F, G, ducatur recta FG, ad vtraſq; partes; continebitq; ſegmentū FG, 100. pedes ex hypotheſi. Affixa deinde dioptra volubili cum pinnacidiis in vtroq; puncto F, & G, deſcriptiſq; circulis duob. ex F, & G, vt per eorū circūferentias angulorū magnitudines, qui in F, G, conſtituentur, cognoſci poſſint, inſpiciatur ex F, & G, per foramina pinnacidiorū (circūducta dioptra) baculi ex angulis A, B, C, D, E, erecti, & anguli, quos linea fiduciæ cum recta



ficit, aut quos rectæ à linea fiduciæ designatæ inter se faciunt, transferantur ordine ad puncta K, L, quomodocunque inter se distantia in recta KL, quæ seorsum in charta aliqua sit descripta, productis lineis, quæ illos angulos in K, & L, efficiunt vt in 2. figura apparet. Si namque puncta, vbi dictæ lineæ ex K, & L, prodeuntes concurrunt, lineis rectis coniungantur, descripta erit figura OPQRS, similis omnino figuræ campi A B C D E. Quod sic demonstro. Triangula AGF, OLK, similia sunt, quod anguli AGF, AFG, angulis OLK, OKL, æquales sint, ex constructione. [a] Igitur erit AG, ad GF, vt OL, ad LK. Eademque ratione, ob similitudinem triangulorum FGE, KLS, erit GF, ad GE, vt LK, ad LS: ac proinde ex æquo erit AG, ad GE, vt OL, ad LS. Cum ergo & anguli AGE, OLS, circa quos latera illa sunt proportionalia, æquales sint, quippe cum angulo AGE, factus sit æqualis ex constructione angulus OLS: [b] similia erũt triangula AGE, OLS, hoc est, æquiangula. Pari ratione ob similitudinem triangulorum FGD, KLR, [c] erit GD, ad GF, vt LR, ad LK. Item ob similitudinem triangulorum FGE, KLS, erit FG, ad GE, vt KL, ad LS. Igitur erit ex æquo GD, ad GE, vt LR, ad LS: Ac proindè cum anguli DGE, RLS, ex constructione sint æquales; [d] æquiangula quoque erunt triangula DGE, RLS. Non aliter ostẽdemus, triangula CGD, BGC, AGB, triangulis QLR, PLQ, OLP, esse æquiangula. Immo eisdem argumentis concludemus, quamuis non sit necessarium, triangula, quæ in F, supra latera campi constructa sunt, æquiangula esse triangulis in K, supra latera figuræ OPQRS, constitutis. Ex his sequitur, figuram ABCDE, figuræ OPQRS, æquiangulam esse: quippe cum earum anguli coagmentati sint ex angulis æqualibus, nimirum angulus AED, ex angulis AEG, GED, ipsum componentibus, qui angulis OSL, LSR, angulum OSR, componentibus æquales sunt; & sic de cæteris. Sequitur etiam latera earundem figurarum circa æquales angulos [e] esse proportionalia. Nam propter triangulorum similitudinem, [e] est AE, ad EG, vt OS, ad SL: & EG, ad ED, vt SL, ad SR. Ideoque ex æquo AE, ad ED, vt OS, ad SR: Atque ita de aliis. Similes ergo sunt figuræ ABCDE, OPQRS.

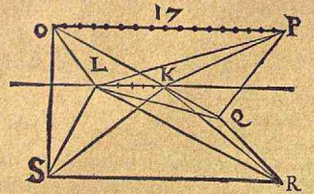
a 4. sexti.

b 6. sexti.

c 4. sexti.

d 6. sexti

e 4. sexti.



2 IAM vero vt longitudines laterum AB, BC, CD, DE, EA, & rectarum ex F, vel G, ad angulos in prima figura ductarũ inueniamus, diuidendum erit in figura inuenta, id est, in secunda, interuallum KL, in quotcunq; partes æquales. Deinde inquirendum, quotnam ex illis partibus in singulis lateribus, & rectis eiusdem figuræ secundæ ex K, vel L, prodeuntibus contineantur, quod vel per circinum fieri potest, repetendo sæpius vnam particulam in dictis lateribus rectis: vel (quod magis probo) hoc modo. Repetatur tota KL, in quolibet latere, vel recta, quoties fieri potest, & in reliquo segmento vna etiam particula interualli KL, circino iteretur, quoties fieri potest. Nam quoties repetita fuerit KL: toties numerus particularum ipsius KL, in latere continebitur, cum tot insuper particulis, quot per circinum in reliquo segmento fuerint deprehẽsæ. Aut certe per ea, quæ lib. 1. c. 1. ad finem Num. 2. scripsimus, inuestigetur in instrumento partium, quot particulæ interualli KL, in dictis lateribus, & rectis comprehendantur. Deinde fiat, vt numerus particularum interualli KL, assumptus in 2. figura, ad numerum pedum inter puncta F, & G, in prima figura assumptum, ita numerus particularum in quolibet latere, vel recta in secunda figura inuentarum, ad aliud. Quotiens enim numerus indicabit, quot pedes in assumpto latere, vel recta contineantur. Ratio est, quia cum eandem proportionem habeat KL, in 2. figura ad quodlibet latus, vel rectam eiusdem figuræ, quam habet FG, in prima figura ad respondens latus, vel rectam, propter similitudinem figurarum, erit permutando KL, ad interuallum FG, vt latus ad latus, &c. Verbi gratia. In 2. figura interuallum KL, sectum est in 5. particulas, qualium 17. in latere OP, inuentæ sunt: Et quia spatium FG, in 1. figura positum est 100. pedum: si fiat,

Vt KL, quinque particularum ad FG. 100. pedum: Ita OP, 17. particularum ad AB,

hoc est, si, vt regula aurea præcipit, 100. ducantur in 17. secundus numerus in tertium, & productus numerus 1700. diuidatur per 5. id est, per primum numerum, reperientur in Quotiente 340. pedes pro latere AB, & sic de cæteris.

Situs cãpi cuiusuis qua ratione ex vno loco intra ipsum assumpto describatur.

3 EVNDEM situm campi propositi ABCDE, delineabimus etiam ex vno tantum loco F, intra ipsum assumpto hac ratione. Dioptra ad singulos baculos ex angulis erectos, dirigatur, notatis angulis, quos lineæ, per dioptram designatæ inter se faciunt; distantiæque ab F, ad singulos angulos inquirantur in aliqua mensura, vel catenulam aliquam ferream, quæ nec intendi possit, nec remitti, vel per chordam ex F, ad singulos angulos extensam, vel certe, si distantiæ illæ magnæ sint, per problema 2. vel 36. beneficio quadrati, alteriusue instrumenti. Nam si in charta aliqua ad quodlibet punctum K, iidem anguli constituantur, & in rectis illos angulos efficientibus accipiantur tot particulæ inter se æquales cuiusuis magnitudinis, quot mensuræ inuentæ sunt in rectis respondentibus, quæ ex F, exeunt: extrema autem puncta vltimarum particularum rectis lineis coniungantur, descripta erit figura OPQRS, similis omnino campo ABCDE: [f] propterea quod triangula ad punctum F, collecta similia sunt triangulis ad punctum K, collectis, ob æqualitatem angulorum in F, & K, constitutorum, & latera circa illos angulos proportionalia, ex constructione.

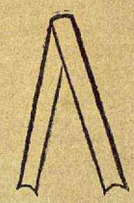
f 6. sexti.

4 LATERVM autem longitudines in campo ABCDE, cognoscentur, si per circinum inquiratur, quot particulæ in lateribus figuræ OPQRS, contineantur ex illis, quæ in quauis recta ex K, emissa sumptæ fuere. Totidem namque mensuræ in lateribus campi comprehendentur, vt perspicuum est ex figurarum similitudine.

Vrbis cuiusuis, ac regionis situs quo pacto describatur.

5 EADEM prorsus ratio tenenda est in situ alicuius atrii vel templi, vel vrbis, aut regionis explorando. Solum in vrbe describenda pro punctis F, & G, eligendæ sunt duæ turres altæ, è quibus omnes vrbis anguli conspici possint, & quarum distantia vnius ab altera vel cognita sit, vel per præcedentia problemata inuestigata. In regione autem delineanda pro iisdem punctis F, & G, duo oppida deligenda sunt, & in quolibet ex altissima turre circumiacentia oppida inspicienda, vt anguli habeantur, quos rectæ ab oculo mensoris ad singula oppida eductæ constituunt. Hi autem facilius obseruabuntur, si loco dioptræ, quia nimis alta est, statuatur planum ere-

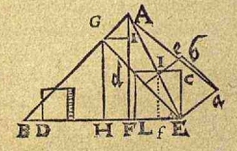
erectum in punctis F, & G, ita vt circumductum transeat per oppida circumiacentia, si intelligatur esse productum. Ita namque planum ipsum rectas designabit, quæ angulos prædictos constituant. Atque hoc etiam in situ vrbium perquirendo faciendum erit. Itaque si anguli vrbis cuiuspiam, aut oppida alicuius regionis sint A, B, C, D, E, & duæ turres in F, & G, omnia perficienda erunt, vt supra de campi situ dictum est. Nam situm vrbis vel regionis exhibebit figura OPQRS, distantiæque locorum A, B, C, D, E, vnius ab altero cognoscentur, vt de lateribus campi dictum est.



6 QVOD si intra situm propositum duo loca, vel vnus saltem nõ existat, vnde omnes anguli conspici possint, vt in omnibus ædificijs contingit, oportebit situm circumire, & inuestigare angulos per rectas, quæ in campo à baculo ad baculum ducendæ sunt per catenulam ferream, vel chordam, aut certe erigendum planum, quod per binos baculos transire conspiciatur. Ipsum enim planum dictas rectas exhibebit. In ædificijs autem ac templis ipsi muri exteriores dictos angulos constituunt, quorum amplitudo inuestigari solet ab artificibus instrumento quodam ex duabus regulis compacto, quarũ vna sub alterã ingressa moueatur (quod Italis Squadra zoppa dicitur) vt hæc figura indicat, aperto namq; instrumento, si crura duo dus muris angulũ efficientib. cõgruent dabunt interiora cruriũ latera in concursu angulũ quæsitum. Et si idem instrumentũ interioribus angulis ædificiorum applicetur, dabunt eadẽ latera interiora cruriũ angulos, qui à muris efficiuntur. Inuentis angulis ac notatis, mensuranda erunt interualla inter baculos in campo erectos, vel inter angulos ædificiorum, per catenulã ferream vel chordam, aut certe in campis, si ea interualla longa sint, per problema 2. vel 36. explorandra in aliqua mensura nota, vt in cubitis. Nam si in charta ducatur linea OP, tot particulas æquales continens, quot cubiti, verbi gratia, in interuallo AB, deprehensi sunt, & angulus POS, angulo BAE, inuento fiat æqualis: & in recta OS, accipiantur tot particulæ prioribus æquales vsq; ad S, quot cubiti in interuallo AE, reperti sunt: ac rursum angulus OSR, angulo AED, æqualis fiat, & sic deinceps representabitur situs campi per figuram OPQRS. Idemque de situ ædificiorum tam exteriori, quam interiori intelligendum est, si diligenter anguli ac distantiæ obseruentur.

LONGITVDINEM trabis ad Horizontem inclinatæ, cuius portio superior tantum conspiciatur vna cum angulo inclinationis, distantia basis à mensore & altitudine fastigij supra Horizontem, per Quadratum metiri.

PROBLEMA XLIII.



1 Trabs inclinata supra murum CD, sit AB, & mensor in E, constitutus è directo ipsius trabis, ita vt ipse & trabs in eodẽ sint plano, metiri debeat longitudinẽ AB, angulum inclinationis ABE, distantiam BE, & altitudinem AF, etiamsi tantum portionem supremam AC, videat, basem occultante muro CD. Si quadratum ad E, bis applicetur, semel videlicet inclinatum, vt vnum latus recta tendat ad punctum A, & iterum demissum ad Horizontem, ita vt centrum dioptræ sit in E, & latus EL, Horizonti incumbat. Nam inspecto puncto A, ex a, [a] si fiat, vt vmbra versa e b, ad latus b a, ita latus à E, ad aliud, gignetur distantia siue hypotenusa EA. Deinde explorata portione dioptræ EI, vt in scholio Problematis 7. Numer. 2. docui; [b] Si fiat, vt EI, portio dioptræ inuenta ad repertam hypotenusam EA, ita fI, lateri quadrati æqualis ad aliud, producetur altitudo AF, æquisita, quod est quartum.

a 4. sexti.

b 2. sexti & componendo.

2 [c] ET si rursus fiat, vt EI, portio dioptræ ad hypotenusam EA, ita Ef, ipsi cI, æqualis ad aliud, nota fiet distantia EF. Non aliter, si aliud punctum G, inspiciatur, cognita fiet hypotenusa EG, & altitudo GH, vna cum distantia EH, si nimirum quadratum primo ita applicetur ad E, vt vnum latus tendat recta ad G, &c. quemadmodum in scholio probl. 7. ostendimus.

c 2. sext & componendo.

3 IAM si EF, inuenta ex cognita EH, subducatur, nota relinquetur FH, id est, GI, quæ in sublimi ducitur parallela Horizonti. Eodem modo si GH, cognita, vel illi æqualis FI, ex inuenta AF, demat ur reliqua AI, nota fiet. Cum igitur in triangulo rectangulo AGI, in sublimi constituto duo latera AI, IG, cognita sint, [d] cognoscetur & basis AG, & angulus AGI, [e] qui æqualis angulo inclinationis ABE, qui quæritur, quod est secundum.

d 6. Trian. rectil.

e 29. prim.

4 ITAQVE cum in triangulo rectangulo ABF, latus AF, notum sit factum, vna cum angulo B, ac proinde & cum eius complemento BAF, [f] cognitum fiet alterum quoq; latus BF, cui si adijcietur distantia EF, inuenta, tota distantia quæsita EB, manifesta erit, quod est tertium.

f 4. Trian. rectil.

5 DENIQVE in eodem triangulo ABF, rectangulo, ex latere AF, & angulo B, ac proinde & eius complemento BAF, cognitis, [g] cognoscetur etiam basis AB, longitudo videlicet trabis, quod est primum. Hæc autem nota etiam efficietur, [h] si fiat, vt AI, differentia altitudinum cognitarum AF, GH, ad AF, maiorem altitudinem, ita AG, paulo ante nota effecta, ad AB.

g 4. Trian. rectil.

h 2. sexti & componendo.

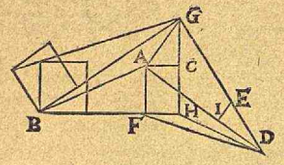
VISIS duarum turrium summitatibus, etiamsi bases propter ædificia interiecta occultentur, distantiam tam inter earum bases, quam inter earundem fastigia, vna cum ipsarum altitudinibus ac distantijs à mensore conijcere.

PROBLEMA XLIV.

1 SINT duæ turres AF, GH, quarum sola fastigia A, G, cernantur ex loco Horizontis B. Oportet inuestigare & distantiam FH, & interuallum AG, & vtriusque turris altitudinem. Sit primum minor turris AF, inter maiorem, & mensorem, ita vt mensor in eodem cum turribus sit plano, & minor non occultet fastigium G, maioris. Per scholium problem. 7. inuenietur & vtraque distantia BF, BH, & vtraque altitudo AF, GH: si nimirum in B, Quadratum ita locetur, vt vnum eius latus cum hypotenusis BA, BG, coincidat, &c. quod est quartum, ac tertium. Et quia tria puncta B, F, H, ponuntur in eadem recta, erit distantiarum differentia FH, cognita, hoc est, distantia inter turrium bases, quod est primum. Rursus differentia altitudinum GC, nota erit,[a] ac propterea in triangulo rectangulo ACG, ex duobus lateribus, AC, CG, cognitis, basis quoque AG, efficietur nota, quod est secundum.

a 6 triang. rectil.

2 DEINDE consistat mensor in D, ita vt ipse, ac bases F, H, non iaceant in vna linea recta. Per scholium problem. 7. iterum tam altitudines AF, GH, quam distantiæ DF, DH, cognitæ fient, si videlicet quadrati vnum latus hypotenusis DA, DG, congruet, &c. quod est tertium, ac quartum. Inuestigatis autem hypotenusis DA, DG, vt in eodem scholio traditum est, cognoscetur per problema 16. præsertim per ea, quæ Numero 2. eiusdem problematis scripsimus, interuallum AG, si nimirum in hypotenusis accipiętur portiones DI, DE, ipsis hypotenusis proportionales, vt in illo Numer. 2. diximus, &c. quod est secundum. Et quoniam altitudines AF, GH, notæ factæ sunt, erit etiam earum differentia GC, nota. Quamobrem ex base AG, & latere GC, in triangulo rectangulo ACG, cognitis, latus quoque AC, hoc est, distantia FH, inter bases nota erit: quod est primum.



SI turres essent AF, CH, æquales, esset distantia AC, inter fastigia distantiæ FH, inter bases æqualis.

SCHOLIVM.

Vnica regula ad omnes rectas dimetiendas, quando earum extrema videntur.

1 EX omnibus, quæ demonstrata sunt in hoc 3. libro, colligi potest regula generalis ad dimetiendas omnes longitudines, siue eæ sint distantiæ in Horizonte, siue altitudines, profunditatesue, siue hypotenusæ, id est, distantiæ ab oculo ad quodlibet punctum, siue interualla inter duo puncta, vbicunque existant: dummodo vtrumque extremum longitudinis dimetiendæ videri possit à mensore, vbicunque etiam ipse existat. Nam si per problema 15. præsertim per ea, quæ Numero 5. eius problematis scripsimus, distantiæ à mensore vsque ad duo extrema longitudinis explorentur, inuestigato prius angulo, quem duæ illæ distantiæ, siue hypotenusæ efficiunt, vt in scholio problem. 7. Numero 2. docuimus; &c. factum erit, quod proponitur. Itaque si diligenter ea, quæ in proble. 15. ac 16. scripsimus, percepta fuerint, eadem semper ratio metiendarum rectarum tenenda erit, si vtraque extremitas rectæ propositæ cerni potest, vt diximus.

2 SED neque hoc omittendum puto, quando inuentæ sunt duæ distantiæ à mensoris loco vsq; ad duas extremitates rectæ metiendæ, vna cum angulo ab ipsis comprehenso, certius (quanquam laboriosius) interuallum inter duo illa extrema, hoc est, rectam propositam inueniri posse ex duabus illis distantiis, & angulo comprehenso, per 12. triang. rectil. quam per duas dictas portiones illis distantiis proportionales: propterea quod interuallum inter extrema illarum portionum vix accurate per circinum reperiri possit. Id quod etiam in prob. 16. ad finem Num. 2. monuimus.

SPATIVM terræ inæquale pro ducendis aquis librare: aut etiam si lubet, Horizonti æquidistans efficere.

PROBLEMA XLV.

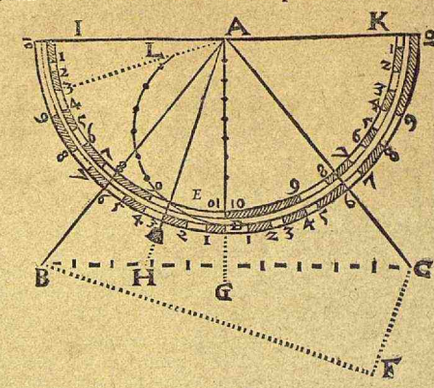
Instrumẽti constructio pro librationibus.

1 QVANDO oblatum spatium non est valde magnum, excogitauit Ioannes Ferrerius Hispanus nobilis Architectus, & Mathematicus, instrumentum per commodum pro librationibus, hoc modo. Compingantur duæ regulæ AB, AC, ex ligno aliquo solido, ac duro, æqualium crurum, quæ longitudinem habeant satis longam, ita vt distantiæ inter extrema B, C, contineat 10. palmos præcise, aut etiam plures. Deinde ducta recta AG, ad BC, perpendiculari, describatur ex A, semicirculus quantuscunque IDK, cuius semidiameter AD, in tot æquales partes secetur, quot palmi in distantia BC, comprehenduntur. Descripto quoque circa AD, semicirculo occulto AED, transferantur ex D, in eius peripheriam omnia interualla inter D, & puncta rectæ AD: ac tandem ex A, per singula puncta semicirculi AED, rectæ occultæ emittantur, notenturque intersectiones earum cum peripheria DI, atque in alteram peripheriam DK, transportentur. Si namque ex A, filum cum perpendiculo egrediatur, & omnes partes excindantur, relictis solum cruribus instrumenti AB, AC, vna cum peripheria semicirculi IDK, constructum erit instrumentum ad librationes peropportunum.

2 NAM in campo aliquo, vel horto, positis punctis B, C, in terra, si filum perpendiculi transit per D, erunt puncta B, C, in terra eiusdem altitudinis, ita vt si spatium interiectum BC, complanetur, spatium illud horti, vel campi sit libratum, hoc est, Horizonti parallelum.

Spatiũ inæquale quo pacto librẽtur.

SI vero filum perpendiculi AH, abscindet ex quadrante DI, aliquot partes, nimirum 3. erit punctum C, tribus palmis altius puncto B, atque ita fodiendum ibi erit ad altitudinem trium palmorum, vt complanatum spatium inter B, & infimum punctum effossum Horizonti sit parallelum. Quod si filum perpendiculi abscinderet ex alio quadrãte DK, quotcunque partes, nimirum 5. esset punctum C, depressius quinque palmis puncto B. Quare tunc superimponẽda, foret puncto C, terra ad altitudinem 5. palmorum, vt spatium inter B, & supremum punctum terræ superimpositæ complanatum Horizonti æquidistet. Complanato spatio inter B, & aliud punctum prope C, siue effossum, siue eleuatum, iteranda erit eadem operatio, posito crure AB, in puncto inuento, &c. Atque ita deinceps procedendum est vsque ad vltimum signum in horto, vel campo propositum. Hoc ita demonstratur. Concipiatur ducta recta BC, & recta CF, filo perpendiculi AH, duci parallela, quæ ad Horizontem erit perpendicularis, ac proinde ducta BF, ad CF, perpendicularis Horizonti æquidistabit. Et quoniam in triangulis AGH, BFC, recti anguli G, F, æquales sunt,[a] nec non & alterni C, H,[b] æquiangula erunt triangula; Est autem AGH, triangulo ADE, æquiangulum, quod & recti G, E, æquales sint, & A, communis. Igitur triangula quoque ADE, BCF, æquiangula erunt.[c] Ideoque erit vt AD, 10. partium ad DE, 3. partium, ita BC, 10. palmorum, ad CE, ac proinde CF, 3. palmos continebit, tot nimirum, quot partes filum perpendiculi abscindit ex semicirculo IDK. Quod si quadratum CF, nimirum in dato exemplo 9. palmi (cum latus CF, sit 3. palmorum) demetur ex 100. id est, ex quadrato BC, 10. palmorum, reliquum fiet quadratum 91. lineæ horizontalis BF, cuius quadrata radix $9\frac{1}{19}$. dabit horizontalem distantiam BF, à puncto B, vsque ad perpendicularem CF.



a 29. primi. b 32. primi. c 4. sexti.

HÆC eadem distantia horizontalis BF, cognoscetur quoque sine numerorum supputatione, hoc modo. Ex A, describatur alius semicirculus, & in semicirculum AED, transferantur omnia interualla inter A, & puncta rectæ AD, ac tandem ex A, rectis occultis emissis per puncta in semicirculo notata, obseruentur earum intersectiones cum semicirculo ex A, descripto, transferanturque in alterum quadrantem versus K. Nam quot partes filum perpendiculi AH, ex vltimo hoc semicirculo ex A, descripto abscindet, tot palmos continebit horizontalis longitudo BF:[d] propterea quod eadem est proportio DA, ad AE, quæ CB, ad BF, quippe cum triangula DAE, CBF, ostensa sint similia. Cum ergo ex constructione, recta AE, complectatur tot partes rectæ AD, quot ex A, in semicirculum AED, vsque ad filum perpendiculi sunt translatæ, (vt in nostro exemplo partes propemodum $9\frac{1}{2}$.) comprehendentur totidem palmi rectæ CB, in recta BF. Est autem consideratione dignum, partes posterioris semicirculi contrario ordine similes esse partibus prioris semicirculi IDK. Nam si verbi gratia rectæ DE, quæ æqualis est tribus partibus rectæ DA, initium sumentibus à D, accipiatur æqualis AL, trium quoque partium rectæ AD, initium sumentium à puncto A, ducatur recta AL, fiet angulus IAL, æqualis angulo DAE. Quia enim arcus DE, AL, æquales sunt, erunt quoque reliqui AE, DL, æquales.[e] Igitur anguli ADE, DAL, æquales erunt, ideoque & reliqui DAE, IAL, æquales inter se erũt: propterea quod tam duo ADE, DAE, propter rectum E, in semicirculo, quam duo DAL, IAL, vni recto sunt æquales. Ex quo fit, rectas AI, AL, ex posteriori semicirculo ex A, descripto auferre arcum similem arcui in priori semicirculo IDK, inter rectas AD, AE, intercepto: Eademque ratio est de aliis.

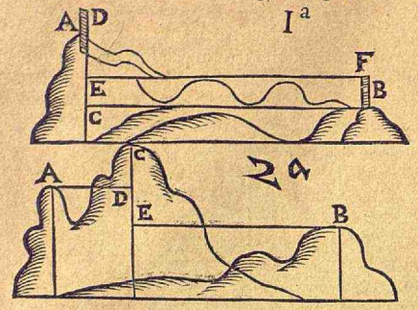
d 4. sexti. e 27. tertij.

QVANDO instrumentum sæpius repetitum fuit, quæritur autem, quanto altius, vel depressius sit primũ punctum, quam vltimum, scietur hoc per altitudines, depressionesue intermedias. Vt si primus locus fuerit altior quam secundus, quinque palmis; & hic altior quam tertius, duobus palmis; hic autem depressior, quã quartus locus, tribus palmis; & hic denique altior quam vltimus locus, vno palmo, colligemus primum locum altiorem esse vltimo loco quinque palmis. Nam primus locus erit altior tertio septem palmis, cum primus secũdum quinque palmis superet, & secundus tertium, duobus. Et quia tertius superatur à quarto, tribus palmis, superabit primus quartum quatuor palmis. Cum ergo hic altior sit, quam vltimus, vno palmo, erit primus altior, quam vltimus, quinque palmis, & sic de cæteris.

3 CÆTERVM quando duo loca multum inter se distant, explorabimus per quadratum stabile, quanto alter altero sit altior, vel humilior, hac ratione. Sit primus locus A, secundus B, in prima figura. Erecto baculo AD, staturæ mensoris æquali, concipiatur ex B, ad perpendiculum loci A, altioris perpendicularis BC, (per quadratũ autẽ facile cognosces, vter locorum sit altior. Nam quando per latus supremũ Horizonti æquidistans, ex A, locus B, cernitur, eadem est altitudo vtriusque loci: Si vero deprimendum est illud, vt B, videri possit, erit locus A, altior: Si denique idem latus attollendum est, erit locus B, altior.) Nam si per doctrinam scholij probl. 9. inuestigetur altitudo DC, & auferatur mensoris statura AD, reliqua erit altitudo AC: Ac tanto erit altior locus A, loco B. Et si è contrario in loco humiliori B, erigatur baculus BF, staturæ mensoris æqualis, & per doctrinam scholij probl. 7. inquiratur altitudo AE, vsque ad perpendicularem FE, per cogitationem ad AC, ductam, & ap-

Librationes pro cõducendis aquis, quo modo fiãt.

ponatur ſtatura menſoris BF, nota euadet tota altitudo AC; Ac tanto depreſſior erit locus B, quam locus A. Atque ita ex loco A, ad locum B, conduci poteſt aqua, non autem contra.



4 QVOD ſi inter primum locum A, & ſecundum B, interpoſitus ſit mons C, ita vt ex A, locus B, videri nequeat, vt in 2. figura, ita procedemus. Ex A, per ſcholium problem. 7. indagabimus altitudinem CD. Deinde ex C, per ſcholium problem. 9. explorabimus altitudinem CE, ductis nimirum ad CE, perpendicularibus AD, BE. Nam hac ratione concludes locum A, altiorem eſſe loco B, quantitate DE. Quamobrem ſi perfodiatur mons C, vel aquęductus circa ipſum extruatur, conduci poterit aqua ex A, ad B, & non contra.

5 POSTREMO ſi in monte aliquo, vel in eius latere ſit aqua vel in puteo aliquo profundo, vel in foſſa aliqua profunda CD; & ſcire deſideres, an ex D, ad B, conduci poſſit aqua per aquæductum, ita erit agendum. Primum ſi CD, puteus eſt, inueſtiga eius profunditatem CD, per problem. 27. ſi vero foſſa, aut vorago aliqua, per problema 28. Deinde concipiatur ex B, ad perpendiculum CD, duci perpendicularis BE: atq; per ſcholium probl. 7. ex B, inueſtigetur altitudo CE. Si namq; hæc deprehenſa fuerit æqualis profunditati inuentæ CD, habebit fundus aquę D, eandem altitudinem cum loco B, ac proinde aqua ad B, ex D, defluere non poterit per aquæductum: Si vero altitudo CE, reperta fuerit maior quam profunditas CD, conduci poterit aqua ex D, in locum B: Si denique altitudo CE, inuenta fuerit minor profunditate CD, erit locus B, altior quam aqua iuxta D, atque idcirco defluere non poterit ad B.

EX his non obſcure intelliges, vbi aquæductus vtiliter ſint extruendi, & vbi non.

FINIS LIBRI TERTII.



GEOME-

GEOMETRIÆ PRACTICÆ

LIBER IV.

AREAS

Superficierum planarum inueſtigans.

Penes quid menſura linearum rectarum, planarum ſuperficierum & ſolidorum ſumantur.

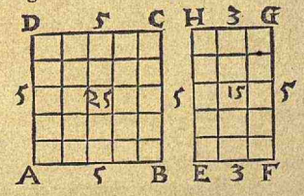
QVEMADMODVM linea recta rectas lineas metitur, ita Geometræ ſuperficies planas per ſuperficiem quadratam, & corpora, ſiue ſolida, per corpus cubicum metiri ſolent. Nam ſicut linea recta dicitur 100. palmorum in qua linea vnius palmi centies continetur, ita ſuperficies plana dicitur 100. palmorum, quæ centies quadratum continet, cuius latus palmo æquale eſt: & ſolidum 100. palmorum illud dicitur, quod complectitur 100. cubos, quorum quilibet latus habet vnius palmi: quod de aliis etiam menſuris, vt de pede, cubito, paſſu, milliario, &c. intelligendum eſt. Quia vero quælibet ſuperficies tot quadrata cuiuſque menſuræ comprehendere dicitur, quot in parallelogrammo rectangulo, quod illi æquale eſt, continentur, explicandum primo loco erit, qua ratione area cuiuslibet rectanguli cognoſcatur. Deinde de area triangulorum, quadrilaterorum non rectangulorum, cæterarumque figurarum plurium laterum agemus: ac denique circulum, eiuſque partes metiemur.

DE AREA RECTANGVLORVM

CAPVT I.

Area quadrati, & alterapartelongioris quo pacto cognoſcatur.

QVONIAM Euclides defin. 1. lib. 2. docet, omne parallelogrammum rectangulum contineri ſub rectis duabus lineis, quæ rectum comprehendũt angulum manifeſtum eſt, aream cuiuſque rectanguli produci ex multiplicatione duorum laterum circa rectum angulum, vnius in alterum; adeo vt in quadrato ſatis ſit ducere vnum latus in ſe, vt eius area cognoſcatur: quippe cum duo latera circa vnum angulum rectum æqualia ſint. Vt in quadrato ABCD, cuius ſingula latera quinos palmos continent, ſi latus AB, quinque palmorum in ſe ducatur, producentur 25. quadrata, quorum quodlibet habet latus vnius palmi; atq; tot palmos quadratos continere dicetur area quadrati ABCD. At area rectanguli altera parte longioris EFGH, cuius vnum latus circa rectum angulum continet 5. pedes, & alterum 3. dicetur continere 15. palmos quadratos, propterea quod ex mutua laterum 5. & 3. multiplicatione numerus 15. procreatur.



Vt campus rectãgulus menſuretur, quid agendum.

2 ITAQVE ſi campum aliquem rectangulum, vel parallelogrammum rectangulum metiri iubeamur, menſuranda erunt per aliquam menſuram notam, vt per palmum, vel pedem, &c. duo latera circa angulum rectum. Nam vno in alterum ducto, area propoſiti campi, vel parallelogrammi rectanguli producetur, vt dictum eſt.

DE AREA TRIANGVLORVM

CAPVT II.

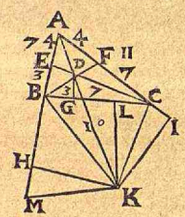
1 QVANDO trianguli omnia tria latera cognita ſunt, duabus viis eius area cognoſci poteſt. Prima, quæ accuratiſſima eſt, ita ſe habet. *Colligantur omnia latera in vnam ſummam: Ex huius ſumma ſemiſſe ſubtrahantur ſingula*

singula latera, vt habeantur tres differentiæ inter illam semissem, & latera singula: Postremo tres hæ differentiæ, & dicta semissis inter se mutuo multiplicentur. Producti enim numeri radix quadrata erit area trianguli quæsita.

VERBI gratia, si latera sint 10.17.21. erit summa ex illis collecta 48. & semissis 24. Differentiæ autem inter hanc semissem, & latera erunt 14.7.3. Hæ inter se multiplicatæ (ducendo primum 14. in 7. deinde productum in 3.) faciunt 294. quæ ducta in 24. semissem prædictam, producunt 7056. cuius numeri radix quadrata 84. erit area dicti trianguli, cuius latera sunt 10.17.21. Rursus si in alio quopiam triangulo latera sint 13.14.15. inueniemus eãdem aream. Nam summa laterum est 42. semissis 21. Differentiæ inter hanc semissem, & tria latera sunt 8.7.6. quę inter se multiplicatæ faciunt 336. quæ ducta in 21. semissem prædictam efficiunt 7056. cuius numeri quadrata radix 84. dabit aream trianguli, quod lateribus 13.14.15. continetur. Denique si detur triangulum ABC, in quo latus AB, 7. BC, 10. & AC, 11. summa omnium est 28. & semissis 14. quæ latera superat hisce numeris 7.4.3. qui inter se multiplicati faciunt 84. quæ ducta in 14. semissem summæ gignunt numerũ 1176. cuius radix quadrata $34\frac{20}{69}$, fere dabit aream trianguli ABC. Ex quo colliges, non omnis trianguli aream esse numerum rationalem: propterea quod numerus vltimo loco productus non est semper quadratus, vt in postremo hoc exemplo contigit.

HANC praxim, siue regulam, quæ exquisitissima est, vt dixi, ita in triangulo ABC, demonstrabimus. Diuisis angulis ABC, ACB, bifariam per rectas BD, CD, coeuntes in D, ducantur ex D, ad singula latera perpendiculares DE, DF, DG, iungaturque recta AD. Quoniam igitur duo anguli E, DBE, in triangulo DEB; æquales
a 26. prim. sunt duobus angulis G, DBG, in triangulo DGB, & latus DB, commune; [a] erunt tam latera DE, DG, quam BE, BG, æqualia. Eodemque modo tam latera DF, DG, quam CF, CG, æqualia erunt in triãgulis DFC, DGC: ac proinde DE, DF, (cum vtraque ipsi DG, sit ostensa æqualis) inter se æquales erunt: ideoque omnes tres perpendiculares DE, DF, DG, æquales inter se erunt.

b 47. prim. [b] DEINDE quia quadrato ex AD, æqualia sunt tam quadrata ex AE, ED, quam quadrata ex AF, FD, æqualia erunt quadrata ex AE, ED, quadratis ex AF, FD; Ac proinde ablatis æqualibus quadratis rectarum ED, FD, æqualium, reliqua quadrata rectarum AE, AF, æqualia erunt: propterea que & rectæ ipsæ AE, AF, æquales erunt. Igitur cum latera AE, AD, trianguli ADE, lateribus AF, AD, trianguli ADF, æqualia sint, & basis ED,
c 8. primi. basi FD; [c] erit angulus DAE, angulo DAF, æqualis.



QVIA vero AE, ipsi AF, & EB, ipsi BG, æqualis est ostensa, erit tota AB, duabus AF, BG, æqualis: additisque æqualibus CG, CF, duæ AB, CG, duabus AC, BG, æquales erunt. Tam ergo duæ AB, CG, quam duæ AC, BG, semissem trium laterum AB, BC, AC, constituent. Quocirca CG vel CF, differentia erit inter semissem laterum, & latus AB. Itẽ BG, vel BE, differentia inter eandem semissem, & latus AC. Denique cum AB, CG, semissem laterum efficiant, sitque BG, ipsi BE, æqualis, vt ostendimus, constituent quoq; BC, AE, semissem eorundem laterum: ideoq; AE, differentia erit inter laterum semissem, & latus BC. Tres ergo rectæ AE, EB, CG, & semissem laterum constituunt, & tres differentias inter semissem laterum, & tria latera trianguli.

PRODVCTIS iam AB, AC, sit BH, ipsi CG, & CI, ipsi BG, æqualis; ita vt tam AH, semissi laterum, rectis videlicet AB, CG, quam AI, eidem semissi laterum, rectis nimirum AC, BG, sit æqualis, constetque ex tribus differentiis ante dictis. Ducta quoque HK, ad AH, perpendiculari, quæ cum AD, producta conueniat in K; connectantur rectæ KI, KB, KC. Et quia duo latera AH, AK, trianguli AHK, duobus laterib. AI, AK, trianguli AIK,
d 4. prim. æqualia sunt, angulosque ad A, continent æquales, vt supra ostendimus, [d] æquales quoque erunt & bases HK, IK, & anguli H, I. Cum ergo H, per constructionem sit rectus, rectus etiam erit I.

ABSCINDATVR præterea BL, ipsi CG, vel BH, æqualis, vt proinde reliqua CL, reliquæ BG, vel ipsi CI, æqualis sit, iungaturque recta KL. Producta autem BH, sumatur HM, ipsi CI, æqualis, connectaturq; recta KM. Et quia duo latera KH, HM, trianguli HMK, duobus lateribus KI, IC, trianguli CIK, æqualia sunt, angulosque
e 4. primi. H, I, continent æquales, vtpote rectos; [e] erunt quoque bases KM, KC, æquales: atque adeo cum duo latera BM, BK, trianguli BMK, duobus lateribus BC, BK, trianguli BCK, æqualia sint, (est namque BM, ipsi BC, æqualis,
f 8. primi. quod partes BH, HM, partibus BL, LC, sint æquales) sitque basis KM, basi KC, ostensa æqualis; [f] erunt quoque anguli KBM, KBC, æquales. Itaq; quoniam duo latera BH, BK, trianguli BHK, duobus lateribus BL, BK, trian-
g 4. primi. guli BLK, æqualia sunt, æqualesque continent angulos ad B, vt ostendimus, [g] erunt & bases HK, KL, & anguli H, L, æquales. Cum ergo H, ex constructione rectus sit, erit quoque L, rectus. Quare cum latera KH, KB, trianguli
h 8. primi. KBH, lateribus KL, KB, trianguli KBL, æqualia sint, & basis BH, basi BL, [h] erunt etiam anguli BKH, BKL, æquales.

QVONIAM autem ex iis, quæ ad prop. 32. lib. 1. Euclidis demonstrauimus, quatuor anguli quadrilateri BHKL, quatuor rectis sunt æquales: erunt, demptis duobus rectis H, L, duo HBL, HKL, duobus rectis æquales;
i 13. primi. ideoque duobus angulis HBL, EBL, æquales, [i] quod hi quoque duobus sint rectis æquales, ablatoq; communi HBL, reliquus HKL, reliquo EBL, æqualis erit: ac propterea & HKB, ipsi EBD, dimidius dimidio, æqualis erit.
k 32. prim. Cum ergo & rectus H, recto E, sit æqualis, [k] erit quoque reliquus HBK, in triangulo HBK, reliquo EDB, in tri-
l 4. sexti. angulo EDB, æqualis; ac proinde triangula BHK, DEB, æquiangula erunt. [l] Quapropter erit vt DE. ad EB, ita
m 19. prim. BH, ad HK; atque idcirco si lineæ hæ ad numeros contrahantur, [m] erit numerus, qui fit ex DE, in HK, æqualis
n 7. quint. numero, qui fit ex EB, in BH. [n] Eandem ergo proportionem habebit quadratus ex DE, ad productum ex DE,
o 17. septi. in HK, & ad productum ex EB, in BH. [o] Sed ita est quadratus ex DE, ad productum ex DE, in HK, vt DE, ad HK: propterea quod DE, multiplicans DE, & HK, fecit & quadratum ex DE, & productum ex DE, in HK. Erit igitur quadratus quoque ex DE, ad productum ex EB, in BH, vt DE, ad HK. Vt autem DE, ad HK, ita est AE, ad
p 28 prim. AH. [p] Nam cum parallelæ sint DE, HK, æquiangula erunt triangula AED, AHK, ex coroll. prop. 4. lib. 6. Euclid.
q 4 sexti 19. septi. [q] Igitur erit vt AE, ad ED, ita AH, ad HK, & permutando, vt AE, ad AH, ita ED, ad HK. Igitur erit quadratus quoque ex DE, ad productũ ex EB, in BH, vt AE, ad AH. [r] Quia ergo fit ex quadrato ipsius DE, in AH, æqualis erit ei,

qui fit ex AE, in productum ex EB, in BH. Igitur numerus, qui ex producto ex quadrato ipsius DE, in AH, multiplicato in AH, gignitur, æqualis erit numero, qui ex producto ex AE, in productum ex EB, in BH, multiplicato in eundem AH, procreatur. (Nam quia æquales numeri, nimirum productus ex quadrato ipsius DE, in AH, & productus ex AE, in productum ex EB, in BH, eundem numerum AH, multiplicant [s] habebunt
s 18. septi. producti, nimirum numerus, qui ex producto ex quadrato ipsius DE, in AH, multiplicato in AH, gignitur, & numerus, qui ex producto ex AE, in productum ex EB, in BH, multiplicato in eundem AH, procreatur, eandẽ proportionem, quam multiplicantes. Cum ergo hi æquales sint, erunt & illi producti æquales) hoc est, numerus productus ex AH, in AH, id est, quadratus ipsius AH, ductus in quadratum ipsius DE, (per scholium enim prop. 19. lib. 8. Euclid. quomodocunque tres numeri inter se multiplicentur, idem semper numerus procreatur) æqualis erit numero, qui ex producto ex AE, in productum ex EB, in BH, nempe ex producto trium differentiarum AE, EB, BH, inter se multiplicatarum, ducto in AH, id est, in semissem laterum gignitur. At ex quadrato ipsius DE, in quadratum ipsius AH, producitur quadratus numerus areæ trianguli ABC, vt mox ostendemus. Igitur & ex producto trium excessuum AE, EB, BH, inter se multiplicatorum, ducto in AH, semissem laterum AB, BC, AC, producitur idem quadratus numerus areæ trianguli ABC: ac proinde radix quadrata huius numeri erit dicti trianguli area: quod erat demonstrandum.

QVOD autem ex quadrato ipsius DE, in quadratum ipsius AH, producatur quadratus numerus areæ trianguli ABC, in hunc modum demonstro. Quoniam vt num. 2, ostendemus, ex DE, in semissem lateris AB producitur area trianguli ADB; Et ex eadem DE, hoc est, ex DG, in semissem lateris BC, efficietur area trianguli BDC; Item ex eadem DE, id est, ex DF, in semissem lateris AC, gignitur area trianguli ADC: Quod autem fit ex DE, in semisses laterum AB, BC, AC, [t] æquale est ei, quod fit ex DE, in AH, ex illis semissibus conflatam: fiet propterea area trianguli ABC, ex DE, in AH; ac propterea (contractis hisce lineis ad numeros) quadratus numerus areæ eiusdem trianguli procreabitur ex quadrato ipsius DE, in quadratum ipsius AH. Quando enim duo numeri se mutuo multiplicantes fecerint aliquem, producent eorum quadrati se mutuo multiplicantes quadratũ illius producti, quod ita perspicuum fiet. Duo numeri A, & B, se multiplicantes faciant D; & ambo se ipsos multiplicantes faciant C, & E. Denique hi quadrati C, & E, se multiplicantes faciant F. Dico F, esse quadratum ipsius D. Cum enim A, multiplicans se ipsum, & B, faciat C, & D: [u] erit vt A, ad B, ita C, ad D: Eademque ratione, cum B, multiplicans A, & se ipsum, facit D, & E, erit vt A, ad B, ita D, ad E: ideoq; C, D, E, continue proportionales erunt. [x] Quare qui fit ex C, in E, numerus videlicet F, æqualis erit ei, qui fit ex D, in se: ac proinde F, quadratus erit ipsius D. Quæ cum ita sint, cum ex DE, in AH, producatur area trianguli ABC, vt ostendimus, fiet ex quadrato ipsius DE, in quadratum ipsius AH, quadratus numerus areæ eiusdem trianguli ABC. Quod erat demonstrandum.

t 11. secund.

A.. B...
C....D.....E.....
F 36.

u 17. septi.

x 20 secun.

2 ALTERA via, qua ex datis lateribus area trianguli colligitur, hæc est.

Area trianguli quo pacto aliter ex datis laterib. colligatur.

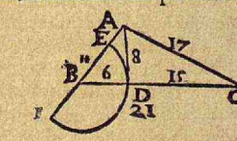
EX quouis angulo ad latus oppositum, etiam protractum, si opus est, perpendicularis ducatur. Hæc enim (si eius quantitas cognita fuerit) multiplicata in semissem basis, seu dicti lateris, vel eius semissis in totam basem producet aream trianguli, vel si maius, tota perpendicularis ducta in totam basem, numerum procreabit, cuius semissis aream trianguli offeret:

NAM vt lib. 7. propos. 1. demonstrauimus, est area trianguli æqualis rectangulo comprehenso sub perpendiculari, & semisse basis, vel sub semisse perpendicularis, ac tota base; Item semissi rectanguli sub perpendiculari, ac tota base comprehensi. Cum ergo per cap. 1. huius lib. area rectanguli illius producatur ex multiplicatione vnius lateris circa angulum rectum in alterum: hoc est, ex perpendiculari (y quæ vni lateri æqualis est) in semissem basis trianguli, vel ex semisse perpendicularis (z quæ semissi lateris est æqualis) in totam basem: vel denique rectangulum trianguli duplum ex perpendiculari in totam basem trianguli: constat propositum.

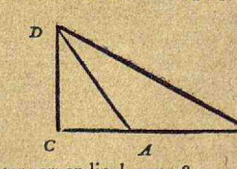
y 34. prim. 234. prim.

MAGNITVDO autem dictæ perpendicularis, sicuti & basis, in metiendis campis inuestiganda est per catenulam ferream, quod hæc neque intendatur, neque remittatur, aut cerre, si omnia latera nota sint, Geometrice hoc modo. Sit triangulum ABC, cuius latus AB, sit 10. & BC, 21. & AC, 17. Primum inuestiganda sunt segmenta BD, CD, inter perpendicularem, per ea, quæ lib. 1. cap. 3. Num. 9. scripsimus, hac ratione. Fiat vt latus BC, in quod cadit perpendicularis AD, (Semper autem esset demittenda perpendicularis in maximum latus, vt intra triangulum caderet) ad summam aliorum duorum laterum AB, AC, nimirum, vt 21. ad 27. ita differentia eorundem laterum, videlicet 7. ad aliud. Producetur enim numerus 9. (qui quoniam minor est latere BC, argumento est, perpendicularem intra triangulum cadere. Si enim maior esset, caderet extra, vt propos. 9. nostrorum triangulorum rectil. ostendimus) qui ablatus ex latere BC, id est, ex 21. relinquit 12. semissis 6. dabit minus segmentum BD, prope minus latus AB, quæ eadem semissis ex latere BC, subtracta reliquum faciet maius segmentum CD, nimirum 15. iuxta maius latus AC.

Segmenta basis, quæ à perpendiculari abscinduntur quo pacto cognoscantur.



SIT rursus triangulum ABD, cuius latus AB, 12. AD, 11. & BD, 20. demittenda autem sit perpendicularis ex D, ad AB. Fiat, vt latus AB, 12. ad summam aliorum duorum 31. ita differentia eorundem, nimirum 9. ad aliud. Producetur enim numerus $23\frac{1}{4}$. (qui quoniam maior est latere AB, argumento est, perpendicularem cadere extra triangulum, angulumque A, esse obtusum,) ex quo latus AB, 12. subtractum, relinquit $11\frac{1}{4}$. Huius autem numeri semissis $5\frac{5}{8}$. dabit segmentum exterius AC, inter perpendicularem, & angulum obtusum: eademque semissis addita lateri AB, efficiet aliud segmentum BC, inter perpendicularem, & angulum acutum $17\frac{5}{8}$. Atque hæc ratio expeditissima est.



ALITER.

ALITER. Sit ducenda perpendicularis ad maximum latus BC, in priori triangulo ABC, quæ necessario cadet intra triangulum; [a] propterea quod angulus A, maior est vtrolibet BC,ac proinde vterq; horum acutus est. [b] Quoniam autem quadratum rectæ AB,minus est quadratis rectarum AC,BC,rectangulo bis comprehenso sub BC,& segmento CD,inter C,& perpendicularem:si quadratum rectę AB,100.detrahatur ex summa quadratorū rectarū AC,BC,id est,ex 730. reliquum fiet rectangulū 630. bis comprehensum sub BC,segmento CD,inter C,perpēdicularē. Quare eius semissis 315.æqualis erit rectangulo illo semel sumpto:ac proinde hoc rectangulo 315. diuiso per latus BC, 21. dabit Quotiens 15. segmentū CD,prope angulum acutū C,cui opponitur latus AB,cuius quadratum ex summa reliquorum quadratorū detractum fuit.Ablato autē segmento CD,15.ex latere BC,21.remanebit alterum segmentum BD,6.Eodem pacto, [c] quia quadratum rectæ AC,minus est quadratis rectarum AB, BC, rectangulo bis comprehenso sub CB, & segmento BD, inter B, & perpendicularem: si quadratum rectæ AC, 289. subducatur ex summa 541.quadratorum rectarum AB,BC,reliquum fiet rectangulum 252. comprehensum bis sub CB, & segmento BD, inter B, & perpendicularem. Quare eius semissis 126. æqualis erit illi rectangulo semel sumpto:ac proinde hoc rectangulo 126.diuiso per latus CB,21.dabit Quotiens 6.segmentum BD,iuxta acutum angulum B, cui latus AC, quadrati ex duobus alijs quadratis detracti opponitur. Quo segmento 6. dempto ex latere BC,21.remanebit alterum segmentum CD,15.

DEINDE in posteriori triangulo ABD,ducenda sit perpendicularis ad latus AB, nō maximum.Et quia latus DB,latere AD,maius est; [d] erit angulus A,maior angulo B. [e] Cum ambo ergo simul sint duobus rectis minores, erit saltem minor B, acutus: [f] ac proinde quadratum rectæ AD, minus erit quadratis rectarum AB, BD, rectangulo bis comprehenso sub latere AB,& segmento inter B, & perpendicularem. Si ergo quadratum rectæ AD, 121. subtrahatur ex summa quadratorum rectarum AB, BD, id est,ex 544.reliquum fiet rectangulum bis comprehensum sub AB, & segmento inter B, & perpendicularem, nimirum 423. ideoque eius semissis 211½. æqualis erit illi rectangulo semel sumpto. Quare si rectangulum hoc 211½.diuidatur per latus AB, 12. dabit Quotiens 17⅝. segmentum inter B, & perpendicularem: quod quia maius est latere AB,argumento est,perpendicularem DC,cadere extra triangulum:ac proinde angulum A,obtusum esse.Quod si ex hoc segmento 17⅝.demātur latus AB,12.remanebit exterius segmentum 5⅝.

QVANDO constat, angulum A, esse obtusum, ideoque perpendicularem D C, extra triangulum cadere,reperiemus eadem segmenta BC,CA, hoc etiam modo. [g] Quoniam quadratum lateris BD,superat quadrata laterum AB, AD, rectangulo bis comprehenso sub latere AB,& segmento exteriore AC; si summa quadratorum rectarum AB, AD, 265. detrahatur ex quadrato lateris BD, 400. reliquum erit rectangulum 135. bis comprehensum sub AB, AC: & eius semissis 67½. illi rectangulo semel sumpto æqualis erit; ac proinde hoc rectangulo 67½. diuiso per latus AB, 12. indicabit quotiens 5⅝. segmentum exterius CA, cui si addatur latus AB,12.conflabitur segmentum BC,17⅝.Sed prior ratio,quæ ex 2.lib.Eucl.non pendet,expeditior,ac proinde tenenda:quamuis auctores alij posteriorem viam plerunque sequantur.

INVENTIS segmentis a perpendiculari factis, ita magnitudinem perpendicularis cognoscemus.

DIFFERENTIA inter vtrumis segmentum, & latus adiacens ducatur in summam ex eodem segmento & latere conflatam. Radix enim quadrata numeri producti perpendicularem exhibebit notam, vt libro primo, capite tertio,numero decimoseptimo demonstrauimus.

Verbi gratia. In priori triangulo ABC, si differentia 4.inter segmentum BD, & latus AB, hoc est,inter 6. & 10. multiplicetur per 16. nempe per summam eiusdem segmenti BD,& lateris AB,gignetur numerus 64.cuius radix quadrata 8.dabit perpendicularem AD.Pari ratione si differentia 2. inter segmentum CD,& latus AC hoc est,15.& 17.ducatur in 32 id est in summam eiusdem segmenti CD,& lateris AC: procreabitur numerus 64. cuius radix quadrata 8.præbebit perpendicularem AD,vt prius.

IN posteriori autem triangulo ABD,si differentia 5⅜ inter segmentum AC,& latus AD,nimirum inter 5⅜ & 11.ducatur in 16⅝. hoc est in summam eiusdem segmenti AC, & latus CD:producetur numerus $75\frac{9}{64}$. siue $89\frac{3}{64}$. cuius radix quadrata in numeris exhiberi nō potest, sed paulo maior est quam apposita fractio cuius numerator est $75\frac{9}{64}$. denominator autem 8. quæ ad hunc numerum $9\frac{547}{8}$. reducetur, si numerator per denominatorem diuidatur: atque tanta est ferme perpendicularis DC, nimirum $9\frac{547}{800}$. Sic etiam si differentia $2\frac{3}{8}$. inter segmentum BC, $17\frac{5}{8}$. & latus BD, 20. multiplicetur per $37\frac{5}{8}$. summam eiusdem segmenti BC,& latus BD,gignetur idem numerus,qui prius, $\frac{57}{64}$.hoc est,$89\frac{3}{64}$. cuius radix quadrata paulo maior est,quam $9\frac{547}{571}$.veluti prius. Atque hæc ratio satis expedita est.

ALITER. [h] Quoniam quadratum rectæ AB,in priori triangulo ABC, æquale est duobus quadratis rectarum AD, BD: si quadratum 36. segmenti BD, tollatur ex 100. quadrato lateris adiacentis AB, relinquetur quadratum 64.perpendicularis AD. Radix ergo eius quadrata 8. erit magnitudo perpendicularis AD, vt supra. Similiter si quadratum 225. segmenti CD, demātur ex 289. quadrato lateris adiacentis AC, reliquum fiet quadratum 64.perpendicularis AD, cuius radix 8.magnitudo erit perpendicularis AD, vt prius.

IN triangulo vero posteriori ABD,si quadratum $31\frac{1}{64}$.segmenti AC,$5\frac{5}{8}$.subtrahatur ex 121.quadrato lateris adiacentis AD,11.remanebit quadratum $89\frac{3}{64}$.perpendicularis DC,cuius radix est paulo maior quam $9\frac{547}{800}$. vt supra.Sic etiam si quadratum $310\frac{1}{64}$.segmenti BC,$17\frac{5}{8}$.subtrahatur à quadrato 400. lateris adiacentis BD, 20. remanebit rursus quadratum $89\frac{3}{64}$.perpendicularis DC, cuius radix paulo maior est quam $9\frac{547}{800}$. vt supra. Verum prior ratio magis expedita videtur,quanquam alii posteriorem hanc viam tradant.

IN triangulo porro æquilatero perpendicularis hoc alio modo inuenietur. [i] Quoniam quadratum lateris sesquitertium est quadrati perpendicularis:si fiat vt 4.ad 3.ita quadratum lateris ad aliud, proueniet quadratum perpendicularis.Radix ergo huius quadrati notam exhibebit perpendicularem. Vt si latus est 10. & fiat vt 4. ad 3.ita 100.quadratum lateris ad aliud,gignetur quadratum perpendicularis 75. cuius radix $8\frac{1}{2}$. proxime erit perpendicularis quæsita.

DENIQVE inuentis segmentis basis à perpendiculari factis, perpendicularis ipsa per sinus ita fiet cognita in priori triangulo. Fiat vt 10.latus AB,recto angulo oppositum ad sinum totum recti anguli D;ita 6.segmentum BD,

tum BD,ad aliud;producetur que sinus anguli oppositi BAD,60000.Ergo angulus BAD,erit grad.36. Min.52. ac proinde angulus B,eius complementum erit grad.53. Min.8.Si ergo rursus fiat, vt sinus totus ad 10. latus AB: ita 80003.sinus anguli BAD,ad aliud,procreabitur latus AD,hoc est,perpendicularis $8\frac{3}{1000000}$.ferme, quę paulo maior est,quam 8.supra inuenta. quod discrimen oritur ex eo, quod sinus non sunt omnino tales, quales in tabula describuntur:quod tamen in mensuratione camporum non inducit sensibilem admodum errorem.

Area prioris trianguli ABC

ITAQVE si in priori triangulo ABC,perpendicularis AD,8.ducatur in 10.½.semissem basis BC,vel 4.semissis perpendicularis AD,in 21.totam basem,procreabitur area trianguli ABC,84. Quæ etiam producetur, si tota perpendicularis 8.in totam basem 21.multiplicetur,& producti numeri 168.semissis accipiatur 84.

Area posterioris trianguli ABD.

ITEM in posteriori triangulo ABD, si perpendicularis DC,$9\frac{547}{800}$. ducatur in 6. semissem basis AB,vel semissis perpendicularis,nimirum $1\frac{141}{441}$.vel $4\frac{175}{441}$.in totam basem 12.cōficietur area trianguli ABD, $56\frac{866}{1008}$. vel $56\frac{433}{504}$. Quæ etiam producetur, si tota perpendicularis in totam basem ducatur, & producti capiatur semissis.

Vt fractiones vitentur quid agendum.

VT autem fractiones, quoad eius fieri potest,vitentur, curabis,vt quando perpendicularis est numerus par,& basis numerus impar, accipias semissem perpendicularis, eamque in totam basem ducas: quando vero perpendicularis est numerus impar,& basis numerus par,sumas semissem basis,eamque ducas in totam perpendicularem. Quod si tam perpendicularis,quam basis fuerit numerus par, vel impar, nihil interest,vtrius semissem capias.

Quid agēdus, quando perdicularis est numerus surdus.

QVANDO etiam perpendicularis est radix surda, quæ videlicet numero exprimi nequeat, qualis fuit DC,in posteriori triangulo ABD,recte feceris,si eius quadratum (non extracta radice illa surda) multiplices per quadratum semissis basis. Numerus enim productus erit quadratus numerus areæ trianguli; adeo vt radix eius sit ipsa trianguli area. Hac enim ratione minus à vero aberrabimus. Vt in dicto posteriori triangulo ABD,si quadratum perpendicularis DC,$57\frac{1}{64}$.ducamus in 36.quadratum semissis basis,producemus $2058\frac{8}{64}$.quadratum areę,cuius radix est $56\frac{260}{3025}$.area videlicet trianguli ABD,paulo maior,quā prius inuenta. Pari ratione,si in aliquo triangulo quadratum perpendicularis foret 72. & semissis basis 6.si radicem numeri 72. nimirum $8\frac{1}{17}$. hoc est, ipsam perpendicularem,ducamus in 6.producemus aream $50\frac{43}{17}$. At si ipsummet quadratum 72. multiplicemus per 36. quadratum videlicet semissis basis,procreabimus 2592. quadratum areæ, cuius radix paulo maior est, quam $50\frac{25}{101}$.qui numerus aliquanto maior est,quam area prius inuenta $50\frac{43}{17}$. Ratio huius nostræ regulæ est, quòd,vt paulò ante ad finem Num.1. demonstrauimus,duo numeri sese multiplicantes producant radicem numeri ex eorum quadratis producti.

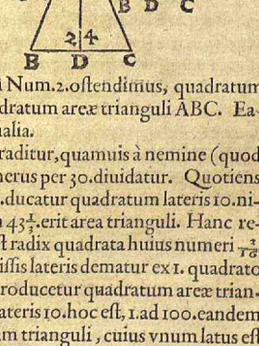
Area trianguli rectanguli.

3. EXPOSITIS duabus regulis generalibus, per quas trianguli cuiuslibet area ex cognitis lateribus inuestigatur,proponemus nunc particularia quædam præcepta pro particularibus triangulis nonnullis,quæ nonnunquam magno vsui erunt,cum per ea sæpenumero expeditius in aliquibus triangulis areæ reperiantur,quam per illas generales regulas. Area ergo trianguli rectanguli producetur, si duo latera circa rectum angulum inter se multiplicentur,& numeri producti semissis capiatur. Nam ex multiplicatione illa gignitur parallelogrammū rectangulum sub duobus lateribus circa angulum rectū comprehensum, vt cap.1.dictum est, [a] cuius rectanguli triangulum semissis est. Quod perinde est,ac si semissis vtriusuis lateris in totum alterū,tanquam in basem,multiplicetur. Vt in præcedenti triangulo ABC,diuiso in duo triangula rectangula ADB,ADC;si AD,8.ducatur in BD,6.producetur numerus 48.cuius semissis 24.erit area trianguli ADB. Sic si AD, 8.ducatur in DC, 15.fiet numerus 120.cuius semissis 60, erit area trianguli ADC: vbi vides, duo triangula 24.& 60. componere totum triangulum ABC, 84.vt supra inuenimus.

a 41. primi

Area trianguli Isoscelis.

4 AREA trianguli Isoscelis,vel etiam æquilateri,procreabitur,si quadratum semissis basis ex quadrato lateris auferatur,& reliquus numerus in idem quadratum semissis basis ducatur, ac deniq; huius producti radix quadrata eruatur. Vt in Isoscele ABC,cuius æqualia latera AB,AC,sint 32.32.& basis BC,24.si quadratam 144. semissis basis dematur ex 1024. quadrato lateris AC,vel AB,& reliquus numerus 880.ducatur in 144. quadratum semissis basis,erit producti 126720.radix quadrata $355\frac{60}{171}$. (quæ paulo minor est vera radice) area trianguli ABC. Nam si quadratum semissis basis DC,auferatur ex quadrato lateris AC, [b] reliquum fit quadratum perpendicularis AD,quod ex scholio propos.26.lib.1. Euclid.perpendicularis AD,basem BC,secet bifariam in D, Quare vt circa finem Num.2.ostendimus, quadratum perpendicularis AD, ductum in quadratum DC, semissis basis producet quadratum areæ trianguli ABC. Eademq; ratio est in triangulo æquilatero,cum hoc habeat etiam duo latera æqualia.



b 47. primi.

Area trianguli æquilateri.

5 Pro area tamē trianguli æquilateri hæc etiam regula ab auctoribus traditur,quamuis à nemine (quod sciam) demonstrata sit. Quadratum lateris ducatur in 13. productusque numerus per 30.diuidatur. Quotiens enim erit area trianguli æquilateri. Vt si vnum latus æquilateri trianguli sit 10.ducatur quadratum lateris 10.nimirū 100.in 13.productusque numerus 1300.per 30.diuidatur.Quotiens enim $43\frac{1}{3}$.erit area trianguli. Hanc regulam ita demonstro. Area trianguli æquilateri, cuius singula latera sunt 1. est radix quadrata huius numeri $\frac{3}{16}$. (Nam per regulam præcedentem Num. 4. explicatam, si $\frac{1}{4}$ quadratum semissis lateris dematur ex 1. quadrato lateris,& reliquus numerus $\frac{3}{4}$.ducatur in idem quadratum $\frac{1}{4}$. semissis lateris, producetur quadratum areæ trianguli $\frac{3}{16}$.)nimirum $\frac{1}{3}\frac{3}{0}$.proxime. Cum ergo quadratum lateris 1.ad quadratum lateris 10.hoc est, 1.ad 100.eandem proportionem habeat, quam area $\frac{1}{3}\frac{3}{0}$. trianguli, cuius vnum latus est 1.ad aream trianguli, cuius vnum latus est 10. [c] quod vtraque proportio proportionis lateris 1.ad latus 10. sit duplicata:si fiat vt 1. (quadratum lateris 1.)ad 100.(quadratum lateris 10.)ita area $\frac{1}{3}\frac{3}{0}$.ad aliud,producetur area trianguli, cuius vnum latus est 10. Hoc autem fit, ducendo secundum numerum 100. in tertium $\frac{1}{3}\frac{3}{0}$. hoc est, (vt constat ex regula multiplicationis fractorum, ducendo 100.in numeratorem 13. & productum per denominatorem 30. diuidendo. Neq; vero opus est productum hunc numerum $43\frac{1}{3}$.per primum 1.partiri, cum vnitas diuidens, aut multiplicans quemcunque numerum producat numerum eundem. Sic etiam si latus vnū trianguli æquilateri sit 6.ducemus eius quadratū

c 20. & 19 sexti.

36.in $\frac{1}{3}\frac{1}{0}$.hoc est,in 13.numeratorem,productumq; 468.per 30.partiemur. Quotiens nam que $15\frac{3}{5}$.erit trianguli propositi area.

Radix quadrata numeri fracti quo pacto eruatur.

QVOD autem $\frac{1}{3}\frac{1}{0}$.sit radix quadrata numeri $\frac{7}{10}$.patet ex regula, qua cuiusuis fracti numeri radix extrahitur:quæ talis est.Numerator in denominatorem ducatur, & producti radix propinqua inueniatur. Si enim per hanc radicem diuidemus numeratorem:vel ipsam radicem per denominatorem partiemur;exibit radix fractionis propositæ:priori quidem modo maior quam vera,posteriori autem minor,si radix illa propinqua producti ex numeratore in denominatorem fuerit minor quam vera:quia in priori illo modo fit diuisio,per numerum vero minorẽ,in posteriori autẽ numerus vero minor diuiditur. Quod si radix illa propinqua foret maior, quam vera,produceretur priori modo radix fractionis minor,quam vera,posteriori aũt maior,vt liquet. Verbi gratia.Inuenienda sit radix quadrata fractionis $\frac{3}{10}$.quam diximus esse quadratum areæ trianguli æquilateri,cuius vnum latus est.1. ex 3.in 16.fit numerus 48. cuius radix propinqua $6\frac{4}{7}$. minor quam vera,per quam si diuidatur numerator 3 prodibit radix $\frac{1}{3}\frac{3}{0}$.fractionis $\frac{3}{10}$.maior, quam vera:at si radicem eandem propinquam $6\frac{5}{7}$, partiamur per denominatorem 16.reperietur radix $\frac{47}{70}$.eiusdem fractionis $\frac{7}{10}$.minor, quam vera. Ratio huius extractionis vero hæc est. Quando numerator 3.denominatorem 16.multiplicat,[d] erit producti 48.radix quadrata medio loco proportionalis inter 3. & 16. quod radix in se ducta producat numerum 48. æqualem ei, qui ab extremis 3.& 16.inter se multiplicatis gignitur:ac proinde proportio 3.ad 16.erit duplicata tam proportionis 3. ad illam radicẽ,quam illius radicis ad 16.[e] Cum ergo proportio 3. ad 16. sit quoq; duplicata proportionis,quam radix numeri 3,ad radicem numeri 16.habet:erit vt 3.ad radicem producti 48. Vel vt radix huius producti ad 16.ita radix numeri 3.ad radicem numeri 16. Quapropter cum fractio, cuius numerator est radix numeri 3.denominator autem radix numeri 16.sit radix fractionis $\frac{3}{10}$.erit quoque tam fractio, cuius numerator 3. & denominator radix producti 48.quam fractio cuius numerator radix producti 48. denominator autem 16. hoc est, tam Quotiens.qui fit ex diuisione 3.per radicem producti 48. quam quotiens, qui fit ex diuisione radicis producti 48.per 16.radix propinqua fractionis $\frac{3}{10}$.Eademq; de cæteris ratio est.

d 20. sep.

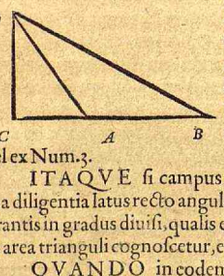
e 11 octani

ALII hanc tradunt regulam ad aream trianguli æquilateri inueniendam. Ex quadrato lateris sumatur tam pars decima, quam tertia. Harum enim partium summa erit area trianguli. Quod sic ostendo. Hæ fractiones $\frac{1}{10}$.& $\frac{1}{3}$.in vnam collectæ summam efficiunt $\frac{1}{3}\frac{3}{0}$.ac proinde idem est ex quadrato lateris auferre $\frac{1}{10}$.& $\frac{1}{3}$.atque $\frac{1}{3}\frac{3}{0}$.Sed quando auferuntur $\frac{1}{3}\frac{3}{0}$.multiplicatur quadratum lateris per $\frac{1}{3}\frac{3}{0}$.vt in 6.quæstiuncula fractorum docui. Igitur cum vt Num.5.explicatum est,ex multiplicatione quadrati lateris in $\frac{1}{3}\frac{3}{0}$.producatur area trianguli æquilateri,liquido constat,partem decimam,& partem tertiam quadrati lateris conficere eandem aream. Itaque si latus sit 30.erit eius quadratum 900.cuius $\frac{1}{10}$.est 90.& $\frac{1}{3}$.est 300.quæ partes simul conficiunt numerum 390.pro area illius trianguli æquilateri.

Area trianguli rectanguli ex latere quod recto angulo opponitur, & vno angulo acuto cognito, quo pacto inuestigetur.

6 HACTENVS exposuimus regulas,quæ nos in cognitionem areæ cuiuscunque trianguli ducũt, si singula latera cognita sint. Nunc triangulorum areas per doctrinam sinuum, Tangentium,secantiumque inuestigabimus,licet non omnia latera sint cognita,sed vnum duntaxat, vel duo, vna cum duobus angulis, vel vno. In triangulis ergo rectangulis ita procedemus.

QVANDO in triangulo rectangulo latus ergo angulo oppositum cognitum est,cum vno angulo acuto cognoscemus aream hoc modo. Detracto angulo acuto dato ex recto,id est,ex grad.90.relinquetur alter acutus angulus etiam notus. Vt in triangulo DCB, habente angulum rectum C, & latus BD,notum, vna cum angulo acuto B.[f] Et quoniam duo B, & BDC, vni recto, id est, gradibus 90. sunt æquales, si angulus B, ex grad.90.detrahatur,reliquus fiet angulus BDC. Si ergo fiat, vt sinus totus anguli recti C,ad oppositum latus BD, in qualibet mensura cognitum; ita tam sinus anguli B, quàm anguli BDC,ad aliud,[g] nota fient latera DC,& CB, in partibus lateris BD, atque ita omnia tria latera cognita erunt. Ergo & area cognoscetur vel ex Num.1.huius cap. vel ex Num.3.



f 32. primi.

g 2. triang. rectil.

ITAQVE si campus mensurandus triangularis est habens vnum angulum rectum, satis erit, si summa diligentia latus recto angulo oppositum mensuretur,& insuper vnus angulus acutus, beneficio alicui[i] quadrantis in gradus diuisi,qualis est à nobis constructus cap.2.lib.1.Nam ex his cognitis,vt proxime diximus, tota area trianguli cognoscetur,etiamsi ad alia duo latera accedere non possimus.

h 3. triang rectil.

Area trianguli rectanguli ex vno latere circa angulum rectum, & latere quod recto angulo opponitur.

QVANDO in eodem triangulo rectangulo BDC,alterutrum latus datur circa angulum rectum vna cum latere,quod recto angulo opponitur,nimirum si DC,& DB,cognita sunt,[h] cognoscetur quoque alterum latus BC,si fiat,vt latus DB,angulo recto oppositum ad sinum totum anguli recti C,ita latus datum DC, ad aliud. Productus enim numerus erit sinus anguli B,quo cognito ex tabula sinuum, cognitus etiam erit eius complementum BDC. Si ergo rursus fiat,vt sinus totus anguli recti C,ad latus oppositum datum DB,ita sinus anguli BDC,inuenti ad aliud,exibit latus oppositum BC. Ex duobus igitur lateribus DC, CB, cognitis,area trianguli nota fiet ex ijs, quæ Num.3.paulo ante scripsimus.

i 4. triang. rectil.

Area trianguli rectanguli ex vno latere circa angulum rectum & vno angulo acuto.

ATQVE ita in campo,si detur portio triangularis,habens angulum rectum;satis est, si diligenter mẽsuretur vnum latus circa angulum rectum, vna cum latere, quod recto angulo opponitur, etiamsi ad tertium latus non pateat accessus. Ex illis enim duobus area cognoscetur,vt dictum est.

QVOD si in eodem triangulo BDC,notum fuerit vnum latus circa rectum angulum,videlicet DC,vna cum alterutro angulo acuto, vtpote cum B, [i] notum efficietur alterum latus CB:si fiat, vt sinus totus ad datum latus DC:Ita Tangens anguli BDC,quæsito lateri CB,oppositi,(cognoscetur autẽ alter hic angulus BDC, si angulus B, ex gradibus 90.dematur)ad aliud. Nam inuentus numerus dabit latus CB,quæsitum. Vel si fiat,vt sinus anguli B, dato lateri DC,oppositi ad latus datum DC:Ita sinus alterius anguli BDC, ad aliud. Nã rursus producetur latus quæsitum BC. Ex duobus ergo lateribus DC,CB,aream cognoscemus, vt Num.3. traditur.

IN Campo ergo aliquo;si proponatur portio triangularis angulum habens rectum,satis erit vnum latus circa rectum angulum,& vnum angulum acuti metiri,vt eius trianguli area reperiatur,etiamsi ad alia duo latera accessus denegetur. Atque hæc de rectangulis triangulis,veniamus iam ad obliquangula.

7 Si

7 SI ergo in triangulo non rectangulo ABD, notum sit vnum latus,cum duobus angulis quibuscunque, peruenietnus in cognitionem areæ hoc modo. Ex duobus angulis cognitus erit quoque tertius,cum sit complementum aliorum duorum ad gr.180. [e] Igitur alia duo latera cognoscentur:ac proinde ex tribus lateribus cognitis area fiet nota ex ijs, quæ Num.1.& 2.tradita sunt.

e 10. triãg. rectil.

Area trianguli obliquanguli ex vno latere & duobus angulis.

VT ergo campus triangularis nullum habens angulum rectum cognitus fiat,satis erit,si vnum latus cum duobus angulis accurate mensuretur. Ex ijs enim duo reliqua latera nota efficientur,&c. vt dictum est.

f 12. trian. rectil.

Area triãguli obliquanguli ex duobus lateribus & angulo ab ipsis cõprehenso.

RVRSVS si in eodem triangulo ABD, non rectangulo nota sint duo latera,vna cum angulo ab ipsis comprehenso; [f] inuenietur tertium latus:ac proinde,vt prius,ex omnibus tribus lateribus area trianguli efficietur cognita.

ITAQVE satis erit, si in campo quouis triangulari duo latera, vna cum angulo ab ipsis comprehenso mensurentur: vt area ipsius nota reddatur.

Diuiso vno latere figura in quotuis partes æquales,quo pacto alia latera in eisdem partibus fiant nota.

8 NEQVE vero hoc omittendum videtur:si videlicet vnũ latus trianguli, vel cuiusuis figuræ rectilineæ in partes quotlibet æquales secetur,reliqua latera in eisdẽ partibus fieri posse cognita, beneficio instrumẽti partium vt ad finem Num.1.cap.1.lib.1.declarauimus. Verum vt magis exquisitè reperiantur, inquirendum erit fragmentum vltimæ particulæ(si quod superfuerit) in partibus millesimis, per ea, quæ Num. 14. cap. 2. lib. 1. docuimus. Ita enim in dimensionibus figurarum minus à vero aberrabimus.

In negotio dimensionum admittẽdam esse in non nullis lineis & angulis mechanicam mensurationem.

9 NEMINEM autem moueat, aut perturbet, quod rectas dixerimus metiendas esse nonnunquam mechanice per catenulam aliquam ferream, aut per instrumentum partiũ. Nam in hoc dimetiendi negotio, præsertim in campis,& agris admittenda omnino est huiusmodi mechanica linearum dimensio, tum quia apud omnes agrimensores hic mos est:tum quia non semper via Geometrica id præstare potest; tum vero maxime, quia in dimensionibus agrorum,siue figurarum satis est rem prope verum attingere,dummodo notabilis error non committatur. Quod si hæc dimensio quarundam linearum alicui non probetur,is profecto è medio tollat, necesse est omnem agrorum,figurarumue dimensionem. Vnde enim constat, agrum propositum,vel figuram habere latera cognita,nisi hæc ipsa per mensuram aliquam materialem sint explorata? Si igitur laterum dimensio mechanica, tanquam à vero parum aberrans, ab omnibus vsurpatur, cur eam in lineis intra figuras metiendis reijciendam censeamus,non video. Non nego tamẽ,viam Geometricam, quando fieri potest, adhibendam esse. In figuris quoque,vbi latera non sunt nimis magna,vtendum censeo doctrina, quam in instrumento partium lib.1.cap.1.ad finem Num.2.tradidimus. nõ neglectis etiam ijs, quę in eodem lib.1.cap.2. Num 14.de quauis particula lineæ cognoscenda,in partibus saltem millesimis,scripsimus, quod hac ratione vix à vero quis aberrare possit.

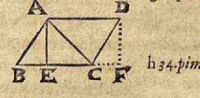
IDEM de mechanica angulorum dimensione per quadrantem intelligendum est: præsertim si præter gradus inuestigentur quoque minuta,vt lib.1.cap.2.docuimus.

DE AREA QVADRILATERORVM NON RECTANGVLORVM.

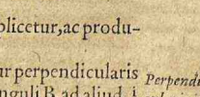
CAPVT III.

Rhombi & Rhomboidis area.

1 TRIA sunt genera quadrilaterarum figurarum, quæ vel nullum angulum rectum habent,vel certe non omnes rectos:Rhombus, Rhomboides,& Trapezium. Primæ duæ figuræ nullum habent angulum rectum:posterior autem potest habere vel vnũ rectum, vel duos,vel etiam nullum:Item duo latera opposita parallela,vel non parallela. Rhombi & Rhomboidis, quorum latera nota sint, area producitur ex ductu perpendicularis in latus,in quod perpendicularis cadit. Ita vt magnitudo perpendicularis accurate sit prius exploranda vel per instrumentum partium initio huius operis constructi,vt paulo ante cap.2.Num.8.monuimus, vel alio modo,vt mox dicam. Verbi gratia,in Rhombo & Rhomboide ABCD, producetur area ex multiplicatione perpendicularis AE, in latus BC, [g] Nam rectangulum AF,sub AE,& AD, comprehensum æquale est parallelogrammo BD, quòd hæc duo parallelogramma sint inter parallelas AD,BC, & super eandem basem AD. Itaque frustra alij præcipiunt, vt diameter ducatur AC,& beneficio perpendicularis AE, area trianguli ABC, inquiratur,quod hæc duplicata aream exhibeat totius parallelogrammi: [h] quippe cum triangulum ABC,semissis sit parallelogrammi. Frustra, inquam, hoc præcipiunt, cum expeditius area inueniatur si perpendicularis in totum latus BC,ducatur,quam si in semissem multiplicetur,ac productus deinde numerus dupletur.



g 35. primi



h 34. primi.

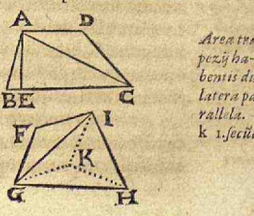
Perpendicularis inuentio.

SI per quadrantem cap.2.lib.1. constructum inuestigetur quantitas anguli B,reperietur perpendicularis AE,per sinus,hac ratione. Fiat vt sinus totus anguli recti E,ad latus oppositum AB,ita sinus anguli B,ad aliud. [i] Productus enim numerus erit perpendicularis AE,cognita in partibus lateris dati AB.

i 12. triang. rectil.

Area trapezij habentis duo latera parallela.

2 TRAPEZII, in quo duo latera opposita sint parellela AD, BC, & omnia latera nota,area producitur ex perpendiculari AE, inter duo latera parallela multiplicata in semissem summæ ex lateribus parallelis conflatæ. Nam ducta diametro AC, area trianguli ABC, producitur ex perpendiculari AE, in semissem basis BC, vt cap.2. Num.2. dictum est: Item area trianguli ACD, ex eadem perpendiculari AE, in semissem basis AD: Ac proinde hæ duæ areæ simul aream totius Trapezij ABCD, conficient. [k] Cum igitur idem fiat ex AE, in summam ex semisse rectæ BC, & ex semisse rectæ AD, conflatam, id est, in semissem rectarum BC,AD, simul:quod ex AE, in semissem lateris BC,& ex AE, in semissem lateris AD,liquido constat,aream Trapezij gigni ex perpendiculari AE,in semissem summæ laterum AD,BC. Atque hæc ratio locum etiam habet in Trapezio habente vnum angulum rectũ,vel duos rectos.



k 1. secũdi

PERPENDICVLARIS vero AE, inuenietur, vt in Rhombo, & Rhomboide diximus, duobus modis, si per quadrantem angulus B, inuestigetur, &c.

IN Trapezio autem FGHI, in quo nulla sunt latera parallela, omnia tamen latera sunt nota, mensuranda primum est diameter IG, per instrumentum partium. Deinde vtriusque trianguli FGI, GHI, area inuenienda, vt cap. 2. Num. 1. & 2. tradidimus. Ambæ enim areæ simul conficient aream totius Trapezij

Area trapezij nulla habentis latera parallela. c 12. triãg. rectil. Nu. 2.

QVOD si malueris angulum F, vel H, per quadrantem inuenire, cognoscemus diametri GI, magnitudinem, per doctrinam Sinuum, ac Tangentium, [c] vt lib. 1. cap. 3. docuimus, ex duobus lateribus F G, F I, & angulo F, ab ipsis comprehenso, vel ex duobus lateribus HG, HI, & angulo H, quem continent.

Area figuræ quadrilateræ irregularis.

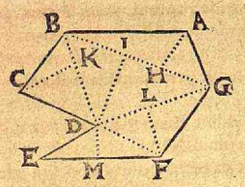
3 NON aliter aream consequemur cuiuscunque quadrilateri irregularis, etiamsi non habeat omnes angulos introrsum, sicut Trapezium. Vt si in Trapezio FGHI, ducantur ex G, & I, duæ rectę GK, IK, constituetur quadrilaterum GHIK, irregulare, cum solum habeat tres angulos GHI, HIK, HGK. Nam ad K, non sit angulus GKI, introrsum versus H, cum illud spatium sit duobus rectis maius, sed versus F, extrorsum. Huius ergo figuræ quadrilateræ irregularis aream colligemus, ducta diametro KH, ex duabus areis triangulum IKH, GKH, vt de Trapezio FGHI, dictum est.

DE AREA MVLTILATERARVM FIGVRArum irregularium.

CAPVT IV.

Area multilateræ figuræ.

1 FIGVRAS multilateras irregulares, quæ videlicet plura latera habent inæqualia, quam quatuor, etiãsi valde irregulares sint, metiemur, vt trapezia irregularia; resoluendo nimirum illas in triangula, & singulorũ triangulorũ areas inuestigando. Nã omnes areæ in vnã summam collectæ æquales sunt areæ totius figurę propositæ. Vt si figura septem laterum ABCDEFG, resoluatur in quinque triangula ABG, GBD, DBC, DEF, FDG, ita vt eorum latera se mutuo non intersecent, inquirendæ sunt areæ singulorum hoc modo. Quando omnia latera triangulorum nota effici possunt per aliquam mensuram, siue figura agrum aliquem representet, siue in charta solum sit descripta, demittantur ex angulis ad latera opposita perpendiculares AH, DI, CK, DM, FL, singulæ in singulis triangulis. Deinde in triangulo ABG, [f] inquirantur ex tribus lateribus notis segmenta BH, HG; & ex his perpendicularis AH, vt cap. 2. huius lib. Num. 2. declarauimus Nam AH, in semissem basis BG, ducta producet aream trianguli ABG. Eademque ratione aliorum triangulorum areæ peruestigentur: atque omnes areæ in vnam redigantur summam, vt area totius figuræ habeatur. Quod si malueris, poteris omnium triangulorum areas indagare ex tribus lateribus cognitis, per ea, quæ cap. 2. Num. 1 scripsimus, etiamsi neque perpendiculares ductæ sint, neque segmenta BH, GH, inuenta.



Quando figura in triangula resolui potest, quo modo eius area colligatur. f 9. triang. rectil.

Quando figura in triangula resolui nõ potest quo modo eius area deprehendatur.

2 QVANDO latera triangulorum interiora mensurari nequeunt, immo neque duci, vt non raro accidit in campis, aut agris, qui vel propter arbores, vel paludes interiectas, rectis itineribus pertransiri non possunt; alia ratione scopum attingemus, hac videlicet. Cognitis lateribus figuram ambientibus per aliquam mensuram, inuestigentur quoq; anguli ab ipsis comprehensi beneficio quadrantis alicuius in gradus diuisi. In posita figura angulus CDE, indagandus non est, quod sit extra figuram. Resoluta deinde figura mente, aut cogitatione in triangula, ac si latera interiora ducta essent, vt prius: [g] explorentur in triangulo ABG, duo anguli B, G, ex duobus lateribus AB, AG, angulog; ab ipsis comprehenso; atq; insuper latus BG. Hinc n. in triangulo rectangulo ABH, vel AGH, [h] demissa perpendicularis ex A, cognoscetur ex basę AB, & angulo B, vel ex basę AG, & angulo G; ac proinde area trianguli reperietur, vt antea ex ijs, quæ c. 2 huius lib. Nũ. 1. & 2. tradita sunt. Nõ aliter area trianguli BCD, nota fiet ex duob. laterib. CB, CD, notis angulum C, notũ ambientibus, [i] si nimirũ inuestigentur prius anguli B, D, vna cum latere BD, [k] & ex his demissa perpendicularis CK. Post hæc in triangulo BDG, si anguli ABG, CBD, iam cogniti detrahantur ex toto angulo ABC, noto, remanebit angulus DBG, notus. Cum ergo latera BD, BG, ipsum includentia facta sint etiam nota; [l] cognoscentur eodem modo & anguli D G, & latus DG; [m] atq; insuper perpendicularis ex B, in DG, demissa, &c. Similiter in triangulo GDF, si ex angulo noto AGF, tollantur anguli AGB, BGD, iam noti effecti, relinquetur angulus DGF, notus. Cum igitur & latus GD, notum factum sit: [n] cognoscemus & duos angulos GDF, GFD, & insuper latus DF, [o] vna cum perpendiculari ex G, in DF, demissa, &c. In triangulo deniq; DEF, cum omnia latera sunt nota; [p] efficientur quoq; noti omnes tres anguli: ac proinde demissa perpendicularis DM, ex D, demissa, vel ex quocunq; alio angulo 9, nota fiet, &c. Ex his facile intelliges, quomodo in alijs figuris irregularibus te gerere debeas.

g 12. triãg. rectil.

h 2. triãg. rectil.

i 12. trian. rectil Nu. 2.

k 2. trian. rectil.

l 11. trian. rectil. Nu. 2.

m 2. trian. rectil

n 11. trian. rectil.

o 2. trian. rectil.

p 10. triã. rectil.

POTES etiam, si vis, describere in charta aliqua figuram agro similem: si nimirum sumas rectam AB, tot particularum æqualium, quot mensuræ in latere agri respondente includuntur, angulumq; constituas ABC, æqualem ei, quem in ambitu agri inuenisti. Deinde in BC, tot particulas accipias, quot in latere agri respondente continentur, iterumq; angulum BCD, æqualem illi constituas, quem in figura deprehendisti. Denique si idem facias de angulo CDE, & reliquis, necnon de rectis CD, DE, & alijs, descripta erit figura similis agro: quæ si resoluatur in triangula, quorum latera intra figuram per instrumentum partium mensurentur, reperietur eius area, sicuti prius, quando ager resolui poterat in triangula.

q 2 trian. rectil.

Quomodo figura agro proposito similis describi possit.

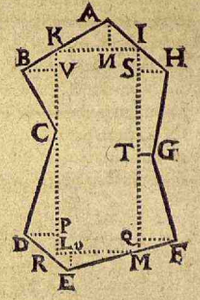
QVAN-

QVANDO campi planities non est impedita, magis exquisitè figura ei similis describetur per ea, quæ lib. 3. Problemat. 42. Num. 3. scripsimus: si videlicet intra campum eligatur punctũ quodpiam, ex quo ad omnes angulos rectæ ducantur, notatis angulis, quos efficiunt. Nam si illæ rectæ mensurentur, angulique ad aliquod punctum in charta transferantur, & in rectis angulorum capiantur tot particulæ æquales, quot mensuræ in rectis angulorum circa punctum in campo electum consistentium deprehensæ sunt, continebunt rectæ extrema puncta connectentes figuram similem campo, vt in loco citato demonstrauimus. Quod si duo puncta eligantur in campo, èquibus rectæ ad angulos ducantur, notatis punctis, vbi binæ rectæ conueniunt, describetur etiam figura campo similis, quamuis rectæ illæ non mensurentur: quemadmodum ibidem Num 1. declarauimus.

Qua ratione campus intra quẽ lacus vel silua existat mensuretur. Ratio communis mẽsorum in area cuiusuis figura inuestiganda.

MANIFESTVM autem est, eodem pacto mensurari posse campum, in quo lacus, vel silua comprehendatur, licet in triangula resolui non possit, dummodo eius latera exteriora cum angulis cognosci possint. Quod si in circuitu agri fuerit aliqua portio curua, & non recta, secanda ea erit in tot partes, donec à rectis lineis parum differant, eæque pro lateribus rectis assumendæ.

3 AGRIMENSORES ne cogantur totum campum sæpius perambulare, vt perpendiculares in triangulis ducant, angulosque metiantur, hanc ineunt rationem. In agro, seu figura constituunt, quam possunt, maximum rectangulum, atque ad eius latera ex angulis figuræ perpendiculares concipiunt demitti, quod faciunt, applicando vnum latus normæ ad latus rectanguli, & aliud ad angulum figuræ oppositum dirigendo. Ita namq; tota figura resoluta erit in rectangulum illud constitutum, & in trapezia duorum laterum parallelorum, atque in triangula rectangula. Deinde vel ipsi met metiuntur latera rectanguli: & perpẽdiculares, vel vt ab alijs mensurentur, præcipiunt, quod quidem per catenulam ferream exequuntur. Postremo triangula quidem rectangula metiuntur, vt cap. 2. Num. 3. tradidimus, trapezia vero duorum laterum parallelorum, vt cap. 3. Num. 2. docuimus. Rectangulum deniq; per ea, quæ cap. 1. scripsimus, mensurant. Horum enim areæ in vnam summam collectę conficiunt aream totius agri, seu figurę. In proposito octangulo ABCDEFGH, continetur rectangulum IKLM, trapezia HSTG, GTQF, OLRE; & triangula rectangula ANK, ANI, ISH, FQM, MOE, DPR, CDP, BCV, BKV.



ALII non constituunt rectangulum intra campum, vel figuram, sed lineam, quam possunt, longissimam ducunt, nimirum à puncto A, ad latus EF, quam fundamentalem appellant. Ad hanc ex angulis demittunt perpendiculares: atque ita totam rursus figuram in trapezia duorum laterum parallelorum, & in triangula rectangula dispertiunt, &c. Sed prior ratio commodior videtur: quippe in qua perpendiculares ex angulis deductæ breuiores sint, ac propterea facilius mensurentur, ac certius.

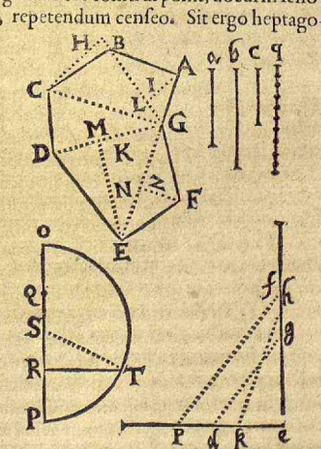
QVANDO intra agrum dictæ operationes fieri nequeunt, solent etiam mensores circa agrum includentem siluas, lacus, & ædificia, vel alia impedimenta, formare rectangulum. Nam si ad eius latera ducantur perpendiculares ab angulis exterioribus agri, constituentur iterum trapezia rectangulum duorum laterum parallelorum, vel parallelogramma, & triangula rectangula extra agrum: quorum areæ si ex area totius rectanguli subducantur, reliqua fiet area propositi agri.

Pulchra ratio aream inuẽtenda cuiuscunq; figura.

4 SED neque aspernanda mihi videtur ea ratio, quam olim meis auditoribus explicare solebam. Vt nimirum toti figuræ (reducto prius agro ad similem figuram, vt paulo ante Num. 2. præcepi) constituatur quadratum æquale, vel certe latus eius quadrati inueniatur. Nam si vnum huius quadrati latus mensuretur, atque in seipsum ducatur, prodibit area figuræ propositæ. Mensurandum porro est latus in particulis laterum figuræ, quæ mensuris laterum agri respondent, quod facile fiet per instrumentum partium.

Quadratũ datæ figuræ æquale qua ratione construatur.

QVO pacto autem cuilibet figuræ quadratum æquale sine magno labore construi possit, docui in scholio propos. 14. libr. 2. Euclid. quod hoc loco, paucis in melius mutatis, repetendum censeo. Sit ergo heptagonum irregulare ABCDEFG, quo resoluto in 5. triangula ABG, BCG, CDG, DEG, EFG, ducantur ad BG, basem communem duorum triangulorum ab angulis oppositis A, C, perpendiculares AL, CH, quarũ posterior in GB, protractam cadit in nostra figura. Deinde in recta quacũq; OP, sumantur OQ, QR ipsis AL, CH, æquales. Item RP, ipsi, BI, semissi basis BG, æqualis; ac circa OP, ex medio puncto S, semicirculus describatur OTP: ac deniq; ex R, termino rectę OR, quę duabus perpendicularibus AL, CH, æqualis est, ad OP, perpendicularis excitetur RT, semicirculum secans in T. Dico quadratum rectæ RT, duobus triangulis simul ABG, BCG, esse æquale. Quia enim rectangulum sub BI, semisse basis, & perpendiculari AL, æquale est triangulo ABG, ex prop. 1. lib. 7. huius; & rectangulum sub eadem BI, & perpendiculi CH, æquale, est triangulo BCG: Quod autem sub BI, & aggregato ex AL, CH, hoc est, sub RP, OR, (quod RP, ipsi BI, sumpta sit æqualis, & OR, ipsis AL, CH, simul) [i] æquale est eis, quæ sub BI, & AL, CH, comprehenduntur, rectangulis; erit rectangulum sub OR, RP, duobus triangulis ABG, BCG. æqualis. [k] Cum ergo quadratum ex RT, rectangulo sub OR, RP, sit æquale, (quod ex scolio propos. 13. lib. 6. Euclid: RT, media proportionalis sit inter OR, RP,) erit quoque quadratum ex RT, duobus triangulis ABG, BCG, æquale. quod est propositum. Immo quadratum ex RT, rectangulo sub OR, RP, æquale esse, demonstrabitur hoc etiam modo sine ope lib. 6. Euclid. [l] Rectangulum sub OR, RP, vna cum quadrato ex SR, æquale



i 1. secundi

k 17. sexti.

l 5. secundi

m 47. primi. est quadrato ex SP, hoc est, (ducta ST,) quadrato ex ST,[m] hoc est, quadratis ex SR, RT, Ablato ergo communi quadrato rectæ SR, reliquum rectangulum sub OR, RP, reliquo quadrato ex RT, erit æquale.

EODEM modo reperiemus quadratum duobus triangulis CDG, DEG, æquale, si ad basem communẽ DG, ducantur perpendiculares CD, EM, quarum prior in nostra figura cum latere CD, coincidit, &c. Atq; ita deinceps, si plura fuerint triangula, reperiemus semper binis triangulis singula quadrata æqualia. Sed quia in nostra figura superest vnum tantum triangulum EFG, inueniemus ei quadratum æquale, si, ducta perpendiculari FN, circa rectã ex FN, & semisse basis EZ, cõflatam semicirculus describatur, &c. Sint ergo a, b, c, latera quadratorum trapezijs ABCG, CDEG, & triangulo EFG, æqualium, quibus omnibus quadratis vnum æquale exhibebimus hac arte. Fiat angulus rectus d e f, & lateribus a, b, æquales sumantur rectæ e d, e g,[n] eritque quadratum ductæ rectæ d g, quadratis rectarum ed, eg, hoc est, laterum a, b, æquale. Capiatur rursus e k, lateri c, & recta e h, rectæ d g, æqualis;[o] eritque rursus quadratum ex kh, æquale quadratis ex k e, e h, id est, ex c, e h, nimirum tribus ex a, b, c. Si igitur latus ex k h, mensuretur, & in se ducatur, gignetur area figuræ propositæ A B C D E F G.

n 47. primi.

o 47. primi.

EODEM artificio, si plura sint latera, inueniemus quadratũ omnibus quadratis æquale. Vt si foret alterũ latus q, acciperemus ei æqualem rectam e p. Item rectam e f, rectæ k h, æqualem. Nam quadratum ex p f, quadratis ex e p, hoc est, ex q, & ex e f, id est, ex a, b, c, erit æquale, & sic de pluribus,

Facilis ratio mensuramdi trapezij irregularis.

EX his colligitur facilis ratio metiendi trapezij irregularis cuiusmodi est in proxima figura trapezium ABCG. Nam ducta diametro B G, si ad eam duæ perpendiculares demissæ AL, CH, mensurentur, earumque aggregatum in medietatem diametri BG, multiplicetur, procreabitur area trapezij, vt demonstratum est.

IN octauo porrò lib. propos. 6. docebimus quoque, qua ratione datæ figuræ rectilineæ rectangulum æquale construatur: quod si fiat hoc loco, efficietur illi rectangulo quadratum æquale, per vltimam propos. lib. 2. Euclidis, sine vllo negotio, aut molestia.

DE AREA MVLTILATERARVM FIGVRARVM regularium.

CAPVT V.

1 DVAMQVAM regulares figuræ, quæ scilicet sunt & æquilateræ & æquiangulæ, mensurari possint, vt irregulares præcedentis capitis, resoluendo eas in triangula, &c. solet tamen dari propria ac peculiaris regula, qua cuiusque figuræ regularis area inuenitur: quæ ita se habet.

Area figuræ regularis.

SEMISSIS ambitus figuræ multiplicetur in perpendicularem è centro figuræ ad vnum latus cadentem. Numerus enim productus area erit figuræ.

NAM vt lib. 7. de Isoperimetris propos. 2. demonstrabimus, area cuiuslibet figuræ regularis æqualis est rectangulo contento sub perpendiculari à centro figuræ ad vnum latus ducta, & sub dimidiato ambitu eiusdem figuræ.

Perpendicularis & semidiameter figuræ regularis quo pacto inueniatur.

2 PERPENDICVLARIS porro è centro figuræ in vnum latus cadens, vna cum semidiametro circuli figuram ambientis sic reperietur. Numerus laterum, siue angulorum duplicetur, & à duplo auferantur 4. Nam reliquus numerus indicabit, quot rectis angulis omnes anguli figuræ æquiualeant, per ea, quæ in scholio propos. 32. lib. 1. Euclid. demonstrata sunt. Hic idem numerus reliquus, videlicet, numerus angulorum rectorum per numerum angulorum diuidatur, vt Quotiens vnius anguli figuræ magnitudinem exhibeat, qui in hexagono continet rectum cum parte tertia, hoc est, grad. 120. Et quoniam semidiameter secat angulum figuræ bifariam, vt constat ex demonstratione propos. 12. lib. 4. Euclid. fit vt si semissis lateris, in quod perpendicularis cadit, ponatur sinus totus, perpendicularis sit Tangens semissis anguli figuræ, & semidiameter, Secans. Si fiat ergo

Vt 100000. sinus totus	*ad semissem lateris:*	*ita Tangens semissis anguli, vel secans,*	*ad aliud,*

prodibit tam perpendicularis, quam semidiameter in partibus lateris figuræ. Verbi gratia, in Hexagono regulari, cuius vnum latus sit 12. si fiat: vt 100000. sinus totus ad 6. semissem lateris: ita 173205. tangens semissis anguli Hexagoni ad aliud, reperietur perpendicularis $10\frac{392305}{1000000}$. vel $10\frac{39231}{100000}$. Item si fiat, vt 100000. sinus totus ad 6. semissem lateris; ita 200000. Secans semissis anguli Hexagoni ad aliud, exibit semidiameter figuræ 12.

ITAQVE si perpendicularis $10\frac{392305}{1000000}$. ducatur in 36. semissem ambitus Hexagoni ex tribus lateribus conflatam, producetur area Hexagoni $374\frac{12288}{10000}$. vel $374\frac{307}{800}$. Eodemque modo procedendum est in alijs figuris regularibus, in quibus angulorum semisses in tabula Tangentium, ac secantium accipi possunt.

Quare ex latere figuræ regularis dato non semper possit inueniri area, nisi figura ipsa descripta sit.

3 QVONIAM vero circa quamlibet figuram regularem circulus describi potest, vt ex lib. 4. Eucl. cõstat, proponemus hic plurimarum figurarum regularium latera in partibus diametri circuli ambientis 20000000. vel semidiametri, siue sinus totius 10000000. ex probatis auctoribus, vt earum areæ magis exquisite inueniri possint per regulam Num. 1. propositam. Nam si ex solo vno latere in aliqua mensura cognito aream inuestigare velimus, quemadmodum in Hexagono factum est, occurrẽt multæ difficultates ac magnæ, propterea quod semidiametri, perpendicularesq; ex sinubus, Tangentibus, aç secantibus erui non possunt, nisi quando semissis anguli figuræ comprehẽdit præcisè gradus, vel gradus cum minutis, vel gradus cum minutis & secundis: (quamuis si secunda adsint, necesse sit partem proportionalem adhibere) sicut in Hexagono paulo ante factum est, cuius anguli semissis continet grad. 60. quod in quamplurimis figuris non contingit. Nam, verbi gratia in Heptagono omnes 7. anguli ex scholio propos. 32. lib. 1. Euclid. æquiualent 10. rectis, ideoq; vnus angulus complectitur vnum

vnum rectum cum $\frac{3}{7}$. hoc est, gradus 128. Min. 34. Sec. 17. Ter. 8. Quar. 34. &c. atque eius semissis grad. 64. min. 17. Secun. 8. Ter. 34. Quar. 17. &c. ex qua semisse neque Tangens pro perpendiculari, neque secans pro semidiametro per tabulas Tangentium, atque Secantium excerpi potest. Idemque in alijs figuris innumeris accidere comperies. Quod si scientia inuenta esset construendi omnes figuras regulares, superari aliquo modo posset hæc difficultas: propterea quod cognito latere vno in quantiscunque partibus, cognosci quoque posset tam perpendicularis, quam semidiameter in iisdem partibus, beneficio instrumenti partium, vt lib. 1. cap. 1. ad finem Num. 1. tradidimus. Sed quia pauciss imas figuras æquilateras describere nouimus intra circulum, areas plurimarum ignorari necesse est. Hanc ob causam nonnulli Geometræ, inter quos strenuã operam nauauit Ludolphus à Collen, ingenti labore latera figurarum, siue descriptæ eæ sint, siue non, explorarunt: quamuis earum anguli præter gradus, ac minuta comprehendant insuper Secunda, Tertia, Quarta, &ç. vt earum areas consequi possimus.

TABVLA CONTINENS LATERA FIGVRARum regularium à triangulo vsque ad figuram 80. laterum, posita diametro 20000000. vel sinu toto 10000000.

Num. lat. vel angulor.	Latera figurarum regularium, posita diametro 20000000 vel sinu toto 10000000	Num. lat. vel angulor.	Latera figurarum regularium, posita diametro 20000000 vel sinu toto 10000000	Num. lat. vel angulor.	Latera figurarum regularium, posita diametro 20000000 vel sinu toto 10000000
3	17320508	29	2162380	55	1141776
4	14142135	30	2090569	56	1121408
5	11755705	31	2023366	57	1101755
6	10000000	32	1960341	58	1082778
7	8677674	33	1901120	59	1064443
8	7653668	34	1845367	60	1046719
9	6840402	35	1792786	61	1029575
10	6180339	36	1743114	62	1012983
11	5634651	37	1696118	63	996917
12	5176380	38	1651586	64	981353
13	4786313	39	1609331	65	966275
14	4450418	40	1569181	66	951638
15	4158233	41	1530985	67	937445
16	3901806	42	1494601	68	923669
17	3674990	43	1459906	69	910291
18	3472963	44	1426783	70	897296
19	3291891	45	1395129	71	884666
20	3128689	46	1364848	72	872387
21	2980845	47	1335852	73	860444
22	2846296	48	1308062	74	848824
23	2723332	49	1281404	75	837513
24	2610523	50	1255810	76	826499
25	2506664	51	1231218	77	815771
26	2410733	52	1207569	78	805318
27	2321858	53	1184812	79	795130
28	2239289	54	1162896	80	785196

Nam ex latere cuiuscunque figuræ regularis cognito in partibus diametri circuli circumscripti, vel sinus tõtius, veniemus per ea, quæ cap. 2. Num. 2. scripsimus, in cognitionem lineæ perpendicularis ex centro in vnum latus deductæ, ac proinde totam aream nanciscemur, vt paulo ante Num. 1. docuimus. Latera igitur in quam plurimis figuris in tabula præcedenti exposita habes, quæ omnia veris lateribus sunt paulo minora; & si adieceris vnitatem, fient paulo maiora veris; ita vt verum latus trianguli æquilateri inter hos duos numeros 17320508. 17320509. consistat.

Ex cognita semidiametro circuli inuenire latus figuræ regularis in eo circulo descriptæ.

4. IAM vero cognita semidiametro alicuius circuli in partibus cuiuscunque mensuræ, reperiemus in iisdem partibus latus figuræ regularis, cuius laterum numerus maior non est, quam 80. beneficio præcedentis tabulæ: si nimirum fiat, vt sinus totus 10000000. ad latus figuræ propositæ in præcedenti tabula, ita semidia-

meter circuli propositi data ad aliud. Sit verbi gratia, semidiameter alicuius circuli 12. & inueniendum sit latus decagoni respectu dictæ semidiametri: Fiat vt 10000000. sinus totus ad 6180339. latus Decagoni; ita 12. semidiameter data ad aliud; exibitque latus quæsitum $8\frac{164068}{10000000}$. vel in minoribus numeris $8\frac{41017}{2500000}$.

Fractionē magnam ad minorē fere æquiualentem reducere. Inter duas fractiones inuenire mediam.

ET si molestum videatur operari cum fractione tam magna, reduces eam ad minorem quasi æquiualentem hoc modo. Elige pro Numeratore quemuis numerum, vt 10. Et fiat vt Numerator 164068. ad suum Denominatorem 10000000. ita Numerator electus 10. ad aliud, reperiesque Denominatorem $609\frac{82588}{164068}$. Ita vt relicta hac fractione, Denominator 609. sit minor quam verus; & 610. maior, hoc est, fractio $\frac{10}{609}$. sit maior fractione $\frac{164068}{10000000}$. fractio autem $\frac{10}{610}$. minor. Inter has autem duas fractiones $\frac{10}{609}$. $\frac{10}{610}$. produces mediam $\frac{20}{1219}$. cuius Numerator ex Numeratoribus, & Denominator ex Denominatoribus conflatus est. Eritque hæc fractio inuenta fere maiori illi æqualis.

FRACTIONEM porro, cuius Numerator ex duobus Numeratoribus, & Denominator ex Denominatoribus duarum minutiarum componitur, esse maiorem minore, & minorem maiore, demonstrabimus lib. 8. propos. 10.

Ex cognito latere figuræ regulais, inuenire semidiametrum circuli circumscripti.

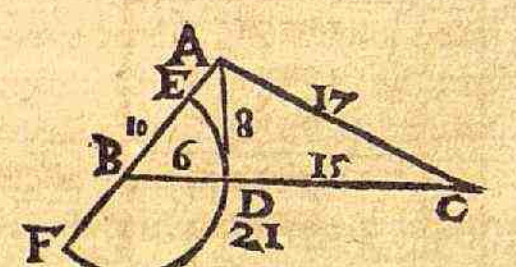
VICISSIM ex dato latere cuiuslibet figuræ regularis cognoscemus semidiametrum circuli circumscribentis: si fiat, vt latus propositæ figuræ in tabula antecedente ad 10000000. ita latus datum ad aliud. Vt si latus Pentagoni detur 12. & fiat, vt 11755705. ad 10000000. ita 12. ad aliud, reperietur semidiameter circuli circumscripti $10\frac{2442050}{11755705}$. Et si fiat, vt Numerator huius fractionis ad suum Denominatorem: ita Numerator electus quicunque, nimirum 1. ad aliud, inuenietur Denominator sequens $4\frac{1081005}{2442050}$. ita vt fractio $\frac{1}{4}$. sit maior, quam $\frac{2448050}{11755705}$. at $\frac{1}{5}$. minor. Ex additione numeratorum 1. 1. inter se, & Denominatorum 4. 5. inter se, efficies fractionem $\frac{2}{9}$. mediam: quæ adhuc maior est, quam $\frac{2442050}{11755705}$. Media autem inter $\frac{1}{5}$. & $\frac{2}{9}$. est $\frac{3}{14}$. quæ parum ab illa differt: ita vt semidiameter quæsita dici possit esse $10\frac{3}{14}$. Atque in hunc modum per minores numeros operationes fieri possunt, quamuis non omnino exquisite, quod fractiones assumptæ non sint omnino veræ; sed hic error in dimensionibus camporum tolerabilis est.

5 ANTEQVAM rectilinearum figurarum dimensionem concludam, lubet regulam attexere, qua ex cognita area cuiuscunque figuræ latus habentis notum venire possimus in cognitionem alterius figuræ similis illi similiterque positæ latus homologum etiam notum habentis: quæ sic se habet.

Qua ratione ex area cuiuslibet figuræ eruatur area alterius figuræ similis.
a 19. vel 20. sexti.

QVADRATVS numerus denominatoris proportionis, quam latus figuræ ignotæ ad latus figuræ cognitæ habet, (qui denominator habebitur, si latus figuræ ignotæ per latus figuræ cognitæ diuidatur,) si ducatur in aream cognitam, producetur area alterius figuræ quæsitæ. Debent autem figuræ esse similes, similiterque positæ, & earum latera homologa sumi vt dictum est.

NAM denominator proportionis lateris figuræ quæsitæ ad latus figuræ datæ in se multiplicatus gignit denominatorem proportionis duplicatæ eorum laterum, vt ad defin. 10. lib. 5. Euclid. scripsimus. [a] Cum ergo figuræ similes similiterque positæ habeant etiam proportionem duplicatam laterum homologorum; fit vt denominator proportionis duplicatæ laterũ prædictorũ multiplicans aream cognitã producat aream quæsitam,



hoc est, numerum, qui ad aream cognitam proportionẽ habeat duplicationẽ proportionis datorum laterũ, denominatã scilicet à denominatore, qui ex denominatore proportionis eorum laterũ in se multiplicato producitur. Verbi gratia, Trianguli ABC, cuius latus AB, 10. AC, 17. & BC, 21. area est 84. Si ergo sit aliud triangulum huic simile habens latus ipsi AB, homologum 70. ipsi vero AC, homologum 119. & ipsi BC, homologũ 147. diuidatur latus 70. per 10. vt denominator 7. proportionis lateris 70. ad latus 10. procreetur, & quadratus numerus huius denominatoris, nimirum 49. ducatur in 84. aream trianguli ABC, producetur area 4116. posterioris trianguli. Rursus quia area trianguli æquilateri, cuius singula latera sint 1. area est $\frac{13}{30}$. ferme, vt supra patuit, si detur aliud triangulum æquilaterum, cuius singula latera sint 70. inueniemus eius aream hoc modo. Denominator proportionis laterum est ipsummet latus 70. quod 70. diuisa per 1. faciant 70. Ducemus ergo 4900. quadratum lateris 70. in $\frac{13}{30}$. aream cognitam. Productus enim numerus $2123\frac{1}{3}$. erit area posterioris trianguli.

Regula supradicta aliter proposita.
b 19. vel 20. sexti.

6. HÆC regula ita quoque proponi poterit. *Fiat vt quadratus numerus lateris figuræ cognitæ ad quadratum numerum lateris figuræ quæsitæ, ita area figuræ cognitæ ad aliud. Productus enim numerus erit area figuræ quæsitæ.* Propterea quod eadem est proportio quadrati lateris cognitæ figuræ ad quadratum lateris figuræ quæsitæ, quæ figuræ notæ ad figuram quæsitam: [b] quippe cum vtraque proportio sit duplicata proportionis laterum homologorum. Et quoniam quadratum lateris 1. est 1. fit, vt quotiescunque latus figuræ aream cognitam habentis fuerit 1. satis sit, quadratum numerum lateris figuræ quæsitæ multiplicare in datam aream, vt quæsita area producatur: Adeo vt operæ pretium sit areas inuestigare plurimarum figurarum regularium, quarum latera sint 1. Ex his enim sine magno labore areæ aliarum figurarum similium elicientur, quarum latera cognita sint. Areas decem figurarum regularium, quarum latera sunt 1. hic subiecimus, vt per eas similium figurarum, quarum latera vnitatem superant, inuestigari possint ex regula Num. 5. vel 6. præscripta; quamuis in quadrato id necessarium non sit, cum latus datum in se ductum producat suum quadratum.

Figu-

	Figuræ regulares.	Areæ prædictarum figurarum sunt fere hæ.
Quarum latera sunt 1	Trigonum	$\frac{1875000}{4330127}$ Vel $\frac{13}{30}$
	Tetragonum	1
	Pentagonum	$1\frac{8469719}{11775706}$
	Hexagonum	$2\frac{2990381}{5000000}$
	Heptagonum	$3\frac{5507221}{8677674}$
	Octogonum	$4\frac{1585127}{1913417}$
	Enneagonum	$6\frac{1243755}{6840402}$
	Decagonum	$7\frac{858089}{1236068}$
	Vndecagonum	$9\frac{517050}{1408663}$
	Duodecagonum	$11\frac{84614}{431365}$

POSSVNT autem hæ fractiones ad minores fere æquiualentes, si placet, reuocari, vt supra Num. 4. docuimus.

Quaratione beneficio laterum superioris tabulæ areæ figurarum regulariũ inueniantur.

7. AREÆ porro hæ procreatæ sunt per regulam Num. 1. præscriptam, inuentis prius perpendicularibus ex centris in latera cadentibus, licet in nonnullis figuris anguli contineant secunda, ac tertia, præter gradus, & minuta; hoc modo. Pro heptagono, verbi gratia, ex superiori tabula sumpta est semissis lateris heptagoni 4338837. (quando numerus lateris est impar, addenda est 1. vt fiat par, ac proinde semissem habeat, quandoquidem minus est vero latere, vt diximus. Deinde, quia, vt in tractatione sinuum dictum est, semissis hæc sinus est anguli oppositi in centro, quæsitus est is angulus ex tabula sinuum (adhibita parte proportionali, quemadmodum ad finem Lemmatis 53. nostri Astrolabij docuimus, vt angulus reperiretur in gradibus, minutis, ac secundis.) inuentusque est grad. 25. min. 42. sec. 51.

c 4. triãg. rectil.

POST hæc, [c] quia est, vt sinus huius anguli inuenti, nimirum semissis ipsa 4338837. lateris ex superiori tabula excerpti, ad $\frac{1}{2}$. semissem lateris, ita sinus complementi eiusdem anguli inuenti, hoc est, ita sinus grad. 64. min. 17. sec. 9. (adhibita quoq; parte proportionali, propter secunda.) nimirũ 9011398. ad perpendicularem huic complemento inuẽti anguli oppositam in triangulo rectangulo: Inuenta est hæc perpendicularis $\frac{9011398}{8677678}$. quæ tandem ducta in $\frac{7}{2}$. semissem ambitus heptagoni produxit aream heptagoni $3\frac{11014442}{17355348}$. vel in minoribus numeris $3\frac{5507221}{8677674}$. Atque hac eadem ratione aream cuiuscunque figuræ regularis latus habentis 1. dummodo numerus laterum maior non sit, quam 80. reperies: Ex qua deinde aream similis figuræ latus habentis maius, quam 1. per regulam Num. 5. vel 6. traditam elicies.

EODEM tamen artificio hoc Num. 7. exposito aream cuiussuis figuræ regularis, etiamsi latus habeat maius, quam 1. (si placet) colligere licebit, quamuis non reperiatur prius area figuræ similis, cuius latus sit 1. si nimirum loco $\frac{1}{2}$. semissis lateris 1. accipiatur semissis lateris dati, quod maius sit quam 1. vt perspicuum est.

Ex area cognita quo pacto latus eruatur.
d 10. vel 20. sexti.

8. Cognita area figuræ regularis, cuius numerus laterum maior non sit, quam 12. cognoscetur eius latus hoc modo. Fiat vt area figuræ similis latus habentis 1. ex præcedenti tabula desumpta ad aream figuræ propositæ: Ita 1. quadratum lateris 1. ad aliud. Productus enim numerus erit quadratus lateris quæsiti. Radix ergo eius quadrata dabit latus quæsitum. Nam ita est area ad aream, vt quadratum lateris ad quadratum lateris; [d] quod vtraque proportio sit proportionis laterum duplicata.

QVOD si area cognita sit figuræ regularis plura latera habentis, quam 12. non plura tamen, quam 80. inuenienda primum erit area figuræ similis latus habentis 1. beneficio superioris tabulæ laterum, vt Num. 7. docuimus. Deinde latus exquirendum, vt hoc Num. 8 declaratum est. Et si tabula superior laterum extensa esset ad plura latera, inueniretur eodem modo latus figuræ plurium laterum, quam 80. ex eius area. Exempli gratia. Sit area alicuius trianguli æquilateri $15\frac{2}{7}$. Et quia area æquilateri trianguli, cuius latus est 1. inuenta est supra $\frac{13}{30}$. si fiat vt $\frac{13}{30}$. ad aream propositam $15\frac{2}{7}$. ita 1. quadratum lateris 1. ad aliud, reperietur quadratum lateris quæsiti 36. cuius radix quadrata 6. dabit latus, quod quæritur.

DE

DE DIMENSIONE CIRCVLI EX Archimede.

CAPVT VI.

VT circulum quemlibet propositum, eiusque partes metiri possimus, necesse est probe nosse, quæ Archimedes de circuli dimensione tradidit. Non abs re ergo erit, si eius libellum de circuli dimensione acutissimum sane, & subtilissimum hic interseram, tum quia breuissimus est, quippe qui tribus duntaxat propositionibus constet: tum ne studiosus, vt rem tam vtilem, atque apud omnes artifices peruulgatam intelligat, Archimedē ipsum xime, quod cum Archimedis scripta ob affectatam breuitatem, sint paulo obscuriora, illadire cogatur: tum vero malis nos lucem aliquam allaturos speramus. Neç dubitamus etiam, quin res hæc studioso lectori grata, ac iucunda sit futura.

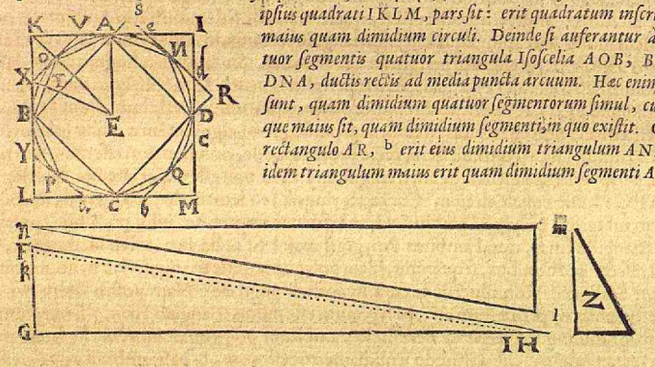
PROPOSITIO I.

AREA cuiuslibet circuli æqualis est triangulo rectangulo, cuius vnum quidem latus circa angulum rectum semidiametro circuli, alterum vero peripheriæ eiusdem circuli æquale est.

SIT circulus ABCD, cuius centrum E, semidiameter EA: sitque triangulum rectangulum FGH, angulum habens rectum G, latus vero FG, semidiametro circuli EA, & latus GH, peripheriæ eiusdem circuli æquale. Dico circulum ABCD, triangulo FGH, æqualem esse. Si enim dicatur non esse æqualis, sit primum, si fieri potest, circulus maior quam triangulum, magnitudine z: adeo vt circulus æqualis sit triangulo, & magnitudini z, simul; propterea que maior, quam z. Si igitur ex circulo auferatur plus, quam dimidium, & à residuo plus etiam, quam dimidium, & ita deinceps: [a] relinquetur tandem magnitudo minor, quam z.

a 1. decī.

HÆC autem detractio continua fiet, si primo loco auferatur ex circulo quadratum inscriptum ABCD. Hoc enim cum dimidium sit quadrati IKLM, circulo circumscripti, vt in scholio propos. 9. lib. 4. Euclid. ostendimus: circulus autem ipsius quadrati IKLM, pars sit: erit quadratum inscriptum ABCD, maius quam dimidium circuli. Deinde si auferantur à residuis quatuor segmentis quatuor triangula Isoscelia AOB, BPC, CQD, DNA, ductis rectis ad media puncta arcuum. Hæc enim simul maiora sunt, quam dimidium quatuor segmentorum simul, cum vnumquodque maius sit, quam dimidium segmenti, in quo existit. Completo enim rectangulo AR, [b] erit eius dimidium triangulum AND: ac proinde idem triangulum maius erit quam dimidium segmenti AND. Eademque ratio est de aliis. Pari ratione, si à residuis octo segmentis auferantur octo alia triangula Isoscelia in illis constituta, &c. atque ita deinceps.



b 41. pri.

PONANTVR ergo iam octo segmenta AO, OB, BP, PC, CQ, QD, DN, NA, relicta esse minora magnitudine z. & quoniam circulus æqualis conceditur triangulo FGH, & magnitudini z, simul: si demantur inæqualia, nimirum ista segmenta ex circulo, & magnitudo z, ex aggregato trianguli cum z, reliqua erit figura inscripta, octogona videlicet, maior triangulo FGH, quod est absurdum, quippe cum multo minor sit. Si namque ex centro E, ad latus BO, ducatur perpendicularis ET, & in triangulo sumatur Gk, ipsi ET, & recta Gi, ambitui octogoni æqualis, cadet punctum k, citra F, & i, citra H, quod ET, minor sit semidiametro circuli, & ambitus octogoni minor peripheria eiusdem circuli. Igitur ducta recta ki, erit triangulum Gki, minus triangulo FGH, pars toto. Est autem triangulum Gki, octogono æquale: quippe cum ex scholio propos. 41. lib. 1. Euclid. æquale sit rectangulo sub Gk, & semisse ipsius Gi, comprehenso, quod per propositionem 2. lib. 7. de Isoperimetris octogono æquale est. Octogonum ergo minus est triangulo FGH. Non ergo maius est: ac proinde circulus triangulo maius esse nequit.

SIT deinde, si fieri potest, circulus ABCD, minor, quam triangulum FGH, magnitudine z. Circumscribatur circulo quadratum IKLM, cuius latera circulum tangant in punctis A, B, C, D. quod maius erit triangulo FGH. Cum enim eius ambitus (vt lib. 8. propos. 1. probabimus) maior sit peripheria circuli, hoc est, recta GH, & perpendicularis EA, ipsi FG, æqualis, erit triangulum rectangulum latus vnum habens æquale ipsi FG, & alterum maius latere GH, (æquale nimirum ambitui quadrati IKLM.) maius triangulo FGH. Cum ergo triangulum illud, per scholium propos. 41. lib. 1. Euclid. sit æquale rectangulo sub FG, & semisse ambitus quadrati IKLM, comprehenso: hoc autem rectangulum per propos. 2. lib. 7. de Isoperimetris, quadrato IKLM, æquale; erit quoque quadratum IKLM, maius triangulo FGH. Et quia triangulum FGH, ponitur æquale circulo, & magnitudini z, simul, ac proinde maius quam z, erit quoque quadratum IKLM, (quod maius esse ostendimus triangulo FGH,) maius, quam z. Si igitur ex quadrato IKLM, auferatur plus, quam dimi-

dimidium, & à residuo plus etiam quam dimidium, atque ita deinceps, [a] relinquetur tandem magnitudo minor, quam z. a 1. decī.

Hæc autem detractio continua fiet, si primo loco auferatur circulus ABCD: Hic enim maior est semisse quadrati IKLM, propterea quod quadratum inscriptum (quod minus est circulo, pars toto) semissis est quadrati circumscripti, ex scholio propos. 9. lib. 4. Euclid. Quod si ducta recta EK, secante circulum in O, ducatur per O, ad EK, perpendicularis VX, [b] quæ circulum tanget in O: idemque fiat, ductis rectis EL, EM, EI, &c. descriptum erit Octogonum æquilaterum, & æquiangulum VXY a b c d e V, vt constat ex constructione, demonstrationeque propos. 12. lib. 4. Euclid. quippe cum ad EA, EO, & ad reliquas semidiametros octogoni inscripti ductæ sint perpendiculares v e, V X, &c. Quoniam vero v A, v O, per 2. coroll. propos. 36. lib. 3. Euclid. æquales sunt; [c] & est κ V, maior quam v O: erit quoque κ V, maior quam v A, ideoque & triangulum K v O, triangulo v A O, maius erit; [d] cum sit triangulum ad triangulum, vt basis ad basem. Igitur triangulum K V O, maius erit, quam dimidium trianguli K A O; ac proinde multo maius, quam dimidium trianguli mixti K A O, cuius vnum latus est arcus A O. Eadem ratione erit K O X, maius, quam dimidium trianguli mixti K O B, cuius vnum latus est arcus O B. Auferendo ergo triangulum K V X, ex figura mistilinea K A B, in qua vnum latus est arcus A O B, ablatum erit plus quam dimidium. Subtractis igitur quatuor eiusmodi triangulis K V X, L Y a, M b c, Id e, ablatū erit plus, quā dimidium ex quatuor residuis extra circulum, & sic deinceps. Ponantur igitur iam octo triangula mixta residua, quorum bases sunt arcus AO, OB, BP, &c. minora magnitudine z. Cum ergo circulus cum z, æqualis positus sit triangulo FGH, erit circulus cum illis octo residuis, hoc est, figura Octogona VXYabcdeV, minor eodē triangulo FGH, quod est absurdum, cum maius sit: quippe cum perpendicularis EO, æqualis sit lateri FG, & ambitus Octogoni maior circumferentia circuli, hoc est, recta GH. Hinc enim fit, triangulū rectangulum, cuius latus FG, æquale perpendiculari O, & alterum latus æquale ambitui Octogoni maius videlicet, quam GH, maius est triangulo FGH. Cum ergo illud triangulum sit, ex scholio propos. 41. lib. 1. Euclid. æquale rectangulo sub FG, & semisse ambitus octogoni comprehenso; hoc autem rectangulum octogono æquale, ex propos. 2. lib. 7. de Isoperimetris: erit quoque octogonum maius triangulo FGH. Non ergo minus esse potest, ac proinde circulus ABCD, minor non est triangulo FGH. Sed neque maior est, vt demonstrauimus. Igitur æqualis est, quod erat demonstrandum.

b 16. tert.

c 19. pri.

d 1. sexti.

SCHOLIVM.

IOSEPHVS Scaliger, vel quia vim huius demonstrationis non perpendit, vel quia suæ circuli quadrandi rationi vidit esse contrariam, non est veritus Archimedem hoc loco falsitatis arguere; conaturque ostendere, non recte ab eo demonstratum, circulum æqualem esse triangulo rectangulo, cuius vnum latus semidiametro, & alterum circumferentiæ circuli est æquale. Nam, ait, si demonstratio Archimedis bona est, demonstrabitur eodem modo, circulum æqualem esse triangulo rectangulo, cuius vnum latus circa angulum rectum semidiametro æquale est, & alterum peripheria circuli maius. Sit enim in triangulo l m n, latus quidem l m, trianguli semidiametro circuli EA, æquale, at m n, peripheria maius. Concedit ergo Scaliger, circulum non esse maiorem triangulo FGH, recte esse ab Archimede demonstratum, hoc est, triangulum FGH, cuius latus GH, peripheriæ est æquale, non esse minus circulo, ac proindeque triangulum l m n, cuius latus m n, maius est peripheria, circulo minus esse. Concedit item, recte probatum esse, circulum non esse minorem triangulo FGH, si latus GH, peripheriæ sit æquale, hoc est, triangulum FGH, non esse maius circulo. Sed negat, ex hoc sequi, triangulum FGH, esse æquale circulo. Cur? quia, inquit, eodem modo, si basis m n, maior est peripheria, sed minor circumscripti polygoni ambitu, (hoc enim contingere, ait, nihil prohibet) polygonum erit quidem maius triangulo l m n, quod ambitus Polygoni maior sit recta m n, & semidiameter EA, rectæ l m, æqualis. Sed resectis portionibus, sequeretur, idem polygonum esse triangulo l m n, minus, quod est ineptum. Itane vero mi Scaliger? Non aduertis te cum hypothesi pugnare? Nam posito latere m n, maiore, quam peripheria; quando eo peruentum erit, polygonum esse minus triangulo l m n, (si nimirum relictæ portiones fuerint magnitudine z,) sequitur necessario, ambitum polygoni minorem esse latere m n. Cum enim triangulum rectangulum, cuius altitudo semidiametro polygoni, & basis ambitui æqualis est, æquale fit, ex scholio propos. 41. lib. 1. Euclid. rectangulo sub eadem semidiametro, & semisse ambitus Polygoni comprehenso; hoc autem, per propos. 2. lib. 7. huius de Isoperimetris, polygono æquale: erit quoque triangulum illud minus triangulo l m n. Quare cum hæc triangula habeant æquales altitudines; [e] erit vt illud triangulum ad l m n, ita basis illius ad basem m n: ac proinde illa basis, hoc est, ambitus polygoni, base m n, minor erit. Non ergo ponere potes basem trianguli l m n, si maior est, quam peripheria circuli, minorem ambitu polygoni: In demonstratione autem Archimedis constat, ambitum polygoni maiorem esse base trianguli FGH, si GH, æqualis est peripheriæ circuli, cum maior sit, quam peripheria: ac propterea recte concluſit Archimedes, polygonum esse maius triangulo FGH, cum tamen ex hypothesi aduersarij ostensum sit esse minus. Itaque potuisset Archimedes ita quoque propositum colligere. Polygonum minus est triangulo FGH, propter relictas sectiones minores magnitudine z. Ergo eius ambitus minor est base GH, (quemadmodum proxime demonstrauimus.) hoc est, peripheria circuli, quod est absurdum, cum ambitus polygoni maior sit quam peripheria. Quod absurdum doctissime Scaliger, colligere non potes in tuo triangulo l m n, cum statuas basem m n, peripheria circuli maiorem. Et sane miror te, Mathematicus cum sis, negare quantitatem aliquam illi esse æqualem, qua neque maior est, neque minor. Si enim æqualis non est, erit inæqualis. Igitur vel maior vel minor, contra hypothesim, cum dicatur neque maior esse, neque minor. An non vides, non solum Archimedem, sed etiam Euclid. lib. 12. hunc argumentandi modum frequentissime vsurpare.

e 1. sexti.

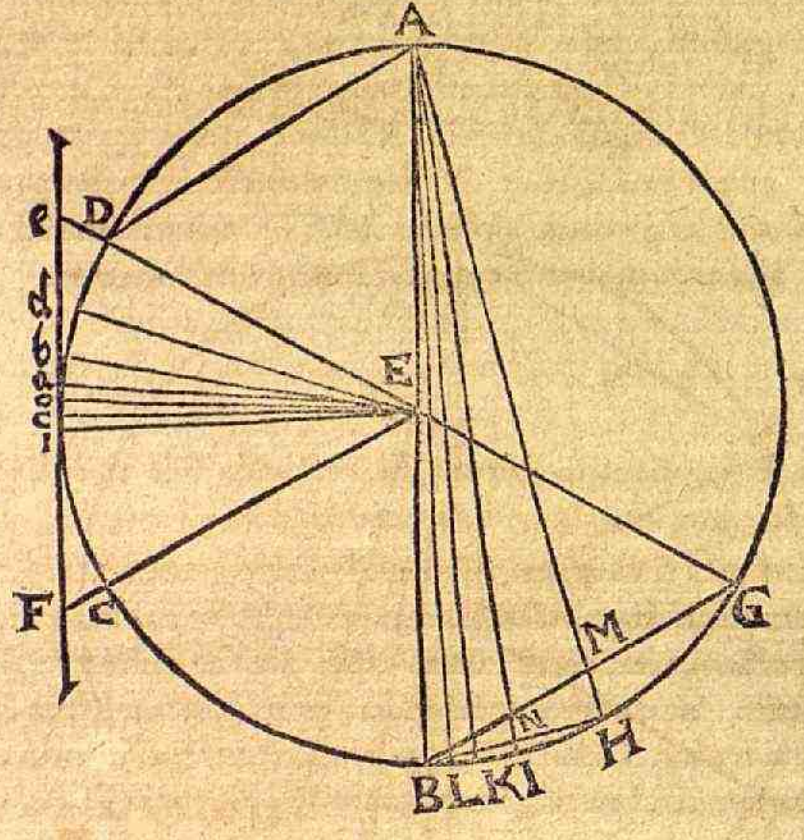
PRO-

PROPOSITIO II.

CVIVSLIBET circuli peripheria tripla est diametri, & adhuc superat parte, quæ quidem minor est decem septuagesimis, hoc est, septima parte diametri, maior vero decem septuagesimis primis.

HÆC est Archimedis propositio 3. quam nos secundam facimus, vt doctrinæ ordo seruetur, quandoquidem sequens propositio 3. quam ipse 2. facit, hanc nostram propositionem 2. in demonstrationem adhibet.

SIT igitur circulus ABCD, cuius centrum E, diameter AB, quam ad rectos angulos secet semidiameter
a 16. tert. E c, & e c F, ad E c, perpendicularis ducatur, [a] quæ circulum tanget in c. Ducatur latus hexagoni A D, [b] quod
b 15. quar. semidiametro æquale erit, & arcus A D, grad. 60. Ideoque D c, grad. 30. Ducta ergo recta E D e, erit angulus e E c, tertia pars recti, cum rectus angulus contineat grad. 90. Fiat quoque angulus c E F, angulo c E e, æqualis; eruntque anguli e, F, inter se æquales, quod vterque complementum sit tertiæ partis anguli recti, ac proinde v-
c 32. pri. terque duas tertias partes vnius recti comprehendet. [c] Cũ ergo omnes tres anguli in triangulo eEF, contineant $\frac{6}{3}$. vnius recti, continebit quoque e E F, $\frac{2}{3}$. vnius recti, ipsumque triangulum æquiangulum erit, hoc est, per coroll. propos. 6. lib. 1. Euclid. æquilaterũ; propterea q; perpendicularis E c, basem e F, bifariã secabit, ex scholio propos. 26. lib. 1. Euclid. atque ideo E c, ipsius e c, dupla erit. Posita igitur c e, 153. erit E e, 306. Et si quadra-
d 47. pri. tũ ipsius c e, 23409. dematur ex 93636. quadrato ipsius
e 8. quin. E e, [d] reliquum fiet quadratum ipsius E c, 70227. cuius radix est paulo maior, quam 265. [e] ac proinde E c, ad c e, maiorem habebit proportionem, quam 265. ad 153.



f 3. sexti. SECTO iam angulo eEc, bifariam per rectam E d; [f] erit e E, ad E c, vt e d, ad d c. Et componendo eE, Ec, simul ad E c, vt e c, ad d c. Et permutando e E, E c, simul ad e c, vt E c, ad c d. Quia vero e E, Ec, simul maiores sunt, quam 571. (quippe cum e E, sit 306. & E c,
g 8. quin. paulo maior, quam 265.) & e c, posita est 153. [g] habebunt e E, E c, simul ad e c, maiorem proportionem, quam 571. ad 153. ideoq; & proportio E c, ad c d, maior
h 10. quin. erit, quã 571. ad 153. ac proinde si c d, ponatur 153. [h] erit E c, paulo maior, quam 571. Igitur quadratum ipsius E c, paulo maius erit, quam 326041. atque idcirco, cum
i 47. pri. quadrarum ipsius c d, sit 23409. erit quadratum ipsius E d, [i] quod quadratis rectarum E c, c d, est æquale, paulo maius, quam 349450. eiusque radix maior, quam 591 $\frac{1}{8}$. quippe cum huius radicis quadratum sit tantum
k 8. quin. 349428 $\frac{49}{64}$. [k] Habebit igitur E d, ad d c, maiorem proportionem, quam 591 $\frac{1}{8}$. ad 153.

l 3. sex. & componendo permutandoq; SECTO rursus angulo d E c, bifariã per rectam E b; [l] erit rursus vt d E, Ec, simul ad d c, ita E c, ad c b. Quia vero d E, E c, simul maiores sunt, quam 1162 $\frac{1}{8}$. (quippe cum E d, maior sit, quam 591 $\frac{1}{8}$. & E c, maior, quam 571.) & d c, posita est 153. [m] habebunt d E, E c, ad d c, maiorem proportionem, quam 1162 $\frac{1}{8}$. ad 153.
m 8. quin. ideoque & E c, ad cb, proportionem habebit maiorem, quam 1162 $\frac{1}{8}$. ad 153. ac proinde si ponatur c b, 153. erit
n 10. quin. E c, maior, quam 1162 $\frac{1}{8}$. [n] Igitur quadratum ipsius E c, maius erit quam 1350534 $\frac{33}{64}$. cui si addatur quadra-
o 47. pri. tum 23409. ipsius c b, erit quadratum ipsius E b, [o] quod quadratis rectarum E c, c b, æquale est, maius, quam 1373943 $\frac{33}{64}$. eius radix propterea, id est, recta E b, paulo maior, quam 1172 $\frac{1}{8}$. quippe cum huius radicis qua-
p 8 quin. dratum sit tantum 1373877 $\frac{1}{64}$. [p] Habebit ergo E b, ad b c, maiorem proportionem, quam 1172 $\frac{1}{8}$. ad 153.

q 3. sexti. & componendo permutandoque. SECTO item angulo b E c, bifariã per rectam E a; [q] erunt b E, E c, simul ad b c, vt E c, ad c a. Quia vero bE, maior est, quam 1172 $\frac{1}{8}$. & E c, maior, quam 1162 $\frac{1}{8}$. erunt b E, E c, simul maiores, quam 2334 $\frac{2}{8}$. vel 2334 $\frac{1}{4}$. Cum ergo c b, posita sit 153. [r] habebunt b E, E c, simul ad c b, maiorem proportionẽ, quam 2334 $\frac{1}{4}$. ad 153. ideoque & E c, ad c a, proportionem habebit maiorem, quam 2334 $\frac{1}{4}$. ad 153. ac proinde, si c a, ponatur
r 8. quin. 153. [s] erit E c, maior, quam 2334 $\frac{1}{4}$. Igitur quadratum ipsius E c, maius erit, quam 5448723 $\frac{1}{16}$. cui si addatur
s 10. quin. quadratum 23409. ipsius c a, erit quadratum ipsius E a, [t] quod quadratis rectarum E c, c a, æquale est, maius
t 47. pri. quam 5472132 $\frac{1}{16}$. eiusque radix maior, quam 2339 $\frac{1}{4}$. cum huius radicis quadratum sit tantum 5472090 $\frac{9}{16}$. [u] Ergo E a, ad a c, maiorem proportionem habebit, quam 2339 $\frac{1}{4}$. ad 153.

u 8. quin.
x 3. sexti & componendo permutandoque. SECTO denique angulo quoque aEc, bifariam per rectam E o, [x] erunt a E, Ec, simul ad a c, vt E c, ad c o. Quia vero a E, maior est, quam 2339 $\frac{1}{4}$. a & E c, maior quam 2334 $\frac{1}{4}$. erunt aE, Ec, simul maiores, quam 4673 $\frac{1}{2}$. Cum ergo c a, posita sit 153. [y] habebunt aE, Ec, simul ad c a, hoc est, Ec, ad co, maiorem proportionem, quam 4673 $\frac{1}{2}$. ad 153. ac propterea si ponatur c o, 153. [z] erit Ec, maior quam 4673 $\frac{1}{2}$.

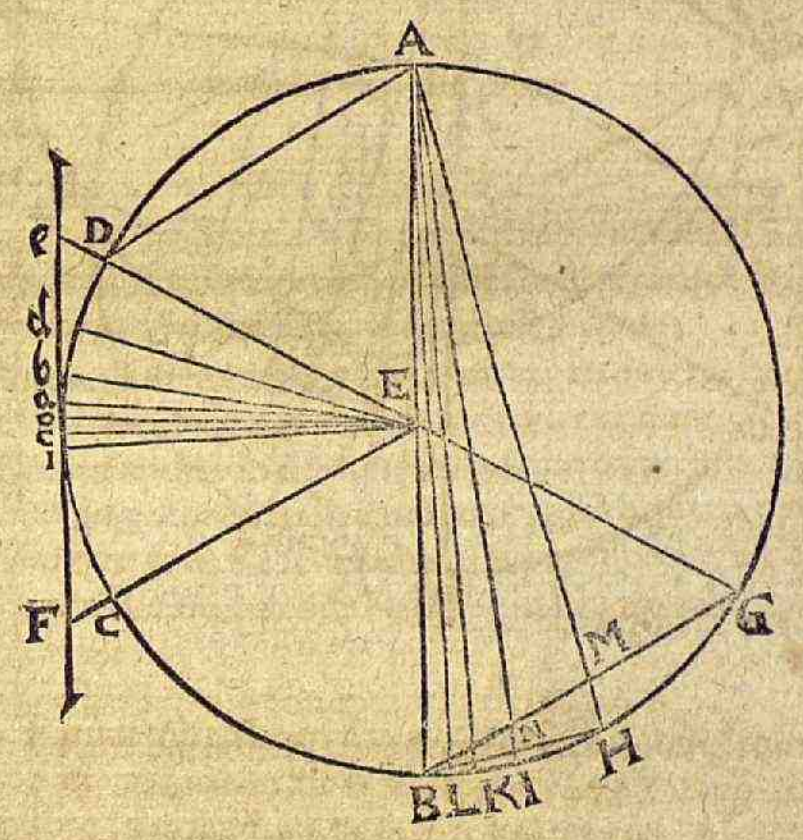
y 8 quin.
z 10. quin. QVONIAM igitur angulus e E c, tertia pars est recti, erit eius semissis dEc, sexta pars recti, & huius semissis bEc, $\frac{1}{12}$. recti, & huius semissis a E c, $\frac{1}{24}$. recti, & denique huius semissis oEc, $\frac{1}{48}$. recti. [a] Qualium ergo
a 33. sexti. partium 48. est quadrans Ac, talium 1. erit arcus c o: & idcirco erit c o, $\frac{1}{192}$. totius circumferentiæ. Fiat angulus
b 33. sexti. cEi, angulo cEo, æqualis; eritq; totus angulus o E i, $\frac{1}{96}$. quatuor rectorum: [b] ideoque arcus o i, $\frac{1}{98}$. totius circumferentiæ. Per doctrinam ergo propos. 12. lib. 4. Euclid. recta o i, latus erit polygoni circulo circumscripti, quod lateribus æqualibus 96. continetur. Et quia ostensum est, E c, ad c o, maiorem habere proportio-
c 15. quin. nem, quam 4673 $\frac{1}{2}$. ad 153. [c] habebit quoque diameter A B, ipsius E c, dupla ad o i, ipsius c o, duplam maiorem

iorem proportionem quam 4673 $\frac{1}{2}$. ad 153. Si ergo o i, latus polygoni ponatur 153. [d] erit diameter AB, maior, *d 10. quin.*
quam 4673 $\frac{1}{2}$. Multiplicentur 153. per 96. vt totus ambitus polygoni producatur 14688. [e] habebitq; ambitus po- *e 8 quin.*
lygoni ad diametrum AB, minorem proportionem, quam 14688. ad 4673 $\frac{1}{2}$. [f] Est autem proportio 14688. ad *f 8. quin.*
4673 $\frac{1}{2}$. minor, quam tripla sesquiseptima; quod 14688. ad 4673 $\frac{5}{11}$. (qui numerus paulo minor est quam 4673 $\frac{1}{2}$. habeant proportionem triplam sesquiseptimam. [g] Igitur & ambitus Polygoni ad diametrum AB, proportionẽ *g schol. 13. quin.*
habet minorem tripla sesquiseptima: [h] atq; adeo circumferentia, quæ (vt lib. 8. propos. 1. probabimus) minor est ambitu polygoni, multo minorem proportionẽ tripla sesquiseptima diametrum habebit; ideoq; circumferẽtia *h 8. quin.*
tripla est diametri, & adhuc superat parte, quæ minor est $\frac{10}{70}$. hoc est, $\frac{1}{7}$. diametri. Nã si contineret ter, & $\frac{1}{7}$. haberet circumferentia ad diametrum proportionem triplam sequiseptimam: si vero contineret ter, & plus quam $\frac{1}{7}$. haberet maiorem proportionem, quam triplam sesquiseptimam, cum tamen minorem habeat, vt demonstratum est.

IAM vero in eodem circulo sit latus hexagoni BG, semidiametro ęquale, per coroll. propos. 15. lib. 4. Euclid. iunganturque rectæ AG, EG. Et quia triangulum EBG, est æquilaterum constans ex tribus semidiametris; [i] erit angulus BEG, $\frac{2}{3}$. vnius recti, [k] ac proinde eius semissis BAG, erit $\frac{1}{3}$. vnius recti. Et quia diameter AB, dupla *i coroll. 3. propos. 32. lib. 1.*
est semidiametri BG, si BG, ponatur 780. erit AB, 1560. [l] Cum ergo quadratum ipsius AB, æquale sit quadratis rectarum BG, GA; [m] quod angulus AGB, in semicirculo rectus sit: si quadratum 608400. ipsius BG, dematur *k 20. tert.*
ex 2433600. quadrato ipsius AB, reliquum fiet quadratũ 1825200. ipsius AG, cuius radix paulo minor est, quam *l 47. pri.*
1351. cum huius quadratum 1825201. mai⁹ sit, quam 1825200. [n] Igitur AG, ad GB, minorem habebit proportio- *m 31. tert.*
nem, quam 1351. ad 780. ac proinde si BG, ponatur 780. [o] erit AG, minor quam 1351. *n 8. quin.*

SECTO iam angulo BAG, bifariam per rectam AH, secantem BG, in M, ductaque HB, erunt triangu- *o 10. quin.*
la BHM, AHB, æquiangula: [p] propterea quod angulus HBM, æqualis est angulo HAG, ob eandem basem GH; ideoq; per constructionẽ angulo HAB, & angul⁹ rect⁹ H, in semicirculo cõmunis. [q] Igitur erit AH, ad HB, vt HB, ad HM. Item AB, ad BH, vt BM, ad MH: & permutando AB, ad BM, vt BH, ad HM: ideoq; erunt tres hæ ꝓportiones AH, ad, HB; HB, ad HM: & AB, ad BM, æquales. Sed vt AB, ad BM, ita est vtraque simul BA, AG, ad BG, [r] *Nam vt AG, ad AB, ita est GM, ad MB; & componendo vt AG, AB, simul ad AB, ita GM. MB, simul, id est, tota GB, ad MB: Et permutando vt AG, AB, simul ad GB, ita AB, ad MB.* Igitur erit quoque, vt vtraque AG, AB, simul ad GB, ita AH, ad HB. Est autem AG, ostensa minor, quam 1351. & AB, posita est 1560. & GB, 780. Igitur vtraque AG, AB, simul (cum minus efficiant, quam 2911.) [s] minorem habebit proportionem ad GB, quam 2911. ad 780. Quare etiam proportio AH, ad HB, minor erit, quam 2911. ad 780. ac proinde si HB, ponatur 780. [t] erit AH,

p 21. tert.
q 4. sexti
r 3 sexti.
s 8 quinti.



t 10. quin. minor, quam 2911. ideoq; eius quadratum minus, quam 8473921. cui si addatur quadratum 608400. ipsius BH, fiet quadratum ipsius AB, [u] (quod quadratis rectarum AH, HB, æquale est) minus, quam 9082321. ideoque eius *u 47. pri.*
radix, vel recta AB, minor, quam 3013 $\frac{3}{4}$. cum huius quadratum 9082689 $\frac{1}{16}$. maius sit, quam 9082321. Igitur AB, ad BH, minorem proportionem habebit, quam 3013 $\frac{3}{4}$. ad 780. ac proinde si BH, ponatur 780. [x] erit AB, minor quam 3013 $\frac{3}{4}$. *x 10. quin.*

SECTO rursus angulo H A B, bifariam per rectam AI, secantem H B, in N; erunt vt prius, triangula BIN, AIB, æquiangula. Ergo vt supra demonstrabimus, vtramque BA, AH, simul ad HB, habere eandem proportionem quam A I, ad I B. Est autem BA, ostensa minor, quam 3013 $\frac{3}{4}$. & AH, minor, quam 2911. & ob id earum summa minor, quam 5924 $\frac{3}{4}$. ipsa autem HB, posita est 780. [y] Igitur vtraque B A, A H, simul ad H B, hoc *y 8. quint.*
est, AI, ad IB, minorem habebit proportionem, quam 5924 $\frac{3}{4}$. ad 780. Si ergo IB, ponatur 780. [z] erit AI, minor, *z 10. quin.*
quam 5924 $\frac{3}{4}$. Et quoniam est, vt 5924 $\frac{3}{4}$. ad 780. ita 1823. ad 240. quod idem numerus fiat ex primo in quartum, qui ex secundo in tertium, quæ quidem proportio denominatur à 7 $\frac{143}{240}$. habebit quoque AI, ad IB, minorem ꝓportionẽ, quam 1823. ad 240. ideoq; posita IB, 240. [a] erit AI, minor quam 1823. atq; ob id quadratũ ipsi⁹ *a 10. quin.*
A I, minus, quam 3323329. cui si addatur quadratũ 57600. ipsius I B, fiet quadratum ipsius AB, [b] (quod qua- *b 47. prim.*
dratis rectarum A I, I B, æquale est) minus quam 3380929. eiusque radix propterea, vel recta A B, minor quam 1838 $\frac{9}{11}$. cum huius quadratum 3381252 $\frac{37}{121}$. maius sit, quam 3380929. [c] Igitur AB, ad BI, minorem proportio- *c 8. quin.*
nem habebit, quam 1838 $\frac{9}{11}$. ad 240. ac proinde posita BI, 240. [d] erit AB, minor, quam 1838 $\frac{9}{11}$. *d 10. quin.*

SECTO item angulo I A B, bifariam per rectam A K, ostendemus eodem modo, vtramque BA, AI, simul ad IB, habere eandem proportionem, quam AK, ad KB. Sunt autem BA, AI, ambæ simul minores, quam 3661 $\frac{9}{11}$. (quod BA, ostensa sit minor, quam 1838 $\frac{9}{11}$. & AI, minor, quam 1823.) & IB, posita est 240. [e] Vtraque *e 8. quint.*
ergo BA, AI, simul ad IB, hoc est, AK, ad KB, minorem habebit proportionem, quam 3661 $\frac{9}{11}$. ad 240. Vt autem 3661 $\frac{9}{11}$. ad 240. ita est 1007. ad 66. quod idem gignatur numerus ex primo in quartum, qui ex secundo in tertium, quæ quidem proportio denominatur à 15 $\frac{17}{66}$. Igitur AK, ad KB, minorem quoque proportionem habebit, quam 1007. ad 66. ideoque posita K B, 66. [f] erit A K, minor, quam 1007. ac propterea eius quadratum *f 10. quin.*
minus, quam 1014049. cui si addatur quadratum 4356. ipsius K B; fiet quadratum ipsius A B, [g] (quod illis *g 47 prim.*
duobus æquale est) minus quam 1018405. eiusque radix propterea, id est, recta AB, minor, quam 1009 $\frac{1}{6}$. cum huius

h *8. quin.* huius quadratum 1018417 $\frac{1}{36}$ sit maius, quam 1018405. [b] Quocirca AB, ad BK, minorem proportionem habebit, quam 1009 $\frac{1}{6}$. ad 66. atque idcirco posita BK, 66.[i] erit AB, minor, quam 1009 $\frac{1}{6}$.

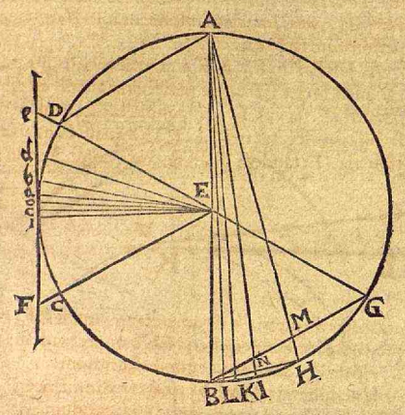
i *10. quin.*

SECTO denique angulo KAB, bifariam, per rectam AL, demonstrabimus eadem ratione, vtramque BA, AK, simul ad CK, esse, vt AL, ad LB. Sunt autem ambæ BA, AK, simul minores, quam 2016 $\frac{1}{2}$. (quod BA, sit ostensa minor, quam 1009 $\frac{1}{6}$. & AK, minor, quam 1007.) & BK, posita est 66. [k] Igitur vtraque BA, AK, simul ad CK, hoc est, AL, ad LB, habebit proportionem minorem, quam 2016 $\frac{1}{6}$. ad 66. atque idcirco si LB, ponatur 66.[l] erit AL, minor, quam 2016 $\frac{1}{6}$. ideoque quadratum eius minus quam 4064928 $\frac{1}{36}$. cui si addatur quadratum 4356. ipsius LB; fiet quadratum ipsius AB, [m] (quod duobus illis est æquale) minus, quam numerus 4069284 $\frac{1}{36}$. idcoque eius radix, id est, recta AB, minor, quam 2017 $\frac{1}{4}$. cum huius quadratum 4069297 $\frac{9}{36}$. superet 4069284 $\frac{1}{36}$. [n] Quamobrem AB, ad BL, minorem proportionem habebit, quam 2017 $\frac{1}{4}$. ad 66. ideoque si BL, ponatur 66. [o] erit AB, minor, quam 2017 $\frac{1}{4}$.

k *8. quin.* l *10. quin.* m *47. pri.* n *8. quin.* o *10. quin.*

p *26. tert.* QVONIAM igitur angulus GAH, angulo HAB, æqualis est; [p] erit arcus GH, arcui HB, æqualis: eademque ratione arcus HI, arcui IB, & IK, ipsi KB, & KL, ipsi LB, æqualis erit. Cum ergo GB, sit $\frac{1}{6}$. totius circumferentiæ, erit HB, $\frac{1}{12}$. & IB, $\frac{1}{24}$. & KB, $\frac{1}{48}$. & LB, $\frac{1}{96}$. ac proinde recta BL, latus erit Polygoni circulo inscripti, quod 96. lateribus æqualibus continetur. Quoniam vero BL, posita est 66. si 66. ducantur in 96. fiet ambitus Polygoni 6336. [q] Quapropter ambitus Polygoni ad diametrum AB, maiorem proportionem habebit, quam 6336. ad 2017 $\frac{1}{4}$. cum diameter AB, ostensa sit minor, quam 2017 $\frac{1}{4}$. [r] Est autem proportio 6336. ad 2017 $\frac{1}{4}$. maior, quam tripla superdecupartiens septuagesimas primas, quod proportio 6336. ad 2017 $\frac{67}{225}$. (qui numerus maior est, quam 2107 $\frac{1}{4}$.) sit tripla superdecupartiens septuagesimas primas. Ergo ambitus Polygoni maiorem proportionem habet ad diametrum, quam 3 $\frac{1}{7}$. Cum igitur circumferentia circuli sit maior ambitu polygoni, [s] habebit circumferentia ad diametrum multo maiorem proportionem, quam 3 $\frac{10}{71}$. Ac proinde circumferentia diametrum continebit ter, & insuper partem maiorem, quam $\frac{10}{71}$. Nam si contineret $\frac{10}{71}$. haberet circumferentia ad diametrum proportionem 3 $\frac{10}{71}$. Si autem contineret maiorem partem, quam $\frac{10}{71}$. haberet proportionem minorem, quam 3 $\frac{10}{71}$. cum tamen maiorem habere demonstratum sit. Et quoniam $\frac{1}{8}$. minor est, quam $\frac{10}{71}$. liquet ex hac secunda parte propositionis, circumferentiam continere diametrum ter, & plus, quam $\frac{1}{8}$. diametri. Cum ergo ex prima parte constet, circumferentiam continere diametrum ter, & minus, quam $\frac{1}{7}$. diametri: perspicuum est, veram proportionem circumferentiæ ad diametrum consistere inter triplam sesquiseptimam, & triplam sesquioctauam.

q *8. quin.* r *8. quin.* s *8. quin.*



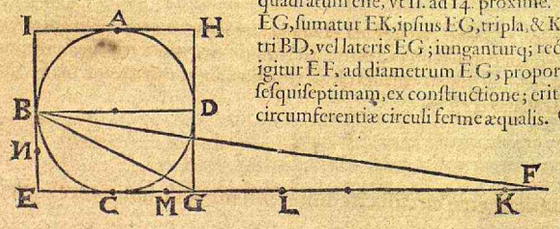
COROLLARIVM.

ITAQVE si diameter per 3 $\frac{1}{7}$. multiplicetur, gignetur numerus maior, quam circumferentia: si vero multiplicetur per 3 $\frac{10}{71}$. procreabitur minor numerus, quam circumferentia. E contrario, si circumferentia diuidatur per 3 $\frac{1}{7}$. producetur numerus minor, quam diameter: si vero diuidatur per 3 $\frac{10}{71}$. prodibit numerus maior, quam diameter.

PROPOSITIO III.

CIRCVLVS quilibet ad quadratum diametri proportionem habet, quam 11. ad 14. proxime.

SIT circulus ABCD, & quadratum diametri BD, circulo circumscriptum EGHI. Dico circulum ad quadratum esse, vt 11. ad 14. proxime. Producto enim latere EG, sumatur EK, ipsius EG, tripla, & KF, septima pars diametri BD, vel lateris EG; iunganturq; rectæ BG, BF. Quoniam igitur EF, ad diametrum EG, proportionem habet triplam sesquiseptimam, ex constructione; erit per præcedentem EF, circumferentiæ circuli ferme æqualis. Cum ergo BE, æqualis



sit semidiametro: erit per 1. propos. 1. triangulum BEF, circulo æquale proxime: Triangulum autem BEG, quarta pars erit quadrati EH. Quia vero posito latere EG, 7. recta EF, est 22. [a] erit triangulum BEF, hoc est, circulus ABCD, ad triangulum BEG, vt 22. ad 7. Sed posito triangulo BEG, 7. quadratum EGHI, ipsius quadruplum, est 28. Igitur circulus ad quadratum, est ferme, vt 22. ad 28. hoc est, vt 11. ad 14. quod erat demonstrandum.

a 1. *sexti.*

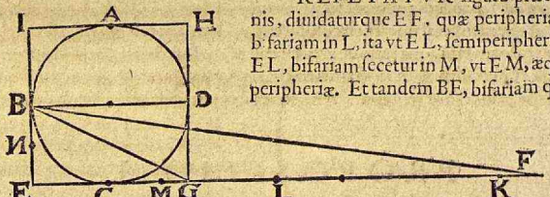
DE A-

DE AREA CIRCVLI, INVENTIONEQVE CIRcumferentiæ ex diametro, & diametri ex circumferentia.

CAPVT VII.

I QVONIAM triangulum rectangulum, cuius vnum latus circa angulum rectum semidiametro circuli, & alterum peripheriæ eiusdem æquale est, [a] areæ circuli adæquatur: huius autem trianguli area ex ductu perpendicularis in semissem basis producitur, vt cap. 2. Num. 2. huius libri scripsimus: *Fit vt area circuli producatur ex multiplicatione semidiametri in semissem peripheriæ: (si nimirum basis illius trianguli statuatur latus, quod peripheriæ æquale est.) Vel ex ductu totius peripheriæ in semissem semidiametri, hoc est, in quartam partem diametri: (sumendo videlicet in eodem triangulo pro basi latus, quod semidiametro est æquale.) Vel denique ex ductu totius diametri in quartam peripheriæ partem.* quod ita perspicuum faciemus.

a 1. *de Dimens. circuli. Area circuli trib. viis ex cognita data metro, & circumferentia.*



REPETATVR figura præcedentis propositionis, diuidaturque EF, quæ peripheriæ circuli est æqualis, bifariam in L, ita vt EL, semiperipheriæ sit æqualis: Item EL, bifariam secetur in M, vt EM, æqualis sit quartæ parti peripheriæ. Et tandem BE, bifariam quoque secetur in N, vt EN, semissis sit semidiametri BE, hoc est, quarta pars totius diametri. [b] Et quia triangulum BEF, æquale est circulo ABCD; erit quoq; rectangulũ sub semidiametro BE, & semiperipheria EL, comprehensum (quod per propositionem 1. lib. 7. huius, triangulo æquale est.) eidem circulo æquale; quod est primum.

b 2. *de Dimens. circuli.*

NON aliter rectangulum comprehensum sub tota peripheria EF, & EN, quarta parte diametri (quod per propos. 1. lib. 7. huius, eidem triangulo æquale est) eidem circulo erit æquale, quod est secundum.

DENIQVE quia quatuor lineæ EI, EB, EL, EM, proportionales sunt, quod tam priores duæ, quam posteriores duæ habeant proportionem duplam; [c] erit rectangulum sub EI, diametro, & EM, quarta parte peripheriæ comprehensum, rectangulo sub EB, semidiametro, & EL, semiperipheriæ comprehenso æquale. Cum ergo hoc in prima parte ostensum sit æquale circulo, erit quoque illud eidem circulo æquale. quod est tertium.

c 16. *sexti.*

VT fractiones interdum vitentur, ducenda erit tota diameter in totam circumferentiam. Quarta enim pars numeri producti area erit circuli: propterea quod numerus productus quadruplus est numeri producti ex semidiametro in semicircumferentiam, vt liquet.

Area semicirculi, Quadrantis octauæ partis, &c.

SEQVITVR ex prima parte, aream semicirculi produci ex semidiametro in quartam circumferentiæ: quia nimirum producitur semissis eius, quod fit ex semidiametro in semissem peripheriæ. Item aream Quadrantis procreari ex semidiametro in octauam partem circumferentiæ: Et aream octauæ partis ex semidiametro in sextamdecimam partem circumferentiæ: Et aream sextædecimæ partis ex semidiametro in $\frac{1}{32}$. circumferentiæ, & sic deinceps: quia semper producitur semissis præcedentis producti; quemadmodum & partes circuli semisses sunt præcedentium partium: nimirum Quadrans semissis est semicirculi; & octaua pars semissis Quadrantis; & sextadecima pars semissis octauæ partis, &c.

2. IGITVR vt area circuli reperiatur, necesse est tam eius diametrũ, quam circumferentiam esse cognitam. Quare trademus hic regulas nonnullas, per quas ex data diametro circumferentia tum maior, tum minor, quam vera, ex propos. 2. de Dimensione circuli inueniatur. Deinde alias regulas præscribam, per quas area circuli tum maior, tum minor, quam vera, vel ex sola diametro, vel ex sola circumstantia cognita eruatur.

I.

EX data diametro circuli circumferentiam vera maiorem reperire.

FIAT vt 7. ad 22. ita data diameter, verbi gratia, 28. ad aliud, procreabiturque circumferentia 88. maior quam vera.

[a] Quoniam enim proportio circumferentiæ ad diametrum minor est, quam tripla sesquiseptima, proportio autem 88. ad 28. est tripla sesquiseptima, eadem videlicet, quæ 22. ad 7. [b] erit numerus 88. maior, quam circumferentia circuli, cuius diameter est 28.

a 2. *de Dimens. circuli.* b 10. *quin.*

II.

EX data diametro circuli circumferentiam vera minorem elicere.

FIAT vt 71. ad 223. ita data diameter 28. ad aliud, produceturque circumferentia 87 $\frac{57}{71}$. minor quam vera. [a] Quoniam enim proportio circumferentiæ ad diametrum maior est, quam tripla superdecupartiens septuagesimas primas; proportio autem 87 $\frac{57}{71}$. ad 28. est tripla superdecupartiens septuagesimas primas, nimirum eadem, quæ 223. ad 28. [b] erit circumferentia circuli, cuius diameter 28. maior, quam 87 $\frac{57}{71}$.

a 2. *de Dimens. circuli.* b 10. *quin.*

III.

EX data circuli circumferentia, diametrum vera maiorem indagare.

FIAT vt 223. ad 71. ita data circumferentia, verbi gratia 88. ad aliud. Productus enim numerus 28 $\frac{4}{223}$. dabit diametrum vera maiorem. [a] *Cum enim circumferentia ad diametrum habeat maiorem proportionem, quam triplam superdecupartientem septuagesimas primas, hoc est, maiorem quam 223. ad 71. habebit quoque data circumferentia 88. ad suam diametrum proportionem maiorem, quam ad 28 $\frac{4}{223}$.* [b] *ac proinde diameter circumferentiæ 88. minor erit, quam 28 $\frac{4}{223}$.*

a 2. *de Dimens. circuli.*
b 10. *quin.*

IV.

EX data circuli circumferentia diametrum inuestigare vera minorem.

FIAT vt 22. ad 7. ita circumferentia data 88. ad aliud. Numerus enim procreatus 28. offeret diametrum vera minorem. [a] Cum enim circumferentia ad diametrum habeat minorem proportionem, quam triplam sesquiseptimam, hoc est, quam 22. ad 7. habebit quoque circumferentia data 88. ad suam diametrum proportionem minorem, quam ad 28. [b] atque idcirco diameter circumferentiæ 88. maior erit, quam 28.

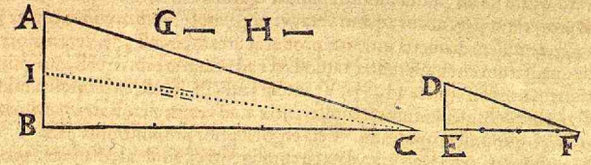
a 2. *de Dimens. circuli.*
b 10. *quin.*

3. IAM vero vt doceamus, qua ratione area circuli vel ex sola diametro cognita, vel ex sola circumferentia cognoscatur, ita vt necesse non sit ex diametro circumferentiam, vel ex circumferentia diametrum inuestigare, demonstrandæ prius erunt sequentes tres propositiones, quarum primam deinde lib. 8. propos. 2. ex Pappo Alexandrino aliter quoque demonstrabimus,

PROPOSITIO I.

Circulorum diametri inter se sunt, vt circumferentiæ.

SINT diametri duorum circulorum AB, DE, & rectæ circumferentijs æquales BC, EF, quæ cum diametris angulos rectos efficiant B, E, compleanturque triangula ABC, DEF. Dico ita esse diametrum AB, ad diametrum DE, vt est circumferentia BC, ad circumferentiam EF. Diametris enim AB, DE, inueniatur tertia proportionalis G: Et tribus rectis BC, EF, DE, quarta proportionalis H. Et quia continue proportionales sunt AB, DE, G; [a] erit quadratum ex AB, ad quadratum ex DE, vt AB, ad G. [b] Sed vt quadratum ex AB, ad quadratum ex DE, ita est circulus diametri AB, ad circulum diametri DE. [c] Et vt circulus ad circulum, ita est triangulum ABC, ad triangulum DEF, quod hæc triangula circulorum sint dupla. (Nam diuisa diametro AB, bifariam in I, ductaque recta IC, [d] erit triangulum IBC, circulo æquale: ac proinde cum [e] triangula AIC, IBC, æqualia sint; erit triangulum ABC, duplum trianguli IBC, hoc est, circuli, cuius diameter AB. Eademque ratione triangulum DEF, duplum erit circuli, cuius diameter DE.) Igitur erit quoque triangulum ABC, ad triangulum DEF, vt AB, ad G. At vt triangulum ABC, ad triangulum DEF, ita est AB, ad H, quod vtraque proportio composita sit ex iisdem proportionibus. ([f] Nam proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, composita est ex proportione basis AB, ad basem DE, & ex proportione altitudinis BC, ad altitudinē EF, hoc est, ex proportione DE, ad H, quæ ex constructione eadem est, quæ BC, ad EF. Proportio autem AB, ad H, componitur quoque ex proportionibus AB, ad DE, & DE, ad H, ex defin.) Igitur erit, vt AB, ad G, ita AB, ad H; [g] ideoque G, & H, æquales erunt: [h] ac proinde erit DE, ad G, vt DE, ad H. Est autem per constructionem AB, diameter ad diametrum DE, vt DE, ad G, hoc est, vt DE, ad H. Et vt DE, ad H, ita per constructionem, circumferentia BC, ad circumferentiam EF. Igitur erit quoque diameter AB, ad diametrum DE, vt circumferentia BC, ad circumferentiam EF. quod erat demonstrandum.



a *coroll. 20. sexti.*
b 2. *duodec.*
c 15. *quin.*
d 1. *de Dimens. circuli.*
e 38. *pri.*
f *schol. 23. sexti.*
g 9. *quin.*
h 7. *quin.*

PROPOSITIO II.

PROPORTIO quadrati ex diametro cuiuslibet circuli descripti ad circuli aream maior est, quam 14. ad 11. minor autem, quam 284. ad 223.

[a] QVONIAM enim quadratum diametri cuiusuis circuli ad quadratum diametri alterius circuli est, vt circulus ad circulum: erit permutando quadratum diametri ad circulum eiusdem diametri, vt quadratum alterius diametri ad circulum eiusdem diametri. Posita autem diametro alicuius circuli 1. proportio quadrati ipsius ad circulum maior est, quam 14. ad 11. minor autem, quam 284. ad 223. Igitur proportio quadrati diametri cuiusuis alterius circuli ad ipsum circulum, maior quoque erit quam 14. ad 11. minor autem, quam 284. ad 223.

a 2. *duodec.*

QVOD

QVOD autem proportio quadrati diametri 1. ad suum circulum maior sit, quam 14. ad 11. minor vero, quam 284. ad 223. ita perspicuū fiet. Si fiat vt 7. ad 22. ita diameter 1. ad aliud, prodibit ex regula prima Num. 2. circumferentia 3 $\frac{1}{7}$. vel [a] $\frac{22}{7}$. maior, quam vera. Igitur ex eius semisse $\frac{11}{7}$. in $\frac{1}{2}$. semidiametrum procreabitur, vt Num. 1. dictum est, area circuli $\frac{11}{14}$. maior tamen, quam vera: [b] Ac proinde quadratum diametri 1. quod est 1. ad veram aream circuli, quæ minor est, quam $\frac{11}{14}$. maiorem proportionem habebit, quam ad $\frac{11}{14}$. Cum ergo sit 1. ad $\frac{11}{14}$. vt 14. ad 11. (Quoniam enim ex propositione 2. Minutiarum ad finem lib. 9. Euclid. eadem proportio est numeratoris 11. ad denominatorem 14. quæ minutiæ $\frac{11}{14}$. ad suum integrum 1. erit conuertendo, vt 14. ad 11. ita 1. ad $\frac{11}{14}$.) habebit quoque quadratum diametri 1. ad aream circuli veram, maiorem proportionem, quam 14. ad 11. quod est propositum. Constat ergo prima propositionis pars.

b 8. *quin.*

RVRSVS si fiat, vt 71. ad 223. ita diameter 1. ad aliud, reperietur per regulam 2. Num. 2. circumferentia circuli 3 $\frac{10}{71}$. vel [a] $\frac{223}{71}$. minor, quam vera. Igitur, vt Num. 1. dictum est, ex eius semisse $\frac{223}{142}$. in $\frac{1}{2}$. semidiametrum producetur area circuli $\frac{223}{284}$. minor tamen quam vera: [c] Ac proinde quadratum diametri 1. quod est 1. ad veram circuli aream, quæ maior est, quam $\frac{223}{284}$. minorem habebit proportionem, quam ad $\frac{223}{284}$. Cum ergo sit 1. ad $\frac{223}{284}$. vt 284 ad 223. (Nam quia ex propos. 2. Minutiarum, eadem est proportio numeratoris 223. ad denominatorem 284. quæ minutiæ $\frac{223}{284}$. ad suum integrum 1. erit conuertendo, vt 284. ad 223. ita 1. ad $\frac{223}{284}$. habebit quoque quadratum diametri 1. ad aream veram circuli minorem proportionem, quam 284. ad 223. quod est propositum. Constat ergo secunda etiam pars propositionis.

c 8. *quin.*

PROPOSITIO III.

PROPORTIO quadrati à circumferentia circuli cuiusuis descripti ad circuli aream maior est, quam 892. ad 71. minor autem, quam 88. ad 7,

[a] QVONIAM enim circumferentia cuiusuis circuli ad circumferentiam alterius circuli est, vt diameter ad diametrum: [b] erit quoque quadratum circumferentiæ ad quadratum circumferentiæ, vt quadratum diametri, ad quadratum diametri. [c] Sed vt quadratum diametri ad quadratum diametri, ita est circulus ad circulum. Igitur erit quadratum quoque circumferentiæ ad quadratum circumferentiæ; vt circulus ad circulum: Et permutando quadratum circumferentiæ, ad suum circulum, vt quadratū alterius circumferentiæ ad suum circulum. Posita autem circumferentia alicuius circuli 1. proportio quadrati circumferentiæ illius circuli ad circulum maior est, quam 892. ad 71. minor vero, quam 88. ad 7. Igitur & proportio quadrati circumferentiæ cuiuslibet alterius circuli ad ipsum circulum maior erit, quam 892. ad 71. minor autem, quam 88. ad 7.

a 1. *huius Num. 3.*
b 22. *sexti.*
c 2. *duode.*

QVOD autem proportio quadrati ex circumferentia 1. descripti, ad suum circulum maior sit, quam 892. ad 71. minor vero, quam 88. ad 7. sic demonstrabimus. Quoniam si fiat, vt 223. ad 71. ita data circumferentia 1. ad aliud, diameter procreatur $\frac{71}{223}$. maior, quam vera, vt ex 3. regula Num. 2. constat. fit vt $\frac{1}{2}$. semissis circumferentiæ ducta in $\frac{71}{446}$. semissem diametri inuentæ producat aream circuli $\frac{71}{892}$. vera maiorem, vt Num. 1. dictum est. [d] Igitur quadratum circumferentiæ 1. quod est 1. ad veram aream circuli, quæ minor est, quam $\frac{71}{892}$. maiorem proportionem habebit, quam ad $\frac{71}{892}$. Vt autem 1. ad $\frac{71}{892}$. ita est, ex propos. 2. minutiarum, & conuertendo, 892. ad 71. Igitur & quadratum circumferentiæ 1. ad veram circuli aream maiorem proportionem habebit, quam 892. ad 71. quod est propositum. Vera ergo est prior propositionis pars.

d 8. *quin.*

RVRSVS, quia si fiat, vt 22. ad 7. ita data circumferentia 1. ad aliud, diameter producitur $\frac{7}{22}$. minor quam vera: fit vt $\frac{1}{2}$. semissis circumferentiæ ducta in $\frac{7}{44}$. semissem diametri inuentæ producat aream circuli $\frac{7}{88}$. vera minorem, vt ex ijs constat, quæ Num. 1. diximus. [e] Igitur quadratum circumferentiæ 1. quod est 1. ad aream veram circuli, quæ maior est, quam $\frac{7}{88}$. minorem habebit proportionem, quam ad $\frac{7}{88}$. Vt autem 1. ad $\frac{7}{88}$. ita est, ex propositione 2. Minutiarum, & conuertendo, 88. ad 7. Ergo etiam quadratum circumferentiæ 1. ad aream circuli minorem proportionem habebit, quam 88. ad 7. quod est propositum. Vera igitur etiam est posterior pars propositionis.

e 8. *quin.*

4 HIS ita demonstratis, sequuntur iam quatuor regulæ, per quas aream circuli propositi siue maiorem, siue minorem vera, vel ex sola diametro, vel ex sola circumferentia cognita coniicere licebit.

I.

EX diametro aream circuli vera maiorem inuestigare.

FIAT vt 14. ad 11. ita quadratum datæ diametri ad aliud. Productus enim numerus dabit aream circuli vera maiorem. [a] Cum enim maior sit proportio quadrati diametri ad aream circuli, quam 14. ad 11. Sit autem quadratum diametri datæ ad aream inuentam, vt 14. ad 11. erit quoque maior proportio quadrati diametri datæ ad veram aream circuli, quam ad aream inuentam. [b] Ac proinde vera circuli area erit minor, quam inuenta: hoc est, area inuenta maior erit, quam vera.

a 2. *Nu. 3.*
b 10. *quin.*

II.

EX diametro aream circuli vera minorem inuestigare.

FIAT vt 284. ad 223. ita quadratum datæ diametri ad aliud. Numerus enim procreatus aream circuli vera minorem offeret. [a] Cum enim minor sit proportio quadrati diametri datæ ad aream circuli, quam 284. ad 223. sit autem quadratum diametri datæ ad aream inuentam, vt 284. ad 223. erit quoque minor proportio quadrati diametri datæ ad veram aream circuli, quam ad aream inuentam: [b] Atque idcirco vera area circuli maior erit, quam inuenta, hoc est, inuenta area erit minor, quam vera.

a 2. *Nu. 3.*
b 10. *quin.*

III.

EX circumferentia aream circuli vera maiorem colligere.

FIAT vt 892. ad 71. ita quadratum datæ circumferentiæ ad aliud. Procreatus namque numerus aream circuli vera
a 3. Nu. 3. *maiorem indicabit.* [a] Cum enim maior sit proportio quadrati circumferentiæ ad aream circuli, quam 892. ad 71. Sit autem quadratum datæ circumferentiæ ad aream inuentam, vt 882. ad 71. erit quoque maior proportio quadrati datæ circumferentiæ ad veram aream circuli, quam ad aream inuentam: [b] ideoq; vera circuli area
b 10. quin. minor erit, quam inuenta; hoc est, inuenta area maior erit, quam vera.

IV.

EX circumferentia aream circuli vera minorem concludere.

FIAT vt 88. ad 7. ita quadratum circumferentiæ datæ ad aliud. Numerus namq;, qui gignitur, erit area circuli mi-
a 3. Nu. 3. *nor, quam vera.* [a] Cum enim minor sit proportio quadrati circumferentiæ datæ ad aream circuli, quam 88. ad 7. sit autem quadratum circumferentiæ datæ ad aream inuentam, vt 88. ad 7. erit quoque minor proportio
b 10. quin. quadrati datæ circumferentiæ ad veram aream circuli, quam ad aream inuentam: [b] Ac proinde area circuli vera erit maior, quam inuenta: hoc est, area inuenta minor erit, quam vera.

5. OMNES hæ viæ, quibus area circuli inquiritur, pendent ex proportione circumferentiæ circuli ad diametrum, quam Archimedes inuenit esse quidem minorem tripla sesquiseptima, maiorem vero tripla superdecupartiente septuagesimas primas: ac proinde cum hæ proportiones accuratæ non sint, necesse est, aream inuentam vel veram magnitudinem circuli superare, vel ab ea deficere, vt ex superioribus regulis liquet. Et quamuis differentia inter veram aream, atque inuentam in paruis circulis perexigua sit, in magnis tamen circulis negligenda non videtur. Quamobrem qui magis accuratam circuli aream desiderat, assumat proportionem diametri ad circumferentiam vero propinquiorem, quam posteriores Geometræ, præsertim Ludolphus à Collen, & Christophorus Gruenbergerus inuenerunt, vt sequitur.

Accuratior proportio diametri ad circumferentiam.

Diameter	Circumferentia maior quam vera
100000000000000000000.	314159265358979323847.

Diameter	Circumferentia minor quam vera
100000000000000000000.	314159265358979323846.

$$3\frac{14159265358979323847}{100000000000000000000}$$

$$3\frac{14159265358979323846}{100000000000000000000}$$

Ita vt proportio circumferentiæ ad diametrum maior, quam vera, denominetur ab hoc primo numero, quę minor est, quam tripla sesquiseptima. Proportio vero minor, quam vera, denominetur ab hoc secundo numero quæ maior est, quam tripla superdecupartiens septuagesimas primas: qui denominatores habentur, si vtraq; circumferentia per diametrum diuidatur.

Accuratior inuentio circũferẽtiæ ex data diametro: & diametri ex data circumferentia.

ITAQVE si fiat, vt diameter prædicta ad circumferentiam vera maiorem, ita diameter alicuius circuli data ad aliud, reperietur circumferentia maior, quam vera, minus tamen differens à vera, quam illa Archimedis, quæ Num. 2. ex regula 1. inuenta fuit. Si autem fiat, vt eadem diameter prædicta ad circumferentiam vera minorem, ita data diameter alicuius circuli ad aliud, reperietur circumferentia minor, quam vera, magis tamen ad veram accedens, quam illa Archimedis, quæ Num. 2. ex reg. 2. inuenitur. E contrario vero, si fiat vt prædicta circumferentia minor, quam vera, ad diametrum, ita circumferentia alicuius circuli data ad aliud, prodibit diameter maior quam vera: Si autem fiat, vt circumferentia prædicta maior, quam vera, ad diametrum, ita circumferentia alicuius circuli data ad aliud, proueniet diameter minor, quam vera. Vtraque tamen diameter inuenta magis ad veram accedet, quam illa Archimedis, quæ Num. 2. per reg. 3. & 4. inuenta fuit.

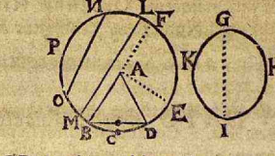
Accuratior inuentio areæ circuli.

INVENTA circumferentia ex diametro, vel diametro ex circumferentia, reperietur area circuli, vt Num. 1. traditum est: si nimirum semidiameter in semicircumferentiam ducatur: vel tota circumferentia in semissem semidiametri: vel denique tota diameter in quartam partem circumferentiæ. quæ quidem area minus à vera distabit, quam illa, quæ ex proportione Archimedis inuenitur. Sed quia difficilius est per magnos numeros calculum instituere, quam per minores, vsus artificum obtinuit, vt proportio Archimedis ad calculum adhibeatur. Quando tamen desideratur accuratior calculus, vtendum erit posteriori hac proportione Ludolphi, præsertim in maioribus circulis.

DE AREA SEGMENTORVM CIRCVLI.

CAPVT VIII.

SIT primum propositus sector circuli ABCD, comprehensus duabus semidiametris AB, AD, & arcu BCD. Huius aream ita explorabimus. Si tam semidiameter AB, nota sit, nimirum palmorum 7. quam arc[a] BCD, palmorum videlicet $3\frac{2}{3}$, ducatur semidiameter 7. in $1\frac{1}{3}$, id est, in semissem arcus, Productus enim numerus $12\frac{5}{9}$ palm. erit area sectoris ABCD, vt demonstrabimus Si autem neque semidiameter AB, neque peripheria BCD, data sit, mensuranda erit semidiameter aliqua mensura nota, & secundum eandem mensuram inuenienda circumferentia circuli per regulas antecedentis cap. nec non recta BD. Deinde fiat, vt AB, nota in assumpta mensura ad sinum totũ 100000. ita BD, nota in eadem mensura assumpta ad aliud. Numerus enim procreatus dabit rectam BD, cognitam in partibus sinus totius. Huius autem medietas sinus erit semissis arcus BD: ac proinde ex tabula sinuum semissis BC, in gradibus nota erit, ideoque totus arcus BD, non ignorabitur, Et quia tota circuli circumferentia nota facta est in assumpta mensura: si fiat vt grad. 360. ad totam circumferentiã in assumpta mẽsura cognitam, ita arcus BD, in gradibus cognitus ad aliud, cognoscetur idem arcus BD, in mensura assumpta. Quare, vt prius, area sectoris ABCD, reperietur. Possent quoq; gradus in arcu BD, contenti inuestigari beneficio quadrantis alicuius in gradus diuisi, adhibita doctrina cap. 2. lib. 1. Num. 10. tradita, vt minuta etiam cognoscantur, quando in arcu BD, vltra gradus aliqua particula supereſt.



AREAM porro sectoris produci ex semidiametro in semissem arcus sectoris, sic demonstro. Sit quadrans BE, & semicirculus BEF. [a] Et quoniam est, vt arcus BD, ad quadrantem BE. ita sector ABCD, ad sectorem ABDE: erit quoq; ex scholio propos. 22. lib. 5. Euclid. vt arcus BD, ad quadruplum quadrantis BE, hoc est, ad totam circũferentiam, ita sector ABCD, ad quadruplum sectoris ABDE, hoc est, ad totum circulum. [b] Vt autem arcus BD, ad totam circumferentiam, ita est, BC, semissis arcus BD, ad BEF, semissem totius circumferentiæ. Igitur erit quoq; vt BC, ad BEF, ita sector ABCD, ad totum circulum. [c] Sed vt BC, ad BEF, ita est rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub AB, BEF. Ergo erit quoque sector ABCD, ad totum circulum, vt rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub AB, BEF. Cum ergo vt cap. 7. Num. 1. tradidimus, circulus æqualis fit rectangulo sub AB, BEF, [d] erit quoque sector ABCD, rectangulo sub AB, BC, æqualis. quod erat demonstrandum.

a 33. sexti. b 15. quin. c 1. sexti. d 14. quinti.

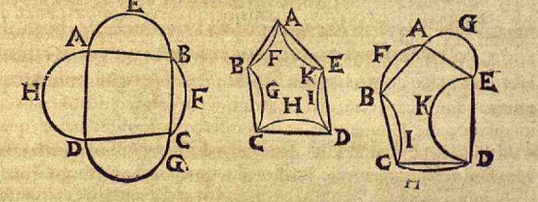
EADEM ratione procreabitur sector ABFDA: ex semidiametro AB, in semissem arcus BFD.

2 SIT deinde segmentum BCD. [c] Inuento centro A, arcus BCD, & cognitis per aliquam mensuram lateribus trianguli ABD. & arcu BCD, in eadem mensura, vt Num. 1. diximus, inuestigetur tam area sectoris ABCD, quam trianguli ABD. Hæc enim detracta ex illa relinquet aream segmenti propositi BCD.

c. 25. tertij

3 SIT præterea figura lenticularis duobus arcubus GHI, GKI. contenta. Ducta recta GI, inquiratur, vt Num. 2. docuimus, vtriusq; segmenti GHI, GKI, area. Summa n. ex duabus hisce areis conflata, erit area propositæ figuræ GHIK. Quod si segmenta GHI, GKI, sint æqualia, satis erit vnius aream inuestigare. Hæc namq; duplicata dabit præpositæ figuræ GHIK, aream.

4 NON aliter metiemur figuras ex varijs circulorum segmentis coagmentatas, siue omnes circumferentiæ extrorsus vergant, siue introrsum, siue partim introrsum, & partim extrorsum. Vt in tribus his figuris, si arcubus subtendantur chordæ, metiemur in prima quadrilaterum ABCD, vt cap. 1. vel 3. docuimus: & segmenta AEB, BFC, CGD, DHA, vt hoc cap. Num. 2. traditum est. Si enim hęc segmenta quadrilatero adijciantur, quod omnia extrorsum tendant, conflabitur area figuræ AEBFCGDH, ex quatuor arcubus compositæ.



IN secunda autem metiemur pentagonum ABCDE, per ea, quæ cap. 4. scripta sunt: Ex quo si dememus quinq; segmẽta introrsum vergentia, quæ quidem ex ijs, quæ Num. 2. huius cap. scripsimus, cognoscentur, reliqua fiet area figuræ AFBGCHDIEK, ex quinque arcubus conflatæ.

IN tertia denique pentagono ABCDE, adijciemus tria segmenta, AFB, AGE, CHD, extrorsum vergentia. & ex composito numero duo segmenta BIC, DKE, introrsum vergentia tollem[a], vt area relinquatur figuræ AFBICHDKEG, ex quinque arcubus compositæ. Atque hoc modo agrum quantumuis irregularem metiri licebit.

5 SIT denique in prima figura huius cap. segmentum circuli LMON, comprehensum duabus rectis LM, NO, & duobus arcubus LN, MO. Exploretur, vt Num. 2. declaratum est, area vtriusque segmenti PLM, PNO. Minor enim area PNO, detracta ex maiori PLM, reliquam faciet aream propositi segmenti LMON.

6 VT quartus hic liber concludatur, lubet hic appendicis loco regulas quasdam alias à nostro instituto non alienas subiungere.

I.

DATA circuli area, circumferentiam, ac diametrum cognoscere.

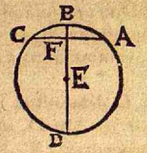
FIAT vt 7. ad 88. ita data area ad aliud. Productus enim numerus erit quadratũ circũferentiæ vero maius, vt ex 4. reg. Num. 4, cap. 7. liquet. Radix ergo quadrata numeri producti dabit circumferentiam vera maiorem. Quod si fiat, vt 71. ad 892. ita data area ad aliud, gignetur quadratum circumferentiæ vero minus, vt constat ex 3. reg. Num. 4. cap. 7. Ac proinde eius radix quadrata circumferentiam vera minorem indicabit.

FIAT rursus, vt 223. ad 284. ita area proposita ad aliud. Procreatus namq; numerus erit quadratũ diametri vero maius, vt ex 2. reg. Num. 4. cap. 7. perspicuum est. Radix ergo quadrata numeri producti diametrum exhibebit vera maiorem. Quod si fiat, vt 11. ad 14. ita area data ad aliud, reperietur quadratum diametri vero minus, vt ex reg. 1. Num. 4. cap. 7. colligitur. Ac proinde radix eius quadrata diametrum offeret vera minorem.

II.

DATO arcu cuiusuis circuli, diametrum circuli in numeris inuestigare.

SIT datus arcus ABC. Ducta chorda AC, sectaque bifariam in F, ducatur per F, perpendicularis FB, [f] quæ per centrum circuli transibit, [g] ideoque rectangulum sub CF, AF, hoc est, quadratum ex AF, æquale erit rectangulo sub BF, & reliqua portione diametri. Si igitur AF. FB, per aliquam mensuram fiant notæ, & quadrans numerus rectæ AF, diuidatur per FB, prodibit reliqua portio diametri FD, quæ addita perpendiculari FB, conficiet totam diametrum BD, notam in eadem mensura, in qua AF, FB, cognitæ sunt.



GEOMETRICE eadem portio FD, reperietur, si duabus FB, AF, inueniatur tertia proportionalis FD: propterea quod ex scholio propos. 13. lib. 6. Eucl. AF, media proportionalis est inter diametri segmenta.

f *coroll. 1. tertii.* g *35. tertii.*

III.

DATIS diametris duorum circulornm, vel circumferentijs: Aut duobus lateribus homologis duarum figurarum similium, similiterque positarum: quam proportionem circuli, vel figuræ inter se habeant, cognoscere.

QVONIAM circuli, & figuræ similes similiterq; positæ, habent duplicatam proportionem diametrorum vel circumferentiarum, & laterũ homologorum: si maior diameter, vel circumferentia per minorem, & maius latus homologum per minus diuidatur, prodibit denominator proportionis, quam maior diameter, circumferentiaue ad minorem, vel maius latus homologum ad minus habet. Si igitur hic denominator in se ducatur, producetur denominator duplicatæ proportionis, quam videlicet circulus, vel figura ad minorem habet. Vt si diameter vnius circuli sit 56. & circumferentia 176. Alterius autem circuli diameter 14. & circumferentia 44. Diuisis 56. per 14. vel 176. per 44. fit Quotiens 4. qui ductus in se producit 16, denominatorem proportionis maioris circuli ad minorem. Eandemque proportionem habebit figura ad minorem similem, similiterque positam, si latera homologa sint 56. & 14. vel 176. & 44.

IV.

DATIS pluribus circulis, quorum diametri, vel circumferentiæ cognitæ sint: Item pluribus figuris similibus similiterque positis, quarum latera homologa sint nota: Inuenire diametrum, vel circumferentiam, cuius circulus omnibus circulis propositis æqualis sit. Item latus reperire, cuius figura similis, similiterque posita æqualis sit omnibus propositis figuris.

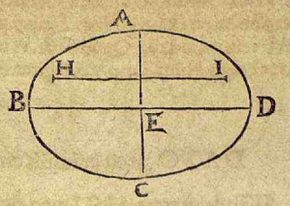
MVLTIPLICENTVR diametri, vel circumferentiæ, aut latera homologa in se, & numeri producti in vnam summam colligantur. Radix enim quadrata huius summæ erit diameter, circumferentiaue, aut latus homologum quæsitum. Verbi gratia, si sint quatuor diametri, circumferentiæue circulorum, aut latera homologa similium figurarum, similiterque positarum, 84. 3. 4. 12. atque in se multiplicentur, gignentur numeri 7056. 9. 16. 144. quorum summa 7225. Radix ergo quadrata huius summæ 85. erit diameter, circumferentiaue circuli, aut latus homologum, quod quæritur: ita vt circulus, cuius diameter, vel circumferentia est 85. aut figura supra rectam 85 similis; similiterq; posita figuris datis, æqualis sit quatuor circulis, aut figuris propositis. Nam cum quadratum 7225. radicis 85. æquale sit quatuor quadratis 7056. 9. 16. 144. radicum 84. 3. 4. 12. [h] Circuli autem eandem habeant proportionem, quam quadrata diametrorum: ac proinde quam quadrata circumferentiarum; quod circumferentiæ diametris sint proportionales: Item figuræ similes, similiterque positæ inter se sint, vt quadrata laterum homologorum, [i] propterea quod tam quadrata, quam figuræ habent duplicatam proportionem laterum: erit quoque tam circulus, cuius diameter, circumferentiaue 85. æqualis quatuor circulis, quorum diametri, circumferentiæue 84. 3. 4. 12. quam figura supra latus 85. similis similiterque posita, quatuor figuris, quarum latera 84. 3. 4. 12. æqualis, quod est propositum.

h *2. duod.* i *20. sexti.*

V.

Aream propositæ Ellipsis indagare.

LVBET deniq; librũ hunc quartũ duob⁹ problematibus terminare, quæ ab Archimede Syracusano acutissime inuenta sunt, ac demonstrata. Vnum est de area Ellipsis; alterũ de area Parabolæ. Sit ergo Ellipsis ABCD, cuius maior diameter BD, & minor AC, secans maiorem in E, bifariam. [b] Inueniatur HI, media proportionalis inter BD, & AC: & circuli circa diametrũ HI, descripti area, inquiratur, per ea, quæ cap. 7. huius lib. scripsimus. Dico hanc aream areæ Ellipsis ABCD, esse æqualem. [c] Quoniam enim est, vt BD, ad AC, ita quadratum ex BD, ad quadratum ex HI, [d] Vt autem quadratum ex BD, ad quadratum ex HI, ita est circulus diametri BD, ad circulum diametri HI. Igitur erit quoque, vt BD, ad AC, ita circulus diametri BD, ad circulum diametri HI. Cum ergo per propositionem 5 Archimedis de Conoidibus, & sphæroidibus, sit quoque, vt maior diameter BD, ad minorem AC, ita circulus diametri BD, ad Ellipsim ABCD; [e] habebit circulus diametri BD, eandem proportionem ad circulum diametri HI, & ad Ellipsim ABCD. [f] Ideoque area circuli diametri HI, areæ ellipsis ABCD, æqualis erit. quod erat demonstrandum.

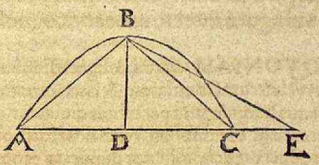


b *13. sexti.* c *coroll. 20 sexti.* d *2. duod.* e *21. quin.* f *9. quinti.*

VI.

AREAM propositæ parabolæ inuestigare.

SIT data parabola ABC, cuius basis AC, & axis BD, diuidens basem bifariam in D, & vertex B. Inscribatur parabolę triangulum ABC, eandem habens basem, ac verticem cum parabola. Producta autem base AC, sumatur CE, tertia pars ipsi⁹ AC; ita vt AE, ipsius AC, sit sesquitertia. Iungatur recta EB. Inquiraturq; deniq; per cap. 2. huius lib. area trianguli ABE. quam dico esse æqualem areæ parabolæ ABC. [g] Quoniam enim est, vt AE, ad AC, ita triangulum ABE, ad triangulum ABC: Est autem AE, ipsius AC, sesquitertia, ex constructione; erit quoque triangulum ABE, trianguli ABC, sesquitertium. Cum ergo, vt Archimedes in lib. de Quadratura paraboles demonstrauit, parabola quoque ABC, trianguli ABC, sit sesquitertia: [h] habebunt triangulum ABE, & parabola ABC, ad triangulum ABC, eandem proportionem. [i] Ideoque area trianguli ABE, Areæ paraboles ABC, æqualis erit. quod erat ostendendum.



g *1. sexti.* h *11. quin.* i *9. quinti.*

FINIS LIBRI QVARTI.



GEOMETRIÆ PRACTICÆ LIBER V.

AREAS

Solidorum, corporumue perſcrutans.

SVPEREST tertia magnitudinis ſpecies, quæ corpora, ſolidaue complectitur. Et quia initio lib. 4. diximus, corpora metienda eſſe per corpuſcula cubica: ita vt quando dicitur corpus aliquod continere 1000. palmos, intelligendum ſit, 1000. cubos æquales, quorum ſinguli latera habent vni palmo æqualia, aream illius corporis explere: docendum iam erit hoc lib. qua ratione cuiuſcunque corporis area inueſtigetur, hoc eſt, numerus corpuſculorum cubicorum in eo contentorum. Præcipua autem corpora, de quibus acturi ſumus, ſunt Parallelepipeda. Priſmata, Cubi, Pyramides, Fruſta pyramidum, Cylindri, Coni, Fruſta Conorum, ſphæræ, ſphærarum portiones, quinque corpora regularia, videlicet Tetraetrum, Hexaedrum ſiue cubus, Octaedrum, Icoſaedrum, Dodecaedrum, qua omnia lib. 11. ab Euclid. definita ſunt. His adiungemus nonnulla corpora vacua, & alia quædam irregularia.

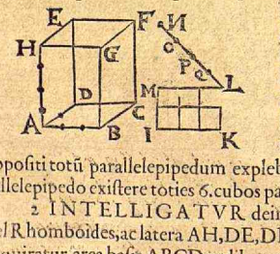
DE AREA PARALLELEPIPEDORVM, PRISmatum, & Cylindorum.

CAPVT I.

[a] PARALLELEPIPEDVM est figura ſolida ſex figuris quadrilateris, quarum, quę ex aduerſo, parallelę ſunt, contenta. Huiuſmodi figuram ſolidã exprimit columna aliqua quadrilatera vniformis craſſitici. Vt figura ſolida ABCDEFGH, in qua tam duo plana oppoſita ABCD, EFGH, quam duo ADEH, BCFG, & duo ABGH, DCFE, parallelogramma ſunt inter ſe parallela, & æqualia, dicitur parallelepipedum. Huius area ita inueſtigbitur. Sit primo propoſitum parallelepipedum rectangulum habens omnia ſex parallelogramma rectangula, ac proinde omnes eius angulos ſolidos rectos: ſitque longitudo baſis AB, palm. 3. latitudo AD, palm. 2. & altitudo AH, palm. 4. Ducatur ergo latitudo 2. in longitudinem 3. vt producatur baſis palmorum 6. quadratorum, vt lib. 4. cap. 1. traditum eſt. Deinde baſis hæc 6. palmorum ducatur in altitudinem 4. Numerus enim productus 24. indicabit in parallelepipedo contineri 24. cubos, quorũ ſingula latera ſingulos palmos complectuntur, quod ita planũ faciemus. Exponatur ſeorſum rectangulũ IKLM, æquale baſi ABCD, intelligaturq; altitudo perpendicularis LN. 4. palm. Si igitur ducatur lat' IM, palm. 2. in IK, palm. 3. producetur area baſis palmorũ quadratorũ 6. ſupra quæ ſi concipiantur extructi 6. cubi æquales, implebunt ij parallelepipedum vſque ad primũ palmum LQ, altitudinis. Si deinde alij 6. cubi æquales prioribus ſuperimponantur, implebitur parallelepipedũ vſq; ad ſecundum palmum altitudinis QP. Et alij 6. cubi æquales parallelepipedũ vſq; ad tertium palmum PO, altitudinis implebunt. Deniq; alij 6. cubi appoſiti totũ parallelepipedum explebunt vſq; ad quartum altitudinis palmum ON. Conſtat ergo in toto parallelepipedo exiſtere toties 6. cubos palmares, quoties palmus in altitudine continetur. hoc eſt, cubos 24.

a 30. defin. vndec.

Area parallelepipedi rectanguli.



2 INTELLIGATVR deinde parallelepipedum ABCE. cuius baſes ABCD, EFGH, ſint Rhombi, vel Rhomboides, ac latera AH, DE, DF, BG, CF, ad baſem ABCD, recta, ita vt altitudo ſit AH. Primum ergo inquiratur area baſis ABCD, vt lib. 4. cap. 3. Num. 1. docuimus. Hæc deinde in altitudinem AH, ducatur. Productus namq; numerus erit parallelepipedi area. Nam ſi fiat rectangulum IL. baſi AC, æquale, & ſupra illud concipiatur

Area parallelepipedi non rectanguli.

piatur parallelepipedum rectangulum, cuius altitudo LN, altitudini AH, ſit æqualis: [b] erit hoc parallelepipedum parallelepipedo ACE, æquale. Cum ergo parallelepipedum, cuius baſis rectangulum IL, & altitudo LN, producatur ex altitudine LN, in baſem IL, vt oſtenſum eſt, producetur quoque parallelepipedum ACE, ex altitudine AH, in baſem AC, baſi IL, æqualem.

b 31. vnd.

SI nullum latus parallelepipedi rectũ eſt ad baſem, demittenda erit ex aliquo angulo ſupremi parallelogrammi ad planum, in quo baſis, linea perpendicularis, pro altitudine parallelepipedi, eaq; diligenter metienda. Si namque area baſis inueſtigetur vel per cap. 1. lib. 4. quando eſt rectangula, vel per cap. 3. eiuſdẽ lib. quando non eſt rectãgula, eaq; in altitudinẽ inuentam ducatur, producetur area appoſiti parallelepipedi. Nam ſi ſupra baſem intelligatur parallelepipedum rectũ eiuſdem altitudinis cum propoſito parallelepipedo, [c] erunt duo hæc parallelepipeda inter ſe æqualia. Conſtat autem ex Num. 1. & 2. parallelepipedum rectum gigni ex ductu baſis in altitudinem.

c 20. vel 30. vndec.

3 CVBVS, qui etiam parallelepipedũ quoddam eſt rectangulũ, eodẽ modo producitur, nimirum ex latere in ſe, & iterũ in productum. Vt ſi latus cubi ſit 10. erit eius area 1000. quod decies decem decies procreent 1000.

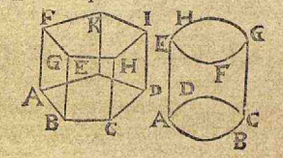
Area cubi

4 [d] PRISMA eſt figura ſolida, quæ planis continetur, quorũ aduerſa duo ſunt & æqualia, & ſimilia, & parallela; alia vero parallelogramma. Vt eſt ſolidum ADF, cuius baſes ſunt pentagona ABCDE, FGHIK, parallela, & æqualia. Hanc figuram ſolidam repreſentat columna aliqua laterata æqualis craſſitudinis, cuius baſes oppoſitæ ſunt æquales, ſimiles, ac parallelæ, ſiue hæ triangula ſint, ſiue quadrangula, ſiue pentagona, &c. Ex quo fit, vt priſma quodcunq; ambiant tot parallelogramma, quot latera, vel anguli in vnoquoq; oppoſitorum planorum reperiuntur. Vt propoſitum priſma ambiunt quinque parallelogramma ABGF, BCHG, CDIH, DEKI, EAFK. Area porro cuiuslibet priſmatis inuenietur, ſi area baſis inquiratur, atq; in altitudinẽ ducatur. Nam ſi concipiatur parallelepipedum eiuſdem altitudinis cum priſmate, habens baſem, rectangulum baſi priſmatis æquale; [e] erit hoc parallelepipedum priſmati æquale. Cum ergo parallelepipedum producatur ex ſua baſe in altitudinẽ, procreabitur quoq, priſma ex multiplicatione ſuæ baſis in altitudinem. Area porro baſis cognoſcetur ex ijs, quæ lib. 4 ſcripſimus, & altitudo priſmatis, ſi eius latera recta non ſint ad baſem, exploranda erit, vt cap. præcedente Num. 2. altitudinem parallelepipedi inueſtigandam eſſe præcepimus.

d 13. defin. vndec.

Area priſmatis tã recti, quã obliqui.

e 2. corol. 7. duodec.



5 CYLINDRVS eſt figura ſolida æqualis craſſitiei, quæ duobus circulis æqualibus, & æquidiſtantibus, & rotunda ſuperficie inter ipſos interiecta continetur, inſtar columnæ cuiuſpiam rotundæ. Vt eſt ſolidum ACH, cuius baſes ſunt duo circuli ABCD, EFGH, paralleli, & æquales. Huius quoq; area procreabitur ex multiplicatione baſis, ex cap. 7. lib. 4. inuentæ in altitudinem, quod in Cylindro recto explicabitur, vt Num. 1. in parallelepipedo recto factum eſt. Nam ſi verbi gratia baſis Cylindri circularis ABCD, continet 10. palmos quadratos, explebunt 10. cubi palmares ſupra illos 10. palmos quadratos extructi, Cylindrum vſq; ad primum palmum, altitudinis: at 20. cubi eundem explebunt vſque ad ſecundum palmum, &c. Quod ſi Cylindrus obliquus ſit, exquirenda erit eius altitudo per lineam perpendicularẽ ex ſuperiore baſe demiſſam ad planũ, in quo inferior baſis exiſtit, atq; in hanc altitudinẽ area baſis ex cap. 7. lib. 4. inuenta multiplicanda. Productus enim numerus dabit aream Cylindri propoſiti, [f] cum æqualis ſit Cylindro recto eandem cum illo baſem, & altitudinem habenti.

f coroll 11. duodec.

DE AREA PYRAMIDVM ET CONORVM.

CAPVT II.

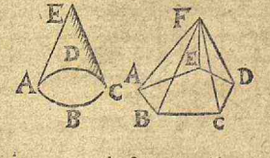
1 [a] PYRAMIS est figura ſolida, quæ planis continetur ab vno plano ad vnum punctum conſtituta. Vt figura ſolida ABCDEF, ad punctum F, conſtituta ſupra baſem pentagonam ABCDE, & quam ambiunt quinque triangula ABF, BCF, CDF, DEF, AEF, totnimirum, quot in baſe ſunt latera, dicitur pyramis.

a defin. 12. vndec.

CONVS autem eſt figura ſolida rotunda ad vnum punctum conſtituta, ſupra baſem circularem, inſtar pyramidis rotundæ, qualis eſt figura ABCDE.

TAM autem pyramidis, quam Coni area producitur ex multiplicatione baſis in tertiam partem altitudinis. Cum enim, vt in præcedenti cap. oſtendimus, ex baſe in totam altitudinem gignatur priſma, vel Cylindrus eandem habens cum pyramide, & cono altitudinem: [b] producetur ex eadem baſe in tertiam partem altitudinis tertia pars illius priſmatis, vel Cylindri, [c] Cum ergo pyramis, ſit tertia pars illius priſmatis, [d] & Conus tertia pars Cylindri, liquet tam pyramidem, quam Conum produci ex baſe in tertiam partem altitudinis. Ex quo fit, ſi baſis ducatur in totam altitudinem, tertiam partem numeri producti, eſſe quoque aream pyramidis, vel Coni. Item eandem produci ex tota altitudine in tertiam partem baſis: [e] quod hac ratione tertia pars priſmatis, vel Coni gignatur.

Area pyramidis, & coni.



b ſchol 14. duodec.

c corol. 7. duodec.

d 10. duod.

Area pyramidis, & coni aliter

e 1. ſchol 7. duodec. & 11. duodec.

2 BASIS porro pyramidis, ſi triangularis eſt, cognoſcetur, vt lib. 4. cap. 2. traditum eſt: ſi multilatera, reperietur, per ea, quæ eodem lib. cap. 3. 4. & 5. ſcripſimus. Baſis autem Coni inueſtigabitur ex cap. 7. eiuſdem lib.

Atverò

Altitudo piramidis, & coni. At vero altitudo tam pyramidis, quam Coni, obtinebitur, si in verrice statuatur planum basi æquidistans, ab eo-que ad planum, in quo basis, perpendicularis demittatur, eaque exquisitè mensuretur. Quamuis enim eadem hæc altitudo indagari, possit Geometrice, si inclinatio vnius lateris ad basem, & magnitudo quoque eiusdem lateris cognoscatur: quia tamen hæc ipsa exploranda sunt materialiter per aliquod instrumentum, præstat ipsam quoque altitudinem statim per instrumentum exquirere, præsertim per instrumentum partium, quod lib. 1. cap. 1. descripsimus: cum inuentio illa Geometrica difficilior sit, procedatq; ex inclinatione, ac latere per instrumentum cognitis.

3 ATQVE hæc, quæ diximus, intelligi volumus tam de pyramidibus, Conisque rectis, quam de obliquis, & scalenis.

DE AREA FRVSTI PYRAMIDIS, ET CONI.

CAPVT III.

1. FRVSTVM pyramidis, & Coni appello id, quod alij pyramidem decurtatam, & Conum decurtatum dicunt. Sit ergo frustum pyramidis ABCDEF, cuius bases ABC, DEF, sint patallelæ, & similes, & cuius area inuestiganda sit. Quod duobus modis fieri potest. Primum cogitetur integra pyramis ABCH, cuius altitudinem HG, perpendicularem ad basem (licet pyramis actu non sit integrata) ita inueniemus. [a] Quoniam est, vt AB, ad AH, ita DE, ad DH, & permutando, vt AB, ad DE, ita AH, ad DH; erit quoque diuidendo, (sumpta AS, æquali ipsi DE) vt SB, ad DE. ita AD, ad DH. [b] Quia vero plana parallela ABC, DEF, secant rectas AH, GH, proportionaliter in I, G; erit quoque vt SB, ad DE, ita GI ad IH. Si igitur fiat, vt SB, differentia inter latera homologa AB, DE, basium ad DE, ita GI, altitudo Frusti pyramidis (quæ cognoscetur per lineam perpendicularem demissam ad basem ex aliquo puncto plani DEF, etiam producti, si opus est,) ad aliud, prodibit recta IH, altitudo nimirum pyramidis DEFH: qua addita ad GI, tota altitudo GH, cognita erit. Quocirca si per caput præcedens inueniatur area tam integræ pyramidis ABCH, quam absciſſæ pyramidis DEFH, & hæc ab illa dematur, reliquum fiet Frustum ABCDEF.

a 4. sexti.

b 17. vnde

Area frusti pyramidis.

Area frusti coni.

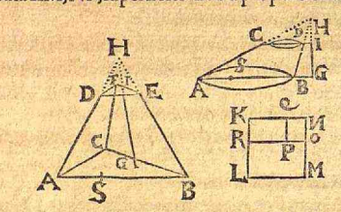
2 NON aliter frustum Coni ABCD, inuestigabitur, vt patet, si integer Conus intelligatur ABH, &c.

3 ALIO modo idem frustum tam Pyramidis, quam Coni cognoscemus, etiamsi neq; pyramis, neq; conus integretur. [c] Fiat quadrata KLMN. NOPQ, basib[us] ABC, DEF, notis æqualia, inueniaturque inter quadrata KM, NP, superficies media proportionalis, qualis est rectangula figura OK, producto latere OP, ad R. [d] Quoniam enim est, vt MN, ad NO, ita KM, ad NR. Item vt KN, ad NQ, ita NR, ad NP, [e] estque MN, ad NO, vt KN, ad NQ: erit quadratum KM, ad rectangulum NR, vt rectangulum NR, ad quadratum NP: ideoque NR, medio loco proportionale est inter quadratum KM, NP. Quamobrem, si radix quadrata basis ABC, notæ, id est, latus KN, quadrati KM, ducatur in radicem quadratam basis DEF, notæ, hoc est, in latus NO, quadrati, NP, producetur area rectanguli NR.

c 14. secundi.

d 1. sexti.

e 7. quinti



IAM vero ducatur GI, altitudo frusti in summam ex quadrato KM, hoc est ex basc ABC, & quadrato NP, siue basc DEF, & superficie NR, media proportionali inter bases, vel dicta quadrata collectam, Productus enim numerus triplus erit frusti pyramidis ABCDEF; ideoque tertia producti pars area erit prædicti frusti. [f] Quoniam enim prisma, quod fit ex GH, altitudine pyramidis in basem ABC, siue quadratum KM, triplum est pyramidis ABCDEFH: erit quoque parallelepipedum factum ex GI, in quadratum KM, vna cum parallelepipedo facto ex IH, in idem quadratum KM, triplum pyramidis eiusdem. [g] Est autem & ablatum parallelepipedum factum ex IH, in basem DEF, hoc est, in quadratum NP, triplum ablatæ pyramidis DEFH. [h] Igitur & reliquum, quod fit ex GI, in quadratum KM, vna cum ijs, quæ fiunt ex IH, in KP, & in RM, triplum erit frusti reliqui ABCDEF.

f 7. duod.

g 7. duod.

h 5. quinti.

4 QVIA vero æquales superficies ABC, KM, & superficies æquales DEF, NP, eandem habent proportionem; erit permutando ABC, ad DEF, vt KM, ad NP. [i] erit que latus AB, ad latus DE, vt latus KN, ad latus NQ, & diuidendo (subtracta recta AS, æquali ipsi DE, ex AB,) SB, ad DE, vt KQ, ad QN. Est autem, vt Num. 1. demonstrauimus, vt SB, ad DE, ita GI, ad IH. Igitur erit etiam vt KQ, ad QN, ideoq; vt MO, ad ON, ita GI, ad IH. [k] Sed vt KQ, ad QN, ita est KP, ad PN, Et vt MO, ad ON, ita MR, ad RN. Igitur erit quoque, vt GI, ad HI, ita tam KP, ad PN, quam MR, ad RN. Contractis ergo hisce magnitudinibus ad numeros, [l] erit numerus factus ex GI, primo in PN, quartum, æqualis ei, qui fit ex IH secundo in KP, tertium. Item numerus factus ex GI, primo in RN, quartum æqualis ei, qui fit ex IH, secundo in MR, tertium: [m] Ac propterea duo, qui fiunt ex GI, in PN, & ex GI, in RN, æquales erunt duobus, qui fiunt ex IH, in KP, & IH, in MR. Adiecto ergo communi, qui fit ex GI, in KM, erunt tres, qui fiunt ex GI, in KM, & in PN, & in RN, æquales tribus, qui fiunt ex GI, in KM, & ex IH, in KP, & in MR. Sed hi posteriores tres tripli sunt frusti pyramidis ABCDEF, vt ad finem Num. 3. demonstrauimus. Ergo & priores tres, qui nimirum fiunt ex GI, altitudini frusti in KM, & in PN, & in RN, hoc est in summam ex KM, basi ABC, æquali, & ex PN, basi DEF, æquali, & ex RN, media proportionali inter bases collectam, tripli erunt eiusdem frusti: ideoque tertia eorum pars æqualis erit areæ frusti. quod erat demonstrandum.

i 22. sexti.

k 1. sexti.

l 19. sep.

m 2. pronunc.

5 EADEM ratione frustum Coni ABDC, producetur ex altitudine GI, in summam ex basc AB, & basc CD, & superficie media proportionali inter bases collectam vt constat, si concipiantur quadrata KM, NP, basibus æqualia, & proinde superficies RN, media proportionalis inter bases, &c.

SCHO-

SCHOLIVM.

Soliditas muri.

1 SI ea, quæ hactenus dicta sunt, rebus materialibus accommodentur, licebit nobis per cap. 1. metiri murum quemcunque vniformis crassitiei, tamquam parallelepipedum quoddam, cuius longitudo eadem sit, quæ longitudo muri: latitudo vero eadem quæ muri latitudo: altitudo denique, siue profunditas eadem, quæ altitudo muri.

EADEMQVE ratione metiemur frustum alicuius marmoris, vel alterius saxi, tanquam prisma quodpiam, si vniformem habeat crassitiem, lateraque ad bases sint recta.

Soliditas alicuius frusti marmoris.

NON aliter saccum tritici, tanquam Cylindrum quendam, dimetiemur, plus minus. Nam cum saccus non sit accuratus Cylindrus, vera eius mensura haberi non potest.

Capacitas facci tritici.

2 RVRSVS per caput 2. aceruum tritici, tamquam conum aliquem, eodem modo, plus minus, metiri licebit. Itaq; si cognoscemus, quot grana, vel libræ tritici in cubo, verbi gratia, vnius palmi contineantur, multiplicenturq; grana, vel libræ vnius cubi in numerum cuborum, qui in toto sacco, vel aceruo reperti sunt, producetur numerus granorum, vel librarum in eodem sacco, vel aceruo existentium.

Capacitas acerui tritici.

3 SIC etiam, si detur vas aliquod excauatum in modum parallelepipedi, aut Cylindri, sciemus eius capacitatem, si eius parallelepipedum interius aut Cylindrum, non secus, ac si solida figura esset, metiemur: ita vt si cognitum fuerit, quot mensuræ aquæ alterius ve liquoris in cubo, verbi gratia, vnius palmi contineantur, ignorari non possit, quot mensuræ in cubis in toto vase contentis comprehendantur, si nimirum mensuræ vnius cubi ducantur in numerum cuborum, quos in vase comprehendi inuenimus.

Capacitas vasis excauati.

Soliditas vasis excauati.

4 DENIQVE si desideretur soliditas alicuius vasis, quod tam interius, quam exterius formam habeat parallelepipedi, seu prismatis, Cylindriue, metienda erit vtraq; figura tum interior, tum exterior, Si namque illa ex hac detrahetur, reliqua fiet soliditas vasis excauati.

DE AREA QVINQVE CORporum regularium.

CAPVT IV.

1 QVINQVE tantum sunt corpora regularia, Tetraedrum, Hexaedrum, Octaedrum, Dodecaedrum, & Icosaedrum, vt in scholio propos. 18. lib. 13. Euclid. demonstrauimus: quæ sic ab Euclide lib. 11. definiuntur.

TETRAEDRVM est figura solida sub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contenta, qualem figuram exprimit pyramis triangularis æquilatera.

HEXAEDRVM est figura solida sub sex quadratis æqualibus contenta, qualem refert cubus, seu parallelepipedum basium quadratarum, in quo omnes tres dimensiones sunt æquales.

OCTAEDRVM est figura solida sub octo triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

DODECAEDRVM est figura solida sub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

ICOSAEDRVM est figura solida sub 20. triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

Area cubi, & Tetraedri.

2 CVBI siue Hexaedri aream gigni ex multiplicatione lateris in se, & iterum in productum, cap. 1. Num. 3. docuimus. Item pyramidem, seu Tetraedrum produci ex eius altitudine (quæ mechanice cognoscetur, vt cap. 2. Num. 2. traditum est) in tertiam basis partem: vel ex eius basc in tertiam partem altitudinis, declarauimus ca. 2. Num. 1. Quod si Geometrice inuenire lubeat altitudinem Tetraedri, ita faciemus. Quoniam quadratum lateris Tetraedri ad quadratum diametri sphæræ Tetraedrum ambientis est, vt 2. ad 3. [a] quod diameter sit potentia sesquialtera lateris pyramidis: Si fiat, vt 2. ad 3. ita quadratum lateris Tetraedri ad aliud, prodibit quadratum diametri sphæræ, eiusque quadrati quadrata radix diametrum ipsam exhibebit, [b] cuius duæ tertiæ partes altitudinem Tetraedri offerent.

Altitudo Tetraedri.

a 13. tertydec.

b 2. coroll. 13. tertijde.

3 [c] QVONIAM vero Octaedrum diuiditur in duas pyramides similes, & æquales, quarum basis communis est quadratum à latere descriptum: si vtriusque pyramidis inuestigetur area, ignorari non poterit area Octaedri, cum ex areis illarum pyramidum conflata sit. Producetur autem area illarum duarum pyramidum, si quadratum lateris Octaedri ducatur in diametrum Octaedri, & producti numeri tertia pars capiatur, quia productus ille numerus ex quadrato lateris Octaedri in eiusdem diametrum, est parallelepipedum duarum illarum pyramidum triplum: [d] propterea quod semissis illius parallelepipedi eandem habens basem, & altitudinem, cum vtralibet pyramidum, tripla est vnius pyramidis. Diameter porro Octaedri, quæ à diametro sphæræ, vel quadrati lateris Octaedri non differt, inuenietur, si ex duplo quadrati lateris radix quadrata eruatur; [e] quod tam quadratum ex diametro quadrati descriptum duplum sit quadrati lateris, [f] quam quadratum diametri sphæræ quadrati lateris Octaedri. Semissis vero huius diametri, altitudo erit vtriusuis Pyramidis. Quare si hæc altitudo ducatur in tertiam partem quadrati lateris, producetur area vnius pyramidis, id est, semissis Octaedri: ac proinde duplum huius pyramidis aream totius Octaedri indicabit.

c 2. coroll. 14. tertijde.

Area Octaedri.

d coroll. 7. duodec.

Diameter Octaedri.

e schol. 47. primi.

f 14. tertijd.

4 DEINDE quia ductis ex centro Dodecaedri ad omnes eius angulos rectis lineis, Dodecaedrum in 12. pyramides pentagonas æquales diuiditur; si area vnius pyramidis per cap. 2. inuenta multiplicetur per 12. procreabitur area totius Dodecaedri. Vt autem vnius pyramidis area habeatur, necesse est, & aream basis pentagonæ inuestigare ex latere dato, per ea, quæ libr. 4. capit. 5. scripsimus, & pyramidis altitudinem, vt iam docebo. Ex superiori plano producto demittatur ad planum basis oppositæ linea perpendicularis: Huius enim semissis diligenter inquisita in partibus lateris Dodecaedri, per instrumentum partium lib. 1. cap. 1. constructum, dabit pyramidis altitudinem quæsitam, quemadmodum & tota perpendicularis altitudinem Dodecaedri exhibet. Quam

Area Dodecaedri.

tamen Geometrice ita quoque deprehendemus. [a] Quia cubus in Dodecaedro descriptus eadem sphæra, qua Dodecaedrum, comprehenditur, eiusque latus vnum angulũ Pentagoni Dodecaedri subtendit; ideoq; eadem diameter est sphæræ, Dodecaedri, & cubi: [b] Si recta subtendens angulum pentagoni inuestigetur, habebitur latus cubi. [c] Et quia diameter sphæræ potentia est tripla lateris cubi, si quadratum lateris cubi inuenti triplicetur, habebitur quadratum diametri sphæræ, vel cubi, cuius radix quadrata ipsam diametrum dabit. Cum ergo diameter Dodecaedri, & altitudo eiusdem centra basium oppositarum coniungens se in centro secent bifariam, venabimur semissem huius altitudinis, nimirum altitudinem pyramidis quæsitam, hac ratione. Concipiatur triangulum rectangulum, cuius basis est semidiameter Dodecaedri nota, cum tota diameter proxime cognita sit, latera vero circa angulum rectum, altitudo pyramidis, & semidiameter circuli basem Dodecaedri circumscribentis. Cum ergo semidiameter hæc cognosci possit, ex iis, quæ lib. 4. cap. 5. docuimus, [d] cognoscetur quoque reliquum latus, altitudo videlicet pyramidis, quam quærimus. Porro semidiameter prædicti circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis ita quoque reddetur nota. Quoniam latus pentagoni subtendit in eo circulo gra. 72. & latus Decagoni grad. 36. cognita erunt hæc latera in partibus sinus totius. Si ergo fiat, vt latus pentagoni in partibus sinus totius cognitum ad idem latus notum ex hypotenusi, ita latus Decagoni in iisdem partibus sinus totius cogniti ad aliud, prodibit Decagoni latus in mensura lateris pentagoni, cognitum. [e] Et quia latus pentagoni potest latera Decagoni, & Hexagoni eiusdem circuli, si quadratum lateris Decagoni proxime cogniti detrahatur ex quadrato lateris pentagoni, reliquum fiet quadratum lateris Hexagoni, id est, semidiametri, ideoque eius radix quadrata semidiametrum exhibebit notam.

a 8. quinti.
b 11. triang. rectil.
c 15. tertij dec.
Perpendicularis è centro sphæræ ad basem Dodecaedri
d 3. triang. rectil.
Semidiameter circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis.
e 10. tertij dec.

5 POSTREMO quia ductis ex centro Icosaedri ad omnes eius angulos rectis lineis, Icosaedrum in 20. pyramides triangulares æquales diuiditur; si area vnius pyramidis per cap. 2. inuenta multiplicetur per 20. gignetur totius Icosaedri area ex illis 20. pyramidibus constata. Vt autem vnius pyramidis area obtineatur, inuestiganda primum erit area basis triangularis, ex iis, quæ lib. 4. cap. 2. Num. 4. & 5. scripsimus. Deinde altitudo pyramidis mechanice, hoc pacto. Ex superiori plano producto, hoc est, ex inferiori superficie alicuius plani, quod corporis supremæ basi imponeretur, ad planum basis oppositæ perpendicularis demittatur. Hæc enim accurate dimensa altitudinem Icosaedri dabit, eiusque semissis altitudinem pyramidis, quæ quæritur. Quam Geometrice ita etiam explorabimus. Fiat pentagonum ex 5. lateribus Icosaedri, inuestigeturque eius semidiameter, & latus Decagoni in circulo illud pentagonum circumscribente, in partibus, in quibus latus Icosaedri datum est, hac scilicet ratione. Concipiatur triangulum rectangulum, cuius basis semidiameter dicti circuli, latera vero semissis lateris pentagoni, hoc est, Icosaedri, & perpendicularis è centro ad punctum medium dicti lateris demissa. Ita namque cognoscetur semidiameter; ex iis, quæ lib. 4. cap. 5. Num. 2. tradita sunt. Latus vero Decagoni in eodem circulo descripti reperietur, vt paulo ante circa finem Num. 4. dictum est. [f] Et quia diameter sphæræ, siue Icosaedri potentia est quintupla inuentæ semidiametri; si quadratum semidiametri; inuentæ quintupletur, procreabitur quadratum diametri Icosaedri, cuius radix quadrata diametrum offeret, ideoque & semidiameter Icosaedri nota erit. Vel aliter. [g] Quoniam diameter sphæræ, id est, Icosaedri, componitur ex latere Hexagoni, & duobus lateribus Decagoni in circulo pentagonum ex quinque lateribus Icosaedri compositum circumscribente: erit summa collecta ex semidiametro illius circuli, & duobus lateribus Decagoni, diametro Icosaedri æqualis: ideoque rursus semidiameter Icosaedri nota erit.

f 1. coroll. 16. tertijde.
g 2. cor. 16. tertijdec.

Error Orontij.

HINC patet, Orontium cum illis, qui ipsum sequuntur, decipi, qui putat, ex semisse semidiametri illius circuli, & ex latere Decagoni componi semiaxem Icosaedri, hoc est, axem, vel altitudinem pyramidis, cuius basis triangulum Icosaedri, & vertex centrum sphæræ. Nam vt ex iis constat, quæ proxime scripsimus, eo modo componitur semidiameter sphæræ, vel Icosaedri, quæ maior est prædicto axe. Semidiameter porro circuli prædictum pentagonum circumscribentis reperiri quoque poterit, vt ad finem Numer. 4. diximus, si nimirum quadratum lateris Decagoni ex quadrato lateris dicti pentagoni, quod à latere Icosaedri non differt, tollatur, & reliqui numeri radix quadrata extrahatur: [h] propterea q; latus pentagoni potest latera Decagoni, & Hexagoni eiusdẽ circuli.

Perpendicularis è centro sphæræ ad basem Icosaedri.
h 10. tertijd.
i 3. triang. rectil.

IAM vero cognita semidiametro Icosaedri, inueniemus altitudinem pyramidis, cuius basis est triangulum Icosaedri, & vertex eiusdem centrum, hoc modo. Quoniam diameter Icosaedri, eiusdemq; altitudo se se in centro secant bifariam, concipiatur triangulum rectangulum, cuius basis est semidiameter Icosaedri proxime cognita, latera vero circa angulum rectum, altitudo pyramidis, & semidiameter circuli basem Icosaedri circumscribentis. Cum ergo hæc semidiameter cognosci possit ex iis, quæ lib. 4. cap. 5. docuimus, [i] cognoscetur quoque latus reliquum pyramidis, videlicet altitudo, quæ inquiritur. Semidiameter porro circuli basem triangularem Icosaedri circumscribentis efficietur hoc etiam pacto cognita. [k] Quoniam trianguli æquilateri latus potentia triplum est semidiametri illius circuli; si quadratum lateris Icosaedri diuidatur per 3. erit Quotientis radix quadrata, semidiameter quæsita.

Semidiameter circuli triangulum Icosaedri circumscribentis.
k 12. tertij dec.
Area Tetraedri, cubi, & Octaedri aliter inuenta.

6 EADEM hac arte, quæ in Dodecaedro, & Icosaedro exposita est, areas Tetraedri, cubi, & Octaedri inuestigare licebit, si, lineis ex eorum centris ad omnes angulos ductis, in pyramides æquales distribuantur. Tetraedrum nimirum in 4. pyramides triangulares; cubus in 6. quadrangulares; & Octaedrum in 8. triangulares. Inuenta namque per cap. 2. in quolibet area vnius pyramidis, si ea in numerum basium corporis regularis ducatur, insurget totius corporis area. Vt autem area vnius pyramidis habeatur, inquirenda prius erit altitudo ipsius, vt dicta in tertiam basis partẽ pyramidis aream producat. Altitudo ergo hæc in Tetraedro sic reperiatur. [l] Quoniam diameter sphæræ Tetraedrum ambientis potentia est sesquialtera lateris Tetraedri: si Fiat, vt 2. ad 3. ita quadratum lateris Tetraedri dati ad aliud, prodibit quadratum diametri sphæræ, cuius radix quadrata ipsam diametrum ostendet. [m] Huius autem diametri sexta pars, altitudo erit pyramidis quæsita, recta videlicet perpendicularis è centro sphæræ in basem Tetraedri demissa.

l 13. tertijd.
m 2. cor. 13. tertijde.
Perpendicularis è centro sphæræ ad basem Tetraedri, cubi & Octaedri.
n 13. tertij dec.

IN cubo vero dicta altitudo semissi lateris cubi æqualis est, quod perpendicularis è centro sphæræ in basem cubi demissa æqualis sit semissi lateris cubi, vt liquet.

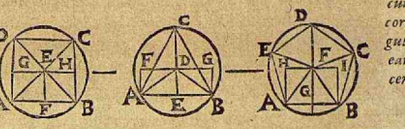
IN Octaedro denique eadem altitudo sic deprehendetur. [n] Quoniam diameter sphæræ est potentia dupla lateris Octaedri: si fiat, vt 1. ad 2. ita quadratum lateris Octaedri dati ad aliud, procreabitur quadratum diametri sphæræ, vel Octaedri. Huius ergo radix quadrata dabit diametrum, ideoque semidiameter non ignorabitur,

Hinc

Hinc altitudo pyramidis quæsita, hoc est, perpendicularis è centro sphæræ in basem Octaedri demissa, elicietur ea ratione, quam in Icosaedro ad finem Num. 5. explicauimus.

In quotriangula diuidantur omnes bases cuiusuis corporis regularis ex earum centris.

7 NON videtur autem omittenda alia ratio dimetiendi omnia quinque corpora regularia, quæ quidem in lib. 14. Euclid. demonstrata est, & est eiusmodi. Primum quæratur superficies conuexa cuiusque corporis, ex eius latere cognito, etiamsi nullius basis area inuestigetur: hoc videlicet pacto. Quoniam quælibet basis cuiusuis corporis diuiditur per rectas ex centro basis ad omnes angulos ductas in tot triangula æqualia, quot anguli, vel latera in base continentur: si ducatur hic numerus triangulorum in numerum basium corpus regulare, quod propositum est, ambientium, habebitur numerus omnium huiusmodi triangulorum in tota superficie conuexa contentorum, Vt quia basis quadrata cubi A B C D, diuisa est in quatuor triangula ex centro E, continebuntur 24. eiusmodi triangula in 6. basibus. Item quia basis triangularis Tetraedri, Octaedri, & Icosaedri ABC, ex centro D, distributa est in 3. triangula, existent in 4. basibus Tetraedri 12 eiusmodi triangula, & 24. in 8. basibus Octaedri, & 60. in 20. basibus Icosaedri. Denique quia basis pentagona Dodecaedri A B C D E, resoluta est ex centro F, in 5. triangula, complectentur 12. bases Dodecaedri 60. eiusmodi triangula.

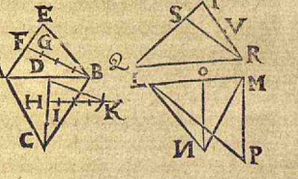


DEINDE quia rectangulum contentum sub perpendiculari è centro basis in latus demissa, & sub vno latere, æquale est duobus eiusmodi triangulis, [a] propterea quod vnius duplum est: erit in cubo rectangulum illud duodecies sumptum toti superficiei cubi æquale: In Tetraedro vero sexies sumptum totam Tetraedri superficiem conficiet: In Octaedro deinde duodecies acceptum toti superficiei Octaedri adæquabitur: At in Dodecaedro, & Icosaedro tricies sumptum superficiei toti tam Dodecaedri, quam Icosaedri æquale erit. Dicta autem perpendicularis EF, in base cubi æqualis est semissi lateris cubi AB. [b] Quoniam enim perpendicularis EF, secat latus AB, bifariam, [c] estque ipsi AF, æqualis, quod anguli FAE, FEA, semirecti sint; constat EF, semissi lateris cubi esse æqualem. Perpendicularis autẽ DE, in base Tetraedri, Octaedri, & Icosaedri, [d] semissis est semidiametri CD. [e] Cum ergo latus AC, sit potentia triplum semidiametri CD: Si fiat, vt 3. ad 1. in quadratum lateris dati AC, ad aliud, prodibit quadratum semidiametri CD, cuius radix quadrata ipsam CD, indicabit, eiusque semissis perpendicularem DE, exhibebit. Perpendicularis denique FG, in base Dodecaedri [f] semissis est summæ ex semidiametro AF, & latere decagoni circuli ABD, collectæ, quod latus decagoni cognoscetur, vt ad finem Num. 4. traditum est.

a 4. 1. primi. *Superficies regularium corporũ & perpendiculares basium.*
b *schol. 26. primi.*
c 6. primi.
d 2. coroll. 12. tertijde.
e 12. tertij dec.
f 1. quarti dec.

g QVIA vero solidum, quod fit ex perpendiculari è centro cuiuscumque corporis regularis ad aliquam eius basem ducta in tertiam partem superficiei ipsius corporis, ipsi corpori æquale est; si inuestigetur superficies conuexa dati corporis regularis, vt proxime docuimus, atque in tertiam eius partem ducatur altitudo vnius pyramidum, in quas corpus ipsum per rectas è centro ipsius ductas diuiditur, (quæ altitudo reperietur, vt supra tradidimus) hoc est, perpendicularis è centro corporis in eius basem demissa, procreabitur area, siue soliditas ipsius corporis. Quæ etiam obtinebitur, si dicta altitudo ducatur in totam superficiem conuexam, & producti tertia pars capiatur.

g *schol. 20. quartidec. Area corporum regularium aliter inuenta.*



8 ITAQVE vt vides, tota difficultas in corporibus regularibus dimetiendis consistit ferme tota in altitudine pyramidis basem habentis eandem cum corpore, verticem autem in centro sphæræ, exquirenda: cuius quidem inuentio Geometrica per numeros molestissima est, propter radices surdas, & numeros fractos quorum numeratores, denominatoresque nimis magni sunt, adeo vt operæ pretium videatur esse eandem mechanice explorare, vt ad initium Num. 2. 4. & 5. diximus, præsertim si exquisita diligentia in ea per instrumentum partium dimetienda adhibeatur. Sed quia nõ semper in promptu habemus corpora regularia, vt mechanice eam altitudinem consequi possimus, libet rationem quandam nouam, eamque facillimam hic præscribere, qua sine molestia illa numerorum, eadem illa altitudo per lineas inueniatur, etiamsi corpus regulare non adsit, sed solum eius latus datum sit, ac cognitum. Sit ergo primo datum latus Tetraedri AB, quotcunque palmorum, construaturq; triangulum æquilaterum ABC, pro base Tetraedri: Diuiso autem latere AB, bifariam in D, iungatur recta CD, [h] quæ ad AB, perpendicularis erit Constructo quoq; Isoscele ABE, cuius vtrumq; latus rectæ CD, æquale sit, demittatur ad AE, perpendicularis BF, cuius quarta pars sit FG. Dico FG, altitudinem esse vnius pyramidis, hoc est, æqualem esse perpendiculari ex centro sphæræ Tetraedro circumscriptæ ad vnam basem deducte. Quoniam enim, vt ad finem Euclidis, ex Hypsicle demonstrauimus, E, angulus est inclinationis vnius basis Tetraedri ad alteram, est que EB, perpendiculari CD, æqualis: si triangulum BEF, concipiatur circa EF, moueri, donec rectũ sit ad basem Tetraedri, cadet punctum B, in verticem Tetraedri; ac proinde perpendicularis BF, altitudo erit Tetraedri. [i] Et quia altitudo Tetraedri duas partes tertias diametri sphæræ continet: si semidiameter ponatur 6. erit altitudo BF, 4. & semidiameter 3. [k] Cum ergo altitudo vnius pyramidis sit tertia pars semidiametri, BG, semidiameter, & GF, altitudo vnius pyramidis. Quam etiam inueniemus, licet Isosceles AEB, non extruatur, hoc modo. Sumpta DH, tertia parte perpendicularis CD, excitetur ad CD, perpendicularis HK, quæ ex D, ad interuallum CD, secetur in K. Dico HI, quartam partem ipsius HK, esse altitudinem vnius pyramidis. Erecto n. triangulo DHK, supra basem Tetraedri ABC, cadet punctum K, in verticem Tetraedri, quod DK, ducta æqualis sit perpendiculari ex medio latere ad angulum basis oppositum ductæ. Ergo vt prius, HK, altitudo erit Tetraedri, & HI, perpendicularis ex centro sphæræ in H, centrum basis cadens. [l] Nam DH, tertia pars perpendicularis CD, in centrum trianguli cadit.

h *schol. 26. primi. Altitudo pyramidis Tetraedri.*
i 2. coro. 13. tertijdec.
k 2. cor. 13. tertijdec.
l 2. coro. 13. tertijdec.

SIT deinde datum latus Octaedri LM, supra quod construatur triangulum æquilaterum LMN, pro base Octaedri. Diuiso autem latere LM, bifariam in O, iungatur recta NO, [m] quæ ad LM, erit perpendicularis. Con-

m *schol. 26. primi.*

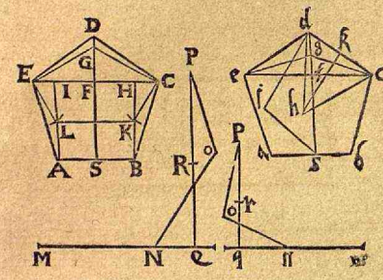
structo iam Isosceles QRS, supra basem QR, æqualem diametro sphæræ, vel quadrati ex latere Octaedri descripti, (quæ habebitur, si educatur perpendicularis MP, lateri LM, æqualis. Iuncta enim recta LP, diameter erit illius quadrati, vel sphæræ) vtrumq; laterum QS, RS, æquale habens perpendiculari NO; ducatur ex R, ad QS, perpendicularis RT, quæ bifariam secetur in V. Dico TV, esse altitudinem pyramidis quæsitam, hoc est, æqualem esse perpendiculari ex centro sphæræ ad vnam basem Octaedri cadenti. Quoniam enim, vt ad finem Euclidis ex Hypsicle demonstrauimus, angulus QSR, inclinationem vnius basis ad alteram indicat, estque obtusus, erit perpendicularis RT, cadens ad partes anguli acuti RST, æqualis altitudini Octaedri, id est, perpendiculari basium Octaedri oppositarum centra connectenti, vt ex Octaedro materiali perspicuum est: Ac propterea eius semissis TV, altitudo erit pyramidis quæsita, quod altitudo Octaedri bifariam secetur in centro.

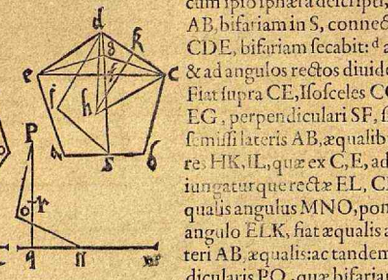
Altitudo pyramidis Octaedri.

SI detur latus cubi, siue hexaedri, erit eius semissis altitudo pyramidis quæsita: propterea quod cubi altitudo eiusdem lateri sit æqualis.

Altitudo pyramidis cubi.

DATVM iam sit AB, latus Dodecaedri, supra quod extruatur pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDE, pro base Dodecaedri. Iuncta autem recta CE, [a] quæ latus erit cubi in Dodecaedro, & in eadem cum ipso sphæra descripti, [b] atque lateri AB, parallela: secetur AB, bifariam in S, connectaturque recta SD, [c] quæ angulum CDE, bifariam secabit: [d] ac proinde & rectam CE, bifariam, & ad angulos rectos diuidet: ideoque & anguli ad S, recti erũt. Fiat supra CE, Isosceles CGE, cuius vtrumque laterum CG, EG, perpendiculari SF, sit æquale. Sumptis quoque FH, FI, semissi lateris AB, æqualibus, erigantur ad EC, perpendiculares HK, IL, quæ ex C, E, ad interuallum FD, secentur in KL, iungaturque rectæ EL, CK. His paratis, fiat angulo CGE, æqualis angulus MNO, ponaturque NO, ipsi SD, æqualis: Item angulo ELK, fiat æqualis angulus NOP, ponaturque OP, lateri AB, æqualis: ac tandem demittatur ex P, ad MN, perpendicularis PQ, quæ bifariam secetur in R. Dico RQ, altitudinem esse pyramidis vnius in Dodecaedro. Nam quia, vt ad finem Euclidis ex Hypsicle demonstrauimus, angulus CGE, inclinationem vnius basis ad alteram metitur, si MN, concipiatur esse perpendicularis, quæ in base infima ex angulo pentagoni ad medium punctum lateris oppositi ducitur, respondebit NO, perpendiculari, quæ in pẽtagono ad illam basem inclinato ex eodem medio puncto ad oppositum angulum ducitur: propterea quod angulum MNO, angulo inclinationis CGE, & rectam NO, perpendicularis SD, æqualem posuimus. Recta autem OP, referet latus Dodecaedri inter angulum dicti pentagoni inclinati, & angulum supremæ basis positum propterea quod recta OP, posita est æqualis lateri Dodecaedri, & angulus NOP, angulo ELK, qui quidem æqualis est illi, quem dictum latus efficit cum perpendiculari ex angulo supradicti pentagoni inclinati ad basem in medium punctum lateris oppositi ductæ, vt constat, si vna basis cubi Dodecaedro inscripti intelligatur dicto latere Dodecaedri substrata, ita vt duo latera basis cubi subtendant duos angulos duorum pentagonorum, quorũ vnum ad basem Dodecaedri inclinatum est, alterum vero supremum in Dodecaedro. Erit enim tunc recta CE, æqualis rectæ duo puncta media duorum laterum dictorum basis cubi connectenti. Rectæ autem EL, CK, respondebunt rectis ex eisdem punctis mediis laterum illorum basis cubi, ad angulos prædictorum pentagonorum ductis: Ac proinde angulus ELK, æqualis erit ei, quem perpendicularis in pentagono inclinato cum prædicto latere Dodecaedri efficit. Ex quo fit punctum P, in plano supremæ basis existere, atque idcirco perpendicularem PQ, ad planum basis per MN, ductum demissam, æqualem esse altitudini Dodecaedri; eiusque semissem RQ, altitudini vnius pyramidis pentagonæ esse æqualem. Quæ omnia facile intelligentur, si Dodecaedrum aliquod materiale adhibeatur.





a 2. coro 17. tertijd.
b coroll. 8. quintidec.
c schol. 12. quarti.
d 4. primi.

DENIQVE datum sit Icosaedri latus a b, supra quod extruatur pentagonum æquilaterum, & æquiangulum abcde, pro base pyramidis ex quinque basibus Icosaedri conflatæ. Iuncta autem recta c e, secetur latus a b, in s, bifariam, & recta ducatur sd, quæ vt in Dodecaedro ostendimus proxime, perpendicularis erit ad vtramque a b, ce. Fiat supra latus Icosaedri cd, triangulum æquilaterum cdh, pro base vna Icosaedri; & diuiso latere cd, bifariam in k, iungatur recta hk, [e] quæ ad cd, erit perpendicularis. Præterea supra ce, fiat Isosceles cge, cuius vtrumq; laterum cg, eg, perpendiculari hk, sit æquale. Post hæc supra sd, constituatur triangulum sdl, cuius latus sl, perpendiculari hk, & latus dl, lateri Icosaedri ab, sit æquale. Denique angulo cge, fiat æqualis angulus mno, & recta no, perpendiculari hk, æqualis: Item angulus nop, angulo dls, rectaque op, lateri Icosaedri a b, æqualis. Dico perpendicularem pq, ad mn, demissam, esse altitudinem Icosaedri eiusque semissem r q, altitudinem vnius pyramidis in Icosaedro. Quia enim, vt ex Hypsicle ad finem Euclidis demonstrauimus, angulus cge, metitur inclinationem vnius basis ad alteram, si mn, concipiatur esse perpendicularis, quæ in base infima Icosaedri ex angulo trianguli ad medium punctum lateris oppositi ducitur, respondebit no, perpendiculari, quæ in triangulo ad illam basem inclinato ex eodem medio puncto ad angulum oppositum ducitur: propterea quod angulum mno, angulo inclinationis cge, & rectam no, perpendiculari hk, æqualem fecimus: Recta vero op, referet latus Icosaedri inter angulum dicti trianguli inclinati, & angulum supremæ basis positum; propterea quod recta op, posita est æqualis lateri Icosaedri, & angulus nop, angulo dls: [f] qui quidem æqualis est illi, quem dictum latus efficit cum perpendiculari ex angulo supradicti trianguli inclinati ad basem, in medium punctum lateris oppositi ducitur. Est enim recta ds, æqualis perpendiculari ex angulo pentagoni ad latus oppositum ductæ, & lateri sl, dl, æqualia perpendiculari in triangulo inclinato, & lateri Icosaedri inter angulum supremum pentagoni prædicti, & angulum trianguli inclinati. Ex quo fit, punctum p, in plano supremæ basis existere: ac proinde perpendicularem pq, ad planum basis per mn, ductum demissam, æqualem esse altitudini Icosaedri, eiusque semissem rq, altitudini vnius pyramidis trigoni esse æqualem. Quæ omnia facile percipientur, si adhibeatur materiale aliquod Icosaedrum. Inuenta porro hoc modo altitudine pyramidis, cognoscenda eadem summa diligentia erit, beneficio instrumenti partium, in partibus lateris corporis regularis propositi.

e schol. 26. primi.

Altitudo pyramidis Icosaedri.

f 8. primi.

DE

DE AREA SPHÆRÆ, INVENTIONEQVE superficiei conuexæ eiusdem sphæræ.

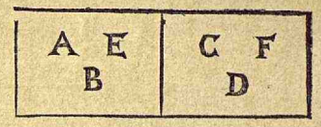
CAPVT V.

VT sphæræ aream, soliditatemue pluribus possimus viis assequi, demonstranda prius erunt nonnulla ad eam rem valde necessaria, atque vtilia, quod sequentibus 7. propositionibus efficiemus.

PROPOSITIO I.

QVAM proportionem habent duæ quælibet partes aliquotæ magnitudinis cuiuscunque, eandem habent duæ similes partes alterius cuiusuis magnitudinis.

SIT enim A, eadem pars magnitudinis B, quæ C, magnitudinis D: Item E, eadem pars magnitudinis B, quæ F, magnitudinis D. Dico esse, vt A, ad E, ita C, ad F. Quoniam enim est, vt A, ad B, ita C, ad D, quod vtrobiq; eadem proportio submultiplex posita sit. Item vt B, ad E, ita D, ad F; quod vtrobique posita sit eadem proportio multiplex: erit ex æquo, vt A, ad E, ita C, ad F, quod est propositum.



IDEM sequitur, si A, & C, sint ipsarum B, D, eædem partes plures non facientes vnam: Item, si E, & F, earundem B, D, sint eædẽ partes plures non faciẽtes vnam, vt $\frac{2}{5}$. vel $\frac{2}{7}$. &c. Nam si verbi gratia A, C, sint $\frac{2}{5}$. ipsarũ, B, D, erit $\frac{1}{5}$. ipsius B, ad B, vt $\frac{1}{3}$. ipsius D, ad D. [a] Igitur erunt quoque, vt $\frac{2}{5}$. ipsius B, hoc est, ipsa A, ad B, ita $\frac{2}{3}$. ipsius D, hoc est, ipsa C, ad D. Rursus si verbi gratia E, F, sint $\frac{2}{3}$. ipsarum B, D, erit, vt B, ad $\frac{1}{3}$. eiusdem B, ita D, ad $\frac{1}{3}$. eiusdem D. [b] Ac proinde vt B, ad $\frac{2}{3}$. id est, ad E, ita D, ad $\frac{2}{3}$. i.e. ad F, Quare, vt prius, erit ex æquo, vt A, ad E, ita C, ad F.

a schol. 12. quinti.
b schol. 22. quinti.

COROLLARIVM.

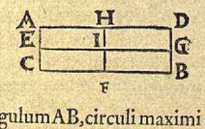
SEQVITVR hinc, ita esse $\frac{1}{4}$. cuiusuis magnitudinis ad $\frac{1}{3}$. eiusdem, vt est $\frac{1}{4}$. cuiusuis alterius magnitudinis ad $\frac{2}{3}$. eiusdem. Quoniam enim, vt ostendimus, ita est $\frac{1}{4}$. prioris magnitudinis ad $\frac{1}{3}$. eiusdem, vt $\frac{1}{4}$. posterioris ad $\frac{1}{3}$. eiusdem. [c] Vt autem $\frac{1}{4}$. posterioris ad $\frac{1}{3}$. ita sunt $\frac{3}{4}$. ad $\frac{3}{3}$. hoc est, $\frac{1}{4}$. ad $\frac{1}{3}$. Igitur erit vt $\frac{1}{4}$. prioris magnitudinis ad $\frac{1}{3}$. eiusdem, ita $\frac{1}{4}$. posterioris magnitudinis ad $\frac{1}{3}$. eiusdem.

c 1. quint.

PROPOSITIO II.

RECTANGVLVM sub diametro, & circumferentia maximi circuli in sphæra comprehensum, quadruplum est circuli maximi, & superficiei conuexæ eiusdem sphæræ æquale.

SIT rectangulum AB, comprehensum sub diametro AC, & circumferentia CB, maximi in sphera circuli. Dico rectangulum AB, quadruplum esse circuli maximi in sphæra, & superficiei conuexæ eiusdẽ sphæræ æquale. Sectis enim omnibus lateribus bifariam in E, F, G, H, iunctisque rectis EG, FH, secantibus sese in I, diuisum erit totum rectangulum in quatuor æqualia AI, CI, BI, DI, [d] quod rectæ EG, FH, rectis AD, AC, parallelæ sint. Ac proinde rectangulum AB, rectanguli CI, quadruplum erit. Est autem rectangulum CI, contentum sub CE, semidiametro, & semicircumferentia CF, circulo maximo, cuius nimirum diameter AC, æquale, vt lib. 4. cap. 7. Num 1. demonstratum est. Igitur rectangulum AB, circuli maximi quadruplum est. Et quia eiusdem circuli maximi quadrupla est superficies conuexa sphæræ, per propos. 31. lib. 1. Archimedis de sphæra, & cylindro: [e] æquale erit rectangulum AB, conuexæ superficiei. Quod erat demonstrandum.



d 33. primi.

e 9. quinti.

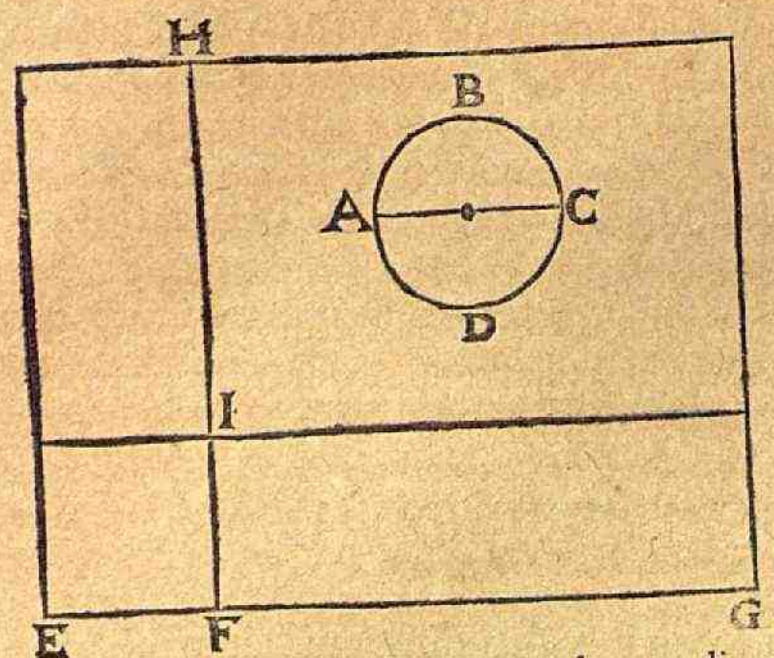
COROLLARIVM.

EX demonstratione liquet, rectangulum sub diametro cuiusuis circuli, (etiamsi non sit maximus in sphæra,) & circumferentia eiusdem, quadruplum esse ipsius circuli. Eadem enim semper demonstratio adhibebitur.

PROPOSITIO III.

EADEM est proportio quadrati circumferentiæ circuli maximi in sphæra ad superficiẽ sphæræ, quæ circumferentiæ circuli maximi ad diametrum. Idem eadem est proportio quadrati diametri maximi circuli in sphæra ad superficiem sphæræ, quæ diametri ad circumferentiam eiusdem circuli maximi.

SIT circulus sphæræ maximus ABCD, eiusque diameter AC. Dico ita esse quadratum ex circumferentia ABCD, descriptum ad superficiem sphæræ, cuius diameter AC, vt est circumferentia ABCD, ad diametrum



AC.Item ita eſſe quadratum diametri AC,circuli maximi in ſphæra,ad ſuperficiem ſphæræ,vt eſt diameter AC, ad circũferentiam ABCD. Sit enim EF,diametro AC, & recta FG, circumferentiæ ABCD, æqualis, & ſuper FG, conſtruatur quadratum GH, capiaturque FI, ipſi EF, æqualis; eritque EI,quadratum diametri EF,vel AC. Perfecta autem figura, vt vides, erit tam rectangulum GI, ſub diametro FI, maximi circuli, & circumferentia FG, quam rectangulum EH, ſub diametro E, F, eiuſdem circuli maximi, & circumferentia FH, æquale per præcedentem, ſuperficiei conuexæ ſphæræ.[a] Cum ergo ſit, vt GH, quadratum ex circumferentia FG,deſcriptum ad rectangulum EH,ſuperficiei conuexę ſphæræ æquale,ita GF, circumferentia ad EF, diametrum circuli maximi,conſtat primum.

a 1. ſexti.

b 1. ſexti. [b] ITEM cum ſit.vt EI,quadratum diametri EF, maximi circuli, ad IG, rectangulum ſuperficiei conuexæ ſphæræ æquale, ita EF, diameter maximi circuli ad FG, circumferentiam, patet id, quod ſecundo loco proponitur.

COROLLARIVM.

Area circuli. HINC manifeſtum eſt(id quod lib.4.cap.7. Num. 1. etiam demonſtrauimus) circuli aream gigni tam ex $\frac{1}{4}$.diametri in totam circumferentiam, quam ex $\frac{1}{4}$ circumferentię in totam diametrum.Cum enim circulus ABCD, ſit quarta pars rectanguli GI, quod hoc illius quadruplum ſit oſtenſum propoſ.2. [c] Contineatur autem quarta pars rectanguli GI,tam ſub $\frac{1}{4}$.diametri FI,& circumferentia FG,quam ſub $\frac{1}{4}$.circumferentiæ FG,& diametro FI;liquido conſtat, quod proponitur. *c 1. ſexti.*

PROPOSITIO IV.

QVADRATVM circumferentiæ circuli maximi in ſphæra ad ſuperficiem ſphæræ conuexam maiorem proportionem habet, quam 223. ad 71. minorem vero, quam 22. ad 7.

CVM enim per præcedentem ſit, vt quadratum circumferentiæ maximi circuli ad ſuperficiem conuexam ſphæræ, ita circumferentia eiuſdem circuli ad diametrum:[a] ſit autem maior proportio circumferentiæ ad diametrum, quam $3\frac{10}{71}$.ad 1.hoc eſt, quam 223. ad 71.minor vero, quam $3\frac{1}{7}$.ad 1.hoc eſt, quam 22.ad 7.liquet id, quod propoſitum eſt. *a 2. de Dimenſ. circuli lib. 4.*

PROPOSITIO V.

QVADRATVM diametri circuli in ſphæra maximi ad ſuperficiem ſphæræ conuexam, maiorem proportionem habet quam 7.ad 22.minorem vero, quam 71.ad 223.

CVM enim per propoſ.3.ſit, vt quadratum diametri ad ſuperficiem ſphæræ,ita diameter ad circumferentiam:[a] Sit autem maior proportio diametri ad circumferentiam, quam 7.ad 22.([b] quod minor ſit proportio circumferentiæ ad diametrum, quam 22. ad 7.) minor vero, quam 71.ad 223. (quod maior ſit proportio circumferentiæ ad diametrum, quam 223.ad 71.patet verum eſſe, quod proponitur. *a 26. quin. b 2. de Dimenſ. circuli lib. 4.*

PROPOSITIO VI.

PROPORTIO cubi ex circumferentia maximi in ſphæra circuli deſcripti, ad ſphæram maior eſt, quam 298374. ad 5041. minor autem, quam 2904. ad 49.

CVM enim ſit per propoſ.1.cap.7.lib.4.vt circumferentia maximi circuli in quauis ſphæra, ad circumferentiam maximi circuli in quauis alia ſphæra, ita diameter ad diametrum:[a] habeat autem cubus circumferentiæ prioris ſphæræ ad cubum circumferentiæ ſphæræ poſterioris, proportionem triplicatam circumferentiæ ad circumferentiam;[b] Item ſphæra prior ad poſteriorem ſphæram, proportionem triplicatam diametri ad diametrũ: erit vt cubus ex circumferentia prioris ſphæræ deſcriptus ad cubum ex poſterioris ſphæræ circumferentia deſcriptum, ita ſphæra prior ad poſteriorem ſphæram; Et permutando, vt cubus circumferentiæ ſphæræ prioris ad priorem ſphæram, ita cubus circumferentiæ poſterioris ſphæræ ad ſphæram poſteriorem. *a 33. vnde. b 18. duod.*

IAM vero, ſi circumferentia circuli maximi alicuius ſphæræ ſit 1.diuidaturque per $3\frac{10}{71}$.producetur diameter $\frac{71}{223}$.maior quam vera, ex coroll.propoſ.2.de dimenſione circuli. Si igitur eius ſemiſſis $\frac{71}{446}$. in $\frac{1}{2}$.ſemiſſem circumferentiæ ducatur, procreabitur area circuli maximi $\frac{71}{892}$. maior, quam vera: quæ rurſus ducta in $\frac{2}{3}$.diametri inuentæ(quæ etiam maior eſt, quam vera)nimirum in $\frac{142}{669}$. gignet, vt infra in regula 2. oſtendam, ſoliditatem ſphæræ $\frac{10082}{596748}$.hoc eſt, $\frac{5041}{298374}$.maiorem tamen, quam veram. [c] Maior ergo erit proportio cubi ex circumferentia 1.deſcripti, qui cubus eſt 1.ad ſphæram, quam ad $\frac{5041}{298374}$.Cum ergo ſit 1.ad $\frac{5041}{298374}$.vt 298374.ad 5041.(Quoniam enim ex propoſitione 2. Minutiarum ad finem lib. 9. Euclid. eadem eſt proportio Numeratoris 5041.ad denominatorem 298374. quæ minutiæ $\frac{5041}{298374}$.ad ſuum integrum 1.erit conuertendo, vt 298374.ad 5041.ita 1.ad $\frac{5041}{298374}$.)maior erit proportio cubi ex circumferentia 1.deſcripti, qui cubus eſt 1. ad ſphæram, quam 298374.ad 5041.Cum igitur ita ſe habeat cubus ex circumferentia maximi circuli in ſphæra qualibet deſcriptus ad ſphæram, vt cubus circumferentiæ 1.ad ſuam ſphæram, vt initio huius propoſ.oſtendimus ; Conſtat id, quod primo loco proponitur. *c 8. quinti.*

RVR-

RVRSVS ſi circumferentia 1.diuidatur per $3\frac{1}{7}$.producetur diameter $\frac{7}{22}$. minor quam vera, ex coroll.propoſ.2.de dimenſione circuli. Si igitur eius ſemiſſis $\frac{7}{44}$. ducatur in $\frac{1}{2}$. ſemiſſem circumferentiæ, procreabitur area circuli maximi $\frac{7}{88}$.minor quam vera: quæ rurſus ducta in $\frac{2}{3}$.diametri inuentæ(quæ etiam minor eſt, quam vera) nimirum in $\frac{14}{66}$. hoc eſt, in $\frac{7}{33}$. producet, vt infra in regula 2.docebo, ſoliditatem ſphæræ $\frac{49}{2904}$. minorem tamen, quam veram. [d] Minor ergo erit proportio cubi ex circumferentia 1.deſcripti, qui cubus eſt 1.ad ſphæram, quam ad $\frac{49}{2904}$.Cum ergo ſit 1.ad $\frac{49}{2904}$.vt 2904.ad 49.(Quoniam enim ex propoſ.2. Minutiarum ad finem lib.9.Eucl. eadem proportio eſt Numeratoris 49.ad denominatorem 2904. quæ minutiæ $\frac{49}{2904}$. ad ſuum integrum 1. erit conuertendo, vt 2904.ad 49.ita 1.ad $\frac{49}{2904}$.minor erit proportio cubi deſcripti ex circumferentia 1.qui cubus eſt 1.ad ſphæram, quam 2904.ad 49. Cum igitur ita ſe habeat cubus ex circumferentia maximi circuli ſphæræ cuiuslibet deſcriptus, ad ſphæram, vt cubus circumferentiæ 1.ad ſuam ſphæram, vt initio huius propoſitionis demonſtrauimus, patet etiam id, quod ſecundo loco propoſitum erat. *d 8. quinti.*

PROPOSITIO VII.

CVBVS diametri ſphæræ ad ſphæram, maiorem proportionem habet, quam 21. ad 11. minorem vero, quam 426.ad 223.

CVM enim ſit, vt cubus diametri cuiuslibet ſphæræ ad cubum diametri alterius ſphæræ, ita ſphæra ad ſphæram[a] quod vtraque proportio ſit triplicata proportionis diametrorum: erit permutando, vt cubus diametri cuiuslibet ſphæræ ad ipſam ſphæram, ita cubus diametri alterius ſphæræ ad ipſam ſphæram. *a 33 vnde. & 18. duodec.*

QVOD ſi diameter alicuius ſphæræ ponatur 1. multipliceturque per $3\frac{1}{7}$. [b] proueniet circuli maximi circumferentia $\frac{22}{7}$.maior quam vera. Eius ergo ſemiſſis $\frac{11}{7}$. in $\frac{1}{2}$. ſemiſſem diametri ducta efficiet $\frac{11}{14}$. aream ipſius maximi circuli vera maiorem: ac proinde ſi hæc area maior, quam vera, ducatur in $\frac{2}{3}$. diametri, gignetur, vt infra in regula 2.dicetur, ſoliditas ſphæræ $\frac{22}{42}$.hoc eſt, $\frac{11}{21}$. maior quã vera.[c] Igitur cubus diametri 1.qui eſt 1.ad ſphæram, proportionem habebit maiorem, quam ad $\frac{11}{21}$. Cum ergo ſit 1.ad $\frac{11}{21}$.vt 21.ad 11. (Quia enim ex propoſ.2. Minutiarum ad finem lib.9.Euclid.eadem eſt proportio Numeratoris 11.ad Denominatorem 21. quæ Minutiæ $\frac{11}{21}$. ad ſuum integrum 1.erit conuertendo vt 21.ad 11.ita 1.ad $\frac{11}{21}$.)maior erit proportio cubi 1.ex diametro 1.deſcripti ad ſphæram, quam 21.ad 11.Et quia, vt initio huius propoſitionis oſtendimus, ita eſt cubus diametri cuiuſuis alterius ſphæræ ad ipſam ſphæram, vt cubus diamatri 1.ad ſuam ſphæram, verum eſt, quod primo loco eſt propoſitum, *b coroll.2. Dimenſ. circuli. c 8. quint.*

[d] ITEM ſi diameter 1.ducatur in $3\frac{10}{71}$. producetur circumferentia maximi circuli $\frac{223}{71}$. minor quam vera. Eius ergo ſemiſſis $\frac{223}{142}$.ducta in $\frac{1}{2}$.ſemiſſem diametri 1.faciet $\frac{223}{284}$.aream circuli maximi vera minorem;ideoque ſi ea ducatur in $\frac{2}{3}$.diametri 1.procreabitur, vt infra in regula 2.dicetur, ſoliditas ſpæræ $\frac{446}{852}$. hoc eſt, $\frac{223}{426}$. minor quã vera.[e] Igitur cubus 1.diametri 1.ad ſphæram habebit proportionem minorem, quam ad $\frac{223}{426}$. Cum ergo ſit 1.ad $\frac{223}{426}$.vt 426.ad 223. (Quia enim ex propoſ.2.Minutiarum ad finem lib.9. Euclid.eadem proportio eſt Numeratoris 223.ad denominatorem 426.quæ Minutiæ $\frac{223}{426}$. ad ſuum integrum 1. erit conuertendo, vt 426.ad 223.ita 1. ad $\frac{223}{426}$.)minor erit proportio cubi diametri 1.ad ſuam ſphæram, quam 426.ad 223.Quoniam vero, vt ad initium huius propoſitionis oſtendimus, ita eſt cubus diametri cuiuslibet ſphæræ alterius ad ipſam ſphæram, vt cubus diametri 1.ad ſuam ſphæram, liquet etiam id, quod ſecundo loco propoſitum eſt. *d coroll. 2. Dimens circuli. e 8. quinti.*

2 HIS præmiſſis, ſequuntur regulæ ad inueſtigandam tam ſuperficiem conuexam cuiuslibet ſphæræ, quam eiuſdem ſoliditatem.

I.

SVPERFICIEM conuexam propoſitæ ſphæræ adinuenire.

AREA maximi circuli datæ ſphæræ quadruplicetur. Productus enim numerus conuexam ſphæræ ſuperficiem exhibebit: propterea quod per propoſ. 31. lib. 1. Archimedis de ſphæra, & Cylindro, ſuperficies ſphæræ quadrupla eſt circuli maximi. *Superficies conuexa ſphæræ.*

EADEM ſuperficies procreabitur, ſi diameter ſphæræ in circumferentiam circuli maximi ducatur: propterea quod per propoſ.2.Num.2.huius cap.rectangulum ſub diametro, & circumferentia maximi circuli comprehenſum ſuperficiei conuexæ ſphæræ eſt æquale. *Soliditas ſphæræ.*

II.

SOLIDITATEM propoſitæ ſphæræ exquirere.

1 *SPHÆRÆ ſoliditas producitur ex eius ſemidiametro in tertiam partem ſuperficiei conuexæ: Vel ex $\frac{1}{6}$. totius diametri in $\frac{2}{3}$.conuexæ ſuperficiei.*
2 *ITEM ex duabus tertiis partibus diametri in aream circuli maximi.*
3 *VEL ex duabus tertiis partibus areæ circuli maximi in totam diametrum.*
4 *VEL ex ſemidiametro in quatuor tertias partes areæ circuli maximi.*
5 *VEL ex ſemiſſe areæ circuli maximi in quatuor tertias partes diametri.*
6 *VEL ex dupla diametro in tertiam partem areæ circuli maximi.*
7 *VEL ex diametro in ſextam partem ſuperficiei ſphæræ.*
8 *VEL denique ex tertia parte diametri in ſemiſſem ſuperficiei conuexæ ſphæræ.*

 PRI-

Demõstratio prima partis. PRIMVM demonstratum à nobis est in commentariis in sphæram, quam demonstrationem repetemus lib. 7. de Isoperimetris. Idem tamen aliter hac ratione demonstrabimus. Concipiatur conus, cuius basis maximus circulus sphæræ, & altitudo semidiameter eiusdem. Item alius conus, cuius basis quadrupla sit maximi circuli, & altitudo semidiameter eadem. Et quia prioris coni tam sphæra, per propos. 32. lib. 1. Archimedis de sphæra, & cylindro, quadrupla est,[a] quam posterior conus:[b] erunt posterior conus, & sphæra inter se æquales.

a 11. *duode.*
b 9. *quinti.*

RVRSVS quia circulus, cuius semidiameter æqualis est toti diametro sphęræ, quadruplus est circuli maximi [c] (cum enim sit circulus ad circulum, vt quadratum diametri ad quadratum diametri: quadratum autē prioris diametri quadruplum sit quadrati diametri posterioris, ex scholio propos. 4. lib. 2. Eucl. quod illa diameter sit huius dupla; quandoquidem semissis prioris diametri sumpta est posteriori diametro æqualis; erit quoque circulus circuli quadruplus) erit idem circulus, cuius semidiameter diametro sphæræ æqualis est, æqualis basi posterioris coni, cum huius basis quadrupla etiam posita sit maximi circuli. Quia vero etiam superficies sphæræ quadrupla est circuli maximi, ex propos. 31. lib. 1. Archimedis de sphæra, & cylindro: [d] Erunt superficies sphæræ, basis posterioris coni, & circulus semidiametrum habens æqualem diametro sphæræ, inter se æquales.

c 2. *duod.*
d 9. *quinti.*

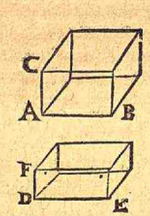
POSTREMO concipiatur cylindrus, cuius basis sit prædictus circulus semidiametrum diametro sphæræ habens æqualem, altitudo vero semidiameter sphæræ. [e] Erit hic cylindrus triplus posterioris coni prædicti: ac proinde & sphæræ, quæ ei cono est ostensa æqualis. [f] Idem autem cylindrus triplus quoque est cylindri, qui eandem habeat altitudinem, & basem tertiæ parti basis illius cylindri, hoc est, tertiæ parti superficiei sphæræ æqualem.[g] Ergo posterior cylindrus, (basem habens tertiæ parti superficiei sphæræ æqualem, altitudinem vero semidiametro eiusdem sphæræ æqualem) & sphæra æquales sunt. Cum ergo cylindrus hic posterior contineatur sub semidiametro sphæræ, & tertia parte superficiei sphæricæ: liquido constat, sphæræ soliditatem gigni ex semidiametro in partem tertiam superficiei sphæræ. Vel ex $\frac{1}{4}$. totius diametri in $\frac{1}{3}$. superficiei sphæræ: cum hic numerus illi sit æqualis, quod est primum.

e 10. *duod.*
f 11. *duode.*
g 9. *quinti.*

Demõstratio secunda partis. CONCIPIATVR rursum cylindrus, cuius basis maximus circulus sphæræ, & altitudo diameter sphæræ. Erit hic cylindrus sesquialter sphæræ, ex coroll. propos. 32. lib. 1. Archimedis de sphæra, & cylindro. Quod si ex parte superiori per tertiam partem diametri sphæræ, vel axis cylindri, ducatur basibus cylindri planum parallelum:[h] erit totus cylindrus ad cylindrum abscissum, cuius axis duæ tertiæ partes sunt totius axis, sesquialter; [i] Ac proinde posterior hic cylindrus abscissus, qui quidem continetur sub maximo circulo, nempe sub sua basi, & duabus tertiis partibus diametri sphæræ, sphæræ æqualis erit. Patet igitur etiam secundum.

h 13. *duod.*
i 9. *quint.*

ALITER



SIT parallelepipedum ABC, comprehensum sub AC, duabus tertiis partibus diametri sphæræ, & sub basi AB, quæ circulo maximo eiusdem sphæræ sit æqualis. Dico parallelepipedum ABC, sphæræ æquale esse. Sit enim aliud parallelepipedum DEF, contentum sub DF, semidiametro sphæræ, & sub basi DE, quæ tertiæ parti superficiei sphæræ sit æqualis, quod vt in prima parte huius 2. regulæ demonstrauimus, æquale erit sphæræ propositæ. Quia ergo basis AB, circulo maximo sphæræ æqualis, est $\frac{1}{4}$. superficiei sphæræ; erit ex coroll propos. 1. huius cap. vt AB, hoc est, vt $\frac{1}{4}$. superficiei sphæræ ad DE, id est, ad $\frac{1}{3}$. eiusdem superficiei, ita DF, hoc est, ita $\frac{1}{2}$. diametri sphæræ, ad AC, id est, ad $\frac{2}{3}$. eiusdem diametri. Ac proinde cum bases AB, DE, cum altitudinibus DF, AC, reciprocentur,[k] parallelepipeda ABC, DEF, æqualia inter se erunt. Cum ergo DEF, sphæræ æquale sit, vt dictum est, erit quoque ABC, eidem sphæræ æquale, quod est propositum.

k 34. *vnde.*

ALITER.

QVONIAM ex coroll. propos. 1. huius cap. est, vt $\frac{1}{4}$. superficiei sphæræ ad $\frac{1}{3}$. eiusdem superficiei, ita $\frac{1}{2}$. diametri ad $\frac{2}{3}$. eiusdem diametri: [l] idem numerus efficietur ex primo numero, nimirum ex $\frac{1}{4}$. superficiei, id est, ex circulo maximo sphæræ, in quartum, nimirum in $\frac{2}{3}$. diametri, qui ex secundo, id est, ex $\frac{1}{3}$. superficiei, in tertium, hoc est, in $\frac{1}{2}$. diametri. Sed ex $\frac{1}{3}$. superficiei in $\frac{1}{2}$. diametri soliditas sphæræ procreatur, vt in prima parte huius 2. regulæ ostensum est. Igitur eadem soliditas ex circulo maximo in $\frac{2}{3}$. diametri gignetur, quod est propositum.

l 19. *septim.*

Demõstratio tertiæ partis. RVRSVS quia cylindrus, cuius basis circulus maximus sphæræ, & altitudo diameter eiusdem, sesquialter est ipsius sphæræ, ex coroll. propos. 32. lib. 1. Archimedis de sphæra, & cylindro: [m] Idemque cylindrus sesquialter etiam est cylindri, cuius basis æqualis sit duabus tertiis partibus circuli maximi, & altitudo eadem diameter;[n] erunt posterior hic cylindrus, & sphæra æquales: hoc est, sphæra producetur ex $\frac{2}{3}$. areæ maximi circuli in diametrum sphæræ, quod est tertium.

m 11. *duod.*
n 9 *quinti.*

Demõstratio quartæ partis. CONCIPIANTVR quoque duo parallelepipeda, quorum vnius basis sit $\frac{2}{3}$. areæ maximi circuli in sphæra æqualis, & altitudo toti diametro: alterius vero basis æqualis sit $\frac{1}{3}$. areæ circuli maximi, & altitudo semidiametro. Et quia horum parallelepipedorum bases cum altitudinibus reciprocantur: quod tam prioris basis subdupla sit basis posterioris, quam altitudo posterioris altitudinis prioris: [o] erunt ipsa parallelepipeda æqualia. Sed prius, per tertiam partem huius 2. regulæ, æquale est soliditati sphęræ, igitur & posterius. Ideoque sphęra producetur ex semidiametro in $\frac{2}{3}$. areæ circuli maximi, quod quarto loco proponitur.

o 34. *vnde.*

Demõstratio quintæ partis. PRÆTEREA concipiantur duo parallelepipeda, quorum vnius basis æqualis sit areæ circuli in sphæra maximi, & altitudo æqualis $\frac{2}{3}$. diametri: alterius vero basis æqualis sit $\frac{1}{4}$. areæ circuli maximi, & altitudo $\frac{2}{3}$. diametri. Et quia horum parallelepipedorum bases reciprocantur cum altitudinibus; quod tam basis in priori dupla sit basis

sit basis in posteriori, quam altitudo in posteriori altitudinis in priori: [a] æqualia erunt ipsa parallelepipeda: Sed prius est, per 2. partem huius 2. regulæ, æquale sphæræ. Igitur, & posterius: atque idcirco sphæra gignetur ex $\frac{1}{3}$. areę circuli maximi in $\frac{2}{3}$. diametri. quod est quintum.

a 34. *vnde.*

ITEM intelligantur duo parallelepipeda, quorum vnius basis æqualis sit $\frac{2}{3}$. areæ circuli maximi in sphæra, & altitudo diametro: alterius vero basis æqualis sit $\frac{1}{3}$. areæ maximi circuli, & altitudo duplæ diametro. Et quia horum parallelepipedorum bases cum altitudinibus reciprocantur: quod tam basis in priori sit dupla basis in posteriori, quam altitudo in posteriori altitudinis in priori: [b] erunt ipsa parallelepipeda æqualia: Sed prius per 3. partem huius 2. regulæ, æquale est ipsi sphæræ. Igitur & posterius: Ac proinde sphæra ex dupla diametro in $\frac{1}{3}$. areæ circuli maximi procreabitur, quod sexto loco est propositum.

Demõstratio sextæ partis.
b 44. *vnde.*

INTELLIGANTVR quoq; duo parallelepipeda, quorum vnius basis contineat $\frac{1}{3}$ superficiei sphæræ, & altitudo $\frac{1}{2}$. diametri: alterius vero basis comprehendat $\frac{1}{3}$. superficiei, & altitudo æqualis sit diametro. Et quoniam bases cum altitudinibus sunt reciprocæ, quod ita sit $\frac{1}{3}$. superficiei, basis videlicet prioris parallelepipedi ad $\frac{1}{3}$. superficiei, id est, ad basem posterioris, vt altitudo posterioris, nempe diameter, ad prioris altitudinem, nimirum ad $\frac{1}{2}$. diametri, cum vtraque proportio sit dupla: [c] ipsa parallelepipeda æqualia erunt: Sed prius ipsi sphæræ, per 1. partem huius 2. regulæ æquale est. Igitur, & posterius: hoc est, sphæræ soliditas producetur ex diametro in sextam partem superficiei, quod est septimum.

Demõstratio septimæ partis.
c 34. *vnde.*

DENIQVE concipiantur duo parallelepipeda, quorum vnius basis sit $\frac{1}{3}$. superficiei sphæræ, & altitudo semidiameter: alterius autem basis sit $\frac{1}{3}$ superficiei, & altitudo $\frac{1}{3}$. diametri. Quia vero bases, & altitudines reciprocantur, quod ita sit $\frac{1}{3}$. superficiei ad $\frac{1}{3}$. superficiei, nimirum basis prioris parallelepipedi ad basem posterioris, vt $\frac{1}{3}$. diametri ad $\frac{1}{2}$. diametri, altitudo videlicet posterioris parallelepipedi ad altitudinem prioris; [d] æqualia erunt ipsa parallelepipeda. Cum ergo, per 1. partem huius 2. regulæ, prius sit sphæræ æquale, eidem quoque posterius æquale erit: Ac propterea sphæræ soliditas producetur ex tertia parte diametri in semissem conuexæ superficiei, quod est octauum.

Demõstratio octauæ partis.
d 34. *vnde.*

3 IAM vero ex propos. 4. & 5. huius cap. Num. 1. colliguntur quatuor sequentes regulæ, per quas superficies sphæræ conuexa inuenitur tum maior quam vera, tum minor, tam ex çircumferentia, quam ex diametro circuli maximi.

I.

EX circumferentia circuli in sphæra maximi superficiem conuexam sphæræ procreare vera maiorem.

FIAT vt 223. ad 71. ita quadratum ex circumferentia maximi circuli data descriptum ad aliud, prodibitq; sphæræ superficies maior quam vera. Cum enim per propos. 4. huius cap. Num. 1. maior sit proportio quadrati circumferentiæ circuli maximi ad superficiem sphæræ, quam 223. ad 71. sit autem quadratum datæ circumferentiæ ad numerum procreatum, vt 223. ad 71. habebit quoque quadratum circumferentiæ datæ ad superficiem sphæræ veram, maiorem proportionem, quam idem quadratum ad numerum productum: [a] ideoq; productus numerus maior erit superficiei vera.

Superficies sphæra maior, quam vera.
a 10. *quint.*

II.

EX circumferentia circuli in sphæra maximi superficiem sphæræ conuexam vera minorem eruere.

FIAT vt 22. ap. 7. ita quadratum ex circumferentia maximi circuli data descriptum ad aliud. Numerus enim genitus minor erit vera superficie sphæræ. Cum enim per propos. 4. huius cap. Num. 1. minor sit proportio quadrati circumferentiæ circuli maximi ad superficiem sphæræ, quam 22. ad 7. Sit autem quadratum datæ circumferentiæ ad numerum genitum, vt 22. ad 7. habebit quoq; quadratum datæ circumferentiæ ad superficiem veram sphæræ, minorem proportionem, quàm idem quadratum ad numerum productum. [a] Quam ob rem numerus productus vera superficie sphæræ minor erit.

Superficies sphæra minor, quam vera.
a 10. *quint.*

III.

EX diametro circuli in sphæra maximi superficiem sphæræ vera maiorem elicere.

FIAT vt 7. ad 22. ita quadratum diametri datæ circuli maximi ad aliud, gigneturq; superficies sphæræ maior, quam vera. Nam cum, per propos. 5. huius cap. Num. 1. maior sit proportio quadrati diametri circuli maximi ad superficiem sphæræ veram, quam 7. ad 22. Sit autem quadratum diametri datæ ad productum numerum, vt 7. ad 22. habebit quoque quadratum datæ diametri ad superficiem veram sphæræ, maiorem proportionem, quã idem quadratum ad productum numerum. [a] Quocirca procreatus numerus maior erit, quam vera superficies sphæræ.

Superficies sphæra maior, quam vera.
a 10. *quint.*

IV.

EX diametro circuli in sphæra maximi superficiem sphæræ vera minorem colligere.

FIAT vt 71. ad 223. ita quadratum datæ diametri circuli maximi ad aliud. Numerus namq; genitus superficiem sphæræ vera minorem exhibebit. Quoniam enim per propos. 5. huius cap. Numer. 1. minor est proportio quadrati diametri ad superficiem sphæræ, quam 71. ad 223. Est autem quadratum datæ diametri ad productum numerum, vt 71. ad 223. Erit quoque minor proportio quadrati datæ diametri ad veram superficiem sphæræ quam eiusdem quadrati ad numerum productum. [a] Quapropter minor erit productus numerus, quam vera superficies sphæræ.

Superficies sphæra minor, quam vera.
a 10. *quint.*

4 PARI ratione ex propoſ. 6. & 7. huius c. Numer. 1. eliciuntur quatuor aliæ ſequentes regulæ, per quas tam ex circumferentia, quam ex diametro maximi circuli in ſphæra, eruitur ſoliditas ſphæræ tum maior, quam vera, tum minor.

I.

EX circumferentia circuli maximi in ſphæra ſoliditatem ſphæræ producere vera maiorem.

Soliditas ſphæra maior, quam vera.

FIAT vt 298374. ad 5041. ita cubus ex data circumferentia maximi circuli deſcriptus ad aliud. Num. enim genitus dabit ſphæræ ſoliditatem vera maiorem. Nam cum, per propoſ. 6. huius cap. Nume. 1. maior ſit proportio cubi datæ circumferentiæ ad ſphæram, quam 298374. ad 5041. Sit autem cubus datæ circumferentiæ ad numerum procreatum, vt 298374. ad 5041. habebit quoque cubus datæ circumferentiæ ad ſphæræ ſoliditatem veram, maiorem proportionem, quam idem cubus ad productum numerum: [a] Ideoq; productus numerus maior erit, quam vera ſoliditas ſphæræ.

a 10. *quint.*

II.

EX circumferentia circuli maximi in ſphæra ſoliditatem ſpheræ vera minorem procreate.

Soliditas ſphæra minor, quam vera.

FIAT, vt 2904. ad 49. ita cubus datæ circumferentiæ ad aliud. Nam productus numerus offeret ſphæræ ſoliditatem vera minorem. Cum enim per propoſ. 6. huius cap. Num. 1. minor ſit proportio cubi circumferentiæ datæ ad ſphæram, quam 2904 ad 49. ſit autem cubus datæ circumferentiæ ad numerum procreatū, vt 2940, ad 49. habebit quoq; cubus datæ circumferentiæ ad veram ſoliditatem ſphæræ, minorem proportionem, quam idem cubus ad numerum productum. [a] Idemque numerus productus minor erit vera ſoliditate ſphæræ.

a 10. *quint.*

III.

EX diametro maximi circuli in ſphæra ſoliditatem ſphæræ colligere vera maiorem.

Soliditas ſphæra maior, quam vera.

FIAT vt 21. ad 11. ita cubus diametri datæ ad aliud. Procreatus namque numerus ſoliditatem ſphæræ dabit vera maiorem. Cum enim per propo. 7. huius c. Num. 1. maior ſit proportio cubi diametri ad ſphæram, quam 21. ad 11. Sit autem cubus datæ diametri ad numerum productum, vt 21. ad 11. habebit quoq; maiorem proportionē cubus datæ diametri ad veram ſoliditatem ſphæræ, quam idem cubus ad numerum genitum. [a] Qua propter numerus procreatus maior erit vera ſoliditate ſphæræ.

a 10. *quint.*

IV.

EX diametro maximi circuli in ſphæra ſoliditatem ſphæræ concludere vera minorem.

Soliditas ſphæra minor, quam vera.

FIAT vt 426. ad 223. ita cubus datæ diametri ad aliud. Numerus enim proueniens minor erit, quam vera ſoliditas ſphæræ. Nam cum per propoſ. 7. huius cap. Num. 1. minor ſit proportio cubi datæ diametri ad ſphæram quam 426. ad 223. Sit autem cubus diametri datæ ad procreatum numerum, vt 426. ad 223. habebit quoque cubus datæ diametri ad ſphæram, proportionem minorem, quam idem cubus ad numerum genitum. [a] Quare minor erit numerus productus, quam vera ſoliditas ſphæræ.

a 10. *quint.*

DE AREA SEGMENTORUM ſphæræ.

CAPVT VI.

Superficies conuexa hemiſphæ. rij.

I *HEMISPHERII ſuperficies conuexa, excluſa baſe, gignitur ex area maximi circuli per 2. multiplicata. Vel ex ſemidiametro in circumferentiam maximi circuli. Vel denique ex tota diametro in ſemiſſem circumferentiæ maximi circuli.* Quæ omnia perſpicua ſunt ex 1. regula Num. 2. capitis 5. propterea quod hi numeri producti ſunt ſemiſſes illorum, qui ſuperficiem conuexam totius ſphæræ in ea regula exhibuerunt.

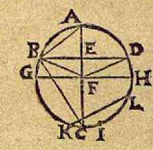
Superficies conuexæ portionis ſphæræ.



2 SVPERFICIES conuexa cuiuslibet portionis ſphæræ hemiſphærio maioris, vel minoris, dempta baſe, æqualis eſt circulo, cuius ſemidiameter æqualis eſt rectæ lineæ, quæ à vertice portionis ad circumferentiam baſis ducitur, ex propoſ. 40. lib. 1. Archimedis de ſphæra, & cylindro. Sit enim maximus in ſphæra circulus ABCD, cuius diameter AC, quam in E, ad angulos rectos ſecet BD, recta, per quam intelligatur duci planum diametro ad angulos rectos, ſecans ſphæram in duas portiones, quarum baſis communis circulus diametri BD, & A, vertex minoris portionis, maioris autem vertex C. Iunctis autem rectis AB, CB, erit circulus ſemidiametri AB, ſuperficiei cōuexæ minoris portionis, & circulus ſemidiametri CB, conuexæ ſuperficiei maioris portionis æqualis, ex dicta prop. Archimedis. Quare ſi vtraque AB, CB, in partibus diametri AC, fiat nota, præſertim ope inſtrumenti partium capit. 1. lib. 1. conſtructi, & areæ circulorum ad interualla ſemidiametrorum AB, CB, deſcriptorum inueſtigentur, per ea, quæ lib. 4. cap. 7. ſcripſimus; notæ erunt ſuperficies conuexæ dictarum portionum ſphæræ.

EADEM

EADEM ſuperficies conuexa portionis ſphæræ hemiſpherio minoris, vel maioris, ita quoque cognoſcetur. Ex demonſtratis ab Archimede propoſ. 3. lib. 2. de ſphæra, & cylindro, eandem proportionem habet EC, ad EA, quam ſuperficies conuexa portionis ſphæræ baſem habentis circulum diametri BD, & verticem C, ad ſuperficiem conuexam portionis baſem habentis eundem circulum diametri BD, & verticem A. Igitur componendo quoque erit, vt tota diameter AC, ad AE, ita ſuperficies conuexa totius ſphæræ ad ſuperficiem conuexam portionis BAD. Eademque ratione erit, vt tota diameter AC, ad EC, ita conuexa ſuperficies totius ſphæræ ad ſuperficiem conuexam portionis BCD. Quocirca inueſtigata proportione diametri AC, ad ſegmenta AE, EC, per inſtrumentum partium capit. 1. lib. 1. conſtructum; ſi fiat, vt diameter AC, ad AE, ita ſuperficies conuexa totius ſphæræ, (quæ ex regula 1. Num. 2. cap. 5. huius lib. cognita fiet) ad aliud, proueniet conuexa ſuperficies portionis minoris BAD. Similique modo ſuperficies conuexa maioris portionis BCD, cognoſcetur; ſi fiat, vt diameter AC, ad EC, ita ſuperficies conuexa totius ſphæræ ad aliud.



ET quia, vt ex Archimede oſtendimus, ita diameter AC, ad AE, vel ad EC, vt tota ſuperficies ſphæræ ad ſuperficiem portionis BAD, vel BCD: erit quoque ita AF, ſemiſſis diametri ad AE, vel EC, vt hemiſpherii ſuperficies GAH, ad ſuperficiem portionis BAD, vel BCD, quod oſtendetur eodem modo, quo ſcholium propoſ. 22. lib. 5. Euclid. eſt demonſtratum: Si fiat, vt ſemidiameter ſphæræ AF, ad AE, vel EC, altitudinem portionis, ita hemiſphærii GAH, ſuperficies ad aliud; producetur rurſus conuexa ſuperficies portionis minoris BAD, vel maioris BCD.

IMMO cum ſit vt AF, ſemidiameter ad AE, ita hemiſphærij GAH, ſuperficies ad ſuperficiem portionis BAD, [a] erit per conuerſionem rationis, vt AF, ſemidiameter ad EF, ita ſuperficies hemiſphærij GAH, ad ſuperficiem fruſti GBDH, demptis baſibus. Ergo EF, eadem pars erit, vel partes diametri AC, vel ſemidiametri AF, quæ pars eſt, vel partes ſuperficiei fruſti GBDH, demptis baſibus, ſuperficiei totius ſphæræ, vel hemiſphærii GAH. Quam ob rem cognito, quæ pars ſit EF, vel partes ſemidiametri AF, ſi ex ſuperficie hemiſphærij GAH, eadem pars auferatur, vel partes, reliqua fiet ſuperficies conuexa minoris portionis BAD. Et ſi ad hemiſphærij GCH, ſuperficiem adiiciatur eadem pars, vel partes, conflabitur conuexa ſuperficies portionis maioris BCD. Verbi gratia, ſi EF, contineat $\frac{1}{3}$. ſemidiametri AF, & ex ſuperficie hemiſphærij GAH, tollantur $\frac{1}{3}$. reliqua fiet ſuperficies conuexa portionis minoris BAD: Et ſi $\frac{1}{3}$. ſuperficiei hemiſphærii adiiciantur ad ſuperficiem hemiſphærii GCH, conficietur ſuperficies conuexa maioris portionis BCD. Sic ſi EF, eſſet ſemiſſis ſemidiametri, auferenda eſſet ex hemiſphærii ſuperficie ſemiſſis ipſius, vel adiicienda: Et ſic de cæteris.

a *coroll. 19. quinti.*

Soliditas hemiſphærij.

3 HEMISPHÆRII ſoliditas producitur ex ſemidiametro in tertiam partem ſuperficiei hemiſphærij: Vel in ſextam partem ſuperficiei totius ſphæræ. Vel ex $\frac{1}{3}$. totius diametri in $\frac{2}{3}$. ſuperficici hemiſphærij.

ITEM ex duabus tertiis partibus diametri in ſemiſſem areæ circuli maximi.

VEL ex duabus tertiis partibus areæ circuli maximi in ſemidiametrum: Aut ex tertia parte areæ circuli maximi in totam diametrum.

VEL ex $\frac{1}{4}$. totius diametri in $\frac{3}{4}$. areæ circuli maximi.

VEL ex ſemiſſe areæ circuli maximi in $\frac{1}{3}$. diametri.

VEL ex dupla diametro in $\frac{1}{6}$. areæ circuli maximi.

VEL ex ſemidiametro in ſextam partem ſuperficiei ſphæræ.

VEL denique ex $\frac{2}{3}$. diametri in ſuperficiem hemiſphærij conuexam, quæ omnia ex 2. regula Nu. 2. c. 5. colliguntur: cum omnes hi numeri producti ſint ſemiſſes illorum, qui ſoliditatem totius ſphæræ in ea regula indicant.

Soliditas ſectoris ſphæræ.

4 SOLIDITAS ſectoris ſphæræ (qui nimirum componitur ex minore portione ſphæræ, & cono baſem habente eandem cum portione, & altitudinem æqualem perpendiculari ex centro in baſem portionis deductæ; Vel qui relinquitur, ſi idem conus ex portione maiore ſubtrahitur vt in proxima figura, ſolidum compoſitum ex portione ſphæræ BAD, baſem habente circulum diametri BD, & ex cono habente eandem baſem, & verticem in centro F. Item ſolidum, quod relinquitur, ſi conus idem ex portione maiore BCD, dematur, appellamus ſectorem ſphæræ) hac ratione inueſtigabitur. Quoniam per propoſ. 42. lib. 1. Archimedis de ſphæra & cylindro, ſectori ſphæræ æqualis eſt conus baſem habens circulum æqualem ſuperficiei conuexæ portionis ſphæræ altitudinem vero ſemidiametro ſphæræ æqualem: Conus autem producitur, vt cap. 2. huius lib. Num. 1. declarauimus, vel ex baſe in $\frac{1}{3}$. altitudinis: Vel ex tota altitudine in $\frac{1}{3}$. baſis; vt ſector ſphæræ gignatur vel ex ſuperficie conuexa portionis ſphæræ in $\frac{1}{3}$. ſemidiametri, hoc eſt, in $\frac{1}{6}$. totius diametri: Vel ex ſemidiametro in $\frac{2}{3}$. ſuperficici conuexæ portionis ſphæræ.

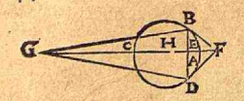
Soliditas cuiuslibet portionis ſphæra.

5 SOLIDITAS vero cuiuſcunque portionis ſphæræ hoc modo procreabitur. Inueſtigetur ſoliditas ſectoris ſphæræ, vt proxime traditum eſt, Nam ſi, quando portio propoſita minor eſt hemiſphærio, ex hoc ſectore dematur conus eandem habens cum portione baſem, altitudinem vero perpendicularem ex centro ſphæræ in baſem portionis cadentem, reliqua fiet ſoliditas portionis minoris: At vero ſi, quando portio propoſita hemiſphærio maior eſt, idem conus ad ſectorem adiiciatur, conflabitur ſoliditas portionis maioris. Id quod perſpicuum eſt in ſuperiori figura, cum conus BFD, ablatus ex ſectore ABFDA, reliquam faciat portionem minorem BAD: Idem vero conus BFD, additus ſectoris CBFDC, conſtituat maiorem portionem BCD. Conus porro prædictus BFD, cognitus fiet ex baſe, nimirum ex circulo diametri BD, & altitudine EF, cognitis, vt ca. 2. huius lib. 1. docuimus.

ALITER

SIT in ſphæra circulus maximus ABCD, & portiones ſphæræ, quarum baſis communis circulus diametri BD, & vertices A, C, quarum ſoliditates exquirēdæ ſunt. Ex centro H, ducatur ad BD, perpēdicularis HE, [b] quæ

rectam



c schol. 27. tertij. d 12. sexti.

rectam BD, secabit bifariam, [c] ac proinde & vtrumquè arcum BAD, BCD, bifariam, hoc est, per vertices A, C, transibit. [d] Fiat, vt CE, ad summam rectarum CH, CE, ita AE, ad EF: Item, vt AE, ad summam rectarum AH, AE, ita EC, ad EG. Intelliganturq; duo coni, quorum basis communis circulus diametri BD, & vertices F, G. Erit per propos. 2. lib. 2. Archimedis de sphæra, & cylindro, conus BFD, portioni minori BAD, & conus BGD, portioni maiori BCD, æqualis. Quocirca, inuentis horum conorum soliditatibus, vt c. 2. huius lib. Num. 1. traditum est, inuentæ quoq; erunt soliditates portionum BAD, BCD, quod est propositum.

Soliditas cuiuslibet frusti sphæræ.

6 SOLIDITAS denique cuiuscunque frusti sphæræ, siue bases sint parallelæ, cuiusmodi est in prima figura huius cap. frustum BDHG, inter circulos diametrorum BD, GH, inclusum, siue non parallelæ, quale est frustum BDLK, hoc pacto inuenietur. Inuestigetur, vt Num. 5. diximus, vtriusque portionis ABD, AGH, soliditas. Minori enim detracta ex maiore, reliqua erit soliditas frusti BDHG. Sic etiam, inuento I, vertice portionis KIL, si inueniatur soliditas vtriusque portionis BCD, KLI, minorque ex maiore tollatur, remanebit soliditas frusti BDLK, nota.

DE AREA SPHÆROIDIS, eiusdemque portionum.

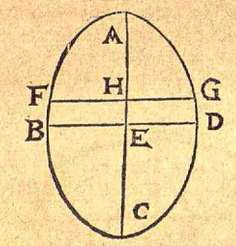
CAPVT VII.

Soliditas sphæroidis.

SIT Ellipsis ABCD, cuius maior axis AC, minor BD, priorem ad angulos rectos secans. Soliditatē ergo Sphæroidis, id est, solidi ex circumuolutione Ellipsis circa axem effecti, ita nanciscemur. Quoniam planum per BD, ductum, & rectum ad axem AC, circulum facit, vt à Federico Commandino ad propos. 12. libri Archimedis de Conoidibus, & Sphæroidibus demonstratur, cuius diameter BD, & centrum E; erit per propos. 29. libri Archimedis de Conoid. & Sphæroid. semissis Sphæroidis ABD, dupla coni eandem basem cum illa semisse, circulum videlicet diametri BD, habentis, & altitudinem eandem EA. Igitur si huius coni soliditas per cap. 2. huius lib. inuestigetur, & duplicetur, exurget soliditas semissis Sphæroidis: quæ duplicata soliditatem totius Sphæroidis exhibebit.

Soliditas portionum sphæroidis.

2 DVCATVR minori axi BD, parallela FG, secans maiorem axem in H, ad rectos angulos. Si igitur per FG, ducatur planum rectum ad axem, fiet circulus in Sphæroide diametrum habens FG, & centrum H, vt Federicus Commandinus ad propos. 12. lib. Archim. de Conoid. & Sphæroid. demonstrauit; abscindenturque portiones Sphæroidis FAG, minor & FCG, maior. Vtriusque soliditas ita fiet cognita. Quoniam per propos. 31. libri Archimedis de Conoid. & Sphæroid. Conus, cuius basis circulus diametri FG, & axis HA, ad minorem portionem sphæroidis FAG, proportionem habet, quam maioris portionis axis HC, ad summam rectarum EC, HC. Si fiat, vt HC, maioris portionis axis ad summam rectarum EC, HC, ita conus prædictus ad aliud (qui quidem conus ex cap. 2. huius lib. cognitus erit) prodibit soliditas minoris portionis sphæroidis FAG.



RVRSVS quia per propos. 33. libri Archimed. de Conoid. & Sphæroid. conus, cuius basis circulus diametri FG, & axis HC, ad maiorem portionem Sphæroidis FCG, proportionem habet, quam minoris portionis axis HA, ad summam rectarum EA, HA: si fiat, vt HA, minoris portionis axis ad summam rectarum EA, HA, ita prædictus conus (quem per cap. 2. huius lib. metieris) ad aliud, procreabitur soliditas maioris portionis sphæroidis FCG.

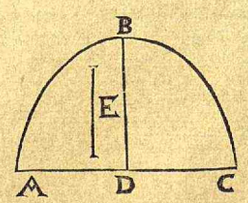
DE AREA CONOIDIS parabolici.

CAPVT VIII.

Soliditas conoidis Parabolici.

SIT Parabola ABC, cuius axis B, D, ad basem AC, rectus. Soliditatem igitur Conoidis parabolici, quod Parabola circa axem circumducta efficit, ita metiemur.

Quoniam per ea, quæ ad propos. 12. libri Archimed. de Conoid. & Sphæroid. Federicus Commandinus demonstrauit, planum per AC, ductum, & rectum ad axem BD, circulum facit, cuius diameter AC, & centrum D: erit per propos. 23. libri Archim. de Conoid. & Sphæroid. Parabolicum Conoides ABC, sesquialterum coni, cuius basis circulus diametri AC, & axis BD. Igitur si fiat, vt 2. ad 3. ita prædictus conus (quem ex cap. 2. huius libri metiemur) ad aliud; prosiliet soliditas Conoidis Parabolici ABC.



DE

DE AREA CONOIDIS Hyperbolici.

CAPVT IX.

Soliditas Conoidis Hyperbolici.

CONCIPIATVR superior figura esse Hyperbola, & recta E, æqualis semissi diametri transuersæ inter duas hyperbolas oppositas, hoc est, rectæ ex centro hyperbolarum ad verticem B, ductæ. Fietq; rursus circulus, cuius diameter AC, à plano per AC, ducto, & ad axem recto, vt Federicus Commandinus ad propos. 12. libri. Archimed. de conoid. & sphæroid. demonstrauit. Soliditatem igitur Conoidis Hyperbolici, quod ab hyperbola ABC, circa axem BD, circumuoluta efficitur, ita venabimur. Quoniam per propos. 27. lib. Archimedis de Conoid. & Sphæroid. Conoides Hyperbolicum ABC, ad conum, cuius basis eadem cum base Conoidis, circulus videlicet diametri AC, & axis idem BD, proportionem habet eandem, quam linea conflata ex axe BD, & tripla ipsius E, ad lineam conflatam ex axe BD, & dupla ipsius E. Si fiat, vt linea conflata ex axe BD, & dupla ipsius E, ad lineam conflatam ex axe BD, & tripla ipsius E, ita prædictus conus (quem ex cap. 2. huius libri dimetiemur) ad aliud; gignetur soliditas Conoidis Hyperbolici ABC.

DE AREA DOLIORVM.

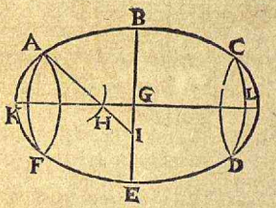
CAPVT X.

Capacitas dolij.

QVONIAM dolia non eandem formam vbique seruant, vix præscribi potest ratio, qua dolij propositi capacitas accurate inueniatur. Argumento est, quod scriptores varie de eius Dimensione scripserunt. Dicam ergo etiam ego id, quod mihi verisimile videtur. Sit dolium ABCDEF, in extremitatibus habens circulos AF, CD, orificium B, per quod cogitetur planum ductum rectum ad lineam KL, centra circulorum AF, CD, coniungentem, secans dolium bifariam. Si igitur asseres dolij in B, & E, curuentur, & deinde secundum lineas quasi rectas extendantur, cuiusmodi dolia non pauca Romæ vidi: referent semisses dolij ABEF, CDEB, conos decurtatos: quos si per ea, quæ cap. 3. huius libri scripta sunt, metieris, dabit eorum summa dolii propositi capacitatem. Memor tamen esto, profunditatem dolij BE, & diametrum circuli AF, mensurandam esse intra asseres, ita, vt eorum crassities excludantur; vt habeatur decurtatus conus, cuius bases sint circuli BE, AF, &c.

Capacitas d lij alio modo.

2 SI vero asseres dolij vere sint aliquo modo circulares, quod nonnulli asserunt, concipiendum erit dolium, tanquam frustum quoddam Sphæroidis. Nam curuitas asserum sensibiliter à curuitate Sphæroidis cuius axes sunt rectæ KL, BE, non different. Sed quia solum axis minor, nimirum profunditas dolij, data est, reperiemus ex puncto A, in Ellipsi dato, maiorem axem KL, hoc modo. Interuallo semissis minoris axis BG, describatur ex A, arcus secans in H, rectam GH, ad angulos rectos ipsi minori axi per eius punctum medium G, ductam: & ex A, per H, recta emittatur secans minorem axem in I. Recta enim AI, dabit semisses GK, GL, maioris axis, vt lib. 1. nostri Astrolabij in scholio Lemmatis 50. demonstrauimus. Itaque si tam semissis sphæroidis BKE, quam portio minor AKF, mẽsuretur, vt cap. 7. traditum est, & soliditas portionis AKF, ex soliditate semissis BKE, detrahatur, remanebit capacitas semissis dolii ABEF, quæ duplicata totius dolij capacitatem exhibebit. Vtramque hanc rationem dolii dimetiendi à vera dolii capacitate non longe abesse arbitror. Paratus tamen interim sum, si quis accuratiorem inuenerit, eam libenti animo, & grato acceptare.



DE AREA CORPORVM omnino irregularium.

CAPVT XI.

Soliditas cuiuslibet corporis irregularis.

1 TRADVNT scriptores nonnulli regulam quandam mechanicam ad corpora dimetienda, quæ omnino sunt irregularia. ita vt sub regulas Geometricas, quæ hactenus explicatæ sunt, cadere nõ possint: cuiusmodi sunt statuæ, vrnæ, amphoræ, frusta saxorum, quæ neque vniformis sunt crassitiei, neque latera habent prorsus recta, aut ad bases perpendicularia, &c. Hæc ergo regula, quæ nullo modo videtur aspernanda, ita se habet.

PARETVR arca lignea ex asseribus leuigatis, instar parallelepipedi cuiusdam, quæ pice ita oblinatur, vt aquam continere possit. Arca hæc tãtæ debet esse longitudinis, latitudinis, atque altitudinis, vt corpus metiendum intra ipsam positum, aqua totum possit operiri. Posita autem hac arca Horizonti æquidistante, beneficio libellæ, aut perpendiculi, infundatur in eam tantum aquæ, quantum satis est, vt corpus impositum omnino tegat, notenturque diligenter suprema latera aquæ in asseribus arcæ, vt habeatur

altitudo aquæ vsque ad arcæ fundū. Extracto deinde corpore, ita tamen, vt nihil aquæ extra arcam cadat, notentur rursum latera aquæ, postquam quieuerit. Quod si per cap. 1. huius lib. metiamur duo parallelepipeda, quorum basis communis est arcæ fundus, siue basis, altitudines vero rectæ à lateribus aquæ notatis vsque ad basem, & minus à maiore subtrahamus, relinquetur parallelepipedum soliditati corporis propositi omnino æquale, quod parallelepipedum etiam consequeris, si altitudinem inter latera aquæ bis notata duces in basem arcæ. Sunt, qui infusa aqua in arcam, latera eius in asseribus primo loco notent. Deinde impositio corpore, eiusdem aquæ latera signent. Si enim altitudo inter posteriora latera, ac priora ducatur in basem arcæ, producetur soliditas corporis impositi.

2 PRO vrnis, atque amphoris, siue eæ lapideæ sint, siue Cretaceæ, ita faciemus. Impleatur vas arena, & eius orificium ita obturetur, vt aqua ingredi nullo modo possit. Impositio deinde vase in aqua intra arcam contenta, ac si esset corpus quodpiam irregulare, inuestigetur eius soliditas, vt Num. 1. diximus. Deinde extracta arena, notentur latera aquæ, antequam vas vacuum imponatur. Impositio denique vase vacuo, signentur iterum latera aquæ. Si namque altitudo inter posteriora, ac priora latera multiplicetur per basem arcæ: procreabitur soliditas solius vasis: quæ detracta ex priori soliditate, notam relinquet vasis capacitatem.

DE SVPERFICIE CONVEXA CONI & cylindri recti.

CAPVT XII.

Superficies conica, dempta base, cui circulo sit æqualis.

QVONIAM ex Archimede demonstrauimus, qua ratione superficies conuexa, sphæræ, eiusque portionum inuestiganda sit: non decrit fortasse, qui idem desideret in cono, ac cylindro recto, quod ex iis, quæ ab eodem Archimede in lib. 1. de sphæra, & cylindro demonstrata sunt, obtinebit hoc modo. Proposito cono recto quocunque, erit eius superficies conuexa conica secluſa base, æqualis circulo, cuius semidiameter est linea media proportionalis inter latus coni, & semidiametrum basis eiusdem coni, ex propos. 14. lib. 1. Archimedis de sphæra, & cylindro.

Superficies frusti coni, demptis basibus, cui circulo æqualis sit.

2 QVOD si conus rectus secetur plano, quod basi æquidistet, erit superficies conuexa frusti coni, demptis basibus, æqualis circulo, cuius semidiameter est linea media proportionalis inter latus conicum frusti, & rectam ex semidiametris duarum basium conflatam, ex propos. 16. lib. 1. Archimedis de sphæra, & cylindro.

Proportio conicæ superficiei ad suam basem.

ITEM superficies conica coni recti ad suam basem, proportionem habet eandem, quam latus coni ad semidiametrum basis coni eiusdem, ex propos. 15. lib. 1. Archimedis de sphæra, & cylindro.

Superficies cylindrica, demptis basibus, cui circulo sit æqualis.

4 DENIQVE superficies conuexa cylindri recti, demptis basibus, æqualis est circulo, cuius semidiameter est linea media proportionalis inter latus cylindri, & diametrum basis cylindri eiusdem, ex propos. 13. lib. 1. Archimedis de sphæra, & cylindro.

FINIS LIBRI QVINTI.

GEO-

GEOMETRIÆ PRACTICÆ

LIBER VI.

In quo de Geodæsia, & de figuris augendis, minuendisque in data proportione: Item de duarum mediarum proportionalium inter duas datas rectas inuentione: Ac denique de radicum extractione agitur.

EXPEDITIS iis, quæ de magnitudinum dimensionibus initio proposuimus, restat vt de rectilinearum superficierum etiam diuisione agamus: quæ Geometriæ practicæ pars proprio nomine Geodæsia vocatur. Nam δαίω idem significat, quod partior, vel diuido. Scio plerosque partem etiam illam, quæ magnitudines, & terram metitur, appellare Geodæsiam; Sed hi, auctore Pediasimo de mensuratione & partitione terræ, longe à veritate aberrant. *Nam, inquit, terræ mensuratio duas in partes diuiditur, Geometriam scilicet, & Geodæsiam. Areæ namque secundum artem mensuratio, & terræ mensuratio est, & merito Geometria vocatur, vnius vero, & eiusdem areæ, seu loci diuisio inter diuersas personas, partitio quædam est terræ, & iure optimo Geodæsia appellatur.* Hæc Pediasimus.

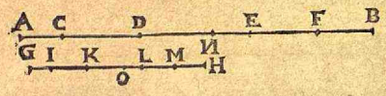
Geometria & Geodæsia quid.

EDIDIT quidem Federicus Commandinus anno 1570. libellum de superficierum diuisionibus Machometo cuidam Bagdedino Arabi adscriptum: ipseque eadem de re alium breuiorem, & magis vniuersalem conscripsit: estque sane libellus vterque acutissimus, & eruditione refertissimus. Idem vero postea argumentum alia via aggressus est, & meo certe iudicio, faciliori, & magis generali, Simon Steuinius Brugensis: sed in qua aliquid desiderari videatur, vt omnibus superficiebus rectilineis (quod ipse velle videtur) conuenire possit, quod facile iudicabunt, qui illius problemata Geometrica attente perlegerint. Res enim proposita nulla ratione confici potest, nisi prius duæ propositiones demonstrentur, quarum priorem ipse sine demonstratione assumit pro principio, posterioris vero ne meminit quidem, cum tamen admodum sit necessaria, & quam Machometus Bagdedinus demonstrauit paulo aliter, quam nos. Has ergo duas propositiones ad initium huius lib. demonstrabimus, & posteriorem quidem longe generalius, quam à Machometo factum est, quod beneuolo Lectori iudicandum relinquo. Deinde superficierum rectilinearum diuisionem aggrediemur, insistentes eiusdem Steuinii vestigiis, nisi quando generalius rem oportebit demonstrare. Nihil autem de ratione Machometi, & Federici Commandini dicemus: tum quia libellus ipsorum in manibus omnium est, ac propterea eum, quicunque volet, legere poterit: tum quia proposita aliqua figura multorum angulorum, non sine difficultate, ac labore eam studiosus diuidet, nisi diuisionis omnium præcedentium figurarum memor sit, quod in nostra ratione non accidit: tum denique quia illorum ratio solum figuris ordinariis conuenit, quæ videlicet omnes angulos habent introrsum, tot nimirum, quot latera figura ipsa continet, nostra autem via figuras etiam illas complectitur, quæ angulos habent partim introrsum, & partim extrorsum vergentes.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI magnitudo in quotuis partes secetur vtcunque, & alia quæpiam magnitudo in totidem partes ordine illis proportionales: habebunt quotlibet partes prioris magnitudinis simul ad reliquas omnes partes simul eandem proportionem, quam totidem partes posterioris magnitudinis simul ad reliquas omnes partes simul. Et si quælibet pars prioris magnitudinis secetur in duas partes vtcunque, secetur autem vt pars posterioris magnitudinis illi parti respondens in alias duas partes duabus illis proportionales: erunt quoque ibidem totæ magnitudines sectæ proportionaliter.

SIT magnitudo AB, secta in quotuis partes vtcunque AC, CD, DE, EF, FB: & alia magnitudo qualiscunque GH, etiamsi diuersi sit generis, secta in totidem partes GI, IK, KL, LM, MH, illis ordine proportionales. Dico ita esse, verbi gratia, duas partes AC, CD, simul ad reliquas tres DE, EF, FB, simul, vt sunt duæ GI, IK, simul ad reliquas tres KL, LM, MH, simul, &c. Quoniam enim est, vt AC, ad CD, ita GI, ad IK, erit componendo etiam, vt AD, ad CD, ita GK, ad IK: Vt autem CD, ad DE, ita est IK, ad KL. Igitur ex æqualitate erit, vt AD, ad DE, ita GK, ad KL.



RVRSVS quia conuertendo est, vt BF, ad FE, ita HM, ad ML; erit quoq; componendo, vt BE, ad FE, ita HL, ad ML: Vt autem FE, ad ED, ita est ML, ad LK. Igitur ex æqualitate erit, vt BE, ad ED, ita HL, ad LK, & componendo, vt BD, ad ED, ita HK, ad LK, & conuertendo, vt DE, ad DB, ita KL, ad KH. Itaque cum ostensum sit, esse vt AD, ad DE, ita GK, ad KL, & vt DE, ad DB, ita KL, ad KH, erit ex æqualitate, vt AD, ad DB, ita GK, ad KH.

NON aliter ostendemus esse, vt AC, ad CB, ita GI, ad IH. Nam rursus conuertendo, componendo, & ex æqualitate erit vt BC, ad DC, ita HI, ad KI; & conuertendo, vt CD, ad CB, ita IK, ad IH. Cum ergo sit, vt AC, ad CD, ita GI, ad IK, & vt CD, ad CB, ita IK, ad IH; erit ex æqualitate, vt AC, ad CB, ita GI, ad IH.

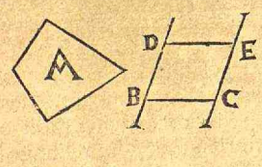
PARI ratione erit, vt AF, ad FB, ita GM, ad MH. Erit namq; rursus componendo, & ex æqualitate, vt AF, ad EF, ita GM, ad LM. Cum ergo sit quoque, vt EF, ad FB, ita LM; ad MH: erit ex æqualitate, vt AF, ad FB, ita GM, ad MH; & sic de cæteris. Constat igitur primum.

DEINDE pars v.g. tertia DE secta sit vtcunq; in partes duas DN, NE; & tertia quoque pars KL, in duas KO, OL, illis proportionales. Dico esse quoque vt AN, ad NB, ita GO, ad OH. Erit enim conuertendo, vt EN, ad ND, ita LO, ad OK, & componendo, vt ED, ad DN, ita LK, ad KO. Quare cum sit, vt CD, ad DE, ita IK, ad KL, & vt DE, ad DN, ita KL, ad KO: erit ex æqualitate, vt CD, ad DN, ita IK, ad KO. atque ita partes AC, CD, DN, partibus GI, IK, KO, proportionales sunt.

RVRSVS quia est conuertendo, vt FE, ad ED, ita ML, ad LK, & componendo, vt DE, ad NE, ita KL, ad OL: erit ex æqualitate, vt FE, ad EN, ita ML, ad LO: & conuertendo, vt NE, ad EF, ita OL, ad LM, ac proinde omnes partes AC, CD, DN, NE, EF, FB, omnibus partibus GI, IK KO, OL, LM, MH, proportionales sunt. Igitur vt in prima parte demonstratum est, erit vt AN, ad NB, ita GO, ad OH. Constat ergo etiam secundum.

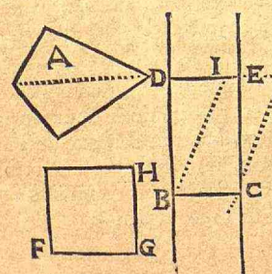
PROBL. 1. PROPOS. 2.

DATO rectilineo, super datam rectam inter alias duas rectas interceptam, constituere quadrilaterum æquale, cuius latus oppositum inter duas eadem rectas interceptum datæ rectæ sit parallelum. Et datis duobus rectilineis inæqualibus quibuscunque, ex maiore per lineam vni lateri parallelam detrahere rectilineum minori æquale, quando id fieri potest, quod ex ipsa problematis solutione cognoscetur.



a 45 primi.

1 SIT rectilineum datum A, & recta data BC, inter duas rectas BD, CE, intercepta: oporteatq; primum constituere rectilineo A, æquale quadrilaterum super datam rectam BC, cuius latus oppositum inter eadem rectas BD, CE, interceptum datæ rectæ BC, sit parallelum. Et si quidem duæ rectæ BD, CE, sint parallelæ (quod tum demum eueniet, cum duo anguli B, C, æquales sunt duob. rectis) efficietur problema, [a] si super rectam BC, constituetur parallelogrammum BE, siue in angulo BCE; siue in angulo CBD, rectilineo A, æquale



b 17. sexti.

2 QVANDO anguli B, C, recti sunt, facilius problema efficiemus hac ratione. Rectilineo dato A, constituatur per ea, quæ in scholio propos. 14. lib. 2 Euclid. vel potius per ea, quæ Num. 4. cap. 4. lib. 4. huius Geometriæ practicæ scripsimus, quadratum FGH, æquale: resoluendo videlicet rectilineum in triangula, vel trapezia, & cuilibet triangulo, vel trapezio æquale quadratum constituendo, ac tandem omnia illa quadrata ad vnum redigendo, vt locis citatis fuse explicauimus. Deinde duabus rectis BC, FG, inueniatur tertia proportionalis BD, ac per D, ipsi BC, parallela agatur DE. Rectangulum enim BE, rectilineo dato A, æquale erit; [b] cum quadrato FGH, æquale sit; propterea quod tres rectæ BC, FG, BD, continue proportionales sunt.

IMMO eodem hoc artificio vti poterimus, quando parallelæ BI, CK, non faciunt angulos rectos ad B, & C. Nam

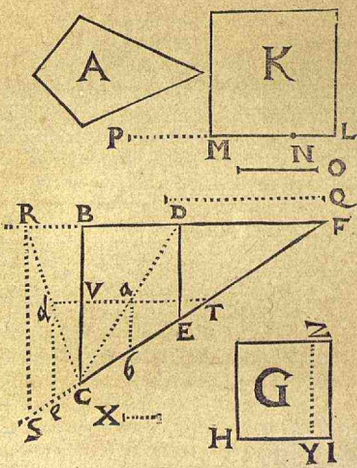
C. Nam constituto rectangulo CD, æquali quadrato FH, id est, rectilineo A, vt dictum est: si producatur latus DE, donec secet rectas BI, CK, in IK, [a] erit parallelogrammum BK, rectangulo CD, æquale, hoc est, rectilineo A.

a 35 primi.

3 Si vero duæ rectæ BD, CE, non sint parallelæ, conueniant ad partes D, E, in F, (quod tum fiet, cum duo anguli DBC, ECB, minores sunt duobus rectis) sitque primum propositum super BC, versus F, constituere trapezium rectilineo A, æquale, habens latus rectæ BC, oppositum eidem BC, parallelum, quod vt fieri possit, necesse est, rectilineum A, minus esse triangulo BCF, vt patet.

RECTILINEO ergo A, construatur per ea, quæ in scholio propos. 14. lib. 2. Euclid. vel potius per ea, quæ Num. 4. cap. 4. lib. 4. huius, vt proxime diximus, æquale quadratum G, cuius latus HI. [b] Item triangulo BCF, æquale quadratum K, cuius latus LM. Deinde duabus rectis LM, HI, reperiatur tertia proportionalis LN. Inuenta autem recta O, media proportionali inter LM, & MN; fiat vt LM, ad O, ita BF, ad FD; ac tandem per D, ipsi BC, parallela agatur DE. Dico Trapezium BE, rectilineo A, æquale esse. [c] Quoniam enim triangulum BCF, ad triangulum DEF, duplicatam proportionem habet lateris BF, ad latus DF, hoc est, rectæ LM, ad rectam O: Habet autem & LM, ad MN, duplicatam proportionem eius, quam habet LM, ad O. quod LM, O, MN, sint continue proportionales. Igitur erit vt triangulum BCF, ad triangulum DEF, ita LM, ad MN; Et per conuersionem rationis, vt triangulum BCF, ad Trapezium BE, ita LM, ad LN. [d] Cum ergo sit, vt LM, ad LN, ita quadratum K, ad quadratum G, quod LM, HI, LN, continue sint proportionales, erit quoque vt triangulum BCF, ad trapezium BE, ita quadratum K, ad quadratum G, hoc est, ita triangulum BCF, quod ipsi K, æquale est, ad rectilineum A, ipsi G, æquale. Quocirca cum triangulum BCF, ad trapezium BE, & ad rectilineum A, eandem habeat proportionem; [e] æqualia erunt trapezium BE, & rectilineum A, quod est propositum.

b 14. secun.



c 19. sexti.

d coroll. 20. sexti.

e 9. quint.

4 SIT deinde super BC, versus R, S, vbi anguli RBC, SCB, duobus rectis sunt maiores, non autem versus punctum concursus F, constituendum trapezium rectilineo A, cuiuscunq; magnitudinis sit, æquale, habens latus oppositum rectæ BC, parallelum. [f] Fiat rursus triangulo BCF, æquale quadratum K, cuius latus LM; & rectilineo A, aliud quadratum G, æquale, cuius latus HI, per ea, quæ ad propositionem 14. lib. 2. Euclid. vel potius per ea, quæ Num. 4. c. 4. lib. 4. huius docuimus. Deinde lateribus LM, HI, inueniatur tertia proportionalis MP, quæ ipsi LM, in continuum & directum sit posita: atque inter totam LP, & LM, reperta sit media proportionalis Q: ac postremo, vt Q, ad LP, ita fiat FB, ad FR, ipsique BC, parallela agatur RS. Dico trapezium BS, rectilineo A, esse æquale. [g] Quoniam enim triangulum BCF, ad triangulum RSF, proportionem habet duplicatam lateris FB, ad latus FR, hoc est, proportionis Q, ad LP; Est autem & proportio LM, ad LP, duplicata proportionis LM, ad Q. vel Q, ad LP, quod tres rectæ LM, Q, LP, sint continue proportionales. Igitur erit vt triangulum BCF, ad triangulum RSF, ita LM, ad LP; ideoque etiam per diuisionem rationis contrariam in scholio propos. 17. lib. 5. Euclid. à nobis demonstratam, vt triangulum BCF, ad trapezium BS, ita LM, ad MP. [h] Vt autem LM, ad MP, ita est. quadratum K, ad quadratum G, quod tres LM, HI, MP, sint continue proportionales. Igitur erit quoque, vt triangulum BCF, ad trapezium BS, ita quadratum K, ad quadratum G. Cum ergo triangulo BCF, constructum sit æquale quadratum K: [i] erit quoque trapezium BS, quadrato G, æquale, hoc est, rectilineo A, cui quadratum G, constructum est æquale, quod est propositum.

f 14. secun.

g 19 sexti.

h coroll. 20. sexti.

i 14. quint.

5 QVOD si quando duæ rectæ BF, CF, in tam remoto puncto concurrant, vt vix haberi possit (quod quidem tunc accidet, cum ipsæ rectæ fere parallelæ sunt) absoluemus problema, etiamsi punctum concursus F, non habeamus, hunc in modum. Sumpto vtcunq; puncto T, in altera earum, nimirum in CF, agatur TV, alteri BF, parallela; & duabus BC, CV, inueniatur tertia proportionalis X. Constructo deinde ex scholio propos. 14. lib. 2. Euclid. vel potius, vt Num. 4. cap. 4. lib. 4. huius docuimus, quadrato G, æquali rectilineo A, inueniatur tribus BC, X, HI, quarta proportionalis IY, agaturq; YZ, lateribus quadrati parallela. [k] Et quoniam est, vt triangulum BCF (si perficeretur) ad triangulum VCT, ita recta BC, ad rectam X, hoc est, ita HI, ad IY, [l] hoc est, ita quadratum G, ad rectangulum IZ: Est autem triangulum BCF, maius quadrato G, siue rectilineo A: (quando enim ad partes angulorum, qui duobus rectis minores sunt, construendum est trapezium dato rectilineo æquale, debet esse triangulum maius rectilineo) [m] erit quoque triangulum VCT, maius rectangulo IZ, Igitur vt Nume. 3. traditum est, construatur trapezium Vb, rectangulo IZ, æquale: & tribus rectis CV, Va, CB, inuenta quarta proportionali BD, [n] (transibit autem recta ducta Ca, per D, si quarta BD, rite est inuenta, [o] ita vt viciſſim recta Ca, si exquisitè ducatur, exhibeat quartam proportionalem quæsitã BD,) demittatur DE, ipsi BC, parallela. Dico trapezium BE, dato rectilineo A, æquale esse. Quoniam enim trapezium BE, trapezio Vb, simile est, per ea, quæ ad propos. 18. lib. 6. Euclid. demonstrauimus; [p] erit trapezium BE, ad trapezium Vb, vt recta BC, ad rectam X, hoc est, vt recta HI, ad IY, [q] hoc est, vt quadratum G, ad rectangulum IZ. Cum ergo trapezium Vb, rectangulo IZ, æquale sit; [r] erit quoq; trapezium BE, quadrato G, hoc est, rectilineo A, æquale, quod est propositum.

k coroll. 19. sexti.

l 1. sexti.

m 14 quin.

n schol. 4. sexti.

o 4. sexti

p coroll 20. sexti.

q 1. sexti.

r 14. quint.

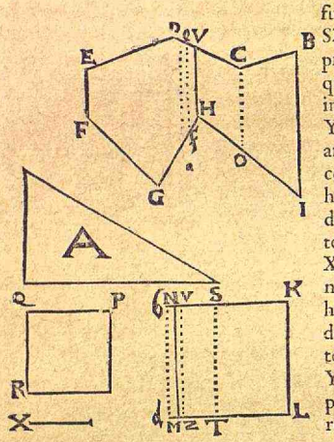
6 NON aliter ex alia parte angulorum RBC, SCB, qui duobus rectis sunt maiores, etiamsi punctum concursus F, non habeatur, trapezium constituemus rectilineo A, æquale, cuiuscunque magnitudinis illud ponatur. Neq; enim in hoc casu necesse est, ipsum esse minus triangulo BCF, si perficeretur. Ducta namq; ex quolibet puncto T, rectæ CF, ipsi BF, parallela TV, eaq; producta, inueniatur duabus rectis BC, CV, tertia proportionalis

portionalis X. Constructo deinde quadrato G, quod rectilineo A, sit æquale, reperiatur tribus rectis BC, X, & HI, quarta proportionalis IY, agaturque YZ, lateribus quadrati parallela, ita vt rursus sit triangulũ BCF, ad triangulum VCT, sicut quadratum G, ad rectangulum IZ. Post hæc, vt Num. 4. præcepimus, rectangulo IZ, construatur trapezium æquale Ve, & tribus rectis CV, Vd, CB, inuenta quarta proportionali BR,[a] (transibit autem recta Cd, ducta per R, si quarta BR, recte inuenta est:[b] ita vt vicissim recta Cd, si accurate ducatur, abscindat quartam proportionalem quæsitam BR,) demittatur RS, ipsi BC, parallela. Dico trapezium BS, rectilineo A, æquale esse. Quoniam enim trapezium BS, trapezio Ve, simile est, per ea, quæ in schol. prop. 18. lib. 6. Euclid. monstrata sunt à nobis;[c] erit trapezium BS, ad trapezium Ve, vt recta BC, ad rectam X, hoc est, vt recta HI, ad rectam IY,[d] hoc est, vt quadratum G, ad rectangulum IZ. Cum ergo trapezium Ve, rectangulo IZ, æquale sit;[e] erit quoque trapezium BS, quadrato G, hoc est, rectilineo A, æquale, quod est propositum.

a schol. 4. sexti.
b 4. sexti.
c coroll. 20. sexti.
d 1. sexti.
e 14. quint.

7 IAM vero datis duobus rectilineis quibuscunq; A, & BCDEFGHI, sit ex posteriore: quod maius ponatur, auferendum rectilineum habens latus lateri BI, parallelum, æquale priori A, quod minus statuatur, si fieri quidẽ id poterit. Fieri autẽ poterit semper in figuris omnes angulos habentib introrsum, in aliis vero nõ semper Per ea, quæ in schol. prop. 14. li. 2. Eucl. vel potius per ea q̃ Nu. 4. c. 4. li. 4. huius tradidimus, construatur quadratũ KM, rectilineo minori A, æquale. Deinde ex angulo C, qui lateri BI, proximus est, ducta lateri BI, parallela CO, cõstituatur rectilineo BO, eadẽ ratione quadratũ æquale PQR; & duab. rectis KN, PQ, inuẽta tertia proportionali KS, ducatur ST, ipsi KL, parallela:[f] Eritque rectangulũ KT, contentũ sub prima linea KL, & tertia KS, quadrato mediæ PQ, h. e. rectilineo BO, æquale. Et quoniã KS, inuenta est in hoc exẽplo minor latere KN, ideoq; & rectangulũ KT, minus quadrato KM, hoc est, rectilineo A; erit etiã rectilineũ BO, minus rectilineo A. Ex propinquiore ergo angulo H, ducta rursum ipsi CO, vel BI, parallela HV, fiat iterum rectilineo CH, æquale quadratum, cuius latus X. Et duabus rectis KN, & X, inuenta tertia proportionali SN, quæ in hoc exemplo terminatur in extremo lateris KN;[g] erit rursum rectangulum SM, sub prima linea ST, & tertia SN, comprehensum æquale quadrato mediæ X, hoc est, rectilineo CH. Cum ergo & KT, ipsi BO, sit ostensum æquale: erit totum quadratum KM, hoc est, rectilineum A, toti rectilineo BCVHOI, æquale; ac proinde ex maiori rectilineo per rectam HV, lateri BI, parallelam rectilineum detraximus minori rectilineo A, æquale, quod faciendum erat.

f 17. sexti.
g 17. sexti.

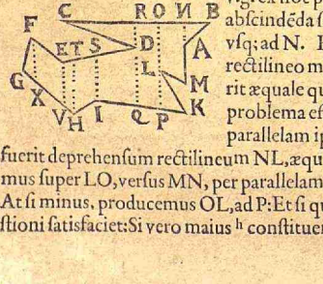


8 QVOD si duabus rectis KN, & X, inuenta tertia proportionalis fuisset minor, quam SN, nimirum æqualis ipsi SY, ita vt rectangulum SZ, quadrato rectæ X, vel rectilineo CH, foret æquale: ducẽda esset ex proximo angulo D, alia parallela Da, & rectilineo DH, constituendũ quadratum æquale, atque rectæ KN, & lateri postremi huius quadrati inuenti adiungenda tertia proportionalis, & ei abscindenda æqualis Yb. Et si Yb, foret minor, quam YN, ducenda adhuc esset ex proximo angulo G, parallela lateri BI, & rectilineo inter hanc parallelam, & Da, comprehenso efficiendum quadratum æquale: ac rectæ KN, & lateri huius quadrati adiungenda tertia proportionalis, &c. Atq; ita progrediendum deinceps, donec inuenta sit tertia proportionalis SN, quæ terminetur in N, (qualis fuit tertia proportionalis SN, duabus KN, & X, inuenta,) vel cuius terminus vltra N, cadat. Quando enim terminatur in N, erit rectilineum inter BI, & vltimam parallelam comprehensum æquale quadrato KM, hoc est, rectilineo A, vt ostensum fuit de rectilineo BH, paulo ante hunc Num. 8. Quando autem terminus tertiæ proportionalis cadit vltra N, videlicet in b, ita vt rectangulum Yd, sit æquale vltimo quadrato inuento, hoc est, rectilineo DH, ac proinde totum rectilineum inter BI, & vltimam parallelam, hoc est, rectangulum Kd, maius quadrato KM, vel rectilineo A, erit vltimum rectilineum DH, maius rectangulo Nd, propterea quod KZ, ipsi BH, æquale est, & Yd, ipsi DH. Quare si super rectam Da, inter rectas DV, aH, constituatur trapezium Df, per parallelam ef, rectangulo Nd, æquale, vt supra Num. 3. traditum est: erit rectilineum inter BI, & ef, parallelas contentum æquale quadrato KM, hoc est, rectilineo A.

CÆTERVM non est necesse, vt semper à proximo angulo parallela ducatur in figura BF. Quando namque sensus iudicaret plus minus, parallelam ex aliquo angulo non proximo ductam auferre rectilineum minus quadrato KM, vel non multo maius, ducenda esset parallela ex eo angulo, & rectilineo abscisso construendum æquale quadratum, & reliqua perficienda, vt prius.

DENIQVE si aliquando deprehenderetur, rectilineum abscissum non esse multo minus quadrato, constituendum esset. vt Nu 3. docuimus, super parallelam illam trapezium æquale rectangulo, quo quadratum KM, rectilineum abscissum superat.

9 EX his puto satis studiosum Lectorem intelligere, quo pacto in aliis exemplis se gerere debeat. Nam si v.g. ex hoc proposito rectilineo irregularissimo per lineam lateri AM, parallelam abscindẽda sit portio æqualis alteri cuipiam rectilineo minori, producemus MA, vsq; ad N. Et si quidem deprehensum fuerit triangulum ABN, esse æquale dato rectilineo minori, (quod scietur, si quadratũ triangulo æquale constructum, fuerit æquale quadrato, quod dato rectilineo minori construitur æquale) recta AN, problema efficiet. Si vero maius, construemus super AN, versus B, trapezium per parallelam ipsi AN, æquale excessui: At si minus, ducemus LO, parallelam. Nam si fuerit deprehensum rectilineum NL, æquale defectui, problema efficiet parallela LO: Si vero maius constituemus super LO, versus MN, per parallelam ipsi MN, trapezium excessui æquale. Ea n. parallela problema soluet: At si minus, producemus OL, ad P: Et si quidem triangulũ KLP, fuerit æquale defectui, tota parallela OP, quæstioni satisfaciet: Si vero maius[h] constituemus in angulo K, triangulum simile triangulo KLP, & excessui æquale; ita



h 25. sexti.

ita vt hoc triangulum vna cum rectilineo per parallelam LO, abscisso sit dato rectilineo minori æquale. Ex quo colliges, problema in hoc casu solui non posse, cum duæ parallelæ, nimirum LO, & illa, quæ triangulum ipsi KLP, simile aufert, resecent ex toto rectilineo BG, partem dato rectilineo minori æqualem. At si triangulum KLP, fuerit minus defectu prædicto, ita vt hoc triangulum vna cum rectilineo per parallelam LO, abscisso sit minus dato rectilineo minore, ducemus per D, parallelam QR. Et si quidem rectilineum PR, æquale fuerit defectui, quo figura KPLMABNO, à dato rectilineo minore deficit, factum erit per parallelam QR, quod iubetur: Si vero maius, parallela, quæ cum QR, versus OP, auferet rectilineũ huic excessui æquale, satisfaciet problemati: At si rectilineum PR, fuerit minus prædicto defectu, & triangulum CDR, inuentum fuerit vltimo huic defectui, quo rectilineum PR, à prædicto defectu deficit, æquale, parallela DQ, quæstionem dissoluet: Si autem triangulum CDR, fuerit maius hoc vltimo defectu,[i] si ad C, constituatur triangulũ excessui æquale. & simile triangulo CDR, satisfacient quæstioni duæ parallelæ, videlicet DQ, & basis prædicti trianguli constituti; atq; in hoc casu pe. vnicam parallelam satisfieri problemati nequit: Si deniq; triangulum CDR, minus extiterit eodem illo vltimo defectu, ducemus parallelam IS. Et si quidem rectilineum DI, æquale fuerit illi, quo triangulum CDR, minus est vltimo illo defectu, erit totum rectilineum ISDCBAMLKI, dato minori rectilineo æquale: Si autem rectilineum DI, inæquale fuerit, progrediemur vlterius, vt iam sæpius dictum est, donec rectilineum inueniamus dato minori rectilineo æquale; Inuenietur autem omnino vnum æquale, cum totum rectilineum BG, maius ponatur. Vides igitur, facile coniici posse, quando problema per vnicam parallelam solui possit, & quando non, sed per duas. Quotiescunq; enim incidemus in eiusmodi triangulum in ipsa constructione, qualia fuerunt KLP, & CDR, ex quo auferendum sit triangulum simile, & æquale excessui alicui, solui problema nequit, nisi per duas parallelas.

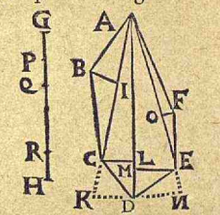
i 25. sexti.

PROBL. 2. PROPOS. 3.

DIVISO rectilineo quolibet in triangula ex vno aliquo puncto, rectas lineas ipsis triangulis ordine proportionales inuenire.

SIT rectilineum quodlibet ABCDEF, diuisum in triangula ABC, ACD, ADE, AEF, per rectas ex angulo A, (vel aliquo puncto assignato in vno latere) ad omnes angulos oppositos ductas, atq; hisce triangulis inueniendæ sint ordine totidem rectæ proportionales. Ex omnibus angulis, dempto angulo A, ad rectas ex A, egredientes ducantur perpendiculares BI, CL, DK, DN, EM, FO, pro altitudinibus triangulorum. (Nihil autem refert, si interdum perpendiculares cadant in rectas extra triangula productas, cuiusmodi hic sunt DK, DN,) ita vt singula triangula binas habeant altitudines, præter duo extrema, quæ singulas duntaxat habent. Deinde in recta quacunque GH, accipiatur GP, æqualis altitudini BI, primi trianguli ABC; & PQ, æqualis altitudini DK, secundi trianguli ACD, respectu eiusdem basis AC. Post hæc fiat,[a] vt CL, altitudo secundi trianguli respectu basis AD, ad EM, altitudinem tertij trianguli ADE, respectu eiusdem basis AD, ita PQ, ad QR, Et vt DN, altitudo tertij trianguli ADE, respectu basis AE, ad FO, altitudinem quarti trianguli AEF, respectu eiusdem basis AE, ita QR, ad RH, atque ita deinceps, si plura fuerint triangula, sumendo semper duas altitudines ad communem basem demissas, &c. Dico quatuor rectas GP, PQ, QR, RH, esse quatuor triangulis ordine proportionales. Nam vt in scholio propos. 1. lib. 6. Euclid. demonstratum est, à nobis, ita est triangulum ABC, ad triangulum ADC, vt altitudo BI, ad altitudinem DK, propter basem communem AC, hoc est, vt GP, ad PQ, cum hæ sumptæ sint illis altitudinibus æquales. Eadem de causa ita est triangulum ACD, ad triangulum ADE, vt altitudo CL, ad altitudinem EM, hoc est, vt PQ, ad QR, cum ex constructione sit, vt CL, ad EM, ita PQ, ad QR. Pari denique ratione ita est triangulum ADE, ad triangulum AEF, vt altitudo DN, ad altitudinem FO, hoc est, vt QR, ad RH, cum sit per constructionem vt DN, ad FO, ita QR, ad RH. Constat ergo id, quod propositum fuit.

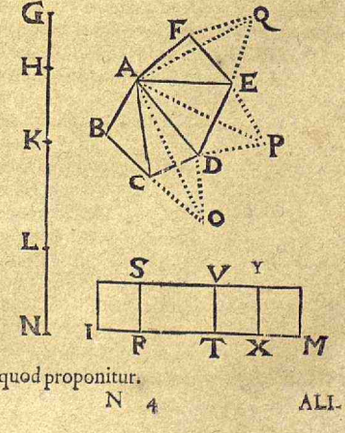
a 12. sexti.



ALITER

SIT rursus rectilineum ABCDEF, diuisum in triangula ABC, ACD, ADE, AEF, ex puncto A. Quoniam bina proxima triangula constituunt quadrilaterum, cuius diameter est latus vtrique triangulo commune, cuiusmodi est ABCD, ducemus diametro AC, ex D, parallelam DO, quæ secet latus BC, productum in O. Sic in quadrilatero ACDE, diametro AD, parallelam ducemus EP, quæ secet latus CD, protractum in P. Itemque in quadrilatero ADEF, diametro AE, parallelam ducemus FQ, quæ latus DE, productum secet in Q. Deinde in recta quauis GN, sumantur GH, HK, ipsis BC, CO, æquales. Et tribus CD, DP, HK, reperiatur quarta proportionalis KL. Ac tandem tribus DE, EQ, KL, quarta proportionalis inueniatur LN. Dico inuentas esse quatuor rectas GH, HK, KL, LN, quatuor triangulis proportionales. Ductis enim ex A, ad O, P, Q, puncta concursuum rectis AO, AP, AQ,[b] erit triangulum ACD, triangulo A, CO; & triangulum ADE, triangulo ADP; & triangulum AEF, triangulo AEQ, æquale.[c] Cum ergo sit, vt BC, ad CO, hoc est, vt GH, ad HK, ita triangulum ABC, ad triangulum ACO, hoc est, ad triangulum ACD: Item vt CD, ad DP, hoc est, vt HK, ad KL, ita triangulum ACD, ad triangulum ADP, hoc est, ad triangulum ADE: Et vt DE, ad EQ, hoc est, vt KL, ad LN, ita triangulum ADE, ad triangulum AEQ, hoc est, ad triangulum AEF: perspicuum est id, quod proponitur.

b 37. primi.
c 1. sexti.



ALITER

RATIONES duæ expositæ, quæ expeditissimæ sunt, propria est triangulorum, in quæ diuiditur figura per rectas ab vno aliquo puncto in quouis latere dato, vel ab aliquo angulo emissas: potest tamen idem hoc problema absolui alio modo, qui in quaslibet figuras conuenit, licet non sit tam expeditus. Ita ergo agemus: Sit eadem figura proxima diuisa in triangula, vel etiam in plurium laterum figuras.[a] Et primo triangulo ABC, vel primæ figuræ, rectangulum, vel quoduis aliud parallelogrammum non rectangulum æquale construatur IS: Et super rectam RS, aliud parallelogrammum ST, secundo triangulo ACD, vel secundæ figuræ æquale, habens angulum SRT, angulo I, æqualem. Item super rectam TV, aliud VX, tertio triangulo ADE, vel tertiæ figuræ æquale, angulum habens VTX, æqualem eidem angulo I: Ac deniq; super rectam XY, aliud YM, quarto triangulo AEF, vel quartæ figuræ æquale, angulum YXM, habens æqualem eidem angulo I: atq; ita deinceps, si plura fuerint triangula, vel figuræ. Dico rectas IR, RT, TX, XM, triangulis, vel figuris esse proportionales. Nam ex quatuor rectangulis, vel parallelogrammis constituitur vnum totum, vt ex demonstratione propos. 45. lib. 1. Euclid. manifestum est, propter angulos I, SRT, VIX, YXM, æquales: ac proinde omnia quatuor eandem habent altitudinem.[b] Igitur rectæ IR, RT, TX, XM, proportionales sunt parallelogrammis, ideoq; & triangulis, siue figuris, quod est propositum.

a 44. vel 45. primi.

b 1. sexti.

PROBL. 3. PROPOS. 4.

DATVM rectilineum per rectam à quouis angulo, vel puncto in aliquo latere ductam in proportionem datam diuidere: ita vt antecedens proportionis, in quam malueris partem, vergat

SIT primum triangulum quodcunque ABC, per rectam ex angulo A, diuidendum in duas partes: ita vt pars ad B, vergens ad reliquam partem habeat proportionem datam D, ad E. Secetur latus BC, dato angulo oppositum per ea, quæ in scholio propos. 10. lib. 6. Euclid. docuimus, in F, ita vt eadem sit proportio BF, ad FC, quæ D, ad E, ducaturque recta AF. Dico esse vt D, ad E, ita triangulum ABF, ad triangulum AFC. [a] Est enim triangulum ABF, ad triangulum AFC, vt BF, ad FC, hoc est, vt D, ad E.

a 1. sexti



DEINDE sit idem triangulum ABC, diuidendum in duas partes, per rectam ex puncto F, dato in latere BC, ita vt pars versus B, ad reliquam partem habeat proportionem datam D, ad E. Ducta ex dato puncto F, ad angulum oppositum A, recta FA, vt totum triangulum in duo triangula sit sectum: [b] reperiantur duæ rectæ GH, HI, habentes eandem proportionem, quam triangulum ABF, ad triangulum AFC: totaque GI, secetur in H, vt eadem sit proportio GH, ad HI, quæ D, ad E. Et quia punctum H, cadit in extremum primæ lineæ GH; estque vt GH, ad HI, hoc est, vt D, ad E, ita triangulum ABF, ad triangulum AFC, diuidet recta FA, ex dato puncto F, ad oppositum angulum A, ducta triangulum ABC, in duas partes in data proportione D, ad E.

b 3. huius.

SIT rursus data proportio K, ad L, diuidendumque sit triangulum ABC, ex puncto F, in duas partes eiusdem proportionis. Diuidatur tota GI, in M, ita vt eadem sit proportio GM, ad MI, quæ K, ad L. Et quoniam diuisionis punctum M, cadit in primam partem GH, totius lineæ GI, secabimus BA, basem primi trianguli dato puncto F, oppositam, in N, vt eadem sit proportio BN, ad NA, quæ GM, ad MH. Dico ductam rectam FN, problema efficere, hoc est, ita esse triangulum BFN, ad trapezium FNAC, vt K, ad L. Quoniam enim rectę GH, HI, triangulis ABF, AFC, proportionales inuentæ sunt: & tam primam partem GH, in M, quam primum triangulum ABF, per rectam FN, secuimus proportionaliter, [c] cum sit triangulum BFN, ad triangulum NFA, vt BN, ad NA, hoc est, vt GM, ad MH, [d] erit vt GM, ad MI, id est, vt K, ad L, ita BFN, triangulum ad trapezium FNAC, quod est propositum.

c 1. sexti.

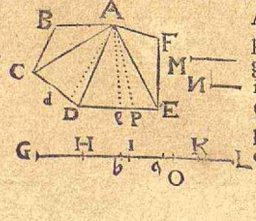
d 1. huius.

DENIQVE data sit proportio O ad P, secandum que sit triangulum ABC, in duas partes eiusdem proportionis. Diuisa tota GI, in Q, ita vt eadem sit proportio GQ, ad QI, quæ O, ad P, quoniam punctum diuisionis Q, cadit in secundam partem HI, totius lineæ GI, diuidemus AC, basem secundi trianguli dato puncto F, oppositam in R, vt eadem sit proportio AR, ad RC, quæ HQ, ad QI. Dico ductam rectam FR, problema efficere, hoc est, ita esse trapezium ABFR, ad triangulum RFC, vt O, ad P. Quoniam enim rectæ GH, HI, repertæ sunt triangulis ABF, AFC, proportionales; & tam secundam partem HI, in Q, quam secundum triangulum AFC, per rectam FR, secuimus proportionaliter: [e] cum sit triangulum AFR, ad triangulum CFR, vt AR, ad RC, hoc est, vt HQ, ad QI, [f] Erit vt GQ, ad QI, hoc est, vt O, ad P, ita trapezium ABFR, ad triangulum RFC, quod est propositum.

e 1. sexti.

f 1. huius.

IAM vero si antecedens proportionis vergere debeat versus C, proportioque data sit O, ad P; fiet id commodissime, si triangulum ex F, diuidatur secundum proportionem P, ad O, ita vt antecedens vergat versus B, sicut docuimus. Nam tunc pars versus C, ad reliquam habebit proportionem, quam O, ad P, per conuersam proportionalitatem. Quod etiam in aliis figuris intelligi volo.



SIT deinde multilatera figura quæcunque ABCDEF, per rectam ex angulo A, ductam secanda in duas partes, ita vt pars ad B, vergens ad reliquam partem proportionem habeat datam M, ad N. Ductis ex dato angulo A, ad omnes angulos oppositos rectis partientibus figuram in quatuor triangula; [g] inueniantur ipsis quatuor rectæ proportionales GH, HI, IK, KL. Tota deinde GL, secetur in O, vt eadem sit proportio GO, ad OL, quæ M, ad N. Et quoniam diuisionis punctum O, cadit in tertiam lineam IK, secabimus tertii trianguli basem DE, dato angulo A, oppositam in P, vt secta est IK, in O, ducemusque rectam AP.

g 3. huius.

Dico

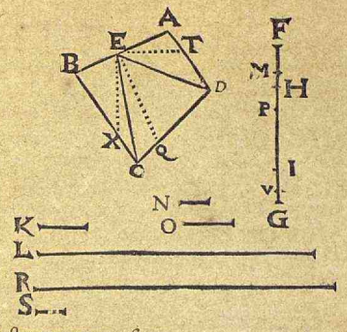
Dico esse rectilineum ABCDIA, ad rectilineum APEFA, vt GO, ad OL, hoc est, vt M, ad N. Quoniam enim triangula rectilinei dati proportionalia sunt ordine rectis GH, HI, IK, KL, per constructionem, tertium q; triangulum ADE, & lineam tertiam IK, diuisimus proportionaliter per rectam AP, & in puncto O; [a] cum sit vt DP, ad PE, hoc est, vt IO, ad OK, ita triangulum ADP, ad triangulum APE; [b] Erunt totæ quoque magnitudines sectæ proportionaliter, hoc est, erit ABCDPA, ad APEFA, vt GO, ad OL, hoc est, vt M, ad N, quod est propositū.

a 1. sexti.

b 1. huius.

QVOD si punctum O, diuidens rectam GL, in duas partes proportionis datæ M, ad N, caderet in aliquod punctorum H, I, K, vt in I, terminum secundæ lineæ HI, diuideret recta AD, terminans secundum triangulum ACD, totum rectilineum in datam proportionem Nam tunc per primam partem propos. 1. huius lib. esset ABCDA, ad ADEFA, vt M, ad N, vt perspicuum est.

DATVM præterea sit rectilineum ABCD, ex puncto E, dato in latere AB, diuidendum in duas partes, quarum prior ad B, vergens ad posteriorem partem habeat proportionem datam K, ad L. Ductis ex dato pūcto E, ad omnes angulos oppositos rectis diuidentibus rectilineum in tot triangula vno minus, quot latera figura habet; [c] inueniantur rectæ FH, HI, IG, triangulis EBC, ECD, EDA, proportionales. Secta deinde tota FG, in M, secundum datam proportionem K, ad L: quoniam diuisionis punctum M, incidit in primam lineam FH, diuidemus primi trianguli EBC, basem BC, dato puncto E, oppositam in X, vt FH, secta est in M. Iuncta namque recta EX, [d] erit triangulum EBX, ad figuram EXCDAE, vt FM, ad MG, hoc est, vt K, ad L, propterea quod triangula EBC, ECD, EDA, rectis FH, HI, IG, proportionalia sunt ex constructione; & primæ partes EBC, FH, sectæ sunt per rectam EX, & in M, proportionaliter; [e] cum sit EBX, ad EXC, vt BX, ad XC, hoc est, vt FM, ad MH. Constat ergo propositum.



c 3. huius.

d 1. huius.

e 1. sexti.

SI proportio data sit N, ad O; secta FG, in P, secundum proportionem N, ad O, cadet diuisionis punctum P, in secundam lineam HI. Igitur si secundi trianguli ECD, basis CD, dato puncto E, opposita secetur in Q, vt est HI, in P, nectaturq; recta EQ, [f] erit rursus figura EBCQE, ad figurā EQDA, vt FP, ad PG, hoc est, vt N, ad O.

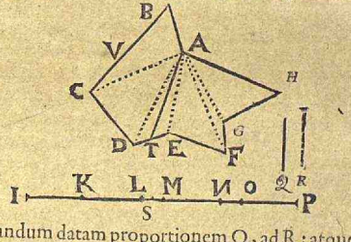
f 1. huius.

SI denique data sit proportio R, ad S, secta FG, in V, secundum proportionem R, ad S, cadet diuisionis punctum V, in tertiam lineam IG. Quam ob rem si tertij trianguli EDA, basis DA, dato puncto E, opposita secetur in T, vt secta est IG, in V, iungaturq; recta ET; [g] erit rursus figura EBCDTE, ad triangulum ETA, vt FV, ad VG, hoc est, vt R, ad S.

g 1. huius.

ATQVE hac via procedendum est in omnibus aliis figuris, quæ latera totidem habeant, quot angulos, id est, in quibus omnes anguli introrsum vergant.

IDEM hoc problema efficiemus in rectilineo, cuius anguli partim extrorsum vergant, & partim introrsum, dummodo ab angulo, vel puncto dato in latere duci possint lineæ rectæ diuidentes rectilineum in triangula, quæ nullum ipsius latus secent. Vt in hac figura octo laterum ABCDEFGH, cuius quinque anguli B, C, D, F, H, introrsum vergunt, & reliqui tres BAH, DEF, FGH, extrorsum, ductæ sunt rectæ ex angulo A, ad omnes angulos, præter quam ad duos proximos B, H, nullum figuræ latus intersecantes. [h] Si igitur reperiantur sex rectæ IK, KL, LM, MN, NO, OP, sex triangulis ABC, ACD, ADE, AEF, AFG, AGH, proportionales; & tota linea LP, secetur in S, secundum datam proportionem Q, ad R; atque basis DE, tertij trianguli. (Nam diuisionis punctum S, in tertiam lineam LM, incidit) dato puncto A, opposito diuidatur in T, vt linea LM, in S, diuisa est, ducaturque recta AT: [i] Erit figura ABCDTA, ad figuram ATEFGHA, vt IS, ad SP, hoc est, vt Q, ad R.

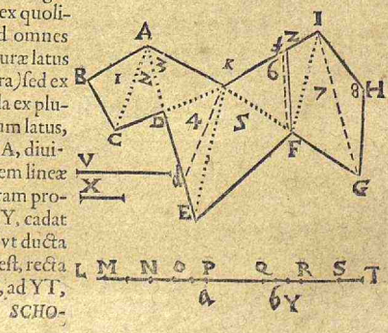


h 3. huius.

i 1. huius.

EX angulo B, vel H, non poterit proposita figura in quamcunq; proportionem diuidi: quia lineæ ex eorum vtrolibet ad oppositos angulos emissæ partim secant latera, & partim cadunt extra figuram. Quod si data portio minor esset, quam figuræ BCDEB, (si nimirum intelligatur ducta recta BE,) ad figuram BEFGHAB, tum demum diuidi posset ex B, tota figura in datam proportionem: propterea quod fierent duo triangula BCD, (ducta videlicet recta BD,) BDE, ad punctum B, quorum bases sunt latera figuræ CD, DE; alia vero quatuor ABE, AEF, AFG, AGH, ad punctum A, quorum etiam bases sunt figuræ latera AB, EF, FG, GH, &c.

EODEM modo quamcunq; figuram rectilineam, etiam irregulariſſimam, partiemur in datam proportionem, non quidem ex quolibet angulo, vel puncto dato, (nisi ex eo duci possint rectæ ad omnes angulos oppositos, exceptis duobus proximis, quę nullum figuræ latus intersecenti: cuiusmodi esset punctum V, in antecedenti figura) sed ex aliquo puncto particulari; si prius figura diuidatur in triangula ex pluribus punctis, ita vt quodlibet triangulum habeat saltem vnum latus, quod etiam sit latus figuræ. Vt si figura hæc ABCDEFHHIKA, diuidatur in octo triangula, & illis in recta LT, [k] inueniātur totidem lineæ proportionales, totaque linea LT, secetur in Y, secundum datam proportionem V, ad X & basis IK, sexti trianguli (quod punctum Y, cadat in sextam lineam QR,) secetur in Z, vt secta est QR, in Y; [l] ita vt ducta recta FZ, triangulum FIK, sectum sit, vt secta est basis IK, hoc est, recta QR: [m] Erit figura ABCDEFZKA, ad figurā FZIHGF, vt LY, ad YT, h.e. vt V, ad X. Et sic de cæteris.



k 3. huius.

l 1. sexti.

m 1. huius.

SCHO-

SCHOLIVM.

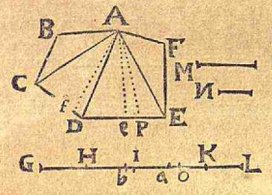
Quo pacto figura data secetur ex dato angulo vel puncto in latere, in quotuis partes æquales.

HIS ritè intellectis, licebit nobis quamlibet figuram secare in quotuis partes æquales ex dato angulo, vel puncto in latere, ex quo duci possint ad omnes angulos, exceptis proximis duobus, rectæ lineæ, ita vt nullum figuræ latus secent. Nam si proposita figura sit secanda, verbi gratia in 7. partes æquales, diuidemus eam secundum proportionem 1. ad 6. nimirum secundum submultiplicem denominatam à denominatore partium, minus vno, in quas figura diuidenda est. Ita enim prior pars erit $\frac{1}{7}$ totius figuræ, cum posterior 6. eiusmodi partes complectatur. Hanc deinde posteriorem partem secabimus secundum proportionem 1. ad 5. ita vt prior pars contineat $\frac{1}{6}$ ipsius hoc est, $\frac{1}{7}$ totius figuræ. Post hæc posteriorem huius secundæ diuisionis partem partiemur secundum proportionem 1. ad 4. Ac rursus partem huius tertiæ diuisionis posteriorem diuidemus secundum proportionem 1. ad 3. Atque posteriorem huius quartæ diuisionis partem secabimus secundum proportionem 1. ad 2. Ac postremo partem posteriorem huius quintæ diuisionis partiemur in duas partes æquales, nimirum secundum proportionem 1. ad 1.



NON aliter figuram irregularem, in qua à nullo angulo, vel puncto in latere, duci possunt rectæ ad angulos oppositos, quin aliqua figuræ latera secentur, diuidere licebit in partes quotuis æquales, ex diuersis angulis, vel punctis. Nam si verbi gratia vltima figura huius propositionis diuidenda sit in 5. partes æquales; resecabimus ex ea, ab aliquo angulo, vel puncto, quintam partem. Deinde ex maiore parte complectente $\frac{4}{5}$. totius figuræ, ab aliquo eius angulo, vel puncto, detrahemus quartam partem: Item tertiam partem ex maiore parte huius diuisionis: Ac tandem semissem ex vltima parte postremæ huius diuisionis. Hac enim ratione diuisa erit tota figura in 5. partes: non secus atque in linea recta AB, contingit. Si namq; eam partiri iubeamur in 7. partes æquales, efficiemus id, si primo loco septimam partem AC, detrahemus; deinde $\frac{1}{6}$. CD, ex reliqua linea CB; & ex reliqua DB, quintam partem DE: & ex reliqua EB, quartam partem EF; & ex reliqua FB, tertiam partem FG: Ac denique reliquam lineam GB, bifariam secabimus in H, hoc est, semissem GH, ex ea abscindemus.

FACILIVS idem exequemur, quando ex dato angulo, vel puncto, duci possunt rectæ ad omnes angulos, duobus proximis exceptis, nullum figuræ latus secãtes. hac ratione. Lineam ex rectis, quæ triangulis figuræ proportionales sunt, conflatam secabimus in tot partes æquales, in quot figuram partiri iubemur. Si enim bases triangulorum dato angulo, vel puncto oppositas, quæ lineis, in quas puncta diuisionum cadunt, respondent, ita diuidemus, vt sectæ sunt respondentes lineæ, atque ex dato angulo vel puncto, ad diuisionum puncta rectas ducemus, factum erit, quod proponitur. Vt si secunda figura huius propos. secanda sit in 5. partes æquales, partiemur lineam GL, in 5. æquales partes GH, Hb, ba, aK, KL. Et quoniam primum punctum H, cadit in H, erit triangulum ABC, quinta figuræ pars; [a] cum sit vt GH, ad HL, ita triangulum ABC, ad reliquam partem figuræ. Deinde secabimus basem secundi trianguli in d, vt secunda linea HI, secta est in b: Et basem tertii trianguli in e, vt tertia linea IK, secta est in a; rectasque ducemus A d, Ae. Quia vero quartum punctum K, cadit in K, terminum quartæ lineæ IK, erit figura diuisa in 5. partes æquales ABC, ACd, AdDe, AeE, AEF: [b] propterea quod hæ partes partibus GH, Hb, ba, aK, KL, proportionales sunt.



a 1. huius.

b 1. huius.

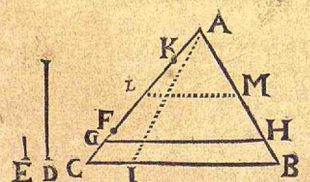
NEQVE vero difficile erit hanc eandem rationem figuris irregularibus, qualis est vltima huius propos. accommodare. Si enim ea diuidenda sit, verbi gratia in tres partes æquales, secanda erit linea LT, in tres æquales partes La, ab, bT. Et quarti trianguli basis DE, diuidenda in d, vt quarta linea OP, diuisa est in a: Item sexti trianguli basis KI, secanda in f, vt sexta linea QR, in b, secta est. Nam si ex K, angulo basi DE, opposito recta ducatur Kd: Item ex angulo F, basi KI, opposito recta Ff, erunt tres partes figuræ ABCDdKA, KdEFfK, fFGHIf, inter se æquales: [c] cum sint rectis La, ab, bT, proportionales. Eademque de cæteris ratio est.

c 1. huius.

PROBL. 4. PROPOS. 5.

DATVM rectilineum per rectam lineam datæ rectæ parallelam in datam proportionem diuidere, ita vt antecedens proportionis in quam elegeris partem vergat.

SIT primo triangulum ABC, diuidendum in duas partes per lineam lateri BC, parallelam, vt pars versus A, ad reliquam habeat proportionem datam D, ad E. Alterutro laterum, cui linea diuidens æquidistare non debet, videlicet AC, diuiso in F, vt eadem sit proportio AF, ad FC, quæ D, ad E, initio facto ab angulo A, versus quem antecedens proportionis vergere debet, reperiatur inter totum latus AC, & eius partẽ AF, quæ terminatur in angulo A, qui lateri opponitur, cui æquidistans ducenda est, media proportionalis AG, agaturque per G, ipsi BC, parallela GH. Dico hanc parallelam problema efficere, id est, eandem esse proportionem trianguli AGH, ad trapezium BCGH, quæ est D, ad E. [a] Quoniam enim triangulum ABC, ad triangulum AGH, est vt latus AC, ad rectam AF, quod tres rectæ AC, AG, AF, continue proportionales sint, & triãgula ABC, AGH, super AC, AG, similia similiterq; posita; Erit per conuersionem rationis triangulum ABC, ad trapezium BCGH, vt AC, ad FC. Ergo diuidendo erit triangulum AGH, ad trapezium BCGH, vt AF, ad FC, hoc est, vt D, ad E, quod est propositum. Quod etiam ita colligemus. [b] Quoniam est triangulum ABC, ad triangulum AGH, vt recta AC, ad AF; erit diuidendo trapezium BG, ad triangulum AGH, vt FC, ad AF: Et conuertendo triangulum AGH, ad trapezium BG, vt AF, ad FC, hoc est vt D, ad E.



a coroll. 19. sexti.

b coroll. 19. sexti.

ALI-

ALITER

DIVISO latere quocunque, nimirum BC, in I, secundum datam proportionem D, ad E, iunctaque recta AI: [a] erit triangulum ABI, ad triangulum AIC, vt BI, ad IC, id est, vt D, ad E. [b] Si igitur super BC, inter rectas BA, CA, constituatur trapezium BG, per parallelam GH, æquale triangulo AIC, quod est consequens; erit reliquum triangulum AGH, reliquo triangulo ABI, æquale. [c] Quare erit triangulum AGH, ad trapezium BG, vt triangulum ABI, ad triangulum AIC, hoc est, vt BI, ad IC, vel vt D, ad E. Sed prior via expeditior est: placuit tamen hanc alteram etiam proponere; quia generalis ferme est, & in omnes figuras multilateras quadrat, vt infra patebit.

a 1. sexti

b 1. huius.

c 7. quinti.

NON secus id, quod propositum est, exequemur, si antecedens proportionis vergere debeat ad latus BC, cui recta ducẽda est parallela. Diuiso enim rursus latere AC, in K. secundum datam proportionem D, ad E, ita vt antecedens proportionis incipiat à latere BC; inueniatur inter totam AC, & eius partem AK, quæ est consequens proportionis, media proportionalis AL, agaturque per L, lateri BC, parallela LM. Dico hanc parallelam problema efficere, hoc est, eandem esse proportionem trapezij BL. ad triangulum ALM, quæ est D, ad E. [d] Quia enim est, vt triangulum ABC, ad triangulum ALM, ita CA, ad AK, quod tres rectæ AC, AL, AK, continue sint proportionales, & triangula ABC, ALM, super AC, AL, similia similiterque posita; Erit diuidendo trapezium BL, ad triangulum ALM, vt CK, ad AK, hoc est, vt D, ad E, quod est propositum. Hoc idem effici etiam potest via illa altera generali, quamuis non ita expedite. Diuiso enim quocunque latere, nimirum BC, in I, secundum datam proportionem D, ad E, iunctaque recta AI, [e] erit triangulum ABI, ad triangulum AIC, vt BI, ad IC, id est, vt D, ad E. [f] Si igitur super BC, inter rectas BA, CA, constituatur trapezium BL, per parallelam LM, æquale triangulo ABI, quod est antecedens: erit reliquum triangulum ALM, reliquo triangulo AIC, æquale. [g] Quare erit trapezium BL, ad triangulum ALM, vt triangulum ABI, ad triangulum AIC, hoc est, vt BI, ad IC, vel vt D, ad E.

d coroll. 19. sexti.

e 1. sexti.

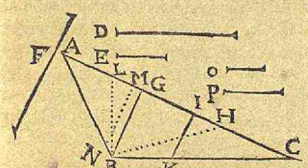
f 2. huius.

g 7. quinti.

SED diuidendum iam sit triangulum ABC, in datam proportionem D, ad E, per lineam parallelam cuicunq; lineæ F: quæ si æquidistet vni laterum, partiemur triangulum in datam proportionem, per rectam illi lateri parallelam, vt iam tradidimus, siue antecedens vergere debeat ad angulum lateri illi oppositum, siue ad ipsummet latus: factumq; erit, quod iubetur; [h] cum parallela illa æquidistet etiam datæ rectæ lineæ.

h 30. primi.

SI vero data recta F, nulli laterum æquidistet, ducatur illi ex aliquo angulo parallela intra triangulum cadens, qualis est BG. Si igitur antecedens proportionis statuendum sit ad partes A, secabimus latus AC, in H, in datam proportionem D, ad E. Cadat autem primo punctum H, inter G, & C; inueniaturque inter GC, & ieus partem CH, terminatam in angulo C, parallela BG, oppositio media proportionalis CI; & per I, ipsi BG, vel ipsi F, parallela agatur IK; quam dico problema efficere: hoc est, esse trapezium ABKI, ad triangulũ IKC, vt D, ad E. [i] Quoniam enim est (ducta recta BH,) vt triangulum GBC, ad triangulum IKC, ita GC, ad CH, quod tres GC, CI, CH, sint continue proportionales, & triangula similia similiterq; posita: [k] Vt autem GC, ad CH, ita est quoque triangulum GBC, ad triangulum HBC; [l] erunt triangula IKC, HBC, æqualia: Ac proinde & reliquum trapezium ABKI, reliquo triangulo ABH, æquale erit. [m] Igitur erit vt trapezium ABKI, ad triangulum ICK, ita triangulum ABH, ad triangulum HBC. hoc est, ita AH, ad HC, vel ita D, ad E, quod est propositum.



i coroll. 19. sexti.

k 1. sexti.

l 9. quinti.

m 7. quint.

CADAT deinde punctum L, (Ponimus iam datam proportionem E, ad D, diuisamque esse AC, in L, secundum datam proportionem) inter A, & G. Inuenta ergo inter GA, & eius partẽ AL, terminatam in angulo A, parallelæ BG, opposito, media proportionali AM, agatur per M, ipsi GB, ideoque & ipsi F, parallela MN, quam dico problema efficere, hoc est, esse triangulum AMN, ad trapezium MNBC, vt E, ad D. Iuncta namque recta BL, [n] quoniam est, vt triangulum ABG, ad triangulum AMN, ita AG, ad AL, quod tres AG, AM, AL, continue proportionales sint, & triangula similia similiterque posita: [o] Vt autem AG, ad AL, ita est quoque idem triangulum ABG, ad triangulum ABL: [p] erunt triangula AMN, ABL, æqualia: ac proinde & reliquum trapezium MNBC, reliquo triangulo LBC, æquale erit. [q] Quapropter erit triangulum AMN, ad trapezium MNBC, vt triangulum ABL, ad triangulum LBC, [r] hoc est, vt AL, ad LC, vel E, ad D, quod est propositum.

n coroll. 19. sexti.

o 1. sexti.

p 9. quinti.

q 7. quinti.

r 1. sexti.

QVOD si punctum diuisionis caderet in G, quod contingeret, si data esset proportio O, ad P; Ipsamet parallela BG, problema efficeret; [s] cum sit triangulum ABG, ad triangulum GBC, vt AG, ad GC, hoc est, vt O, ad P. Et si antecedens statui debet versus C, & data proportio esset P, ad O; [t] erit quoque triangulum CBG, ad triangulum ABG, vt CG, ad GA, vel vt P, ad O.

s 1. sexti.

t 1. sexti.

ALITER

DIVISO quouis latere, videlicet AC, in H, secundum datam proportionem D, ad E, iunctaque recta BH; quia punctum H, cadit inter G, & C, [u] fiat super BG, inter rectas BC, GC, trapezium BI, per parallelã IK, æquale triangulo BGH: Eritq; propterea totum trapezium ABKI, toti triangulo ABH, æquale. atq; idcirco & reliquum triangulum IKC, reliquo triangulo BCH. [x] Quocirca erit trapezium ABKI, ad triangulum IKC, vt triangulum ABH, ad triangulum BCH, [y] hoc est, vt AH, ad HC, vel vt D, ad E.

u 2. huius.

x 7. quinti.

y 1. sexti.

DIVISO rursus latere AC, in L, secundum datam proportionem E, ad D, iunctaque recta BL, quoniam punctum L, cadit inter A, & G, [z] fiat super BG, inter rectas BA, GA, trapezium BM, per parallelam MN, æquale triangulo BGL: Eritque propterea & totum trapezium MNBC, toti triangulo LBC, & reliquum triangulum AMN, reliquo triangulo ABL, æquale. [a] Quam ob rem erit triãgulum AMN, ad trapezium MNBC, vt triangulum ABL, ad triangulum LBC, [b] hoc est, vt AL, ad LC, vel vt E, ad D, quod erat faciendum.

z 2. huius.

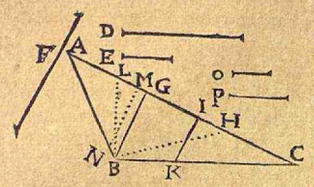
a 7. quinti.

b 1. sexti.

NON

NON aliter problema absoluemus, si antecedens proportionis vergere debeat ad partes C. Diuiso namq; latere CA, in L, in proportionem datam D, ad E: Quoniam punctum L, cadit inter A, & G; inueniemus inter GA, AL, mediam proportionalem AM, & per M, ipsi BG, parallelam ducemus MN, quam dico problema efficere, id est, ita esse trapezium MNBC, ad triangulum AMN, vt D, ad E. Iuncta namq; recta BL:[a] quoniam triangulum ABG, ad triangulum AMN, est vt AG, ad AL, quod tres AG, AM, AL, continue sint proportionales, & triangula similia similiterque posita:[b] Vt autem AG, ad AL, ita est quoque idem triangulum ABG, ad triangulum ABL;[c] æqualia erunt triangula AMN, ABL; ac proinde & reliquum trapezium MNBC, reliquo triangulo LBC, æquale erit. Igitur erit trapezium MNBC, ad triangulum AMN, vt triangulum LBC, ad triangulum ABL,[d] hoc est, vt CL, ad LA, vel vt D, ad E.

a *coroll. 19. sexti.* b *1. sexti.* c *9. quinti.* d *1. sexti.*



e *coroll. 19. sexti.*

QVOD si proportio data sit E, ad D; diuiso eodem latere CA, in H, n proportionem datam E, ad D, ductaque recta BH; quoniam punctum H, cadit inter G, & C, reperiemus inter GC, CH, mediam proportionalem CI, & per I, parallelam ipsi BG, agemus IK: quam dico problema efficere, hoc est, esse triangulum CIK, ad trapezium IKBA, vt CH, ad HA, vel vt E, ad D. Iuncta enim recta BH;[e] quoniam est triangulum CBG, ad triangulum CIK, vt CG, ad CH; quod tres CG, CI, CH, sint continue proportionales, & triangula similia similiterque posita:[f] Vt autem CG, ad CH, ita quoque est idem triangulū CBG, ad triangulū CBH:[g] æqualia erunt triangula CIK, CBH, ideoque & reliquum trapeziū IKBA, reliquo triangulo HBA, æquale erit.[h] Quocirca erit triangulum CIK, ad trapezium IKBA, vt triangulum CBH, ad triangulum HBA,[i] hoc est, vt CH, ad HA, vel vt E, ad D, quod faciendum erat.

f *1. sexti.* g *9. quinti.* h *7. quinti.* i *11. sexti.*

FIET idem quoque aliter, si cadente puncto diuisionis L, inter A, & G,[k] constituatur trapezium GN, per parallelam MN, æquale triangulo BGL; Cadente vero puncto diuisionis H, inter G, & C, trapezium constituatur BI, æquale triangulo BGH, per parallelam IK, &c.

k *2. huius.*

PRÆTEREA quadrilaterum ABCD, diuidendum sit per lineam lateri CD, parallelam in duas partes vt pars versus A, ad reliquam habeat datam proportionem E, ad F. Per ea, quæ in scholio propos. 14. lib. 2. Eucl. vel potius per ea, quæ Num. 4. cap. 4. lib. 4. huius tradidimus, quadrilatero ABCD, constituatur quadratum æquale GHIK; sitque latus GK, in L, in proportionem E, ad F, datam, & per L, ipsi GH, parallela agatur LM. Deinde super CD, inter rectas CB, DA,[l] fiat rectilineo LI, æquale quadrilaterum DO, habens latus NO, lateri CD, parallelum: Et si quidem punctum O, cadit in latus CB, vel in ipsum punctum B, recta NO, problema efficiet. Cum enim quadratum GI, toti quadrilatero AC, æquale sit, & rectangulum ablatum LI, quadrilatero ablato DO; erit quoque reliquum rectangulum GM, reliquo rectilineo ANO, æquale.[m] Quapropter erit ANO, ad DO, vt GM, ad MK;[n] hoc est, vt GL, ad LK, vel vt E, ad F, quod est propositum.

l *2. huius.* m *7. quint.* n *1. sexti*

SI vero punctum O, cadit in CB, latus productū, (quod hic fiet, si proportio data sit Q, ad R. Diuiso enim latere GK, in S, in datam proportionem Q, ad R; ductaque ST, parallela lateri GH; si super CD, inter rectas DA, CB,[o] fiat rectangulo KT, æquale quadrilaterum DO, cadet O, vltra B, & parallela NO, secabit latus AB, in P,) p constituemus super NP, inter rectas NA, PA, per parallelam VX, trapezium NV, triangulo BOP, æquale, factum erit, quod iubetur. Addito enim communi rectilineo CDNPB; erit totum rectilineum CDXVB, toti rectilineo DO, hoc est, rectangulo KT, æquale; ideoque & reliquum triangulum AVX, reliquo rectangulo GT, æquale. Quare erit triangulum AVX, ad rectilineum CDXVB, vt GT, ad KT,[r] hoc est, vt GS, ad SK, vel vt Q, ad R, quod erat faciendum.

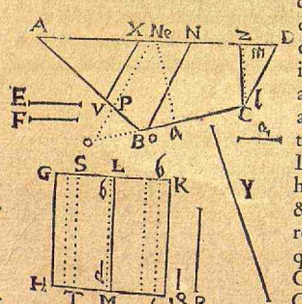
o *2. huius.* p *2. huius.* q *7. quint.* r *1. sexti.*

NON alia ratione problema absoluemus, si antecedens proportionis statuendum sit ad partes CD. Sit namque data proportio F, ad E, vel R, ad Q. Diuiso ergo latere KG, quadrati GI, quod quadrilatero AC, factum est æquale in L, secundum proportionem datam F, ad E; vel in S, secundum datam proportionem R, ad Q, ductaque parallela LM, vel ST:[s] si super CD, inter rectas DA, CB, constituemus rectilineum DO, rectangulo KM, vel rectilineum CDXVB, rectangulo KT, æquale per parallelam NO, vel XV, vt paulo ante dictum est, solutum erit problema, vt liquet.

s *2. huius*

VERVM idem quadrilaterum ABCD, diuidendum sit per parallelam cuilibet alteri lineæ Y, in proportionem E, ad F, ita vt antecedens proportionis vergat ad A; Si igitur data recta Y, æquidistet vni lateri, particmu[t] datum quadrilaterum in datam proportionem per lineam illi lateri, proindeque & rectæ Y, parallelam, vt proxime scripsimus. Si vero nulli lateri recta Y, æquidistet, ducemus ei ex aliquo angulo, vt ex C, parallelam CZ, quæ intra quadrilaterum cadat; & ablato triangulo CDZ, vel rectilineo ablato, auferemus ex quadrato GI, quod toti quadrilatero sit æquale, rectangulum æquale Kd, (quod fiet, si triangulo, vel rectilineo CDZ, fiat æquale quadratum, cuius latus a; & duabus KI, & a, tertia proportionalis reperiatur Kb. Ducta enim bd, ipsi KI, parallela,[t] erit rectangulum Kd, quadrato lateris a, hoc est, rectilineo CDZ, æquale.) Et si quidem parallela bd, cadit inter KI, & LM,[n] construemus super CZ, inter rectas CB, ZA, rectilineum Ca e Z, rectangulo b M, æquale, cuius latus a e, lateri CZ, hoc est, datæ rectæ Y, æquidistet; factumque erit, quod præcipitur. Erit enim totum rectilineum CD e a, toti rectangulo KM; ac propterea & reliquum A B a e, reliquo GM, æquale.[x] Quapropter erit A Bae, ad e a c D, vt GM, ad KM;[y] hoc est, vt GL, ad LK, vel vt E, ad F. Si vero parallela b d, coincidit cum recta LM, efficiet problema recta CZ: quia cum KM, rectilineo CDZ, sit æquale, erit reliquū rectangulum GM, reliquo rectilineo ABCZ, æquale; z atq; idcirco erit ABCZ, ad CDZ, vt GM, ad KM,[a] hoc est, vt GL, ad LK, vel vt E, ad F. Si denique parallela b d, cadit inter LM, & GH; erit rectilineum, vel triangulum ablatū CDZ, maius rectangulo

t *17. sexti.* n *2. huius.* x *7. quint.* y *1 sexti.* z *7. quinti.* a *1. sexti.*

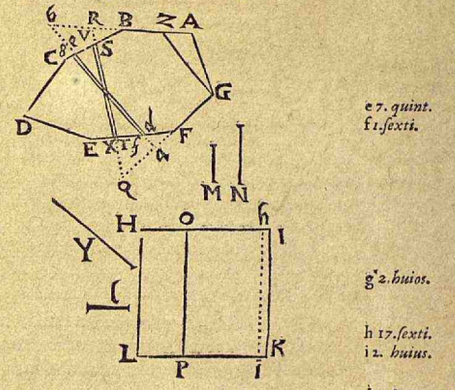


ctangulo KM,[a] Si igitur super CZ, inter rectas CD, ZD, constituetur rectilineum C m, rectangulo L d, æquale; erit reliquum D m l, reliquo rectangulo Gd, æquale: ac propterea & reliquum m l CBA, reliquo rectangulo KM. [b] Igitur erit ABC lm, ad lm D, vt GM, ad KM: hoc est vt GL: ad LK, vel vt E, ad F, quod est propositum.

a *2. huius.* b *7. quint.*

EODEM prorsus modo quamlibet aliam figuram, quotquot habeat latera, in datam proportionē secabimus per lineam, quæ vni lateri, vel cuius alij rectæ lineæ æquidistet. Sit enim datum heptagonum qualecunque ABCDEFG, secandum per lineam lateri AG, parallelam, in duas partes, vt ea, quæ ad D, vergit, ad reliquam habeat proportionem eandem, quam M, ad N, habet. Constituto quadrato HIKL, æquali ipsi heptagono, per ea, quæ in scholio propos. 14. lib. 2. Euclid. vel potius per ea, quæ Num. 4. cap. 4. lib. 4. huius scripsimus; & diuiso latere HI, in O, in proportionem M, ad N, ductaque OP, latere HL, parallela:[c] fiat super rectam AG, inter rectas AB, GF, rectangulo IP, æquale rectilineum AGQR, habens latus QR, lateri AG, parallelum. Et quoniam QR, cadit vltra F, B,[d] constituemus rursum super rectam ST, inter rectas SC, TE, per rectam VX, ipsi ST, parallelam, rectilineum æquale triangulis FQT, BRS, extra heptagonum existentibus; factumque erit quod proponitur, Cum enim rectilineum AGQR, ac proinde & rectilineum ABVXFG, rectangulo IP, sit æquale, erit quoque reliquum DEXVC, reliquo rectangulo OL, æquale.[e] Igitur erit DEXVC, ad ABVXFG, vt OL, ad IP,[f] hoc est, vt HO, ad OI, vel vt M, ad N, quod erat faciendum.

c *2. huius.* d *2. huius.* e *7. quint.* f *1. sexti.*



QVOD si latus rectilinei ex heptagono abscissi æquidistare debeat rectæ Y, quæ nulli lateri heptagoni æquidistet, (si namque æquidistaret vni lateri, absoluerētur problema, vt proxime traditum est) ducta ex angulo G, rectæ Y, parallela GZ, quæ intra figuram cadit;[g] cōstruemus rectilineo AGZ, super rectam IK, æquale rectangulum h K;) quod fiet, si rectilineo AGZ, fiat æquale quadratum, cuius latus l, & duabus IK, & l, tertia proportionalis reperiatur Ih. Ducta enim h i, ipsi IK, parallela,[h] erit rectangulum h K, quadrato lateris, hoc est, rectilineo AGZ, æquale. [i] Deinde super rectam GZ, inter rectas GF, ZB, constituemus rectangulo i P, p[e]r parallelam b a, æquale rectilineum GZ b a.[k] Nam si triangulis B b e, F a d, super rectam d e, inter rectas e C, d E, fiat per parallelam f g, rectilineum d e g f, æquale; factum erit, quod in problemate proponitur, vt ex dictis perspicuum est. Eademq; omnino ratio est in omnib[v] alijs rectilineis quamuis irregularibus, dummodo in ijs duci possit vna linea parallela datæ rectæ, quæ rectilineum auferat dato rectilineo æquale. Non enim semper hoc fieri posse in figuris, cuius anguli partim introrsum, & partim extrorsum vergant, ad finem propos. 2. huj[v] lib. declarauimus, Id quod constructio ipsa problematis perspicue nos docebit.

g *2. huius.* h *17. sexti.* i *12. huius.* k *2. huius.*

SCHOLIVM.

DIVIDI ergo poterit quælibet figura rectilinea in quotuis partes æquales per lineas, quæ datæ cuiuis rectæ lineæ æquidistent. Nā si verbi gratia data figura secāda sit in 8. partes æquales per lineas datę rectæ parallelas, diuidemus eam primum in duas partes inter se proportionē habentes 1. ad 7. Ita namque prior pars erit $\frac{1}{8}$. totius figuræ. Deinde posteriorem partem secabimus in proportionem 1. ad 6. ita vt prior pars huius diuisionis sit $\frac{1}{7}$. illius partis diuisæ, hoc est, $\frac{1}{56}$ totius figuræ, cum pars illa diuisa complectatur $\frac{7}{8}$. totius figuræ. Postea partem posteriorem proximæ diuisionis partiemur in proportionem 1. ad 5. Et posteriorem huius diuisionis partem in proportionem 1. ad 4. Atque ita deinceps, minuendo semper, donec ad partem deueniamus, quę secanda sit in proportionem 1. ad 1. hoc est, in partes æquales.

Quo pacto figura data secetur per lineas parallelas in quotuis partes æquales.

HOC idem effici poterit ea ratione, quam ad finem scholij propos. 4. exposuimus: si videlicet latus quadrati HI, quod rectilineo dato constructum est æquale, in tot æquales partes secetur, in quod partes datum rectilineum diuidendum est, & primo rectilineum diuidatur in proportionem primæ partis ad reliquas: Deinde posterior pars rectilinei in proportionem secundæ partis lateris HI, ad reliquas: atque ita deinceps, &c.

ATQVE hic finem habet nostra Geodesia complectens diuisionē omnium figurarum rectilinearum: sequuntur iam particulares nonnullæ diuisiones quarundam figurarū, quæ tum, quia subtiles acutasque demōstrationes continent, tum quia pleraſque earum eruditi quoque Geometrę, vt Leonardus Pisanus, Frater Lucas Pacciolus, & Nicolaus Tartalea tradiderunt, omittendæ nullo modo visæ sunt. Vt autem Geometricè eas demonstremus, præmittenda sunt Theoremata nonnulla, quorum primum sit hoc.

THEOR. 2. PROP. 6.

SI duo triangula æqualia habeant vnum latus commune, & in diuersas partes vergant: Recta oppsitos angulos connectens à latere illo communi bifariam secatur.

SINT æqualia duo triangula ABC, ABD, habentia latus AB, cōmune, & in diuersas partes vergentia. Dico rectam CD, oppsitos angulos C, D, iungentem secari in E, bifariam à latere communi AB.[a] Quoniam enim est tam triangulum ACE, ad triangulum ADE, quam triangulum BCE, ad triangulum BDE, vt CE, ad ED;[b] erit triangulum ACE, ad triangulum ADE, vt triangulum BCE, ad triangulum BDE.[c] Igitur erunt quoque duo triangula simul ACE, BCE, hoc est, totum triangulum ABC, ad duo triangula simul ADE, BDE, id est, ad totum triangu-



a *1. sexti.* b *11. quin.* c *12. quin.*

lum ABD, vt ACE, ad ADE, hoc est, vt CE, ad ED. Cum ergo triangula ABC, ABD, ponantur æqualia, erunt quoque rectæ CE, ED, æquales, ac proinde CD, in E, secta est bifariam. quod erat ostendendum.

THEOR. 3. PROPOS. 7.

SI in triangulo basi parallela ducatur, & extrema parallelarum rectis iungantur sese intersecãtibus; habebit vtriusuis harum rectarum segmentum ab angulo incipiens ad reliquum in latere terminatum eandem proportionem, quam latus ab illa recta diuisum ad partem eius superiorem. Recta autem ex tertio angulo per intersectionem dictarum rectarum extensa secabit vtramque parallelam bifariam.



IN triangulo ABC, ducta sit DE, basi BC, parallela, & iunctæ rectæ BE, CD, se intersecent in F. Dico esse BF, ad FE, vt AC, ad AE: Item CF, ad FD, vt AB, ad AD: Et iunctam rectam AF, secare parallelas DE, BC, bifariam in G, & H. [a] Quoniam enim triangula BDC, CEB, æqualia sunt; ablato communi BFC, reliqua BDF, CEF, æqualia quoque erunt. [b] Quia vero est, vt BD, ad DA, ita CE, ad EA: [c] Vt autem BD, ad DA, ita est triangulum BFD, ad triangulum AFD: Et vt CE, ad EA, ita triangulum CFE, ad triangulum CFE; erit quoque triangulum BFD, ad triangulum AFD, vt triangulum CFE, ad triangulum AFE. Cum ergo triangulum BFD, triangulo CFE, ostensum sit æquale; [d] erit quoque triangulum AFD, triangulo AFE æquale. [e] Igitur DE, in G, secta est bifariam, [f] ac proinde & parallela BC, secta erit bifariam in H. [g] Et quoniam triangulum AFB, ad triangula æqualia AFD, AFE, eandem habet proportionem; [h] est que vt AFB, ad AFD, ita AB, ad AD: Et vt AFB, ad AFE, ita BF, ad FE: Erit quoque BA, ad AD, ideoque AC, ad AF, vt BF, ad FE; Eademque ratione erit AB, ad AD, vel AC, ad AE, vt CF, ad FD, quod etiam inde patet; cum sit vt CF, ad FD, ita CFE, ad DEF, hoc est, ita BFD, ipsi CFE, æquale ad idem DEF, [k] hoc est, ita BF, ad FE. quod erat demonstrandum.

a 37. prim. b 1. sexti. c 1. sexti. d 14. quin. e 6. huius. f schol. 4. sexti. g 7. quint. h 1. sexti. i 1. sexti. k 1. sexti.

THEOR. 4. PROPOS. 8.

SI in triangulo à duobus angulis duæ rectæ ducantur ad media puncta oppositorum laterum: Recta ex angulo reliquo per intersectionem earum deducta secat quoque reliquum latus bifariam. Cuiuslibet autem illarum trium linearum segmentum prope angulum ad reliquum segmentum duplam habet proportionem. Triangulum denique per rectas ab intersectione ad angulos ductas in tria triangula æqualia diuiditur.



IN triangulo præcedentis propos. ABC, duæ rectæ BE, CD, secent latera AC, AB, bifariam in E, D, se autem mutuo intersecet in F. Dico rectam ductam AF, secare quoque latus BC, bifariam in H, &c. [a] Iuncta enim recta DE, parallela erit ipsi BC, cum secet latera AB, AC, proportionaliter, in partes videlicet æquales: [b] Quam ob rẽ AE, vtramq; parellelam DE, BC, bifariã secabit. quod est primũ.

DEINDE [c] quia est, vt AB, ad AD, ita CF, ad FD: Est autem AB, ipsius AD, dupla; erit quoque CF, ipsius FD, dupla. Eademque ratione & BF, ipsius FE; & AF, ipsius EH, dupla erit. quod est secundum.

POSTREMO [d] quia est vt AF, ad FH, ita triangulum AFB, ad triangulum BFH: Est autem AF, ipsius FH, ostensa dupla; erit quoq; triangulum AFB, trianguli BFH, duplũ. Est autem & triangulum BFC, eiusdem trianguli BFH, duplum [e] quod triangula BFH, CFH, æqualia sint. Igitur æqualia erunt triangula AFB, BFC. Eodemq; modo triangulum AFC, eidem triangulo BFC, æquale erit: ac proinde omnia tria AFB, BFC, CFA, æqualia erunt. quod est tertium.

a 2. sexti. b 7. huius. c 7. huius. d 1. sexti. e 38. prim.

COROLLARIVM.

ITAQVE facile inueniri potest punctũ intra triangulũ, à quo tres rectæ ad tres angulos ductæ ipsũ triangulũ in tria æqualia triãgula partiãtur. Huiusmodi n. punctũ in proposito triangulo est F, vbi duæ rectæ ex duobus quibusuis angulis ad media pũcta oppositorũ laterũ ductæ se intersecãt, vt in tertia parte huius propos. ostẽdimus.

THEOR. 5. PROPOS. 9.

SI in triangulo ducatur recta vtcunq; duo latera secans: Erit totum triangulum ad abscissum triangulum, vt rectangulum sub duobus lateribus sectis totius trianguli comprehensum, ad rectangulum sub duobus lateribus trianguli abscissi, quæ priorũ segmenta sunt, comprehensum.



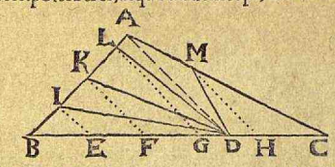
IN triangulo ABC, recta DE, secet latera AB, AC, in D, E. Dico esse vt rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum sub AD, AE, ita triangulum ABC, ad triangulum ADE. Quoniam enim triangula ABC, ADE, angulum habent commune A; habebunt per propos. 4. schol. propos. 23. lib. 6. Eucl. eandem proportionem, quam rectangula sub lateribus AB, AC, & sub AD, AE, comprehensa, quod ostendendum erat.

PRO-

PROBL. 5. PROPOS. 10.

DATVM triangulum ex dato puncto in eius latere in quotlibet partes æquales diuidere.

PROPOSITIONE quartadecima scholij propos. 33. lib. 6. Euclid. tradidimus regulam, qua triangulum in duas partes secundum datam proportionem diuidendum sit: Et quo pacto ex triangulo pars imperata sit auferenda. Si igitur triangulum ex dato puncto in eius latere quouis secandum sit in quotlibet partes æquales, detrahenda primum erit per lineam rectam ex dato puncto ductam pars denominata à numero partium, in quas diuidendum est triangulum. Deinde duæ tales partes: postea tres, atque ita deinceps, donec tot partes, vna minus, detractæ sint, in quot partes diuidendum proponitur triangulum. Vt si triangulum ABC, ex puncto D, diuidendum sit in quinq; partes æquales, diuidemus latus BC, in quo datum punctum est, in quinq; partes æquales, in punctis E, F, G, H. Iuncta deinde recta DA; ducemus ei parallelas EI, FK, GL, HM. Si namque connectantur rectæ DI, DK, DL, DM, diuisum erit triangulum in quinque partes æquales. Nam vt in dicta propos. 14. scholij propos. 33. lib. 6. Euclid. ostensum est, triangulum DBI, est $\frac{1}{5}$. totius trianguli, hoc est, ita se habet DBI, ad ABC, vt BE, ad BC. Triangulum autem DBK, continet $\frac{2}{5}$. totius trianguli. id est, ita se habet DBK, ad ABC, vt BF, ad BC, At vero triangulum DBL, complectitur $\frac{3}{5}$. totius trianguli, id est, ita se habet DBL, ad ABC, vt BG, ad BC. Quadrilaterum denique ABDM, comprehendit $\frac{4}{5}$. totius trianguli, hoc est, ita se habet ABDM, ad ABC, vt BH, ad BC. Ex quo fit, reliquum triangulum DMC, esse $\frac{1}{5}$. eiusdem trianguli ABC.



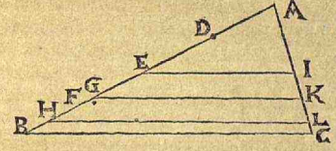
QVANDO punctum datum est in vno angulo, manifestum est, si latus oppositum in tot partes secetur, in quot triangulum diuidendum est [a] rectas ex eo angulo ad puncta diuisionum eductas secare triangulum in propositas partes æquales.

a 1. sexti.

PROBL. 6. PROPOS. 11.

DATVM triangulum per lineas vni lateri parallelas in quotlibet æquales partes diuidere.

SIT triangulum ABC, diuidendum, verbi gratia, in quatuor partes æquales per lineas lateri BC, æquidistantes. Secetur vtrumuis reliquorum laterum nimirum AB, in 4. partes æquales, in tot videlicet, in quot triangulum diuidendum est, in punctis D, E, F. Et inter AB, AD, inuenta media proportionali AE; atque inter AB, AE, media proportionali AG; ac denique inter AB, media proportionali AH, ducantur EI, GK, HL, lateri BC, parallelæ, quas dico triangulum partiri in 4. partes æquales. [a] Quoniam enim triangulum ABC, triangulo AEI, simile est; [b] erit triangulum ABC, ad triangulum AEI, vt AB, ad AD, quod tres AB, AE, AD, sint continue proportionales. Est autem AD, quarta pars ipsius AB. Igitur & triangulum AEI, quarta pars est trianguli ABC.



a corol. 4. sexti. b corol. 19. sexti.

[c] NON aliter ostendemus, esse triangulum ABC, ad triangulum AGK, vt AB, ad AE. quod etiam tres AB, AG, AE, sint continue proportionales. Quare cum AE, contineat $\frac{3}{4}$. rectæ AB, continebit etiam AGK, triangulum $\frac{3}{4}$. trianguli ABC. Ideoq; cum AEI, sit $\frac{1}{4}$. trianguli ABC, vt ostendimus, erit EIKG, $\frac{1}{4}$. eiusdem trianguli ABC. Denique eadem ratione erit triangulum ABC, ad triangulum AHL, vt AB, ad AF, quod etiam tres AB, AH, AF, sint continue proportionales: ac proinde triangulum AHL, complectetur $\frac{3}{4}$. trianguli ABC, quemadmodum AF, continet $\frac{3}{4}$. ipsius AB: ideoq; BHLC, erit $\frac{1}{4}$. trianguli ABC, &c.

c corol. 19. sexti.

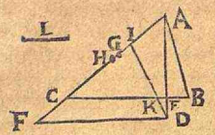
PROBL. 7. PROPOS. 12.

DATVM triangulum per rectam ex puncto extra triangulum dato ductam in duas partes æquales diuidere.

EX puncto D, extra triangulum ABC, dato ducenda sit linea diuidens triangulum bifariam. Ducta recta DA, ad angulum oppositum secante latus BC, in E: si quidem BC, in E, diuiditur bifariam, factum erit, quod iubetur [a]: quod tunc triangula ABE, ACE, sint æqualia. Si vero BC, non bifariam diuiditur in E. sit segmentum CE, maius, cui ducatur parallela DF, occurrens lateri AC, producto in F. Secto latere AC, bifariam in G, inueniatur tribus DF, BC, CG, quarta proportionalis CH; [b] Eritq; rectangulum sub DF, CH, æquale rectangulo sub BC, CG; hoc est, semissi rectanguli sub BC, CA: [c] cum rectangulum sub BC, CA, duplum sit rectanguli sub BC,

a 38. prim. b 16. sexti. c 1. sexti.

d 17. sexti.



BC,CG. Deinde inuenta L, media proportionali inter FC,CH,[d] vt quadratum ex L, æquale sit rectangulo sub FC, CH, adiungatur ipsi CH, recta HI, vt rectangulum sub tota CI, & adiuncta HI, æquale sit quadrato ex L, siue rectangulo sub FC, CH, quemadmodum ad finem scholij propos. 36. lib. 3. Euclid. scripsimus: ducatur q; recta DI, secans BC, in K. Dico rectam DI, secare triangulũ ABC, in duas partes ABKI, IKC, æquales. Quoniam enim per constructionem rectangulum sub CI, IH, æquale est rectangulo sub CF, CH,[e] erit vt CI, ad CF, ita CH, ad IH; Et conuertendo, vt CF, ad CI, ita IH, ad CH: & componendo vt IF, ad CI, ita CI, ad CH.[f] Vt autem IF, ad CI, ita est FD, ad CK. Igitur erit quoque FD, ad CK, vt CI, ad CH:[g] Ac proinde rectangulum sub FD, CH, æquale erit rectangulo sub CK, CI: Erat autem rectangulum sub FD, CH, per constructionem æquale semissi rectanguli sub BC, CA. Igitur & rectangulum sub CK, CI, æquale erit semissi rectanguli sub BC, CA. Vt autem rectangulum sub CK, CI, ad rectangulum sub BC, CA,[h] ita est triangulum CKI, ad triangulum ABC. Igitur triangulum CKI, æquale quoque erit semissi trianguli ABC: ac proinde quadrilaterum ABKI, reliquæ semissi trianguli ABC, æquale erit. quod est propositum.

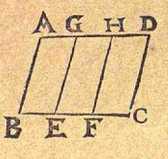
e 16. sexti.
f 4. sexti. & permutando.
g 16. sexti.
h 9. huius.

EADEM ratione, si pro CG, sumamus $\frac{1}{3}$. vel $\frac{1}{4}$. vel quamcunque partem lateris AC, & reliqua fiant, vt supra, auferemus per rectam ex D, ductam $\frac{1}{3}$. vel $\frac{1}{4}$. vel denique talem partem ex triangulo ABC, qualis sumpta est CG, ipsius AC. vt perspicuum est.

LEONARDVS Pisanus, & Nicolaus Tartalea, idem hoc problema soluunt, quando datum punctum est extra triangulum in tali loco, vt vnum latus trianguli productum, in illud incidat, cuiusmodi esset punctum F, datum. Item quando est inter duo latera producta: Vt si triangulum foret AEC, punctum autem inter B, & D, existeret, ita vt ab eo solum per angulum E, duci posset linea secans latus AC: quippe cum rectæ ab eo ad angulos A, C, ductę nullum latus intersecarent. Verum quia hæc curiosa magis, quam vtilia sunt, dedita opera à nobis omittuntur. Qui autem ea desiderat, auctores prædictos legere poterit.

PROBL. 8. PROPOS. 13.

DATVM parallelogrammum in quotcunque partes æquales per lineas duobus lateribus oppositis æquidistantes diuidere.



SIT parallelogrammum ABCD, diuidendum verbi gratia in tres partes æquales per lineas lateribus AB, DC, æquidistantes. Diuiso alterutro reliquorum duorum latcrum, nimirum BC, in tres partes æquales, in quot videlicet parallelogrammum proponitur diuidẽdum, in E, & F, punctis ducantur EG, FH, ipsis AB, DC, parallelæ: factumque erit, quod iubetur;[a] quod parallelogramma AE, EH, HC, æqualia sint, propter æquales bases BE, EF, FC.

a 1. sexti vel 38. pri.

COROLLARIVM.

ITAQVE si ex latere auferatur $\frac{1}{3}$. vel $\frac{1}{4}$. vel $\frac{1}{5}$. vel denique qualiscunque pars, vel partes, & per extremũ eius punctum parallela lateri AB, ducatur, ablata erit ex toto parallelogrammo eadem pars, vel eędem partes. Ita vides AE, esse partem tertiam parallelogrammi AC, quemadmodum & BE, tertia pars est lateris BC, &c.

PROBL. 9. PROPOS. 14.

DATVM parallelogrammum per rectam ex puncto siue extra, siue intra ipsum, siue in aliquo latere dato ductam, bifariam diuidere.



SIT primo parallelogrammum ABCD, per rectam ex puncto E, exteriori ductam secandum bifariam. Ducta diametro BD, eaq; secta bifariam in F, ducatur ex E, per F, recta EH, quam dico parallelogrammũ partiri bifariam, Nam vt in scholio Propos. 34. lib. 1. Euclid. demonstrauimus, recta GH. diuidens diametrum BD, in F, bifariam, secat parallelogrammum bifariam. Idem fiet, si recta IK, latera AD, BC, secans bifariam diuidatur bifariam in F, & per F, extendatur recta EF, propterea quod IK, diametrum secat bifariam, ac proinde per F, punctum medium diametri transit.[a] Cum enim anguli IDF, FID, angulis alternis KBF, FKB, æquales sint, & lateral ID, KB, quibus adiacent, æqualia;[b] erunt tam latera DF, BF, quam IF, KF, inter se æqualia.

a 29. prim.
b 26. pri.

EODEM modo ex puncto interiori L; Item ex puncto G, in latere BC, recta ducta LF vel GF, parallelogrammum bifariam diuidet.

PROBL. 10. PROPOS. 15.

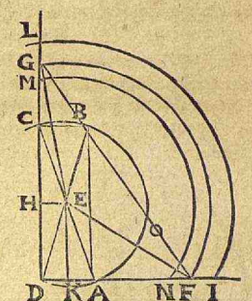
INTER datas duas rectas, duas medias proportionales prope verum inuenire.

EXPOSITA Geodæsia nostra prioribus quinq; propositionib⁹ huius lib. & nouẽ alijs propositionib⁹, ijs demõstratis, q addenda esse censuimus ad idem argumentũ spectantia: agendũ iam esset de augendis minuẽdisque figuris in data proportione, vt in titulo huius lib. 6. proposuimus. Verum quia sicut id in planis figuris effici nõ potest sine inuentione mediæ proportionalis inter duas rectas propositas, quam inuentionẽ Euclid. li. 6. propos. 13. nobis tradidit: ita idem absolui in figuris solidis nulla ratione potest, nisi inter duas rectas datas duæ mediæ reperiantur proportionales. Quocirca prius in hac propos. in medium afferemus, quæ antiqui Geometræ nobis hac de re scripta reliquerunt. Multorum enim ingenia res hęc exercuit, atq; torsit, quamuis nemo ad hanc vsq; diem, vere, ac Geometrice duas medias proportionales inter duas rectas datas inuenerit. Prętermissis autem modis Eratosthenis; Platonis; Pappi Alexandrini; Spori; Menechmi tum beneficio Hyperbolæ, ac parabolæ, tum ope duarũ parabolarũ; & Architæ Tarẽtini, quamuis acutissimis subtilissimisq; : solum quatuor ab Herone, Apollonio Pergæo, Philone Byzantio, Philopono, Dioclę, & Nicomede traditos explicabimus, quos commodiores, faciliores q; , & errori minus obnoxios iudicauimus. Qui aliorum rationes desiderat, legere eas poterit in Commentarijs Eutocij Ascalonitæ in librum 2. Archimedis de Sphæra, & Cylindro: Item in libello Ioannis Verneri Norimbergensis de sectionibus Conicis. Hinc itaque exordiamur.

MODVS HERONIS IN MECHANICIS INTRODUCTIONIBUS, & telis fabricandis: qui etiam Apollonio Pergæo adscribitur.

SINT duæ lineæ rectæ AB, BC, inter quas oporteat duas medias proportionales inquirere. Constituantur ad angulum rectum B, & perficiatur rectangulum ABCD, cum diametris AC, BD,[a] quæ se mutuo bifariam diuident in E. Satis esset vnam tantum diametrũ ducere, eamq; in E, secare bifariam. Protractis autẽ laterib⁹ D-A, DC, intelligatur circa punctũ B, moueri regula hinc inde, donec ita secet DA, DC, productas in F, & G, vt rectæ emissæ EF, EG, æquales sint. Vel certe, vt vult Apollonius, ex E, plures circuli describãtur Ll, GF, MN, donec chorda arcus vni⁹ præcise per punctum B, incedat, qualis est GF. Quod si chorda supra B, transeat, cuiusmodi est chorda Ll, describendus erit circul⁹ infra L; Si vero infra punctũ B, transeat, qualis est chorda MN, describendus erit circulus supra M. Atq; hoc op⁹ toties iterrandum, donec aliqua chorda, qualis est GF, per B, incedat. Erunt n. hac ratione EF, EG, ex centro E, ad circũferentiã, GF, inter se æquales. Quib⁹ ita constructis. Dico AF, CG, esse medio loco ꝓportionales inter AB, BC: hoc est, ita esse AB, ad AF, vt AF, ad CG, & CG, ad CB. Diuisis enim AD, CD, bifariam in K, & H;[b] erunt ductæ EK, EH, ad AD, CD, perpendiculares.[c] Quoniam vero rectangulum sub DE, AF, vna cum quadrato ex AK, quadrato ex KF, æquale est; addito communi quadrato ex EK, erit rectangulum sub DF, AF, vna cum quadratis ex AK, EK,[d] hoc est, vna cum quadrato ex EA, æquale quadratis ex KF, EK,[e] hoc est, quadrato ex EF, hoc est, quadrato ex EG, quæ ipsi EF, est æqualis. Eadem ratione ostendemus, rectangulum sub DG, GC, vna cum quadrato ex CE, id est, ex EA, æquale esse eidem quadrato ex EG. Igitur rectangulum sub DF, AF, vna cum quadrato ex EA, æquale erit rectangulo sub DG, GC, vna cum quadrato ex EA: demptoque communi quadrato EA, remanebit rectangulum sub DG, GC, rectangulo sub DF, AF, æquale.[f] Quocirca erit DG, ad DF, vt AF, ad CG:[g] Vt autem DG, ad DF, ita est AB, ad AF. Ergo erit vt AB, ad AF, ita AF, ad CG: hoc est, tres AB, AF, CG, continuè proportionales erunt.[h] Sed rursus est, vt DG, ad DF, ita CG, ad CB. Igitur erit quoq; CG, ad CB, vt AB, ad AF; ideoq; vt AF, ad CG. Quare erunt quatuor AB, AF, CG, CB, continue proportionales. quod erat demonstrandum.

a schol. 34. primi.
b schol. 26 primi.
c 6. secun.
d 47. pri.
e 47. pri.
f 16. sexti.
g 4. sexti.
h 4. sexti.



MODVS PHILONIS BYSANTII, QVI PHILOPONO quoque tribuitur.

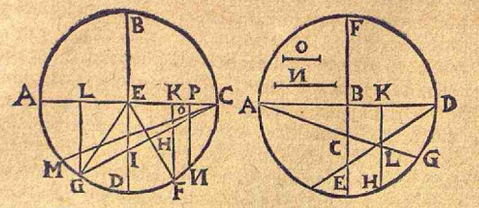
SINT rursus in eadem figura inter rectas AB, BC, inueniendæ duæ mediæ proportionales. Constituto rectangulo ABCD, vna cum diametro CA, productisque lateribus DA, DC, vt supra; describatur ex E, medio puncto diametri circulus CBA, ad interuallum EC. vel EA,[a] qui necessario per angulum rectum B, transibit. Deinde circa punctum B, regula hinc inde moueatur, secans DA, DC, protractas in F, & G, & circumferentiam in O, donec BG, OF, æquales sint. Quod fiet, si per B, plurimæ lineæ occultæ ducantur. Vna enim earum habebit segmentum inter rectam DG, & circulum æquale segmento inter DF, & eundẽ circulũ. Quib⁹ peractis, dico AF, CG, medias proportionales esse inter AB, CB. Quoniam enim æquales sunt GB, FO; addita communi BO, æquales quoque erunt GO, FB: ideoq; rectangulum sub GO, GB, rectangulo sub FB, FO, æquale erit.[b] Sed illud rectangulo sub DG, GC, & hoc rectangulo sub DF, AF, est æquale. Igitur & rectangulum sub DG, GC, rectangulo sub DF, AF. æquale erit. Quam ob rem, vt in præcedenti modo, ostendemus, AB, AF, CG, CB, esse continue proportionales. quod est propositum.

a schol 31. tertij.
b 1. corol. 36. tertij.

MODVS DIOCLIS IN LIBRO DE PIRIIS PVLCHERRIMVS.

PRAEMITTIT prius Diocles Lemma tale. Describatur circulus ABCD, cuius centrum E, cum diametris AC, BD, se se ad angulos rectos secantibus in centro E. Sumptis deinde duobus arcubus æqualibus DF, DG, iũgatur recta CG, & per F, ipsi BD, parallela agatur FK, secãs CG, in H. Hoc facto, erũt FK, KC, mediæ ꝓportionales inter AK, KH. Ducta nãq; GL, parallela ipsi BD, iunctisq; rectis EF, EG,[a] quoniã anguli LEG, KEF, insistentes arcubus æqualib⁹ AG, CF, æquales sunt,[b] & anguli L, K, recti, lateraq; EG, EF, æqualia;[c] erunt &

a 27. tertij.
b 27. primi
c 26. prim.



c 4. sexti.

f schol. 13. sexti.

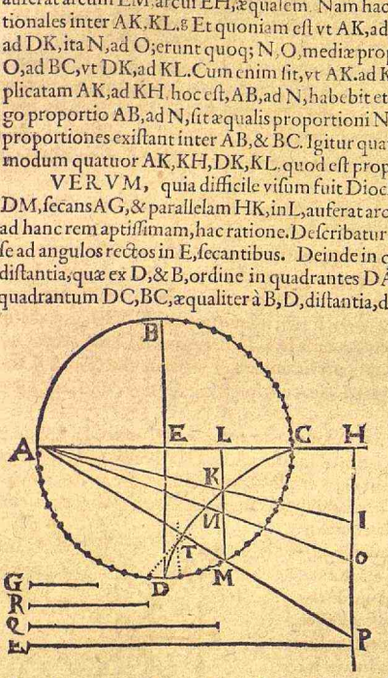
GL,FK,& EL,EK, inter se æquales: ideoq,& reliquæ AL,CK;Immo addita communi LK, & totę AK,CL,æquales inter se erunt.[c] Quoniam igitur est CL,ad LG,vt CK,adKH:est q; vt CL,ad LG,ita AK, ad KF, quod hæ illis æquales sint:erit quoq; AK,ad KF,vt CK,adK-H.[f] Vt autem AK,ad KF,ita est KF,ad CK. Igitur erit AK, ad KF, vt KF,ad CK,& CK,ad KH,hoc est,KF,CK,medię proportionales erunt inter AK,KH.quod est propositum. Pari ratione si, sumptis arcub[s] æqualib[s] DM,DN, iunctaq; recta CM, ducatur NP,ipsi BD, parallela, secans CM,in O;erunt PN,CP,inter AP,PO,mediæ proportionales,&c.

HOC lemmate præmisso ,sint inter rectas AB,BC,reperiendæ duæ mediæ proportionales.Constituantur in altera figura ad angulum rectum B,& centro B ad interuallum maioris BA, describatur circulus AFDE, ad cuius circumferentiam vsq; protendantur AB, BC,Deinde ex A, per C,ducta recta ACG,sumatur in quadrante DE,punctũ H, in tali situ,vt ducta HK, ipsi EF, parallela secãte ipsam AG,in L;recta ex D,per L,emissa auferat arcum EM,arcui EH,æqualem. Nam hac ratione,per lemma præmissum,erunt KH, DK,mediæ ,pportionales inter AK,KL.[g] Et quoniam est vt AK,ad KL,ita AB,ad BC:si fiat vt AK,ad KH,ita AB,ad N;& vt KH, ad DK,ita N,ad O;erunt quoq; N,O,mediæ proportionales inter AB,BC.Neque enim dubitandum est,esse & O,ad BC,vt DK,ad KL.Cum enim sit,vt AK.ad KL,ita AB,ad BC:habeat autem AK,ad KL,proportionem triplicatam AK,ad KH,hoc est,AB,ad N,habebit etiam AB,ad BC,triplicatam proportionem AB ad N. Cum ergo proportio AB,ad N,sit æqualis proportioni N,ad O;erit eidem æqualis proportio O, ad BC, vt tres æquales proportiones existant inter AB,& BC. Igitur quatuor,AB,N,O,BC, continue proportionales sunt, quemadmodum quatuor AK,KH,DK,KL. quod est propositum.

g 4. sexti.

VERVM, quia difficile visum fuit Diocli accipere in posteriori figura punctum H,in tali situ,vt recta DM,secans AG,& parallelam HK,in L,auferat arcum Em,arcui EH,æqualẽ:descripsit lineam quandam inflexã ad hanc rem aptissimam,hac ratione.Describatur circulus ABCD,cuius centrum E,cum diametris AC,BD,sese ad angulos rectos in E,secantibus. Deinde in quadrante CD, capiantur quotcunque puncta parum inter se distantia;quæ ex D,& B,ordine in quadrantes DA,BC,transferantur. Post hæc applicata regula ad bina puncta quadrantum DC,BC,æqualiter à B,D, distantia,ducantur rectæ occultæ,[h] quæ ipsi BD, parallelæ erunt. Et ex C,ad singula puncta quadrantis DA,rectæ occultæ emittãtur, notenturque harum intersectiones cum prædictis parallelis occultis; nimirũ punctum T, vbi recta ex C,ad proximum punctum ipsi D,ducta intersecat proximam parallelam ipsi BD,& sic deinceps. Nã si omnia hæc intersectionum puncta rite per lineam inflexam coniungantur, qualis est CKTD,constructa erit figura medijs duabus proportionalibus inueniendis aptissima. Sint n. inter duas F, G,duæ mediæ proportionales inueniendæ. In diametro AC, etiam producta,si opus est,sumatur AH,maiori F,æqualis. Ducta deinde perpẽdiculari HP,abscindatur HI,minori G,æqualis Ducta autem AI,secãte lineam inflexam in K, agatur per K,ipsi BD, parallela LM.Deniq; sumpta LN,ipsi LC,æquali,ducantur per N,& M,rectæ AN, AM, secantes HP , in O P. Dico HP, HO , esse medias proportiones inter AH,HI, hoc est, inter F, & G. Quoniam enim punctum K,lineæ inflexæ inuentum est per rectam ad punctum quadrantis DA,ductam,quod tanto interuallo à puncto D,abest, quanto punctũ M,ab eodem distat,vt ex descriptione lineæ inflexæ liquet; erunt ex lemmate Dioclis quatuor rectæ AL,LM,LC,vel LN,& LK, continue proportionales.[i] Cum ergo hisce quatuor rectis proportionales sint quatuor rectæ AH,HP,HO,HI;erunt hæ quoque continue proportionales.quod est propositum,

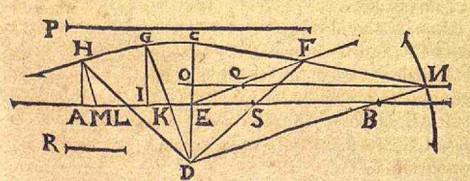
h schol 17. tertij.



i 4. sexti.

MODVS NICOMEDIS IN LIBRO DE LINEIS CONCHOIDIBVS.

NICOMEDES construit prius instrumentum quoddam,quo lineam inflexam describit,quam Conchilem,vel Cõchoideos appellat.Sed nos omisso eo instrumẽto,eandem (quod ad nostrum institutum satis est) per puncta delineamus,hac ratione.Sit recta linea AB,& ad eam perpendicularis CD,in pũcto E. Sumatur deinde infra E,punctũ D,pro polo lineæ describendæ,& supra E,aliud punctum C,vt libet. In vsu lineæ descriptæ constabit,quantum tam punctum D,quam punctum C,à puncto E,abesse debeat.Si igitur ex D, ducãtur plurimæ lineæ occultæ parum inter se distantes,& ex singulis abscindãtur portiones rectę EC,ęquales, initio semper facto à recta AB; extrema aũt harũ portionum puncta per lineam inflexam coniungantur,descripta erit linea conchilis. Exemplum habes in quatuor lineis DH, DG, DF , DN, in quibus sumptæ sunt LH,KG,SF,BN,ipsi EC,æquales , per quarum extrema puncta H,G,F,N, inflexa linea incedit. Et quo plures lineæ occultæ ex D,educentur , eo crebriora puncta inuenientur,per quæ transire debet linea inflexa.



SE-

SEQVITVR ex descriptione huius lineæ,eam nunquam posse cum recta AB, conuenire,licet vtraq; in infinitum producatur:quia puncta,per quæ incedit,sunt omnia supra rectam AB,terminantia nimirum segmenta rectarum ex D,prodeuntium ([a] quæ quidem omnes rectam AB,intersecant)ipsi EC,æqualia,

a pron. 12. lib. 1.

DEMONSTRAT deinde Nicomedes duas proprietates huius lineæ insignes. Prima est: Quodlibet eius punctum à puncto C,diuersum minus distat à recta AB, quam punctum C: Aliorum autem punctorum, quod remotius est à C, minus distat ab eadem recta AB, quam quod minus remotum est. Ducta enim recta quacunque DG,demittatur perpendicularis GI. [b] Et quia K G, maior est quam GI; erit quoque perpendicularis E C, (ipsi KG, æqualis) maior quam perpendicularis I G, hoc est, punctum C, magis distabit à recta AB, quam punctum G. Eademque ratione mag[s] à recta AB, distabit punctum C, quam quoduis aliud. Sumatur deinde aliud punctum H, remotius à C, quam punctum G, demittaturque perpendicularis H A. Dico punctum H, minus distare à recta AB,quã punctum G, hoc est, perpendicularem HA, minorẽ esse perpendiculari GI. Ducta namque recta DH, [c] erit angulus DKE, maior angulo DLE. [d] hoc est,angulus GKI,angulo HLA. Cum ergo recti I, A, æquales sint; [e] erit reliquus G, reliquo AHL, minor. Si igitur ipsi G,fiat æqualis AHM; erunt triangula KGI,MHA,æquiangula; [f] ideoque erit,vt MH,ad HA,ita KG,ad GI. [g] Et quia LH,maior est, quam MH, [h] (quod angulus HML, maior sit recto A, [i] & HLM, minor) [k] erit maior proportio LH,ad HA, quam HM,ad HA,hoc est, quam GK,ad GI: ac proinde cum GK, HL, æquales sint,erit quoque maior proportio HL,ad HA,quam HL, ad GI; [l] ideoque HA, minor erit quam GI,quod est propositum.

b 19. pri.
c 16. pri.
d 15. pri.
e 32. pri.
f 4. sexti.
g 19. pri.
h 16. pri.
i 17. pri.
k 8. quin.
l 10. quin.

ALTERA proprietas est. Quamuis Conchilis C F, nunquam conueniat cum recta E B, tamen cum qualibet alia recta , etiam ipsi EB, propinquissima, conuenit. Sit enim primum recta NO,ipsi EB, parallela, secans EC,in O. Fiat vt EO,ad OD,ita EC,ad P. Et quoniam EO, minor est,quam EC: [m] erit quoque O D, minor quam P. Si igitur ex D , ad interuallum rectæ P , describatur arcus circuli, secabit is rectam ON, in aliquo puncto,vt in N. Dico Conchilem CF,prolongatam coire cum ON,in N. Ducta enim recta DN, secante EB, in B,quæ ipsi P,æqualis erit ; [n] quoniam est vt E O, ad O D, ita B N, ad N D ; hoc est, ad sibi æqualem P. Fuit autem etiam,vt EO,ad OD,ita EC,ad P. Igitur BN, EC, ad P, eandem proportionem habebunt: [o] ac proinde inter se æquales erunt , ideoque Conchilis per N , transibit.

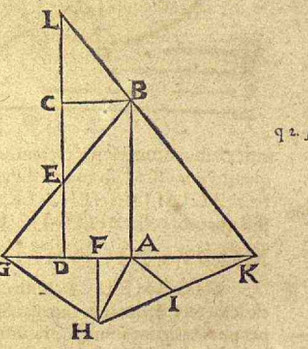
m 4 quin.
n 4. sexti.
o 9. quin

SIT deinde recta QE, non parallela ipsi EB, sed eam secet in E, vergatque versus Conchilem. Quia igitur Conchilis cum recta ON, conuenit, conueniet prius cum ipsa QF, in F, vt perspicuum est.

POST hæc Nicomedes dissoluit huiusmodi problema. Dato quouis angulo rectilineo, & puncto extra lineas angulum datum comprehendentes : Ab illo puncto educere rectam secantem rectas datum continentes angulum , ita vt eius portio inter illas rectas intercepta æqualis sit datæ rectæ. In eadem namque figura rectæ EB, EF, angulum continent BEF, ducendaque sit ex D, linea, ita vt eius portio inter EB, EF, æqualis sit datæ rectæ R. Ex D, ad inferiorem lineam EB, ducatur perpendicularis D E, sumaturque E C, datæ rectæ R, æqualis: & polo D, interuallo vero EC, Conchilis describatur, quæ per secundam proprietatem rectam EF, secabit in F. Ducta ergo recta D F, secante EB, in S ; erit S F, ipsi EC, hoc est, ipsi R, æqualis, vt ex descriptione Conchilis liquet.

HIS præmissis, sint duæ rectæ AB, BC, ad angulum rectum B, coniunctæ, inter quas reperiendæ sint duæ lineæ mediæ proportionales. Compleatur rectangulum A C, cuius duo latera A D, C D, bifariam secentur in F, E. Ducta autem ex B, per E, recta secante A D , productam in G ; [p] erit DG, ipsi CB, hoc est, ipsi DA, æqualis; propterea quod anguli D , E, trianguli DEG, angulis C, E, trianguli C E B, æquales sunt, & latera quoque D E, C E, quibus adiacent, æqualia. Rursus ductam perpendicularem FH, secet AH, ipsi CE, æqualis. quod fiet, si ex A, ad interuallum CE arcus delineetur, secans F H, in H. Deinde iuncta recta G H, ducatur ei parallela AI: atque producta D A, ex H, per problema præcedens, ducatur recta HK, vtramque AI, AK, ita secans, vt intercepta IK, ipsi AH, vel CE, æqualis sit. quod fiet, si ex H, plurimæ rectæ ducentur occultæ, donec vnius portio intercepta æqualis sit ipsi AH, vel CE. Postremo ex K, per B , recta extendatur secans D C , producta in L. Dico duas A K, C L, medias proportionales esse inter AB, BC. [q] Quoniam enim est LC, ad CD, vt LB, ad BK, hoc est, vt D A, ad AK; Et vt C D , ad CE, ita est G A, ad DA, quod vtraque CD, GA, secta sit bifariam in E, D: erit ex proportione perturbata L C, ad CE, vt G A, ad A K, vt in hac formula apparet: hoc est, vt HI, ad IK. Cum ergo CE, ipsi IK, sit æqualis per constructionem , [r] erit quoque LC, ipsi HI, æqualis, & tota LE, toti HK.

p 26. pri.



q 2. sexti.

LC. GA.
CD. DA.
CE. AK.

r 14 quin.

[s] Deinde quia rectangulum sub DK,KA, vna cum quadrato ex AF, æquale est quadrato FK ; addito communi quadrato ex FH, erit rectangulum sub DK, KA, vna cum quadratis ex A F, F H, [t] hoc est, vna cum quadrato ex AH, vel ex CE, æquale quadratis ex KF, FH, hoc est, quadrato ex HK, id est, ex LE, ipsi HK, æquali. [u] Sed & rectangulum sub DL, LC, vna cum eodem quadrato ex CE, æquale quoque est eidem quadrato ex LE. Igitur rectangulum sub DK, AK, vna cum quadrato ex CE, æquale erit rectãgulo sub DL, LC, vna cum eodem quadrato ex CE: Et dempto communi quadrato CE, reliquum rectangulum sub DL, LC, reliquo rectangulo sub DK, AK, æquale erit. [x] Igitur erit DL, ad DK, [y] hoc est, AB, ad AK, vt AK, ad LC. [z] Vt autem A B, ad A K, ita est quoque LC, ad CB. Igitur erit AB, ad AK, vt AK, ad LC, & vt LC, ad CB : ac proinde AK, L C, mediæ proportionales erunt inter datas A B, B C. quod est propositum.

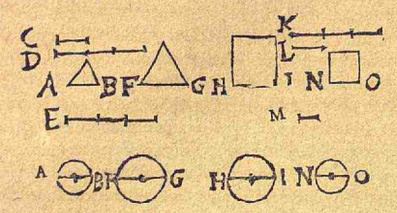
s 6. secun.
t 47. pri.
u 6. secun.
x 16. sexti.
y 4. sexti.
z 4. sexti.

QVOD si datæ duæ rectæ sint nimis longæ,accipi poterunt earum semisses,vel tertiæ partes,&c. atque inter eas duæ mediæ inquirendæ. Nam si inuentæ duplicentur, vel triplicentur,&c. habebuntur duæ mediæ inter datas duas. Quod etiam in alijs modis intelligendum est.

PROBL. 11. PROPOS. 16.

DATAM figuram planam, vel circulum augere, vel minuere in data proportione.

HOC problema, quod ad figuras planas rectilineas attinet, explicauimus propos. 15. scholij propos. 33. lib. 6. Euclid. Nunc idem ad circulos quoque extendemus. Sit ergo rectilineum, cuius latus AB, vel circulus, cuius diameter AB, oporteatque constituere maius rectilineum, vel circulum maiorem in proportione, C, ad D, nimirum subtripla. Tribus lineis C, D, AB, inueniatur quarta proportionalis E, atque inter AB, & E, reperiatur media proportionalis FG, & supra FG, figura construatur similis datæ figuræ AB, similiterque posita. Item circulus describatur circa diametrum FG. Dico tam rectilineum AB, esse tertiam partem rectilinei FG, quam circulum AB, circuli FG, nimirum eandem habere proportionem AB, ad FG, quam habet C, ad D. Quoniam enim tres rectæ AB, FG, & E, continue proportionales sunt, [a] erit figura AB, ad figuram FG, vt AB, ad E, hoc est, vt C, ad D. [b] Quia vero est, vt quadratum ex AB, ad quadratum ex FG, ita circulus AB, ad circulum FG; estque quadratum AB, ad quadratum FG, vt AB, ad E; erit quoque circulus AB, ad circulum FG, vt AB, ad E, vel vt C, ad D.



a 2. coroll. 19. vel 20. sexti.

b 2. duode.

SIT deinde figura, vel circulus HI, oporteatque construere minorem figuram, vel circulum in proportione K, ad L, nimirum tripla. Tribus rectis K, L, HI, inueniatur quarta proportionalis M: atque inter HI, & & M, media proportionalis inueniatur NO, supra quam construatur figura similis similiterque posita figuræ HI: Item circulus describatur circa diametrum NO. Dico tam figuram HI, ad figuram NO, quam circulum HI, ad circulum NO, habere proportionem triplam, eandem videlicet, quam habet K, ad L. Quoniam enim tres rectæ HI, NO, & M, continue sunt proportionales; [c] erit figura HI, ad figuram NO, vt recta HI, ad M, hoc est, vt K, ad L. [d] Et quia est, vt quadratum HI, ad quadratum NO, ita circulus HI, ad circulum NO, estque quadratum HI, ad quadratum NO, vt recta HI, ad M; erit quoque circulus HI, ad circulum NO, vt recta HI, ad M, vel vt K, ad L.

c coroll. 19. vel 20. sexti.

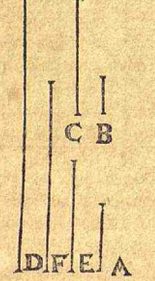
d 2. duode.

EX his constat, qua ratione, dato foramine rotundo, vel etiam quadrato alicuius fontis, aliud foramen rotundum, vel quadratum maius, vel minus in quacunque proportione construendum sit.

PROBL. 12. PROPOS. 17.

DATAM figuram solidam qualemcunque ex ijs, de quibus Eucl. in lib. Stereometriæ agit, augere vel minuere in proportione data.

HVIVSMODI figuræ solidæ sunt parallelepipedum, Pyramis, Prisma, Sphæra, Conus, Cylindrus, & quinque corpora regularia.



SIT ergo figura solida, cuius latus A, vel sphæra, cuius diameter augenda primum in proportione B, ad C. Tribus rectis B, C, A, inueniatur quarta proportionalis D: atque inter A & D, reperiantur duæ mediæ proportionales E, F. Dico solidum lateris A, ad solidum supra latus E, nimirum supra mediam proportionalem, quæ propinquior est lateri dato A, constructū simile, similiterq; positum solido supra latus A, constituto, habere proportionē quam B, habet ad C. Item sphærā datam diametri A, ad sphęram diametri E, esse, vt B, ad C. Quoniam n. figura solida lateris A, ad figuram solidā lateris E, simile, similiterq; positū habet proportionem triplicatam lateris A, ad latus E, vt lib. 11. & 12. Eucl. demonstratū est: Similiter Conus, & Cylindrus, cuius basis diameter A, ad Conum & Cylindrum similem, cuius diameter E: Nec non sphæra diametri A, ad sphæram diametri E; Est autem, ex defin. 10. lib. 5. Euclid. proportio quoque A, ad D, triplicata proportionis A, ad E: Erit solidum A, ad solidum E, vt A, ad D, hoc est, vt B, ad C. quod est propositum.

SIT deinde solidum lateris, vel diametri D, minuendū in proportione data C, ad B. Tribus C, B, D, inueniatur quarta proportionalis A; atque inter D, & A, reperiantur duæ mediæ proportionales F, E. Dico solidum lateris, vel diametri D, ad solidum simile, similiterque descriptum supra F, nimirum supra mediam proportionalem, quæ lateri dato D, propinquior est, proportionem habere, quam C, ad B. Quoniam enim solidum D, ad simile similiterque descriptum solidum F, proportionem habet triplicatam lateris D, ad latus F: qualem etiam habet ex defin. 10. lib. 5. Euclid. recta D, ad rectam A: erit solidum D, ad solidum F, vt D, ad A, id est, vt C, ad B. quod est propositum.

CONSTAT ex his, qua ratione Cubus non solum duplicandus sit (quod veteres inquirebant) sed etiam augendus minuendusue in quacunque proportione: Item quo pacto pylæ bombardarum maiores, aut minores fieri debeant secundum proportionem datam.

SCHO-

SCHOLIVM.

FIGVRAS solidas similiterque positas habere proportionem triplicatam homologorum laterum, demonstratum est de parallelepipedis quidem lib. 11. Euclid. propos. 33. De Pyramidibus vero lib. 12. propos. 8. eiusq; coroll. & de Prismatis, in eiusdem scholio. De sphæra autem lib. eodem 12. propos. 18. De Conis deinde & Cylindris eodem lib. 12. propos. 12. si pro lateribus homologis sumantur diametri sphærarum, & diametri basiū Conorum, & Cylindorum. Ac tandem de quinque corporibus regularibus in coroll. propos. 17. lib. 12. quippe cum omnia hæc corpora in sphæris describi possint.

QVAMVIS autem problema hoc de supradictis corporib⁹ duntaxat proposuerimus, idem tamen etiam locum habet in alijs cuiusque generis corporibus similibus, similiterque positis, vt perspicuum est; propterea quod diuidi possunt in pyramides similes, æquales numero; [a] quæ quidem proportionem habent laterum homologorum triplicatam. [b] Cum ergo sit, vt vna pyramis ad vnam pyramidem, ita omnes ad omnes, id est, ita solidum ad solidum; sintq; eadem latera homologa solidorum, quæ pyramidum similium, constat propositum.

a 8. duod. eiusq; coroll.

b 12. quin.

PROBL. 13. PROPOS. 18.

INTER duos numeros datos tum vnum, tum duos medios proportionales reperire.

NON raro figura siue plana, siue solida augenda, vel minuenda est per numeros, quod quidem sine inuētione vnius medij proportionalis, vel duorū mediorū inter datos duos numeros perfici nō potest: idcirco artem præscribemus, qua huiusmodi medias inuenire possimus. Propositis igitur primum duobus numeris quibuscunque 9. & 25. inter quos reperiendus sit vnus medius proportionalis; si multiplicentur inter se, & producti numeri 225. radix quadrata eruatur 15. vt in Arithmetica practica cap. 26. docuimus: [a] erit radix hæc quadrata medio loco proportionalis inter datos numeros, vt hic 9. 15. 25. quippe cum quadratum medij numeri æquale sit rectangulo sub extremis comprehenso. Sic inter 5. & 13. medius ꝓportionalis erit radix quadrata numeri 65. qui ex multiplicatione datorum numerorum gignitur, quæ radix paulo maior est, quā $8\frac{1}{16}$. & paulo minor, quā $8\frac{1}{8}$.

a 17. sexti. vel 20 sep.

SINT deinde duo numeri 2. & 54. inter quos inueniendi sint duo medij proportionales. Multiplicetur quadratus minoris in maiorem. Producti nam que numeri 216. radix cubica 6. erit primus medius iuxta minorē collocandus. Et si maioris quadratus ducatur in minorem, erit producti numeri 5832. radix cubica 18. alter medius iuxta maiorē statuēdus. vt hic 2. 6. 18. 54. Ratio huius rei est, quod datis quatuor lineis continuè proportionalibus, parallelepipedum sub quadrato alterutrius extremarum, & sub altera extrema comprehensum, æquale est cubo mediæ proportionalis, quæ priori extremo assumpto propinquior est, vt in sequenti Lemmate demonstrabimus. Quoniam vero, vt in scholio propos. 19. lib. 8. Euclid. ostendimus, propositis hisce tribus numeris 2. 2. 54. idem procreatur numerus, siue prius ducantur 2. in 2, deinde productus 4. in 54. siue prius 2. in 54. deinde productus 108. in 2. Idem datis hisce tribus numeris, 54. 54. 2. idem numerus gignitur, siue prius ducantur 54. in 54. deinde productus 2916. in 2. siue prius 54. in 2. deinde productus 108. in 54 manifesto colligitur, si minor 2. ducatur in maiorem 54. & productus 108. in minorem 2. produci quoque cubum medij proportionalis iuxta minorem constituendi. Item si maior 54. ducatur in minorem 2. & producti⁹ 108. in maiorem 54. procreari cubum medij proportionalis iuxta maiorem scribendi. Sic inter 4. & 100. erunt duo medij proportionales, Radix cubica numeri 1600. & Radix cubica numeri 40000. Cæterum inuēto altero mediorū numerorū, reperietur alter etiam, si inuentus per extremum remotiorem multiplicetur, & producti numeri radix quadrata capiatur. Vt in dato exemplo 2. 6. 18. 54. si medius inuentus 6. ducatur in 54. erit producti numeri 324. radix quadrata 18. alter medius: Item inuentus medius 18. si multiplicetur per 2. erit producti numeri 36. radix quadrata 6. alter medius: propterea quod tam 2. 6. 18. quam 6. 18. 54. sunt tres continuè proportionales.

LEMMA.

SI sint quatuor lineæ continuè proportionales: parallelepipedum sub quadrato alterutrius extremarum, & altera extrema comprehensum, æquale est cubo mediæ proportionalis, quæ priori extremæ assumptæ propinquior est.

REPETATVR figura propos. 17. in qua lineæ quatuor continue ꝓportionales sunt A, E, F, D. Dico parallelepipedum sub quadrato extremæ A, & sub extrema altera D, contentū, cubo rectæ E, æquale esse. [a] Quoniam n. quadratum rectæ A, ad quadratum rectæ E, proportionem habet, quam A, ad F, id est, quam E, ad D, reciprocabuntur bases cum altitudinibus, cum basis parallelepipedi sit quadratū rectæ A, & eiusdē altitudo recta D: cubi autem basis, quadratum rectæ E, & altitudo ipsamet recta E. [b] Igitur æqualia erunt parallelepipedum, & cubus. Eadem ratione erit parallelepipedum sub quadrato extremę D, & sub altera extrema A, contentum ęquale cubo rectæ F. [c] Nam cum sit, vt quadratū rectæ D, ad quadratum rectæ F, id est, vt basis dicti parallelepipedi ad basem dicti cubi, ita D, ad E, hoc est, ita F, ad A, hoc est, ita altitudo cubi, ad altitudinem parallelepipedi; reciprocabūtur quoq; bases cum altitudinib⁹: [d] ideoq; æqualia erunt parallelepipedum, & cubus. ꝙ est ꝓpositū.

a coroll. 20. sexti.

b 34. vnde cimi.

c coroll. 20. sexti.

d 34. vndecimi.

Quia vero in nostra Arithmetica practica solum radicis quadratæ extractionem explicauimus, operæ me pretium facturum puto, radicis cubicæ extractionem hoc loco, quamuis fortasse alieno, inserere: quandoquidē ea necessaria omnino est, vt problema hoc 13. ad opus possit deduci. Hoc autem efficiam, si præscribam artem quandam generalem; qua cuiuscunq; generis radicem extrahere possimus, ex libro eximij cuiusdam Arithmetici Germani depromptam ferme totam: quod quidem studioso Lectori non iniucundum, aut ingratum fore confido.

PROBL.

PROBL. 14. PROPOS. 19.

RADICEM cuiuslibet generis extrahere.

Extractio radicis quid.

EXTRACTIO radicis est inuentio numeri ex proposito numero, qui multiplicatione aliqua in se numerum propositum producat. Vt extractio quadratæ radicis est inuentio numeri ex numero quadrato, qui quadrate multiplicatus ipsum producat : Et extractio radicis cubicæ, est inuentio numeri, qui in se ductus cubice producat cubum propositum, &c. Quid autem sit multiplicare numerum quadrate, aut cubice, aut alio modo, mox explicabo.

Infinitæ species radicum.

QVEMADMODVM igitur infinitæ sunt species multiplicationum numerorum in se, vt statim dicam, ex quibus oriuntur numeri quadrati & solidi, vt Cubi, Zensizensi, Surdesolidi, &c. qui à lunioribus nonnullis in Algebra explicari solent: sic etiam infinitæ sunt radicum species iuxta varias numerorum appellationes, qui consurgunt ex varia radicum multiplicatione. Quæ omnia pulchre nobis repræsentat naturalis numerorum progressio, inseruiens progressionibus Geometricis ab vnitate incipientibus : vt hic.

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	&c.
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.	1024.	&c.
	Radix.	Quadratus.	Cubus.	Zensizensicus.	Surdesolidus.	Zensicubus	B, Surdesolidus.	Zensizenzensus.	Cubicubus.	Zensurdesolidus.	

PRIMVM numeri superioris progressionis significant species multiplicationum. Vt 2. supra quadratum significat, multiplicationem quadratam fieri, dum radix bis ponitur, & sic multiplicatur, vt 2. 2. facit 4. Sic 3. significat, multiplicationem cubicam fieri, dum radix ter ponitur, atque ita multiplicatur, vt 2. 2. 2. facit 8. Pari ratione, 4. ostendit multiplicationem Zensizensicam : Et 5. surdesolidam, &c.

DEINDE iidem numeri significant radicum species. Vt 2. significat radicem quadratam producere quadratum per multiplicationem quadratam : Et 3. denotat, radicem Cubicam procreare Cubum per multiplicationem cubicam : Et sic deinceps.

Quomodo figuræ per puncta signentur.

IN extractionibus igitur radicum obseruanda est signatio figurarum per puncta in numero, ex quo radix aliqua extrahenda est, hoc modo.

Pro quadrata.
6 8 7 1 9 4 7 6 7 3 6
. . . . .
Pro cubica.
6 8 7 1 9 4 7 6 7 3 6
. . . . .
Pro Zensizensica.
6 8 7 1 9 4 7 6 7 3 6
. . . .
Pro surdesolida.
6 8 7 1 9 4 7 6 7 3 6
. . . . .

IN extractione radicis quadratæ signantur omnes figuræ in locis imparibus, incipiendo à dextris : ita vt alternatim semper vna figura omittatur, quæ non signetur.

IN extractione cubica omittuntur semper duæ figuræ. In Zensizensica tres. In surdesolida quatuor. Et sic deinceps in infinitum. Vt in appositis exemplis vides.

RESPONDENT autem hæ signationes medijs proportionalibus. Vt quoniam inter duos quadratos cadit vnus medius, ideo in extractione radicis quadratæ omittitur semper vna figura : Inter duos vero Cubos cadunt duo medij, idcirco omittuntur semper duæ figuræ, & sic de cæteris.

PRO qualibet autem specie radicis extrahendæ inseruiunt quidam numeri peculiares: qui per sequentem tabulam inueniuntur, quæ hoc modo construitur. Prima columna continet seriem naturalem numerorum. Ex hac columna nascitur secunda: tertia ex secunda: & quarta ex tertia, hoc modo. Relictis duabus cellulis primæ co-

1								
2								
3	3							
4	6							
5	10	10						
6	15	20						
7	21	35	35					
8	28	56	70					
9	36	84	126	126				
10	45	120	210	252				
11	55	165	330	462	462			
12	66	220	495	792	924			
13	78	286	715	1287	1716	1716		
14	91	364	1001	2002	3003	3432		
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	
17	136	680	2380	6188	12376	16448	24310	24310

Cõstructio tabulæ mirifica.

lumnæ, repetitur numerus tertiæ cellulæ in secunda columna. Deinde ex additione duorũ numerorum, id est, ex tertio primæ columnæ, & primo secundæ columnæ, fit secundus numerus secundæ columnæ. Eodem modo ex secundo numero secundæ columnæ, & ex eius collaterali conficitur tertius secundæ columnæ : Atque ex tertio numero secundæ columnæ, & ex eius collaterali fit quartus eiusdem secundæ columnæ, & sic deinceps. Continentur autem in secunda columna omnes numeri triangulares. Non aliter tertia columna ex secunda oritur, & quarta ex tertia, &c. Semper enim in qualibet columna relinquuntur duæ primæ cellulæ, & numerus tertiæ cellulæ repetitur pro primo numero sequentis columnæ: atque ex additione eius numeri cum collaterali præcedentis columnæ conflatur secundus numerus, &c.

Quo pacto ex superiori tabula desumantur numeri pro radicum singulis speciebus.

HAC extructa tabula, desumuntur numeri peculiares ex ordinibus transuersalibus hoc ordine. Numeri cuiuslibet ordinis transuersalis ordine scribuntur, iidemque ordine retrogrado repetuntur, vltimo semper excepto, & penultimo etiam tunc solum, quando vltimo æqualis est. Vt in secundo ordine sumitur tantum numerus 2. quia cum sit vltimus, non repetitur. In tertio sumuntur quoque hi duo tantum 3. 3. quia penultimus non repetitur, cum ab vltimo non differat. In quarto autem sumendi sunt hi tres. 4. 6. 4. In nono hi octo 9. 36. 84. 126. 126. 84. 36. 9. Et in decimo hi nouem 10. 45. 120. 210. 252. 210. 120. 45. 10. &c. Vbi vides, semper tot numeros assumi, quot sunt vnitates in primo numero transuersali, minus vno. Vt in ordine septimodecimo assumendi erunt hi sexdecim 17. 136. 680. 2380. 6188. 12376. 19448. 24310. 24310. 19448. 12376. 6188. 2380. 680. 136. 17. & sic de cæteris.

CVILIBET deinde numero præponendæ sunt cifræ, quot numeri ab eo inclusiue numerantur vsque ad vltimum assumptum. Vt numero 2. secundi ordinis præponenda est vna cifra hoc modo, 20. Sed duo tertij ordinis habebunt has cifras 300. 30. Sic in nono ordine, vbi assumuntur octo numeri, primus habebit octo cifras, secundus septem, tertius sex, & sic semper minuendo vnam. Cuius autem radicis extractioni inseruiant prædicti numeri in quolibet ordine transuersali accepti, pulchre indicat primus numerus ordinis transuersalis, Vt quia in superiori progressione numerus 3. notat quadratum, & 3. cubum, & 4. Zensizensum, &c. ideo numerus 2. secundi ordinis cum sua cifra, hoc modo. 20. inseruit radici quadratæ : Et duo numeri ex tertio ordine assumpti cum suis cifris, hoc modo 300. 30. radici cubicæ : Et tres quarti ordinis, hoc modo 4000. 600. 40. radici Zensizensicæ: & quatuor quinti ordinis, hoc modo, 50000. 10000. 1000. 50. radici surdesolidæ, &c.

Quot figuras quælibet radix habeat.

IAM vero vt propius ad extractionem radicum accedamus, sciendum est, radicem cuiuslibet numeri habere tot figuras, quot puncta sub ipso signata sunt, secundum doctrinam superiorem. Item ad punctum vltimum versus sinistram pertinere ipsam figuram supra punctum positam, cum omnibus alijs, quæ ipsam versus sinistram præcedunt. Ex quo puncto subtrahatur numerus, vt mox dicemus, spectabit ad penultimum punctum figura supra ipsum punctum cum reliquis ad sinistram, & sic de cæteris.

VT autem rite incipiat extractio cuiuslibet radicis, construenda erit tabella quadratorum, cuborum, surdesolidorum, B, surdesolidorum, & aliorum numerorum, qui ex nouem figuris Arithmeticis producuntur, cum suis radicibus. Vt hic vides.

Radices.	Quadrati.	Radices.	Cubi.	Radices.	Surdesolidi.	Radices.	B, surdesolidi.
1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	2	8	2	32	2	128
3	9	3	27	3	243	3	2187
4	16	4	64	4	1024	4	16384
5	25	5	125	5	3125	5	78125
6	36	6	216	6	7776	6	279936
7	49	7	343	7	16807	7	823543
8	64	8	512	8	32768	8	2097152
9	81	9	729	9	59049	9	4782969

CVR autem non apposuerim tabellas Zensizensorum, & Zensicuborum causa est, quod eiusmodi numerorum radices non egent nouis præceptis, vt postea dicetur. Sequuntur ergo iam extractionum exempla aliquot.

EXTRACTIO RADICIS QVADRATÆ.

Quadratæ radicis extractio.

SIT numerus propositus 676201. ex quo erui debet radix quadrata.
. . . .

Radix 260.

PRIMVM ab vltimo puncto, id est, à figura 6. (Hoc enim punctum vnam tantum habet figuram, cum eam nulla alia præcedat) subtrahitur maximus quadratus, qui subtrahi potest, nimirum 4. & in Quotiente ad marginem ponitur eius radix 2. In residuo autem manent 2. pro sequenti puncto, quod erit 276. atque ita absolutum est vltimum punctum, quod est in operatione primum.

DEINDE paro diuisorem ex figura 2. inuenta in Quotiente multiplicata per 20. nimirum per numerum radici quadratæ inseruientem : quem inuenio 40. Per hunc diuido punctum sequens 276. & pro Quotiente reperio 6. Pono ergo primum Quotientem 2. ad sinistram, numerum peculiarem 20. in medio, & nouum Quotientem 6. ad dextram, sub quo scribo eius quadratum 36. vt hiç vides.

2 --- 200 --- 6.
36.

POST

POST hæc multiplico tres numeros 2.20.6. inter ſe,& producto 240. addo quadratum 36. & ſummam 276.ex puncto 276.detraho,nihilque relinquitur,atque ita abſolutum eſt ſequens punctum: aliudque ſequens punctum eſt 52.

PARO iam diuiſorem ex toto Quotiente inuento 26. ducto in 20.id eſt,in numerum peculiarem quadratæ radicis,quem inuenio 520. Et quia per hunc diuidi non poteſt punctum 52. pono in Quotiente 0.neque opus eſt multiplicare,vt reperiatur numerus ſubtrahendus, quia nihil ſubtrahitur,cum 0. multiplicans producat 0.Et ſic fit in omnibus alijs extractionibus, quando diuiſor inuetus in puncto propoſito ne ſemel quidem continetur: atque ita abſolutum eſt punctum 52. punctumque inſequens eſt 5201.

PARO iterum diuiſorem ex toto Quotiente inuento 260. ducto in numerum peculiarem 20. quem reperio 5200. qui ſemel in puncto 5201. continetur. Pono ergo totum Quotientem
260- 201
1
prius inuentum 260.ad ſiniſtram,& numerum peculiarem 20.in medio, & Quotientem 1. nunc inuentum ad dexteram,ciuſque quadratum 1.ſub illo,vt in exemplo patet.

MVLTIPLICATIO trium ſuperiorum numerorum facit 5200. addo quadratum 1.figuræ inuentæ 1. fit numerus 5201. qui ex puncto 5201.detractus nil relinquit. Eſt ergo abſoluta extractio,radixque inuenta eſt 2601. quæ quadrate, id eſt, in ſe multiplicata producit propoſitum numerum 675201.

ATQVE hæc eſt probatio, vel examen cuiuſuis extractionis, vt videlicet radix inuenta in ſe multiplicetur vel quadrate, vel cubice,vel ſurdeſolide, &c. pro qualitate radicis. Si enim in extractione nihil fuit relictum,veluti in noſtro exemplo, neceſſe eſt, numerum productum æqualem eſſe propoſito numero, ex quo facta eſt extractio: Si autem in extractione aliquid fuit relictum, illud additum producto numero conficiet numerum propoſitum. Inſtitui quoque poteſt examen per 9. vel 7.vt in Diuiſione. Nam ſi ex inuenta radice abiiciantur 9. vel 7. quoties fieri poteſt, & reſiduum collocetur tum in ſiniſtra parte crucis, tum in dextra, quod
0
0X0
0
2
4X4
2
Quotiens, vel radix inuenta ſit etiam inſtar Diuiſoris. Hoc enim reſiduo in ſe multiplicato quadrate,vel cubice,&c.& ex producto abiectis 9.vel 7.neceſſe eſt,reſiduum hoc æquale eſt reſiduo numeri propoſiti, ſi abiiciantur ex eo omnia 9.vel 7. & nihil in extractione relictum ſit. Nam alioquin ex reſiduo extractionis & ex producto radicis inuentæ in ſe multiplicatæ abiicienda erunt omnia 9. vel 7. Hoc enim reſiduum æquale eſſe debet reſiduo numeri propoſiti,ſi omnia 9.vel 7.abiiciantur. In noſtro exemplo,ſi probatio inſtituatur per 9. reſiduum ſemper eſt 0. Si vero fiat per 7. ſtabit exemplum examinis, vt hic apparet.

EXTRACTIO RADICIS CVBICÆ.

SIT ex numero 239483190. extrahenda radix cubica.

Cubica radicis extractio. radix 621.

PRIMVM ex puncto 239 ſubtraho cubum 216. qui eſt maximus in eo contentus,cuius radicem 6.ſcribo in Quotiente ad marginem. Et quia relinquitur numerus 23. erit ſequens punctum 23483.

DEINDE paro Diuiſorem hoc modo. Supra radicem inuentam 6. pono eius
36—300
6— 30
quadratum 36. Et ad dextram colloco duos numeros peculiares radicis cubicæ,nimirum 300.& 30.vt hic vides.Multiplico ſuperiores duos numeros 36.& 300.inter ſe,& producto 10800.addo productum 180. ex multiplicatione numerorum inferiorum 6. & 30. inter ſe. Nam ſumma 10980.erit Diuiſor. Satis etiam eſſet productus ex duobus ſuperioribus inter ſe multiplicatis, nimirũ 10800. pro Diuiſore,quod in alijs extractionibus intelligendũ quoq; eſt. Diuido ergo punctum meum 23843. per diuiſorem inuentum 10980. & Quotientem 2. ſcribo poſt figuram 6. prius inuentam. Pingo poſt hæc figuram huiuſmodi. Ad dextram numerorum 36. & 300. collocato inuentam
36—300.—2.
6— 30.—4.
8.
figuram 2.& infra eam eius quadratũ 4.& ſub hoc cubum eiuſdem 8. Nam ſi tam ſuperiores tres numeri 36.300.& 2.quã inferiores tres 6.30.& 4.inter ſe multiplicentur, & productis 21600. & 720. addatur cubus 8. fiet numerus 22328. quem ſi ex meo puncto 23483. ſubtraham, remanent 1155. atque adeo punctum ſequens erit 1155190.

PARO iam alium diuiſorem hoc pacto. Supra 62. radicem hactenus inuentam ſcribo eius quadratum 3844. & ad dextram eoſdem numeros peculiares 300. & 30. Multiplicatio duorum
3844—300.
62— 30.
ſuperiorum inter ſe facit diuiſorem 1153200. per quem ſi diuidatur punctum 1155190. fit Quotiens 1. poſt alias duas figuras 62.ſcribendus. Pingo iam figuram talem. Ad dextram numerorum 3844. & 300. pono figuram 1. proxime inuentam,
3844—300—1.
62— 30—1.
1.
& infra eam eius quadratum 1. & ſub hoc eiuſdem cubum 1. Nam ſi tam tres ſuperiores numeri 3844. 300.& 1. quam inferiores tres 62. 30. & 1. inter ſe multiplicentur, & productis 1153200. & 1860. addatur cubus 1. fiet numerus 1155061. quem ſi ex meo puncto 1155190. demam,remanent 129. Eſt ergo abſoluta extractio, radixque inuenta eſt 621. quæ in ſe cubice multiplicata procreat numerum 239483061. cui ſi adiiciatur reſiduum 129. conflabitur numerus propoſitus 239483190.

EXTRA-

EXTRACTIO RADICIS SVRDESOLIDÆ.

SIT numerus 1039589621. cuius radix ſurdeſolida quæritur.

Surdeſolida radicis extractio. radix 63.

PRIMVM à puncto 10395.ſubtraho maximum ſurdeſolidum 7776. in eo incluſum, cuius radicem 6. ſcribo in margine pro Quotiente: & quia numerus relinquitur 2619.ideo punctum ſequens erit 261989621.

DEINDE paro diuiſorem hoc modo. Supra radicem inuentam 6. ſcribo eius quadratum 36. & ſupra hunc eiuſdem cubum 216. & ſupra hunc eiuſdem Zenſizenſum, vel quadrati quadratum 1296. ita vt conſtituatur progreſſio Geometrica aſcendens à radice 6. denominata tot terminorum,quot numeri peculiares requiruntur in extractione ſurdeſolida. Et ad dextram colloco quatuor numeros peculiares requiſitos, vt exemplũ monſtrat. Multiplico duos ſuperiores numeros (quod ſatis eſt) 1296. & 50000. inter ſe. Productus namque numerus 64800000. erit diuiſor, per quem ſi diuidatur punctum relictum 261989621. poſſet eſſe Quotiens vel 4. vel 3. vel 2. Accipio autem 3. quia figura 2.eſt nimis parua,& 4.nimis magna,vt ex ſequentibus patebit; quem Quotientem 3.in margine ſcribo poſt inuentam figuram 6. Pingo ergo talem figuram. Ad dextram numerorum 1296. & 50000. pono figuram Quotientis acceptam 3. & infra eam eius quadratum 9. & ſub. hoc eiuſdem cubum 27. & ſub hoc eiuſdem Zenſizenſum, vel quadrati quadratum 81. & ſub hoc eiuſdem ſurdeſolidum 243. ita vt ad dextram conſtituatur progreſſio Geometrica deſcendens denominata à figura Quotientis 3. inuenta tot terminorum vno amplius, quot numeri peculiares requiruntur: adeo vt vltimus terminus ſit numerus ſurdeſolidus figuræ inuentæ,quemadmodum in cubica extractione fuit cubus, & in quadrata quadratus. Nam ſi terni numeri tranſuerſales inter ſe multiplicẽtur, & ad productos 194400000. 19440000. 972000. 24300. adiiciatur ſurdeſolidus 243. efficietur numerus 214836543. qui ex puncto 261989621. detractus relinquit 47153078. Eſt ergo radix ſurdeſolida inuenta 63. quæ in ſe ſurdeſolide multiplicata, ſi nimirum quinquies ponatur hoc modo, 63. 63. 63. 63. 63. producit numerum 992436543. cui ſi addatur reſiduum 47153078. conflabitur propoſitus numerus 1039589621.

1296—50000
216—10000
36— 1000
6— 50
1296—50000— 3.
216—10000— 9.
36— 1000— 27.
6— 50— 81.
243.

QVOD ſi ſupereſſet aliud punctum, conſtituenda eſſet progreſſio aſcendens denominata à tota radice hactenus inuenta 63. quatuor terminorum, vt hic vides. Nam productus 78764805. ex ſuperioribus duobus numeris inter ſe multiplicatis eſſet nouus diuiſor. Deinde ex noua figura inuenta eſſet conſtituenda progreſſio deſcendens vſque ad ſurdeſolidum illius figuræ, quemadmodum ſupra cum figura 3. factum eſt.

15752961—50000
250047—10000
3969— 1000
63— 50

ATQVE in hunc modum radicem cuiuſcunque ſpeciei extrahes, ſi diligenter inquires numeros propoſitæ radici inſeruientes, vt ſupra docuimus. Quæ ſane ratio mihi ſemper præclara eſt viſa. Nam etiamſi operatio videatur aliquanto longior eſſe, quam par ſit, difficilis tamen non eſt, quippe cum ignorari in ea non poſſit, quid faciendum ſit: cum tamen in extractionibus ab alijs Arithmeticis traditis (quadrata excepta) tanta ſit operationis difficultas, vt infinita fere memoria opus ſit ad retinendum ea,quæ ad extrahendas radices adhibenda ſunt,vt in radice cubica extrahenda per aliorum regulam, ſi adhibeatur,patebit: cum tamen cubica extractio ſit longe facilior extractione ſurdeſolida, & alijs inſequentibus, quæ fere inextricabiles ſunt.

Difficultas in extractionibus quo pacto superetur.

SOLA vna difficultas tam in noſtra,quam in aliorum extractione exiſtit,quod nimirum dubium interdum ſit,num figuram nimis paruam in Quotiente alicuius puncti acceperimus. Vt in ſecundo puncto extractionis ſurdeſolidæ potuit eſſe Quotiens vel 4.vel 3.vel 2. Nos autem accepimus 3. Si ergo certi eſſe velimus, an accipi potuiſſet figura 4. quandoquidem ſuperfuit numerus 47153078. valde magnus; faciendum periculum erit cum figura 4. conſtituendo ſcilicet progreſſionem deſcendentem Geometricam à 4.denominatam. Et quia quatuor numeri producti tranſuerſales cum ſurdeſolido 1024. faciunt numerum 297141824. qui ex puncto ſecundo 261989621.ſubtrahi nequit; argumento eſt, figuram 4.nimis magnam eſſe, ac proinde figuram 2. nimis paruam; quandoquidem cum figura 3.tales numeri procreati ſunt, qui ex propoſito puncto potuerunt ſubtrahi. Hoc ergo remedium ſi adhibeatur, quamuis longiuſculum, tutiſſima erit noſtra ratio extrahendarum radicum.

1296—50000— 4
216—10000— 16
36— 1000— 64
6— 50— 256
1024

Cur exemplum non ponatur de radice Zenſizenſica, &c.

IAM vero cur in ſuperiori tabella quadratorum, cuborum, ſurdeſolidorum, &c. omiſerim Zenſizenſos,ſiue quadrati quadratos, atque adeo radicis Zenſizenſicæ extractionem præterierim; ratio eſt, quod radices Zenſizenſica, Zenſicubica, Zenſizenzẽſica, cubicubica, Zenſurdeſolida, &c. quamuis erui poſſint, ſicut alia, habent tamen aliam etiam extractionis regulam, quam vel ex ipſis nominibus colligere licet. Videlicet:

EXTRACTVRVS radicem Zenſizenſicam, ſiue quadrati quadratam, extrahe primo radicem quadratam: Deinde ex hac radice erue iterum quadratam radicem. Hæc enim erit radix Zenſizenſica, quæ quæritur.

EXTRACTVRVS vero radicem Zenſicubicam, id eſt, quadrati cubicam, vel cubi quadratam, extrahe primo radicem quadratam & ex hac deinde radicem cubicam. Vel primo erue radicem cubicam, & ex hac quadratam. Vltima enim radix eruta erit ea, quam quæris. Idem iudicium habeto de alijs radicibus numerorum compoſitorum, vt de radice Zenſizenzenſica, cubicubica, Zenſurdeſolida, &c.

REGVLA PROPRIA EXTRACTIONIS radicis cubicæ.

QVONIAM frequentior vsus est radicis quadratæ, & cubicæ apud Mathematicos, quam aliarum radicum, lubet in studiosorum gratiam præscribere hoc loco regulam propriam ad cubicam radicem extrahendam: quemadmodum idem de quadrata radice fecimus in nostra Arithmetica practica. Relictis autem aliorum regulis, quod minus faciles, minusque expeditæ sint, excerpam vnam quasi nouam ex superiori extractione radicis cubicæ, quæ sic se habet.

SIT eruenda radix cubica ex numero 1860867.

. . .

Regula propria radicis cubicæ.

EX primo puncto 1. ad sinistram subtraho cubum 1. maximum in eo contentum, nihilque remanet. Erit ergo sequens punctum 860. & pro radice inuenta est figura 1.

radix 123.

PARO diuisorem, multiplicando quadratum figuræ inuentæ, nimirum 1. per 300. qui erit 300. per quem si diuidam punctum 860. inuenio Quotientem 2. pro secunda figura radicis. Hanc duco in diuisorem inuentum 300. facioque 600. Deinde duco quadratum nouæ figuræ 2. inuentæ, nimirum 4. in productum ex priori figura 1. multiplicata per 30. hoc est, in 30. facioque 120. Postremo ad summam duorum horum productorum 600. & 120. id est, ad 720. adiicio cubum inuentæ nouæ figuræ 2. nimirum 8. totamque summam 728. ex meo puncto 860. subtraho. Et quia remanent 132. erit vltimum punctum 132867. Scribo ergo inuentam figuram 2. post priorem 1.

DEINDE paro eodem modo diuisorem nouum pro vltimo puncto. Nimirum quadratum totius radicis 12. hactenus inuentæ, id est, 144. duco iterum in 300. Productus enim numerus 43200. erit diuisor, per quem si diuidam meum punctum 132867. reperio Quotientem 3. scribendum post radicem 12. hactenus inuentam. Hanc figuram inuentam 3. similiter duco in diuisorem inuentum 43200. facio que 129600. Deinde quadratum eiusdem nouæ figuræ 3. nimirum 9. duco in productum ex radice 12. prius inuenta, multiplicata per 30. hoc est in 360. efficioque 3240. Postremo ad summam horum duorum productorum 129600. & 3240. hoc est, ad 132840. adiicio cubum 27. ex eadem noua figura genitum, fitque numerus 132867. qui ex puncto 123867. detractus nihil relinquit. Atque ita inuenta est radix 123. numeri propositi 1860867.

QVOD si supereſſet aliud punctum, ducendus esset quadratus totius radicis 123. hactenus inuentæ in 300. vt nouus diuisor exurgeret, &c. Vides ergo in hac regula plus memoriæ requiri, quam in superiori, quamuis facilior sit, quam aliorum regulæ. Memor tamen esto, quando dubitas, an nimis paruam figuram in Quotiente acceperis, vt facias periculum de maiori figura, vt supra dictum est.

PROBL. 15. PROPOS. 20.

IN numeris non quadratis, non cubis, non Zensizensicis, non surdesolidis, &c. radicem veræ propinquam inuenire.

QVANDO numerus propositus non est quadratus, aut cubus, aut Zensizensus, aut surdesolidus, &c. non potest habere verā radicem, sed per regulas superiores inuenitur radix maximi quadrati, vel cubi, vel Zensizensi vel surdesolidi in dato numero contenti. Vt igitur sciamus, quænam fractio ad inuentam radicem addenda sit, vt habeatur radix propinquior veræ, agendum erit hoc modo.

Quot binarij cifrarum vel ternarij vel quaternarij, &c. ad propinquam radicem eruendam apponendi sint.

NVMERO proposito apponantur aliquot binarij cifrarum, si quadrata radix propinqua inquiritur: vel si cubica, aliquot cifrarum ternarij: vel aliquot quaternarij, si radix Zensizensica desideratur, vel aliquot quinarij cifrarum, si de surdesolida radice agitur, &c. Respondet autem in qualibet specie radicis numerus cifrarum aliquoties repetendus numero, qui in progressione ad initium præcedentis problematis posita scribitur supra numerum, à quo radix nomen sumit. Vt quia supra quadratum ponitur 2. ideo pro quadrata radice apponuntur binæ cifræ aliquoties, at pro cubica ternæ, quod supra cubum scriptus sit numerus 3. &c. ita vt pro radice cubicubica propinqua apponendi sint aliquot nouenarij cifrarum, quippe cum supra cubicubum numerus 9. reperiatur descriptus. Idem numerus cifrarum aliquoties repetendus respondet quoque signationibus punctorum, quæ faciendæ sunt, vt radix extrahatur. Vt quia in quadrata radice extrahenda signatur secunda quæuis figura, propterea aliquot cifrarum binarij ascribendi sunt; in cubica vero radice aliquot ternarij cifrarum adiungendi sunt, quia in ea extrahenda tertia quæque figura signatur, &c.

Qua fractio addenda sit radici, vt propinquior radix signatur.

QVO autē plures binarij, vel ternarij cifrarū, &c. numero ꝓpositō apponētur, eo ꝓpinquior radix eruet.

APPOSITIS hoc modo cifris ad numerū, ex quo radix eruēda est, extrahēda est ex toto illo numero radix, vt supra traditū est. Deinde ex ea radice abiectis ad dexterā tot figuris, quot cifrarū binarij, vel ternarij, vel quaternarij, &c. appositi fuere, reliquæ figuræ radicē integrā dabunt, cui addēda est fractio numeratorē habēs figuras abiectas, denominatorē vero vnitatem, cū totidem cifris, quot binarij cifrarū, vel ternarij, &c. additi fuerunt, nimirum vel 10. si vnus binarius, vel ternarius, &c. additus fuit, vel 100. si duo binarij: vel ternarij, &c. additi fuerunt: vel 1000. si tres, & sic deinceps: ita vt fractio illa contineat vel decimas, vel centesimas, vel millesimas, &c.

EXEMPLI causa. Ex numero 29. extrahenda sit radix quadrata. Appositis tribus binarijs cifrarum, hoc modo 29000000. inuenitur huius numeri quadrata radix 5385. minor quam vera, quippe cum in extractione aliquid remanserit: addita vero vnitate, fiet radix 5386. maior, quam vera. Abiectis igitur tribus figuris ad dextram, propter tres cifrarum binarios additos, erit propinqua radix $5\frac{385}{1000}$. minor tamen quā vera: at $5\frac{386}{1000}$. maior quam vera. Illius enim quadratus numerus est $28\frac{998225}{1000000}$. minor quam propositus numerus 29. Huius vero numerus quadratus est $29\frac{899396}{1000000}$. maior eodem numero proposito 29.

ITEM ex numero 29160. eruenda sit radix cubica. Apponantur tres ternarij cifrarum, vt rursus habeantur in fractione partes denominatæ à 1000. atq; ex toto numero 29160000000000. extrahatur radix cubica, quæ reperietur 30779. minor quam vera, quod in extractione fuerit aliquis numerus residuus: atq; adeo maior quā vera, erit 30780. Abiectis tribus figuris ad dextrā, propter tres cifrarū ternarios appositos, erit propinqua

radix cubica $30\frac{779}{1000}$. minor quam vera, cum eius cubus sit tantum $29158\frac{188481301}{1000000000}$. maior autem propinqua radix, quam vera, erit $30\frac{780}{1000}$. quippe cum eius cubus sit $29161\frac{232951000}{1000000000}$.

DEMONSTRATIO huius inuentionis radicis propinquæ hæc est. Quando pro radice quadrata apponuntur 00. ad numerum propositum, verbi gratia ad 5. multiplicatur propositus numerus per 100. hoc est, per quadratum radicis 10. Et quia quadrati 500. & 5. (Nam datus numerus, & conflatus ex additione 00. sumendi sunt tamquam quadrati, cum eorum radices quærantur) [a] habent proportionem suarum radicum duplicatam: Est autem 500. ad 5. vt 10. ad 1. propterea quod 5. multiplicatus per 100. fecit 500. Centupla vero proportio decuplæ duplicata est, vt in hoc appositō exemplo patet; erit proportio radicis numeri 500. ad radicem numeri 5. decupla. Cum ergo radix 500. sit 22. minor quam vera, erit eius $\frac{1}{10}$. nimirum $2\frac{2}{10}$. radix numeri 5. minor, quam vera: ac proinde $2\frac{3}{10}$. erit maior quam vera. Recte ergo præcepimus, quando apponuntur 00. abiiciendam esse ex radice 22. vnam figuram, vt relinquatur radix $2\frac{2}{10}$.

[a] 11. octa.

1.	10.	100.
	5.	500.

QVANDO autem apponuntur 0000. multiplicatur numerus propositus, verbi gratia numerus 5. per 1000. id est, per quadratum radicis 100. Et quia quadrati 50000. 5. [b] habēt duplicatam proportionem suarum radicum: Est autem 50000. ad 5. vt 10000. ad 1. propterea quod 5. multiplicatus per 10000. fecit 50000. Proportio autem 10000. ad 1. duplicata est proportionis 100. ad 1. vt in hoc exemplo patet; erit proportio radicis numeri 50000. ad radicem numeri 223. Quare si radix 223. diuidatur per 100. procreabitur radix quadrata propinqua $2\frac{23}{100}$. minor quam vera, at $2\frac{24}{100}$. erit maior quam vera. Recte ergo præcepimus, cum apponuntur 0000. abiiciendas esse ex radice 223. duas figuras, vt reliqua fiat radix $2\frac{23}{100}$.

[b] 11. octa.

1.	100.	10000.
	5.	50000.

PARI ratione, si apponantur 000000. procreabitur radix propinqua in millesimis, atq; ita deinceps.

RVRSVS quando pro radice cubica ad numerum propositum, vt ad 5. adduntur 000. multiplicatur datus numerus per 1000. id est, per cubum radicis 10. Et quia cubi 5000. 5. [c] habent proportionem suarum radicum triplicatam: Est autem 5000. ad 5. vt 1000. ad 1. quod multiplicans 5. fecit 5000. Proportio autem 1000. ad 1. triplicata est proportionis 10. ad 1. vt in hoc appositō exemplo apparet; erit proportio radicis numeri 5000. ad radicem numeri 17. Quocirca si radix 17. diuidatur per 10. fit radix cubica propinqua $1\frac{7}{10}$. minor quam vera, at $1\frac{8}{10}$. erit maior quam vera. Recte ergo præcepimus, quando pro radice cubica apponuntur 000. abiiciendam esse ex radice inuenta 17. vnam figuram, vt reliqua fiat radix $1\frac{7}{10}$.

[c] 12. octa.

1.	10.	100.	1000.
		5.	5000.

SIMILI modo si apponantur 000000. inuenietur propinqua radix in centesimis: Et si apponantur 000000000. in millesimis, &c. Nam ibi multiplicatur numerus per 1000000. id est, per cubum radicis 100. hic vero 1000000000. nimirum per cubum radicis 1000. Cætera eodem modo demonstrabuntur.

NEQVE vero diuersa ratio est in alijs radicibus. Nam in surdesolida verbi gratia, quando adduntur 00000. fit multiplicatio per 100000. id est, per surdesolidum radicis 10. Et proportio 100000. ad 1. est quintuplicata proportionis 10. ad 1. vt in appositō exemplo apparet, &c.

1.	10.	100.	1000.	10000.	100000.

PROBL. 16. PROPOS. 21.

RADICEM cuiusque generis ex data minutia extrahere.

Extractio radicum ex minutijs.

IN minutijs extrahenda est radix eiusdem appellationis cum radice, quæ quæritur, tum ex numeratore, tum ex denominatore. Ita enim fiet fractio, quæ radix est propositæ minutiæ. Vt radix quadrata minutiæ $\frac{4}{9}$. est $\frac{2}{3}$. Et radix cubica minutiæ $\frac{8}{27}$. est similiter $\frac{2}{3}$. Et radix Zensizensica minutiæ $\frac{16}{81}$. est quoque $\frac{2}{3}$. Et radix surdesolida minutiæ $\frac{243}{1024}$. est pari ratione $\frac{3}{4}$. & sic de alijs.

QVOD si data minutia fuerit fractio, vel minutia alterius minutiæ, reducenda prius erit ad minutiam simplicem. Vt si quærenda sit radix quadrata ex hac minutia minutiæ $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{9}$, reducenda erit ad hanc simplicem minutiam $\frac{16}{36}$. cuius radix quadrata est $\frac{4}{6}$. vel $\frac{2}{3}$. &c.

SIMILITER si fractio adhæreat integris, erunt integra prius reducenda ad fractionem eiusdem denominationis. Vt si quærenda sit radix cubica numeri $1\frac{16}{27}$. reducendus erit ad hanc fractionem $\frac{43}{27}$. cuius radix cubica est $\frac{7}{3}$. hoc est, $1\frac{1}{3}$. &c.

SI vel numerator, vel denominator minutiæ, vel vterque numerus careat radice eius appellationis, quæ desideratur, non habebit illa minutia radicem, quæ quæritur. Vt neque $\frac{2}{3}$. neque $\frac{6}{5}$. neque $\frac{5}{12}$. habent radicem quadratam præcise, propterea quod denominator in prima, numerator vero in secunda, & vterque numerus in tertia quadratam radicem non habet.

COGNOSCES autem, an data fractio habeat radicem quæsitam, nec ne, si eam ad minimos terminos reduces. Si namque ita reducta habuerit radicem, dicetur quoque data minutia eandem radicem habere: Si vero reducta ad minimos terminos radicem non habuerit, neque proposita minutia radicem habebit. Vt si proponatur minutia $\frac{2}{49}$. volo scire, an habeat radicem quadratam: Et reducta ad minimos terminos est $\frac{4}{98}$. quæ radicem quadratam habet $\frac{2}{7}$. Hanc ergo eandem radicem quadratam dicetur habere minutia proposita $\frac{2}{49}$. At vero minutia $\frac{6}{98}$. non habebit radicem quadratam: quia neque $\frac{3}{49}$. in minimis terminis, ad quam reducitur, eam habet. Pari ratione minutia $\frac{2}{81}$. habebit radicem cubicam $\frac{3}{9}$. eandem nimirum, quam habet minutia $\frac{24}{648}$. in minimis terminis, ad quam illa reducitur. Minutia autem $\frac{12}{250}$. radice cubica carebit, quod minutia $\frac{3}{25}$. ad quam in minimis terminis reuocatur, eadem careat. Et sic de alijs.

QVANDO ergo minutia ad minimos reuocata terminos radicem quæsitam non habuerit, exquirenda erit radix propinqua tam numeratoris, quam denominatoris, apponendo videlicet vtrique prius numero aliquot cifrarum binarios, vel ternarios, qua ternarios ue, &c. prout quadrata radix, aut cubica, aut Zensizensica, &c. inquiritur. Si namque radix propinqua numeratoris per propinquam denominatoris radicem diuidatur, prodibit radix propinqua, quam quærimus. Verbi gratia, si proponatur minutia $\frac{9}{16}$ cuius radix quadrata inquirenda sit, appositis tribus binarijs cifrarum reperietur numeratoris radix propinqua $2\frac{448}{1000}$. denominatoris vero $2\frac{828}{1000}$. Si igitur illa per hanc diuidatur, proueniet radix quæsita $\frac{244}{250}\frac{244}{828}$. satis propinqua. Idem iudicium de alijs radicibus habeatur, si memineris tamen, in cubica tam numeratori, quam denominatori apponendos esse aliquot ternarios cifrarum, vt propinquæ eorum radices eruantur: In Zensizensica vero aliquot quaternarios, & in surdesolida aliquot quinarios, &c.

QVIA vero molestum est inquirere duas radices propinquas, vnam pro numeratore propositæ fractionis, & pro denominatore alteram, traduntur à Cardano, & Tartalea pro radice quadrata, & cubica, quæ nimirum magis in vsu sunt, peculiares quædam regulæ, quas hic explicare lubet, quippe cum in eis tantummodo vnius radicis propinquæ inuentione opus sit.

Alia extractio radicis quadratæ & cubicæ ex data minutia.

PRO quadrata igitur radice, duc numeratorem in denominatorem, & producti numeri radicem quadratam proqinquam diuide per denominatorem: Vel numeratorem per radicem illam propinquam partire. Vtroq; n. modo radix propinqua fractionis propositæ gignetur. Et si quidē propinqua illa radix numeri producti ex numeratore in denominatorem fuerit minor quam vera, reperietur priori modo radix fractionis propinqua minor quoq; quā vera; propterea quod numer⁹ vero minor diuiditur: posteriori vero modo inuenietur radix propinqua fractionis maior quam vera, quod tunc diuisio fiat per numerum vero minorem. Contrarium eueniet, si radix illa propinqua numeri ex numeratore in denominatorem producti fuerit maior quam vera. Nam priori modo gignetur radix fractionis propinqua maior, quam vera, posteriori vero modo minor, quam vera, vt perspicuum est. Hanc regulam proposui quoque lib. 4. cap. 2. Num. 5. ibiq; eandem demonstraui. Exemplum huius etiam regulæ ibidem habes.

PRO radice vero cubica: duc numeratorem in quadratum denominatoris, & producti numeri radicem cubicam propinquam diuide per denominatorem: Vel duc denominatorem in quadratum numeratoris, & per numeri producti radicem cubicam propinquam partire numeratorem. Vtroq; enim modo propinqua radix propositæ minutiæ proueniet. Et priori quidem modo, si illa radix cubica propinqua fuerit minor quam vera, reperietur radix propinqua fractionis minor quoq; quā vera, propterea quod diuisio fit numeri vero minoris per denominatorem fractionis. Si autem radix illa propinqua fuerit maior quam vera, gignetur quoque radix propinqua fractionis maior quam vera, quod tunc numerus vero maior per denominatorem fractionis diuidatur. Posteriori vero modo, si radix illa cubica propinquior fuerit minor quam vera, producetur radix propinqua fractionis maior quam vera, quod tunc diuisio fiat per numerū vero minorem: At si illa radix cubica propinqua fuerit maior quam vera, erit inuenta radix fractionis propinqua minor quam vera, quandoquidē tunc diuiditur numerator per numerum vero maiorē. Exemplum in fractione $\frac{8}{27}$. habente veram radicē cubicam $\frac{2}{3}$. Ducto numeratore 8. in 729. quadratum denominatoris 27. fit numerus 5832. cuius radix cubica est 18. Hæc diuisa per denominatorem 27. facit $\frac{18}{27}$. id est, $\frac{2}{3}$. pro radice cubica fractionis $\frac{8}{27}$. Item ducto denominatore 27. in 64. quadratum numeratoris 8. gignetur numerus 1728. cuius radix cubica est 12. per quam si diuidatur numerator 8. fit Quotiens $\frac{8}{12}$. hoc est, $\frac{2}{3}$. vt prius, pro radice cubica fractionis $\frac{8}{27}$. propositæ. Alterum exemplum in fractione $\frac{5}{7}$. non habente veram radicem cubicam. Ducto numeratore 5. in 49. quadratū denominatoris 7. fit numerus 245. cuius radix cubica propinqua $6\frac{29}{100}$. (inuenta per appositionē duorū ternariorum cifrarum) diuisa per denominatorē 7. facit Quotientem $\frac{629}{700}$. hoc est, $\frac{629}{700}$. pro radice fractionis $\frac{5}{7}$. Item ducto denominatore 7. in 25. quadratū numeratoris 5. fit numerus 175. per cuius radicem cubicam $5\frac{59}{100}$. propinquam inuentam per appositionē 000000. ad 175. si partiamur numeratorem 5. inueniemus Quotientem $\frac{5000}{5959}$. pro radice cubica propinqua datæ fractionis $\frac{5}{7}$. atq; ita de alijs. Porro hoc modo reperitur radix fractionis propinquior, quam per superiorem regulam: quia hic solum vnus error irrepit propter radicem cubicam propinquam, quæ vera non est, manente tam denominatore in priori modo, quam numeratore in posteriori, in propria sua quantitate; at in superiori regula duo interueniunt errores, propter duas radices cubicas propinquas, quæ veræ non sunt.

DEMONSTRO vtrumq; hunc modum pari ratione. Quando numerator in quadratum denominatoris ducitur, erit producti numeri radix cubica vnus duorum mediorum proportionalium inter numeratorem ac denominatorem collocandus iuxta denominatorē, vt constat ex ijs, quæ propos. 18. huius lib. demonstrata sunt. [a] Erit igitur proportio numeratoris ad denominatorem triplicata proportionis radicis cubicæ inuentæ ad denominatorem: [b] Est autem eadem proportio numeratoris ad denominatorem, tamquam cubi ad cubum, triplicata quoq; proportionis radicis cubicæ numeratoris ad radicem cubicam denominatoris. Igitur erit radix cubica inuenta ad denominatorem, vt radix cubica numeratoris ad radicem cubicam denominatoris: [c] ac proinde minutia, cuius numerator radix cubica inuenta, ac denominator ipse denominator, æqualis erit minutiæ, cuius numerator radix cubica numeratoris, ac denominator radix cubica denominatoris. Quam ob rem sicut hæc minutia est radix cubica fractionis propositæ, ita quoq; illa erit radix cubica eiusdem fractionis. Diuisa ergo radice illa cubica inuenta per denominatorem fractionis propositæ (quæ diuisio fit, quia illa radix cubica inuenta est fractio, ac proinde, vt cognoscatur valor minutiæ, cuius numerator radix illa inuenta, ac denominator ipsemet denominator fractionis propositæ, diuidendus est numerator huius minutiæ per eius denominatorem: alioquin si illa radix cubica inuenta foret numerus integer, diuisio facienda non esset) producetur radix cubica fractionis propositæ: quemadmodum ex diuisione radicis cubicæ numeratoris per radicem cubicam denominatoris procreatur radix cubica fractionis propositæ: quippe cum minutia nil aliud sit, quam numerator per denominatorem diuisus.

a 10. defin. quinti. *b 12. octa.* *c 7. minutiarum ad finē lib. 9.*

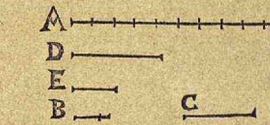
QVANDO vero denominator in quadratum numeratoris ducitur, erit numeri producti radix cubica vnus duorum mediorum proportionaliū inter numeratorem, ac denominatorem, collocandus iuxta numeratorē, vt ex demonstratis propos. 18. huius lib. manifestū est. Ergo rursus erit proportio numeratoris ad denominatorem

natorem triplicata proportionis numeratoris ad illam radicem cubicam inuentam, quemadmodum & proportionis radicis cubicæ numeratoris ad radicem cubicam denominatoris, eadem illa proportio numeratoris ad denominatorem, tamquam cubi ad cubum, triplicata est: Ac propterea, vt supra, minutia, cuius numerator ipsemet numerator fractionis propositæ, denominator vero radix illa cubica inuenta, æqualis erit minutiæ, cuius numerator radix cubica numeratoris fractionis propositæ, & denominator radix cubica denominatoris eiusdem fractionis. Quocirca diuiso numeratore per illam inuentam radicem cubicam, prodibit radix cubica fractionis propositæ.

PROBL. 17. PROPOS. 22.

RADICEM quadratam & cubicam in numeris non quadratis, & non cubicis per lineas Geometrice inuenire.

SIT datus numerus 10. repræsentans quadratum 10. palmorum, vel pedum, vel aliarum mensurarum. Capiatur linea A. palmorum, vel pedū 10. &c. & linea B, palmi, vel pedis 1. [a] Inuenta C, media proportionali inter A, & B. Dico C, esse radicem quadratam, siue latus quadratum, numeri A, 10. [b] Quoniam enim quadratum rectæ C, æquale est rectangulo sub A, & B, comprehenso: Est autem hoc rectangulum 10. quod vnitas B. numerum A, 10. multiplicans procreet 10. perspicuum est, rectam C, esse latus quadratum 10. palmorum, vel pedum, &c. quod est propositum.



a 13. sexti. b 17. sexti.

RVRSVS [c] inuentis inter A, & B, duabus medijs proportionalibus D, & E. Dico E, quæ minori IB, propinquior est, latus esse cubicum, siue radicem cubicam, numeri 10. [d] Quoniam enim cubus rectæ E, æqualis est parallelepipedo sub quadrato rectæ B, & sub A, recta comprehenso: Est autem hoc parallelepipedum 10. quod vnitas B, se multiplicans faciat quadratum 1. & quadratum 1. multiplicans numerum A, 10. gignat 10. liquido constat, rectam E, esse latus cubicum 10. palmorum, vel pedum, &c. quod est propositum.

c 15. huius. d lemma 18. huius.

FINIS LIBRI SEXTI.

GEOMETRIÆ PRACTICÆ

LIBER VII.

De figuris Isoperimetris disputans: cui Appendicis loco annectitur breuis de circulo per lineas quadrando tractatiuncula.

NOBILIS *ac præstans de Isoperimetris figuris semper apud omnes habita est disputatio, in qua videlicet inquiritur, vtra duarum sit altera maior, & capacior, & quæsit omnium maxima & capacissima. Non pauci enim rerum Geometricarum ignari hac in re hallucinati sunt, putantes figuras Isoperimetras, quæ nimirum æquales ambitus continent, esse inter se æquales, siue æque capaces. Immo è contrario, quod mirum est, nonnulli, qui se Geometras appellant, adduci vix possunt, vt credant, dari posse duas figuras Isoperimetras inter se omnino æquales, quod tamen fieri posse, clarissime propos. 20. 21. 22. huius demonstrabimus.*

DEFINITIONES.

Definitiones ad tractationem Isoperimetrarum figurarum pertinentes.

I.

ISOPERIMETRÆ figuræ sunt, quæ æquales ambitus continent.

II.

REGVLARIS figura dicitur ea, quæ & æquilatera & æquiangula est.

III.

CENTRVM figuræ regularis dicitur punctum illud, quod centrum est circuli figuræ inscripti, vel circumscripti.

IV.

AREA cuiuslibet figuræ dicitur capacitas, spatium siue superficies intra latera ipsius comprehensa.

V.

OMNE solidum rectangulum (cuius nimirum bases æquidistantes sunt, & æquales, lateraque ad bases recta, quale est Parallelepipedum) contineri dicitur sub altera basium, ac perpendiculari ab illa basi ad alteram protracta.

QVIA nimirum alterutra basium indicat longitudinem ac latitudinem figuræ, perpendicularis vero altitudinem, siue profunditatem eiusdem demonstrat.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

Trianguli quod cunq; cui rectangulo æquale sit.

AREA cuiuslibet trianguli æqualis est rectangulo comprehenso sub perpendiculari à vertice ad basim protracta, & dimidia parte basis. Item rectangulo comprehenso sub semisse perpendicularis, & tota base. Vel denique semissi rectanguli sub tota perpendiculari, & tota base comprehensi.

SIT triangulum ABC, ex cuius vertice A, ad basim BC, ducatur perpendicularis AD, diuidatque primo basim

basim BC bifariam, vt in prima figura. Per A, ducatur EAF, in vtramque partem æquidistans rectæ BC, compleaturq; rectangulum BEFC, [a] quod erit duplum trianguli ABC; [b] Item duplum rectanguli ADBE. Quare rectangulū ADBE, quod nimium continetur sub perpendiculari AD, & dimidio basis BD, æquale est triangulo ABC. Diuidat secundo perpendicularis AD basim BC, non bifariam, vel etiam cadat in basim CB, protractam, vt in 2. & 3. figura; Et per A, ducatur rursus AF, in vtramque partem æquidistans rectæ BC, compleaturque rectangulum ADCF. Diuisa deinde base BC, bifariam in G, ducātur rectæ BE, GH, ipsi AD, æquidistantes, [c] eritque GH, æqualis perpendiculari AD. [d] Quoniam igitur rectangulum BCFE, duplum est trianguli ABC; [e] Item duplum rectanguli BEHG: erit rectangulum BEHG, quod continetur sub perpendiculari GH, vel AD, & dimidio basis BG, æquale triangulo ABC.



a 41. prim.
b 36. prim.
c 34. prim.
d 41. prim.
e 36. prim.

SECETVR iam perpendicularis AD, vel GH, bifariam in I, agaturq; per I, Ipsi BC, parallela KL. Dico triangulum idem ABC, æquale quoque esse rectangulo BCLK, in 1. & 2. figura, Item rectangulo BCLM, in 3. figura, comprehenso nimirū sub ID, vel IG, semisse perpendicularis AD, vel HG. [f] Quoniam n. triangulū ABC, dimidium est rectanguli EC, eiusdem q; dimidium etiam est rectangulum BL; [g] quod rectangula BL, LE, super æquales bases æqualia sint: æqualia inter se erunt triangulum ABC, & rectangulum BL. [h] Et quia rectangulum BF, contentum sub perpendiculari AD, vel BE. & base trianguli BC, duplū est trianguli ABC, erit triangulum semissi illius rectanguli æquale. Area igitur cuiuslibet trianguli æqualis est, &c. quod erat ostendendum.

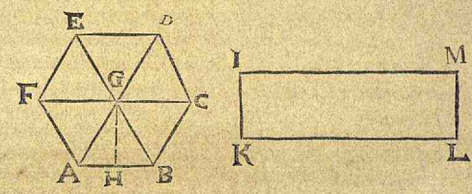
f 41. primi.
g 36. prim.
h 41. prim.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

Regularis figura quæ cunq; cui rectangulo æqualis sit.

AREA cuiuslibet figuræ regularis æqualis est rectangulo contento sub perpendiculari à centro figuræ ad vnum latus ducta, & sub dimidiato ambitu eiusdem figuræ.

SIT figura regularis quæcunque ABCDEF, & centrum eius punctum G, à quo ducatur GH, perpendicularis ad vnum latus, nempe ad AB: Sit quoque rectangulū IKLM, contentū sub IK, quæ æqualis sit perpendiculari GH, & sub KL, rectæ, quæ æqualis ponatur dimidiæ parti ambitus figuræ ABCDEF. Dico huic rectangulo æqualem esse figuram regularem ABCDEF. Ducantur n. ex G, ad singulos angulos lineæ rectæ; vt tota figura in triāgula resoluatur, quę omnia æqualia inter se erunt, vt in corollario propos. 8. lib. 1. Eucl. demōstratum est à nobis propterea quod omnia latera triangulorum à puncto G, excuntia sint inter æqualia, habeantq; bases æquales, nempe latera figuræ regularis. [a] Hinc n. efficitur, omnes angulos ad G, æquales esse, ac proinde, ex dicto corollario, triangula ipsa inter se quoque esse æqualia. [b] Quoniam igitur rectāgulum contentum sub GH, perpendiculari, & medietate basis AB, æquale est triangulo ABG, si sumantur tot huiusmodi rectangula, in quot triangula diuisa est figura regularis, erunt omnia simul figuræ ABCDEF, æqualia; propterea quod omnia triangula ostensa sint æqualia triangulo ABG. [c] Cum igitur eadem simul æqualia sint rectangulo IKLM; propterea quod KL, æqualis ponitur dimidio ambitus ABCDEF, hoc est, omnibus medietatib⁹ basium simul; & recta IK, perpendiculari GH; erit figura regularis ABCDEF, æqualis rectangulo IKLM. Area igitur cuiuslibet figuræ regularis æqualis est, &c. quod erat demonstrandum.



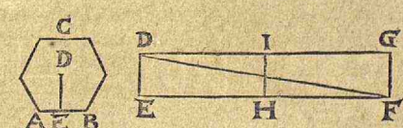
a 8. primi.
b 1. huius.
c 1. secund.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

Regularis figuræ quæ cunq; cui triangulo rectangulo æqualis sit.

AREA cuiuslibet figuræ regularis æqualis est triangulo rectangulo, cuius vnum latus circa angulum rectum æquale est perpendiculari à centro figuræ ad vnum latus ductæ, alterum vero æquale ambitui eiusdem figuræ.

SIT rursus figura regularis ABC, cuius centrum D, à quo perpendicularis ad latus AB, ducta sit DE; triangulum vero rectangulum DEF, habens angulum E, rectum, & latus DE, æquale perpendiculari DE, lat⁹ autem EF, æquale ambitui figuræ ABC. Dico triangulū DEF, figuræ ABC, æquale esse. Compleatur enim rectangulū DEFG; & diuisa EF, bifariam in puncto H, ducatur HI, æquidistans rectæ DE. [a] Erit igitur rectangulum DEHI, contentum sub DE, perpendiculari, & sub EH, dimidio ambitus figuræ, æquale figuræ ABC: At rectangulo DEHI, æquale est triangulum DEF. Nam rectangulum DEHI, est dimidium rectanguli DEFG; [b] propterea quod æqualia sunt rectangula DEHI, IHFG; [c] Triangulum quoque DEF, dimidium est eiusdem rectanguli DEFG. Igitur & triangulum DEF, æquale erit figuræ ABC. Area ergo cuiuslibet figuræ regularis æqualis est triangulo rectangulo, &c. quod demonstrandum erat.



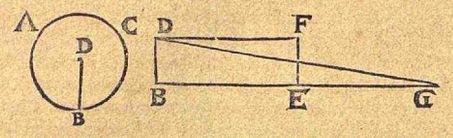
a 2. huius.
b 36. prim.
c 41. prim.

THEOR. 4. PROP. 4.

AREA cuiuslibet circuli æqualis est rectangulo comprehenso sub semidiametro, & dimidiata circumferentia circuli.

Circulus quicunq; cui rectangulo æqualis sit.

ESTO circulus ABC, cuius semidiameter DB: Rectangulum autem DBEF, comprehensum sub DB, semidiametro circuli, & BE, recta, quæ æqualis sit dimidiatæ circumferentię circuli. Dico aream circuli ABC, æqualem esse rectangulo DBEF. Producatur enim BE, in continuũ, ponaturq; EG, æqualis ipsi BE, vt sit BG, recta æqualis toti circumferentiæ circuli. Coniungantur denique puncta D, G, recta DG.[a] Quoniam igitur circulus ABC, æqualis est triangulo DBG:[b] Est autem triangulum DBG, rectangulo DBEF, æquale; quod basis trianguli dupla sit basis trianguli; (Id quod etiam ex demonstratione antecedentis propositi liquet, vbi ostendimus, triangulum DEF, æquale esse rectangulo DEHI:) erit quoque circulus ABC, rectangulo DBEF, æqualis. Area ergo cuiuslibet circuli æqualis est rectangulo, &c. quod ostendendum erat.



a *1. de Dimens. circuli Archim*

b *schol. 41 primi.*

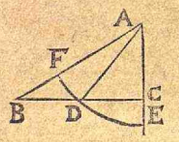
THEOR. 5. PROPOS. 5.

Proprietas quædam trianguli rectãguli.

IN omni triangulo rectangulo, si ab vno acutorum angulorum vtcunque ad latus oppositum linea recta ducatur, erit maior proportio huius lateris ad eius segmentum, quod prope angulum rectum existit, quam anguli acuti prædicti ad eius partem dicto segmento lateris oppositum.

SIT triangulum rectangulum ABC, cuius angulus C, sit rectus; ducaturque ab acuto angulo A, ad latus oppositum BC, recta AD, vtcunque; Dico maiorem esse proportionem rectæ BC, ad rectam CD, quam anguli BAC, ad angulum CAD.[a] Quoniam enim recta AD, maior quidem est, quam AC; minor vero, quam AB; si centro A, interuallo autem AD, circulus describatur, secabit is rectam AC, protractam infra punctum C, vt in E, at vero rectam AB, supra punctum B, vt in F. Et quia maior est proportio trianguli BAD, ad sectorem FAD, quã trianguli DAC, ad sectorẽ DAE, (propterea quod ibi est proportio maioris inæqualitatis, hic autem minoris inæqualitatis)[b] erit quoque permutando maior proportio trianguli BAD, ad triangulum DAC, quam sectoris FAD, ad sectorem DAE.[c] Componendo igitur maior quoque erit porportio trianguli BAC, ad triangulum DAC, hoc est, rectæ BC, ad rectam CD,[d] (habent enim triangula BAC, DAC, eandem proportionem, quam bases BC, CD,) quam sectoris FAE, ad sectorem DAE. hoc est, quam anguli BAC, ad angulum CAD;[e] quod eandem habeant proportionem sectores, quam anguli. Quocirca in omni triangulo rectangulo, &c. quod demonstrandum erat.

HÆC propositio vera quoque est in triangulo non rectangulo, dummodo angulus C, maior sit angulo ADC, vt patet;[f] quod tunc etiam AD, maior sit, quam AC, minor vero, quam AB, &c.



a *19. prim.*

b *27. quin*

c *28. quin.*

d *1. sexti.*

e *coral. 33. sexti.*

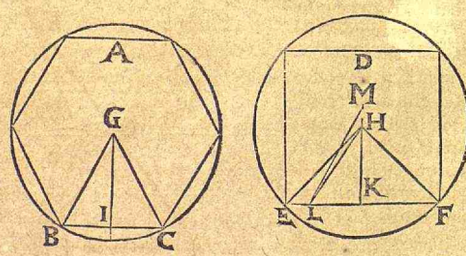
f *19. primi.*

THEOR. 6. PROPOS. 6.

ISOPERIMETRARVM figurarum regularium maior est illa, quæ plures continet angulos, plurave latera.

Inter figuras Isoperimetras, quæ plures angulos, seu latera continet, illa maior est.

SINT duæ figuræ regulares isoperimetræ ABC, DEF, habeatque plura latera, siue angulos figura ABC, quam DEF. Dico ABC, maiorem esse, quam DEF. Describatur enim circa figuras circuli, à quorum centris G, H, ducantur ad BC, EF, perpendiculares GI, HK,[a] quæ diuident rectas BC, EF, bifariam. Quoniam igitur figura ABC, plura habet latera, quã DEF, sibi isoperimetra, efficitur, vt latus BC, sæpius repetitum metiatur ambitum figuræ ABC, quam latus EF, ambitum figuræ DEF. Quare latus BC, minus erit latere EF, ideoque BI, medietas lateris BC, minor, quam EK, medietas lateris EF. Ponatur KL, æqualis ipsi BI, & ducantur rectæ LH, HE, HF, GB, GC,[b] Et quia omnes arcus circuli DEF, sunt æquales, quòd & rectæ subtensæ æquales ponantur; erit recta EF, ita submultiplex ambitus figuræ DEF, vt arcus EF, submultiplex est circumferentiæ circuli DEF. Eademq; ratione ita multiplex ambitus figuræ ABC, rectæ BC, sicut multiplex est circumferentia ABC, arcus BC.[c] Vt autẽ arcus EF, ad circumferentiam circuli DEF, ita est angulus EHF, ad quatuor rectos, igitur erit quoque vt recta EF, ad ambitũ figuræ DEF, hoc est, ad ambitum figuræ ABC, illi æqualẽ, ita angulus EHF, ad quatuor rectos: Vt autẽ ambitus figuræ ABC, ad rectam BC, ita est circumferentia circuli ABC, ad arcum BC,[d] hoc est, ita quatuor recti ad angulum BGC. Ex æquo igitur, vt recta EF, ad rectã BC,[e] hoc est, vt recta EK ad rectam BI, hoc est, ad rectã KL, ita angulus EHF, ad angulum BGC,[f] hoc est, ita angulus EHK, ad angulum BGL.[g] Est autem maior proportio rectę EK, ad rectam KL, quam anguli EHK, ad angulum KHL.[h] Quare maior erit proportio quoque anguli EHK, ad angulum BGI, quam eiusdem anguli EHK, ad angulum KHL;[i] ideoq; maior erit angulus KHL, quam angulus BGI. Cum igitur anguli HKL, GIB, sint æquales, vtpote recti,[k] erit reliquus angulus HLK, minor reliquo angulo GBI. Fiat igitur angulus KLM, æqualis angulo GBI; cadetq; LM, extra LH; conuenietq; cum KH, producta vltra H, in puncto M. Quoniam igitur duo anguli B, I, trianguli GBI, æquales sunt duobus angulis L, K, trianguli MLK, & latera BI, LK, æqualia, l erunt rectæ GI, MK, æquales. Recta ergo GI, maior est, quam recta HK. Quamobrem rectangulum sub GI, & dimidio ambitu figuræ ABC, contentũ, maius erit rectangulo contento sub HK, & dimidio ambitu figurę DEC, qui æqualis ponitur dimidio ambitus figuræ ABC.[m] Quocirca cũ illud rectangulũ ostensum sit æquale figuræ DEF, hoc autem figuræ DEF, æquale; maior quoque erit figura ABC, quam figura DEF. Isoperimetrarum ergo figurarum regularium maior est illa, &c. quod erat ostendendum.



b *28. tertij.*

c *2. corol. 33. sexti.*

d *2 corol. 33. sexti.*

e *15. quin.*

f *15. quin.*

g *5. huius.*

h *13. quin.*

i *10. quint.*

k *32. prim.*

l *26. primi.*

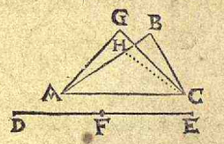
m *2. huius*

PROBL. 1. PROPOS. 7.

PROPOSITO triangulo, cuius duo latera sint inæqualia, super ra reliquum latus triangulum priori Isoperimetrum, ac duo habens latera æqualia, describere.

Qua arte triangulũ Isosceles cõstituatur Isoperimetrum cuius triangulo non Isosceli.

SIT triangulum ABC, cuius duo latera AB, BC, sint inæqualia, nempe AB, maius, quam BC; oporteatq; supra AC, construere triangulum Isosceles, atque isoperimetrum triangulo ABC. Sumatur recta DE, æqualis duobus lateribus AB, BC, simul, diuidaturque bifariam in F.[a] Et quoniam latera AB, BC, simul maiora sunt latere AC, erunt quoque DF, FE, simul, maiores quam linea AC. Atq; ob id tres lineæ AC, DF, FE, ita sese habebunt, vt quælibet duæ sint reliqua maiores.[b] Si igitur ex ipsis conficiatur triangulum AGC, effectum erit, quod proponitur. Erunt enim latera AG, GC, & inter se æqualia. & simul sumpta æqualia lateribus AB, BC, simul sumptis: Addito igitur communi AC, erunt triangula ABC, AGC, isoperimetra. Proposito igitur triangulo cuius duo latera sint inæqualia, supra reliquum latus triangulum, &c. descripsimus, quod faciendum erat.



a *16. prim.*

b *22. prim.*

SCHOLIVM.

CADET autem necessario punctum G, extra triangulum ABC: Si namque caderet in latus AB, vt ad punctum H,[a] esset ducta recta HC, minor, quam HB, BC, simul, & ob id triangulum AHC, non esset isoperimetrum triangulo ABC, cuius contrarium ex constructione est demonstratum. Multo minus cadet punctum G, intra triangulum ABC. Quare extra cadet, quod est propositum.

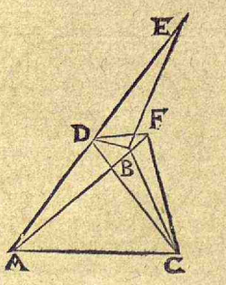
a *20. prim.*

THEOR. 7. PROPOS. 8.

DVORVM triangulorum isoperimetrorum eandem habentium basim, quorum vnius duo latera sint æqualia, alterius vero inæqualia; maius erit illud, cuius duo latera æqualia sunt.

Isosceles triangulũ maius est triangulo sibi Isoperimetro non Isosceles.

ESTO triangulum ABC, cuius latus AB, maius sit latere BC,[a] constituaturque super basim AC, triangulo ABC, triangulum Isoperimetrum ADC, habens latera AD, DC, æqualia & inter se, & lateribus AB, BC, simul sumptis. Dico triangulum ADC, maius esse triangulo ABC. Producatur enim AD, ad partes D, sitq; DE, æqualis ipsi AD, siue ipsi DC. Ducantur quoque rectæ DB, BE.[b] Quoniam igitur AB, BE, maiores sunt, quam AE, hoc est, quam AD, DC, simul, hoc est, quam AB, BC, simul; ablata communi AB, erit BE, maior quam BC. Et quia latera ED, DB, trianguli EDB, æqualia sunt lateribus CD, DB, trianguli CDB. At vero basis BF, basi BC, maior,[c] erit angulus EDB, maior angulo CDB. Quare angulus EDB, maior est, quam dimidium anguli EDC: Est autẽ angulus DAC, dimidiũ anguli EDC;[d] propterea quod anguli DAC, DCA, æquales sunt,[e] & his simul sumptis æqualis quoque externus angulus E-



a *7. huius.*

b *20. prim.*

c *21. prim.*

d *5. primi.*

e *32. prim.*

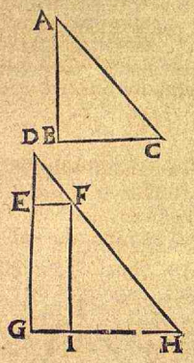
f 23. prim. g 28. pri. h 37. pri.

lus EDC. Maior igitur angulus EDB, angulo DAC.[f] Fiat angulus EDF, æqualis angulo interno DAC; cadetq; DF, recta supra rectam DB,[g] æquidistabitque rectæ AC. Producatur DF, donec cum AB, protracta conueniat in F, ducaturque recta FC.[h] Quoniam igitur triangula ADC, AFC, æqualia sunt, triangulum autem AFC, maius est triangulo ABC; maius quoque erit triangulum ADC, triangulo ABC. Quam ob rem duorum triangulorum Isoperimetrorum eandem habentium basim, &c. quod demonstrandum erat.

THEOR. 8. PROPOS. 9.

Proprietas duorum triangulorum rectangulorum similium.

IN similibus triangulis rectangulis quadratum à lateribus, quæ angulis rectis subtenduntur, tanquam ab vna linea, descriptum, æquale est quadratis duobus simul, quæ à reliquis homologis lateribus tanquam ex duobus lineis, ita vt quelibet duo latera homologa conficiant vnam lineam rectam, describuntur.



SINT triangula rectangula similia ABC, DEF, ita vt anguli B, & E, sint recti, anguli vero, C, & F, inter se æquales; itēq; anguli, A, & D, inter se æquales; homologaq; latera AB, DE; Item BC, EF, & AC, DF. Dico quadratum ex AC, DF, tanquam ex linea vna, descriptum, æquale esse duobus quadratis, quorum vnum ex AB, DE, tanquam ex vna linea, alterum vero ex BC, EF, tanquam ex vna quoque linea, describitur. Producta namque DE, ad partes E, sumatur EG, æqualis rectæ AB, & ducatur GH, recta æquidistans rectæ EF, donec cum FD, producta conueniat in puncto H; Deinde per F, ducatur recta FI, æquidistans rectæ EG. Erit igitur triangulum FIH, æquiangulum triangulo DEF, hoc est, triangulo ABC,[a] Nam angulus FIH, æqualis est angulo G,[b] & hic æqualis angulo DEF, hoc est, angulo B; angulus vero H, æqualis est angulo DFE, hoc est, angulo C;[c] ac proinde & angulus IFH, angulo A: Sunt autem & latera AB, FI, æqualia;[e] Nam recta FI, est æqualis rectæ FG, hæc autem rectæ AB, sumpta fuit æqualis.[d] Igitur & latera BC, IH; item AC, FH, æqualia, inter se erunt. Quare recta DH, composita erit ex AC, & DF, Recta vero DG, ex AB, & DE. Recta denique GH, ex BC, & EF;[f] quod GI, recta æqualis sit rectæ EF.[g] Et quoniam quadratum rectæ DH, æquale est quadratis rectarum DG, GH, simul constat verum esse, quod proponitur. In similibus igitur triangulis rectangulis quadratum à lateribus, quæ angulis rectis subtenduntur, &c. quod erat demonstrandum.

a 29 primi b 29. prim. c 32. prim. d 34 prim. e 20. prim. f 34. prim. g 47 prim

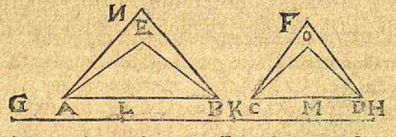
PROBL. 2. PROPOS. 10.

Qua arte constituātur duo triangula isoscelia similia, quidem inter se: Isoperimetra vero aliis duobus Isoscelibus.

DATIS duobus triangulis Isoscelibus, quorum bases inæquales existant, duoq; latera vnius æqualia sint duobus lateribus alterius; Super eisdem basibus duo alia triangula isoscelia inter se quidem similia sumpta, prioribus verò simul sumptis Isoperimetra simul sumpta, constituere.

a 25. primi.

SINT super bases æquales AB, CD, duo triangula Isoscelia AEB, CFD, sintque quatuor lineæ AE, EB, CF, FD, inter se æquales; maior autem sit basis AB, basi CD: quibus positis,[a] erit angulus D, maior angulo F, ideoque triangula non similia, cum nec æquiangula. Oporteat iam super bases eadem AB, CD, constituere alia duo triangula isoscelia inter se quidem similia, isoperimetra vero simul sumpta prioribus triangulis simul sumptis. Ponatur recta GH, æqualis quatuor rectis AE, EB, CF,



b 19. sexti. c 20. prim. d 14. quin. e 22. prim.

FD,[b] diuidaturque in puncto K, vt esset recta composita ex AB, & CD, diuisa in puncto B, hoc est, sit ea proportio GK, ad KH, quæ est AB, ad CD. Et quia maior est recta AB, quam recta CD, maior quoque erit recta GK, quam recta KH, cum vtrobique sit proportio maioris inæqualitatis. Diuidatur vtraque GK, KH, bifariam in punctis L, & M. Itaque cum sit vt GK, ad KH, ita AB, ad CD, erit componendo, vt GH, ad KH, ita AB, CD, simul ad CD: Est autem GH, minor, quam AB, CD, simul,[c] quod & quatuor rectæ AE, EB, CF, FD, quæ æquales sunt rectæ GH, maiores sint, quam AB, CD.[d] Igitur & KH maior erit quam CD: Eademque ratione maior erit GK, quam AB. Quoniam igitur trium rectarum AB, GL, LK, duæ reliquę sunt maiores omnifariam sumptæ, (Duæ enim GL, LK, maiores sunt quam AB, quod tota GK, maior sit, quam AB, vt modo fuit ostensum; Manifestum autem est, AB, GL, maiores esse reliqua LK; Itemque AB, LK, reliqua GL, esse maiores, propterea quod GK, diuisa est bifariam in puncto L. Idem quoque dices de tribus rectis CD, KM, MH.)[e] constituatur ex tribus rectis AB, GL, LK, triangulum ANB, quod erit Isosceles, cadetque punctum N, extra triangulum AEB, cum AE, EB, simul dimidium constituant rectæ GH; at vero AN, NB, simul maius efficiant, quam dimidium rectæ

rectæ GH. [d] Rursus ex tribus rectis CD, KM, MH, constituatur quoque triangulum COD, quod Isosceles erit, cadetque punctum O, intra triangulum CFD, eo quod CF, FD, simul æquales sint dimidio rectæ GH; at CO, OD, simul minores sint dimidio rectæ GH. Et quoniam quatuor latera AE, EB, CF, FD, simul; Item AN, NB, CO, OD, simul æqualia sunt rectæ GH, erunt priora quatuor simul, posterioribus quatuor simul æqualia; additis ergo communibus AB, CD, fient sex latera AE, EB, BA, CF, FD, DC, simul æqualia sex lateribus AN, NB, BA, CO, OD, DC, simul, ideoq; triangula ANB, COD, simul isoperimetra erunt triangulis AEB, CFD, simul. Dico iam, quod & similia inter se sunt triangula ANB, COD. Nam quoniam est vt AB, ad CD, ita GK, ad KH,[e] hoc est, ita GL, ad KM, hoc est, ita AN, ad CO, & NB, ad OD; erit permutando, vt AB, ad AN, ita CD, ad CO; & vt AN, ad NB, ita CO, ad OD. Proportionalia ergo sunt latera triangulorum ANB, COD,[f] ac proinde æquiangula inter se erunt, & idcirco similia. Quare datis duobus triangulis Isoscelibus, quorum bases inæquales existant, &c. constituimus. quod faciendum erat.

d 22. pri. e 13. quin. f 5. sexti.

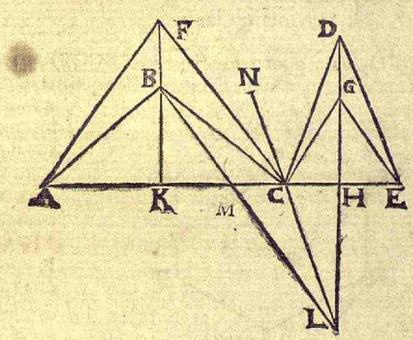
THEOR. 9. PROPOS. 11.

Triangula duo Isoscelia similia maiora sunt duobus Isoscelibus non similibus, quæ illis sint Isoperimetra, basesque habeant easdē.

DVO triangula Isoscelia similia super inæqualibus basibus constituta, vtraque simul maiora sunt duobus triangulis Isoscelibus, vtrisque simul, quæ habeant easdem bases cum prioribus, sintq; dissimilia quidem inter se, at isoperimetra prioribus duobus, nec non quatuor latera inter se habeant æqualia.

a 10. huius

SVPER basibus inæqualibus AC, CE, sint duo triangula Isoscelia inter se non similia ABC, CDE, ita vt quatuor latera AB, BC, CD, DE, inter se sint æqualia.[a] Atque super eisdem basibus AC, CE, constituatur alia duo triangula Isosce lia AFC, CGE, similia inter se, & isoperimetra simul prioribus triangulis simul. Dico duo triangula AFC, CGE, simul maiora esse duobus triangulis ABC, CDE, simul. Ponantur enim AC, CE, secundum lineam rectam vnam; sitque AC, basis maior base CE. Deinde ex F, per B, ducatur recta FBK, secans rectam AC, in puncto K; Itē ex D, per G; punctū ducatur recta DGH, secans rectam CE, in H. Et quia latera AF, FB, triāguli AFB, æqualia sunt lateribus CF, FB, trianguli CFB, & basis AB, basi BC, æqualis, [b] erit angulus AFB, angulo, CFB, æqualis. Rursus quia latera AF, FK, trianguli AFK, æqualia sunt lateribus CF, FK, trianguli CFK, & angulus AFK, angulo CFK, æqualis, vt probatum est; [c] erunt bases AK, KC, æquales, & anguli ad K, æquales quoque, hoc est, recti. Eadem ratiocinatione concludemus rectam CE, in puncto H, diuidi bifariam, angulosque ad H, esse rectos. Producatur recta DH, ad partes H, sumaturque HL, æqualis rectæ DH, & extendatur à puncto L, per punctum C, recta LCN. Quoniam vero latera DH, HC, trianguli DCH, æqualia sunt lateribus LH, HC, trianguli LCH, & anguli ad H, æquales, vtpote recti;[d] erunt bases DC, LC, æquales; & anguli DCH, LCH, æquales etiam: Atqui angulus DCH, maior est angulo GCH, & angulus GCH, æqualis est angulo FAK, propter similitudinem triangulorum GCE, & FAC, hoc est, angulo FCA,[e] qui angulo FAC, æqualis est. Erit igitur angulus DCH, hoc est angulus LCH, qui illi ostensus est æqualis, hoc est, angulus NCK,[f] qui angulo LCH, ad verticē est æqualis, maior etiam angulo FCA: & ob id CN, recta extra rectam CF, cadet necessario; & rectæ LC, CB; propterea comprehendent ad partes K, angulū BCL. Quare si ducatur recta BL, secabit ea lineam CK, in aliquo puncto inter puncta, C, & K, quod sit M. Quoniam vero rectæ AB, BC, CD, DE, simul æquales sunt rectis AF, FC, CG, GE, simul, propter triangula isoperimetra, erunt quoque dimidia earum æqualia inter se, nimirum rectæ BC, CD, hoc est, BC, CL, simul æquales ipsis FC, CG, simul.[g] Sunt autem rectæ BC, CL, simul maiores recta BL. Igitur & FC, CG, simul maiores erunt eadem recta BL: ideoq; quadratum ex FC, CG, tanquam ex vna linea, descriptum maius erit quadrato BL.[h] Quod autem ex FC, CG, tanquam ex vna linea, describitur quadratum, æquale est quadrato ex FK, GH, tanquam ex vna linea descripto, vna cum quadrato, quod ex KC, CH, tanquam ex vna linea, describitur. [i] Quadratum vero ex LB, descriptum æquale est quadrato ex BK, LH, hoc est, ex BK, DH, tanquam ex vna linea, descripto, vna cum quadrato, quod ex KM, MH; tanquam ex vna linea, describitur; quod triangula rectangula BKM, LHM, sint similia inter se. [k] Sunt enim anguli M, ad verticem æquales, & anguli K, H, recti, [l] ideoque & reliqui KBM, HLM, æquales. Igitur quadratum ex FK, GH, tanquam ex vna linea, descriptum, & quadratum ex KC, CH, tanquam ex vna linea, descriptum, hoc est, quadratum KH, vtraque simul maiora sunt quadrato ex BK, DH, tanquam ex vna linea, descripto, & quadrato ex KM, MH, tanquam ex vna linea descripto, hoc est, quadrato KH, vtrisque simul. Ablato ergo communi quadrato KH, erit quadratum ex FK, GH, tanquam ex vna linea, descriptum maius quadrato ex BK, DH, tanquam ex vna linea, descripto; ideoq; maiores erunt rectæ lineæ FK, GH, simul rectis BK, DH, simul; Ac propterea, demptis communibus BK, GH, erit FB, reliqua maior, quam reliqua DG. Est autem & KC, maior quam HC, eo quod tota AC, cui[o] dimidiū est KC, ma-

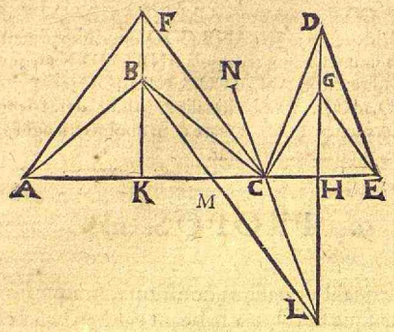


b 8. prim. c 4. prim. d 4. prim. e 5. prim. f 15. primi. g 20. prim. h 9. huius. i 9. huius. k 15. primi. l 32. pri.

ior

ior ponitur quam tota CE, cuius dimidium est HC. Quapropter rectangulum sub FB,KC, contentum, maius erit rectangulo sub DG,HC, contento. Et quoniam triangulum FBC, dimidium est rectanguli sub FB,KC, cõtenti; (Nam si super FB, constituatur rectangulum altitudinem habens KC, ita vt triangulum, & rectangulum inter easdem sint parallelas; [a] erit triangulum parallelogrammi dimidiũ. quod quidem parallelogrammum idem est, quod rectangulum sub FB,KC, contentum, vt constat.) Triangulum vero DGC, dimidium est rectanguli contenti sub DG,HC; (Si enim super DG, constituatur rectangulum altitudinem habens HC, ita vt triangulum, & rectangulum inter easdem sint parallelas: [b] erit triangulum parallelogrammi dimidium, quod quidem parallelogrammum idem est, quod rectangulum sub DG HC, cõtentum, vt constat.) erit quoq; triangulum FBC, maius triangulo DGC; ac propterea duplum trianguli FBC, nimirum rectilineum AFCBA, maius erit duplo trianguli DGC, vtpote rectilineo CDEGC. Quocirca, addito communi compositio ex triangulis ABC,CGE; erunt triangula AFC,CGE, vtraque simul maiora triangulis ABC,CDE, vtrisque simul. Duo ergo triangula Isosceli a similia super inæqualibus basib[9] constituta, &c. quod ostendendum erat.

a 41 prim.



b 41. prim.

THEOR. 10. PROPOS. 12.

Inter Isoperimetras figuras æqualia numero habentes latera maxima & æquilatera est, & æquiangula.

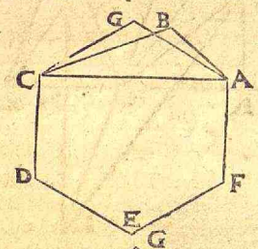
ISOPERIMETRARVM figurarum latera numero æqualia habentium maxima & æquilatera est, & æquiangula.

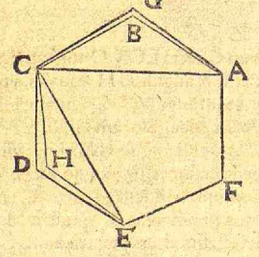
ESTO figura quotcunque laterum ABCDEF, maxima inter omnes totidem laterum sibi Isoperimetras, ita vt maior dari non possit. Dico eam esse æquilateram, & æquiangulam. Sit enim, si fieri potest, primum non æquilatera, sed sint latera AB, BC, proxima inæqualia. Ducta igitur recta AC, [a] si constituatur super AC, triangulum Isosceles AGC, quod sit isoperimetrum triangulo ABC; erit tota figura AGC,DEF, isoperimetra figuræ ABCDEF. [b] Et quia triangulum AGC, maius est triangulo ABC; si addatur commune polygonum ACDEF, erit figura AGCDEF, maior quam figura ABCDEF. quod est contrarium hypothesi. Non ergo inæqualia sunt latera AB,BC, sed æqualia. Eademque ratione ostendemus, latera proxima BC,CD; Item proxima deinceps æqualia esse. Maxima igitur figura inter sibi isoperimetras æqualia numero latera habentes æquilatera est, quod est primum.

Inter Isoperimetras figuras æqualia numero habentes latera maxima & æquilatera est & æquiangula.

a 7. huius.

b 8. huius.





c 24 prim.

d 10. huius

SIT deinde, si fieri potest, figura ABCDEF, æquilatera quidem, vt iam demonstratum est, at non æquiangula, sed anguli B,D, non proximi inæquales sint, maiorque angulus B, quam angulus D. Quoniam igitur demõstratum est, figuram maximam esse æquilateram, erunt duo triangula ABC,CDE, Isosceli a, ita vt duo latera AB, BC, æqualia sint duobus lateribus CD, DE: Ponitur autem angulus B, maior angulo D; [c] erit recta AC, maior quam recta CE. [d] Si igitur constituantur super bases AC,CE, alia duo triangula Isosceli a AGC,CHE, similia inter se, & Isoperimetra triangulis ABC,CDE; [e] erunt triangula AGC,CHE, vtraque simul maiora triangulis ABC,CDE, vtrisque simul. Si igitur addatur commune polygonum ACEF; erit figura AGCHEF, maior, quam figura ABCDEF, quod cum hypothesi pugnat, quod hæc omnium maxima ponatur, Non ergo inæquales sunt anguli B,D, sed æquales. Eademque ratione ostendem[9], angulos non proximos C,E, æquales esse, & binos alios quosuis non proximos. Ex quo efficitur, totam figuram æquiangulam esse, nempe proximos etiam angulos inter se esse æquales. Si enim verbi gratia angulus B, non dicatur æqualis esse angulo C; cum angulus C, æqualis sit non proximo angulo E; erit quoque angulus B, angulo E, non æqualis, quod absurdum est. Bini enim anguli non proximi inter se æquales sunt, vt ostendimus. Maxima ergo figura inter sibi Isoperimetras æqualia numero latera habentes non solum æquilatera, sed & æquiangula est. Quocirca Isoperimetrarum figurarum latera numero æqualia habentium maxima & æquilatera est, & æquiangula. quod demonstrandum erat.

e 11. huius

SCHOLIVM.

Quæ obseruanda sint

CIRCA demonstrationem prioris partis huius propos. obseruandum est, accipienda esse duo latera inæqualia

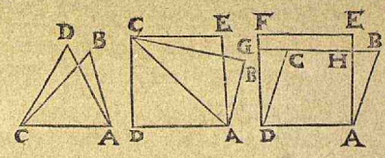
æqualia proxima inter se, ita vt angulum constituant, nullumque aliud inter ea interponatur, qualia sunt latera AB,BC, angulum B, efficientia. Hac enim ratione, ducta recta AC, factum erit triangulum ABC, cuius duo latera AB, BC, inæqualia sunt, vt in demonstratione assumebatur. Neque vero dubitare quis poterit, in figura non æquilatera, qualis ponitur ABCDEF, accipi posse duo latera proxima inæqualia. Nam si quis dicat latera AB, BC, esse æqualia, sumemus latera AB, AF, quæ si dicantur etiam æqualia esse, accipiemus AF, FE: Et si hæc adhuc æqualia esse dicantur, capiemus EF, ED; & sic deinceps progrediemur, donec ad duo latera proxima inæqualia veniamus, quæ angulum constituant. Necessario autem ad duo huiusmodi latera perueniemus: alias figura esset æquilatera, quod non conceditur.

in demonstratione huius prop.

QVOD vero ad posterioris partis demonstrationem attinet, aduertendum est, in figuris multilateris accipiendos esse duos angulos inæquales non proximos inter se, ita vt inter ipsos vnus, vel plures anguli interponantur, quales sunt anguli accepti B, D, inter quos ponitur angulus C. Hac enim ratione duæ rectæ AC,CE, dictos angulos subtendentes se mutuo non intersecabunt, constituenturque duæ figuræ ABCDEF, AGCHEF, ex additione communis figuræ ACEF, ad triangula supra bases AC, CE, constructa: quod non contingeret, si duo anguli inæquales proximi inter se sumerentur, vt constat. Non est autem in dubium vertendum, an tales duo anguli possint accipi. In omni enim figura multilatera non æquiangula necessario erunt aliqui duo anguli non proximi inter se inæquales. Nam in proposita figura ABCDEF, comparabimus angulum B, cum omnibus non proximis angulis D, E, F, qui necessario duo erunt in pentagono, in hexagono vero tres, & ita deinceps. Quod si vni alicui eorum fuerit inæqualis, habebimus iam duos angulos non proximos inter se inæquales, nempe angulum B, & illum, cui inæqualis est: Si vero omnibus dicatur æqualis, erit tunc angulus B, saltem alteri proximorum inæqualis, alias figura esset æquiangula. Si ergo inæqualis fuerit angulo A, erit angulus A, tam angulo E, quam angulo D, non proximo inæqualis, cum vtriuis horum æqualis ponatur angulus B: Si vero inæqualis fuerit angulo C, erit angulus C, tam angulo E, quam angulo F, non proximo inæqualis, quod vtriuis horum angulus B, ponatur æqualis.

SED quoniam propositio hæc demonstrata tantum est in figuris multilateris, vt ex iis constat, quæ proxime de duobus angulis nõ proximis inæqualibus diximus: In triangulis enim, & quadrilateris figuris anguli eiusmodi reperiri non possunt, cum in triangulis æquilateris omnes anguli sint æquales, vt ex coroll. propo. 5. lib. 1. Euclid. patet; in quadrilateris autem figuris omnia latera habentibus æqualia, (quoniam necessario sunt parallelogramma, vt in scholio propos. 34. lib. 1. Euclid. ostendimus) [a] singuli oppositi inter se sint æquales: Idcirco totam hanc propositionem in triangulis, & quadrilateris figuris ita demonstrabimus. Sit primum triangulum ABC, inter sibi Isoperimetra triangula maximum. Dico illud æquilaterum esse & æquiangulum. Si enim non est æquilaterum, sed latera AB, BC, sunt inæqualia, [b] si super basem AC, constituatur triangulum Isosceles ADC, ita vt latera AD, DC, simul æqualia sint lateribus AB,BC, simul; erunt triangula ABC,ADC, Isoperimetra; [c] atque adeo ADC, maius, quam ABC, quod est contra hypothesim. Non ergo inæqualia sunt latera AB,BC, sed æqualia. Eademque ratio est de cæteris. Æquilaterum ergo est triangulum ABC. Igitur, ex coroll. propos. 5. lib. 1. Euclid. & æquiangulum est, quod est propositum.

a 34. primi.



b 7. huius

c 8. huius.

DEINDE sit quadrilaterum ABCD, inter omnia sibi Isoperimetra maximum. Dico illud esse & æquilaterum, & æquiangulum. Si enim non est æquilaterum, sint latera AB, BC, si fieri potest, inæqualia, ducaturque recta AC. [d] Si igitur super AC, constituatur triangulum Isosceles AEC, isoperimetrum triangulo ABC; [e] erit triangulum AEC, maius triangulo ABC. Addito ergo communi triangulo ACD, erit quadrilaterum AECD, maius quadrilatero ABCD, quod est contra hypothesim, cum ABCD, maximum ponatur. Non ergo inæqualia sunt latera AB,BC, sed æqualia. Eademque ratio est de cæteris. Æquilatera ergo est figura ABCD.

d 7. huius.

e 8. huius.

SIT iam quadrilatera figura ABCD, omnium isoperimetrarum maxima, æquilatera, vt ostensum est, at non æquiangula, sed anguli BAD,CDA, inæquales sint. Quoniam igitur figura ABCD, cum sit æquilatera, parallelogrammum est, vt in scholio propos. 34. lib. 1. demonstrauimus; neuterque angulorum A, D, rectus est; (alias, [f] cum ambo duobus rectis sint æquales, essent ambo recti) sed vnus acutus, & obtusus alter: si educantur ex A, & D, duæ lineæ perpendiculares AH, DG, occurrentes lateri BC, in H, & G; erit quoque AHGD, parallelogrammum. [g] Quia vero latera AB,DC, maiora sunt lateribus AH,DG, producantur hæc, vt fiant rectæ AE, DF, lateribus AB, DC, æquales, iungaturque recta EF. Quo facto, erit figura AEFD, isoperimetra parallelogrammo ABCD; cum latera AE,DF, lateribus AB,DC, æqualia sint, latus vero AD, commune, & latus EF lateri BC, æquale, [h] quod vtrumque æquale sit lateri oppositio AD. Cum ergo figura AEFD, maior sit parallelogrammo AHGD; [i] hoc autem æquale sit parallelogrammo ABCD; erit quoque figura AEFD, maior parallelogrammo ABCD. Quare cum eidem sit isoperimetra, non erit ABCD, figura quadrilatera inter sibi Isoperimetras maxima, quod est contra hypothesim. Non ergo inæquales sunt anguli BAD,CDA, sed æquales: atque adeo cum ABCD, sit parallelogrammum, [k] erunt anguli oppositi B,C, angulis D,A, æquales, propterea que tota figura æquiangula erit, quod est propositum.

f 29. primi.

g 19. prim.

h 34. prim.

i 35. primi.

k 34. prim.

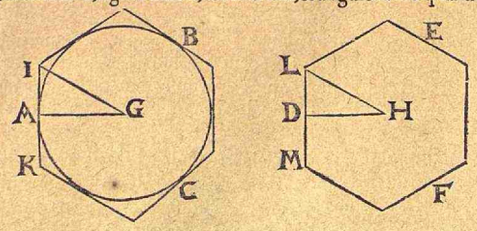
THEOR. 11. PROPOS. 13.

CIRCVLVS omnibus figuris rectilineis regularibus sibi isoperimetris maior est.

ESTO circulus ABC, figura autem regularis quotcunque laterum ei isoperimetra DEF. Dico circulum

Circulus omnium figurarum recti linearum regularium sibi isoperimetrarum maximus est.

ABC, esse maiorem figura DEF. Sit enim G, centrum circuli ABC, & H, centrum figuræ DEF; Describaturque circa circulum ABC, figura BIKC, tot laterum, & angulorum æqualium, quot continet figura DEF, per ea, quæ in scholio propos. 16. lib. 4. Euclid. docuimus. Deinde ex puncto contactus A, ad centrum G, ducatur recta AG, [a] quæ perpendicularis erit ad IK. Ducatur rursus HD, ad LM, perpendicularis; [b] Diuidentq; rectæ GA, HD, rectas IK, LM, bifariã, vt constat, si figuris BIKC,



DEF, circumscribantur circuli. Ducantur quoque rectæ GI, HL, quæ diuident angulos I, & L, bifariam, vt manifestum est ex demonstratione propos. 12. lib. 4. Euclid. Quoniam igitur toti anguli I, & L, sunt æquales, propter similitudinem figurarum, erunt etiam ipsorum dimidia (videlicet anguli AIG, DLH,) æqualia. Cum ergo & anguli IAG, LDH, sint æquales, vt pote recti; [c] erunt triangula AIH, DLH, æquiangula. Quia vero ambitus figuræ BIKC, maior est (per 1. propos. lib. 1. Archimedis de sphæra, & cylindro) ambitu circuli ABC; Ambitus autem circuli æqualis ponitur ambitui figuræ DEF; erit quoque ambitus figuræ BIKC, maior ambitu figuræ DEF. Cum igitur figuræ sint regulares, & similes, erit etiam latus IK, latere LM, maius; & ideo IA, dimidium lateris IK, maius quam LD, dimidium lateris LM. [d] Rursus quoniam est, vt IA, ad AG, ita LD, ad DH; Et est IA, maior quam LD; [e] erit quoq; AG, maior, quam DH. Quamobrem rectangulum contentum sub AG, & dimidio ambitu circuli ABC, [f] quod circulo ABC, est æquale, maius est, quam rectangulum contentum sub DH, & dimidio ambitu figuræ DEF, hoc est, [g] quam area figuræ DEF. Circulus igitur omnibus figuris rectilineis regularibus sibi isoperimetris maior est, quod ostendendum erat.

c 32. primi.
d 4. sexti.
e 14. quint.
f 4. huius
g 2. huius.

COROLLARIVM.

EX omnibus iis, quæ demonstrata sunt, perspicuum est, circulum absolute omnium figurarum rectilinearum sibi isoperimetrarum maximum esse.

Circulus omnibus figuris rectilineis sibi isoperimetris maior est.

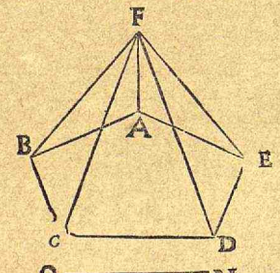
QVONIAM enim ex propositione 5 habetur, regularium figurarum isoperimetrarum eam, quæ plura latera continet, esse maiorem. Rursus ex propositione 12. constat, inter omnes figuras isoperimetras æqualia numero latera habentes, eam maximam esse, quæ regularis est: Ex hac denique 13. propositione perspicuum est, circulum omnium figurarum isoperimetrarum regularium esse maximum: Manifeste concluditur, circulum absolute ac simpliciter omnium figurarum rectilinearum sibi isoperimetrarum maximum esse, quod est propositum.

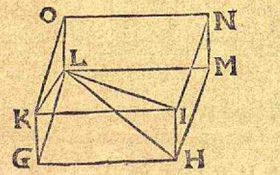
THEOR. 12. PROPOS. 14.

Pyramis quælibet cui parallelepipedo sit æqualis.

AREA cuiuslibet pyramidis æqualis est solido rectangulo contento sub perpendiculari à vertice ad basim protracta, & tertia parte basis.

SIT pyramis, cuius basis quotcunque laterum ABCDE, & vertex F Solidum autem rectangulum GN, cuius basis GHIK, æqualis sit tertiæ parti basis ABCDE; altitudo vero siue perpendicularis GL, æqualis altitudini pyramidis, siue perpendiculari à vertice pyramidis ad eius basim productæ. Dico solidum rectangulum GN, æquale esse pyramidi ABCDEF. Ducantur enim ab omnibus angulis basis GHIK, ad aliquod punctum basis oppositæ, nimirũ ad L, lineæ rectæ, ita, vt constituatur pyramis GHIKL, eandem habens basim cum solido GN, eandemque altitudinem & cum eodem solido GN, & cum pyramide ABCDEF. [a] Quoniam igitur pyramis ABCDEF, tripla est pyramidis GHIKL; [b] Et solidum GN, triplum quoq; est eiusdem pyramidis GHIKL: [c] erit solidum GN, pyramidi ABCDEF, æquale. Quapropter area cuiuslibet pyramidis æqualis est solido rectangulo, &c. quod erat ostendendum.





a schol. 6. duodec.
b coroll. 7. duodec.
c 9. quinti.

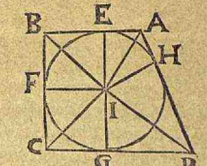
THEOR.

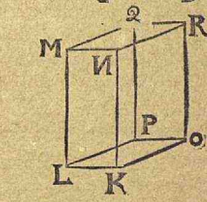
THEOR. 13. PROPOS. 15.

Corpus quodlibet, in qua sphæra describi potest, cui parallelepipedo æquale sit.

AREA cuiuslibet corporis planis superficiebus contenti, & circa sphæram aliquam circumscriptibilis, hoc est, à cuius puncto aliquo medio omnes perpendiculares ad bases eius productæ sunt æquales, æqualis est solido rectangulo contento sub vna perpendicularium, & tertia parte ambitus corporis.

ESTO corpus planis superficiebus contentum ABCD, circa sphæram EFGH, cuius centrum I, descriptum, in quo ducantur ex I, ad puncta contactuum lineæ rectæ IE, IF, IG, IH, quæ ad bases solidi erunt perpendiculares. Nam si verbi gratia per rectam IE, ducatur planum faciens in sphæra, per propos. 1. lib. 1. Theod. circulum EFGH, [a] & in basi rectam AB; tanget circulus EFGH, rectam AB, in puncto E, propterea quod sphæra basim non secat, sed tangit. [b] Igitur IE, ad rectam AB, perpendicularis erit. Eadem ratione, si per IE, ducatur aliud planum à priori differens, fiet alius circulus in sphæra, & alia linea recta in eadem basi secans rectam AB, in E; ad quam etiam IE, perpendicularis erit: [c] Ac propterea IE, ad basim solidi per illas rectas ductam perpendicularis erit. Non aliter ostendemus rectas IF, IG, IH, ad alias bases esse perpendiculares. Sit quoque solidum rectangulum LR, cuius basis KLMN, sit æqualis tertiæ parti ambitus corporis ABCD; altitudo vero siue perpendicularis LP, æqualis vni perpendicularium ex centro I, ad bases corporis ABCD, cadentium; quæ omnes inter se æquales sunt ex defin. sphæræ. Dico, solidum LR, corpori ABCD, æquale esse. Ducantur enim ex centro I, ad omnes angulos corporis ABCD, rectæ lineæ, vt totum corpus in pyramides, ex quibus componitur, diuidatur: quarũ quidem pyramidum bases eædem sunt quæ corporis, vertex autẽ communis centrum I. [d] Quoniam igitur quælibet harum pyramidum æqualis est solido rectangulo sub perpendiculari LP, quæ singulis perpendicularibus corporis ABCD, æqualis ponitur, & tertia parte suæ basis contento; Si fiant tot solida rectangula, quot sunt pyramides, erunt omnia hæc simul æqualia solido rectangulo LR. (Si enim rectangulum KLMN, diuidatur in tot rectangula, quot bases sunt in solido proposito, ita vt primũ æquale sit tertiæ parti vnius basis, & secundum tertiæ parti alterius, & ita deinceps, quandoquidẽ totum rectangulum KLMN, æquale ponitur tertiæ parti totius ambitus solidi; intelligantur autem super illa rectangula constitui parallelepipeda; erunt omnia simul æqualia parallelepipedo LR.) [e] Cum ergo singula parallelepipeda singulis pyramidibus sint æqualia; erunt quoque omnes pyramides, nempe corpus ABCD, ex illis compositum, æquale solido rectangulo LR. Quamobrem area cuiuslibet corporis planis superficiebus contenti, &c. quod demonstrandum erat.





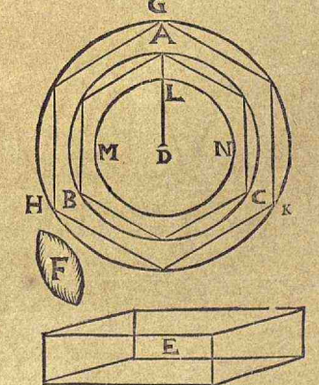
a 4. huius.
b 18. tertij.
c 4. vnde.
d 14. huius.
e 14. huius.

THEOR. 14. PROPOS. 16.

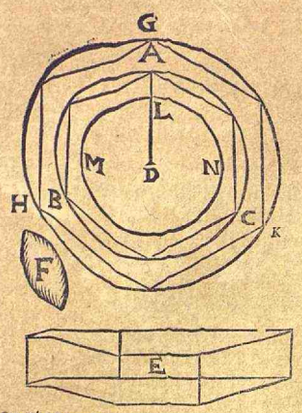
Sphæra quælibet cui parallelepipedo sit æqualis.

AREA cuiuslibet sphæræ æqualis est solido rectangulo comprehenso sub semidiametro sphæræ, & tertia parte ambitus sphæræ.

ESTO sphæra ABC, cuius centrum D, semidiameter AD: Solidum autem rectangulum E, contentum sub semidiametro AD, & tertia parte ambitus sphæræ ABC. Dico corpus E, sphæræ ABC, esse æquale. Nam si non est æquale: sit, si fieri potest, primum maius, sitque excessus corporis E, supra sphæram ABC, quantitas F. Intelligatur circa cẽtrum D, descripta sphæra GHK, maior quam sphæra ABC, ita tamen, vt excessus sphęræ GHK, supra sphæram ABC, non sit maior quantitate F, sed vel æqualis, vel minor, hoc est, vt sphæra GHK, sit vel æqualis solido E, quando nimirum ipsa excedit sphæram ABC, præcisè quantitate F; vel minor, si nimirum ipsa excedit sphæram ABC, minori quantitate, quam F. Necessario enim aliqua sphæra erit, quæ vel æqualis sit magnitudini E, atq; adeo maior quam sphæra ABC, vel maior quidem quã sphæra ABC, minor vero quam magnitudo E, quæ maior ponitur, quam sphæra ABC. [a] Inscribatur deinde intra sphæram GHK, corpus, quod non tangat sphæram ABC, ita vt vnaquæque perpendicularium ex centro D, ad bases istius corporis eductarum maior sit semidiametro AD. Si igitur à centro D, ad omnes angulos dicti corporis ducantur lineæ rectæ, vt totum corpus in pyramides diuidatur, quarum bases sunt eædem, quæ corporis GHK, vertex autem communis centrum D: [b] erit quælibet pyramis æqualis solido rectangulo contento sub eius perpendiculari, & tertia parte basis; Atque idcirco solidum rectangulum contentum sub semidiametro AD, & tertia parte basis cuiuslibet pyramidis, minus ipsa pyramide erit. Et quoniam omnia solida rectangula contenta sub singulis perpendi-



a 17. duod.
b 14. huius



cularibus ex centro D, ad baſes corporis dicti protractis, & ſingulis tertiis partibus baſium, ſimul æqualia ſunt toti corpori; efficiunt autem omnes tertiæ partes baſium ſimul tertiam partem ambitus corporis; erit ſolidum rectangulum contentum ſub ſemidiametro AD, & tertia parte ambitus præfati corporis inſcripti intra ſphæram GHK, minus corpore inſcripto. Quoniã vero ambitus corporis inſcripti maior eſt ambitu ſphæræ ABC, vt demonſtrare Archimedes lib. 1. de ſphæra & cylindro propoſ. 27. atque adeo & tertia pars ambitus dicti corporis maior tertia parte ambitus ſphęræ ABC, erit ſolidum rectangulum contentum ſub ſemidiametro AD, & tertia parte ambitus ſphæræ ABC, hoc eſt, ſolidum E, multo minus corpore inſcripto intra ſphærã GHK: Poſita eſt autem ſphæra GHK, vel æqualis ſolido E, vel minor. Igitur & ſphæra GHK, minor erit corpore intra ipſam deſcripto, totum parte, quod eſt abſurdum. Quocirca ſolidum E, maius non erit ſphæra ABC.

SIT deinde, ſi fieri poteſt, ſolidũ E, minus, quã ſphæra ABC, excedatur q; à ſphæra ABC, quantitate F. Intelligatur circa centrum D, ſphæra deſcripta LMN, minor quam ſphæra ABC, ita tamen, vt exceſſus, quo ſphæra LMN, ſuperatur à ſphæra ABC, non ſit maior quantitate F, ſed vel æqualis, vel minor, hoc eſt, vt ſphæra LMN, ſit vel æqualis ſolido E, ſi nimirum ipſa excedatur à ſphæra ABC, quantitate F, vel maior ſolido E, ſi videlicet ſphæra LMN, à ſphæra ABC, ſuperetur minori quantitate, quam F. Neceſſario aliqua ſphæra erit, quæ vel æqualis ſit ſolido E, atque adeo minor quam ſphæra ABC, vel minor quidem quã ſphæra ABC, maior vero quam magnitudo E, quæ minor ponitur, quam ſphæra ABC.[a] Deſcribatur deinde intra ſphæram ABC, corpus, quod minime tangat ſphæram LMN; ita vt vnaquæq; perpendicularium ex centro D, ad baſes huius corporis inſcripti cadentium minor ſit ſemidiametro AD. Si igitur à centro D, ad omnes eius angulos lineæ extendantur, vt totum corpus in pyramides reſoluatur, quarum baſes ſunt eædem, quæ corporis ABC, vertex autem communis centrum D;[b] erit quælibet pyramis æqualis ſolido rectangulo contento ſub eius perpendiculari, & tertia parte baſis; Et ideo ſolidum rectangulum contentum ſub ſemidiametro AD, & tertia parte baſis cuiuſuis pyramidis, maius erit pyramide ipſa. Et quoniam omnia ſolida rectangula contenta ſunt ſingulis perpendicularibus ex centro D, ad baſes corporis dicti protractis, & ſingulis tertiis partibus baſium, ſimul æqualia ſunt toti corpori; efficiunt autem omnes tertiæ partes baſium ſimul tertiam partem ambitus corporis, erit ſolidum rectangulum contentũ ſub ſemidiametro AD, & tertia parte ambitus dicti corporis ſphæræ ABC, inſcripti maius corpore inſcripto. Cum igitur ambitus ſphæræ ABC, maior ſit ambitu corporis ſibi inſcripti, atque adeo & tertia pars ambitus ſphęræ maior tertia parte ambitus dicti corporis; erit ſolidum rectangulum contentum ſub AD, ſemidiametro, & tertia parte ambitus ſphæræ ABC, hoc eſt, ſolidum E, multo maius corpore inſcripto intra ſphæram ABC: Ponebatur autem ſphæra LMN, vel æqualis ſolido E, vel maior. Igitur & ſphæra LMN, maior erit corpore intra ſphæram ABC, deſcripto, pars toto, quod eſt abſurdum. Non igitur ſolidum E, minus erit ſphæra ABC. Cum ergo neq; maius ſit oſtenſum, æquale omnino erit: Ac propterea area cuiuslibet ſphæræ æqualis eſt ſolido rectangulo comprehenſo ſub ſemidiametro ſphæræ, & tertia parte ambitus ſphæræ. Quod demonſtrandum erat.

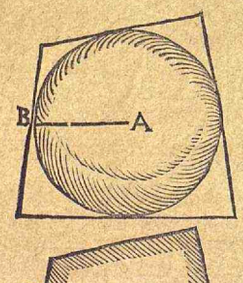
a 17. *duod.*

b 14. *huius.*

THEOR. 15. PROPOS. 17.

Sphæra maior eſt omnibus corporibus ſibi iſoperimetris, & circa alias ſphæras circũſcriptibilibus, quæ planis ſuperficiebus contineantur.

SPHÆRA omnibus corporibus ſibi iſoperimetris, quæ planis ſuperficiebus contineantur, circaque alias ſphæras circumſcriptibilia ſint, hoc eſt, quorum omnes perpendiculares ad baſes productæ ab aliquo puncto medio ſint æquales, maior eſt.



ESTO ſphæra A, cuius centrum A, & ſemidiameter AB: Solidum autem circa aliquam ſphęram circumſcriptibile ſibi iſoperimetrum C, cuius vna perpendicularium CD. Dico ſphæram A, maiorem eſſe ſolido C. Intelligatur enim circa ſphærã A, corpus deſcriptum ſimile prorſus ſolido C, ita vt ſingula quoque latera contingant ſphæram A, hoc eſt, eius perpendiculares, quarum vna ſit AB, ſint quoque æquales, nempe ſemidiametri ſphæræ A, exiſtentes. Itaque quoniam ambitus corporis circa ſphæram A, maior eſt ambitu ſphæræ A, (per ea, quæ ab Archimede ſunt demonſtrata lib. 1. de ſphæra, & cylindro, propoſit. 27.) erit quoque eiuſdem corporis ambitus maior ambitu corporis C. Quare perpendicularis AB, hoc eſt, ſemidiameter ſphæræ A, maior erit perpendiculari CD. Quamobrem rectangulum ſolidum contentum ſub ſemidiametro AB, & tertia parte ambitus ſphæræ A,[a] quod ſphæra A, æquale eſt, maius erit, quam rectangulum ſolidum contentum ſub perpendiculari CD, & tertia parte ambitus corporis C,[b] hoc eſt, quam corpus C. Sphæra igitur omnibus corporibus ſibi iſoperimetris, quæ planis ſuperficiebus contineantur, &c. maior eſt. Quod erat demonſtrandum.

a 16. *huius.*

b 15. *huius.*

COROL-

COROLLARIVM.

CONSTAT hinc, ſphæram maiorem eſſe quolibet corpore regulari ſibi Iſoperimetro: quippe cum omnes perpendiculares è centro ad baſes corporis regularis inter ſe æquales ſint; propterea quod æquales ſunt ſemidiametro ſphæræ,[c] quæ intra corpus deſcribi poteſt.

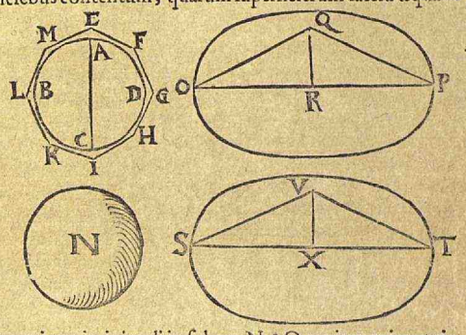
Sphæra maior eſt quouis corpore regulari ſibi Iſoperimetro.

c 21. *quintidec.*

THEOR. 16. PROPOS. 18.

Sphæra maior eſt omnibus corporibus ſibi iſoperimetris, & circa alias ſphæras circumſcriptibilibus, quæ conicis ſuperficiebus continentur.

SPHÆRA omnibus corporibus ſibi iſoperimetris, & circa alias ſphæras circumſcriptibilibus, quæ ſuperficiebus conicis contineantur, ita vt latera omnia conica ſint æqualia, maior eſt.



ESTO circulus ABCD, cui circumſcribatur figura regularis EFGHIKLM, ita vt numerus laterum à quaternario menſuretur, cuiuſmodi eſt quadratum, figura 8. 12. 16. 20. 24. vel 28. laterum, angulorumque æqualium, &c. Ducatur que ex angulo E, per centrum ad angulum I, recta EI. Itaq; ſi circa manentem rectam EI, immobilem circumagatur planum, in quo eſt circulus ABCD, & figura EFGHIKLM, deſcribet circulus ſphæram, figura vero corpus circa ſphæram conicis ſuperficiebus contentum, quarum ſuperficierum latera æqualia ſunt, nempe eadem, quæ figuræ, vt ab Archimede demonſtratur propoſ. 22. & 27. lib. 1. de ſphæra & cylyndro. Sit iam ſphæra N, iſoperimetra corpori EFGHIKLM, circa ſphæram ABCD, deſcripto. Dico ſphæram N, dicto corpore eſſe maiorem. Quoniam enim ambitus ſolidi EFGHIKLM, maior eſt (per propoſ. 27. lib. 1. Archimedis de ſphæra & cylindro) ambitu ſphæræ ABCD, erit quoque ambitus ſphæræ N, maior ambitu ſphæræ ABCD, ideoque ſemidiameter ſphæræ N, maior erit ſemidiametro ſphæræ ABCD. Et quia ſuperficies ſphæræ quadrupla eſt (per propoſ. 31. lib. 1. Archimedis de ſphæra & cylindro) maximi circuli in ſphæra; ſi ſumatur circulus OP, quadruplus circuli maximi in ſphæra N; (quod quidem facile fiet, ſi diameter OP, dupla ſumatur diametri maximi circuli in ſphæra N.[a] Quoniam enim vt circulus OP, ad circulum maximum in ſphæra N, ita quadratum diametri OP, ad quadratum diametri circuli maximi in ſphæra N;[b] Eſt autem quadrati ad quadratum proportio duplicata proportionis laterum homologorũ, erit quoque circulus OP, ad circulum maximum in ſphæra N, in proportione duplicata proportionis diametri OP, ad diametrum circuli maximi in ſphæra N. Cum igitur diametri ponantur habere proportionem duplam habebunt circuli proportionem quadruplam; quadrupla enim proportio duplicata eſt proportionis duplæ, vt in his numeris apparet. 1. 2. 4.) erit circulus OP, æqualis ſuperficiei ſphæræ N. Accipiatur rurſus circulus ST, æqualis circulo OP. Statuatur deinde ſupra circulum ST, conus rectus STV, axem VX, æqualem habens ſemidiametro ſphæræ N: Item ſupra circulũ OP, alter conus NPQ, cõſtruatur habens axem QR, æqualem ſemidiametro ſphæræ ABCD; erit que maior altitudo coni STV, quam coni OPQ, at baſes æquales erunt. Quare conus STV, maior erit cono OPQ;[c] propterea quod coni æqualium baſium eam inter ſe habẽt proportionem, quam altitudines. Quoniã vero ſphæra N, quadrupla eſt eius coni, qui baſem habet æqualẽ maximo in ſphæra N, circulo, & altitudinem æqualem ſemidiametro ſphæræ N, vt demonſtrauit Archimedes lib. 1. de ſphæra & cylindro propoſ. 32. Huius autem eiuſdem coni quadruplus eſt conus STV,[d] eo quod coni eandem habẽtes altitudinem proportionem habent quam baſes;[e] erit conus STV, ſphæræ N, æqualis. Eodem pacto, quia baſis coni OPQ, æqualis eſt ambitui corporis EFGHIKLM; quia & æqualis ſuperficiei ſphæræ N, quæ corpori illi iſoperimetra eſt: altitudo vero æqualis ſemidiametro ſphæræ ABCD, erit ſolido EFGHIKLM, æqualis conus OPQ, per ea, quæ Archimedes lib. 1. de ſphæra & cylindro propoſ. 29. demonſtrauit. Quamobrem & ſphæra N, maior erit ſolido EFGHIKLM, conicis ſuperficiebus contento. Sphæra igitur omnibus corporibus ſibi iſoperimetris & circa alias ſphæras circumſcriptibilibus, &c. maior eſt. Quod demonſtrandum erat.

a 2. *duode.*

b 20. *ſexti.*

c 14. *duod.*

d 11. *duod.*

e 9. *quinti.*

THEOR. 17. PROPOS. 19.

Sphæra maior eſt quolibet cono & cylindro ſibi Iſoperimetro.

SPHÆRA quolibet cono, & cylindro ſibi Iſoperimetro maior eſt.

PROPOSITA enim quacunque ſphæra, ſi fiat conus baſem habens æqualem ſuperficiei ſphæræ, id eſt, quadruplam maximi in ſphęra circuli, altitudinem vero ſemidiametro ſphæræ æqualem:[a] erit ſphæra huic cono æqualis, propterea quod ad conum, cuius baſis eſt maximus in ſphæra circulus, & altitudo ſemidiameter ſphærę, tam ſphæra, ex propoſition. 32. lib. 1. Archimedis de ſphæra & cylindro,[b] quam prior conus baſem habens quadruplam maximi circuli in ſphæra, hoc eſt, ſuperficiei ſphæræ æqualem, & altitudinem ſemidiametrum ſphæræ, proportionem habet quadruplam. Cum ergo ambitus coni baſem habentis ſuperficiei ſphæræ æqualem maior ſit ambitu ſphæræ, quippe cum ille hunc excedat tota ſuperficie coni, ſecluſa baſi, quæ ambitui ſphæræ ponitur æqualis, liquido conſtat, ſi fiat conus ſphæræ iſoperimeter, hunc eſſe illo cono, ac proinde & ſphæra minorem.

a 9. *quinti.*

b 21. *duode.*

RVRSVS si fiat cylindrus basem habens æqualem superficiei sphæræ, & altitudinem semidiametrum sphæræ; [c] erit hic cylindrus triplus illius coni basem habentis æqualem eidem superficiei sphæræ, & altitudinem semidiametrum eandem sphæræ, quem sphæræ æqualem esse proxime ostendimus: ac proinde & triplus ipsius sphæræ. Tertia ergo pars illius cylindri (cylindrus videlicet eandem habens basem, altitudinem vero tertiã partem altitudinis cylindri illius. [d] cum ille cylindrus sit huius triplus) æqualis erit sphæræ. Cum ergo posterior hic cylindrus habeat ambitum maiorem ambitu sphæræ, quod ille hunc excedat ambitu totius cylindri, seclusa vna base; quis non videt, si fiat cylindrus sphæræ isoperimeter, hunc esse priore illo cylindro, ac proinde & sphæra minorem? Sphæra ergo quolibet cono, & cylindro sibi isoperimetro maior est. Quod demonstrandum erat.

c 20. duod.

d 14. duod.

SCHOLIVM.

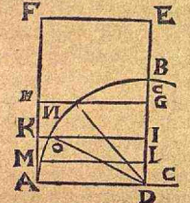
HÆC omnia fere ex Theone Alexandrino in commentariis in Almagestum Ptolomæi, & ex Pappo Alexandrino in Mathematicis collectionibus, licet pleraque eorum clarius & facilius demonstraucrimus, excerpta sunt: quæ vero sequuntur, à nobis inuenta sunt, ac demonstrata.

PROBL. 3. PROPOS. 20.

Semicirculo & aliis partibus subduplis circuli æqualia rectangula & isoperimetra constituere.

DATO semicirculo, vel quadranti, vel octauæ parti circuli, aut decimæsextæ, &c. rectangulum constituere isoperimetrum & æquale; si linea recta periphæriæ detur æqualis.

SIT semicirculus ABC: Quadrans ABD, octaua pars circuli AND, pars sextadecima AOD, &c. construatur rectangulum AE, contentum sub semidiametro AD, & sub recta AF, quæ quartæ parti periphæriæ æqualis sit; Item rectangulum AG, sub semidiametro AD, & sub AH, octaua parte peripheriæ. Item rectangulum AI, sub semidiametro AD, & sub AK, parte decimasexta peripheriæ. Item rectangulum AL, sub semidiametro AD, & sub AM, parte trigesima secunda peripheriæ. Erit igitur ex iis, quæ lib. 4. cap. 7. ad finem Num. 10. ostendimus, AE, semicirculo ABC; & AG, Quadranti ABD; & AI, octauæ parti AND: & AL, parti sextædecimæ AOD, æquale, &c. Dico hæc eadem rectangula esse isoperimetra prædictis circuli partibus, singula singulis, quod quidem perspicuum est ex constructione. Nam AD, EF, æqualia sunt diametro AC, & AF, DE, semicircumferentiæ ABC, nimirum duabus quartis partibus circumferentiæ. Item AD, GH, æqualia sunt semidiametris AD, DB, & AH, DG, duabus partibus octauis, hoc est, quartæ parti circumferentiæ AB. Item AD, IK, duabus semidiametris AD, DN, & AK, DI, duabus sextis decimis id est, octauæ parti circumferentiæ AN. Item AD, LM, duabus semidiametris AD, DO, & AM, DL, duabus partibus trigesimis secundis, hoc est, parti decimæsextæ AO; Atque ita deinceps, si tam peripheria AO, quam recta AM, continue subdiuidatur. Dato ergo semicirculo, vel Quadranti, &c. rectangulum Isoperimetrum, & æquale constituimus, quod faciendum erat.



HOC problema, quod ad semicirculum, ac Quadrantem attinet, aduertit etiam nuper R. P. Odo Malcotius Mathematicus ingeniosus, cum problema Mathematicum per suos auditores exhiberet in Collegio Romano: quamuis illud instar Theorematis proposuerit.

PROBL. 4. PROPOS. 21.

Parallelogrammum dato triangulo æquale & Isoperimetrum cõstituere.

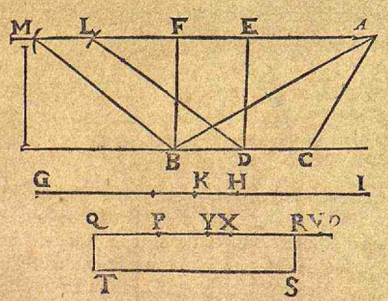
DATO triangulo cuicunque parallelogrammum æquale, atque isoperimetrum constituere.

SIT datum triangulum qualecunque ABC. Per A, ducatur AM, basi BC, parallela. Et quia, si neuter angulorum B, C, rectus est, [a] vtrumque latus AB, AC maius est perpendiculari ex A, vel B, C, D, in oppositam parallelam demissa: si vero alter angulorum rectus est, hoc est, alterutrum laterum perpendiculare est ad dictas parallelas; vtrumque latus AB, AC, simul maius est, quam duplum prædictæ perpendicularis; ideoque semissis aggregati ex vtroque latere maior perpendiculari eadem; id est, si accipiatur GH, lateri AB, & HI, lateri AC, æqualis, vt tota GI, summæ laterum AB, AC, æqualis sit, diuidaturque GI, bifariam in K, semissis GK, maior erit perpendiculari DE. Si igitur ex D, medio puncto basis BC, ad interuallum GK, arcus circuli describatur, secabit is rectam AM, in aliquo puncto, vt in L. Sumpta autem LM, ipsi BD, æquali, ducantur rectæ DL, BM, [b] quæ parallelæ inter se erunt; ideoque parallelogrammum erit DM, [c] triangulo ABC, æquale. Dico hoc idem triangulo esse isoperimetrum, quod perspicuum est ex constructione: quippe cum DL, BM, vtraq; æqualis sit ipsi GK, hoc est, semissi laterum AB, AC, ac proinde ambæ DL, BM, simul æquales ambobus lateribus AB, BD, AC, simul, rectæ autem DL, LM, simul æquales basi BC. Constructum ergo est parallelogrammum DM, non rectangulum æquale, & isoperimetrum triangulo ABC.

a coroll. 19. primi.

b 33. primi.

c schol. 41. primi.



QVOD

QVOD si optes rectangulum eidem triangulo ABC, æquale, & isoperimetrum, ita agendum erit. Erectis perpendicularibus BF, DE, [d] erit rectangulum BE, triangulo æquale, sed non isoperimetrum; [e] quod BF, DE, minores sint lateribus AB, AC, sed BD, EF, basi BC, æquales: ac proinde ambitus rectanguli BE, ambitu trianguli ABC, minor; ideoque si producantur BF, DE, ad æqualitatem semissis laterum AB, AC, fiet quidem rectangulum triangulo ABC, isoperimetrum, sed triangulo maius, cum superet rectangulum BE. [f] Inuenta autem inter BF, BD, media proportionali N; [g] erit quadratum rectæ N, rectangulo BE, ideoque & triangulo ABC, æquale. [h] Quia vero BF, BD, simul maiores sunt, quam dupla rectæ N; [i] estque BM, maior quam BF, erunt BM, BD, simul multo maiores, quam dupla rectæ N. Sumpta ergo QP, ipsi BD, & PO, ipsi BM, æquali, vt tota QO, duabus BD, BM, simul sit æqualis; erit quoque QO, maior quam dupla rectæ N. [k] Secetur ergo QO, in R, ita vt N, sit inter segmenta QR, RO, media proportionalis, perficiaturque rectangulum QS, sub segmentis QR, RO, comprehensum, [l] quod quadrato rectæ N, hoc est, rectangulo BE, vel triangulo ABC, æquale erit. Dico idem esse triangulo ABC, isoperimetrum. Quoniam enim QR, RS, simul, id est, recta QO, æquales sunt rectis BD, BM, simul, ex constructione; erunt reliquæ ST, TQ, reliquis LM, LD, æquales; ideoque rectangulum QS, parallelogrammo BL, ac proinde & triangulo ABC, (cui parallelogrammum BK, isoperimetrum est ostensum) erit isoperimetrum. Dato igitur triangulo cuicunq; parallelogrammum, &c. constituimus, quod faciendum erat.

d schol. 41. primi.

e coroll. 19. primi.

f 13. sexti.

g 17. sexti.

h schol. 25. quinti.

i 19. primi.

k schol. 13. sexti.

l 17. sexti.

SCHOLIVM.

QVOD si sumatur punctum V, vtcunque inter R, & O, erit rectangulum sub QV, VO, adhuc isoperimetrum triangulo ABC, sed minus. Si vero capiatur punctum X, vtcunque inter R, & Y, (diuisa QO, bifariam in Y,) erit adhuc rectangulum sub QX, XO, isoperimetrum triangulo ABC, sed maius. Quadratum denique rectæ QY, isoperimetrum quoque est triangulo ABC, & maius, quæ omnia ita demonstrabimus. Prædicta rectangula, & quadratum rectæ QY, isoperimetra esse triangulo ABC, hoc est, rectangulo QS, patet, cum bina latera circa angulum rectum æqualia semper sint rectæ QO, hoc est, binis lateribus rectanguli QS. Eadem vero esse inæqualia triangulo ABC, sic ostendo. [m] Quoniam quadrata QV, VO, maiora sunt quadratis QR, RO, simul: [n] Sunt autem tam illa duo, vna cum rectangulo sub QV, VO, bis, quam hæc duo, vna cum rectangulo sub QR, RO, bis, quadrato QO, æqualia; erit rectangulum sub QV, VO, bis minus rectangulo sub QR, RO, bis, ideoq; & rectangulum sub QV, VO, semel rectangulo sub QR, RO, semel minus erit. Non aliter ostendemus, rectangulum sub QR, RO, minus esse rectangulo sub QX, XO, hoc est, rectangulum sub QX, XO, maius esse rectangulo sub QR, RO. Denique [o] quoniam rectangulum sub QX, XO, vna cum quadrato XY, æquale est quadrato YO, vel QY, erit quadratum QY, maius rectangulo sub QX, XO, ideoq; multo maius rectangulo sub QR, RO, id est, triangulo ABC, quæ omnia demonstranda erant.

m lemma 42. decimi.

n 4. secun.

o 6. secund.

EX quo constat, quadratum QY, ex semisse rectæ QO, descriptum maximum esse omnium rectangulorum sub quibuscunque segmentis rectæ QO, comprehensorum, quod etiam ex propos. 12. huius lib. liquet.

PROBL. 5. PROPOS. 22.

Rectangulum datæ figuræ isoperimetrũ & æquale constituere.

DATO rectilineo parallelogrammum rectangulum æquale, & Isoperimetrum constituere. Oportet autem latus quadrati rectilineo æqualis, maius non esse semisse dimidiati ambitus dati rectilinei.

SIT hexagonum datum A, æquilaterum quidem, sed non æquiangulum, ita vt B, ad latus quadrati illi æqualis [a] inuentum maius non sit semisse dimidiati ambitus hexagoni. Sumpta ergo recta CD, æquali semissi ambitus hexagoni, erit B, recta non maior semisse ipsius CD, sed vel æqualis, vel minor. [b] Secta autem CD, in E, ita vt B, sit media proportionalis inter segmenta DE, EC, fiat rectangulum EG, contentum sub segmentis DE, EC. Dico rectangulum EG, æquale esse, & isoperimetrum hexagono A. Quoniam enim tres DE, B, EC, continue proportionales sunt; [c] erit rectangulum EG, quadrato B, id est, hexagono A, æquale. Et quia duo latera DE, EF, æqualia sunt rectæ CD, hoc est, semissi ambitus hexagoni A, ideoque reliquæ duæ FG, GD, alteri semissi: erit totum rectangulum EG, hexagono A, isoperimetrum. Dato ergo rectilineo parallelogrammum rectangulum æquale, & Isoperimetrum constituimus: quod erat faciendum.

a 14. secun.

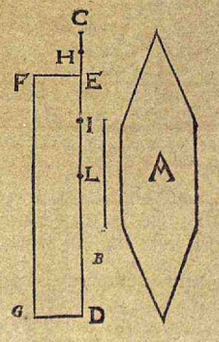
b schol. 13. sexti.

c 16. sexti.

SCHOLIVM.

QVOD si B, latus quadrati foret maius semisse medii ambitus rectilinei A, hoc est, maius recta CD, non posset CD, ita secari, vt B, esset medio loco proportionalis inter segmenta, vt liquido constat.

IAM vero si sumatur punctum H, inter C, & E, vtcunq; erit rectangulum sub DH, HC, adhuc isoperimetrum figuræ A, sed tamen minus. Si vero accipiatur punctum I, vtcunque inter E, & L, punctum medium rectæ CD; erit adhuc rectangulum sub DI, IC, figuræ A, isoperimetrum, maius tamen. Sic etiam quadratum semissis DL, erit isoperimetrum eidem figuræ & maius; quæ omnia demonstrabũtur, vt in schолio præcedentis problematis dictum est.



APPENDIX.

DE circulo per lineas quadrando.

1 LOCVS hic me admonet, vt quoniam hoc libro demonstratum est, circulum figurarum omnium sibi isoperimetrarum esse maximum, breuiter doceam, qua ratione dato circulo quadratum constrŭi possit æquale, & vicissim dato quadrato circulus æqualis; atque id per lineas: cum lib. 4. c. 7. copiose traditum sit, quo pacto ex inuctis ab Archimede, per numeros circulus quadrandus sit, hoc est, qua ratione area circuli, siue capacitas tum ex diametro, tum ex circumferentia cognita sit inuenienda: Huius enim areæ radix quadrata, latus est quadrati, quod circulo æquale est. Sic è contrario cap. 8. eiusdem lib. regula 1. Num. 1. docuimus, qua via ex data circuli area indaganda sit tam circumferentia, quam diameter illius circuli: hoc est, proposito quadrato, instar areæ circuli alicuius, quomodo circulus describendus sit illi quadrato æqualis. Inuenta enim diametro per prædictam regulam 1. Num. 1. cap. 8. lib. 7. circulus illius diametri erit is, qui quæritur. Visum est autem appendicem hanc libro huic septimo adiungere, quod tractatio de circuli Tetragonismo, siue quadratura, non parum affinis sit de isoperimetris figuris disputationi.

Quo pacto reperiatur per numeros quadratum circulo æquale, & contra ex doctrina Archimedis.

Circuli quadratura per numeros secundum Arabes falsa.

QVADRATVRA autem circuli per numeros, quam Arabes tradiderunt, & quam Iosephus Scaligér in suis Cyclometricis elementis veram esse credit omnino reiicienda est, cum sit extra limites Archimedis, per quos constat, proportionem circumferentiæ ad diametrum minorem debere esse tripla sesquiseptima, maiorem vero tripla superdecupartiente septuagesimas primas, quod in numeris Arabum non cernitur. Dicunt enim, proportionem circumferentiæ ad diametrum esse potentia decuplam: adeo vt si quadratum circumferentiæ ponatur 10. quadratum diametri sit 1. quod falsum est. Nam cum radix quadrata numeri 10. sit maior quam $3\frac{1}{7}$. quod huius radicis quadratum sit tantum $9\frac{4}{49}$. Radix autem vnitatis sit 1. esset maior proportio circũferentiæ ad diametrũ, quam tripla sesquiseptima: cum tamen secundum Archimedem sit minor. Item quia posita diametro 7. circumferentia minor est, quam 22. ex Archimede; erit quadratum circumferentiæ minus, quam 484. quod ad 49. quadratum diametri minorem proportionem habet, quam decuplam; quippe cum 490. ad 49. proportionem habeant decuplam. Minor igitur est proportio quadrati circumferentiæ ad quadratum diametri, quam decupla.

Quadratura circuli per numeros ex Alberto Durero falsa.

SIMILI modo reiicienda est ratio quadrandi circuli per numeros Alberti Dureri, qui existimat, diuisa diametro circuli in octo partes æquales, diametrum quadrati circulo æqualis esse 10. adeo vt diameter quadrati circulo æqualis ad diametrum circuli proportionem habeat, quam 10. ad 8. quod etiam falsum est. Nam cum quadratum diametri 10. sit 100. [a] duplumque quadrati, cuius diameter est 10. & quod circulo diametri 8. dicitur æquale: erit quadratum circulo æquale 50. Sed ex diametro 8. reperitur area circuli maior, quam vera, $50\frac{2}{7}$. minor autem, quam vera, $50\frac{1}{14}$. vt cap. 7. lib. 4. Numer. 4. tradidimus. Vera ergo circuli area maior erit, quam $50\frac{1}{14}$. atque adeo multo maior, quam 50. Est igitur quadratum Alberti minus area circuli, non autem æquale.

[a] *schol. 47. primi.*

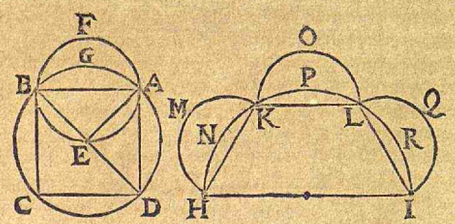
Falsa quadratura circuli per lineas Cãpano ascripta.

2 IAM vero, vt ad quadraturam circuli per lineas aggrediamur, pudet me refellere illam, quæ imperitis vera esse videtur, & quam sciolus, nescio quis, Campano Mathematico non indocto affinxit, typisq; mandauit. Est autem talis. Linea recta circumferentiæ circuli æqualis (quo pacto autem eiusmodi linea inueniatur, non docet) secetur in 4. partes æquales, ex quibus quadratum constituatur, quod sciolus ille circulo dicit esse æquale, quæ res omnino Geometra indigna est. & plane ridicula. Si enim quadratum illud circulo est Isoperimetrum; [b] circulus autem omnium figurarum rectilinearum sibi isoperimetrarum capacissimus est, quis non videt, quadratum illud circulo minus esse?

[b] *13. huius.*

Quadratura Hyppocratis Chij.

3 DE Tetragonismo etiam Hyppocratis Chij nihil dicerem, nisi in eius demonstratione acumen ingenij lateret, quamuis metam propositam non attingat. Ita enim progreditur. Sit quadrandus circulus AFBE, cuius diameter AB, ex qua describatur quadratum ABCD, [c] circa quod circulus describatur ABCD, cuius diameter BD, datum circulum AFBE, secet in E. Ducta ergo recta AE, [d] erit angulus AEB, in semicirculo rectus, [e] ideoque perpendicularis AE, diuidet basem BD, trianguli Isoscelis ABD, bifariam: ac proinde E, centrum erit circuli ABCD. [f] Et quia quadratum diametri BD, duplum est quadrati diametri AB; [g] est que vt quadratum BD, ad quadratum AB, ita circulus ABCD, ad circulum AFBE, erit quoque circulus circuli duplus; & semicirculus BAD, semicirculi AFB; ideoque semissis semicirculi BAD: id est, quadrans ABE, (est enim ABE, quadrans, ob angulum rectum in centro E,) semicirculo AFB, æqualis. Dempto igitur communi segmento AGB, reliquum triangulum AEB, reliquæ Lunulæ AFBGA, æquale erit: ac proinde si triangulo fiat quadratum æquale, erit idem hoc quadratum Lunulæ AFBGA, æquale. Atque ita quadrata est Lunula AFBGA.

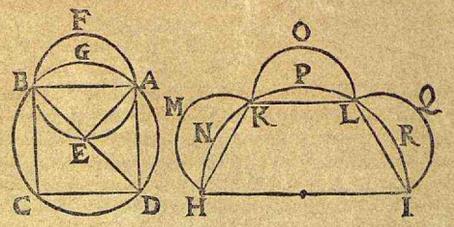


[c] *9 quinti.* [d] *31. tertij.* [e] *schol. 26. primi.* [f] *schol. 27. primi.* [g] *2. duodec.*

DEIN-

DEINDE sit recta HI, diametri AB, dupla, circa quam semicirculo descripto, aptentur in eo tres rectæ semidiametro huius circuli, hoc est, diametro AB, æquales HK, KL, LI, continentes semissem hexagoni: [a] cum latus hexagoni sit semidiametro æquale. Descriptis autẽ circa illas tres rectas semicirculis HMK, kOL, LQI, qui semicirculo AFB, æquales sunt, propter diametros æquales; [b] quoniam quadratum rectæ HI, quadrati rectæ HK, quadruplum est, quod latus lateris sit duplum: [c] erit quoq; circulus diametri HI, circuli diametri HK, quadruplus. & semicirculus HKLI, semicirculis HMK, KOL, LQI, AFB, æqualis erit: demptisq; segmentis communibus HNK, KPL, LRI, reliquum trapezium HKLI, æquale erit tribus Lunulis HNKM, KPLO, LRkQ, vna cum semicirculo AFB. Si igitur tres illæ Lunulæ quadrentur, vt traditum est, & tribus illis quadratis auferatur ex trapezio rectilineum æquale, hoc est, [d] inquiratur excessus trapezii super tria illa quadrata; erit excessus hic rectilinea figura semicirculo AFB, æqualis. [e] Si igitur huic figuræ quadratum fiat æquale, erit idem hoc quadratum semicirculo AFB, æquale; & quadratum ex illius quadrati diametro descriptum toti circulo AFBE, æquale. [f] quod tam quadratum quadrati duplum sit, quam circulus semicirculi. Quadratus ergo circulus est.

[a] *coroll. 15. quarti.*



[b] *schol. 4. secundi.* [c] *2. duode.* [d] *schol. 45. primi.* [e] *14. secun.* [f] *schol. 45. primi.*

Fallacia quadraturæ Hippocratis.

HÆC est quadratura Hyppocratis, acuta quidem, quod Lunulam AGBF, vere quadrauerit, vitiosa autẽ, quod tres Lunulas HNKM, KPLO, LRIQ, quadratas à se esse arbitratur, quod verum non est. Solum enim ex eius demonstratione Lunula ea quadratur, cuius inferior peripheria est quarta pars peripheriæ alicuius circuli, superior autem semicirculus alterius circuli, qualis fuit Lunula AGBF. Nam AGB, quarta pars est circumferentiæ ABCD, & AFB, semissis peripheriæ AFBE. At eiusmodi non sunt tres aliæ Lunulæ, quippe cum earum peripheriæ inferiores HNK, KPL, LRI, sint sextæ partes totius circumferentiæ, quamuis peripheriæ superiores sint semicirculi, vt in illa: quæ nondum sunt quadratæ. Quod si inuenta esset ars quadrandi huiusmodi Lunulas, vel issime quoq; quadraretur circulus, sine inuentione lineæ rectæ circuli peripheriæ æqualis, quæ sane res foret præclara.

Quid desideretur in Hippocratis quadratura.

COLLIGITVR ergo ex hac ratione Hippocratis, quadraturam circuli esse possibilem, cum sicut Lunula AGBF, quadrata est, ita quoque Lunulam HNKM, quadrari posse, nihil obstet, quamuis adhuc non sit à quoquam quadrata. Et certe, vt quidam recte affirmat, quod hic ostenditur ab Hippocrate de Lunula AGBF, quæ pars est circuli AFBE, nihil idem prohibet de circulo toto sciri posse, etiam non inuestigata quantitate peripheriæ circuli, cum solum desit ars quadrandi Lunulam HNKM. Immo plus aliquanto dubitationis inferret inuentio quadraturæ Lunulæ AGBF, non cognita, quam circuli.

Cur de falsis aliorum quadraturis hic nihil dicatur.

4 MVLTA quoque hic dicenda essent de falsis aliorum quadraturis, sed quia hæ vel se ipsas produnt, cum in progressu earum facile appareat, aliquid deesse ad constituendum circulo æquale quadratum, cuiusmodi est quadratura Iacobi Falconis Equitis Hispani, qui sine inuentione lineæ rectæ, quæ peripheriæ sit æqualis, circulum quadrare conatur: vel ab aliis iam dudum sunt cõfutatæ, nimirum Nicolai Cusani Cardinalis quadratura à Ioanne Regiomontano, ac Ioanne Buteone, & Orontii Finaei Tetragonismus tum ab eodem Buteone, tum à Petro Nonio Lusitano in libello de Erratis Orontii: quorum vterque variis viis lineam rectam circumferentiæ æqualem se inuenisse putauit, nihil omnino dicendum mihi esse statuo, ne frustra tempus terere inutiliter videar. Quamobrem solum hoc loco eam quadraturam subiiciam, & plenius aliquanto exponam, quam ad finem lib. 6. Euclid. conscripsi, quæ videlicet per lineam Quadratricem (sic enim eam appellare lubet) lineam rectam inuenit circulari æqualem. Hæc enim via licet ad Geometrice inueniendum punctum quoddam, nonnihil in ea desideretur, accuratior tamen est omnibus aliis, quas hactenus videre potui; ita vt practice à scopo aberrare non possimus. Vt autem clare atque ordinate procedam, absoluam totum negotium paucis quibusdam propositionibus.

Quæ non quadratura per lineas hic explicetur.

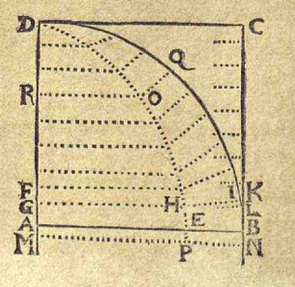
I.

QVADRATRICEM lineam describere.

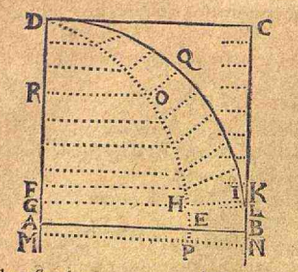
DINOSTRATVS, & Nicomedes, vt auctor est Pappus Alexandrinus in 4. lib. Mathematicarum collectionum, lineam quandam inflexam excogitarunt ad circuli quadraturam, ideoque ab officio τετραγωνίζουσα ab eisdem est appellata: à nobis vero eadem de causa quadratrix dicetur. Quamquam autem prædicti auctores conentur huiusmodi lineam describere per duos motus imaginarios duarum rectarum se se intersecantium, qua in re principium (vt philosophi loquuntur) petunt, propterea à Pappo reiiciatur, tanquam inutilis, & quæ describi non possit: nos tamen eam sine illis motibus Geometrice delineabimus per inuentionem quotuis punctorum, per quæ duci debeat; quemadmodum in descriptionibus conicarum sectionum fieri solet.

Quadratricis descriptio.

5 SIT ergo in quadrato ABCD, descriptus Quadrans BD. Si igitur, vt volunt inuentores lineæ Quadratricis, tam semidiameter AD, æqualiter ferri intelligatur circa centrum A, quam latus quadrati supremum CD, deorsum versus æquabiliter quoque: ita vt, quo tempore punctum D, circumferentiam DB, vniformi semper motu percurrit, eodem recta DC, vniformi etiam motu descendens ad latus AB, perueniat, sic tamen, vt perpetuo sit lateri AB, parallela, & cum lateribus AD, BC, angulos rectos efficiat, secabunt se mutuo continue semidiameter in circumferentia DB, circumacta, & recta DC, deorsum lata, in punctis,



ctis, quæ lineam Quadratricem describent: hoc est, per quæ linea Quadratrix transibit, cuiusmodi est linea inflexa DE. Sed quia duo isti motus vniformes, quorũ vnus per circumferentiam DB, fit, & alter per lineas rectas DA, CB, effici non possunt, nisi proportio habeatur circularis lineæ ad rectam, merito à Pappo descriptio hæc reprehenditur: quippe cum ignota adhuc sit ea proportio, & quæ per hanc lineam inuestiganda proponatur. Quare nos Geometrice eandem lineam Quadratricem describemus hoc modo. Arcus BD, in quotuis partes æquales diuidatur, & latus vtrumq; AD, BC, in totidem æquales partes. Facillima diuisio erit, si & arcus DB, & vtrumque latus AD, BC, secetur primum bifariam, deinde vtraque semissis iterum bifariam, atque ita deinceps, quantum libuerit. Quo autem plures extiterint diuisiones, eo accuratius Quadratrix linea describetur. Nos ad confusionem vitandam sequimus tam arcum DB, quam duo latera AD, BC, in octo tantum partes æquales.



DEINDE bina puncta laterum AD, BC, æqualiter distantia à latere DC, vel AB, coniungantur lineis rectis occultis, atque ex centro A, aliæ rectæ occultæ ad singula diuisionum puncta Quadrantis DB, extendantur. Vbi enim hæ rectæ priores rectas intersecabunt, prima primam, secunda secundam, &c. per ea puncta Quadratrix linea congruenter ducenda est, ita vt non sit sinuosa, sed æquabiliter semper progrediatur nullum efficiens gibbum, aut angulum alicubi: qualis est linea inflexa DE, secans semidiametrum AB, in E.

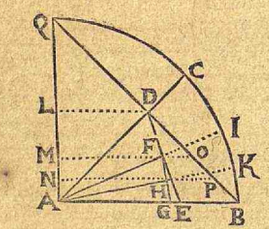
6 SED quia punctum E, in latere AB, inueniri Geometrice non potest, cum ibi omnis sectio rectarum cesset: vt illud sine notabili errore, qui scilicet sub sensum cadat, reperiamus: vtemur hoc arrificio: In simã partem AF, lateris AD, si latis exigua non sit, secabimus bifariam continue, donec infima particula sit perexigua: Eodemque modo infimam partem BI, arcus DB, bifariam continue secabimus, donec tot fiant subdiuisiones, quot in parte AF, factæ sunt, vt particula BK, talis pars sit totius arcus DB, qualis pars est AG, totius lateris AD. Particulæ deinde AG, æquales abscindemus BL, BN, AM, ducemusque rectas occultas GL, MN. Ducta vero ex A, centro recta occulta AK, quæ secet GL, in H, puncto, quod accuratissime notetur (adhibito videlicet Lemmate Probl. 1. lib. 2. vt concursus H, quam exquisitissime reperiatur) sumemus ipsi GH, æqualem MP. Si n. Quadratricem vsque ad H, descriptam continuabimus æquabili, atq; vniformi extensione vsque ad P, secabit Quadratrix linea latus AB, in E, puncto, quod quæritur. Nam propter paruam rectarum GH, AE, MP, inter se distantiam efficitur, vt ferme sint æquales, licet Geometrice loquendo recta AE, semper maior sit aliquanto, quantumuis parum eæ rectæ inter se distent: sed excessus ille circino deprehendi non potest: adeo vt arcus circuli ex A, per H, P, descriptus verum punctum E, quod ad sensum attinet, indicare videatur. Id quod etiam in circumferentia circuli contingit. Rectæ, namque GL, AB, MN, si parum inter se distent, in circulo omnino æquales iudicabuntur, quamuis vere AB, aliquanto maior sit. Itaque si tres illæ rectæ GH, AE, MP, perexiguam habeant distantiam inter se, dubitari non potest, punctum E, in quo quadratrix linea semidiametrum AB, secat, ab eo, quod vere in Quadratrice ibi existit, non differre notabiliter: dummodo puncta H, P, exquisite & summa adhibita diligentia inuenta sint.

Latus basis & centrum Quadratricis.

RECTAM porro AD, vocabimus latus Quadratricis: & rectam AE, eiusdem basem: ac deniq; punctum A, centrum eiusdem.

7 VERVM puncta Quadratricis prope basem certius inueniemus (sine intersectionibus linearum, quę ibi valde obliquæ sunt) per lineas perpendiculares: hoc modo. Ducta chorda Quadrantis BQ, secetur in D, bifariam, quod fiet, si ex A, ad C, punctum medium Quadrantis recta ducatur. [a] Hæc enim rectam BQ, secabit bifariam. Deinde rectæ AD, sumatur æqualis AE; iunctaque recta DE, secetur bifariam in F, quod etiam fiet, si ex A, ad I, punctnm medium arcus BC, ducatur AI. [b] Hæc enim chordam BC, (si duceretur) secaret bifariam: [c] ac proinde & rectã DE, [d] quæ chordæ BC, est parallela: propterea quod latera AB, AC, in triangulo ABC, proportionaliter secantur in D, E: quippe cum tam AB, AC, quã AE, AD, æquales sint. Rursus rectæ AF, capiatur æqualis AG, iunctaq; FG, secetur bifariam in H, quod etiam fiet per rectam AK, ductam ad K, punctum medium arcus BI. Atq; hoc modo, si rectæ AH, æqualis accipiatur, & reliqua fiant, vt prius, inuenietur aliud punctum inter H, & G. Et sic deinceps quotuis alia puncta reperiemus viciniora ipsi AB, per lineas perpendiculares, non autem per obliquas sectiones, vt in priori figura. [e] Est enim AD, ad DB, perpendicularis [f] & AF, ad DE, & DH, ad FG, &c.

a schol. 27. tertij.
b schol. 27. tertij.
c schol. 4. sexti.
d 2. sexti.
e 3. tertij.
f schol. 26. primi.

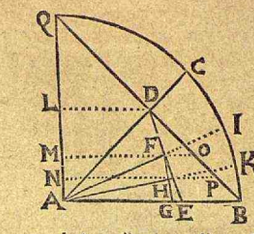


OMNIA vero hæc puncta inuenta D, F, H, &c. esse in Quadratrice, ita ostendo. Ductis DL, FM, HN, ipsi AB, parallelis secantibus BD, in O, P; [g] erit vt BD, ad, DQ, ita AL, ad LQ, ideoque & AQ, secta erit in L, bifariã. Sectus autem est & arcus BQ, in C, bifariam. Igitur, vt ostensum est, punctum D, est in Quadratrice. Rursus quia DE, secta est bifariam in F, [h] erit quoq; DB, secta bifariam in O, [i] ideoque erit vt EF, ad FD, ita BO, ad OD. Sed vt BO, ad OD; ita est AM, ad ML, & vt EF, ad FD, ita arcus BI, ad IC. Ergo vt ostendimus, secabunt sese, AI, MO, in puncto Quadratricis. Eademque ratio est de aliis punctis hac arte inuentis.

g 2. sexti.
h 2. sexti.
i 12. sexti.

8 ESSE porro lineam hanc inflexam DE, à nobis Geometrice descriptam, eandem, quam Dinostratus, & Nicomedes per duos illos motus imaginarios describi concipiebant, perspicuum est. Nam si semidiameter AD, in priori figura circa centrum A, per arcum DB, eodem tempore moueatur motu vniformi, quo latus DC, deorsum fertur motu quoque vniformi: fit vt quando semidiameter AD, pertransiuit quamcunque partem arcus DB, tunc latus DC, similem partem laterum DA, CB, percurrerit. Alias aut duo illi motus non essent vniformes

formes, aut non eodem tempore ad latus AB, tam semidiameter AD, quam latus DC, peruenirent. Cum ergo rectæ ex centro A, per partes arcus DB, emissæ, & lineæ parallelæ per partes laterum DA, CB, ductæ abscindant semper ex arcu DB, & ex lateribus DA, CB, partes similes, ex constructione: liquido constat, puncta lineæ inflexæ DE, à nobis Geometrice inuenta, à punctis, quæ à duobus illis motibus reperirentur, non differre



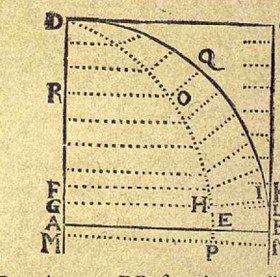
HÆC igitur est descriptio lineæ Quadratricis Geometrica quodammodo, quemadmodum & conicarum sectionum descriptiones, quæ per puncta etiam fiunt, vt ab Appollonio traditur, Geometricæ dicuntur, cum tamen errori magis sint obnoxiæ, quam nostra descriptio, propter inuentionem plurimarum linearum mediarum proportionalium, quæ ad earum descriptiones sunt necessariæ, quibus in Quadratricis descriptione opus non est. Quare nisi quis totam conicarum sectionum doctrinam, quam tanto ingenii acumine Apollonius Pergaeus persecutus est, vt propterea Magnus Geometra appellatus sit, reiicere velit, tanquam inutilem, & non Geometricam, (quod neminem in Geometria peritum facturum existimo, cum sectiones conicas ad demonstrationes adhibuerint præstantissimi Geometræ. Nam Menechmus Hyperbola, ac Parabola vsus est in duarum linearum mediarum proportionalium inter quasuis duas rectas inuentione; Et Archimedes ipse multa præclare de iisdem sectionibus conicis demonstrauit: ac denique eiusmodi sectiones insignem vsum habent in re Gnomonica, vt ex nostra Gnomonica apparet) admittere omnino cogetur, hanc descriptionem nostram Quadratricis lineæ esse quodammodo Geometricam. Adde quod linea conchilis, qua Nicomedes duas medias lineas proportionales acutissime inuestigat, per puncta etiam describitur, vt libro 6. propos. 15. diximus.

HABET linea hæc Quadratrix multas, & insignes vtilitates, quarum nonnullas ad finem lib. 6. Euclid. demonstrauimus, quas hoc loco repetere superuacaneum est. Solum igitur eius vsum in quadrãdis circulis hic exponemus. Qua in re indigemus tantummodo vltimo puncto E, in priori figura, etiamsi nullum aliud Quadratricis punctum inuentum esset quod quidem vltimum punctum licet Geometrice, ac præcise non reperiatur: tamẽ si artificiũ posterioris figurę adhibeatur, nõ aberrabimus à vero puncto notabiliter, vt supra diximus. Quãdo namq; deprehensum fuerit, vltimam perpendicularem AH, æqualem esse præcedenti vltimæ lineæ translatæ AG, ita vt nulla differentia inter illas per circinum discernatur: sumi poterit citra errorem notabilem vltimum illud punctum G, pro puncto extremo Quadratricis: Sin minus, ducendæ erunt aliæ perpendiculares eo artificio, quo AF, AH, ductæ sunt, donec inter vltimam, & postremo loco inuentam rectam in semidiametro AB, nullum apparcat discrimen, cuius quidem rei operatio ipsa optimus erit magister.

COROLLARIVM.

9 EX descriptione Quadratricis colligitur, si ex centro A, ducatur recta vtcunque AQ, secans arcum Quadrantis in Q, & Quadratricem in O; ita esse arcum BD, ad arcum BQ, vt est semidiameter AD, ad rectam AR, ducta prius OR, ipsi AB, parallela: [a] ac proinde & ad rectam, quæ ex O, ad AB, demittitur perpendicularis. Quia enim eadem pars est arcus DQ, totius arcus DB, quæ pars est recta DR, totius semidiametri DA, quippe cum in descriptione Quadratricis arcus DQ, totius arcus DB, tot particulas complectatur, quot partes recta DR, totius DA, continet: quandoquidem rectæ AQ, RO, sese inter secant in O, puncto Quadratricis. Neque hæc similitudo impeditur, etiamsi tam arcus DQ, toti arcui DB, quam recta DR, toti lateri DA, sit incommensurabilis, cum perpetuo Quadratrix eadem vniformitate progrediatur per omnia sua puncta. Si enim recta DR, non est talis pars, siue commensurabilis, siue incommensurabilis totius lateris DA, qualis pars est arcus DQ, totius arcus DB; si cogitetur talis pars lateris DA, minor quam DR, vel maior, secabit parallela ex eius puncto extremo ducta rectam AQ, vel supra O, vel infra, in puncto, per quod Quadratrix describenda est; ac proinde ea non transibit per O, quod est absurdum, & contra hypothesim. Quia inquam eadem pars est arcus DQ, totius arcus DB, quæ pars est recta DR, totius lateris DA; [b] erit quoque reliquus arcus QB, eadem pars totius arcus DB, quæ pars est reliqua recta RA, totius lateris DA: quod eadem sit proportio totius DB, ad DQ, quæ totius DA, ad DR: Et permutando eadẽ totius DB, ad totam DA, quæ ablati arcus DQ, ad ablatam rectam DR. Quocirca erit, vt totus arcus DB, ad arcum QB, ita totum latus DA, ad rectam RA, hoc est, ad rectam perpendicularem ex O, ad AB, demissam, [c] quæ ipsi RA, æqualis est.

a 34. prim.



b 19. quint.
c 34. prim.

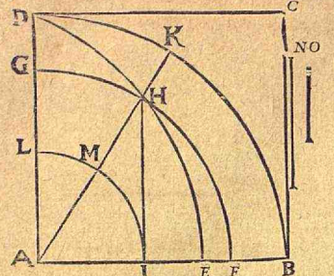
II.

SI Quadrantis, & Quadratricis idem centrum sit, erunt arcus Quadrantis, semidiameter, & basis quadratricis continue proportionales.

HÆC est eximia, atque insignis proprietas Quadratricis. Sit Quadrans, & Quadratrix ex eo descripta, vt supra. Dico arcum BD, semidiametrum AD, & Quadratricis basem AE, continue esse proportionales, hoc est, esse BD, ad AD, vt AD, ad AE. Sin minus, sit vt BD, ad AD, ita AD, ad AF, maiorem ipsa AE, minoremue, sitq;

primum

primum AF, maior, quam AE. Descripto ex centro A, Quadrante FG, per F, secante quadratricem in H, ducatur per H, semidiameter AHK, demittaturque perpendicularis HI. Quoniam igitur ponitur arcus BD, ad rectam AD, vt AD, hoc est, vt AB, ad AF, estque vt AB, semidiameter ad semidiametrum AF, ita arcus BD, ad arcum FG; (Cum enim sit, vt lib. 4 cap. 7. propos. 1. demonstrauimus, diameter ad diametrum, vt circumferentia ad circumferentiam; [a] erit quoq; semidiameter AB, ad semidiametrum AF, vt eadem circumferētia ad eandem circumferentiam: [b] ac proinde etiam, vt quarta pars circumferentiæ ad quartam partem circumferentiæ, hoc est, vt arcus BD, ad arcū FG,) [c] Erit quoq; arcus BD, ad rectā AD, vt idē arcus BD, ad arcū FG; [d] ac propterea æquales erunt recta AD, & arcus FG. Quia vero ex præcedenti cor. est, vt arcus BD, ad arcū BK, ita recta AD, ad rectā HI, & vt arcus BD, ad arcū BK, ita est arcus FG, ad arcū FH, [e] ꝙ arcus BD, BK, arcubus FG, FH, similes sint; [f] erit quoq; recta AD, ad rectam HI, vt arcus FG, ad arcum FH. Cū ergo ostensa sit recta AD, arcui FG, æqualis: [g] erit quoq; recta HI, arcui FH, æqualis, quod est absurdū. Est enim recta HI, minor arcu FH, cum ea sit semissis chordæ subtendentis arcum duplum arcus FH: [h] (Nam recta AF, secat eam chordam bifariam; [i] ac proinde & arcum) chorda autem semper suo arcu minor sit. Non ergo est arcus BD, ad semidiametrum AD, vt AD, ad rectam maiorem basē AE, Quadratricis.



a 15. quint.
b 15. quint.
c 11. quint.
d 9. quinti.
e schol. 33. sexti.
f 11. quinti.
g 14. quin.
h 3. tertij.
i schol. 27. tertij.

SIT deinde, si fieri potest, vt arcus BD, ad AD, ita AD, ad AI, minorem basē AE. Descripto igitur ex centro A, per I, Quadrante IL, exigatur ex I, ad AE, perpendicularis IH, secans Quadratricē in H, puncto, per quod semidiameter ducatur AK, secans arcum IL, in M. Ostendemus ergo, vt prius, arcum IL, rectæ AD, æqualem esse. Item ita esse arcum BD, ad arcum BK, hoc est, arcum IL, ad arcum IM, vt est recta AD, ad rectam HI. Quare cum arcus IL, ostensus sit æqualis rectæ AD; [k] erit quoque arcus IM, æqualis rectæ HI, quod est absurdum. Est enim recta HI, maior arcu IM. Nam si ex H, duceretur versus G, alia recta tangēs circulum IL, sicut HI, eundem tangit in I, [l] essent hæ duæ tangentes æquales, arcusque inter eas interceptus secaretur bifariam in M, [m] propterea quod angulus ab eis comprehensus bifariam diuideretur à recta AH, [n] ac proinde & angulus in centro A, si ad alterum punctum contactus recta adiungeretur: [o] ideoque arcus, quibus insistunt, æquales forent. Igitur cum, vt lib. 8. propos. 1. probabimus cum Archimede, duæ illæ tangentes simul maiores sint arcu ab eis comprehenso, erit & earum semissis HI, maior semisse IM, illius arcus. Non est ergo arcus BD, ad semidiametrum AD, vt AD, ad rectam minorem basē AE, Quadratricis; Sed neq; vt AD, ad maiorem, sicut ostensum est. Igitur vt AD, ad ipsam basem AE. Quod demonstrandum erat.

k 14. quint.
l 12. coroll. 36. tertij.
m schol. 27. tertij.
n 4. vel 8. primi.
o 26. tertij.

COROLLARIVM I.

Rectam circumferentiæ circuli æqualem reperire.

HINC facile rectam reperiemus arcui Quadrantis, ex quo Quadratrix descripta est, ac proinde & semicircumferentiæ, immo & toti circumferentiæ æqualem.

QVONIAM est arcus BD, ad semidiametrum AD, vt AD, ad basem Quadratricis AE; erit conuertendo quoq; AE, ad AD, vt AD, ad arcum BD. Si igitur duabus rectis AE, AD, inueniatur tertia proportionalis; [p] erit AD, ad eam tertiam, vt ad arcum BD, cum vtraq; proportio sit eadem, quæ AE, ad AD, [q] Quare tertia illa proportionalis arcui Quadrantis BD, æqualis erit: Et si duplicetur, fiet recta æqualis semicircumferentiæ eiusdem circuli: Si vero quadruplicetur, fiet recta toti circumferentiæ æqualis.

p 11. quint.
q 9. quinti.

COROLLARIVM II.

SEQVITVR quoque ex his, si basis Quadratricis AE, statuatur semidiameter alicuius circuli, eius latus AD, quartæ parti circumferentiæ illius circuli esse æquale. Et lineam lateris AD, duplam æqualem esse semicircumferentiæ eiusdem circuli: Et lineam quadruplam lateris toti circumferentiæ esse æqualem.

CVM enim, vt lib. 4. cap. 7. propos. 1. ostendimus, diametri circulorum circumferentiis sint proportionales [r] erunt quoque semidiametri circumferentiis, & quadrantibus proportionales. Igitur erit, vt AD, ad AE, hoc est, vt supradicta tertia proportionalis ad AD, ita quadrans BD, semidiametri AD, ad Quadrantem semidiametri AE. Cum ergo tertia illa proportionalis æqualis sit ostensa Quadranti BD; [s] erit quoque recta AD, quadranti semidiametri AE, æqualis. Dupla ergo linea ipsius AD, semicircumferentiæ circuli, cuius semidiameter AE; & quadrupla toti circumferentiæ erit æqualis.

f 15. quint.
s 14. quint.

COROLLARIVM III.

EX his quoque infertur, si duæ rectæ N, O, in præcedenti figura eandem proportionem habeant, quam AD, AE, minor autem O, statuatur semidiameter circuli alicuius, maiorem N, æqualem esse arcui Quadrantis illius circuli.

CVM

CVM enim sit AD, ad AE, vt N, ad O; erit permutando AD, ad N, vt AE, ad O. Vt autem AE, ad O, ita est Quadrans semidiametri AE, ad Quadrantem semidiametri O, vt lib. 4. cap. 7. propos. 1. demonstrauimus. [a] Igitur erit quoque AD, ad N, vt Quadrans semidiametri AE, ad Quadrantem semidiametri O. Cum ergo AD, æqualis sit ostensa Quadranti semidiametri AE; [b] erit quoque N, æqualis Quadranti semidiametri O. quod est propositum.

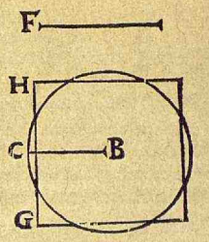
a 11. quin.
b 14. quin.

III.

DATO circulo quadratum æquale constituere.

Quadratum circulo æquale exhibere.

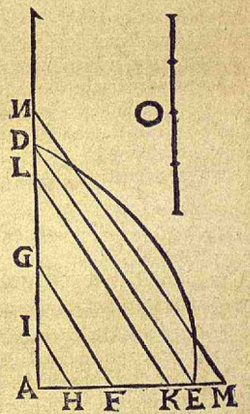
SIT quadrandus circulus ad interuallum semidiametri BC, descriptus. Tribus rectis AE, basi Quadratricis; AD, lateri eiusdem præcedentis figuræ, & rectæ BC, inuenta quarta proportionali F; erit er coroll. 3. antecedenti recta F, quadranti circuli dati æqualis, atque eius dupla semicircumferentiæ æqualis erit. Inuenta autem inter semidiametrum BC, & duplam ipsius F, media proportionali GH: Dico quadratū ex GH, descriptum æquale esse circulo ad interuallū BC, descripto. [a] Quoniam n. rectangulum sub BC, semidiametro, & sub semicircumferentia circuli, id est, sub dupla rectę F, inuentæ, æquale est circulo: [b] Prędicto autem rectangulo æquale est quadratum lateris GH; erit quoq; quadratum lateris GH, circulo semidiametri BC, æquale.



a 4. Isoperimetrorum
b 17. sext.

Facilis inuentio recta æqualis circumferentiæ.

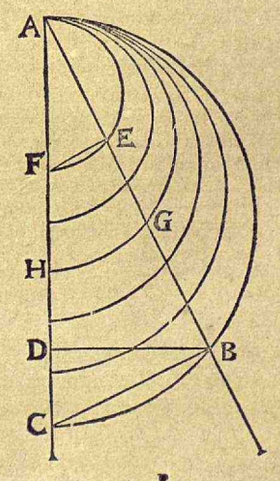
VERVM vt expedite linea recta inueniatur æqualis quartæ parti circumferentiæ dati circuli, atque idcirco & semicircumferentiæ, vel toti circumferentiæ, construenda erit figura eiusmodi. Fiat angulus rectus DAE, rectaq; AD, æqualis sit diametro Quadrantis, ex quo Quadratrix descripta est; & AE, basi eiusdem Quadratricis æqualis. Vel certe ex centro A, noua Quadratrix describatur DE, cuius latus AD, & basis AE. Ducta namque recta DE, constructa erit figura aptissima ad rectam circumferentiæ dati circuli æqualem inueniendā. Si enim circuli quadrandi semidiametro abscindatur æqualis AF, ducaturq; FG, ipsi DE, parallela; erit ex coroll. 3. antecedēti AG, æqualis quartę parti circūferentię dati circuli, cuius semidiameter nimirum est AF, (quemadmodum AD, quartæ parti circumferentiæ circuli semidiametri AE, æqualis est, vt ex coroll. 2. præcedenti constat) [c] propterea quod AF, AG, eandem habent proportionem, quam AE, AD. Eadem ratione, ductis HI, KL, MN, eidem DE, parallelis, erunt AI, AL, AN, æquales quartis partibus circumferentiarū circulorum ex semidiametris AH, AK, AM, descriptorū. Hæ aūt rectę duplicatę semicircumferentijs æquales erunt, &c. Atque hac arte inuenietur recta æqualis quartæ parti circumferentiæ cuiusuis circuli, si eius semidiametro ex recta AE, æqualem lineam abscindemus, ab eiusq; extremo rectæ DE, parallelam ducemus, &c.



c 4. sexti.

Facilis inuentio quadrati circulo æqualis.

VT quoq; sine vllo labore dato cuicunq; circulo quadratū æquale exhibeamus, vtendū erit hoc artificio. Inuento semel latere quadrati alicui circulo æqualis, vt paulo ante docuimus, construemus figuram ad quadrandos alios circulos quoscunq; accommodatissimam, hoc modo. Detur circulus ABC, diametri AC, sitque AB, media proportionalis inter semidiametrum, & rectam semicircumferentiæ æqualem inuentam ex præcedenti figura, ita vt quadratum rectæ AB, circulo diametri AC, sit æquale: [d] accommodetur AB, in circulo, quæ certius applicabitur, si forte circinus ex A, ad interuallum datæ AB, descriptus nimis oblique peripheriam ABC, secet in B, hoc modo. Duabus rectis, nimirum diametro AC, & lateri AB, quadrati inuento reperiatur tertia proportionalis AD. Perpendicularis namq; DB, cadet in punctum B, in quod latus inuentum duci debet: [e] propterea quod tres rectæ AC, AB, AD, sunt continue proportionales: quemadmodum recta AC, latus quadrati inuentum, & AD, continuam seruant proportionem, ex constructione. Liquet autem inter AC, AD, vnam tantum posse esse mediam proportionalem. Hac figura extructa, dicto citi[o] quemcunq; circulum quadrabimus. Si namq; diametro dati circuli rectam æqualem abscindemus AF, circa quam semicirculus describatur, resecabit is ex recta AB, latus AE, cuius quadratum circulo dato est æquale. Quia enim angulus externus AEF, interno ABC, æqualis est: [f] quod vterque in semicirculo rectus sit; [g] erunt EF, BC, parallelæ; Ideoq; triangula AEF, ABC, æquiangula, [h] Igitur erit CA, ad AB, vt FA, ad AE; Et permutando CA, ad FA, vt



d 1. quad.
e coroll. 8. sexti.
f 31. tertij.
g 28 prim.
h 4. sexti.

i 21. *sexti.* k 2. *duod.* l 14. *quin.* AB, ad AE. [i] Ideoq; erit quoque quadratum ex AC, ad quadratum ex AF: [k] hoc est, vt circulus diametri AC, ad circulum diametri AF, vt quadratum ex AB, ad quadratum ex AE. Est autem circulus diametri AC, quadrato ex AB, per constructionem, æquale. [l] Igitur & circulus diametri AF, quadrato ex AE, æquale erit. Ita quoque quadratum rectæ AG, circulo diametri AH, erit æquale. Et sic de cæteris.

Facilis inuētio quadrati circulo æqualis ex Archimede. IAM vero quoniam lib. 4. cap. 6. propos. 3. ex Archimede demonstrauimus, quadratum diametri ad circulum habere ferme proportionem, quam 14. ad 11. si quis volet secundum hanc proportionem reperire quadratum circulo æquale; diuidenda erit recta AC, in 14. partes æquales, & ex vndecima parte D, (ita vt AD, contineat partes 11. & DC, 3.) excitanda perpendicularis DB, vsque ad circumferentiam circa AC, descriptam. Recta enim ducta AB, latus erit quadrati circulo diametri AC, æqualis. [m] Cum enim tres rectæ AC, AB, AD, m *corol 8. sexti.* sint continue proportionales; [n] erit quadratum ex AC, ad quadratum ex AB, vt AC, ad AD; videlicet vt 14. ad 11. Cum ergo etiam sit, vt diximus, quadratum diametri ad circulum, vt 14. ad 11. ferme: [o] erit quadratum ex AC, n *corol. 20. sexti.* ad quadratum ex AB, vt ad circulum diametri AC. [p] Igitur quadratum ex AB, circulo diametri AC, æquale erit. o 11. *quin.* Quod si secundum varias diametros describantur circuli per A, transeuntes, abscindent quoq; ij circuli ex recta p 9. *quint.* AB, latera quadratorum illis circulis æqualium. Habes ergo viam facilem inueniendi quadratum circulo dato æquale, siue quadratricem nostram adhibeas, siue demonstrata ab Archimede sequaris.

IV.

DATO quadrato circulum æqualem describere.

SIT datum quadratum lateris AE, cui circulus æqualis est describendus. In proxima figura ex recta AB, abscindatur recta AE, dato lateri quadrati æqualis: Et ex E, ducatur ad AB, perpendicularis EF, secans AC, in F. Eritque circulus diametri AF, quadrato lateris AE, æqualis, vt ex proxime demonstratis liquet.

COROLLARIVM.

a 14. *secun.* EX his, quæ demonstrata sunt, construemus circulum cuicunque figuræ rectilineæ æqualem. Et contra cuicunque circulo figuram rectilineam æqualem constituemus, quæ alteri datæ figuræ rectilineæ cuicunque similis sit. Nam si datæ figuræ rectilineæ [a] describamus quadratum æquale, & huic quidrato circulum æqualem b 25. *sexti.* per hanc 4. propos. constituamus; erit idem hic circulus datæ figuræ rectilineæ æqualis.

RVRSVS si per propositionem 3. dato circulo quadratum æquale construamus, huic autem quadrato [b] constituamus figuram rectilineam æqualem, & similem alteri datæ figuræ rectilineæ; erit eadem hæc figura rectilinea constituta, dato circulo æqualis, quod est propositum.

V.

DATÆ rectæ lineæ circumferentiam circuli reperire æqualem.

IN secunda figura propos. 3. sit rectæ O, exhibenda æqualis circumferentia. Eius quartæ parti capiatur in latere Quadratricis AD, recta æqualis AI, ac per I, ipsi DE, agatur parallela IH. Eritq; circumferentia circuli ex diametro AH, descripti æqualis datæ rectæ O, propterea quod quarta pars eius circumferentiæ æqualis est rectæ AI, vt ostensum est; ac proinde tota circumferentia æqualis erit quadruplæ rectę AI, hoc est, æqualis rectæ O, cuius quarta pars posita est recta AI. Datæ ergo rectæ circumferentiam æqualem reperimus. Quod faciendum erat.

FINIS LIBRI SEPTIMI.



GEO-

GEOMETRIÆ PRACTICÆ

LIBER VIII.

Varia Theoremata, ac problemata Geometrica demonstrans.

VT extremam manum Geometriæ huic nostræ practicæ imponamus, concludemus eam variis nonnullis Theorematibus, atque problematibus Geometricis, tum collectis ex Geometris aliis, tum proprio, vt aiunt, Marte excogitatis, ac demonstratis. Qua in re exemplum illustre habemus in Pappo Alexandrino, qui octo totos libros conscripsit de Mathematicis collectionibus. Neque vero hoc præter institutum nostrum existimare quis debet: cum per eiusmodi demonstrationes Geometricas studioso Lectori via multiplex aperiatur ad inuestigandas similes speculationes in rebus Geometricis: quippe cum in iis ad exercendum ingenium amplissimum campum habeat. Est & alia causa, quæ me ad hunc librum octauum conscribendum permouit, ne videlicet tot Theoremata, ac problemata non sine magno labore peruestigata pereant, cum ad nullam Geometriæ partem magis proprie pertineant, quam ad hanc Geometriam practicam: præsertim quod pleraque eorum praxes Geometricas pertractent. Adde quod non pauci viri docti & graues ad hunc librum perscribendum auctores mihi, atque suasores fuerunt.

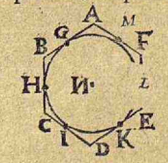
THEOR. 1. PROPOS. 1.

FIGVRA regularis circulo circumscripta maiorem ambitum habet, quam circulus.

HÆC est prima propositio Archimedis in lib. 1. de sphæra & Cylindro: quam demonstrat, hoc assumpto principio.

Si duæ lineæ in plano eosdem habeant terminos, & in easdem partes cauæ sint, comprehendens comprehensa maior est.

quod quidem principium esse verum, ex eo euidenter intelligi potest, quod ex eo non solum Archimedes, verum etiam plurimi alij Geometræ tum veteres, tum recentiores, innumera propemodum, atque admiranda Theoremata, problemataque demonstrarint, quæ vt verissima, ab omnibus recepta sunt; neque vnquam ex illo absurdi aliquid consecutum est, aut contra id quisquam hactenus à duobus ferme millibus annorum, noui quid commentus est. Hoc ergo posito principio, facilis est demonstratio Archimedis. Sit namque figura regularis ABCDEF, descripta circa circulum, cuius centrum N, tangens eum in punctis G, H, I, K, L, M. Quoniâ igitur per præmissum principium rectæ AG, AM, maiores sunt arcu GM: Item BG, BH, maiores arcu GH, & sic de reliquis; erunt omnes rectę simul conficientes totum ambitum figuræ, maiores omnibus arcubus simul conficientibus totam circuli peripheriam, quod erat demonstrandum.



SCHOLIVM.

CARDANVS in libro quinto de proportionibus propos.201.conatur demonstrare, duas rectas circulum contingentes,cuiusmodi sunt AG,AM,maiores esse arcu intercepto GM,(quod Archimedes ex suo assumpto principiodeduxit)præmissis tribus Lemmatibus,& vno principio,quorum primum est hoc.

LEMMA I.

SI fuerint quatuor quantitates, & minor sit excessus inter primam & secundam, quam inter tertiam & quartam;sitque prima non minor, quam tertia, maior vero quam secunda. Item tertia maior quam quarta : Erit minor proportio primæ ad secundam,quam tertiæ ad quartam.

SINT quatuor quantitates A,BC, D, EF; sitque GB, excessus inter primam A,& secundam BC,minor excessu HE, inter tertiam D, & quartam EF; Item prima A, non sit minor,quam tertia D: maior vero quam secunda BC: Ac denique tertia D; maior sit quam quarta EF ; Dico minorem esse proportionem primæ A, ad secundam BC, quam tertiæ D, ad quartam EF.Cum enim A,non minor sit,quam D:at GB,minor,



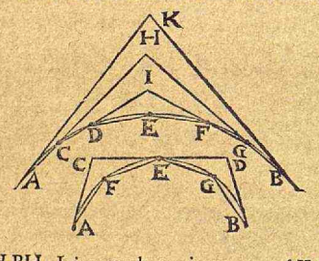
a *8.quint.*

quam HE,[a] erit maior proportio A,ad GB, quam ad HE:Est autem A,(si est æqualis ipsi D)ad HE,vt D,ad HE; vel maior est proportio A,(si maior est quam D,)ad HE. quam D, ad HE. Igitur maior est proportio A,ad GB,quam D,ad HE.Si igitur fiat vt D,ad HE,ita A,ad GI,habebit quoque A,ad GB, b *10.quin.* maiorem proportionem, quam ad GI;[b] ac proinde erit GI, maior quam GB;ideoque IC,minor, quam BC. c *8.quint.* Maior ergo erit proportio A,ad IC,quam ad BC.Et quoniam GC,ipsi A,æqualis est,ad GI,vt HF,ipsi D,æqualis,ad HE;Erit quoq; per conuersionem rationis GC,hoc est, A,ad IC,vt HF hoc est,vt D,ad EF. Cum ergo ostensum sit,maiorem esse proportionem A,ad IC,quam ad BC;erit quoq; maior proportio D,ad EF, quam A, ad BC,hoc est, A,ad BC,minorem proportionem habebit,quam D,ad EF.quod est propositum.

LEMMA II.

SI circuli arcum duæ rectæ tangant in vno puncto coeuntes; & in eodem arcu aptentur quotlibet rectæ æquales diuidentes ipsum in partes totidem æquales. Erunt duæ illæ tangentes omnibus hisce chordis simul maiores.

TANGANT arcum AB,duæ rectæ AK,BK,coeuntes in K,aptenturque quotlibet rectæ in eo æquales AC,CD,DE,EF, FG,GB,diuidentes arcum in totidem partes æquales. Dico rectas AK.BK, simul maiores esse omnibus illis rectis subtensis simul. Productis enim rectis AC,BG, donec coeant in H; Item productis rectis CD, GF, donec concurrant in I, & sic deinceps, si plures rectæ fuerint: [a] Erunt rectæ DI, FI, maiores rectis DE, FE. Additis ergo æqualibus DC, FG;erũt etiam rectæ CI, GI,maiores rectis CD,DE; EF,FG, simul. [b] Sed CH, GH, maiores sunt rectis CI,GI. Igitur multo maiores erunt CH,GH,rectis CD,DE,EF,FG;additisq; æqualibus AC, BG, maiores erunt AH, BH, simul quam AC, CD, DE, EF, FG, GB,simul. [c] Sunt autem & AK,BK, maiores,



a *21. prim.*

b *21. prim.*

c *21. prim.*

quam AH,BH. Igitur multo maiores erunt AK BK,simul, quam AC,CD,DE,EF,FG,GB,simul.quod erat demonstrandum.

LEMMA III.

SI circuli arcum tres rectæ tangant in duobus punctis coeuntes, ita vt contactuum punctum medium diuidat arcum bifariam:In eodem autem arcu accommodentur quotlibet rectæ numero pares, & inter se æquales, Erunt tres illæ tangentes omnibus his simul sumptis maiores.

IN antecedente figura arcum AB,tangant tres rectæ AC, CD,DB, conuenientes in duobus punctis C, D.secantes ipsum bifariam in E.Accommodenturq; in eodem arcu quotlibet rectæ æquales, & numero pares AF, FE, EG, GB. Dico tres AC,CD,DB, simul sumptas esse maiores rectis AF,FE,EG,GB,simul sumptis. Quoniam enim per Lemma præcedens AC,CE, maiores sunt rectis AF,FE:Item BD, DE. maiores rectis BG, GE;Erunt quoque AC,CD,DB,simul maiores rectis AF,FE,EG,GB,simul.quod ostendendum erat.

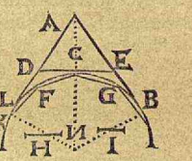
HÆC

HÆC ergo sunt tria lemmata, quæ Cardanus præmittit: quibus adiungit hoc postulatum, siue principium.Cum arcus quilibet maior sit quotcunque rectis in eo subtensis simul sumptis,&quo plures subtensę fuerint,eo minori excessu arcus illas superet:fieri potest, vt tot subtensæ duci possint, ita vt excussus, quo arcus illas superet,minor sit quauis recta proposita.Hoc principium videtur esse manifestum, cum tam paruus arcus possit accipi,vt eius chorda illi fere æqualis sit;adeo vt sensus nullam percipere possit inter arcum,& chordam differentiam.A posteriori tamen illud confirmari potest per numeros. Posita enim proportione circumferentiæ ad diametrum ferme 31415926. ad 10000000.vt lib.4.cap.7.Num.5.ex probatis auctoribus retulimus,deprehendemus,si arcus propositus continue secetur bifariam per rectas subtensas, semper à præcedenti excessu plus dimidio auferri; [a] ac proinde tandem relinqui excessum omniquantitate minorẽ. Nam arcus verbi gratia graduum 4.erit 698131.& eius chorda ex tabula sinuũ eruta 697990.ita vt arcus chordam superet hoc numero 141. Summa deinde duarum chordarum graduum 2. erit 698096.quæ superatur ab eodem arcu gr.4. numero hoc 35.qui minor est semisse præcedentis excessus 141.ac proinde plus dimidio ab eo ablatum erit. Rursus summa quatuor chordarum gradus 1.erit 698120.quam idem arcus 4.graduum superat hoc numero 11. qui etiam minor est semisse proximi excessus 35.Item summa 8.chordarum,quarum quælibet 30.minutis debetur,erit 698128. excessus autem inter eam , & eundem arcum 4. graduum, numerus 3. qui minor quoque est, quam semissis proximi excessus 11.& sic deinceps.Scio confirmationem hanc propositi principij non esse demonstratiuam , cum proportio circumferentiæ ad diametrum colligatur ex eo, quod demonstrare conamur , nimirum figuram circulo circumscriptam habere maiorem ambitum ambitu circuli:eam tamen probabilẽ esse,nemo dubitabit, cum vix credibile videatur, (si illa proportio longe à vero abesset)excessus illos paulatim ita minui, vt semper minor numerus semisse præcedentis excessus relinquatur;adeo vt tandem nulla fere differentia inter arcum, & summam chordarum subtensarum reperiatur,

a *1.decim.*

Principiũ Cardani.

HIS præmissis, tangant duæ rectæ AB,AL,arcum BCL.Dico eas esse maiores arcu. Sint enim,si fieri potest,non maiores,ac proinde arc° BCL,sit vel æqualis rectis AB,AL,vel maior.Secto ergo arcu bifariam in C. ducatur DCE, tangens arcum in C.Diuisis quoq; arcubus BC,CL, bifariam in G,F, iungantur rectæ BG,GC,CF,FL,[b] Et quia AD, AE, maiores sunt quam DE; additis DL, EB,communibus,quæ æquales sunt;(Nam iunctis rectis NA,NB,NL, ex centro N;quoniam tria latera trianguli ABN, tribus lateribus trianguli ALN, æqualia sunt;[c] erunt tam anguli ad N, quam ad A,æquales;[d] ideoq; arcus CB,CL,æquales erunt;ac proinde recta NA,per cõtactum C,transibit,[e] eritq; ad DE,perpendicularis.Cum igitur duo anguli DAC,DCA,duobus angulis EAC,ECA,æquales sint,& latus adiacẽs AC,commune;[f] erunt latera AD,AE, æqualia:propterea q; & reliquæ DL,EB,æquales erunt, cum tangentes AL,AB,æquales sint)erunt AL,AB,maiores tribus LD, DE,EB. Sit ergo excessus H. Rursus quia arcus BL,maior est rectis BG,GC,CF,FL,sit excessus I, qui minor sit excessu H.Si nam q; minor non est,diuidemus arcus LF,FC,CG,GB,bifariam.& hos rursus bifariam,&c.connectemusq; rectas,donec fiat excessus minor excessu H,per superiũ principiũ Cardani. Quoniam igitur arcus LB, prima quantitas superat secundam, videlicet rectas LF,FC,CG,GB,simul excessu I; Et tertia quantitas,nimirum summa rectarum AL,AB,superat quartam,id est,summam rectarum LD,DE,EB, excessu H:Estque excessus I, minor excessu H;Et prima quantitas, hoc est,arc° BL,ponitur non minor,quam tertia ex AB,AL,conflata,item tertia AB,AL,maior, quam quarta LD,DE,EB:erit per 1. Lemma, minor proportio arcus BL,primę quantitatis ad secundam LF,FC,CG,GB,quam tertię quantitatis AL,AB,ad quartam LD,DE, EB;[g] Et permutando minor erit proportio arcus LB,ad AL,AB,simul,quam rectarum LF,FC,CG,GB, simul ad rectas LD,DE,EB,simul.Sit ergo vt composita ex LF,FC,CG,GB,ad compositam ex LD,DE,EB, ita arcus BK,ad rectas AL,AB,simul:Eritq; propterea minor etiam proportio arcus BL,ad AL,AB, simul, quam arcus BL,ad arcum BK,[h] ideoque arcus BK,maior erit arcu BL.Cum ergo eadem sit proportio rectarum LF,FC, CG,GB,simul ad LD, DE,EB,simul,quæ arcus BK,ad AL,AB, simul:sintq; per 3.Lemma, rectæ LF,FC,CG, GB,simul minores,quam LD,DE,EB,simul;erit quoque arcus BK,minor,quam AL, AB,simul. Multo ergo minor erit arcus BL,duabus AL,AB,simul. Quare rectæ tangentes AL,AB, simul maiores sunt arcu BL, quod erat ostendendum.



Demõstratio Card.

b *20. prim.*

c *8. primi.*
d *26. tertij*
e *18. tertij.*
f *26.prim.*

g *schol.27. quinti.*

h *10.quin.*

EST autem hæc demonstratio Cardani admirabilis, & non absimilis illi , qua Euclid.in propos.12. lib.9. vtitur.In vtraque enim infertur conclusio demonstratione affirmatiua ex eius oppositio,vt patet.

ATTVLI hanc demonstrationem Cardani,non quod vere Geometrica sit,nisi principium illud suum admittatur,sed quod ingeniosa sit &acuta.Sine tamen hac demonstratione concedendum erit,ambitum figurę circumscriptæ esse maiorem peripheria circuli propter demonstrationem Archimedis , cum nihil vnquam in contrarium à quoquam sit allatum,vt supra diximus.

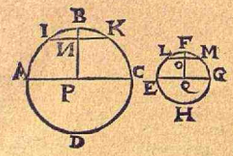
THEOR. 2. PROPOS. 2.

CIRCVLORVM diametri inter se sunt,vt circumferentiæ.

HOC demonstrauimns nos in lib.4.cap.7.num.3.propos.1. idem autem hic aliter demonstrabimus ex Pappo,hoc modo.Sint duo circuli ABCD,EFGH,quorum diametri AC,EG. Dico esse circumferentiam ad circumferentiam, vt est diameter ad diametrum [a] Quoniam enim est circulus ad circulum , vt quadratum dia-

a *2. duod.*

b 15. quin.



metri ad quadratum diametri. [b] Vt autem circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita est quadruplum circuli ad quadruplum circuli. Igitur erit quoque quadruplum circuli ABCD, ad quadruplum circuli EFGH, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG. Sed rectangulum sub diametro AC, & recta, quæ circumferentiæ ABCD, sit æqualis, comprehensum, quadruplum est circuli ABCD; & rectangulum sub diametro EG, & circumferentia EFGH, quadruplum circuli EFGH, ex coroll. propos. 2. cap. 5. Num. 1. lib. 5. Igitur erit rectangulum sub diametro AC, & circumferentia ABCD, contentum, ad rectangulum sub diametro EG, & circumferentia EFGH, comprehensum, vt quadratum ex AC, ad quadratum ex EG; Et permutando erit rectangulum sub diametro AC, & circumferentia ABCD, ad quadratum ex AC, vt rectangulum sub diametro EG, & circumferentia EFGH, ad quadratum ex EG. [c] Est autem rectangulum sub AC, & recta, quæ circumferentiæ ABCD, sit æqualis, ad quadratum ex AC, vt recta circumferentiæ æqualis ad AC: propterea quod rectangulum, & quadratum eandem habent altitudinem AC. Eodemq; modo est rectangulum sub EG, & recta, quæ circumferentiæ EFGH, sit æqualis, ad quadratum ex EG, vt recta circumferentiæ æqualis ad EG. Igitur erit, vt circumferentia ABCD, ad diametrum AC, ita circumferentia EFGH, ad diametrum EG: Et permutando circumferentia ad circumferentiam, vt diameter ad diametrum. quod demonstrandum erat.

c 1. sexti.

SCHOLIVM.

SVNT qui putent, frustra à Pappo hoc theorema demonstrari, cum videatur esse per se notum, ita esse circumferentiam cuiusuis circuli ad suam diametrum, vt est circumferentia alterius circuli ad suam diametrum: ac proinde permutando esse circumferentiam ad circumferentiam, vt est diameter ad diametrum. Qua in re mirum in modum decipiuntur. Cum enim à Ptolemeo (quod & à nobis propos. 10. Sinuum factum est) demonstretur, maiorem esse proportionem maioris arcus ad minorem eiusdem circuli, quam chordæ ad chordam, (quod etiam de arcubus, & chordis in circulis inæqualibus verum est, nisi arcus illi similes sint, vt in sequenti Theoremate ostendemus) quis sine demonstratione concederet, eandem esse proportionem circumferentiæ ad circumferentiam, quæ est diametri ad diametrum? Quod si demonstratum esset, ita esse arcum cuiusuis circuli ad similem arcum alterius circuli, vt est chorda ad chordam, tum demum constaret, ita esse circumferentiam ad circumferentiam, [a] ac proinde & semicircumferentiam ad semicircumferentiam, vt est diameter ad diametrum: propterea quod arcus semicirculorum similes sunt, quorum chordæ sunt diametri. Verum hoc demonstrari non potest, nisi prius demonstretur, ita esse circumferentiam ad circumferentiam, vt est diameter ad diametrnm, vt in Theoremate sequenti constabit. Merito ergo, & non sine causa, theorema præcedens à Pappo fuit demonstratum.

a 15. quin.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

ARCVS cuiusuis circuli ad arcum similem alterius circuli eandem habet proportionem, quam chorda ad chordam. Et contra arcus eandem habentes proportionem, quam chordæ, quando quadrans est ad quadrantem, vt semissis arcus ad semissem arcus, similes sunt.

IN figura præcedentis propos. ducantur ad diametros perpendiculares PB, QF, ex centris P, Q, diuidentes semicirculos in binos quadrantes: sintque arcus BI, BK, æquales, quibus similes capiantur FL, FM; adeo vt toti arcus IK, LM, similes sint, quorum chordæ IK, LM, bifariam sectæ sint à semidiametris in N, O. Dico eandem esse proportionem arcus IBK, ad arcum LFM, quæ est chordæ IK, ad chordam LM, &c. [a] Quoniam enim est circumferentia ABD, ad circumferentiam EFH, [b] hoc est, quadrans AB, ad quadrantem EF, vt diameter AC, ad diametrum EG, hoc est, vt semidiameter PB, ad semidiametrum QF, [c] Est autem, vt Quadrans AB, ad quadrantem EF, ita arcus IB, ad arcum LF, cum similes ponantur. Igitur erit quoque arcus IB, ad arcum LF, vt semidiameter PB, ad semidiametrum QF. Cum ergo ex Lemmate propos. 1. lib. 1. nostræ Gnomonicæ, vel ex Lemmate 5. lib. 1. nostri Astrolabij, ita se habeat PB, sinus totus ad QF, sinum totum, quemadmodum sinus IN, ad sinum LO. erit quoque arcus IB, ad arcum LF, vt sinus IN, ad sinum LO, [d] id est, duplus arcus Ik, ad duplum arcum LM, vt chorda IK, ipsius IN, dupla, ad chordam LM, ipsius LO, duplam. quod est propositum.

a 2 huius. b 15. quin. c 15. quin. d 15. quin

VERVM sit iam arcus IK, ad arcum LM, vt chorda IK, ad chordam LM. Dico arcus similes esse. Facta enim eadem constructione, [e] erit quoque arcus IB, ad arcum LF, semissis ad semissem, vt IN, ad LO, semissis ad semissem. [f] Vt autem IB, ad LF, ita est quadrans AB, ad quadrantem EF, ex hypothesi; [g] Et vt quadrans ad quadrantem, ita est semidiameter PB, ad semidiametrum QF. Igitur erit quoque sinus IN, ad sinum LO, vt sinus totus PB, ad sinum totum QF. Atque idcirco ex Lemmate propos. 1. lib. 1. nostræ Gnomonicæ, vel ex Lemmate 5. lib. 1. nostri Astrolabij, arcus IB, LF, similes erunt; ac proinde & eorum dupli IBK, LFM, similes erunt. quod erat demonstrandum.

e 15. quin. f schol. 33. sexti. g 2. huius.

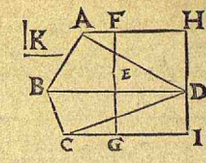
COROL-

COROLLARIVM.

SEQVITVR hinc, si arcus IBK, LFM, non sint similes, eos non habere eandem cum chordis proportionem. Si namque eandem haberent, ipsi similes essent, vt in secunda parte huius propos. fuit ostensum, quod est absurdum, cum ponantur non similes.

PROBL. 1. PROPOS. 4.

DATO quadrilatero æquale parallelogrammum in dato angulo facilius, quam per propos. 45. lib. 1. Euclid. constituere.

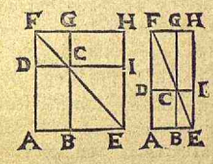


SIT quadrilaterum quodcunque ABCD, & datus angulus K. Ducta diametro BD, eaque diuisa bifariam in E, ducatur per E, recta FG, faciens in E, angulum FED, dato angulo K, æqualem. Deinde ducta per D, ipsi FG, parallela HI, & per A, C, duabus AH, CI, ipsi BD, parallelis secantibus FG, HI, in F, H, G, I, constitutum erit parallelogrammum FI, in dato angulo G, [a] qui æqualis est angulo FED, internus externo, hoc est, angulo K. Dico idem parallelogrammum quadrilatero dato ABCD, æquale esse. [b] Quia enim parallelogrammum FD, triangulo ABD, & parallelogrammum EI, triangulo CBD, æquale est; erit totum parallelogrammum FI, toti quadrilatero ABCD, æquale, quod est propositum.

a 29. prim. b schol. 41. primi.

PROBL. 2. PROPOS. 5.

DATO rectangulo supra datam rectam æquale rectangulum facilius, quam per propos. 45. lib. 1. Euclid. constituere.



SIT rectangulum ABCD, cui supra datam rectam constituendum est rectangulum æquale. Producto quolibet latere, nimirum AB, capiatur BE, æqualis datæ rectæ, siue ea sit maior latere AB, siue minor: atque ex E, per C, recta ducatur secans AD, productam in F, compleaturque rectangulum AH, & rectę BC, DC, producantur vsque ad G, I. [a] Erit igitur complementum CH, complemento CA, æquale. Cum igitur latus CI, sit lateri BE, id est, datæ rectæ æquale: factum erit, quod proponitur.

a 43. prim.

ALITER.

DATÆ rectæ BE, & duobus lateribus AB, BC, dati rectanguli, [a] inueniatur quarta proportionalis CG. [b] Nam rectangulum sub BE, prima, & CG, quarta comprehensum, rectangulum videlicet CH, æquale erit dato rectangulo AC, sub secunda AB, & tertia BC, comprehenso, quod est propositum.

a 17. sexti. b 16. sexti.

PROBL. 3. PROPOS. 6.

DATO rectilineo æquale rectangulum facilius, quam per propos. 45. lib. 1. Euclid. constituere.

HOC per duas præcedentes propos. facile expedietur. Nam si figura rectilinea in triangula resoluatur, constituent quælibet duo commune latus habentia trapezium, cuius latus commune est diameter. [a] Igitur si singulis trapezijs singula rectangula fiant æqualia, atque etiam vltimo triangulo, si forte numerus triangulorum est impar. Deinde, si, vt in præcedenti propos. dictum est, vni lateri primi rectanguli, & duobus lateribus secundi, [b] inueniatur quarta proportionalis; [c] erit rectangulum sub assumpto latere in primo rectangulo, & quarta proportionali, secundo rectangulo æquale. Quocirca si alterum latus prope assumptum in primo rectangulo producatur, & ex producto abscindatur recta æqualis quartæ proportionali, compleaturque totum rectangulum; habebitur rectangulum ex duob⁹ compositum æquale duobus primis trapezijs. Et si eidem lateri, ac duobus tertij rectanguli reperiatur rursum quarta proportionalis, & huic quartæ sumatur in priori latere producto recta æqualis, conficietur eodem pacto rectangulum ex tribus conflatum æquale tribus trapezijs, &c.

a 4. huius. b 12. sexti. c 16 sexti.

[d] VLTIMO porro triangulo, si quod fuerit, constituetur rectangulum æquale supra semissem basis, in eadem altitudine cum triangulo.

d schol. 41. primi.

THEOR. 4. PROPOS. 7.

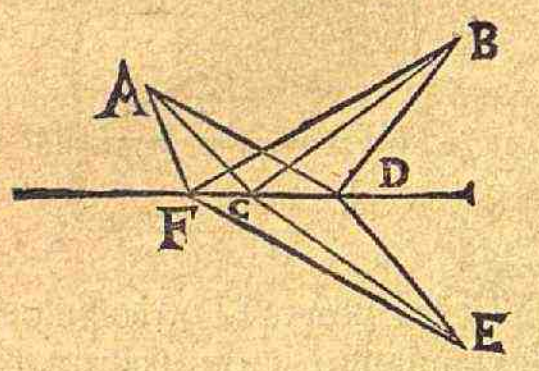
SI ex duobus punctis ad vnum punctum cuiusuis lineæ rectę, quæ communis sectio sit plani per duo illa puncta ducti cum alio quopiam plano, duæ rectæ ducantur, facientes cum illa duos angulos æquales: Erunt duæ hæ rectę breuiores quibuscunque aliis duabus rectis, quæ ex eisdem duobus punctis ad aliud punctum eiusdem lineę rectæ ducuntur.

EX duobus punctis A,B,ad C,punctum in recta CD,ita vt planum per CD,ductum transeat reuolutum per A,B,ducantur duæ rectæ A C, B C, facientes angulos ACF, BCD, æquales: & ex eisdem punctis A, B, ducantur primum ad aliud punctum D,ad dextram ipsius C,aliæ duæ rectæ AD,BD. Dico AC,BC, esse breuiores,quam AD,BD. Producta enim A C, versus C, fiat CE, ipsi C B, æqualis, iungaturque DE. Et quia angulus A C F, angulo B C D, ponitur æqualis, [a] estque angulus ACF, angulo ECD, ad verticem æqualis, erit quoque angulus BCD,angulo ECD, æqualis. Cum ergo & duo latera BC, CD,duobus lateribus E C, CD, æqualia sint: [b] erit basis DB, basi DE,æqualis; ac proinde AD,DB,simul ipsis AD,DE,simul æquales erunt. [c] Sunt autem A D, D E, maiores quam AE,hoc est,quam AC, CB; quod C B, CE, positæ sint æquales. Igitur & AD,BD, maiores erunt, quam A C, B C. quod est propositum.

a 15 prim.

b 4. prim.

c 20. prim.



DVCANTVR deinde ex punctis A, B, ad aliud punctum F,ad sinistram ipsius C, aliæ duæ rectæ AF,BF. Dico rursus AC,BC, breuiores esse, quam AF, BF. Producta enim rursum AC,sumptaque CE, ipsi CB, æquali,
d 15. prim. iungatur EF. Et quoniam anguli ACF,BCD,æquales ponuntur; [d] estque ACF, angulo ECD, ad verticem æqualis; erunt quoque anguli BCD,ECD, æquales: ac proinde & ex duobus rectis reliqui BCF, ECF, æquales
e 4. primi. erunt, Cum ergo & duo latera BC,CF, duobus lateribus EC,CF, æqualia sint; [e] erit quoque basis B F, basi EF,
f 20. prim. æqualis: Ac proinde AF,FE,ipsis AF,BF, æquales erunt. [f] Sunt autem AF,FE,maiores, quam AE, hoc est, quam AC, BC,quod BC,CE,positæ sint æquales. Igitur & AF,BF,maiores erũt, quã AC, CB. quod est propositũ.

S C H O L I V M.

QVIA ergo Natura non impedita agit per lineas breuissimas; fit, vt radius Solis, vel visualis cadens ex A,in planum tersum D F, ita vt reflectatur ad punctum B, cadat necessario in punctum C,vbi angulus A C F, (quem Perspectiui angulum incidentiæ dicunt.) æqualis efficitur angulo B C D, quem reflexionis appellant. Nam si radius caderet in D, vel F, reflectereturque ad B, non ageret Natura per lineas breuissimas; cum tam AD,BD,quam AF, BF, longiores sint, quam AC,BC,vt demonstrauimus. quod est absurdum. Atque ita demonstratum est,quod Perspectiui assumunt,angulum scilicet incidentiæ æqualem esse angulo reflexionis.

PROBL. 4. PROPOS. 8.

SI quis numerum mente conceperit, quot ei vnitates post tres operationes imperatas reliquæ sint, coniicere.

IVBE conceptum numerum per quemcunque numerum,vt per 2. vel 3. vel 4. vel 10. &c. multiplicari, & producto adde tu quemlibet numerum à numero multiplicante numeratum. Deinde iube ex parte aliquota summæ totius à multiplicante numero denominata auferri similem partem aliquotam numeri producti ex multiplicante in numerum conceptum, hoc est, ipsum numerum conceptum. Ita enim reliquus numerus erit similis pars aliquota numeri,quem adiunxisti. Cum ergo numerus adiunctus tibi notus sit,habeatque partem aliquotam à numero multiplicante denominatam, ac proinde tibi cognitam: dices reliquas vnitates illam partem aliquotam conficere. Exempli gratia. Concipiat aliquis numerum 4.iube multiplicari per 6. fiunt 24. iube addi numerum 30.à multiplicante 6.numeratum, fiunt 54. Ex sexta parte huius summæ denominata à multiplicante numero 6. id est, ex 9. fac detrahi partem quoque sextam prioris numeri producti 24. nimirum 4. videlicet ipsum numerum conceptum. Ita namque remanet sexta pars numeri adiuncti 30.nimirum 5. quod in hunc modum demonstratur.

A	B	C	F
4	24	54	30
	D	E	G
	4.	9.	5.

SIT conceptus numerus A, quo ducto verbi gratia in 6. gignatur B, & addito F,fiat summa C. Ex E,parte aliquota summæ C, denominata à 6. detrahatur D, pars aliquota prioris producti B,denominata quoque à 6.hoc est,ipsemet numerus conceptus A, reliquusque fiat numerus G, quem dico partem esse aliquotam numeri adiuncti F, à numero quoque 6. denominatam. Quoniam enim ita est multiplex totus C, totius E, vt ablatus B,ex C, ipsius D, ex E, ablati, quippe cum ponatur E, talis pars ipsius C, qualis D,
a schol. 7. septimi. ipsius B,denominata videlicet à 6.[a] Igitur erit quoque reliquus FC,detracto nimirum producto B,ex summa C,)ita multiplex reliqui G,(dempto scilicet D,ex E,)vt totus C,totius E. quod erat demonstrandum.

EST

EST autem iucundum, hoc idem coniici posse inter plures. Nam si plures concipiant mente numeros, singuli videlicet singulos, nullo eorum conscio, quem quisque numerum conceperit; & iubeas quemlibet suum numerum multiplicare per quemuis numerum à te electum; deinde addere numerum à tuo electo numeratum,quicunq; ille sit; ac postremo ex parte aliquota summæ,cuius denominator est numerus à te electus, auferre similem partem ex productis singulorum, hoc est,ipsos conceptos numeros: reliquus numerus cuiusq; erit similis pars numeri adiecti,

QVOD si malueris diuersos numeros, dic vt secundus suum residuum duplicet, & tertius triplicet, &c. Ita enim coniicies, primi residuum esse illam partem aliquotam numeri adiecti: secundum vero habere duplum illius,& tertium triplum, &c. Vbi vides eos residuum illud per quoscunque numeros posse multiplicare, dummodo memor sis in coniiciendis numeris, per quos factæ sint multiplicationes.

PROBL. 5. PROPOS. 9.

DATVM numerum quadratum in quotuis quadratos numeros partiri.

QVAMVIS problema hoc videatur fere impossibile: (qui enim fieri potest, dicet aliquis, vt quilibet numerus quadratus diuidi possit in quotlibet numeros, qui omnes sint quadrati?) solutio tamen eius non est difficilis. Sit igitur quadratus numerus datus 36.diuidendus in 5.numeros quadratos. Per ea,quæ ad propos.47. lib.1. Euclid.scripsimus, reperiantur tres numeri, quorum maioris quadratus reliquorum quadratis sit æqualis, nimirum 5.4.3. Deinde dic: si 5.dant 4. quid dabunt 6. quadrata videlicet radix dati quadrati? Item si 5. dant 3. quid dabunt 6? Inueniesque $\frac{24}{5}$. & $\frac{18}{5}$. hoc est, 4$\frac{4}{5}$. & 3$\frac{3}{5}$. radices duorum quadratorum quadrato 36. dato æqualium. Nam cum ita se habeat radix 6.ad inuentos duos numeros, vt 5. ad 4. & 3. ex constructione: fiet ex lateribus 6. 4$\frac{4}{5}$. 3$\frac{3}{5}$. triangulum rectangulum,simile nimirum triangulo rectangulo ex lateribus 5. 4.3. constructo. [a] Igitur quadrati ex 4$\frac{4}{5}$. & $\frac{3}{5}$. æquales erunt quadrato radicis 6.dato. Rursus si fiat,vt 5.ad 4. & ad 3. ita 3$\frac{3}{5}$. a 47. pri.
ad aliud; (sumendo minorem radicem inuentam, ne coincidamus cum aliqua præcedente radice iam inuenta) inuenientur alij duo numeri,quorum quadrati æquales sint quadrato radicis 3$\frac{3}{5}$. nimirum 2$\frac{22}{25}$. & 2$\frac{4}{25}$. Atque ita iam (relicta radice 3$\frac{3}{5}$.) inuentæ erunt tres radices 4$\frac{4}{5}$. 2$\frac{22}{25}$. 2$\frac{4}{25}$. quarum quadrati æquales erunt quadrato 36.proposito. Eodem modo si fiat, vt 5. ad 4. & ad 3. ita 2$\frac{4}{25}$. ad aliud, reperientur duæ aliæ radices 1$\frac{91}{125}$. & 1$\frac{37}{125}$. Quare (relicta radice 2$\frac{4}{25}$. cuius loco duas inuenimus) inuentæ iam erunt quatuor radices 4$\frac{4}{5}$. 2$\frac{22}{25}$. 1$\frac{91}{125}$. & 1$\frac{37}{125}$. quarum numeri quadrati quadrato 36. æquales erunt. Denique si rursus fiat vt 5. ad 4. & ad 3.ita 1$\frac{37}{125}$. minor radix inuenta ad aliud, reperientur duæ aliæ radices 1$\frac{23}{625}$. & $\frac{486}{625}$. Quocirca (relicta radice 1$\frac{37}{125}$. pro qua duas proximas inuenimus) inuentæ erunt quinque radices 4$\frac{4}{5}$. 2$\frac{22}{25}$. 1$\frac{91}{125}$. 1$\frac{23}{625}$. & $\frac{486}{625}$. quarum quadrati numeri 23$\frac{1}{25}$. 8$\frac{184}{625}$. 2$\frac{15406}{15625}$. 1$\frac{29279}{390625}$. & $\frac{236196}{390625}$. conficiunt datum quadratum 36. Atque in hunc modum plures quadrati inueniri poterunt æquales numero 36. si nimirum fiat, vt 5. ad 4. & ad 3. ita vltima radix inuenta $\frac{486}{625}$. quæ minima est, ad aliud, &c.

THEOR. 5. PROPOS. 10.

PROPOSITIS duabus minutijs inæqualibus; minutia, cuius numerator ex illarum numeratoribus,denominator autem ex denominatoribus conflatur, maior quidem est minore, minor vero maiore.

SINT duæ minutiæ inæquales, maior $\frac{3}{5}$. & minor $\frac{4}{7}$. Iungantur tam numeratores, quam denominatores, vt fiat minutia $\frac{7}{12}$. Dico hanc maiorem esse, quam $\frac{4}{7}$. & minorem quam $\frac{3}{5}$. Quoniã enim maior est minutia $\frac{3}{5}$. quam $\frac{4}{7}$. erit per propos.8.Minutiarum lib.9. Euclid. maior proportio 3. ad 5. quam 4.ad 7. [a] Et permutando, maior 3.ad 4.quam 5.ad 7. [b] Igitur & componendo,maior 3.4.simul, hoc est,7. ad 4. quam 5.7.simul, id est,quam 12. ad 7. [c] Et permutando,maior 7.ad 12. quam 4. ad 7. Ac proinde per propos.8.Minutiarum lib.9. Euclid. maior erit minutia $\frac{7}{12}$. quam $\frac{4}{7}$. quod est primum.

$\frac{3}{5}$. $\frac{4}{7}$. $\frac{7}{12}$.

a 27. quin.
b 28. quin.
c 27. quin.

DEINDE quia minor est $\frac{4}{7}$. quam $\frac{3}{5}$. erit per propos.8. Minutiarum lib. 9. Euclid. minor proportio 4. ad 7. quam 3.ad 5. [d] & permutando, minor 4. ad 3. quam 7.ad 5. [e] Igitur & componendo minor 4.3. simul, id est, 7.ad 3. quam 7.5.simul,hoc est,quam 12.ad 5. [f] Et permutando, minor 7. ad 12. quam 3. ad 5. Ac proinde per propos.8.Minutiarum lib.9. Euclid. minor erit minutia $\frac{7}{12}$. quam $\frac{3}{5}$. quod est secundum.

d 27. quin.
e 28. quin.
f 27. quin.

THEOR. 6. PROPOS. 11.

SI duo numeri inter se primi non sint ambo quadrati, aut cubi; neque eorum æque multiplices vlli, quadrati erunt, aut cubi. Et si eorum æque multiplices aliqui sint ambo quadrati, aut cubi, etiam ipsi erunt quadrati, aut cubi.

SINT enim A, B, numeri inter se primi, & non ambo quadrati, vel cubi, quamuis vnus eorum quadratus sit, vel cubus, sintque eorum æque multiplices C,D. Dico neq; hos esse ambos quadratos, aut cubos. Sint enim, si fieri potest, ambo quadrati, vel cubi. Et quoniam idem numerus multiplicans A, & B, fecit C, & D, quod hi illorum sint æque multiplices: [a] erit A, ad B, vt C, ad D. [b] Cadit autem inter C, & D, vnus medius proportionalis, aut duo. [c] Igitur & inter A, B, vnus cadet medius proportionalis, aut duo.

A	B
4.	11.
C	D
12.	33.

a 17. sept.
b 11. & 12. octaui.
c 8. octa.

Cum

d 1. octaui. e coroll. 2. octaui. Cum ergo extremi A,B, ponantur inter se primi; [d] erunt omnes tres, vel quatuor proportionales, minimi in sua proportione: [e] Ac proinde A,B, ambo quadrati erunt, vel cubi, quod est contra hypothesim. Non ergo C,D, ambo quadrati sunt, aut cubi. quod erat ostendendum.

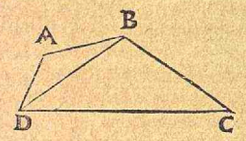
SED sint iam C,D, ipsorum A, B, inter se primorum æque multiplices, & ambo quadrati, vel cubi. Dico etiam A, B, ambos esse quadratos, vel cubos. Si enim non sunt; neque ipsi C, D, erunt ambo quadrati, vel cubi, vt demonstratum est. quod cum hypothesi pugnat.

COROLLARIVM.

HINC fit, si tam Numerator, quam Denominator alicuius minutiæ fuerit quadratus, aut cubus: tám Numeratorem quoque, quam Denominatorem eiusdem minutiæ ad minimos reductæ terminos, esse quadratum, vel cubum; cum minimi termini sint numeri inter se primi, habeantq; eandem proportionem, quam Numerator, ac Denominator prioris minutiæ: quippe cum minutiæ sint æquales. Item si vterq; numerus minutiæ cuiuspiam in minimis terminis non sit quadratus, aut cubus, neque vtrumq; numerum alterius minutiæ æquiualentis esse quadratum, aut cubum.

THEOR. 7. PROPOS. 12.

IN omni quadrilatera figura rectilinea, tria latera, vt libet, assumpta, maiora sunt reliquo latere.



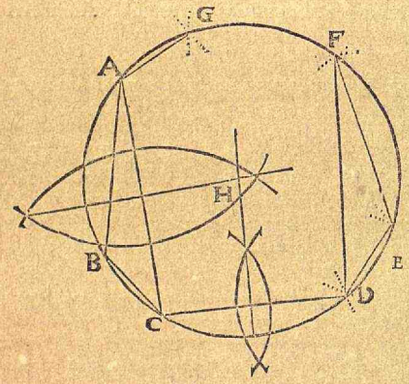
a 20. pri.

SIT quadrilaterum ABCD. Dico quælibet tria latera, nimirum DA, AB, BC, simul sumpta esse maiora reliquo latere DC. Ducta enim diametro BD; [a] erunt rectæ BD, BC, maiores quam DC; Sed eadem ratione AB, AD, maiores sunt quam BD. Maiores erunt ergo tres AD, AB, BC, quam duæ BD, BC; ac proinde multo maiores, quam DC. Idemque demonstrabitur simili modo de quibuscunque alijs tribus lateribus, vt constat. In omni ergo quadrilatera figura rectilinea, tria latera, vt libet, assumpta, maiora sunt reliquo latere. quod erat demonstrandum.

PROBL. 6. PROPOS. 13.

DATIS tribus punctis, per quæ circulus describendus sit, inuenire alia puncta, per quæ idem circulus transire debeat.

SOLENT interdum tria data puncta tam parum inter se distare, aut fere in recta linea iacere, vt non facile eorum centrum inueniri possit, propterea quod rectæ secantes lineas illa puncta connectentes bifariam, & ad angulos rectos, nimis oblique se in centro intersecant. Vt igitur magis exquisite centrũ reperiatur, inuestiganda erunt alia duo puncta, vel plura, per quæ idem circulus incedere debeat, hoc modo. Sint data tria puncta A, B, C. Iunctis rectis AB, AC, BC, constituatur supra basem BC, triangulum BCD, triangulo ABC, æquilaterum, ita vt angulus D, vergat in eam partem, versus quam circumferentia describenda transire debet: lateraque æqualia non ab eodem puncto exeant, hoc est, latus CD, lateri BA, & latus BD, lateri CA, sit æquale. Quod quidem fiet, si ex C, arcus delineetur ad interuallum BA, quem alius arcus ex B, ad interuallum CA, delineatus secet in D. [a] Erit enim angulus D, angulo A, æqualis: [b] ac proinde circulus per tria puncta A, B, C, descriptus transibit quoque per quartũ punctum D. Eadem ratione, si super basem CD, triangulum construatur CDE, triangulo BCD, æquilaterum ordine prædicto, ita vt latus DE, lateri CB, & latus CE, lateri BD, æquale sit, inuentum erit aliud punctum E, per quod circumferentia incedat. Atque eadem arte reperietur aliud punctum F, per triangulum DEF, triangulo EDC, æquilaterum, &c. Eodem modo ex altera parte reperietur aliud punctum G, per triangulum ABG, triangulo ABC, æquilaterum, & sic deinceps. Si igitur eligantur tria puncta, ita vt rectæ ea connectentes constituant quasi angulũ rectum, qualia sunt tria puncta A, C, D, & ex proximis A, C, ad quodcunq; idem interuallum bini arcus describantur, & ex proximis C, D, bini alij; ac per intersectiones horum arcuum rectæ lineæ emittantur, secabunt sese in centro H, &c. Aptissima quoq; essent tria puncta G, B, D, quamuis angulus DBG, acutus sit. Item tria puncta G, B, E, & C, E, F, &c.



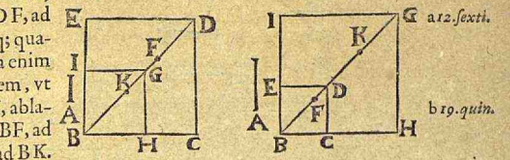
a 8. primi, b schol. 21. tertij.

PROBL. 7. PROPOS. 14.

DATO excessu diametri Quadrati supra latus: Item dato excessu diametri Rhombi supra latus, vel lateris supra diametrum (quando illud maius est) vna cum vno Rhombi angulo: Dato præterea excessu diametri Rectanguli supra vtrumlibet laterũ inæqualium, vna cum

cum angulo, quem diameter cum eo latere facit, vel vna cum proportione eorundem inæqualium laterum: Dato denique excessu diametri Rhomboidis supra vtrumuis laterum inæqualium, vel vtriusuis inæqualium laterum supra diametrum (quando illud maius est) vna cum vno angulo Rhomboidis, & insuper cum angulo, quem diameter cum eo latere facit, vel insuper cum proportione duorum laterum inæqualium; Quadratum ipsum, Rhombum, Rectangulum, & Rhomboides constituere.

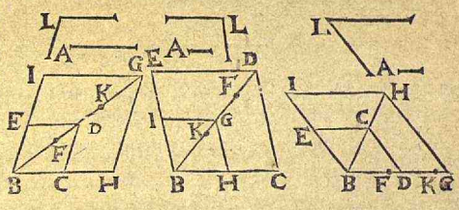
HOC problema, quod ad quadratum attinet, alio modo ad finem lib. 2. Euclid. absoluimus. Sit A, datus excessus diametri quadrati cuiuspiam supra latus. Fiat quodcunque quadratum BCDE, cuius diameter BD, excedat latus excessu DF; qui si æqualis fuerit dato excessui A; factum erit, quod iubetur: Si vero inæqualis, [a] fiat vt DF, ad datum excessum A, ita diameter BD, ad BG, perficiaturq; quadratum HI; quod dico esse id, quod quæritur. Sumpta enim recta GK, ipsi A, æquali, quoniam est per constructionem, vt tota BD, ad totam BG, ita DF, ablata ad A, hoc est, ad GK, ablatam; [b] erit quoque vt tota BD, ad totam BG, ita reliqua BF, ad reliquam BK. Et permutando, vt BD, ad BF, ita BG, ad BK. [c] Est autem vt BD, ad BF, ita BD, ad BC, (quod BF, BC, æquales sint; cum DF, ponatur excessus diametri BD, supra latus BC.) [d] Et vt BD, ad BC, ita BG, ad BH. Igitur erit quoque vt BG, ad BK, ita BG, ad BH. Igitur erit quoque vt BG, ad BK, ita BG, ad BH; [e] Ac proinde BK, BH, æquales erunt. Diameter ergo BG, superat latus BH, hoc est, BK, recta GK, quæ dato excessui A, æqualis est. Quod est propositum.



a 12. sexti. b 19. quin. c 7. quin. d 4. sexti. e 9. quin.

SIT deinde A, excessus diametri in Rhombo aliquo supra latus, vna cum angulo L, datus. Fiat Rhombus quicunque BCDE, habens angulum C, æqualem dato angulo L, vt in primo Rhombo, vel angulum B, vt in secundo. Siue ergo diameter opponi debeat dato angulo C, vt in primo Rhombo, siue datum angulum B, secare, vt in secundo, ducatur diameter BD, excedens latus BC, recta DF, quæ si æqualis fuerit dato excessui A, factum erit, quod iubetur: Si vero inæqualis, [f] fiat vt DF, ad excessum datum A, ita diameter BD, ad BG, compleaturque Rhombus HI, quem dico esse eum, qui quæritur. Abscissa enim recta GK, excessui dato A, æquali, adhibenda est eadem omnino demonstratio, quæ in quadrato facta est.

f 12. sexti.



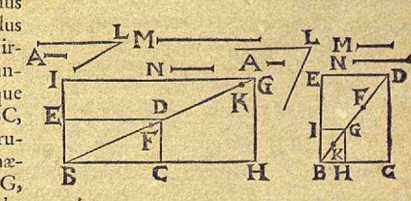
QVOD si diameter latere Rhombi minor fuerit, sit datus excessus A, lateris in aliquo Rhombo supra diametrum, vna cũ angulo L. Construatur Rhombus quantuscunque BDCE, habens angulum D, æqualem dato angulo L, vt in tertio Rhombo. Et quia vt latus superet diametrum, ducenda est diameter per angulos obtusos, [g] (quod diameter per acutos angulos ducta semper maior est Rhombi latere) ducatur diameter BC, quam latus BD, excedat recta DF, quæ si æqualis fuerit excessui dato A, factũ erit, quod iubetur: Si vero inæqualis: fiat vt DF, ad excessum A, ita BD, latus ad BG, cõpleaturq; Rhombus GI, circa eandem diametrum, quem dico esse quæsitum. Abscissa nam q; recta GK, æquali excessui A: fiet demõstratio, vt in quadrato, vt perspicuum est, si loco diametrorum BD, BG, in quadrato sumantur hic latera BD, BG.

g 19. pri.

TVNC autem latus Rhombi maius erit diametro (vt hoc etiam obiter moneamus) cum semissis anguli obtusi maior fuerit angulo acuto eiusdem Rhombi. Nam si in tertio Rhombo angulus CBD, qui semissis est anguli obtusi B, vt in schol. propos. 34. lib. 1. Euclid. ostendimus, maior sit angulo acuto D; [h] erit latus BD, hoc est, CD, maius diametro BC, in triangulo BCD. Quando autem semissis anguli obtusi fuerit minor angulo acuto, vt in Rhombo secundo; [i] erit diameter latere maior in triangulo BCD.

h 19. pri. i 19. pri

TERTIO sit datus excessus A, diametri rectanguli alicuius supra alterum laterum inæqualium, vna cum angulo L, quem diameter cum eo latere constituit, vel vna cum proportione M, ad N, quam illud latus ad alterum habet. Si ergo angulus L, est semirecto minor, vel certe proportio M, ad N, maioris inæqualitatis, vt in priori rectangulo, erit A, excessus diametri supra maius latus: Si vero angulus L, est maior semirecto, vel proportio M, ad N, minoris inæqualitatis, erit A, excessus diametri supra minus latus. Constituatur ergo angulus CBD, angulo L, æqualis, fiatque rectangulum BCDE, circa assumptam diametrum BD. Vel fiat BC, quantacunque ad CD, perpendicularem, vt M, ad N: completoque rectangulo CE, ducatur diameter BD, excedens latus BC, recta DF, quæ si fuerit æqualis dato excessui A, constructum erit rectangulum CE, quod quæritur: Si vero inæqualis, fiat vt DF, ad excessum datum A, ita BD, ad BG, compleaturque rectangulum HI, quod erit quæsitum. Abscissa enim recta GK, æquali excessui A, demonstrabitur propositum, vt in quadrato.

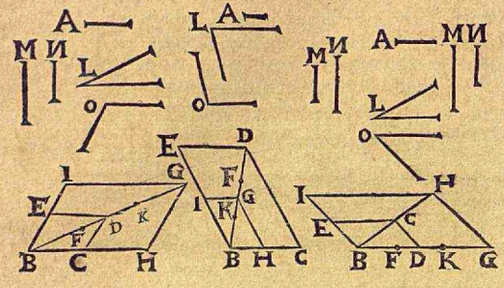


QVARTO & vltimo sit in aliquo Rhomboide datus excessus A, diametri supra vtrumuis inæqualium laterum, vna cum angulo Rhomboidis O, & insuper cũ angulo L, quem diameter cũ latere, cuius excessus sumptus est, efficit, vel insuper cũ proportione M, ad N, quam latus illud ad alterũ latus habet. Constituatur angulus BCD, in prima figura, vel CBE, in secunda, dato angulo O, æqualis. Deinde siue diameter dato angulo C, opponi debeat, vt in prima figura, siue datũ angulum CBE, secare, vt in secũda, fiat ad B, angulus CBD, angulo L, dato æqualis, secetq; CD, rectã BD, in D: vel fiat vt M, ad N, ita BC, ad CD; ac Rhõboides compleatur CE, cuius

diame-

diameter latus B C, excedat recta DF, quæ si æqualis fuerit dato excessui A, factum erit, quod iubetur. Si vero inæqualis, fiat vt D F, ad excessum A, ita B D, ad B G, compleaturque Rhomboides H I, circa eandem diametrum B D, quod dico esse quæsitum. Nam si resecetur G K, excessui A, æqualis, adhibenda est eadem demonstratio, quæ in præcedentibus.

QVOD si diameter Rhomboidis cuiuspiam minor fuerit latere maiore, vt in tertia figura. Sit datus excessus A, lateris maioris in aliquo Rhomboide supra diametrum, vna cum angulo O, Rhomboidis, & insuper cum angulo L, quem diameter cum illo latere maiore efficere debet, vel insuper cum proportione M, ad N, quam maius latus ad minus habet. Constituatur angulus BDC, dato angulo O, æqualis: Et si est acutus, fiat in B, angulus D B C, angulo L, æqualis, (si datus angulus Rhomboidis foret obtusus, nimirum DBE, constituendus esset angulus D B C, in ipso angulo dato) secetque recta BC, rectam DC, in C; vel fiat vt M, ad N, ita B D, ad D C; ac Rhomboides compleatur D E, cuius latus BD, diametrū B C, superet recta DF, quæ si æqualis fuerit dato excessui A, factū erit, quod iubetur: Si vero inæqualis, fiat vt DF, ad A, ita BD, ad B G, perficiaturque Rhomboides GI, quod dico esse quæsitum. Nam si capiatur GK, æqualis ipsi A, demonstrabitur propositum, vt supra in quadrato, si loco diametrorum BD, BG, quadrati, accipiantur hic latera BD, BG, vt perspicuum est,



TVNC autem latus maius diametrum excedet, quando angulus, quem diameter cum minore latere efficit, maior est acuto angulo Rhomboidis. Nam si in tertia figura angulus BCD, maior est angulo D: [c] erit recta B D, maior, quam B C.

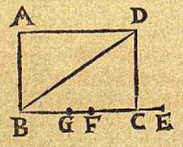
c 19. prim.

THEOR. 8. PROPOS. 15.

IN rectangulo parallelogrammo, sumptis excessibus, quibus diameter duo latera superat; Rectangulum sub differentia excessuum, & minore excessu bis sumptum, vna cum quadrato minoris excessus bis sumpto, æquale est quadrato rectæ, qua minus latus minorem excessum superat.

SIT rectangulū AC, cuius diametro BD, æqualis sit recta BE, vt excessus minor, quo diameter maius latus BC, superat, sit CE; Sumpta aūt BF, æquali minori lateri CD, vt EF, excessus sit, quo diameter BD, vel illi æqualis BE, minus latus CD, vel illi æqualem BF, superat: ac proinde CF, sit differentia excessuum EC, EF. [a] Et quia latera BC, CD, maiora sunt latere BD, hoc est, recta BE, dempta communi BC, erit reliqua CD, maior quam reliqua CE; ideoq; & BF, æqualis ipsi CD, maior erit, quam CE. Abscissa ergo FG, ipsi CE, æquali, erit BG, excessus, quo minus latus BF, minorem excessum FG, superat. Dico rectangulum bis sumptum sub FC, differentia excessuum, & CE, minore excessu, vna cum quadrato minoris excessus CE, bis sumpto, æquale esse quadrato rectæ BG, qua minus latus BF, minorem excessum FG, superat. [b] Quoniam enim quadratum rectæ BE, æquale est quadratis rectarum BC, CE, vna cum rectangulo bis sub BC, CE, hoc est, rectangulo semel sumpto sub BC, & recta ipsius CE, dupla. [c] Est autem rectangulum sub BC, & dupla ipsius CE, æquale rectangulis sub BF, & dupla ipsius CE, æquale rectāgulis sub BF, & dupla ipsius CE, & sub FC, & dupla ipsius CE; hoc est rectangulo sub BF, & CE, bis vna cum rectangulo sub FC, & CE, bis; Erit quadratum rectæ BE, siue rectæ BD, æquale quoque quadratis rectarum BC, CE, vna cum rectangulis sub B F, C E, bis & sub F C, C E, bis; Ac proinde & quadrata rectarum B C, C D, [d] quæ quadrato rectæ BD, æqualia sunt, æqualia erunt quadratis rectarum BC, CE, vna cū rectangulis sub B F, C E, bis & sub F C, C E, bis. Ablato ergo communi quadrato rectæ BC, erit reliquum quadratum rectæ CD, hoc est, rectæ BF, æquale reliquis rectangulis sub BF, CE, bis, & sub FC, CE, bis, vna cum quadrato rectæ CE. Addito igitur communi quadrato rectæ FG, erunt quadrata rectarum BF, FG, æqualia rectangulis sub BF, CE, bis, & sub FC, CE, bis, vna cum quadratis rectarum CE, FG. [e] Sed quadrata rectarum BF, FG, æqualia sunt rectangulo sub BF, FG, bis, vna cum quadrato rectæ BG. Igitur rectangulū quoq; sub BF, FG, hoc est, sub BF, CE, bis, vna cum quadrato rectæ BG, æquale erit rectangulis sub BF, CE, bis, & sub FC, CE, bis, vna cum quadratis rectarum CE, FG. Ablato ergo communi rectangulo sub BF, CE, bis sumpto; erit reliquum quadratum BG, æquale reliquo rectangulo sub FC, CE, bis, vna cum quadratis rectarū CE, FG: hoc est, rectangulū sub FC, differentia excessuum, & CE, minore excessu bis sumptum, vna cum quadrato minoris excessus CE, bis sumpto, æquale est quadrato rectæ BG, qua minus latus BF, minorem excessum FG, superat. quod erat demonstrandum.

a 20. prim.



b 4. secun.

c 1. secund.

d 47. prim

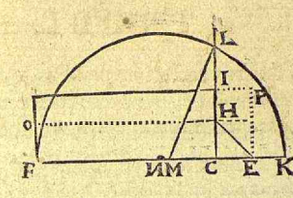
e 7. secun.

PROBL. 8. PROPOS. 16.

DATIS duobus excessibus, quibus diameter rectanguli vtrumque latus superat, vtrumque latus, & diametrum inuenire.

SIT

SIT datus excessus FE, diametri supra latus minus, & CE, supra maius, ita vt differentia excessuum sit F-C. Ex C, educatur ad FE, perpendicularis CL, capianturque CH, HI. EK, minori excessui CE, æquales, ita vt totæ CI, CK, æquales sint, vtpote ipsius CE, duplæ, perficiaturque parallelogrammum FI. Diuisa deinde FK, bifariam in N, describatur ex N, per F, & K, semicirculus FLK, secans CL, in L. Ducta denique HE, sumatur illi æqualis CM, iungaturque recta LM. Dico LM, differentiam esse inter minus latus quæsitum, & minorem excessum datum CE, ita vt CE, addita ad LM. efficiat minus latus; cui si addatur FC, differentia datorū excessuum, fiat maius latus. (Est enim differentia excessuum diametri supra vtrūq; latus rectanguli æqualis excessui maioris lateris supra minus: Vt in figura præcedentis apposi patet; vbi diameter est BD, vel BE; excessus maior FE, quo diameter minus latus BF, superat; excessus minor CE; quo eadem diameter maius latus BC, superat: estq; FC, differentia excessuum, excessus, quo maius latus BC, superat minus BF,) Ac tandem maiori lateri inuento adijciatur minor excessus CE, vt diameter habeatur, quę omnia ita demonstrabuntur.



Per præcedentem, rectangulum sub FC, differentia excessuum, & CE, minori excessu bis sumptum, hoc est, rectangulum FI, vna cum quadrato rectæ CE, bis etiam sumpto, hoc est, vna cum quadrato rectæ HE, vel CM, æquale est quadrato rectæ, qua minus latus quæsitū, minorem excessum CE, superat. Cum ergo quadratum rectæ CL, æquale sit rectangulo FI, vt ex demonstratione vltimæ propos. lib. 2. Eucl. constat; erunt quoque quadrata rectarum CL, CM, æqualia quadrato eiusdem rectæ, qua minus latus quæsitum superat minorē excessum CE, [a] Ac proinde cum quadratis rectarū CL, CM, sit æquale quadratū rectæ LM: erit quoq; quadratum rectæ LM, æquale quadrato rectæ, qua minus latus quæsitum minorē excessum CE, superat. Est ergo LM, excessus minoris lateris quæsiti supra minorē excessum CE. Ideoque recta ex LM, CE, conflata erit minus latus quæsitū: cui si addatur FC, differentia excessuū, fiet maius latus quæsitum: cui si tandē minor excessus CE, adijciatur, conflabitur diameter quæsita, quę omnia demonstranda erant

a 47. prim

COROLLARIVM.

ITAQVE recta LM, cuius quadratum æquale est rectangulo FI, sub FC, differentia excessuum, & dupla minoris excessus CE, comprehenso, vna cum duplo quadrati excessus minoris CE, addita minori excessui CE, efficit minus latus quæsitum, &c.

IMMO quia quadratū rectæ, CL. rectangulo FI, sub FC, differentia excessuum, & CK, duplo minoris excessus CE, comprehēso æquale est, vt indemōstratione dictum est, & rectangulum CP, duplū est quadrati excessus minoris CE, hoc est, quadrato rectæ CM, æquale: erit quadratū rectæ LM, toti rectangulo FP, sub maiori excessu FE, & EP, dupla minoris excessus CE, contento æquale; [a] ideoque LM, media proportionalis erit inter maiorem excessum, ac duplum minoris excessus. Quocirca si inter maiorem excessum, & duplum minoris excessus sumatur media proportionalis LM, habebitur rursus differentia inter minus lat⁹, & minorē excessum, &c.

a 17. sexti.

SCHOLIVM.

HOC problema, vna cum antecedente Theoremate in Gallia, vnde mihi transmissum est, ab ingenioso quodam Geometra demonstratū fuit, cuius nomen, si mihi esset cognitū, hic libenter ascriberē. Idē tamen problema ad finē lib. 2. Eucl. ex Marino Ghetaldo Patritio Ragusino aliter quoq; demonstrauim⁹ non infeliciter.

PROBL. 9. PROPOS. 17.

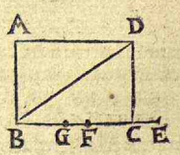
DATO excessu diametri rectanguli supra maius latus, &, excessu maioris lateris supra minus: vtrumq; latus, ac diametrum inuenire.

QVONIAM, vt in precedenti problem. dictum est, excessus maioris lateris supra minus, æqualis est differentiæ inter excessus diametri supra vtrumq; latus: fit vt excessus diametri supra maius lat⁹, addit⁹ ad excessum maioris lateris supra minus, conficiat excessum diametri supra minus latus. Quare cum cogniti sint excessus diametri supra vtrumq; latus, reliqua cognoscentur, vt in præmisso problemate traditum est.

PROBL. 10. PROPOS. 18.

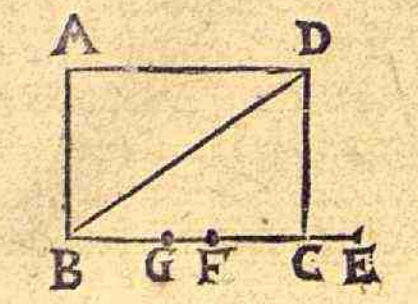
SECTA linea recta vtcunque, adiungere ei versus vtramuis partem lineam rectam, ita vt quadratum totius rectæ compositæ æquale sit quadrato rectę adiunctę; vna cum quadrato rectæ, quæ ex adiuncta, & proximo segmento prioris lineæ conflatur.

IN figura propos. 15. sit recta EF, secta in C, vtcunq;, oporte atq; ei versus F, adiungere rectam, ita vt quadratum totius compositę sit æquale quadrato adiunctæ, vna cum quadrato rectæ ex segmento FC, & adiuncta compositæ. Statuantur FE, EC, excessus, quibus diameter alicuius rectanguli vtrumq; latus superat. Atque ex propos. 16. inueniatur minus latus BF. Dico rectam BF, ipsi EF, adiunctam efficere, quod proponitur. Fiat enim rectangulum AC, sub BC,



S

& CD,



a 47.pri.

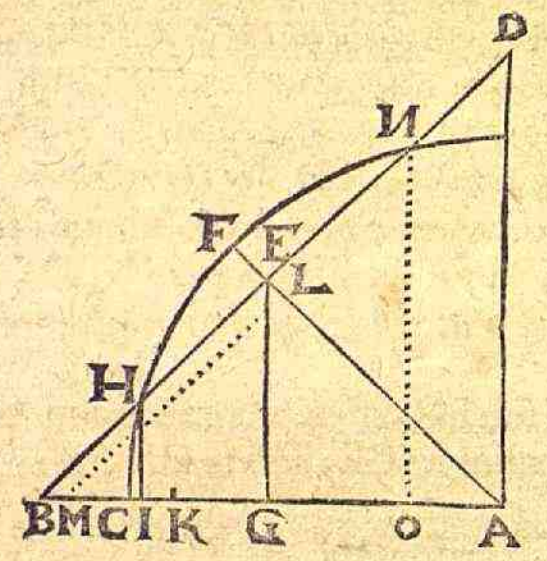
& CD, ipſi BF, æquali comprehenſum. Et quia FC, differentia exceſſuum addita minori lateri inuento BF, facit maius latus, vt propoſ. 16. dictum eſt, erit BE, diametro BD, æqualis, quandoquidem excedit minus latus BF, vel CD, recta EF, & maius recta EC. [a] Quoniam vero quadratum rectæ BE, hoc eſt, diametri BD, æquale eſt quadrato rectæ CD, id eſt, adiunctæ BF, vna cum quadrato rectæ BC, compoſitæ ex adiuncta BF, & proximo ſegmento FC, liquido conſtat id, quod proponitur.

PROBL. 11. PROPOS. 19.

DATIS duabus rectis inæqualibus, quarum maior diametrum quadrati ex minore deſcripti non ſuperet: maiorem ita ſecare in duas partes inæquales, vt earum quadrata ſimul ſumpta quadrato minoris lineæ ſint æqualia.

a ſchol. 26. primi. b 2. coroll. 32. primi. c 6. primi.

SINT datæ duæ rectæ AB, maior, & AC, minor, ita vt AB, non ſit maior diametro quadrati ex AC, deſcripti. Erigatur perpendicularis AD, maiori AB, æqualis: Et ducta recta BD, ſecetur bifariam in E, iungaturque recta AE, [a] quæ ad BD, perpendicularis erit: diuidetque angulum rectum A, bifariam in duos ſemirectos: [b] Sunt autem & B, D, ſemirecti. [c] Igitur latera EA, EB, æqualia ſunt; ac proinde AB, diameter erit quadrati rectæ AE. Et quoniam AB, ponitur non maior diametro quadrati minoris AC, non erit AC, minor quam AE, ſed vel maior, vel æqualis. Si namque minor eſſet AC, quam AE, ſumpta ipſi æquali AL, ductaque LM, ipſi EB, parallela, eſſet AM, diameter quadrati minoris AL, ideoque maior AB, ſuperaret diametrum quadrati ex minore deſcripti. quod non ponitur. Sit ergo primum AC, maior quam AE, productaque AE, vt AF, ipſi AC, ſit æqualis, deſcribatur ex A, per C, F, circulus ſecans BD, in H, N, demittaturque HI, ad AB, perpendicularis. Dico maiorem AB, ita eſſe ſectam in I, vt quadrata rectarum AI, IB, æqualia ſint quadrato minoris AC. Quoniam enim angulus I, rectus eſt, & B, ſemirectus: erit quoque H, in triangulo BHI, ſemirectus; [d] ideoque latera BI, HI, æqualia erunt. [e] Cum ergo ducta recta AH, quadrata rectarum AI, IH, quadrato rectæ AH, æqualia ſint: erunt quoque quadrata ſegmentorum AI, IB, æqualia quadrato rectæ AH, hoc eſt, quadrato rectæ AC. quod eſt propoſitum.



d 6. primi. e 47. pri.

f ſchol. 26. primi. g 6. primi. h 47. pri.

SIT deinde minor linea data AK, æqualis ipſi AE, ita vt maior AB, diametro quadrati ex minore AE, deſcripti æqualis ſit. Demittatur perpendicularis EG, [f] quæ & baſem AB, & angulum rectum E, diuidet bifariam in ſemirectos. Dico AB, ita eſſe ſectam in G, vt quadrata ſegmentorum æqualium AG, GB, æqualia ſint quadrato minoris AK, vel AE. [g] Erunt enim rurſus latera EG, GB æqualia, ob ſemirectos angulos æquales B, & E, in triangulo BEG. [h] Cum ergo quadrata rectarum AG, GE, æqualia ſint quadrato rectæ AE, erunt quoque quadrata ſegmentorum AG, GB, æqualia quadrato AE, vel minoris lineæ AK. quod eſt propoſitum.

i 2. ſexti. k 3. tertij.

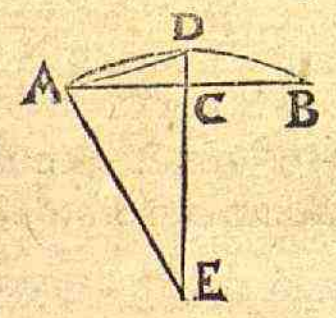
SI ex altera ſectione N, demittatur perpendicularis NO, erit AB, ſecta in O, vt in I, ita vt etiam quadrata ſegmentorum BO, OA, æqualia ſint quadrato minoris AC, vel AH. [i] Cum enim rectæ BD, BA, ſectæ ſint proportionaliter in H, I, & N, O, ſintque æquales BH, ND; [k] (propterea quod perpendicularis AE, ſecat HN, bifariam. Ablatis ergo æqualibus EH, EN, ex æqualibus EB, ED, reliquæ BH, DN, æquales erunt) erunt quoque BI, AO, æquales; nec non BO, AC, &c.

PROBL. 12. PROPOS. 20.

DATA chorda alicuius arcus, vna cum perpendiculari, quæ ex medio puncto chordæ ad arcum vſque educitur: quot gradus, vel palmos tam arcus, quam ſemidiameter circuli complectitur, inuenire.

a 8 triãg. rectil. b 5. primi.

SIT data chorda AB, palmorum 74. & perpendicularis CD, ex medio puncto C, educta palmorum 10. Iuncta recta AD; quoniam in triangulo rectangulo ACD, latera AC, CD, nota ſunt quod CD, ſit 10. & AC, 37. ſemiſſis nimirum chordæ AB, 74. [a] Si fiat, vt CD, 10. ad ſinum totum 100000. ita AC, 37. ad aliud; inuenietur AC, 370000. tangens anguli ADC; ac proinde ipſe angulus erit grad. 74. min. 53. fere. Et ſi concipiatur duci AE, ad centrum E, erit quoque angulus DAE grad. 74. min. 53. fere; [b] quippe cum anguli ADE, DAE, æquales ſint. Quod ſi vtriuſque ſumma grad. 149. min. 46. fere, detrahatur ex duobus rectis, hoc eſt, ex grad. 180. reliquus fiet tertius angulus E, in centro grad. 30. min. 14. fere, ac totidem grad. erit arcus AD; ideoque eius duplus ADB, grad. 60. min. 28. ferme.



c 35. tert.

[c] QVIA vero quadratum ex AC, æquale eſt rectangulo ſub CD, & reliqua parte diametri: ſi AC, 37. palm. ducatur in ſe, & productus numerus 1369. diuidatur per CD, palm. 10. prodibit reliqua pars diametri palm. 136 $\frac{9}{10}$. ac proinde addita CD palm. 10. tota diameter erit pal. 146 $\frac{9}{10}$. & ſemidiameter pal. 73 $\frac{9}{20}$. Si igitur fiat vt 7. ad 22. ita 146 $\frac{9}{10}$. palmi ad aliud; reperietur per 1. regulam Num. 2. cap. 7. lib. 4. huius, circumferentia circuli palm. 430 $\frac{9}{35}$. Ergo ſi rurſus fiat, vt tota circumferentia grad, 360. ad palmos 430 $\frac{9}{35}$. ita arcus ADB, grad. 60. min. 28. ad aliud, inuenietur hic arcus pal. 72 $\frac{54513}{189000}$. hoc eſt, 72 $\frac{10}{35}$. paulo amplius.

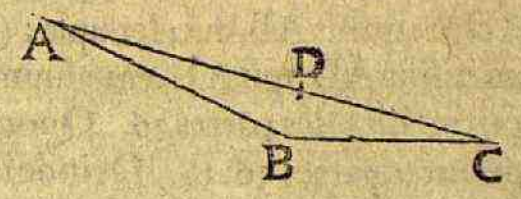
THEOR

THEOR. 9. PROPOS. 21.

IN omni triangulo quadratum maximi lateris minus eſt, quam duplum ſummæ quadratorum ex reliquis duobus lateribus deſcriptorum.

a 47. pri. b 13 ſecun. c 20. pri. d 4 ſecun.

IN triangulo ABC, maximum latus ſit AC, & angulus oppoſitus B, obtuſus. Si namque rectus eſſet, vel acutus; [a] eſſet quadratum rectæ AC, vel æquale duobus quadratis rectarũ AB, BC; [b] vel minus: ac proinde multo minus duplo, ſummæ quadratorum AB, BC. Ex maiore latere AC, dematur AD, recta æqualis lateri AB. [c] Et quia duo latera AB, BC, maiora ſunt latere AC; erit reliqua CD, minor latere BC; ac proinde duo quadrata AD, DC, minora duobus quadratis AB, BC. Eſt autem quadratum AC, minus duplo quadratorũ AD, DC: [d] propterea quod æquale eſt duobus quadratis AD, DC, vna cum rectangulo bis ſub AD, DC. quod quidem rectangulum bis, minus eſt duobus quadratis AD, DC, ex Lemmate propoſ. 39. lib. 10. Euclid. Multo ergo minus erit quadratum AC, duplo quadratorum AB, BC. quod erat demonſtrandum.

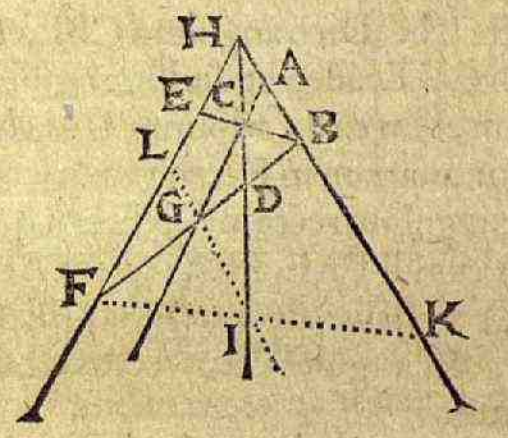


PROBL. 13. PROPOS. 22.

DATIS tribus rectis vtcunque in plano non parallelis, niſi quando extremæ à media æqualiter diſtant, rectam lineam ducere, & quidem per datum punctum in media, ſi omnes tres in vno puncto conueniant; ita vt eius ſegmenta inter mediam, & extremas ſint inter ſe æqualia, vel datam habeant proportionem.

a 2. ſexti. b 2. ſexti.

SINT tres rectæ AB, CD, EF. Ducatur vtcunque recta BF, ſecans omnes tres, qua ſecta bifariam in G; ſi quidem punctum G, cadet in mediam, factum erit, quod iubetur. Si vero G, cadet extra lineam mediam CD, agatur per G, alteri extremarum, nimirum ipſi EFC, dummodo ei non æquidiſtet media CD) parallela AG, ſecans mediam in C. Cum enim CD, ponatur non æquidiſtare ipſi EF, ſecabit vtique productam EF, & proinde eius quoque parallelam AG. Quod ſi CD, ipſi EF, æquidiſtaret, ducenda eſſet per G, ipſi AB, parallela. Poſtremo ex B, puncto ductæ rectæ BF, ſumpto in extrema AB, cui non æquidiſtat AG, ducatur per C, vbi parallela AG, mediam CD, ſecat, recta BC, ſecans EF, in E. Dico rectas BC, CE, æquales eſſe. Cum enim in triangulo BEF, recta CG, ſit baſi EF, parallela: [a] erit vt BG, ad GF, ita BC, ad CE; Sed BG, ipſi GF, per conſtructionem, æqualis eſt. Igitur & BC, ipſi CE, æqualis erit.



QVOD ſi per G, agatur ipſi AB, parallela GI, ſecans mediam CD, in I; erit ducta FIK, ſecta quoque bifariam in I: propterea quod in triangulo FBK, recta GI, baſi BK, æquidiſtat; [b] ideoque ſicut BF, in G, diuiſa eſt bifariam, ita quoque FK, in I, bifariam ſecabitur.

c 30. pri.

EX his patet, cur media linea non debeat vtrique extremæ æquidiſtare; ſed vel neutri; vel alteri tantum. Nam ſi vtrique æquidiſtaret, [c] recta per G, ducta parallela alterutri extremarum, æquidiſtaret quoque mediæ; ac proinde eam non ſecaret. Quod ſi neutri æquidiſtet, duci poterit per G, parallela vtrilibet extremarum. Si vero vni extremarum æquidiſtet, ducenda erit per G, alteri parallela.

d 2. ſexti. e 2. ſexti.

IAM vero ſi tres datæ rectæ coeant in eodem puncto productæ, vt in H, facilius erit problema, etiamſi in media linea detur punctum C, per quod duci debeat linea. Ducta enim per datum punctum C, in media, alterutri extremarum, vt ipſi HF, parallela CA, ſecante alteram extremam in A; & ipſi HA, æqualis capiatur AB, ſecabitur ducta BCE, in C, bifariam: [d] quippe cum ſit BC, ad CE, vt recta BA, ad rectam AH, &c. Sic etiam ſi detur punctum I, in media; ducta per I, alterutri extremarum, vt ipſi HB, parallela LI, ſumptaque ipſi HL, æquali LF, ſecabitur ducta FIK, in I, bifariam; [e] propterea quod eſt FI, ad IK, vt FL, ad LH, &c.

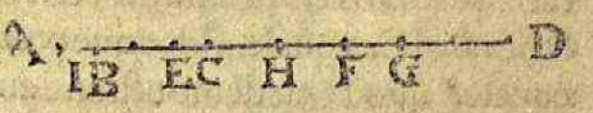
f 2. ſexti. g 2. ſexti.

EADEM ratione ducemus lineam, quæ à media ſecetur in duas partes habentes proportionem. Si namque ducta BF, vtcunque ſecetur in datam proportionem in G, & reliqua fiant, vt ſupra; [f] erit rurſus vt FG, ad GB, ita EC, ad CB; vel vt BG, ad GF, ita BC, ad CE, prout videlicet proportio data eſt FG, ad GB, vel BG, ad GF. Sic etiam ſi tres rectæ datæ coeant in H; ducta GA, ipſi EF, parallela, fiatq; HA, ad AB, vt antecedens datæ proportionis ad conſequẽs: ſi ducatur BCE, [g] erit EC, ad CB, vt HA, ad AB. Et ſi fiat HA, ad AB, vt conſequens datæ proportionis ad antecedens, erit rurſus BC, ad CE, vt BA, antecedens ad conſequens AH.

PROBL. 14. PROPOS. 23.

CVIVSLIBET lineæ, quamuis minimæ, exhibere multiplicem quamcumque, etiamſi circino ipſa non accipiatur.

SIT ſumenda verbi gratia lineolę AB, tripla. Extẽſo circino quantumlibet ex A, ad C, ſumãtur ipſi AC, duæ æquales CF, FD, vt tota AD, ipſius AC, ſit tripla. Item ipſi CB, ſumantur tres æquales DG, GH, HE. Dico AE, eſſe ipſius AB, triplam. Quoniam enim tam multiplex eſt tota AD, totius AC, quam multiplex eſt ablata DE, ablatæ CB, nimirum tripla: erit quoque ita multiplex reliqua EA, reliquæ AB, vt tota totius, videlicet tripla. quod eſt propoſitum.



PROBL. 15. PROPOS. 24.

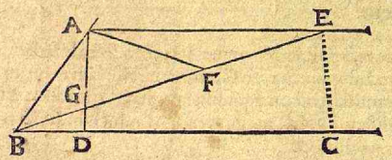
EX qualibet lineola, quamuis minima, auferre partem, vel partes imperatas.

IN figura præcedentis propoſ. ſit ex lineola AB, detrahenda tertia pars. Per præcedentem ſumatur ipſius AB, tripla AE, quæ ſi videbitur nimis exigua, multiplicetur, vt libet. In exemplo quadruplicata eſt vſque ad D; ita vt AD, ſit ipſius AB, duodecupla: (quod ſcietur, ſi numerus partium AE, nimirum 3. ducatur in numerum partium ipſius AD, ipſi AE, æqualium, nimirum in 4.) ac proinde ſi AB, diuiſa eſſe intelligatur in 3. partes, tota AD, continebit tales partes 36. Quocirca ſi in inſtrumento partium lib. 1. cap. 1. conſtructo, interuallum AD, ſtatuatur inter partes 36. 36. Deinde interuallum inter 35. 35. (nimirum tota AD, vna parte minus) transferatur ex D, ad I, erit AI, tertia pars ipſius AB, hoc eſt, pars trigeſima ſexta totius AD. Cum ergo AB, contineat tres trigeſimas ſextas partes totius AD, erit AI, ipſius AB, pars tertia. quod eſt propoſitum.

PROBL. 16. PROPOS. 25.

ANGVLVM datum rectilineum in tres æquales partes partiri.

PROBLEMA hoc veteres Geometras diu, multumque exagitauit, neque ab vllo ad hanc vſque diem Geometrice eſt ſolutum. Pappus Alexandrinus inter alios illud ſoluere conatus eſt per deſcriptionem hyperboles. Nos idem abſoluemus per lineam Conchoideos, quam lib. 6. propoſ. 15. huius ex Nicomede deſcripſimus, hoc modo. Sit datus angulus acutus ABC: Demiſſa autem ex quouis puncto A, ad BC, perpendiculari AD, ſumatur ipſius AB, dupla DC; Et polo B, interuallo autem DC, deſcribatur linea Conchoideos CE, ſecans rectam AE, ipſi BC, ductam parallelam in E, ducaturque recta BE. Dico angulum CBE, eſſe tertiam partem dati anguli ABC; hoc eſt, angulum ABE, duplum eſſe anguli CBE, adeo vt diuiſio anguli ABE, bifariam, totus angulus ABC, ſectus ſit in tres partes æquales. Quoniam enim ex deſcriptione Conchoideos, recta GE, ipſi DC, æqualis eſt; ac proinde ipſius AB, dupla: ſi ſe-



a *ſchol. 31. tertij.* cetur bifariam in E, erit vtraq; ſemiſſis ipſi AB, æqualis. [a] Quia vero circulus ex F, circa GE, deſcriptus tranſit per angulum rectum GAE, erit quoque ducta FA, vtrique ſemiſſi FE, FG, ideoq; & ipſi AB, æqualis. [b] Igitur tam anguli FAE, FEA, quam AFB, ABF, æquales erunt. [c] Eſt autem externus AFB, duobus internis FAE, FEA, æqualis: ideoque ipſius FEA, duplus. Igitur & ABF, & eiuſdem FEA, [d] hoc eſt, alterni CBE, duplus erit.

b *5. primi.* c *32. primi.* d *29. pri.*

SI angulus datus rectus eſt, diuidetur in tres æquales angulos, vt in ſcholio propoſ. 32. lib. 1. Euclid. tradidimus.

SI vero eſt obtuſus, ſecabimus eum bifariam, & ſemiſſem alterutram in tres partes æquales, vt docuimus hoc loco. Nam duæ partes tertiæ illius ſemiſſis efficient propoſiti anguli obtuſi tertiam partem, vt perſpicuum eſt.

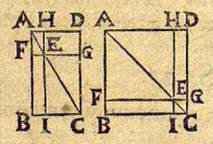
PROBL. 17. PROPOS. 26.

SI per idem punctum diametri in rectangulo duæ lineæ ducantur lateribus parallelæ: Erit rectangulum ſub ſegmentis diametri comprehenſum æquale duobus rectangulis ſub ſegmentis duorum laterum comprehenſis.

IN rectangulo BD, per E punctum diametri AC, ductæ ſint FG, HI, lateribus parallelæ. Dico rectan-

a *4. ſecun.* b *47. pri.* gulum ſub AE, EC, æquale eſſe rectangulis ſub AF, FB, & ſub BI IC. [a] Quoniam enim quadratum ex AC, æquale eſt quadratis ex AE, EC, vna cum rectangulo bis ſub AE, EC. [b] Sunt autem quadrata ex AB, BC, quadrato ex AC, æqualia; erunt quoque duo quadrata ex AE, EC, vna cum rectangulo bis ſub AE, EC, æqualia quadratis ex AB, BC. [c] Sed quadratum ex AB, æquale eſt quadratis duobus ex AF, FB, vna cum rectangulo bis ſub AF, FB; Et quadratum ex BC, æquale eſt duobus quadratis ex BI, IC, vna cum rectangulo bis ſub BI, IC. Igitur duo quadrata ex AE, EC, æqualia erunt quatuor quadratis ex AF, FB, BI, IC, vna cum rectangulis bis ſub AF, FB, & ſub BI, IC. [d] Cum ergo quadratum ex AE, quadratis ex AF, FE, hoc eſt, ex AF, BI: & quadratum ex EC, quadratis ex EI, IC, hoc eſt, ex FB, IC: æquale

c *4. ſecun.*



d *47. pri.* ſit; Erunt quatuor quadrata ex AF, FB, BI, IC, vna cum rectangulo bis ſub AE, EC, æqualia quatuor quadratis ex AF, FB, BI, IC, vna cum rectangulis bis ſub AF, FB, & ſub BI, IC; Ablatisque vtrobique prædictis quatuor quadratis communibus, erit reliquum rectangulum bis ſub AE, EC, reliquis rectangulis bis ſub AF, FB, & ſub BI, IC, æquale. Ideoque rectangulum ſemel ſub AE, EC, rectangulis ſemel ſub AF, FB, & ſub BI, IC, erit æquale. quod erat demonſtrandum.

COROL.

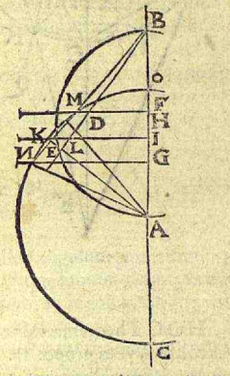
COROLLARIVM.

ITAQVE in quadrato, vt in poſteriori figura, rectangulum ſub ſegmentis diametri AE, EC, comprehenſum, æquale eſt duobus complementis DE, BE, quippe cum complementa ſub ſegmentis laterum comprehendantur.

PROBL. 18. PROPOS. 27.

DATO centro Ellipſis in linea in infinitum producta, vna cum duobus punctis ad eaſdem partes axis, vel centri, per quæ tranſire dicatur Ellipſis: vtrumque axis maioris extremum inuenire.

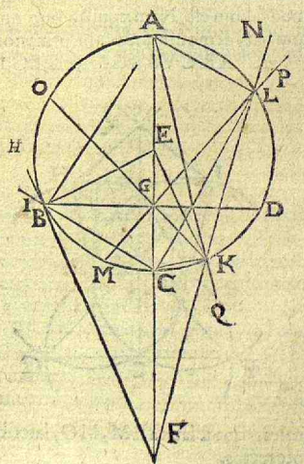
HOC problema conicum eſt, & acutum. Sit A, centrum, id eſt, punctum medium alicuius Ellipſis in linea axis maioris BC, quantacunque: Et duo puncta in eadem Ellipſi D, E, verſus eandem partem, hoc eſt, ſiue ſupra centrum A, ſiue infra; è quibus ad BC, perpendiculares ducantur DF, EG: Eritque DF, minor quam EG, quod perpendicularis remotior à centro minor ſemper ſit, quam propinquior. Ducta igitur recta ED, ſecabit lineam axis in B. Secta autem AB, bifariam in H, deſcribatur ex H, circa AB, ſemicirculus AKB. Diuiſa quoque FG, inter ductas perpendiculares bifariam in I, ducatur IK, ad AB, perpendicularis ſecans circumferentiam in K, & rectam BE, in L. Ducta quoque recta BK, ſecante perpendiculares DF, EG, in M, N, iungantur rectæ AM, AK, AN. [a] Et quoniam eſt, vt FI, ad IG, æqualem, ita MK, ad KN, erit quoque MK, ipſi KN, æqualis. Igitur duo latera AK, KM, duobus lateribus AK, KN, æqualia erunt. Cum ergo & angulos æquales comprehendant, vtpote rectos, [b] quod angulus AKB, in ſemirculo rectus ſit; [c] erũt baſes AM, AN, æquales. Circulus igitur ex A, per N, deſcriptus tranſibit per M, ſecabitq; BC, in O, & C. Dico OC, eſſe axem Ellipſis maiorem. [d] Cum enim ſit, vt MD, ad DF, ita NE, ad EG, tranſibit neceſſario Ellipſis, quæ per O, D, C, deſcribitur, (poſſe autem Ellipſim deſcribi circa OC, tamquam axem maiorem, per punctum D, conſtat ex ijs, quæ ad finem ſcholij propoſ. 8. lib. 1. Gnomonices, & in ſcholio Lemmatis 50. lib. 1. Aſtrolabij ſcripſimus) per punctum E, ex ſcholio Lemmatis 51. Aſtrolabij: Ac proinde Ellipſis per data puncta D, E, circa centrum A, deſcripta tranſibit per O, C: ita vt ab Ellipſi per O, D, C, deſcripta non differat. Alioquin Ellipſis Ellipſim in 8. punctis ſecaret, nimirum in D, E, & alijs duobus reſpondentibus ex altera parte axis: deinde in alijs 4. infra centrum reſpondentibus. quod eſt abſurdum, [e] quippe cum Ellipſis Ellipſim in 4. tantum punctis ſecet.



a *2. ſexti.* b *31. tert.* c *4. primi.* d *ſchol. 4.* e *25 quar. Apollonij.*

THEOR. 10. PROPOS. 28.

SI in circuli diametro producta punctum ſumatur, ab eoque recta circulum tangens ducatur; à puncto autem contactus chorda ducatur ad diametrum perpendicularis: Recta ex eodem contactus puncto ad vtrumlibet extremum diametri ducta diuidet angulum à tangente, & prædicta chorda perpendiculari comprehenſum bifariam. Item ſi ab eodẽ puncto in diametro producta aſſumpto recta ducatur circulum ſecans, & ab alterutro ſectionis puncto ad interſectionem diametri cum prædicta chorda perpẽdiculari recta iungatur; Recta ex eodem ſectionis puncto ad vtrumlibet diametri extremũ ducta ſecabit quoq; angulum à linea ſecante, & illa alia, quæ per interſectionem diametri cum prędicta chorda perpendiculari ducitur, bifariam.



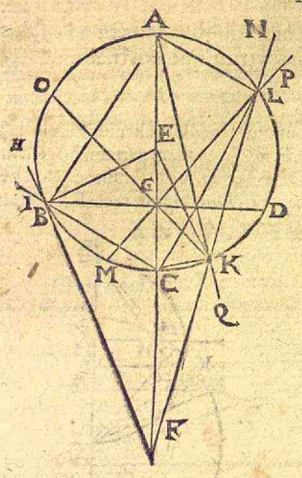
IN circulo ABCD, cuius centrũ E, producta ſit diameter AC, ad F, & ex F, ducatur primum recta FH, tangens circulum in B, atque ex B, ducatur chorda BD, ſecans diametrum in G, ad rectos angulos, iunganturq; ad extrema diametri rectæ BC, BA. Dico tam angulos CBF, CBG, quam (producta FB, ad H,) angulos ABH, ABG, eſſe æquales. [a] Quoniam enim angulus CBF, angulo BAC, in alterno ſegmento æqualis eſt. [b] & angulus CBD, eidem angulo BAC, æqualis, ob arcus æquales CB, CD; [c] (vel etiam angulus CBG, angulo BAC, æqualis eſt; quod BG, in triangulo rectangulo ABC, ad baſem AC, perpendicularis ſit) erunt anguli CBF, CBG, inter ſe quoque æquales. Producta autem CB, ad I, ſi ex rectis angulis ABC, ABI, tollantur æquales CBG, HBI,) [d] eũ enim CBF, æqualis ſit angulo HBI, ad verticem: & angulus CBG, angulo CBF, oſtenſus æqualis; erit quoque

a *32. tert.* b *27 tert.* c *8. ſexti.* d *15 pri.*

angulus CBG, angulo HBI, æqualis.) erunt quoque reliqui anguli ABG, ABH, inter se æquales. quod est primum.

DEINDE ducatur recta FN, secans circulum in K, L, ductisque rectis KGO, LGM, per G, iungantur tam rectæ KC, KA, quã LC, LA, ad extrema diametri. Dico rursus tam angulos CLF, CLG, quã ALG, ALN: Item tam CKF, CKG, quã AKG, AKL, esse æquales. Ductis n. ex centro rectis EB, EK; erit angulus EBF, rectus: Igitur erit FB, media proportionalis inter EF, FG: Ideoque rectangulum sub EF, FG, quadrato ex FB, æquale erit: Est autem eidem quadrato æquale quoque rectangulum sub LF, FK. Igitur rectangulum sub EF, FG, rectangulo sub LF, FK, æquale erit: Ac proinde erit vt EF, prima ad FK, secundam, ita LF, tertia ad FG, quartam. Quare cum triangula EFK, LFG, habeant latera circa communem angulum F, proportionalia; erunt anguli FEK, FLG, homologis lateribus FK, FG, oppositi æquales. Est autem angulus FEK, in centro anguli CLK, ad circumferentiam, (cum habeant eandem basem CK,) duplus. Igitur & angulus FLG, eiusdem anguli CLK, duplus erit; Ac proinde angulus FLG, sectus erit bifariam à recta LC, hoc est, anguli CLF, CLG, æquales erunt. Producta autem CL, ad P, si ex rectis angulis ALC, ALP, demantur æquales anguli CLG, PLN, (Cum enim CLF, ostensus sit æqualis angulo CLG, & CLF, æqualis sit angulo PLN, ad verticem, erit quoque CLG, eidem angulo PLN, æqualis.) erunt quoque reliqui anguli ALG, ALN, æquales. Rursus quia anguli CLK, CLM, ostensi sunt æquales; erunt arcus CK, CM, æquales. Igitur anguli CGK, CGM: Ideoque & anguli AGO, AGL, ad verticem æquales erunt; Ac proinde arcus etiam AO, AL, æquales erunt: ideoque & anguli AKO, AKL, erunt æquales. Producta autem AK, ad Q, si ex rectis angulis CKA, CKQ, auferantur æquales AKG, FKQ, (Cum enim angulus AKG, angulo AKL, ostensus sit æqualis: hic autem angulo FKQ, ad verticem sit æqualis; erit quoque angulus AKG, angulo FKQ, æqualis.) erunt etiam reliqui anguli CKG, CKF, inter se æquales. Quæ omnia demonstranda erunt.

e 18. tert. f coroll 8. sexti. g 17. sexti. h 36. tert. i 16. sexti. k 6. sexti. l 20. tertij. m 15. pri. n 26. tert. o schol 29. tertij. p 15. pri. q schol. 29. tertij. r 27. tert. s 15. primi.



SCHOLIVM.

HOC Theorema valde vtile est ad descriptionem paralleli cuiusuis circuli maximi per datum punctum in Astrolabio, vt ex propos. 18. lib. 2. Astrolabij perspicuum est: cum multa ibi demonstrari possint per hoc Theorema, sine ijs, quæ ex Astrolabij descriptione pendent.

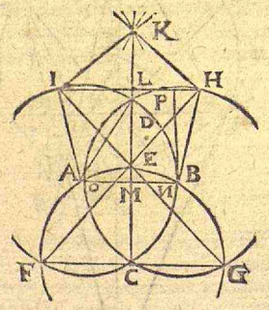
THEOR. 11. PROPOS. 29.

DESCRIPTIONEM Pentagoni æquilateri, & æquianguli supra datam rectam ab Alberto Durero traditam, & quam omnes fere Architecti, atque artifices approbant, falsam esse, demonstrare.

PRAXIS hæc est. Sit data recta AB. Ex centris A, B, & interuallo eodem AB, describantur duo circuli sese intersecantes in C, D. Ducta autem CD, quantacunque, describatur eodem interuallo AB, ex C, per A, B, circulus rectam CD, in E, & priores circulos secans in F, G. Item ducantur ex F, G, per E, rectæ secantes priores circulos in H. I. Denique eodem interuallo ex H, I, duo arcus descripti sese intersecent in K, iungantur que rectæ AI, IK, KH, HB. Putat ergo Durerus, pentagonum ABHKI, esse æquilaterum, & æquiangulum. quod falsum est. Nam æquilaterum quidem est, ex descriptione, non autem æquiangulum. quod vt manifestum fiat, demonstranda sunt prius nonnulla.

1. ARCVS tres FA, AB, BG, sextæ partes circuli sunt, quod rectæ eos subtendentes semidiametri sint circuli FABG, ex constructione. Igitur FABG, semicirculus est, cuius diameter FG; ideoq; angulus FEG, in semicirculo rectus: Et diameter FG, rectæ AB, parallela, ob arcus AF, BG, æquales. Et quoniam, vt constat ex demonstratione praxis scholij propos. 10. & 11. lib. 1. Euclid. recta CD, secat rectam AB, bifariam in M, & ad angulos rectos; secabit eadem parallelam quoque FG, ad angulos rectos in C. Eadem quoque CD, secabit arcum AB, bifariam in E, ac propterea toti arcus EF, EG, æquales erunt, videlicet quadrantes; ideoque rectæ EF, EG, latera sunt quadrati in circulo FABG, descripti, eiusque diameter FG. Igitur anguli F, G, semirecti erunt: ac proinde cum anguli ad C, recti sint, erunt quoque OEM, NEM, semirecti; ideoque & EOM, ENM, semirecti. Ac proinde tam latera EM, MO, quam EM, MN, æqualia: atque idcirco & OM, NM, inter se æqualia erunt; nec non & totæ OB, NA, æquales erunt. Immo & EO, EN, erunt æquales, quod latera EM, MO, lateribus EM, MN, æqualia sint, comprehendantque angulos æquales, vtpote rectos.

a 31. tertij. b schol. 27 tertij. c 29. pri. d schol. 27 tertij. e 6. quar. schol. 34. primi. g 32. pri. h 6. pri. i 4. primi.



2. DEIN-

2 DEINDE quia latera AN, AI, lateribus BO, BH, æqualia sunt; suntq; anguli N, O, semirecti æquales, & vterque reliquorum angulorum I, H, minor recto; quod vterq; minor sit semirecto ad O, & N; propterea quod tam latus AN, minus est latere AI, quam latus BO, latere BH: erunt per ea, quæ ad finem lib. 1. Euclid. demonstrauimus, tam bases NI, OH, quam anguli A, B, & I, H, æquales. Igitur duo anguli AB, in pentagono æquales inter se sunt.

k 19. prim.

3 RVRSVS demptis OE, NE, æqualibus ex æqualibus OH, NI, reliquæ rectæ EH, EI, æquales sunt: erunt anguli EIH, EHI, æquales, ac proinde semirecti, cum HEI, sit rectus: Sunt autem & anguli H, I, in Isoscele KIH, æquales. Igitur toti anguli H, I, in pentagono æquales sunt.

l 5. prim. m 5. prim.

4 POSTREMO cum latera EL, EI, lateribus EL, EH, sint æqualia, contineantq; angulos æquales semirectos; erunt & bases LI, LH, æquales, & anguli ad L, ideoque recti. Ex quo efficitur, rectas AB, HI, esse parallelas: quod etiam constat ex eo, quod alterni anguli INA, NIH, æquales sint; nimirum semirecti. Hinc etiam sequitur, rectam CDL, productam cadere in angulũ K, diuidereq; eum bifariam. Si enim dicatur non cadere in K, q diuidet perpendicularis ex K, ad HI, demissa basem Isoscelis KIH, bifariam in alio puncto quã in L, quod est absurdum. Quia ergo latera KI, KL, lateribus KH, KL, æqualia sunt, & basis IL, basi HL, ostensa æqualis: erunt anguli ad K, æquales.

n 4. prim. o 28. pri. p 27. pri. q schol. 26. primi. r 8. primi. s schol 32. primi.

HIS ita præmissis, demonstrabimus iam pentagonum ABHKI, non esse æquiangulum, hoc modo. Omnes 5. anguli in pentagono quolibet, siue sit æquilaterum, & æquiangulum, siue non, æquales sunt 6. rectis. hoc est, gr. 540. quibus diuisis per 5. efficitur vnus angulus pentagoni æquilateri, & æquianguli grad. 108. At vterlibet duorum angulorum A, B, in pentagono Dureri maior est, quam grad. 108. & vterlibet duorum H, I, minor, & angul⁹ K, maior quolibet reliquorum 4. vt ostendemus. Igitur pentagonum Dureri non est æquiangulum. Hoc autem ita fiet perspicuum.

QVONIAM posito sinu toto AB, 10000000. eius semissis BM, sinus videlicet grad. 30. est 5000000. cui si addatur MO, id est, ME, sinus versus grad. 30. nimirum 1339746. fiet tota BO, 6339746. Quia ergo in triangulo BHO, duo latera dantur BH, 10000000. & BO, 6339746. vna cum angulo O. grad. 45. nec non cum specie anguli H, qui supra ostensus fuit recto minor: Si fiat,

r 11. triang. rectil.

Vt latus BH,	*ad 7071068. sinum anguli O. grad. 45.*	*Ita latus BO,*	*ad aliud,*
10000000.		*6339746.*	

inuenietur sinus anguli BHO. 4482877 ½ ferme, qui in tabula sinuum offeret ipsum angulum grad. 26. min. 38. cui si addatur angulus BOH. grad. 45. fiet summa angulorum H, O, grad. 71. min. 38. quę summa dempta ex duobus rectis, id est, ex grad. 180. relinquet angulum OBH. grad. 108. min. 22. Igitur vterque angulus A, B, in pentagono maior est vero angulo pentagoni grad. 108.

DEINDE ducta BP, ad HI, perpendiculari, si iterum statuatur BH, sinus totus 10000000. erit HP, 3150970. anguli HBP, grad. 18. min. 22. qui relinquitur, si rectus angulus ABP, grad. 90. detrahatur ex angulo ABH, inuento grad. 108. min. 22. Si igitur addatur PL, 5000000. cum sit æqualis ipsi BM, semissi sinus totius, fiet tota HL, sinus anguli HKL, 8150970. Ac propterea angulus ipse erit grad. 54. min. 36. qui duplicatus dabit totum angulum HKI, grad. 109. min. 12. maiorem vero angulo pentagoni grad. 108.

u 34. prim.

Angulus	A	Grad. 108.	min. 22
	B	Grad. 108	min. 22
	H	Grad. 107	min. 2
	I	Grad. 107	min. 2
	K	Grad. 109	min. 12
Summa		540	min. 0

IAM vero si summa trium angulorum A, B, K, inuentorum, nimirum gr. 325. min. 56. auferatur ex grad. 540. summa omnium 5. angulorum pentagoni, reliqua fiet summa angulorum H, I, gra. 214. min. 4. Ac proinde vterquer erit grad. 107. min. 2. minor vero angulo pentagoni grad. 108. Non ergo æquiangulum est Dureri pentagonum, sed solum æquilaterum. Omnes tamen 5. anguli conficiunt summam grad. 540. sicut in pentagono æquilatero, atque æquiangulo, vt hæc formula indicat.

x

SCHOLIVM.

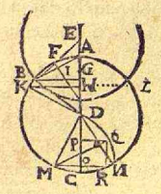
SVNT alij nonnulli, qui ad interuallum cuiusuis rectæ AB, descriptis ex centris A, B, duobus circulis se intersecantibus in C, D, vt in superiori figura, ducunt rectam AD, affirmantq; AD, latus esse pentagoni in circulo, cuius semidiameter DM, inscripti, sed toto cœlo aberrant. Est enim AD, minus latere pentagoni circuli prædicti. Nam quia latus pentagoni potest & latus hexagoni, & latus decagoni circuli eiusdem: Potest autem AD, rectas DM, MA; & DM, latus est hexagoni in circulo, cuius semidiameter DM, esset AM, latus decagoni in eodem circulo. quod falsum est. Quoniam enim latus decagoni mai⁹ est semisse lateris pentagoni, quod duo latera decagoni supra latus Pentagoni constituant Isosceles, in quo duo latera maiora sunt latere pentagoni: Erit AM, semissis ipsius AB, vel AD, minor latere decagoni. Igitur AD, minor est latere pentagoni; quando, quidem latus pentagoni potest & latus hexagoni DM, & latus decagoni, quod maius est, quam AM, semissis ipsius AD, vt diximus.

a 10. tertij decimi. b 47. primi. c coroll. 15. quarti. d 20. prim. e 10. tertij decimi.

THEOR. 12. PROPOS. 30.

INVENTIONEM lateris heptagoni in dato circulo non rectè à quibusdam tradi, demonstrare.

CAROLVS Marianus Cremonensis totum vnum libellum edidit de inuentione lateris heptagoni in circulo dato, in quo probare conatur, latus heptagoni reperiri hac ratione. Sit circulus ABC, cuius centrum D, diameter CA, in qua producta capiatur AE, æqualis quartæ parti semidiametri AD, ita vt AE, quinta pars sit rectæ DE. Descripto autem ex E, ad interuallum semidiametri AD, circulo secante datum circulum in B, iungatur recta AB, quam dicit esse latus heptagoni, quod falsum esse, ita ostendemus. Si AB, esset verum latus heptagoni, & ducta BE, æquali semidiametro DB, (quod fiet, si ex B, ad interuallum semidiametri recta DE, secetur in E,) secante arcum AB, in F, diuideretur arcus AB, in F, vel angulus ADB, bifariam, quod tamen in eius descriptione non contingit, vt demonstrabitur. Non ergo eius linea AB, verum latus est heptagoni. Ductis enim rectis DB, DF, si AB, est septima pars circumferentiæ, continebit tam angulus ADB, quam DEB, (a qui æquales sunt) $\frac{2}{7}$. vel $\frac{4}{14}$. duorum rectorum. b Ergo reliqui DAB, DBA, simul continebunt $\frac{5}{7}$. vel $\frac{10}{14}$. duorum rectorum. Ac proinde vterq; ipsorum continebit $\frac{5}{14}$. duorum rectorum. c Cum ergo DAB, æqualis sit duobus E, & ABE, continebunt etiam hi simul $\frac{5}{14}$. duorum rectorum. Concinet autem E, solus $\frac{4}{14}$. duorum rectorum. Igitur ABE, continebit $\frac{1}{14}$. duorum rectorum. d Et quia ADF, duplus est ipsius ABE, propter eandem basem AF, continebit angulus ADF, $\frac{2}{14}$. id est, $\frac{1}{7}$. duorum rectorum. Cum ergo totus ADB, complectatur $\frac{2}{7}$. vt dictum est, continebit quoque BDF, $\frac{1}{7}$. duorum rectorum; ideoque æquales erunt ADF, BDF.



a 5. primi. b 32. prim. c 32. prim. d 10. tertij.

SED iam AB, sit inuenta per constructionem prædicti auctoris; eritque EB, æqualis ipsi DB. Si ergo AB, esset verum latus heptagoni, caderet DI, perpendicularis, diuidens nimirum angulum ADB, bifariam, in F, quod verum non est. Posita enim BE, 4. erit tota CE, 9. & DE, 5. e Cum ergo sit, vt BD, ad DE, ita BF, ad FE; (quod angulus ADB, sectus sit bifariam) erit componendo, summa ex BD, DE, nimirum 9. ad DE, 5. vt BE, ad FE. Si igitur fiat, vt 9. ad 5. ita BE, 4. ad aliud, inuenietur FE, $2\frac{2}{9}$. ac propterea rectangulum sub BE, 4. & EF, $2\frac{2}{9}$. erit $8\frac{8}{9}$. & rectangulum sub CE, 9 & EA, 1. erit 9. quod est absurdum; f cum hæc rectangula sint æqualia. Non ergo recta DI, cadit in punctum F, intersectionis rectæ BE, cum arcu AB, quandoquidem rectangulum sub BE, EF, æquale non est rectangulo sub CE, EA, sed minus: Ac proinde non recte illa ratione latus heptagoni inuenitur.

e 3. sexti. f 1. coroll 36. tertij.

ALBERTVS Durerus ad KL, latus trianguli æquilateri (sumptis videlicet arcubus AK, AL, quorum vterque sextam partem circumferentiæ contineat) perpendicularem ducit AH, dicitque KH, semissem illius lateris esse latus heptagoni. quod similiter falsum est. Nam KH, omnino æqualis est rectæ AB, quam proxime demonstrauimus non esse latus heptagoni. Si enim iungeretur recta AK, fieret triangulum æquilaterum AKD. Igitur perpendicularis KH, diuidet AD, bifariam: Ac proinde posita DK, vel DA, 4. erit DH, 2. Quocirca si detrahemus 4. quadratum DH, ex 16. quadrato DK, b reliquum erit quadratum KH, 12. At tantum etiam deprehendemus esse quadratum AB. Quoniam enim quadratum BE, est 16. hoc est, $6\frac{4}{7}$. & quadratum EG, $2\frac{2}{7}$. (Nam perpendicularis BG, secat in Isosceles EBD, basem ED, bifariã. Cum ergo ED, sit 5. erit DG, $2\frac{1}{2}$. cuius quadratum est $2\frac{2}{7}$.) i erit quadratum BG, $9\frac{2}{7}$. Sed quadratum AG, est $4\frac{2}{7}$. quod recta AG, sit $1\frac{1}{2}$. k Igitur quadratum AB; erit $4\frac{2}{7}$. id est, 12. quod est propositum.

g schol. 26. primi. h 47. pri. i 47. prim. k 47. prim.

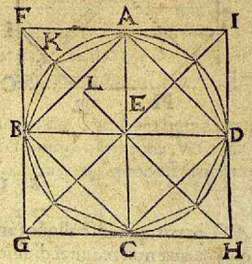
FRANCISCVS Flussas Candalla vir nobilissimus, ac doctissimus conatus est construere triangulum Isosceles habens vtrumuis angulorum æqualium ad basem triplum reliqui anguli, vt beneficio ipsi° in dato circulo heptagonum inscribatur, vt in scholio propos. 16. lib. 4. Euclid. tradidimus. Ita ergo scribit. Sit triangulum æquilaterũ DMN, in quo perpendicularis DO, ad basem secetur bifariam in P. Descripto deinde ex M. per N, D, circulo, quem secet perpendicularis PQ, in Q, iungãtur rectæ QN, MQ. Dicit igitur, in Isoscele MNQ, vtrũlibet angulorum N, Q, triplum esse anguli M. quod falsum esse, hinc intelligi potest. Demissa perpẽdiculari QR, pro sinu arcus QN, vel anguli M, posito sinu toto MQ, vel MN, 10000000. l Quoniam latus DN, potentia sesquitertium est perpendicularis DO, si fiat vt 4. ad 3. ita 100000000000000. quadratum lateris DN, ad aliud reperietur quadratum DO, 75000000000000. m quod cum sit quadruplum quadrati PO, vel QR, erit quadratum QR, 18750000000000. ipsum que latus QR, erit 4330127. vero minus, vel 4330128. vero maius, cui in tabula sinuum (adhibita parte proportionali) respondent grad. 25. min. 39. sec. 32 pro arcu QN, vel angulo NMQ. quo ablato ex duobus rectis, siue ex grad. 180. reliqua erit summa angulorum æqualium ad basem QN, gra. 154. min. 20. sec. 28. atque idcirco vterque complectetur grad. 77. min. 10. sec. 14. qui maior est, quam triplus anguli NMQ. grad. 25. min. 39. sec. 32. cum hic angulus triplicatus efficiat tantummodo grad. 76. min. 58. sec. 36. Falsum ergo est, quod Candalla nititur probare. Paralogismos tum Caroli Mariani, tum Candallæ, quos committunt, non est huius loci manifestare: satis nobis est, indicasse eos non rectè descripsisse heptagonum æquilaterum, & æquiangulum.

l 12. quarti decimi. m schol. 4. secundi.

THEOR. 13. PROPOS. 31.

OCTOGONVM æquilaterum & æquiangulum circulo inscriptum medio loco proportionale est inter quadratum eidem circulo circumscriptum, & quadratum inscriptum.

HOC Theorema est Orontij, quod facile ita demonstrabitur. Sit circulus ABCD, cuius centrum E; duę diametri AC, BD, secantes sese in E, ad angulos rectos. Iunctis ergo rectis AB, BC, CD, DA, erit quadratum circulo inscriptum ABCD, vt ex demonstratione propos. 6. lib. 4. Euclid. constat. Ducatur quoque per A, B, C, D, perpendiculares ad diametros coeuntes in F, G, H, I, eritque quadratum circulo circumscriptum FGHI, vt patet ex demonstratione propos. 7. lib. 4. Euclid. Ductis autem diametris FH, GI, a secabuntur quadrantes AB, BC, CD, DA, bifariam; propterea quod anguli in centro sunt omnes æquales, b nimirum semirecti: c ac proinde & latera quadrati inscripti diuisa erunt bifariam, & ad angulos rectos. Et si iungantur rectæ, AK, KB, &c. descriptum erit octogonum intra circulum. Dico ita esse quadratum exterius ad octogonum, vt octogonum ad quadratum interius. Quoniã enim triangula AEF, EAI, æquiangula sunt, quod rectos habeant angulos, & semirectos: d Erit EF, ad FA, hoc est, ad EK, (est nãq; EK, ipsi EA, hoc est, ipsi AF, æqualis) vt EA, hoc est, vt EK, ad AL; hoc est, ad EL, e quod AL, EL, sint æquales, propter angulos semirectos AE, in triangulo AEL. Sunt ergo tres rectæ EF, EK, EL, cõtinue proportionales. Igitur & triangula AEF, AEK, AEL, cõtinue erũt proportionalia: f cum basibus EF, EK, EL, sint proportionalia; g Ac proinde & eorum octupla continue erunt proportionalia, quadratum videlicet FGHI, octogonum AKBCDA, & quadratum ABCD; quippe cum prædicta triangula sint harum figurarum octauæ partes, vt liquet. Octogonum igitur medio loco proportionale est inter quadrata FGHI, ABCD, quod demonstrandum erat.

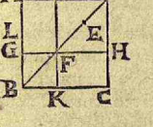


a 17 tertij. b schol. 34. primi. c schol. 27. tertij. d 4. sexti. e 6. primi. f 1. sexti. g 15. quin.

THEOR. 14. PROPOS. 32.

SI ex diametro quadrati detrahatur ipsius latus: Reliqua linea erit latus alterius quadrati, cuius diameter est linea, quæ relinquitur, si latus inuentum bis ex diametro prioris quadrati auferatur; vel si idem latus inuentum ex prioris quadrati latere tollatur.

EX diametro BD, quadrati ABCD, abscindatur recta BE, lateri AB, æqualis, & ex eadem diametro demetur reliqua DE, bis vsque ad F, ita vt EF, sit ipsi DE, æqualis: vel (quod idem est) reliqua DE, siue EF, illi æqualis ex latere AB, hoc est, ex BE, auferatur. Dico DE, vel EF, latus esse quadrati, cuius diameter BF. Ductis enim per F, rectis GH, IK, parallelis ipsis AD, AB; a erunt GK, HI, circa diametrũ quadrata. Dico rectam EF, vel DE, æqualem esse lateri BG, quadrati GK, cuius diameter BF, reliqua fuit post detractionem DE, bis ex diametro BD. b Quoniam enim quadratum ex DF, duplum est quadrati ex IF, siue ex AG, c & quadruplum quadrati ex EF; si quadratum ex DF, ponatur 4. erit quadratum ex AG, 2. & quadratum ex EF, 1. Ac proinde quadratum ex AG, duplum erit quadrati ex EF. d Est autem & quadratum ex BF, quadrati ex BG, duplum. c Igitur erit recta AG, ad rectam EF, ita recta BF, ad rectam BG; quandoquidem quadrata earum proportionalia sunt, habentia nimirum proportionem duplam. Capiatur BL, ipsi BF, æqualis, ita vt reliqua LA, reliquæ FE, æqualis sit. Erit igitur quoque AG, ad AL, vt BF, siue BL, ad BG; Et diuidendo GL, ad LA, vt GL, ad BG. f Quocirca AL, siue EF, & BG, æquales sunt, quod erat ostendendum.



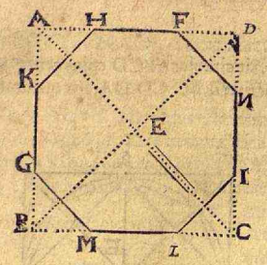
a coroll. 4. secundi. b schol. 47. primi. c schol. 4. secundi. d schol. 46 primi. e 22. sext. f 9. quint.

PROBL. 19. PROPOS. 33.

OCTOGONVM æquilaterum, & æquiangulum ad datam altitudinem, latitudinemve constituere.

SIT ad altitudinem datam AB, construendum octogonum æquilaterum, & æquiangulum. Descripto ex AB, quadrato ABCD, ductisque diametris AC, BD, se in E, secantibus bifariam, & ad angulos rectos; abscindantur ad interuallum EA, ex quatuor angulis quadrati rectæ æquales AF, AG; DH, DI; BK, BL, CM, CN, iunganturque rectæ HK, GM, LI, NF. Dico octogonum FHKGMLIN, esse æquilaterum, & æquiangulum. Quoniam enim rectæ AH, AK; BG, BM; CL, CI; DF, DN, relinquuntur post detractionem rectæ AE, ex lateribus æqualibus quadrati ABCD, ipse inter se æquales erunt; ideoque & earum quadrata erunt æqualia. a Cum ergo quadratum ex KH, æquale sit quadratis ex AH, AK, ipsum duplum erit tam quadrati ex AH, quam quadrati ex AK. Quia vero AB, diameter est quadrati ex AE, descripti, abscissaq; est recta BK, lateri AE, æqualis; b erit reliqua AK,

a 47 prim. b 32 huius



c *schol 47. primi.*

d *13. prim.* c *4. prim.* f *schol. 34. primi.*

AK, latus quadrati, cuius diameter GK, quæ relinquitur post detractionem ipsius AK, bis ex diametro AB, vel ex latere AG, semel. [c] Igitur & quadratum ex GK, duplum erit quadrati ex KA: ac proinde quadrata ex KH, KG, æqualia inter se erunt; ideoque & rectæ KH; KG, æquales erunt. Eadem ratione ostendemus, eandem GK, æqualem esse rectæ GM; & GM, æqualem rectæ ML; & sic de cæteris. Æquilaterum ergo est octogonum. [d] Quoniam autem bini anguli ad H, K, G, M, L, I, N, F, æquales sunt duobus rectis; [e] sunt que anguli acuti versus angulos quadrati omnes inter se æquales: [f] immo semirecti, quod KH, GM, &c. sint diametri quadratorum ex lateribus AH, GB, &c. descriptorum: Erunt reliqui anguli obtusi in octogono æquales; ideoq; octogonum æquiangulum etiam est, quod est propositum.

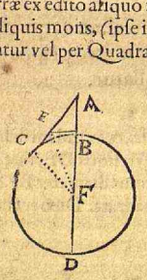
SCHOLIVM.

HÆC praxis, quã ante aliquot annos à quodam architecto sine demonstratione tamen accepi, pulcherrima est: quippe quæ non requirat diuisionem circuli in octo partes æquales, & describat octogonum ad datam altitudinem latitudinemuè, vt patet. Quam praxem vt demonstrarem, oportuit prius demonstrare præcedens theorema. Ex eo enim facile problema propositum conficitur, vt patuit.

PROBL. 20. PROPOS. 34.

AMBITVM terræ ex edito aliquo monte metiri.

CIRCA finem cap. 1. sphæræ Ioan. de Sacro boscõ proposui rationem, qua Franciscus Maurolycus ambitum terræ ex edito aliquo monte inuestigare docuit, quæ talis est. Sit circulus terræ BCD, in quo eligatur editissimus aliquis mons, (ipse in Sicilia montem Ætnam ad hoc negotium censuit eligendum) cuius altitudo AB, inquiratur vel per Quadrantem, vt lib. 2. problem. 2. 3. & 4. docuimus, vel per Quadratum Geometricum, vt lib. 3. problem. 6. 7. 8. & 9. Vel potius vt in scholio problem. 7. ac 9. tradidimus. Deinde ex A, vertice montis mensuretur totum illud spacium pelagi, seu terræ, (vbi tamen montes non sint) quod inde conspicitur, ita vt radius AC, maris vel terræ superficiem contingat in C. Hoc autem fiet per ea, quæ in problematibus citatis tradita sunt. Ex his postea explorat magnitudinem lineæ tangentis AC; [a] propterea quod eius quadrato æqualia sunt quadrata AB, BC, (sumpto spacio BC, pro linea recta) [b] cuius quadratum æquale est rectangulo sub AD, AB, quo diuiso per AB, altitudinem montis, prodibit in Quotiente recta AD; ex qua si demptur altitudo montis AB, nota relinquetur diameter terræ BD. [c] Ac proinde circumferentia BCD, cognita fiet.



a *47. prim.* b *30. tertij.* c *corol. 2. de Dimẽs. circuli lib. 4. huius.*

SED quia in hac ratione metiendi ambitus terrestris assumitur, arcum BC, à linea recta non differre. quod verum non est, quando mons tam altus est, vt spacium 200. vel 300. milliariorum cerni possit, quod tunc arcus BC, iuxta ambitum à Ptolemæo positum contineat grad. 3. min. 11. vel grad. 4. min. 48. Ac proinde non recte linea tangens AC ex lateribus AB, BC, colligitur. Adde quod per problemata lib. 2. & 3. citata inuenitur perpendicularis BE, in plano, ad quod mons est ad angulos rectos. Redigemus rationem hanc ad meliorẽ formam multis vijs, hoc modo. Deprehenso angulo A, per Quadrantem, vel Quadratum, quando radius visualis per dioptram circulum terræ tangit. Quod tum denique certissime fiet, cum per dioptram conspicitur Sol, aut alia stella, quando oritur, vel occidit. Deprehenso, inquam, angulo A, inuenienda erit perpendicularis BE, per problemata paulo ante citata. [d] Et recta AE, ex duabus AB BE. Si enim ad AE, adijcietur BE, hoc est, EC, [e] quæ ipsi BE, æqualis est, nota fiet tota tangens AC, ex qua, vt supra dictum est, & diameter terræ BD, & circumferentia inuestigabitur. Quin etiam cognito angulo A, ac proinde & eius complemento E, [f] reperietur tam latus BE, [g] quam basis AE, sine problematibus ex lib. 2. & 3. citatis, &c.

d *47. prim.* e *2 coroll. 30. tertij* f *4. triang. rectil.* g *5. triang. rectil.* h *18. tertij.* i *4 prim.*

VEL sic agemus. Cognito per dioptram angulo A, cognitus etiam erit (ducta recta FC, [h] quæ ad AC, perpendicularis erit) angulus F, eius complementum in centro. Quia vero ducta recta FE, duo latera EC, CF, duobus lateribus EB, BF, æqualia sunt, comprehenduntq; angulos æquales, nempe rectos: [i] erunt anguli ad F, æquales. Cum ergo totus angulus BFC, cognitus sit, vt proxime diximus; cognitus etiam erit BFE, tanquam semissis ipsius: ac proinde & eius complementum BEF, notum erit. Igitur in triangulo ABE, ex angulis A, E, & latere AB, [k] reperietur BE, in partibus altitudinis montis AB, notæ. Atq; eodem modo in triangulo BEF, ex angulis E, F, & latere BE, cognoscetur semidiameter BF, in partibus lateris BE, hoc est, in partibus altitudinis montis AB; ideoq; & tota diameter BD, nota fiet, & ex hac ambitus terræ. quod est propositum.

k *4. triãg. rectil.*

DENIQVE hoc etiam modo idẽ assequemur. Cognito per dioptram angulo A, quando radius visualis terram contingit, cognitus etiam erit angulus AFC, cius complementũ. Ergo huius anguli secans AF, cognita erit in partibus sinus totius FC. Ex qua secante, si demptur sinus totus BF, nota relinquetur altitudo montis AB, in partibus sinus totius BF. Si igitur fiat vt altitudo montis AB, nota in partib⁹ sinus toti⁹ ad eandẽ AB, notam in data mensura, ita sinus totus BF, ad aliud; prueniet semidiameter BF, nota in partib⁹ altitudinis mõtis, &c.

PROBLE-

PROBL. 21. PROPOS. 35.

PRISMATI cuicunque Cylindrum æqualem, & Pyramidi Conum æqualem: Ac vicissim Cylindro Prisma æquale, & Cono æqualem Pyramidem constituere.

SI basi prismatis, vel pyramidis construatur circulus æqualis, per ea quæ ad finem lib. 7. scripsimus: Et super hunc circulum extruatur cylindrus vel conus eiusdem altitudinis cum prismate, vel pyramide; erit cylindrus prismati, & conus pyramidi æqualis. Cum enim tam bases, quam altitudines æquales sint: producatur autem prisma, & Cylindrus ex base in altitudinem multiplicata, & pyramis, atque conus ex tertia parte basis in altitudinem multiplicata, vt lib. 5. cap. 1. declarauimus; manifestum est, cylindrum prismati, & conum pyramidi esse æqualem.

SI vicissim basi cylindri, vel coni constituatur quadratum, aut alia quæuis rectilinea figura æqualis, per ea, quæ ad finem lib. 7. diximus, & super hoc quadratum, aut figuram rectilineam fiat prisma, vel pyramis eiusdem altitudinis cum cylindro, vel cono, erit prisma cylindro, & pyramis cono æqualis, quod est propositum.

PROBL. 22. PROPOS. 36.

DATO Cylindro, aut prismati æqualem conum, vel pyramidem sub eadem altitudine. Et vicissim dato cono vel pyramidi æqualem cylindrum, aut prisma eiusdem altitudinis constituere.

[a] SI tam basis cylindri, quam prismatis tripletur, & super triplicatam extruatur con⁹, vel pyramis eiusdem altitudinis, factum erit, quod in prima parte proponitur. [b] Cum enim cylindrus triplus sit coni eandem cum illo basem & altitudinem habentis: [c] Item prisma triplum pyramidis eandem cum illo basem, atque altitudinem habentis: [d] Sit autem & conus extructus eiusdem, illius coni triplus; nec non & pyramis constructa eiusdem illius pyramidis tripla. [e] Erit tam conus extructus cylindro æqualis, quam pyramis constructa prismati, quod est propositum.

a *16. sexti. huius.* b *10. duodecimi.* c *coroll. 7. duodec.* d *11. & 6. duodec.*

[f] SI vicissim bases coni, & pyramidis in tripla proportione minuantur, & super tertias has partes cylindrus erigatur, & prisma: Erit tam cylindrus dato cono, quam prisma datæ pyramidi æquale. [g] Quoniam n. tam conus datus, quam cylindrus extructus, triplus est coni eandem basem, altitudinemque habentis cum cylindro extructo. [h] Item tam data pyramis, quam prisma extructum, triplum est pyramidis eandem habentis basem, atque altitudinem cum prismate extructo. [i] Erit tam cylindrus extructus dato cono æqualis, quam prisma constructum datæ pyramidis æquale, quod est propositum.

e *9. quint.* f *16. sexti huius.* g *11. & 10. duodec.* h *6. & 7. duodec.* i *9. quint.*

COROLLARIVM I.

QVIA igitur [a] omne prisma in cylindrum, & pyramis in conum conuertitur: Et contra cylindrus in prisma, & conus in pyramidem: [b] Item cylindrus in conum, & prisma in pyramidem: Et contra conus in cylindrum, & pyramis in prisma conuerti potest; fit vt indifferenter tam cylindrus, quam prisma transmutari possit in pyramidem, aut conum, ac pyramis in cylindrum, aut prisma æquale.

a *35 huius* b *36. huius*

COROLLARIVM II.

Ex his etiam manifeste colligitur, omnem cylindrum, ac prisma; similiter & conum, ac pyramidem conuerti posse in parallelepipedum rectangulum, cuius basis sit quadrata. [a] Nam conuerso cylindro, aut cono, vel pyramide in prisma qualecunque, si basi prismatis fiat quadratum æquale, & supra illud erigatur parallelepipedum eiusdem altitudinis; [b] erit hoc parallelepipedum priori æquale, ac proinde & proposito cylindro, vel cono, aut pyramidi.

a *35 & 36. huius.* b *2. corol 7. duod.*

PROBL. 23. PROPOS. 37.

DATVM cylindrum, vel prisma: Similiter datum conum, vel pyramidem cuiuscunque altitudinis, in æqualem sub data qualibet alia altitudine, & supra basem quotcunque angulorum, reuocare.

IN proportione, quam data altitudo ad altitudinem propositi solidi habet, [a] augeatur vel minuatur basis eiusdem solidi dati. Nam solidum supra hanc basem auctam, vel diminutam secundum datam altitudinem constructum, erit id, quod quæritur. [b] Erit enim æquale dato solido: quippe cum altitudines cum basibus reciprocæ sint. Quod si basi constructi solidi fiat æqualis basis quotcunque angulorum & supra eam constituatur solidum sub data altitudine; erit hoc etiam solidum solido proposito æquale.

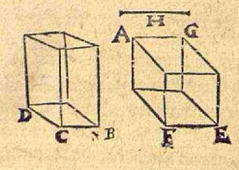
a *16. sexti. huius.* b *15. & 9. duodec.*

PROBL. 24. PROPOS. 38.

DATO parallelepipedo rectangulo cubum æqualem describere.

SI pa-

a 14. secun.



SI parallelepipedum non habet baſem quadratam, [a] fiat eius baſi quadratum æquale BCD, ſupra quod erigatur parallelepipedum rectangulum eiuſdem altitudinis A, B, cum parallelepipedo dato, [b] quod æquale erit dato parallelepipedo. Huic ergo cubum æqualem conſtruemus hac arte. Inter BC, latus quadrati BD, & AB, altitudinem parallelepipedi, inueniantur duæ mediæ proportionales EF, H: ita vt ſit BC, ad EF, quemadmodum EF, ad H, & H, ad AB. Et ſuper EF, propinquiorem latori BC, conſtruatur cubus EFG, [c] qui parallelepipedo ABCD, æqualis erit.

b 2. corol. 7. duod.

c lemma 18 ſexti huius.

Quod ſi forte accidat, tres dimenſiones parallelepipedi dati, cuius baſis quadrata non ſit, eſſe continue proportionales; [d] erit cubus ex media deſcriptus parallelepipedo æqualis.

d 36. vnd.

COROLLARIVM.

a 2. coroll. 36. huius.

[a] CVM igitur omnis cylindrus, omne priſma, conus, ac pyramis in rectangulum parallelepipedum poſſit commutari, liquido conſtat, cuilibet ſolido eiuſmodi, cubum poſſe conſtrui æqualem.

PROBL. 25. PROPOS. 39.

DATO cubo æquale parallelepipedum rectangulum ſub data altitudine, vel ſupra datam baſem conſtruere.

SIT in præcedenti figura datus cubus EFG, & primum data altitudo AB, ſub qua conſtruendum ſit parallelepipedum rectangulum cubo æquale. [a] Altitudini AB, & lateri cubi EF, reperiatur tertia proportionalis BC. Et fiat rectangulum BD, comprehenſum ſub tertia proportionali BC, & recta CD, lateri cubi EF, æquali; erigaturque ſupra BD, parallelepipedum rectangulum ſub data altitudine AB. quod dico cubo eſſe æquale. Quoniam enim parallelepipedum rectangulum ABD, continetur ſub tribus rectis AB, CD, BC, hoc eſt, ſub AB, EF, BC, continue proportionalibus; [b] erit parallelepipedum æquale cubo ex media EF, deſcripto. quod eſt propoſitum.

a 11. ſexti.

b 36. vnd.

SIT deinde data baſis BD, quæ ſi non eſt parallelogrammū, [c] reuocetur ad parallelogrammum æquale. Et quam proportionē habet baſis data BD, ad baſem cubi dati, eam habeat latus cubi EF, ad rectam AB. (quod fiet, ſi ſupra latus cubi EF, ſit rectangulū æquale baſi BD, & ſuper alterum latus huius rectanguli aliud rectangulum æquale quadrato lateris cubi EF, [d] Nam tunc erit, vt primum rectangulum, id eſt, baſis BD, ad ſecundum rectangulum, id eſt, ad quadratum; vel baſem cubi, ita primi rectanguli baſis, videlicet EF, ad baſem ſecundi rectanguli.) Nam ſi ſupra baſem BD, erigatur parallelepipedum in altitudine inuenta AB, [e] erunt parallelepipedum, & cubus æqualia: quippe cum baſes, & altitudines ſint reciprocæ, ex conſtructione, quod eſt propoſitum.

c 45. prim.

d 1. ſexti.

e 34. vnde.

COROLLARIVM.

a corol. 38. huius. b 38. huius c 39. huius

[a] QVONIAM igitur cuilibet cylindro, priſmati, cono, ac pyramidi parallelepipedum rectangulū cōſtrui poteſt æquale: [b] ſi huic parallelepipedo fiat cubus æqualis; [b] & huic cubo parallelepipedum rectangulum ſub data altitudine, vel baſe data æquale: commutatus erit cylindrus, priſma, conus, ac pyramis in parallelepipedum rectangulum æquale datæ altitudinis, vel baſis.

PROBL. 26. PROPOS. 40.

SPHÆRÆ datæ cubum æqualem: Et dato cubo æqualem ſphæram conſtituere.

QVONIAM per propoſ. 32. lib. 1. Archimedis de ſphæra, & cylindro, Cylindrus rectus cuius baſis eſt maximus ſphæræ circulus, & altitudo diametro eiuſdem ſphæræ æqualis, ſeſquialteram habet proportionem ad ſphæram: [a] Habet autē idem cylindrus ad cylindrum eiuſdem baſis, cuius altitudo contineat $\frac{2}{3}$. diametri ſphæræ, proportionem quoque ſeſquialteram; [b] erit poſterior hic cylindrus ſphæræ æqualis. Si igitur huic cylindro [c] fiat cubus æqualis; erit idem hic cubus datæ ſphæræ æqualis, quod eſt propoſitum.

a 14. vnd.

b 9. quint.

c corol. 38. huius.

VEL quia per eandem propoſ. 32. Archimedis, ſphæra quadrupla eſt coni, cui [d] baſis eſt maximus ſphæræ circulus, & altitudo ſemidiametro ſphæræ æqualis: [d] Eſt autem eiuſdem coni quadruplus etiam conus eiuſdem altitudinis, baſem habēs circuli maximi in ſphæra quadruplam, hoc eſt, baſem habens circulum, cuius ſemidiameter æqualis diametro maximi circuli; [e] erit poſterior hic conus ſphæræ æqualis. [f] Si igitur huic cono fiat cubus æqualis, erit hic idem cubus ſphæræ datæ æqualis, quod eſt propoſitum.

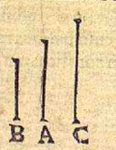
d 11. duod.

e 9. quint.

f corol. 38. huius.

g 40. huius

h ſchol. 37 vndec. i 33. vnd. k 18. duo.



SIT viciſſim cubo lateris A, conſtruenda ſphęra æqualis: [g] Sphæræ diametri A, fiat æqualis cubus lateris B, atq; duabus rectis B, A, inueniatur tertia proportionalis C. Dico ſphæram diametri C, æqualem eſſe dato cubo lateris A. [h] Nam vt cubus lateris B, ad cubum lateris A; ita eſt cubus lateris A, ad cubum lateris C. Vt autem cub[o] lateris A, ad cubum lateris C; ita eſt ſphæra diametri A, ad ſphæram diametri C; [i] quod vtraq; proportio triplicata ſit proportionis A, ad C. Igitur erit quoq;, vt cubus lateris B, ad cubū lateris A, ita ſphæra diametri A, ad ſphæram diametri C. Eſt autem cubus lateris B, per conſtructionem, æqualis ſphærę diametri A. [k] Igitur & cubus lateris A, æqualis eſt ſphærę diametri C, quod eſt propoſitum.

COROL-

COROLLARIVM. I.

a 25 ſexti. b 2. coroll. 7. duodec. c 40. huius d 36. huius

QVIA vero [a] ſi baſi cubi fiat æqualis figura quotcunque laterum, ſiue ea regularis ſit, ſiue non; & ſupra hanc figuram erigatur ſolidum rectangulum ad altitudinem cubi, [b] ſolidum hoc cubo eſt æquale, ſit vt ſphæræ datæ conſtrui poſſit æquale ſolidum rectangulum ſupra baſem quotlibet angulorum; [c] ſi nimirū prius conſtruatur cubus æqualis: deinde huic cubo ſolidum rectangulū æquale, vt proxime dictum eſt. [d] Item quia cuicunque priſmati pyramis conſtrui poteſt æqualis; ſi cubo, qui ſphæræ eſt æqualis, tanquam priſmati, fiat pyramis æqualis; erit quoq; eadem pyramis ſphæræ æqualis [e] Immo quoniam cuilibet cylindro conus fieri poteſt æqualis: ſi cylindrus extruatur ſphæræ æqualis, ſupra baſem videlicet maximo circulo in ſphæra æqualem, & cuius altitudo contineat $\frac{2}{3}$. diametri, vt ad initium huius propoſ. oſtendimus: Deinde huic cylindro conus æqualis; conſtitutus erit conus quoque datæ ſphæræ æqualis.

e 36. huius

VICISSIM [f] quia cuilibet priſmati conſtrui poteſt cubus æqualis: [g] Si huic cubo fiat æqualis ſphæra, erit eadem hæc ſphæra conſtituta æqualis dato priſmati ſupra baſem quotcunq; angulorum.

f 37. huius g 40. huius

COROLLARIVM. II.

a 2. coroll. 36. huius. b 38. huius

QVIN etiam colligitur, poſſe ſphæram conſtrui æqualem cuilibet corpori regulari. Nam de cubo quidem oſtenſum eſt hac propoſ. 40. De Tetraedro vero, ſiue Pyramide regulari patet. Nam ſi Pyramidi [a] fiat Parallelepipedum æquale: [b] Et huic parallelepipedo cubus æqualis; Ac tandem huic cubo fabricetur ſphæra æqualis; erit eadem hæc ſphæra Tetraedro, ſiue pyramidi regulari æqualis. De Octaedro autem, Icoſaedro, & Dodecaedro ita res peragetur. Si omnibus baſibus corporis regularis fiat quadratum æquale, per ea, quæ ad finem lib. 2. Eucl. vel potius per ea, quæ lib. 4. huius Geometriæ cap. 4. Num. 4. tradidimus; & ſuper hoc quadratum fiat pyramis habens altitudinem æqualem perpendiculari è centro corporis ad quamlibet baſem ductæ, hoc eſt, altitudini vnius pyramidis ex ijs, in quas corpus diuiditur è centro: [c] Erit hęc pyramis corpori regulari ęqualis; [d] quippe cum ita ſe habeat tam pyramis hæc quadrilatera ad vnam pyramidē corporis regularis, quam omnes pyramides corporis regularis ad vnam pyramidē, vt baſis illius, vel baſes omnium pyramidū corporis, ad vnam baſem; propterea quod in Octaedro proportio eſt vtrobiq, octupla: In Icoſaedro, vigecupla: Et in Dodecaedro, duodecupla. Quare ſi toti illi pyramidi cubus conſtruatur æqualis, vt paulo ante de Tetraedro dictum eſt: atque huic tandem cubo ſphæra æqualis fabricetur; erit eadem ſphæra illi pyramidi, hoc eſt, corpori regulari æqualis.

c 9. quin. d 6. duod.

PROBL. 27. PROPOS. 41.

DVOBVS aut pluribus cubis vnum cubum æqualem efficere.

SI ſupra baſem ſuperiorem primi cubi, [a] conſtruatur parallelepipedum rectangulū ſecundo cubo æquale, vt fiat vnum parallelepipedum duobus cubis æquale: Et ſupra huius parallelepipedi baſem ſuperiorem aliud parallelepipedum æquale tertio cubo, & ſic deinceps, ſi plures adſint cubi, conſtructum erit parallelepipedum propoſitis cubis æquale. Huic ergo [b] ſi fiat cubus æqualis, factum erit, quod proponitur.

a 39. huius

b 38. huius

SCHOLIVM.

EADEM arte quotlibet figuris ſolidis non cubis, conſtruetur cubus æqualis: [a] ſi nimirum reuocentur ad vnum parallelepipedum, &c.

a 37. huius

PROBL. 28. PROPOS. 42.

DATO cubo, corpus regulare, quod ex quinq; elegeris, æquale conſtruere.

SIT datus cubus, cuius latus A, cui verbi gratia conſtruendum ſit æquale Dodecaedrum. [a] Fiat quotcunque Dodecaedrum, cuius latus B: cui per ea, quæ in 2. coroll. præcedentis propoſ. dicta ſunt, fiat ęqualis cubus, cuius latus C. [b] Et tribus lateribus C, A, B, reperiatur quarta proportionalis D. Dico Dodecaedrum ſupra latus D, conſtructum, æquale eſſe dato cubo lateris A. Quoniam enim, vt ex demonſtratione propoſ. 37. lib. 11. Euclid. patet, ita eſt cubus lateris C, ad cubum lateris A, vt Dodecaedrum lateris B, ad Dodecaedrum lateris D: Eſt autem per cōſtructionem, cubus lateris C, æqualis Dodecaedro lateris B; [c] erit quoque cubus lateris A, Dodecaedro lateris D, æqualis, quod eſt propoſitum.

C. A. B. D.

a 27. tertij decimi.

b 12. ſexti.

c 14. quin.

PROBL. 29. PROPOS. 43.

EX maiori cubo detrahere minorem, reſiduoque cubum æqualem exhibere.

SVPRA baſem maioris cubi [a] conſtruatur parallelepipedum cubo minori ęquale. Et ex latere cubi maioris abſcindatur recta æqualis altitudini conſtructi parallelepipedi. Si n. per punctū abſciſſionis ducatur planū

a 39 huius

T baſibus

basibus cubi parallelum, detractum erit parallelepipedum parallelepipedo constructo æquale, cum habeat eandem basem & altitudinem cum illo hoc est, minori cubo æquale. [a] Si igitur reliquo parallelepipedo fiat cubus æqualis, factum erit, quod proponitur.

a 38. huius

SCHOLIVM.

IDEM fieri potest in alijs figuris solidis; [a] si prius reducantur ad parallelepipeda rectangula, quando non sunt parallelepipeda. [b] & deinde parallelepipeda ad cubos, &c.

a 1. & 2. coroll. 36. huius. b 38. huius

PROBL. 30. PROPOS. 44.

DATIS duabus, aut pluribus sphæris, sphæram vnam æqualem constituere.

SPHÆRIS propositis [a] construantur cubi æquales: [b] His deinde vnus cubus æqualis fiat, qui etiam sphæris datis erit æqualis. [c] Si igitur huic cubo extruatur sphæra æqualis; factum erit, quod iubetur.

a 40. huius b 41. huius c 40. huius

PROBL. 31. PROPOS. 45.

EX maiori sphæra minorem sphæram detrahere, residuoq; sphæram æqualem exhibere.

[a] VTRAQVE sphæra in cubum reuocetur. [b] Detracto deinde minore ex maiore, [c] si residuo sphæra fiat æqualis; factum erit, quod proponitur.

a 40. huius b 43. huius c 40. huius

PROBL. 32. PROPOS. 46.

DATVM cubum, aut parallelepipedum, secundum proportionem datam secare.

SI namque vnum latus in base cubi, aut parallelepipedi secetur secundum datam proportionem, & per punctum sectionis ducatur planum duabus basibus erectis solidi parallelum, diuidēs ipsum solidum in duo parallelepipeda: habebunt hæc parallelepipeda datam proportionem. [a] Habent enim proportionem inter se eandem, quam bases. [b] Cum ergo bases habeant eandem proportionem, quam segmenta lateris secundam datam proportionem diuisi; constat id, quod propositum est.

a 32. vnde b 1. sexti.

SCHOLIVM.

NON aliter prisma quodlibet, aut cylindrus secundum datam proportionem secabitur, si altitudo in datam secetur proportionem, & per punctum sectionis planum ducatur basibus parallelum. Hoc enim secabit [a] tam prisma, [b] quam cylindrum in datam proportionem.

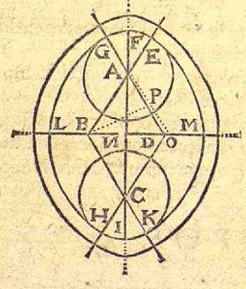
a schol. 14. duodec. b 14. duod.

PROBL. 33. PROPOS. 47.

FIGVRAM Ellipsi simílem, quam ouatam dicunt, circino describere.

LIBET miscellaneorum hunc librum peruulgato illo problemate concludere, quo artifices ope circini describere solent figuram ouatam Ellipsi similem, ita vt nullibi anguli appareant: cum non raro eiusmodi figura à Geometris in suis delineationibus adhibeatur. Docui quidem in lib. 1. nostræ Gnomonicæ in scholio propos. 8. qua ratione vera Ellipsis, quæ conica sectio est, describenda sit: Sed hic similem figuram ex segmentis circulorum constantem describendam proponimus. Ita ergo, vt ex varijs scriptoribus colligitur, agemus. Constituantur duo triangula æquilatera, vel Isoscelia supra basem communem AC, in diuersas partes ABC, ADC. (Æquilatera venustiorem faciunt figuram, vt experientia te docebit) productisque lateribus, describantur ex A, C, duo arcus EFG, HIK, vsque ad latera producta. Si namque ex B, D, per E, K, G, H, alij arcus describantur, [b] tangent hi priores arcus in punctis E, K, G, H: ac proinde illos non secabunt, constitutaq; erit figura ouata.

a 25. prim. b schol 13. tertij.



BENE autem vides, ex eisdem centris A, B, C, D, describi posse varias figuras, prout arcus EFG, HIK, maiores fuerint, aut minores, vt in figura apparet.

QVOD si triangula constituta sint Isoscelia, poterunt latera AB, CB, &c. vel maiora fieri base AC, vel minora. In figura nostra sunt minora.

POTES

POTES etiam, si placet, primo loco ex centris B, D, describere arcus EMK, GLH, ad quodcunque interuallum, pro latitudine figuræ describendæ: deinde ex centris A, C, minores arcus delineare EFG, HIK.

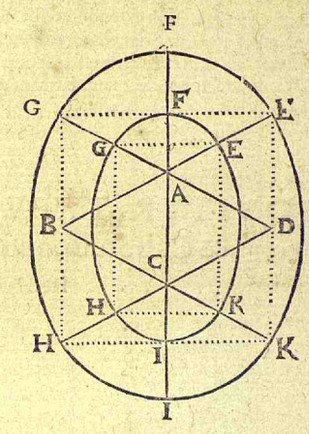
QVIN etiam sine constructione triangulorum idem efficiemus hoc modo. Ductis duabus rectis AC, BD, ad angulos rectos se secantibus in N; sumptisq; æqualibus NA, NC, quantiscunq; pro longitudine figuræ, describantur ex A, C, arcus circulorum EFG, HIK, parui, aut magni, prout desideras extremitates figuræ secundum longitudinem habere angustiores, latioresue. Deinde acceptis alijs duabus rectis æqualib[a] NB, ND, quantiscunque, (quo autem puncta B, D, remotiora fuerint ab N, eo angustior figura euadet: & quo minus remota, eo latior. Sed vsus magister optimus facile docebit, quantæ debeant esse rectæ NB, ND,) ducantur ex B, D, per centra A, C, rectæ secantes priores arcus in E, K, &c. Nam si ex B, D, per puncta EK, &c. alij duo arcus describantur, perfecta erit figura Ellipsi similis.

a 1. post.

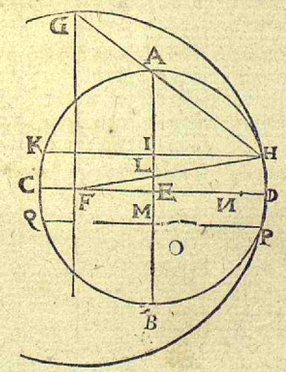
VT autem videas, venustiores figuras describi, si triangula ABC, ADC; sint æquilatera, quæ fere ratio ab artificibus seruari solet, descripsimus hic duas figuras. In minori est latus BA, rectæ AE, duplum, in maiori vero æquale, &c.

Area figuræ ouatæ hic descriptæ.

IAM vero area figuræ ouatæ, beneficio trianguli æquilateri descriptæ, quam artifices non raro expetūt, facile inuenietur, hoc modo. Sector BEK, est sexta pars circuli, cuius semidiameter BE, nota, nimirum latus trianguli æquilateri BEK, quod est in maiori figura duplum lateris AB, assumpti ad libitum: in minori vero sesquialterum est eiusdem lateris AB. Inuenta ergo area illius circuli, vt lib. 4. cap. 7. docuimus, si ex eius sexta parte dematur triangulum æquilaterum BEK, cuius area reperietur per ea, quæ in eodem lib. 4. cap. 2. Num. 5. tradita sunt: reliquum fiet segmentum EK, ac proinde & GH, notū. Item sector AGE, est pars tertia circuli, cuius semidiameter AG, nota, nimirum vel æqualis lateri assumpto AB, vel semissis ipsius. Si igitur ex tertia parte areæ illius circuli auferatur area Isoscelis AGE, quæ reperietur per ea, quæ lib. 4. cap. 2. Num. 4. scripsimus: remanebit segmentum GFE, notum, ideoque & segmentum HIK. Quocirca si quatuor segmentis cognitis adijciatur area rectanguli EGHK, cognita erit area totius figuræ. Cognoscetur autem area huius rectanguli ex doctrina cap. 1. lib. 4. cum latus EK, chorda sit sextæ partis circuli, hoc est, semidiametro æquale: at EF, sit sinus grad. 60. id est, semissis chordæ grad. 120.



VERVM quia hac ratione describi nequit figura ad datam longitudinem, latitudinemque; (quoniam si longitudo eligatur FI, ignotum erit, quanta sit futura latitudo: propterea quod arcus ex B, D, descripti raro transeunt per electa puncta latitudinis: Si vero eligatur latitudo LM, in prima figura, ignorabitur futura longitudo: quippe cum arcus ex A, C, descripti raro etiam per electa puncta longitudinis transeāt: vt perspicuum est.) docebimus cum Ioan. Baptista Benedicto, quo pacto, data tam longitudine, quam latitudine figura Ellipsi similis describenda sit. Sit ergo data longitudo AB, & latitudo CD, quæ se bifariam, & ad rectos angulos secent in E. Ex latitudine CD, abscindatur recta DF, quantacunque vltra E, maior tamen interuallo inter punctum F, & A, extremum longitudinis. Hoc enim nisi fiat, describi non poterit figura ouata. Deinde centro F, & internallo FD, describatur circulus DG, qui necessario vltra punctum A, transibit, quippe cum semidiameter FD, maior posita sit interuallo FA. Ducta autem FG, longitudini AB, parallela secante circulum descriptum in G; ducatur ex G, per A, recta secans eundem circulum in H, puncto, è quo ducatur HIK, latitudini CD, parallela, iungaturque HF, secans AB, longitudinem in L; eruntque FG, FH, æquales è centro F, ad circumferentiam. [a] Et quia triangula HGF, HAL, similia sunt; [b] erit vt GF, ad FH, ita AL, ad LH. Cum ergo GF, ipsi FH, sit æqualis; erit quoque AL, ipsi LH, æqualis. Circulus ergo AH, ex L, per A, descriptus transibit per H, [c] ibique priorem circulum DG, tanget. Si igitur capiatur EO, æqualis ipsi EI, & EM, ipsi EL, ducaturque POQ, per O rectæ CD, parallela, atque ex M, centro, interuallo autem LH, vel MP, circulus PBQ, describatur, tanget hic quoque priorem circulum in P. Si denique sumpta EN, ipsi EF, æquali, describatur ex N, ad interuallum FD, prioris circuli circulus KCQ, tanget hic circulos HAK, PBQ, in K, Q, perfectaque erit figura ouata.



a coroll. 4. sexti. b 4. sexti. c schol. 13. tertij.

SED quia, vt dictum est, constatq; ex descriptione, nisi latitudo CD, tanta sit, vt ex ea abscindi possit recta DF, maior interuallo FA, figura hac ratione describi nequit: adeo vt longitudo, ac latitudo ad libitum assumi non possint; instituetur operatio alio modo, sumpta quacunque longitudine AB, & latitudine CD. Secent se in prima figura longitudo, latitudoq; FI, LM, datæ mutuo bifariam in N, & ad angulos rectos, & sumantur rectæ FA, IC, æquales, & minores semisse latitudinis LN; describanturque ex A, & C, per F, & I, circuli EFG, HIK.

Sumpta deinde MO, ſemidiametro AF, æquali, iungatur OA, ex O, ad centrum A, quam bifariam, & ad angulos rectos in P, ſecet recta PB, ſecans LM, etiam productam, ſi opus eſt, in B. ducaturque BA, vſque ad circulum GFE. Et quoniam duo latera OP, PB, duobus lateribus AP, PB æqualia ſunt, angulóſq; continent rectos, id eſt, æquales: [a] erunt baſes OB, AB, æquales; additiſque æqualibus OM, AE, (ſumpta namq; fuit MO, æqualis ſemidiametro FA, vel IC,) totæ BE, BM, æquales erunt. Deſcriptus ergo circulus ex B, per M, tranſibit per E, [b] ibique circellum GFE tanget. Eodemque modo circellum HIK, tanget. Si igitur ſumpta ND, ipſi NB, æquali, deſcribatur ex D, per L, circulus tangens eoſdem priores circellos in G, H, abſoluta erit figura.

a 4. prim.

b ſchol. 13. tertij.

QVO autem ſemidiameter FA, ſumpta fuerit minor, quam MN, eo certius centrũ B, reperietur, vt liquet.

SCHOLIVM.

ROGATV multorum placet Epilogi loco apponere tabulam quadratorum, & cuborum, qui ex numeris ab 1. vſq; ad 1000. producuntur: propterea quod huiuſce tabulæ multiplex, & inſignis eſt vſus cum in alijs rebus Mathematicis, tum vero maxime in radicibus quadratis, & cubicis ex magnis numeris extrahendis, vt poſt tabulam paucis exponam. Non extendi autem tabulam vltra radicem 1000. contentus radicibus tres figuras nõ ſuperantibus: propterea quod ſi extenderetur vſque ad radicem 10000. vt radices haberentur quatuor figurarum, decies maior tabula conficienda eſſet. Si quis tamen eam extendere volet, inueniet ad finem tabulæ regulas, quibus id facile poſſit exequi. Quamuis quadratorum tabulam Doctiſſimus Maginus in ſua tabula Tetragonica vſque ad radicem. 10000. promouerit.

SEQVITVR TABVLA QVADRATORVM, & Cuborum, quorum radices maiores non ſunt, quam 1000.

TABVLA

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi
1	1	1	61	3721	226981	121	14641	1771561
2	4	8	62	3844	238328	122	14884	1815848
3	9	27	63	3969	250047	123	15129	1860867
4	16	64	64	4096	262144	124	15376	1906624
5	25	125	65	4225	274625	125	15625	1953125
6	36	216	66	4356	287496	126	15876	2000376
7	49	343	67	4489	300763	127	16129	2048383
8	64	512	68	4624	314432	128	16384	2097152
9	81	729	69	4761	328509	129	16641	2146689
10	100	1000	70	4900	343000	130	16900	2197000
11	121	1331	71	5041	357911	131	17161	2248091
12	144	1728	72	5184	373248	132	17424	2299968
13	169	2197	73	5329	389017	133	17689	2352637
14	196	2744	74	5476	405224	134	17956	2406104
15	225	3375	75	5625	421875	135	18225	2460375
16	256	4096	76	5776	438976	136	18496	2515456
17	289	4913	77	5929	456533	137	18769	2571353
18	324	5832	78	6084	474552	138	19044	2628072
19	361	6859	79	6241	493039	139	19321	2685619
20	400	8000	80	6400	512000	140	19600	2744000
21	441	9261	81	6561	531441	141	19881	2803221
22	484	10648	82	6724	551368	142	20164	2863288
23	529	12167	83	6889	571787	143	20449	2924207
24	576	13824	84	7056	592704	144	20736	2985984
25	625	15625	85	7225	614125	145	21025	3048625
26	676	17576	86	7396	636056	146	21316	3112136
27	729	19683	87	7569	658503	147	21609	3176523
28	784	21952	88	7744	681472	148	21904	3241792
29	841	24389	89	7921	704969	149	22201	3307949
30	900	27000	90	8100	729000	150	22500	3375000
31	961	29791	91	8281	753571	151	22801	3442951
32	1024	32768	92	8464	778688	152	23104	3511808
33	1089	35937	93	8649	804357	153	23409	3581577
34	1156	39304	94	8836	830584	154	23716	3652264
35	1225	42875	95	9025	857375	155	24025	3723875
36	1296	46656	96	9216	884736	156	24336	3796416
37	1369	50653	97	9409	912673	157	24649	3869893
38	1444	54872	98	9604	941192	158	24964	3944312
39	1521	59319	99	9801	970299	159	25281	4019679
40	1600	64000	100	10000	1000000	160	25600	4096000
41	1681	68921	101	10201	1030301	161	25921	4173281
42	1764	74088	102	10404	1061208	162	26244	4251528
43	1849	79507	103	10609	1092727	163	26569	4330747
44	1936	85184	104	10816	1124864	164	26896	4410944
45	2025	91125	105	11025	1157625	165	27225	4492125
46	2116	97336	106	11236	1191016	166	27556	4574296
47	2209	103823	107	11449	1225043	167	27889	4657463
48	2304	110592	108	11664	1259712	168	28224	4741632
49	2401	117649	109	11881	1295029	169	28561	4826809
50	2500	125000	110	12100	1331000	170	28900	4913000
51	2601	132651	111	12321	1367631	171	29241	5000211
52	2704	140608	112	12544	1404928	172	29584	5088448
53	2809	148877	113	12769	1442897	173	29929	5177717
54	2916	157464	114	12996	1481544	174	30276	5268024
55	3025	166375	115	13225	1520875	175	30625	5359375
56	3136	175616	116	13456	1560896	176	30976	5451776
57	3249	185193	117	13689	1601613	177	31329	5545233
58	3364	195112	118	13924	1643032	178	31684	5639752
59	3481	205379	119	14161	1685159	179	32041	5735339
60	3600	216000	120	14400	1728000	180	32400	5832000

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati.	Cubi
181	32761	5929741
182	33124	6028568
183	33489	6128487
184	33856	6229504
185	34225	6331625
186	34596	6434856
187	34969	6539203
188	35344	6644672
189	35721	6751269
190	36100	6859000
191	36481	6967871
192	36864	7077888
193	37249	7189057
194	37636	7301384
195	38025	7414875
196	38416	7529536
197	38809	7645373
198	39204	7762392
199	39601	7880599
200	40000	8000000
201	40401	8120601
202	40804	8242408
203	41209	8365427
204	41616	8489664
205	42025	8615125
206	42436	8741816
207	42849	8869743
208	43264	8998912
209	43681	9129329
210	44100	9261000
211	44521	9393931
212	44944	9528128
213	45369	9663597
214	45796	9800344
215	46225	9938375
216	46656	10077696
217	47089	10218313
218	47524	10360232
219	47961	10503459
220	48400	10648000
221	48841	10793861
222	49284	10941048
223	49729	11089567
224	50176	11239424
225	50625	11390625
226	51076	11543176
227	51529	11697083
228	51984	11852352
229	52441	12008989
230	52900	12167000
231	53361	12326391
232	53824	12487168
233	54289	12649337
234	54756	12812904
235	55225	12977875
236	55696	13144256
237	56169	13312053
238	56644	13481272
239	57121	13651919
240	57600	13824000
241	58081	13997521
242	58564	14172488
243	59049	14348907
244	59536	14526784
245	60025	14706125
246	60516	14886936
247	61009	15069223
248	61504	15252992
249	62001	15438249
250	62500	15625000
251	63001	15813251
252	63504	16003008
253	64009	16194277
254	64516	16387064
255	65025	16581375
256	65536	16777216
257	66049	16974593
258	66564	17173512
259	67081	17373979
260	67600	17576000
261	68121	17779581
262	68644	17984728
263	69169	18191447
264	69696	18399744
265	70225	18609625
266	70756	18821096
267	71289	19034163
268	71824	19248832
269	72361	19465109
270	72900	19683000
271	73441	19902511
272	73984	20123648
273	74529	20346417
274	75076	20570824
275	75625	20796875
276	76176	21024576
277	76729	21253933
278	77284	21484952
279	77841	21717639
280	78400	21952000
281	78961	22188041
282	79524	22425768
283	80089	22665187
284	80656	22906304
285	81225	23149125
286	81796	23393656
287	82369	23639903
288	82944	23887872
289	83521	24137569
290	84100	24389000
291	84681	24642171
292	85264	24897088
293	85849	25153757
294	86436	25412184
295	87025	25672375
296	87616	25934336
297	88209	26198073
298	88804	26463592
299	89401	26730899
300	90000	27000000
301	90601	27270901
302	91204	27543608
303	91809	27818127
304	92416	28094464
305	93025	28372625
306	93636	28652616
307	94249	28934443
308	94864	29218112
309	95481	29503629
310	96100	29791000
311	96721	30080231
312	97344	30371328
313	97969	30664297
314	98596	30959144
315	99225	31255875
316	99856	31554496
317	100489	32855013
318	101124	32157432
319	101761	32461759
320	102400	32768000
321	103041	33076161
322	103684	33386248
323	104329	33698267
324	104976	34012224
325	105625	34328125
326	106276	34645976
327	106929	34965783
328	107584	35287552
329	108241	35611289
330	108900	35937000
331	106561	36264691
332	110224	36594368
333	110889	36926037
334	111556	37259704
335	112225	37595375
336	112896	37933056
337	113569	38272753
338	114244	38614472
339	114921	38958219
340	115600	39304000
341	116281	39651821
342	116964	40001688
343	117649	40353607
344	118336	40707584
345	119025	41063625
346	119716	41421736
347	120409	41781923
348	121104	42144192
349	121801	42508549
350	122500	42875000
351	123201	43243551
352	123904	43614208
353	124609	43986977
354	125316	44361864
355	126025	44738875
356	126736	45118016
357	127449	45499293
358	128164	45882712
359	128881	46268279
360	129600	46656000

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati.	Cubi
361	130321	47045881
362	131044	47437928
363	131769	47832147
364	132496	48228544
365	133225	48627125
366	133956	49027896
367	134689	49430863
368	135424	49836032
369	136161	50243409
370	136900	50653000
371	137641	51064811
372	138384	51478848
373	139129	51895117
374	139876	52313624
375	140625	52734375
376	141376	53157376
377	142129	53582633
378	142884	54010152
379	143641	54439939
380	144400	54872000
381	145161	55306341
382	145924	55742968
383	146689	56181887
384	147456	56623104
385	148225	57066625
386	148996	57512456
387	149769	57960603
388	150544	58411072
389	151321	58863869
390	152100	59319000
391	152881	59776471
392	153664	60236288
393	154449	60698457
394	155236	61162984
395	156025	61629875
396	156816	62099136
397	157609	62570773
398	158404	63044792
399	159201	63521199
400	160000	64000000
401	160801	64481201
402	161604	64964808
403	162409	65450827
404	163216	65939264
405	164025	66430125
406	164836	66923416
407	165649	67419143
408	166464	67917312
409	167281	68417929
410	168100	68921000
411	168921	69426531
412	169744	69934528
413	170569	70444997
414	171396	70957944
415	172225	71473375
416	173056	71991296
417	173889	72511713
418	174724	73034632
419	175561	73560059
420	176400	74088000
421	177241	74618461
422	178084	75151448
423	178929	75686967
424	179776	76225024
425	180625	76765625
426	181476	77308776
427	182329	77854483
428	183184	78402752
429	184041	78953589
430	184900	79507000
431	185761	80062991
432	186624	80621568
433	187489	81182737
434	188356	81746504
435	189225	82312875
436	190096	82881856
437	190969	83453453
438	191844	84027672
439	192721	84604519
440	193600	85184000
441	194481	85766121
442	195364	86350888
443	196249	86938307
444	197136	87528384
445	198025	88121125
446	198916	88716536
447	199809	89314623
448	200704	89915392
449	201601	90518849
450	202500	91125000
451	203401	91733851
452	204304	92345408
453	205209	92959677
454	206116	93576664
455	207025	94196375
456	207936	94818816
457	208849	95443993
458	209764	96071912
459	210681	96702579
460	211600	97336000
461	212521	97972181
462	213444	98611128
463	214369	99252847
464	215296	99897344
465	216225	100544625
466	217156	101194696
467	218089	101847563
468	219024	102503232
469	219961	103161709
470	220900	103823000
471	221841	104487111
472	222783	105154048
473	223729	105823817
474	224676	106496424
475	225625	107171875
476	226576	107850176
477	227529	108531333
478	228484	109215352
479	229441	109902239
480	230400	110592000
481	231361	111284641
482	232324	111980168
483	233289	112678587
484	234256	113379904
485	235225	114084125
486	236196	114791256
487	237169	115501303
488	238144	116214272
489	239121	116930169
490	240100	117649000
491	241081	118370771
492	242064	119095488
493	243049	119823157
494	244036	120553784
495	245025	121287375
496	247016	122023936
497	247009	122763473
498	248004	123505992
499	249001	124251499
500	250000	125000000
501	251001	125751501
502	252004	126506008
503	253009	127263527
504	254016	128024064
505	255025	128787625
506	256036	129554216
507	257049	130323843
508	258064	131096512
509	259081	131872229
510	260100	132651000
511	261121	133432831
512	262144	134217728
513	263169	135005697
514	264196	135796744
515	265225	136590875
516	266256	137388096
517	267289	138188413
518	268324	138991832
519	269361	139798359
520	270400	140608000
521	271441	141420761
522	272484	142236648
523	273529	143055667
524	274576	143877824
525	275625	144703125
526	276676	145531576
527	277729	146363183
528	278784	147197952
529	279841	148035889
530	280900	148877000
531	281961	149721291
532	283024	150568768
533	284089	151419437
534	285156	152273304
535	286225	153130375
536	287296	153990656
537	288369	154854153
538	289444	155720872
539	290521	156590819
540	291600	157464000

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati.	Cubi
541	292681	158340421
542	293764	159220088
543	294849	160103007
544	295936	160989184
545	297025	161878625
546	298116	162771336
547	299209	163667323
548	300304	164566592
549	301401	165469149
550	302500	166375000
551	303601	167284151
552	304704	168196608
553	305809	169112377
554	306916	170031464
555	308025	170953875
556	309136	171879616
557	310249	172808693
558	311364	173741112
559	312481	174676879
560	313600	175616000
561	314721	176558481
562	315844	177504328
563	316969	178453547
564	318096	179406144
565	319225	180362125
566	320356	181321496
567	321489	182284263
568	322624	183250432
569	323761	184220009
570	324900	185193000
571	326041	186169411
572	327184	187149248
573	328329	188132517
574	329476	189119224
575	330625	190109375
576	331776	191102976
577	332929	192100033
578	334084	193100552
579	335241	194104539
580	336400	195112000
581	337561	196122941
582	338724	197137368
585	339889	198155287
584	341056	199176704
585	342225	200201625
586	343396	201230056
587	344569	202262003
588	345744	203297472
589	346921	204336469
590	348100	205379000
591	349281	206425071
592	356464	207474688
593	351649	208527857
594	352836	209584584
595	354025	210644875
596	355216	211708736
597	356409	212776173
598	357604	213847192
599	358801	214921799
600	360000	216000000
601	361201	217081801
602	362404	218167208
603	363609	219256227
604	364816	220348864
605	366025	221445125
606	367236	222545016
607	368449	223648543
608	369664	224755712
609	370881	225866529
610	372100	226981000
611	373321	228099131
612	374544	229220928
613	375769	230346397
614	376996	231475544
615	378225	232608375
616	379456	233744896
617	380689	234885113
618	381924	236029032
619	383161	237176659
620	384400	238328000
621	385641	239483061
622	386884	240641848
623	388129	241804367
624	389376	242970624
625	390625	244140625
626	391876	245314376
627	393129	246491883
628	394384	247673152
629	395641	248858189
630	396900	250047000
631	398161	251239591
632	399424	252435968
633	400689	253636137
634	401956	254840104
635	403225	256047875
636	404496	257259456
637	405769	258474853
638	407044	259694072
639	408321	260917119
640	409600	262144000
641	410881	263374721
642	412164	264609288
643	413449	265847707
644	414736	267089984
645	416025	268336125
646	417316	269586136
647	418609	270840023
648	419904	272097792
649	421201	273359449
650	422500	274625000
651	423801	275894451
652	425104	277167808
653	426409	278445077
654	427716	279726264
655	429025	281011375
656	430336	282300416
657	431649	283593393
658	432964	284890312
659	434281	286191179
660	435600	287496000
661	436921	288804781
662	438244	290117528
663	439569	291434247
664	440896	292754944
665	442225	294079625
666	443556	295408296
667	444889	296740963
668	446224	298077632
669	447561	299418309
670	448900	300763000
671	450241	302111711
672	451584	303464448
673	452929	304821217
674	454276	306182024
675	455625	307546875
676	456976	308915776
677	458329	310288733
678	459684	311665752
679	461041	313046839
680	462400	314432000
681	463761	315821241
682	465124	317214568
683	466489	318611987
684	467856	320013504
685	469225	321419125
686	470596	322828856
687	471969	324242703
688	473344	325660672
689	474721	327082769
690	476100	328509000
691	477481	329939371
692	478864	331373888
693	480249	332812557
694	481636	334255384
695	483025	335702375
696	484416	337153536
697	485809	338608873
698	487204	340068392
699	488601	341532099
700	496000	343000000
701	491401	344472101
702	492804	345948408
703	494209	347428927
704	495616	348913664
705	497025	350402625
706	498436	351895816
707	499849	353393243
708	501264	354894912
709	502681	356400829
710	504100	357911000
711	505521	359425431
712	506944	360944128
713	508369	362467097
714	509796	363994344
715	511225	365525875
716	512656	367061696
717	514089	368601813
718	515524	370146232
719	516961	371694959
720	518400	373248000

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati.	Cubi
721	519841	374805361
722	521284	376367048
723	522729	377933067
724	524176	379503424
725	525625	381078125
726	527076	382657176
727	528529	384240583
728	529984	385828352
729	531441	387420489
730	532900	389017000
731	534361	390617891
732	535824	392223168
733	537289	393832837
734	538756	395446904
735	540225	397065375
736	541696	398688256
737	543169	400315553
738	544644	401947272
739	546121	403583419
740	547600	405224000
741	549081	406869021
742	550564	408518488
743	552049	410172407
744	553536	411830784
745	555025	413493625
746	556516	415160936
747	558009	416832723
748	559504	418508992
749	561001	420189749
750	562500	421875000
751	564001	423564751
752	565504	425259008
753	567009	426957777
754	568516	428661064
755	570025	430368875
756	571536	432081216
757	573049	433798093
758	574564	435519512
759	576081	437245479
760	577600	438976000
761	579121	440711081
762	580644	442450728
763	582169	444194947
764	583696	445943744
765	585225	447697125
766	586756	449455096
767	588289	451217663
768	589824	452984832
769	591361	454756609
770	592900	456533000
771	594441	458314011
772	595984	460099648
773	597529	461889917
774	590076	463684824
775	600625	465484375
776	602176	467288576
777	603729	469097433
778	605284	470910952
779	606841	472729139
780	608400	474552000
781	609961	476379541
782	611524	478211768
783	613089	480048687
784	614656	481890304
785	616225	483736625
786	617796	485587656
787	619369	487443403
788	620944	489303872
789	622521	491169069
790	624100	493039000
791	625681	494913671
792	627264	496793088
793	628849	498677257
794	630436	500566184
795	632025	502459875
796	633616	504358336
797	635209	506261573
798	636804	508169592
799	638401	510082399
800	640000	512000000
801	641601	513922401
802	643204	515849608
803	644809	517781627
804	646416	519718464
805	648025	521660125
806	649636	523606616
807	651249	525557943
808	652864	527514112
809	654481	529475129
810	656100	531441000
811	657721	533411731
812	659344	535387328
813	660969	537367797
814	662596	539353144
815	664225	541343375
816	665856	543338496
817	667489	545338513
818	669124	547343432
819	670761	549353259
820	672400	551368000
821	674041	553387661
822	675684	555412248
823	677329	557441767
824	678976	559476224
825	680625	561515625
826	682276	563559976
827	683929	565609283
828	685584	567663552
829	687241	569722789
830	688900	571787000
831	690561	573856191
832	692224	575930368
833	693889	578009537
834	695556	580093704
835	697225	582182875
836	698896	584277056
837	700569	586376253
838	702244	588480472
839	703921	590589719
840	705600	592704000
841	707281	594823321
842	708964	596947688
843	710649	599077107
844	712336	601211584
845	714025	603351125
846	715716	605495736
847	717409	607645423
848	719104	609800192
849	720801	611960049
850	722500	614125000
851	724201	616295051
852	725904	618470208
853	727609	620650477
854	729316	622835864
855	731025	625026375
856	732736	627222016
857	734449	629422793
858	736164	631628712
859	737881	633839779
860	739600	636056000
861	741321	638277381
862	743044	640503928
863	744769	642735647
864	746496	644972544
865	748225	647214625
866	749956	649461896
867	751689	651714363
868	753424	653972032
869	755161	656234909
870	756900	658503000
871	758641	660776311
872	760384	663054848
873	762129	665338617
874	763876	667627624
875	765625	669921875
876	767376	672221376
877	769129	674526133
878	770884	676836152
879	772641	679151439
880	774400	681472000
881	776161	683797841
882	777924	686128968
883	779689	688465387
884	781456	690807104
885	783225	693154125
886	784996	695506456
887	786769	697864103
888	788544	700227072
889	790321	702595369
890	792100	704969000
891	793881	707347971
892	795664	709732288
893	797449	712121957
894	799236	714516984
895	801025	716917375
896	802816	719323136
897	804609	721734273
898	806404	724150792
899	808201	726572699
900	810000	729000000

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadratus.	Cubi
901	811801	731432701
902	813604	733870808
903	815409	736314327
904	817216	738763264
905	819025	741217625
906	820836	743677416
907	822649	746142643
908	824464	748613312
909	826281	751089429
910	828100	753571000
911	829921	756058031
912	831744	758550528
913	833569	761048497
914	835396	763551944
915	837225	766060875
916	839056	768575296
917	840889	771095213
918	842724	773620632
919	844561	776151559
920	846400	778688000
921	848241	781229961
922	850084	783777448
923	851929	786330467
924	853776	788889024
925	855625	791453125
926	857476	794022776
927	859329	796597983
928	861184	799178752
929	863041	801765089
930	864900	804357000
931	866761	806954491
932	868624	809557568
933	870489	812166237
934	872356	814780504
935	874225	817400375
936	876096	820025856
937	877969	822656953
938	879844	825293672
939	881721	827936019
940	883600	830584000
941	885481	833237621
942	887364	835896888
943	889249	838561807
944	891136	841232384
945	893025	843908625
946	894916	846590536
947	896809	849278213
948	898704	851971392
949	900601	854670349
950	902500	857375000
951	904401	860085351
952	906304	862801408
953	908209	865523177
954	910116	868250664
955	912025	870983875
956	913936	873722816
957	915849	876467493
958	917764	879217912
959	919681	881974079
960	921600	884736000
961	923521	887503681
962	925444	890277128
963	927369	893056347
964	929296	895841344
965	931225	898632125
966	933156	901428696
967	935089	904231063
968	937024	907039232
969	938961	909853209
970	940900	912673000
971	942841	915498611
972	944784	918330048
973	946729	921167317
974	948676	924010424
975	950625	926859375
976	952576	929714176
977	954529	932574833
978	956484	935441352
979	958441	938313739
980	960400	941192000
981	962361	944076141
982	964324	946966168
683	966289	949862087
984	968256	952763904
985	970225	955671625
986	972196	958585256
987	974169	961504803
988	976144	964430272
989	978121	967361669
990	980100	970299000
991	982081	973242271
992	984064	976191488
993	986049	979146657
994	988036	982107784
995	990025	985074875
996	992016	988047936
997	994009	991026973
998	996004	994011992
999	998001	997002999
1000	1000000	1000000000

DE DIF-

DE DIFFERENTIIS QVADRATORVM ET Cuborum, & de continuatione tabulæ eorundem.

Differentia quadratorũ.

QVONIAM quadrati numeri creantur per continuam additionem numerorum imparium, vt Arithmetici demonstrant: fit vt differentia inter quemlibet quadratum, & proxime insequentem sit dupla radicis minoris; addita insuper vnitate. Itaque duobus modis tabula quadratorum componi potest, & continuari. Vno modo si omnes numeri impares ordine ponantur, initio sumpto ab 1. Nam 1. dat primum quadratum 1. Et ex 1. & 3. fit secundus 4. cui si addatur sequens impar 5. fit tertius 9. & si addatur impar sequens 7. fit quartus quadratus 16. atque ita deinceps. Habet autem quilibet quadratus radicem tot vnitatum, quot numeri impares ipsum conficiunt. Vt quia solus impar 1. dat primum quadratum 1. propterea eius radix est 1. Deinde quia duo impares 1. & 3. conficiunt secundum quadratum 4. erit eius radix 2. Sic quia duodecim numeri impares 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21. 23. componunt quadratum 144. erit eius radix 12. & sic de cæteris. Atque in hunc modum si semper sequens numerus impar adiiciatur ad quadratum præcedentem, conflatur sequens numerus quadratus, continuabiturque tabula in infinitum: si tamẽ prius series numerorum imparium continuetur. Radices serie numerorum naturali progrediuntur.

Numeri impares	Quadrati.	Radices
1	1	1
3	4	2
5	9	3
7	16	4
9	25	5
11	36	6
13	49	7
15	64	8
17	81	9
19	100	10
21	121	11
23	144	12

Compositio tabulæ quadratorum.

ALIO modo condi poterit tabula quadratorum, & in infinitum continuari, sine numerorum imparium serie, si omnes radices ponantur ordine, vt in tabula vides. Cum enim primus quadratus sit 1. cuius radix 1. si hæc radix duplicata, addita insuper 1. addatur primo quadrato 1. fit secundus 4. cuius radix 2. Hæc duplicata, & insuper addita 1. si adiiciatur secundo quadrato 4. fit tertius 9. cuius radix 3. quæ duplicata, & insuper addita 1. facit 7. Si igitur addantur 7. ad quadratum 9. fit quartus quadratus 16. & sic in infinitum.

Generatio cuborum.

NVMERI autem cubi gignuntur quoque ex additione numerorum imparium, hoc modo. Descripta serie imparium numerorum ab 1. incipientium, primus 1. dat primum cubum 1. cuius radix 1. Duo deinde sequentes 3. 5. coaceruati præbent secundum cubum 8. cuius radix 2. Tres insequentes 7. 9. 11. exhibent tertium cubum 27. cuius radix 3. Atque eundem in modum sequẽtes quatuor impares conficient quartum cubum, & insequentes quinque quintum, & sic deinceps in infinitum. Quilibet autem cubus radicem habet tot vnitatum quot impares numeri coaceruati ipsum componunt.

Numeri impares	Cubi	Radices
1	1	1
3		
5	8	2
7		
9		
11	27	3
13		
15		
17		
19	64	4
21		
23		
25		
27		
29	125	5

PRODVCITVR quoque cubus cuiuscunque radicis, si ea radix in suum quadratum ducatur. Vt cubus radicis 16. est 4096. genitus ex radice 16. multiplicata in 256. quadratum eiusdem radicis.

Differentia cuborũ quomodo reperiantur.

VERVM quia permolestum est, tam seriem numerorum imparium in tot terminis continuare, vt ex eorum additione omnes cubi generentur, vt dictum est, quam radices omnes per suos quadratos multiplicare: obseruauit Ioan. Baptista Villalpandus nostræ Societatis sacerdos Theologus, ac Mathematicus egregius, cuius eruditionis in rebus Mathematicis specimen præclarum extat in apparatu Vrbis, ac Templi Hierosolymitani, præsertim vero in multiplici duarum mediarum proportionalium inter duas rectas inuentione; obseruauit inquam pulcherrimam proprietatem cuborum numerorum, per quam differentiæ cuborum ordine sine magna difficultate reperiuntur, quæ postea ordine ad cubos præcedentes additæ conficiunt cubos insequentes. Res autem sic se habet. In columna sinistra scribatur progressio Arithmetica, quæ à 6. incipiat, & per 6. progrediatur. In secunda columna reponantur numeri, qui ex numeris primæ columnæ componuntur hac arte. Iuxta 6. ponatur 1. Deinde 7. qui numerus ex 1. & 6. conflatur. Post hæc numerus 19. ex 7. & 12. coaceruatus. Atque ita deinceps quilibet bini numeri primæ, ac secundæ columnæ simul additi

Constructio tabulæ cuborum.

consi-

conficient numerum inferiorem in ſecunda columna. In tertia deinde columna collocentur omnes cubi, qui per continuam additionem numerorum ſecundæ columnæ, quæ quidem differentias cuborum continet, colliguntur hac ratione. Primus cubus eſt 1. cui ſi addas ſequentem differentiam 7. facies ſecundum cubum 8. & addendam differentiam ſequentem 19. conflabis tertium cubum 27. & ita deinceps. Semper enim in tabella

Progreſſio ſenarij	Differẽtiæ cuborum	Cubi	Radices
6	1	1	1
12	7	8	2
18	19	27	3
24	37	64	4
30	61	125	5
36	91	216	6
42	127	343	7
48	169	512	8
54	217	729	9
60	271	1000	10
66	331	1331	11
72	397	1728	12
78	469	2197	13
84	547	2744	14
90	631	3375	15
96	721	4096	16

appoſita iuxta quemlibet cubum ponitur differentia, qua à præcedenti cubo differt. In quarta denique columna ſcribantur ordine cuborum radices.

EÆDEM differentiæ cuborum in ſecunda columna deſcriptæ inuenientur quoque hoc modo. Radicis propoſitæ quadratum triplicetur, addaturque radix triplicata, atque inſuper 1. Conflatus enim numerus erit differentia, qua cubus propoſitæ radicis ab inſequenti cubo differt. Vt ſi deſideretur differentia inter cubum 216. radicis 6. & cubum proxime maiorem. Quadratum radicis 6. eſt 36. triplum eius eſt 108. cui ſi addatur triplũ radicis, videlicet 18. & inſuper vnitas, conflabitur differẽtia 127. quæſita. Atq; hoc modo, ſi continuentur differentiæ cuborũ ope progreſſionis ſenarij, extendetur tabula cuborum, quantum libuerit. Sunt autem, vt vides, numeri progreſſionis ſenarij ſextupli radicum cuborum, ſinguli ſingularum. Vt 60. ſextuplus eſt radicis 10.

QVIA vero diximus, cubos gigni ex additione numerorũ imparium, nimirũ primum eſſe 1. ſecundum ex duobus ſequentibus 3. 5. confici, & tertium ex tribus ſequentibus 7. 9. 11. &c. ita vt quilibet ex tot imparibus coaceruetur, quot vnitates in eius radice continentur; ſi curioſus quiſpiam noſſe deſideret, (quod ſcire non iniucundum eſt) quinam ſint illi numeri impares propoſitum cubum componentes, hoc eſt, à quonam impari illi impares incipiant, & in quo deſinant, conſequetur id hoc artificio. Radix propoſiti cubi, ſi impar eſt, multiplicetur per ſemiſſem numeri proxime minoris, & duplo producti addatur 1. Numerus enim conflatus erit primus imparium quæſitorum. Quod ſi radix fuerit par, ducatur eius ſemiſſis in numerum proxime minorem radice. & duplo producti adiiciatur 1. Rurſus enim primus imparium, qui quæruntur, conficietur. Exempli gratia. Propoſitus ſit cubus 125. cuius radix 5. ac proinde ex quinque numeris imparibus coaceruatus. Duco radicem 5. quia eſt impar, in 2. ſemiſſem numeri 4. proxime minoris, efficioque 10. duplico. fiunt 20. & addita 1. fit primus imparium 21. Ergo quinque impares quæſiti ſunt. 21. 23. 25. 27. 29. qui in vnam ſummam collecti conſtituunt cubum 125. Rurſus datus ſit cubus 1728. cuius radix 12. ideoque ex 12. imparibus numeris coagmentatus, Semiſſem radicis, quia par eſt, nimirum 6. duco in 11. numerum proxime minorem radice, numerumque productum 66. duplico, addoque 1. Numerus enim compoſitus 133. erit primus 12. imparium, quos quærimus. Ergo omnes 12. erunt hi. 133. 135. 137. 139. 141. 143. 145. 147. 149. 151. 153. 155. conficientes cubum 1728.

Qui numeri impares datum cubum componant.

REGVLA hæc ſic demonſtratur. Quando radix impar per ſemiſſem numeri proxime minoris multiplicatur, vel ſemiſſis radicis paris per numerũ proxime minorem radice, producitur ſumma terminorũ ſerici naturalis numerorum ab 1. vſque ad numerum proxime minorẽ radice, vt in progreſſione Arithmetica diximus, hoc eſt, numerus terminorum imparium, qui primum imparem quæſitum præcedunt in ſerie numerorũ imparium; cum primus ſit vnus, deinde ſequantur duo, poſtea tres, &c. Igitur ea ſumma indicat, quotũ locũ occupet impar numerus imparẽ quæſitum antecedens: quia vero is locus duplicat⁹, dempta 1. ex duplo, exhibet vltimum illum imparem, ſi ad eundem duplicatum addatur 1. efficietur primus imparium quæſitorum. Verbi gratia, ſi quæratur primus ſeptem imparium, qui conficiunt cubum 343. cuius radix 7. quærimus primũ ſummam 6. terminorum ſerici naturalis, quæ eſt 21. quod fit, ſi ad 6. addo 1. & ſummam 7. id eſt, radicem imparem, ducam in 3. ſemiſſem 6. terminorũ. Igitur impar numerus præcedens primum quæſitum ponitur in 21. loco. Duplico, addoq; 1. fit primus impar quæſitus 43. Sunt ergo ſeptem quæſiti, 43. 45. 47. 49. 51. 53. 55. qui conſtituunt cubum 343.

ALIO

ALIO modo reperietur primus imparium, & vltimus, & quidem faciliori, hac videlicet arte. Ex quadrato radicis auferatur numerus proxime minor radice, idemque numerus ad eundem quadratum addatur. Reliquus enim numerus erit primus imparium quæſitus, & conflatus, poſtremus. Vt data radice 11. ſi ex eius quadrato 121. demptur numerus 10. proxime minor radice, ſupererit numerus 111. primus imparium. Et ſi ad eundem quadratum 121. adiiciatur idem numerus 10. efficietur vltimus imparium 131. ita vt 11. numeri impares ſint hi 111. 113. 115. 117. 119. 121. 123. 125. 127. 129. 131. qui in vnam ſummam collecti efficiunt cubum 1331. radicis 11. Sic etiam data radice 10. ſi ex eius quadrato 100. tollatur numerus 9. remanebit primus imparium 91. Et ſi ad eundem quadratum 100. addatur idem numerus 9. conficietur vltimus imparium 109. eruntque 10 numeri impares hi 91. 93. 95. 97. 99. 101. 103. 105. 107. 109. quorum ſumma 1000. dabit cubum radicis 10.

RATIO huius regulæ eſt hæc: In numero imparium, qui requiruntur, cõtinetur differentia imparium, videlicet binarius, toties, quoties vnitas eſt in numero, qui proxime minor eſt data radice, vt perſpicuum eſt. Et quoniam quando radix eſt impar, numerus impar in medio loco numerorum imparium eſt quadratus radicis, quem præcedit ſemiſſis differentiarum vſque ad primum imparem, hoc eſt, numerus proxime minor radice eandemque ſemiſſis illum inſequitur. Quam ob rem, ſi ex illo quadrato demptur numerus proxime minor radice, id eſt, ſemiſſis differentiarum, reliquus fiet primus impar quæſitus. Et ſi idem numerus proxime minor radice ad illum quadratum adiiciatur, conflabitur vltimus numerus impar. Quando vero radix eſt par, cadit eius quadratus inter duos impares, qui medium locum occupant, quem quadratum præcedit ſemiſſis quoque differentiarum vſque ad primum imparem, hoc eſt, numerus proxime minor radice, &c.

HINC etiam facile reperiemus quotumcunque imparium numerorum, vt quartum, vel nonum, &c. Si enim differentiam imparium, nimirum 2. ducemus in numerum proxime minorem impare quæſito, & producto primum imparem adiiciemus, conflabitur quæſitus numerus impar. Vt ſi in exemplo poſteriore decem imparium quæratur ſeptimus impar, ducemus 2. in 6. & productum 12. ad primum 91. adiiciemus, procreabimuſq; ſeptimum imparem 103. & ſic de cæteris.

SED vt certi ſimus, quãdo radix eſt magna, num primus imparium recte ſit inuentus, ne cogamur omnes impares continuare, quod laborioſum eſt, inueſtigabimus vltimum ex primo (niſi ex ſecunda regula iam inuentus ſit) deinde ſummam omnium, hoc modo. Differentiam progreſſionis numerorum imparium, nimirum 2. ducemus in numerum terminorum, minus vno, productumque primo inuento addemus: Conflatus enim numerus erit poſtremus imparium quæſitorum. Si igitur ad hunc apponamus primum, & ſummæ ſemiſſem in numerum terminorum, id eſt, in radicem cubi propoſiti ducamus, producetur propoſitus cubus, ſi primus imparium recte inuentus eſt. Vt in proximo cubo 343. cuius radix 7. ſi ad 43. primum imparem inuentũ addamus 12. numerum ſcilicet productum ex 2. in radicem 7. minus vno, fit ſeptimus numerus impar quæſitus 55 ad quem ſi apponatur primus 43. fiunt 98. Et ſi huius numeri ſemiſſis 49. ducatur in radicem 7. producetur cubus 343. &c.

ALIA etiam ratione perfacili eoſdem numeros impares datum cubum componentes reperiemus hoc modo. Sit datus cubus 117649. cuius radix 49. ac proinde reperiendi 49. numeri impares, quorum ſumma ſit 117649. Ponamus primum imparem eſſe 1 ℞. id eſt, 1. Radicem (vt in Algebra fieri ſolet.) Et quia differentia numerorum imparium eſt 2. erit ſecundus impar 1℞. † 2. hoc eſt, 1℞. plus 2. tertius 1℞ † 4. Et ne cogamur continuare omnes 49. terminos, ducemus differentiam 2. in 48. numerum terminorum, minus vno, & ad productum 96. addemus primum, quem poſuimus eſſe 1. ℞. Ita enim fiet vltimus terminus quæſitus 1. ℞. † 96. cui ſi addamus primum, videlicet 1℞. fit ſumma 2℞. † 96. cuius ſemiſſis 1℞. † 48. ducta in 49. numerum terminorum, facit numerũ 49 ℞. † 2352. qui æquatur cubo propoſito 117649. Ablatis ergo vtrinque 2355. remanebunt 49. ℞. æquales num. 112297. quo diuiſo per 49. fit Quotiens 2353. pro primo impari quæſito, quod vt probemus, ducemus differẽtiam imparium, nimirum 2. in 48. numerum terminorum, minus vno, productumq; 96. primo 2353. addemus, vt conficiamus vltimum terminum 2449. Deinde primum huic adiiciemus, & ſummæ 4802. ſemiſſem 2401. in 49. numerum terminorum ducemus, procreaturque numerus 117649. qui dato cubo æqualis eſt. Recte ergo primus impar inuentus eſt.

VSVS PRÆCEDENTIS TABVLÆ QVADRATORUM, & cuborum in radicibus extrahendis.

INTER alias vtilitates habet ſuperior tabula quadratorum, & cuborum egregium vſum in radicibus quadratis, & cubicis extrahendis; quippe cum per eam ſtatim expediantur tria prima puncta ad ſiniſtram, ſimulque tres figuræ radicis inueniantur: quod vno, aut altero exemplo planum fiet.

SIT primum extrahenda radix quadrata ex appoſito numero. Primum quæro inter quadratos numerum

1 1 7 6 8 9 0 1 4 5 (3 4 3 0 5.
. . . . . .

117689. trium punctorum, quem quia non inuenio, capio proxime minorem quadratum 117649. eiuſque radicem 343. in Quotiente pono. Inuento autem quadrato ſubtracto ex numero 117689. trium punctorum, remanent 40. Ergo ſequens punctum erit 4001. quo (relicta figura 1.) diuiſo per 686. duplum radicis inuentæ, reperitur Quotiens 0. eritque vltimum punctum 400145. quo (relicta etiam figura 5.) diuiſo per 6860. duplum radicis inuentæ, inuenitur Quotiens 5. Eſt ergo tota radix $34305\frac{671}{686}$.

SIT deinde ex appoſito numero extrahenda radix cubica. Primum inter cubos quæro numerũ 4250954.

4 2 5 0 9 5 4 9 6 1 3 0 7 (1 6 1 9 9
. . . . . .

trium primorum punctorum, quem quia non reperio, accipio cubum proxime minorem 4173281. cum ſua radice 161. qui cubus ex tribus punctis ſubtractus relinquit 77673. ita vt ſequens punctum ſit 77673961.

PARO ergo diuisorem, vt lib. 6. ad finem propos. 19. docuimus, multiplicando radicis inuentæ quadratum ex eadem tabula excerptum, nimirum 25921. per 300. qui erit 7776300. per quem si meum punctum diuido, reperio Quotientem 9. & facta operatione remanent 7295302 adeo vt vltimum punctum sit 7295302307.

DENIQVE paro nouum diuisorem, multiplicando radicis 1619 inuentæ quadratum 2621161 per 300. qui erit 786348300. per quem si vltimum meum punctum diuido, inuenio Quotientem 9. Facta autem operatione, remanent 214232708. absolutaque est extractio,

NEQVE vero negligendum videtur non inutile compendium in extractione cubica, quod est eiusmodi. Quando nouus diuisor parandus est, ne cogamur totius radicis inuentæ quadratum supputare, diuidemus radicem inuentam in duas partes, ita vt vna pars sit vltima figura Quotientis inuenta, nimirum inuenta quarta figura 9. in dato exemplo, partiemur in radicem inuentam 1619. in 1610. & 9. quas partes bis scribemus, vt in appositа formula vides. Si igitur singulas partes in singulas partes ducemus, producetur quadratus quæsitus radicis 1619. vt ad propos. 1. lib. 2. Eucl. demonstrauimus. Verbi gratia quia præcedens quadratum numeri 161. fuit 25921. appositis duabus cifris, habebimus productum 2592100. ex 1610. in 1610. cui si addemus 14490. bis numerum videlicet productum ex 1610. in 9. vel ex 9. in 1610. & insuper 81. productũ ex 9. in 9. conficiemus 2621161. quadratum radicis inuentæ 1619. Eadem ratione si huius numeri 16199. quadratum desideremus, diuidemus eum in 16190. 9. bis, vt in hac formula vides. Deinde quia iam quadratum habuimus 2621161 numeri 1619. appositis duabus cifris, habebimus 262116100. quadratum numeri 16190. cui si addemus 145710. bis, productum videlicet ex 16190. in 9. vel ex 9. in 16190. & insuper 81. productum ex 9. in 9. efficiemus 262497601 quadratum numeri 16199. & sic de cæteris. Hoc ergo compendium reddet faciliorem cubicæ radicis extractionem, cum semper præcedentis radicis inuentæ quadratum habeamus, & appositis duabus cifris, quadratum conficiamus eiusdem radicis, appositа ei vna cifra, &c.

1610. 9
1610. 9
16190. 9.
16190. 9.

BENE autem vides, si tabula superior extenderetur, vt haberentur quadrati, & cubi radicum 4. aut 5. figurarum, multo faciliorem effici extractionem radicum. Sed quia tabula excresceret hac ratione in immensum, contenti fuimus tabula, in qua radices habent 3. figuras ad summum, cum eam quilibet ex iis, quæ diximus, extendere possit, & continuare.

FINIS LIBRI OCTAVI.

INDEX RERVM AC VERBORVM, QVÆ IN HAC GEOMETRIA PRACTICA CONtinentur, in ordinem Alphabeticum digestus.

A.

ACCLIVEM distantiam montis à loco mensoris vsque ad basem altitudinis monti impositæ, etiam nõ visam, vna cum ipsa altitudine, quando mensor in ascensu montis consistit, proper verum, beneficio quadrati efficere cognitam. 91

Accliuem montis ascensum à loco mensoris, vsque ad basem altitudinis monti impositæ, etiam non visam, vna cum ipsa altitudine, quando mensor in ascensu montis consistit prope verum, beneficio quadrantis notum efficere. 60

Aceruus tritici, quo pacto mensuretur. 133

Ædificij cuiuscumque ad perpendiculum erecti, vel putei profunditatem si modo angulus fundi, vel signum aliquod in fundo positum conspiciatur, per quadrantem reperire. 62

Ædificij cuiusuis ad perpẽdiculũ erecti, vel putei profunditatem, si modo angulus fundi, vel signum aliquod in fundo positum conspiciatur, per quadratum efficere cognitam. 92

Æquilateri trianguli area. 100

Agri, campiue, aut vrbis, vel regionis situm in plano describere. 99

Agro proposito figuram similem in charta describere. 112

Alberti Dureri quadratura circuli per numeros falsa est. 188

Aliquotæ partes similes plurium magnitudinum eandem habent proportionem. 137

Altera parte longioris area. 103

Altimetra scala quid. 64

Altitudinem, ad cuius basem pateat accessus beneficio speculi plani, vna cum distantia speculi à cacumine altitudinis deprehendere. 97

Altitudinem, cuius basis imposita sit monti, vel alteri cuipiam altitudini, & vtraque illius extremitas cerni possit, etiamsi infimum punctum alterius, cui imponitur, lateat, & eiusdem puncti infimi distantia à loco mensoris cognita non sit, per quadratum ex valle, aut ex plano Horizontis explorare. 90

Altitudinem cuiuslibet rei erectæ, per eius distantiam ab oculo mensoris, beneficio quadrati conijcere. 76

Altitudinem cuiuslibet rei erectæ, etiamsi eius distantia ab oculo mensoris neque data sit, neq; inuenta, per duas stationes in plano factas, auxilio quadrati patefacere. 76

Altitudinẽ cuius basis imposita sit alteri altitudini, & vtraque illius extremitas cerni possit, etiamsi infimum punctum alterius, cui imponitur, lateat, & eiusdem puncti infimi distantia à loco mensoris cognita non sit, per quadrantem ex valle, aut ex plano Horizontis explorare. 58

Altitudinem cuiusque rei erectæ, ex eius vmbra, quam Sole lucente proijcit, si nota fuerit, per quadratum deprehendere. 95

Altitudinem inaccessibilem beneficio speculi plani, vna cum speculi distantia tam à base, etiam non visa, quam à cacumine altitudinis, cognoscere. 98

Altitudinem inaccessibilem, quando neque distantia à loco mensoris ad eius basem nota est, neque è directo ipsius duæ stationes in plano fieri possunt, neque denique basis appareat, per quadrantem notam reddere. Atque hinc obiter ipsam quoque distantiam elicere. 57

Altitudinem inaccessibilem, cuius basis non videatur, & ad quam per nullum spatium secundum lineam rectam accedere possimus, aut recedere, vt duæ stationes fieri possint; sed solum ad dextram, sinistramue ad locum, è quo eius basis appareat, per quadrantem explorare. ibid.

Altitudinem inaccessibilem, cuius basis non videatur, & ad quam per nullum spatium secundum rectam lineam accedere possit mensor, aut recedere, vt duæ stationes fieri possint, sed solum ad dextram, sinistramue ad locum, è quo eius basis cernatur, per quadratum explorare 89

Altitudinem inaccessibilem, quando distantia à loco mensoris ad basem altitudinis ignota est, per duas stationes in plano factas, per quadrantem dimetiri. Atque hinc distantiam quoque ipsam eruere, etiamsi extremus eius terminus non cernatur. 45

Altitudinem maiorem ex minori incognita, si tamen basis maioris cerni possit, per quadratum venari. 89

Altitudinem maiorem ex minori cognita, etiamsi solum maioris vertex cernatur, per quadratum efficere notam. ibid.

Altitudinem maiorem ex minori cognita, per duas stationes in summitate, vel in duabus feneſtris factas, etiamsi solum maioris altitudinis vertex cernatur, per quadrantem adinuenire. Atque hinc distantiam quoque inter altitudines colligere. 57

Altitudinem maiorem ex minori incognita, dummodo basis maioris cerni possit, per quadrantem perscrutari. 58

Altitudinem minorem ex maiori cognita, licet basis minoris cerni

cerni non posſit, per quadratum scrutari. 90
Altitudinem minorem ex maiori incognita, dummodo basis minoris appareat, per quadratum elicere. ibid.
Altitudinem minorem ex maiori cognita, licet basis minoris non cerni posſit, ope quadrantis perue stigare. Atque hinc distantiam quoq; inter altitudines duas eruere. 59
Altitudinem minorem ex maiori incognita, dummodo basis minoris videri posſit, per quadrantem explorare. Atq; hinc distantiam quoque inter duas altitudines conijcere. ibid.
Altitudinem montis, vel turris ex eius fastigio, quando è directo mensoris interuallum aliquod inter duo signa vel etiam inter signum quodpiam ac turrim cognitum est, per quadratum conijcere. 85
Altitudinem montis, aut turris ex eius vertice per duas stationes in eiusdem summitate factas, è quibus signum aliquod in Horizonte appareat, per quadrantem dimetiri. Atque hinc ipsam quoque distantiam à turris base, vel perpendiculo montis ad signum illud inuestigare. 48
Altitudinem monti impositam, si modo altitudinis basis posſit conspici: vel portionem superiorem alicuius turris, beneficio speculi plani efficere notam. 99
Altitudinem montis metiri per quadrantem. 45. 46
Altitudinem montis, aut turris ex eius vertice per duas stationes in hasta aliqua erecta, vel in duabus fenestris turris, quarum vna supra aliam existat, factas, è quibus signum aliquod in Horizonte videri posſit, per quadrantem metiri. Atque hinc distantiam quoque à perpendiculo montis vel turris, vsque ad signum visum cognoscere. 48
Altitudinem montis, aut turris ex eius vertice per quadrantem metiri, si in plano, cui insistit, spatium aliquod è directo mensoris notum sit, deprehendere. 51
Altitudinem per vnicam stationem metiri per quadrantem, quando distantia nota est. 46
Altitudo pyramidum, in quas corpora regularia è centris resoluuntur 135. & seqq.
Altitudinem propositam singulari quodam modo inuestigare. 77. & 78
Altitudinem propositam, eius q; distantiam ab oculo mensoris, vna cum hypotenusa ab oculo ad fastigium altitudinis extensa, venari ope quadrati stabilis per vnicam stationem, etiam si solum fastigium rei erectæ cernatur. 79
Altitudinem propositam, quando distantia ab oculo mensoris neque data est, neque inuenta, neque è directo altitudinis duæ stationes fieri posſint, per duas stationes in aliqua hasta erecta factas, per quadratum indagare. 78
Altitudo quando maior sit, quam distantia, & quando æqualis, & quando minor. 100
Altitudinem Solis, vel stellæ cuiusuis per quadratum obseruare. 66
Altitudinem turris, aut alterius rei per baculũ indagare. 94
Altitudinem turris vel montis ex eius summitate per vnicam stationem ope quadrati stabilis metiri, vna cum distantia signi in Horizonte visi vsque ad turrem, vel montis perpendiculum. 82
Altitudinem turris ex eius vertice per vnicam stationem per quadrantem metiri, si distantia signi in Horizonte visi vsque ad basem turris nota sit. 51
Altitudinem turris, aut montis, ex eius summitate per quadratum dimetiri, quando in plano summitatis Horizonti æquidistante duæ stationes fieri posſunt, & signum aliquod in Horizonte cernitur. 81
Altitudinem turris, vel montis ex eius summitate per duas stationes in hasta aliqua erecta factas, inuestigare per quadratum, quando signum aliquod in Horizonte videri potest. 82
Altitudinem turris, aut alterius rei, per Normam inuestigare. 94
Altitudinis maioris portionem ex minore altitudine, & minoris portionem ex maiore, per quadratum percipere. 90
Altitudinis maioris portionem ex minori altitudine, & minoris portionem ex maiori, per quadrantem cognoscere. 59
Altitudinis minoris portionem ex minore altitudine, & maioris portionem ex minore, per quadratum elicere. ibid.
Ambitum terræ ex edito aliquo monte metiri. 213
Anguli quantitas, quem latera instrumenti partium continent, quo pacto cognoscatur. 9
Angulorum, & linearum quarundam mechanicam mensurationem admittendam esse. 111
Angulos duos trianguli obliquanguli ex duobus lateribus, & angulo ab ipsis comprehenso, reperire. 41
Angulos duos trianguli obliquanguli ex duobus lateribus, & angulo vni eorum opposito, (si modo constet species anguli alteri lateri oppositi, quando datus angulus acutus est) expiscari. ibid.
Angulos omnes tres trianguli obliquanguli ex omnibus tribus lateribus peruestigare. 42
Angulum acutum trianguli rectanguli ex base, & vno latere inquirere. 40
Angulum acutum trianguli rectanguli ex vtroq; latere reddere cognitum. ibid.
Angulum rectilineũ datũ in tres æquales angulos diuidere. 218
Angulus incidentiæ cur angulo reflexionis sit æqualis. 200
Angulus obseruationis quis. 43
Angulus, quẽ filum cum proximo quadrati latere facit, quando offerat altitudinem Solis, vel stellæ, & quando complementum altitudinis. 66
Arabum quadratura circuli per numeros falsa est. 188
Arcus circuli ad arcum similem alterius circuli est, vt chorda ad chordam, & contra. 198
Arcus datorum grad. ac Min. quo pacto ex circulo quouis ope instrumenti partium abscindantur. 8
Area altera parte longioris. 103
Area campi, intra quem lacus, vel silua existat. 113
Area campi, quando in triangula resolui non potest. 112
Area circuli accuratior. 126
Area circuli cui triangulo rectangulo sit æqualis, secundum Archimedem. 118
Area circuli æqualis est rectangulo comprehenso sub semidiametro, & semisse circumferentiæ circuli. 178
Area circuli tribus viis, ex cognita diametro, & circumferentia. 125
Area Conoidis Hyperbolici. 144
Area Conoidis parabolici. 144
Area corporis planis superficiebus contenti & circa sphæram circumscriptibilis, cui solido rectangulo sit æqualis. 183
Area corporum omnino irregularium, quæ. 145
Area cuiuslibet portionis sphæræ. 142
Areæ cuiusuis figuræ pulchra inuentio. 113
Area cuiuslibet trianguli cui rectangulo sit æqualis. 174
Area datæ Ellipsis. 129
Area datæ parabolæ. ibid.
Area doliorum. 145
Area figuræ lenticularis. 127
Area figuræ quadrilateræ omnino irregularis. 112
Area figuræ ex variis circulorum segmentis coagmentatæ. 127
Area figuræ regularis, cuius latus est vnitas, quo pacto inueniatur. 117
Area figuræ regularis, cui rectangulo æqualis sit. 175
Area figuræ regularis, quo pacto ex area alterius figuræ similis cognita eruatur. 116
Area figuræ regularis, cui triangulo rectãgulo sit æqualis. 175
Areæ figurarum regularium à triangulo vsque ad Dodecagonum, quando latus est vnitas. 117
Area frusti pyramidis, & coni. 132
Area frusti sphæræ. 144
Aream circuli vera maiorem ex diametro inuestigare. 125
Aream circuli vera maiorem, ex circumferentia concludere. 116
Aream circuli vera minorem, ex diametro colligere. 125
Aream circuli vera minorem, ex circumferentia inferre. 126
Areã figuræ Ellipsi similis, quæ circino describitur, inquirere. 219
Area multilaterę figuræ Irregularis quæ. 112
Area parallelogrammorum. 111
Area parallelepipedorum, Prismatum, & cylindrorum. 130
Area portionum sphæroidis. 144
Area pyramidis cui solido rectangulo sit æqualis. 182
Area pyramidum, & conorum. 131
Area quadrati. 103
Area quadrilaterorum non rectangulorum. 111
Area quinq; corporum regularium quæ. 133. 135
Area rectangulorum. 103
Area regularium figurarum. 114
Area Rhombi, & Rhomboidis. 111
Area sectoris circuli. 127
Area semicirculi, quadrantis, octauæ partis, &c. 125
Area segmentorum circuli. 127
Area segmentorum sphæræ. 141
Area sphæræ vera minor, ex diametro circuli maximi. ibid.
Area sphæræ vera maior, ex circũferentia maximi circuli. ibi.
Area sphæræ vera minor, ex circumferẽtia circuli maximi. ibi.
Area sphæræ vera maior, ex diametro circuli maximi. ibid.
Area sphæræ æqualis est solido rectangulo comprehenso sub semidiametro, & tertia parte superficiei conuexæ. ib. & seq.
Area sphæræ, & superficies eiusdem conuexa. 137. 139
Area, vel soliditas sectoris sphæræ. 142
Area, vel soliditas hemisphærij. ibid.
Area sphæroidis. 144
Area trapezij nulla habentis latera parallela. 112
Area trapezij habentis duo latera parallela. 111
Area triangulorum. 103. 107
Area trianguli rectanguli. 109
Area trianguli rectanguli, ex vno latere circa angulum rectum, & vno angulo acuto. 110
Area trianguli rectanguli, ex vno latere circa angulum rectũ, & latere quod recto angulo opponitur. ibid.
Area trianguli rectanguli, ex latere, quod recto angulo opponitur, & vno angulo acuto. ibid.
Area trianguli Isoscelis. 109
Area trianguli æquilateri. ibid.
Area trianguli obliquanguli, ex duobus lateribus, & angulo ab ipsis comprehenso. 111
Area trianguli obliquanguli, ex vno latere, ac duob. angulis. 111
Area vasis excauati. 133
Arundinis, vel baculi beneficio distantiam propositã metiri. 72
Ascensum accliuem montis à loco mensoris vsq; ad basem altitudinis monti impositæ, etiam non visam, vna cum ipsa altitudine, quando mensor in ascensu montis consistit, prope verum, beneficio quadrantis efficere cognitum. 61

B.

Baculi beneficio distantiam inter pedes mensoris, & signũ aliquod in plano Horizontis metiri, quando extremus terminus distantiæ videri potest. 93
Baculi beneficio turrim, aut alterius rei altitudinẽ metiri. 94
Baculi, aut arundinis beneficio distãtiam propositã metiri. 72
Basem trianguli rectanguli ex vno latere, & vno angulo acuto inuestigare. 39
Basem trianguli rectanguli ex vtroque latere perscrutari. 40
Basis quadratricis, semidiameter quadrantis, & quadrans sunt continue proportionales. 191

C.

Campano ascripta circuli quadratura per lineas falsa est. 188
Campi, agriue, aut vrbis, vel regionis situm in plano describere. 99
Campi area, quando in triangula resolui non potest. 112
Campi, intra quem lacus, vel silua existat, area. 113
Campo proposito figuram in charta similem describere. 112
Centesimæ, vel millesimæ partes in quauis recta linea quo pacto capiantur, ope instrumenti partium. 7
Chorda alicuius arcus data, vna cum perpendiculari ex medio eius puncto ad arcum educta, quot gradus, vel palmos tam arcus, quam semidiameter cõplectitur, inuenire. 206
Circuli pulcherrima proprietas. 209
Circuli quadraturam esse posſibilem. 189
Circuli quadratura per Hyppocratem Chium falsa est. 188. 189
Circuli quadratura per lineas Campano ascripta falsa est. 188
Circuli quadratura per numeros secundũ Arabes falsa est. ib.
Circuli quadratura per numeros ex Alberto Durero falsa est. ibid.
Circuli quadratura per lineas. ibid.
Circuli area tribus viis, ex cognita diametro, & circumferentia. 125
Circuli area accuratior. 126
Circuli aream vera maiorem, ex diametro inuestigare. 125
Circuli aream vera minorem, ex diametro colligere. ibid.
Circuli aream vera minorem, ex circumferentia inferre. 126
Circuli aream vera maiorẽ, ex circumferentia concludere. ib.
Circuli area cui triangulo rectangulo sit æqualis, secundum Archimedis doctrinam. 118
Circuli area æqualis est rectangulo comprehenso sub semidiametro, & semisse circumferentiæ circuli. 176
Circuli dimensio ex Archimede. 118
Circuli diameter, quam proportionem habeat ad peripheriam secundum Archimedem. 120
Circuli diameter in numeris, ex dato arcu: 128
Circuli diameter ex data peripheria, & peripheria ex data diametro accuratior. 126
Circuli diametrum vera maiorem, ex data circumferentia indagare. 124
Circuli diametrũ vera minorem ex data peripheria inuestigare: ibid.
Circuli diameter ducta in 3 1/7. gignit numerum maiorem circumferentia. 122
Circuli peripheria, ac diameter, ex eius area. 128
Circuli peripheria ex data diametro, & diameter ex data peripheria accuratior. 126
Circuli peripheria quam proportionem habeat ad diametrũ, secundum Archimedem. 120
Circuli peripheria diuisa per 3 1/7. facit numerum minorem diametro. 122
Circuli peripheriã vera maiorẽ, ex data diametro reperire. 123
Circuli peripheriã vera minorẽ, ex data diametro elicere. ibi.
Circuli parti octauæ, decimæ sextæ, &c. rectangulum constituere Isoperimetrum, & æquale. 186
Circuli sectoris area. 127
Circulo figuram rectilineam æqualem, & alteri similem cõstituere. 194
Circulo dato quadratum æquale constituere. 193
Circulo quadratum æquale quo pacto facile exhibeatur ex propria figura. ibid.
Circulorum peripheriæ inter se sunt, vt diametri. 124. 197
Circulorum duorum, vel figurarum similium proportio, ex datis diametris circumferentiisue, vel duobus lateribus homologis. 128
Circulorũ diametri inter se sunt, vt circumferentiæ. 124. 197
Circulum quadrato æqualem describere. 194
Circulum, vel figuram planam rectilineam, in data proportione augere vel minuere. 164
Circulum cuilibet figuræ rectilineæ æqualẽ describere. 194
Circulum per tria puncta describere, inuentis nimirum alijs punctis, per quæ transire debet. 202
Circulum pluribus circulis, quorum diametri, vel circumferentiæ

rentiæ datæ sint, æqualem: Et figuram similem pluribus, figuris similibus quarum latera homologa data sint, æqualem describere. 128
Circulus ad quadratum diametri proportionem habet, quam 11. ad 14. proxime, secundum Archimedem. 123
Circulus ad quadratum circumferentiæ maiorem proportionem habet, quam 7. ad 88. minorem vero, quam 71. ad 892. 125
Circulus omnibus figuris rectilineis regularibus sibi isoperimetris maior est. 174
Circulus omnium figurarum rectilinearum sibi isoperimetrarum maximus est. 182
Circulus ad quadratum diametri maiorem proportionem habet quam 223. ad 284. minorem vero, quam 11. ad 14. 124
Circumferentiæ circuli ad diametrum proportio accuratior, quæ. 126
Compendium pulchrum in longitudinibus metiendis per quadratum stabile. 70
Conchoideos lineæ descriptio, eiusq; duæ proprietates insignes 162
Coni, & cylindri superficies conuexa. 146
Conoicæ superficiei proportio ad suam basem. ibid.
Conoidis Hyperbolici soliditas. 145
Cono, cylindro, prismati, ac pyramidi cubi æqualē efficere. 216
Cono, vel pyramidi æqualem cylindrum, aut prisma sub eadē altitudine: Et cōtra cylindro, vel prismati æqualem conum aut pyramidem sub eadem altitudine constituere. 215
Conoidis parabolici soliditas. 144
Conorum, ac pyramidum area. 131
Constructio tabulæ Gnomonicæ facillima, eiusq; vsus. 66
Constructio & vsus tabellæ pro minutis, & secundis. ibid.
Constructio & vsus tabulæ pro minutis, & sec. cognoscendis ex quadrante. 14
Constructio quadrantis ad min. & sec. cognoscenda. 11
Constructio quadrati Geometrici. 64
Constructio pinnacidiorum pro radio visuali. 11
Constructio regulæ loco fili cum perpendiculo. ibid.
Constructio instrumenti partium. 5.9
Conum, ac pyramidem in cylindrum, & prisma: Item prisma, & cylindrum in conum, ac pyramidem transmutare. 215
Conum, cylindrum, prisma, ac pyramidem in æqualem sub data altitudine, & supra basem quotuis angulorum reuocare. ibid.
Conum, cylindrum, prisma ac pyramidem in parallelepipedum æquale datæ altitudinis vel basis commutare. ibid.
Conum datæ sphæræ constituere æqualem. 217
Conum pyramidi, & cylindrum prismati æqualem: Ac vicissim pyramidem cono æqualem, & prisma cylindro æquale constituere. 215
Conum, pyramidem, prisma & cylindrum in parallelepipedum supra basem quadratam conuertere. ibid.
Corpori regulari sphæram æqualem exhibere. 217
Corporum quinq; regularium superficies conuexæ. 135
Corporum quinq; regularium area quæ. 133.135
Corporum omnino irregularium area. 145
Corpus regulare quoduis dato cubo æquale constituere. 217
Corpus planis superficiebus contentum, & circa sphæram circumscriptibile, cui solido rectangulo sit æquale. 183
Cubicam, & quadratam radicem in numeris non quadratis, & non cubis per lineas Geometrice inuenire. 173
Cubicæ radicis extractio. 168
Cubicæ & quadratæ radicis extractio. 168
Cubicæ & quadratæ radicis extractio ex data minutia. 172
Cubo dato corpus regulare quodcunq; æquale constituere. 217
Cubo dato parallelepipedum rectangulum sub data altitudine, vel supra datam basem, æquale constituere. 216
Cuborum differentiæ quo pacto reperiantur. 227
Cuborum, & quadratorum tabula vsq; ad radicem. 1000. 221
Cuborum generatio. 227
Cubum cylindro, prismati, cono, ac pyramidi æqualem construere. 216
Cubum datæ sphæræ æqualem: Et sphæram dato cubo æqualem efficere. ibidem.
Cubum datum, aut parallelepipedum in datam proportionem secare. 218
Cubum duobus, aut pluribus cubis æqualem constituere. 217
Cubum minorem ex maiori detrahere residuumque in cubum conuertere. ibidem.
Cubum parallelepipedo rectangulo æqualem construere. 216
Cubum solidis quotlibet æqualem constituere. 217
Cubus alterutrius mediarum proportionalium inter duas rectas, æqualis est parallelepipedo sub quadrato extremæ prope mediam assumptā & altera extrema comprehenso. 165
Cubus diametri sphæræ ad sphæram, maiorem proportionem habet, quam 21. ad 11. minorē vero, quam 426. ad 223. 139
Cubus circunferentiæ maximi circuli in sphæra ad sphæram, maiorem proportionem habet, quam 298374. ad 5041. minorem autem, quam 2904. ad 49. 138
Cylindri, & coni superficies conuexa. 146
Cylindrica superficies, demptis basibus. ibidem.
Cylindrorum, prismatum, ac parallelepipedorum area. 130
Cylindro, aut prismati æqualem conum, vel pyramidem sub eadem altitudine; Et vicissim cono, vel pyramidi æqualem cylindrū, aut prisma eiusdē altitudinis constituere. 215
Cylindro, prismati, cono, ac pyramidi cubum æqualem constituere. 216
Cylindrum datæ sphæræ constituere æqualem. ibid.
Cylindrum, ac prisma in pyramidem, & conum: Item conum, ac pyramidem in cylindrum, vel prisma æquale transmutare. 215
Cylindrum, aut prisma datum in proportionem datam diuidere. 218
Cylindrum, conum, prisma, ac pyramidem in parallelepipedum rectangulum æquale datæ altitudinis, vel basis commutare. 216
Cylindrum, prisma, conum, ac pyramidem cuiuscunq; altitudinis, inæqualem sub data qualibet alia altitudine, & supra basem quotcunq; angulorum conuertere. 215
Cylindrum prismati, & conum pyramidi æqualem: Et vicissim prisma cylindro æquale, & pyramidem cono æqualem construere. ibid.
Cylindrum, prisma, conum, & pyramidem in parallelepipedum supra basem quadratam conuertere. ibid.

D.

Decimæ partes millesimarum, quo pacto sumantur, etiamsi instrumentum partium diuisum sit in 100. partes duntaxat. 7
Decimæ, vel centesimæ partes quotcunque, quo pacto ex quauis parte rectæ in partes æquales diuisæ per circinum auferantur. 35
Declinationem cuiuslibet paralleli in diametro Astrolabij, per instrumentum partium inuenire. 9
Diameter circuli, ac peripheria, ex eius area. 128
Diameter circuli in numeris, ex dato arcu. ibid.
Diametri circuli ad circumferentiam proportio accuratior, quæ. 126
Diameter circuli ducta in $3\frac{1}{7}$. facit numerum maiorem circumferentia. 122
Diametrum circuli vera maiorem, ex data circumferentia indagare. 124
Diametrum circuli vera minorem, ex data circumferentia inuestigare. 123
Diameter circuli quam proportionem habeat ad peripheriam secundum Archimedem. 120
Diameter circuli ex data peripheria, & peripheriam ex data diametro accuratior. 126

Dia-

Diametri circulorum inter se sunt, vt circumferentiæ. 124. 197
Differentiæ cuborum quo pacto reperiantur. 227
Differentiæ quadratorum. ibid.
Differentia stationum quid. 43
Difficultas in extractionibus radicum quæ sit, & quo pacto superetur. 169
Dimensiones quo modo sine numerorum supputatione fiant. 45.48.50. 51.
Dimensio altitudinis quo pacto fiat, sine reductione vmbræ versæ ad rectam, quando in vna statione vmbra recta, & versa in altera secatur. 78
Dimensiones distantiarum eodem modo fiunt in quadrato stabili, ac pendulo. 73
Dimensio distantiæ quo modo fiat sine reductione vmbrarum rectarum ad versas, quando in vtraq; statione latus vmbræ rectæ secatur. 74
Dimensio distantiæ quo modo fiat sine reductione vmbræ rectæ ad versam, quando in vna statione vmbra recta & in altera versa secatur. 75
Dimensio circuli ex Archimede. 118 (80
Dioptræ portio intra quadratū stabile quo pacto reperiatur. 80
Distantiam ab oculo vel pede mensoris ad quoduis punctum in Horizonte notatum, per vnicam stationem, per quadrantem metiri. 53
Distantiam accliuem montis à loco mensoris vsque ad basem altitudinis monti impositæ, etiam non visam, vna cum ipsa altitudine, quando mensor in ascensu montis consistit, prope verum efficere cognitam, beneficio quadrantis. 61
Distantiam accliuem montis à loco mensoris vsque ad basem altitudinis monti impositæ, etiam non visam, vna cum ipsa altitudine, quando mensor in ascensu montis consistit, prope verum, beneficio quadrati efficere cognitam. 91
Distantiam à summitate turris, vel muri vsq; ad signum aliquod in Horizonte positum, licet ad illud accessus non pateat, per quadratum eruere, vbicunq; mensor existat. 88
Distantiam horizontalem inter turrim aliquam, & aliud quodpiam signum, ex turri per duas stationes in fastigio factas, vel in duabus fenestris, quarum vna ad perpendiculum sit sub alia, quando spatium inter illas fenestras notum est, etiamsi totius turris altitudo ignota sit, per quadrantem dimetiri. At q; hinc obiter altitudinem turris patefacere. 55
Distantiam ab oculo, vel pede mensoris (vbicunq; existat) ad quoduis punctum in aliqua altitudine, vel etiam in Horizonte notatum per quadratum exquirere, per vnicam etiam stationem. 86. 88
Distantiam inter duo puncta in quolibet plano eleuato, siue illud ad Horizontem sit rectum, siue inclinatum per quadrantem metiri. 53
Distantiam in plano, siue accessibilis ea sit, siue inaccessibilis, per duas stationes in eodem plano factas per quadrantem tam pendulum, quam stabilem metiri, quando in eius extremo erecta est altitudo aliqua perpendicularis, etiamsi infimum eius extremum non cernatur. Atque hinc altitudinem quoque ipsam elicere. 47. 49
Distantiam à base turris ad signum propositum in Horizonte, ex summitate turris, vel ex aliqua eius fenestra, per quadratum cognoscere. 83
Distantiam ab oculo, vel pede mensoris ad quoduis punctum in aliqua altitudine notatum, per duas stationes in plano factas, per quadrantem metiri. 52
Distantiam inter signum quodpiam in Horizonte positum, & summitatem turris, vel muri alicuius, licet ad ipsum signum accessus non pateat, per quadrantem colligere. 56
Distantiam inter te, & signum quodcunque in plano Horizontis positum, per quadratum perue stigare. 71. 72
Distantiam in Horizonte inter mensorem, & signum aliquod visum, per simplicissimum quoddam instrumentum indagare. 96
Distantiam in plano per duas stationes in eodem plano factas per quadratum metiri, quando in eius extremo erecta est altitudo aliqua perpendicularis, etiamsi infimum eius extremum non cernatur. 73
Distantiam inter duo montium, aut turrium cacumina, per simplicissimum quoddam instrumentum reperire. 96
Distantiam in plano Horizontis inter mensorem, & signum quoduis, beneficio Normæ adinuenire. 95
Distantiam inter duo signa in plano, cui altitudo insistit, si ea distantia è directo mensoris iaceat, & vtrumque eius extremum cerni possit, ex altitudinis fastigio, etiamsi altitudo sit mensoris statura, per quadratū comprehēdere. 84
Distantiam in plano Horizontis, quæ non sit valde magna, facillimo quodam modo dimetiri. 95
Distantiam inter pedes mensoris, & signum aliquod in plano Horizontis beneficio baculi metiri, quando extremus terminus distantiæ videri potest. 93
Distantiam inter duo signa, vel puncta in quolibet plano siue recto ad Horizontem, siue inclinato, per quadratum metiri. 88
Distantiam per vnicam stationem metiri per quadrantem, quando altitudo nota est. 48
Distantiam, quando mensor in vno eius extremo, vel in aliqua altitudine nota ad planum, in quo est distantia, perpendiculari existens alterum extremum videre potest, per quadrantem metiri. 54
Doliorum capacitas. 97

E.

Ellipsis centro dato in linea axis, vna cum duobus punctis Ellipsis, vtrumq; axis vtriusque extremum reperire. 209.
Ellipsis datæ area. 129
Ellipsi similē figurā, quā ouatā dicunt, circino describere. 218
Examen extractionis radicum. 168
Extrahere radicem cuiusuis generis ex dato numero. 166

F.

Facilis inuentio lineæ rectæ cuiuis circumferentiæ æqualis, ex propria figura. 193
Facilis inuentio quadrati circulo æqualis. ibid.
Figura regularis circulo circumscripta maiorem ambitum habet, quam circulus. 195.196
Figuræ numeri, ex quo radix extrahitur, quo modo per puncta signentur. 166
Figuræ rectilineæ cuilibet circulum æqualem describere. 194
Figuræ regularis area, cui triangulo rectangulo sit æqualis. 175
Figuræ regularis area, cui rectangulo æqualis sit. 174
Figuram Ellipsi similem, quam ouatam dicunt, circino describere. 218
Figuram rectilineam circulo æqualem, & alteri similem constituere. 194
Figuram rectilineam in quotuis partes æquales per rectam datæ rectæ parallelam distribuere. 157
Figuram solidam quamcumq; ex iis, de quibus Euclid. in Stereometria agit augere vel minuere in data proportione. 164
Figuram rectilineam ex dato angulo, vel punctum in latere, in quotuis partes æquales partiri. 154
Figuram planam rectilineam, vel circulum, in data proportione augere, vel minuere. 164
Figuram similem pluribus figuris similibus, quarum latera homologa data sint æqualem. Et circulum pluribus circulis quorum diametri, circumferentiæue datæ sint, æqualem describere. 128
Figurarū duarum similium, aut circulorum proportio, ex datis duobus lateribus homologis, vel diametris, circumferentiisue. ibid.
Figurarum Isoperimetrarum latera numero æqualia habentium, maxima & æquilatera est, & æquiangula. 180
Figurarum regularium Isoperimetrarum maior est illa, quæ

plures continet angulos pluraue latera. 176
Figuris rectilineis regularibus circulus, cui isoperimetræ sunt, maior est. 182
Filum perpendiculi secans vmbram rectam facit angulum complementi altitudinis: secans vero vmbram versam, angulum constituit ipsius altitudinis. 66
Fractionem magnam ad minorem fere æquiualentem reducere. 116
Fractionis inter duas mediæ facilis inuentio. ibid.
Frusti marmoris regularis soliditas. 133
Frusti pyramidis, & coni area. 132
Frusti sphæræ soliditas. 144

G.

Generatio radicum innumera. 166
Generatio cuborum. 227
Generatio quadratorum. ibid.
Geodæsia, ac Geometria quid. 147
Geometria, & Geodæsia quid. ibid.
Geometrici quadrati constructio. 65
Gnomonica tabula. 68
Gnomonicæ tabulæ facillima constructio, eiusq; vsus. 66
Gnomon, seu latus quadrati medio loco proportionale est inter vmbram rectam, ac versam. 65
Gradus ac Min. in dato arcu quot contineantur, per instrumentum partium cognoscere. 8
Gradus, ac Min. quotlibet, quo pacto ex circulo quouis, ope instrumenti partium, abscindantur. 8

H.

Hemisphery conuexa superficies. 142
Hemisphærij soliditas. 143
Heptagoni latus non recte à Carolo Mariano, Alberto Durero, Francisco Flussate inueniri. 212
Hyperbolici Conoidis soliditas. 145
Hypotenusæ inuentio per quadrantem. 45.47.49. & 51.

I.

Impares numeros quemlibet cubum componentes inuenire. 228
Imperata pars quo pacto ex data recta abscindatur, per instrumentum partium. 8
Inaccessibilem altitudinem, cuius basis non videatur, & ad quam per nullum spatium secundum lineam rectam accedere possit mensor, aut recedere, vt duæ stationes fieri possint, sed solum ad dextram, sinistramue ad locum, è quo eius basis cernatur, per quadratum explorare. 89
Inaccessibilem altitudinem, cuius basis non videatur, & ad quam per nullum spatium secundum lineam rectam accedere, possimus, aut recedere vt duæ stationes fieri possint, sed solum ad dextram, sinistramue ad locum, è quo eius basis appareat, per quadrantem explorare. 56
Inaccessibilem altitudinem, quando distantia à loco mensoris ad basem altitudinis ignota est, per duas stationes in plano factas, per quadrantem dimetiri. Atque hinc distantiam quoq; ipsam eruere, etiamsi extremus eius terminus non cernatur. 46
Inaccessibilem altitudinem, quando neq; distantia à loco mensoris ad eius basem nota est, neq; è directo ipsius duæ stationes in plano fieri possunt, neq; denique basis apparet, per quadrantem notam reddere. At q; hinc obiter ipsam quoq; distantiam elicere. 57
Inaccessibilem altitudinem beneficio speculi plani, vna cum speculi distantia tam à base, etiam non visa, quam à cacumine altitudinis cognoscere. 98
Inaccessibilem distantiam per quadrantem tam pendulum quam stabilem metiri, quando in eius extremo erecta est altitudo perpendicularis, etiamsi infimum eius extremum non cernatur. At q; hinc altitudinem quoq; ipsam elicere. 43.45
Incidentiæ angulus cur angulo reflexionis sit æqualis. 206
Instrumenta mensurandi varia 42
Instrumenti, quod Italis Squadra Zoppa dicitur, constructio, & vsus. 100
Instrumentum partium quid, & quo pacto construatur. 5
Instrumentum partium quo pacto aliter constituatur. 10
Instrumentum pro librationibus aptissimum. 101
Interuallum, ad cuius extrema accedere non liceat, dummodo ea appareant & ipsum interuallum productum ad pedes mensoris pertingat, ex altitudine aliqua nota, per quadrantem metiri. 54
Interuallum è directo mensoris positum cuius vtrumq; extremum, vel alterum non appareat, nisi mensor ad dextram, vel sinistram accedat, per quadrantem comprehendere. 56
Interuallum in Horizonte inter turrim aliquam, & aliud quodpiam lignum, ex turri per duas stationes in fastigio factas, vel in duabus fenestris, quarum vna sit ad perpendiculum sub alia, quando spatium inter illas fenestras notum est, etiamsi totius turris altitudo ignota sit, per quadrantem dimetiri. At q; hinc obiter altitudinem turris patefacere. 55
Interuallum in Horizonte, inter mensorem, & signum aliquod visum, per simplicissimum quoddam instrumentum indagare. 96
Interuallum in plano Horizontis inter mensorem, & signum quoduis, beneficio Normæ adinuenire. 94
Interuallum inter duo puncta in quolibet plano eleuato, siue illud ad Horizontem sit rectum, siue inclinatum, per quadrantem metiri. 53
Interuallum inter duo signa, vel puncta in quolicet plano siue recto ad Horizontem, siue inclinato, per quadratum metiri. 88
Interuallum, quando mensor in vno eius extremo, vel in aliqua altitudine nota ad planum, in quo interuallum est, perpendiculari existens alterum extremum videre potest, per quadrantem metiri. 54
Interuallum transuersum in Horizonte, cuius vtrumq; extremum videri potest, per quadratum metiri. 88
Interuallum inter pedes mensoris & signum aliquod in plano Horizontis, beneficio baculi metiri, quando extremus terminus interualli videri potest. 93
Interuallum transuersum in Horizonte, cuius vtrumq; extremum inspici potest, per quadrantem efficere notum. 55
Iosephus Scaliger perperam Archimedem de Dimensione circuli reprehendit. 119
Irregularium omnino corporum area. 145
Isoperimetræ figuræ quæ, & tractatio de eis instituta. 174
Isoperimetrarum figurarum regularium maior est illa, quæ plures continet angulos pluraue latera. 176
Isoperimetrarum figurarum latera numero habentium æqualia, maxima & æquilatera est, & æquiangula. 180
Isoperimetrorum triangulorum eandem habentium basem, maius est illud, quod duo latera habet æqualia. 177
Isoscelis trianguli area. 109
Isoscelia duo triangula similia basium inæqualium, simul maiora sunt duobus Isoscelibus simul supra easdem bases, quæ quidem inter se sint dissimilia, prioribus vero Isoperimetra, habeantque quatuor latera inter se æqualia. 179
Isoscelibus duobus triangulis datis, quorum bases inæquales sint, & duo latera vnius duobus alterius æqualia: super eisdem basibus duo triangula Isoscelia similia, & prioribus simul sumptis Isoperimetra constituere. 178

Late-

L.

Latera duo trianguli obliquanguli, ex tertio latere, & duobus quibusuis angulis, inuenire. 40
Latera tria in quadrilatero maiora sunt quarto latere. 202
Lateris trianguli obliquanguli segmenta à perpendiculari facta, ex datis tribus lateribus cognoscere. 40
Laterum proportiones ex datis angulis cuiusuis trianguli patefacere. 39
Latus figuræ regularis, quo pacto ex eius area deprehendatur. 117
Latus figuræ regularis quo pacto ex semidiametro circuli circumscripti cognoscatur. 115
Latus polygoni propositi quo pacto in dato circulo per instrumentum partium inueniatur. 8
Latus quadratricis æquale est quadranti circuli, cuius semidiameter est basis quadratricis. 192
Latus trianguli rectanguli ex base, & alterutro angulorum acutorum, notum efficere. 39
Latus trianguli rectanguli, ex base, & altero cognoscere. ibid.
Latus trianguli rectanguli ex altero latere & alterutro angulo acuto eruere. ibid.
Latus trianguli obliquanguli ex duobus lateribus, & angulo ab ipsis comprehenso colligere. 40
Latus trianguli obliquanguli ex duobus reliquis lateribus, & duobus quibusuis angulis, addiscere. ibid.
Latus trianguli obliquanguli ex duobus lateribus, & angulo vni eorum opposito, (si modo constet species anguli alteri lateri dato oppositi, quando datus angulus acutus est) exquirere. 42
Lenticularis figuræ area. 127
Librare spatium terræ inæquale, producendis aquis: aut etiam, si lubet, Horizonti æquidistans efficere. 101
Linea recta diuisa in quotuis partes æquales, quot eiusmodi partes in quauis alia recta contineantur, ope instrumenti partium cognoscere. 6
Linea recta in quotuis partes æquales diuisa, quot decimæ, vel centesimæ, &c. in quauis particula vnius partis contineantur, per circinum deprehendere. 34
Lineæ superficies, ac solida, penes quid mensurentur. 103
Lineæ rectæ sub dimensionem cadentes quæ sint. 43
Lineæ duæ, vna recta, & altera inflexa, nunquam concurrentes, licet in infinitum producantur, & semper magis vna ad alteram accedat. 163
Lineam quadratricem describere. 189
Lineam rectam, ad cuius extrema accedere non liceat, dummodo ea appareant, & ipsa linea recta producta ad pedes mensoris pertingat, ex altitudine aliqua nota, per quadrantem metiri. 54
Lineam rectam in Horizonte inter turrim aliquam, & aliud quodpiam signum, ex turri per duas stationes in fastigio factas, vel in duabus fenestris quarum vna ad perpendiculum sit sub alia, quando spatium inter illas fenestras notum est, etiamsi totius turris altitudo sit ignota, per quadrantem dimetiri. At q; hinc obiter altitudinem turris patefacere. 55
Lineam rectam datam per instrumentum partium diuidere, vt alia recta diuisa est. 53
Lineam rectam è directo mensoris positam, cuius vtrumq; extremum, vel alterum non appareat, nisi ad dextram vel sinistram mensor accedat, per quadrantem comprehendere. 56
Lineam rectam in Horizonte per quadratum metiri, quando mensor in vno eius extremo existens alterum extremum videre non potest, neq; altitudo in promptu est, sed solum ad dextram, vel sinistram per lineam perpendiculariter recedere potest ad locum, è quo alterum extremũ appareat. 84
Lineam rectam arcui quadrantis æqualem reperire. 191
Lineam rectam in Horizonte è directo mensoris iacentem, per quadratum cognoscere, ad cuius extrema neque accedere liceat, neq; è loco mensoris eam dimetiri: dummodo ad dextram, vel sinistram per lineam perpendicularem ad locum aliquem ire possit mensor, ex quo vtrumq; extremum appareat. 58
Lineam rectam, quando mensor in vno eius extremo, vel in aliqua altitudine nota ad planum, in quo est linea, perpendiculari existens alterum extremum videre potest, per quadrantem metiri. 54
Lineam rectam transuersam in Horizonte, cuius vtrumque extremum videri potest, per quadrantem metiri. 89
Lineam rectam transuersam in Horizonte, cuius vtrumque extremum inspici potest, per quadrantem notã efficere. 55
Linearum quarundam, & angulorum mechanicam mensurationem admittendam esse. 111
Longitudinem transuersam in Horizonte, cuius vtrumq; extremum inspici potest, per quadrantem notam efficere. 55
Longitudinem trabis ad Horizontem inclinatæ, cuius portio superior tantum conspiciatur, vna cum angulo inclinationis, distantia basis à mensore, & altitudine fastigij suprà Horizontem, per quadratum metiri. 100
Longitudinem rectæ è directo mensoris positæ, cuius vtrumque extremum vel alterum non appareat, nisi ad dextram, vel sinistram accedat mensor, per quadrantem comprehendere. 56
Longitudinem vmbræ ab altitudine, Sole lucente, quãdo proiectæ altitudo est cognita, ope quadrati adipisci. 96
Longitudinem lineæ rectæ, quando mensor in vno eius extremo, vel in altitudine aliqua nota, quæ perpendicularis sit in eo extremo ad planum, in quo linea iacet, existens alterum extremum videre potest, per quadrantem comprehendere. 54
Longitudinem in Horizonte inter turrim aliquam, & aliud quodpiam signum, ex turri per duas stationes in fastigio factas, vel in duabus fenestris quarum vna sit sub alia ad perpendiculum, quando spatium inter illas fenestras notum est, etiamsi totius turris altitudo ignota sit, per quadrantem dimetiri. At q; hinc obiter altitudinem turris patefacere. 55
Longitudinem in Horizonte extensam per quadratum metiri, quando mensor in vno eius extremo existens alterum videre non potest, propter tumorem aliquem interiectum, neque altitudo in promptu est, sed solum ad dextram, vel sinistram per lineam perpendicularem recedere potest ad locum, è quo alterum extremum appareat. 84
Longitudinem in Horizonte è directo mensoris iacentem, per quadratum cognoscere, ad cuius extrema neq; accedere liceat, neq; è loco mensoris eam dimetiri, neq; vlla adsit altitudo: dummodo ad dextram, vel sinistram per lineam perpendicularem ad locum aliquem ire possit mensor, ex quo vtrumq; extremum appareat. 85
Longitudinem, ad cuius extrema accedere non liceat, dummodo ea appareant, & ipsa longitudo producta ad pedes mensoris pertingat, ex altitudine aliqua nota, per quadrantem metiri. 54
Longitudinem ascensus alicuius montis, si eius cacumen ab oculo in radice constituto videatur, per instrumentum simplicissimum cognoscere. 97

M.

Magnitudinum quatuor proprietas quædam. 196
Magnitudinibus in partes proportionales sectis, si in singulis vna pars iterum secetur proportionaliter, erunt ibidem totæ etiam sectæ proportionaliter. 148
Marmoris regularis soliditas. 13
Mechanica mensuratio in nonnullis lineis, & angulis admittenda est. 111
Medias duas proportionales inter duas datas, ex Nicomede, prope verum, adinuenire. 163

Medi-

Medias duas proportionales inter duas datas, ex Diocle, prope verum inquirere. 162
Medias duas proportionales inter datas duas, ex Herone, & Apollonio Pergæo, prope verum, inuenire. 160
Medias duas proportionales inter duas datas, ex Phylone Byſantio, & Philopono, prope verum, inquirere. 161
Medium numerum proportionalem, vel duos medios inter datos duos numeros comperire. 165
Menſorum ratio communis in area cuiuſuis figuræ, vel agri inueſtiganda. 112
Menſurandi varia inſtrumenta. 42
Menſuræ linearum, ſuperficierum, ac ſolidorum penes quid ſumantur. 103
Milleſimarum decimæ partes quo modo ſumantur, etiamſi inſtrumentum partium diuiſum ſit in 100. partes duntaxat. 7
Milleſimæ partes quomodo capiantur, etiamſi in inſtrumento partium contineantur tantum 100. partes. 7
Milleſimæ, vel centeſimæ partes in quauis recta linea quo pacto capiantur, ope inſtrumenti partium. 6
Minuta quotlibet quo pacto ex gradu quouis abſcindantur per circinum. 34
Minuta ac ſecunda quo pacto per circinum in quauis particula gradus deprehendantur. 33
Minuta, & ſecunda quo pacto ex quadrante conſtructo reperiantur. 14
Minutia, cuius Numerator ex duarum minutiarum Numeratoribus, & Denominator ex denominatoribus conflatur maior eſt minore & maiore minor. 163
Minutiæ inter duas mediæ facilis inuentio. 116
Minutiam magnam ad minorem fere æquiualentem reducere. ibid.
Montis altitudinem metiri per quadrantem. 47. 48
Montis, vel turris altitudinem ex eius ſummitate per vnicam ſtationem ope quadrati ſtabilis metiri, vna cum diſtantia ſigni in Horizonte viſi vſq; ad perpendiculum montis, aut turris. 82
Montis, aut turris altitudinem ex eius vertice per quadrantẽ metiri, ſi in plano, cui inſiſtit, ſpatium aliquod è directo menſoris notum ſit, deprehendere. 52
Montis, aut turris altitudinem ex eius ſummitate per quadratum dimetiri, quando in plano ſummitatis Horizonti æquidiſtante duæ ſtationes fieri poſſunt, & ſignum aliquod in Horizonte cernitur. 81
Montis, aut turris altitudinem ex eius vertice per duas ſtationes in haſta aliqua erecta, vel in duabus feneſtris turris, quarum vna ſit ſupra aliam, factas, è quibus ſignum aliquod in Horizonte videri poſſit, per quadrantem metiri. Atque hinc diſtantiam quoque à perpendiculo montis, vel turris, vſq; ad ſignum viſum cognoſcere. 50
Montis, aut turris altitudinem ex eius vertice per duas ſtationes in eiuſdem ſummitate factas, è quibus ſignum aliquod in Horizonte appareat, per quadrantem dimetiri. Atque hinc ipſam quoque diſtantiam à montis perpendiculo, vel turris baſe ad ſignum illud inueſtigare. 48
Montis vel turris altitudinem ex eius faſtigio, quando è directo menſoris interuallum aliquod inter duo ſigna vel etiam inter ſignum quodpiam ac turrim cognitum eſt, per quadratum conijcere. 85
Montis, vel turris altitudinem ex eius ſummitate per duas ſtationes in haſta aliqua erecta factas, inueſtigare per quadratum, quando ſignum aliquod in Horizonte videri poteſt. 82
Multilateræ figuræ irregularis area quæ. 112
Muri cuiuſq; ſoliditas. 133

N.

Normæ beneficio altitudinem turris, aut alterius rei inueſtigare. 94
Normæ beneficio diſtantiam in plano Horizontis inter menſorem, & ſignum quoduis percipere. ibid.
Numeri particulares pro ſingulis radicum ſpeciebus, quo modo reperiantur. 167
Numeros impares datum cubũ componentes reperire. 228
Numerum aliquo concipiente, quot ei vnitates remaneant poſt tres operationes imperatas, conijcere. 200

O.

Obliquanguli trianguli area, ex vno latere, ac duobus angulis. 111
Obliquanguli trianguli area, ex duobus lateribus, & angulo ab ipſis comprehenſo. ibid.
Obliquangulorum quadrilaterorum area. ibid.
Obliquangulorum triangulorum rectilineorũ problemata. 40
Obſeruationis angulus quis. 44
Ouatam figuram Ellipſi ſimilem circino deſcribere. 218
Octogonum regulare ad datam altitudinem latitudinemue conſtituere. 215
Octogonum regulare circulo inſcriptum medium proportionale eſt inter quadratum circulo circumſcriptũ, & quadratum eidem inſcriptum. ibid.

P.

Parabolici Conoidis ſoliditas. 144
Parabolæ datæ area. 129
Parallelepipedum ſub quadrato alterutrius extremarum, (ſi ſint quatuor lineæ continue proportionales) & altera extrema comprehenſum, æquale eſt cubo mediæ proportionalis, quæ priori extremæ aſſumpta eſt propinquior. 165
Parallelepipedorum, Priſmatum, & cylindrorum area. 130. 131
Parallelepipedo rectangulo cubum æqualem exhibere. 216
Parallelepipedum, aut cubum in datam proportionem diuidere. 218
Parallelepipedum rectangulum ſub data altitudine, vel ſupra datam baſem dato cubo æquale conſtituere. 216
Parallelogrammum datum in quotcunq; partes æquales diuidere per rectas duobus lateribus oppoſitis parallelas. 160
parallelogrammum datum per rectam ex puncto ſiue extra, ſiue intra ipſum, ſiue in aliquo latere dato ductam bifariã ſecare. ibid.
Parallelogrammum in dato angulo æquale dato quadrilatero conſtituere. 199
Pars imperata quo pacto ex data recta abſcindatur, per inſtrumentum partium. 8
Partes aliquotæ ſimiles plurium magnitudinum eandem habent proportionem. 137
Partes decimæ milleſimarum quo pacto ſumantur, etiamſi inſtrumentum partium diuiſum ſit in 100. partes duntaxat. 7.
Partes centeſimæ, vel milleſimæ in quauis recta linea, quo pacto ope inſtrumenti partium capiantur. 6
Partes quotcunque decimæ, vel centeſimæ, &c. quo pacto ex quauis parte rectæ in partes æquales diuiſæ per circinum auferantur. 35
Partes milleſimæ, quo modo capiantur, etiamſi in inſtrumento partium contineantur tantum 100. partes. 7
Particula quælibet vnius partis centeſimæ inſtrumenti partium, quot partes decimas vnius centeſimæ, vel quot milleſimas totius lateris inſtrumenti complectatur, quo pacto cognoſcatur. 7

Partium inſtrumentum quid, & quo pacto conſtruatur. 3
Partium inſtrumentum, quo pacto aliter conſtruatur. 10
Pendulus quadrans quid. 14
Pentagonum regulare non recte conſtrui ab Alberto Durero, & aliis. 210
Peripheria circuli ex data diametro; & diameter ex data peripheria, accuratior. 128
Peripheria circuli, ac diameter, ex eius area. ibid.
Peripheria circuli quam proportionem habeat ad diametrum ſecundum Archimedem. 120
Peripheria circuli diuiſa per 3 1/7. gignit numerum maiorem diametro, 122
Peripheriæ circuli ad diametrum proportio accuratior, quæ. 126.
Peripheriæ circulorum inter ſe ſunt, vt diametri. 124. 176
Peripheriam circuli vera maiorem, ex data diametro reperire. 123
Peripheriam datæ rectæ æqualem reperire. 194
Peripheriam circuli veram minorẽ, ex data diametro elicere. ib.
Perpendicularem in latus quodcunq; trianguli ex angulo oppoſito cadentem, ex omnibus tribus lateribus efficere notam. 42
Perpendicularis quæ ſegmenta faciat in latere trianguli obliquanguli. 40
Perpendicularis ex quolibet gradu quadrantis demiſſa, in quodnam punctum ſemidiametri cadat, per inſtrumentum partium cognoſcere. 9
Perpendicularis in triangulo quãdo eſt numerus ſurdus, quid agendum. 109
Perpendicularis in triangulo æquilatero quo pacto cognoſcatur. 114
Perpendicularis è centro figuræ regularis, quo pacto cognoſcatur. ibid.
Perpendiculi filum ſecans vmbram rectam facit angulũ complementi altitudinis: ſecans vero vmbram verſam, angulum conſtituit ipſius altitudinis. 64
Pinnacidia pro radio viſuali quo pacto conſtruenda ſint. 13
Pinnacidia quo pacto in quadrante ſint affigenda. ibid.
Polygoni propoſiti latus quo pacto in dato circulo per inſtrumentum partium inueniatur. 8
Portionem altitudinis maioris ex minori altitudine, & minoris portionem, ex maiori, per quadrantem cognoſcere. 59
Portionem altitudinis maioris ex minore altitudine, & minoris portionem ex maiore, per quadratum percipere. 90
Portionis ſphæræ ſuperficies conuexa. 142
Portionis ſphæræ ſoliditas. 243
Portionum ſpharoidis ſoliditas. 144
Primi inter ſe numeri ſi ambo non ſint quadrati, aut cubi; neque vlli eorum æque multiplices quadrati erunt aut cubi. Et ſi duorum numerorũ æque multiplices ſint ambo quadrati, aut cubi, etiam ipſi quadrati erunt, aut cubi. 201
Priſma, ac cylindrum in conum, & pyramidem: Item, conum, ac pyramidem in cylindrum, vel priſma æquale tranſmutare. 215
Priſma, conum, cylindrum, ac pyramidem inæqualem ſub data altitudine, & ſupra baſem quotuis angulorum conuertere. ibid.
Priſma, cylindrum, conum, ac pyramidem in parallelepipedũ ſupra baſem quadratam conuertere. ibid.
Priſmati, cono, cylindro, ac pyramidi cubum æqualem conſtruere. 216
Priſmati cuicunq; cylindrum æqualem, & pyramidi conum æqualem: Ac viciſſim cylindro priſma æquale, & cono æqualem pyramidem conſtruere. 215
Priſmati dato ſphæram æqualem conſtruere. 217
Priſma, pyramidem, cylindrum, & conum in parallelepipedũ rectangulum æquale datæ altitudinis, vel baſis commutare. 217
Priſma, vel cylindrum datum in datam proportionem diuidere. 218
Priſmati, aut cylindro æqualem pyramidem vel conum ſub eadem altitudine: Et cõtra pyramidi, vel cono æquale priſma, vel cylindrum conſtituere eiuſdem altitudinis. 214
Priſmatum parallelepipedorum, & cylindrorum area. 130. 131
Probatio extractionis radicum. 167
Problemata 3. 4. 5. 6. & 7. libri 3. quo pacto per vnicam ſtationem, ope quadrati ſtabilis abſoluantur. 79
Problemata triangulorum rectilineorum rectangulorum. 39
Profunditatem putei, vel ædificij cuiuſuis ad perpendiculum erecti, ſi modo angulus fundi, vel ſignum aliquod in fundo poſitum conſpiciatur, per quadratum efficere cognitam. 149
Profunditatem putei, vel ædificij cuiuſcunq; ad perpendiculum erecti, ſi modo angulus fundi, vel ſignum aliquod infundo poſitum conſpiciatur, per quadrantem reperire. 60
Profunditatem vallis, eiuſdemq; deſcenſum obliquum, ſi non ſit valde inæqualis, eiuſq; terminus, vel aliquod in valle ſignum conſpici poſſit, per quadrantem ſcrutari. 61
Profunditatem vallis, eiuſdemq; deſcenſum obliquum, ſi non ſit valde inæqualis, & eius terminus, vel aliquod in ea ſignũ conſpici poſſit, per quadratum cognoſcere. 97
Propinquam radicem veram, in numeris non quadratis non cubis, non Zenſizenſis, non ſurdeſolidis, &c. inuenire. 170
Proportionalem numerum medium, vel duos medios, inter datos duos numeros reperire. 165
Proportionales duas medias inter duas datas, ex Diocle; prope verum inueſtigare. 161
Proportionales duas medias inter duas datas, ex Nicomede, prope verum, adinuenire. 163
Proportionales duas medias inter duas datas, ex Philone Byſantio, & Philopono, prope verum, inquirere. 161
Proportionales duas medias inter datas duas rectas, prope verum, ex Herone, & Apollonio Pergæo inuenire. 160. 161
Proportionales laterum ex datis angulis cuiuſuis trianguli patefacere. 25
Proportionalis tertia, & quarta quo pacto per inſtrumẽtum partium reperiatur. 9
Proprietas pulchra quadrati. 213
Proprietas circuli pulcherrima. 209
Proprietas quædam quatuor magnitudinum. 196
Proprietas pulchra Quadratricis. 191
Punctum, in quo duæ rectæ ad inuicem inclinatæ concurrant, inuenire. 46
Punctum declinationis cuiuslibet paralleli in diametro Aſtrolabij per inſtrumentum partium inuenire. 9
Putei, vel ædificij cuiuſcunq; ad perpendiculum erecti profunditatem, ſi modo angulus fundi, vel ſignum aliquod in fundo poſitum conſpiciatur, per quadrantem reperire. 60
Putei, vel ædificij cuiuſuis ad perpendiculum erecti profunditatem, ſi modo angulus in fundo, vel ſignũ aliquod in fundo poſitum conſpiciatur, per quadratum efficere cognitam. 92
Pyramidem, conum, cylindrum, ac priſma inæquale ſub data altitudine, & ſupra baſem quotuis angulorum reuocare. 215
Pyramidem, priſma, conum, & cylindrum in parallelepipedum rectangulum æquale datæ altitudinis, vel baſis commutare. 216
Pyramidem datæ ſphæræ æqualem extruere. 217
Pyramidem, priſma, cylindrum, & conum in parallelepipedum ſupra baſem quadratam conuertere. 215
Pyramidi, cono, cylindro, ac priſmati cubum æqualem efficere. 216.
Pyramidi conum æqualem, & priſmati cylindrum æqualem, Et contra cono pyramidem æqualem, & cylindro priſma æquale conſtruere. 215

Pyramidi, vel cono æquale prisma, vel cylindrum eiusdem altitudinis: Et vicissim cylindro, vel prismati æqualem conum vel pyramidem sub eadem altitudine constituere. ibid.
Pyramidum, & conorum area. 131
Pyramis cui solido rectangulo æqualis sit. 182

Q.

Quadrans pendulus quid. 14
Quadrans stabilis quid. ibid.
Quadrans, semidiameter, & basis Quadratricis, continue sunt proportionales. 191
Quadrantis lib. 1. cap. 2. constructi vsus in minutis, & secundis exquirendis, 14
Quadranti circuli rectangulum constituere Isoperimetrum, & æquale. 186
Quadrantis constructio ad Min. & Sec. cognoscenda. 10
Quadrati area. 100
Quadratæ radicis extractio. 168
Quadratæ, & cubicæ radicis extractio ex data minutia. 172
Quadratam & cubicam radicem in numeris non quadratis, & non cubis per lineas Geometrice inuenire. 173
Quadrati Geometrici constructio. 64
Quadrati pulchra proprietas. 243
Quadratorum differentiæ. 227
Quadratorum, & cuborum tabula vsq; ad radicem 1000. 221
Quadratorum generatio. 227
Quadratum, altera parte longius, Rhombum, ac Rhomboides, ex excessu diametri supra latus, &c. describere. 203
Quadratum numerũ in quotlibet quadratos distribuere. 201
Quadrilateri tria latera maiora sunt quarto latere. 202
Quadrato circulum æqualem describere. 194
Quadratricis latus æquale est quadranti circuli, cuius semidiameter est basis quadratricis. 192
Quadratricis basis, semidiameter quadrantis, & quadrans sunt continue proportionales. 191
Quadratricis pulchra proprietas. ibid.
Quadratricem lineam describere. 195
Quadratum pendulum, ac stabile, quo modo vsurpetur. 63
Quadratum circumferentiæ circuli maximi in sphæra ita est ad superficiem sphæræ, vt circumferentia circuli maximi ad diametrum. 137
Quadratum circulo æquale quo pacto facile exhibeatur ex propria figura. 193
Quadratum dato circulo æquale constituere. 193
Quadratum diametri circuli maximi in sphæra ad superficiẽ sphæræ, maiorem proportionem habet quam 7. ad 22. minorem vero, quam 71. ad 223. 138
Quadratũ datæ figuræ æquale, quo pacto facile cõstruatur. 113
Quadratum diametri circuli ad circulum proportionem habet, quam 14. ad 11. proxime secundum Archimedem. 124
Quadratum diametri circuli ad circulum habet maiorẽ proportionem quam 14. ad 11. minorem vero, quam 284. ad 223. 125
Quadratum circumferentiæ circuli ad circulum habet maiorem proportionem, quam 892. ad 71. minorem vero, quam 88. ad 7. ibid.
Quadratum circumferentiæ circuli maximi in sphæra ad superficiem conuexam sphæræ, maiorem proportionem habet, quam 223. ad 71. minorem vero, quam 22. ad 7. 138
Quadratum maximi lateris trianguli minus est, quam duplũ summæ quadratorum ex reliquis duobus lateribus descriptorum. 207
Quadratura circuli per numeros secundũ Arabes falsa est. 187
Quadratura circuli per lineas Campano ascripta falsa est. ibi.
Quadratura circuli per numeros ex Alberto Durero falsa est. ibid.
Quadratura circuli per lineas. 186
Quadratura circuli per Hyppocratẽ Chium falsa est. 188. 189
Quadraturam circuli esse possibilem. 189
Quadrilateri omnino irregularis area. 112
Quadrilatero æquale parallelogrammum facile constituere in dato angulo. 199
Quadrilaterorum non rectangulorum area. 111
Quantitas anguli, quem latera instrumenti partium continent, quo pacto cognoscatur. 9
Quarta & tertia proportionalis, quo pacto per instrumentum partium reperiatur. ibid.

R.

Radicis cubicæ extrahendæ regula propria. 170
Radicis cubicæ extractio. 168
Radicis quadratæ, & cubicæ extractio ex data minutia. 172
Radicis quadratæ extractio. 167
Radicis surdesolidæ extractio. 169
Radicem cuiuslibet generis extrahere ex dato numero. 166
Radicem cuiusq; generis ex data minutia extrahere. 171
Radicem quadratam, & cubicam in numeris non quadratis, & non cubis per lineas Geometrice inuenire. 173
Radicem veræ propinquam in numeris non quadratis, non cubis, non Zensizensis, non surdesolidis, &c. inuenire. 170
Radicum infinitæ species. 166
Radix quadrata numeri fracti quo pacto eruatur. 110
Radix qualibet extrahenda quot figuras habere possit. 167
Recta linea in quotuis partes æquales, diuisa, quot decimæ, vel centesimæ, &c. in quauis particula vnius partis contineantur, per circinum deprehendere. 34
Recta ducta ex angulo acuto trianguli rectanguli in oppositũ latus, maior est proportio huius lateris ad eius segmentum prope rectum angulum, quam illius anguli acuti ad eius partem dicto segmento lateris oppositam. 176
Recta linea diuisa in quotuis partes æquales, quot eiusmodi partes in quauis alia recta contineantur, ope instrumenti partium, cognoscere. 6
Recta data, quamuis minima, partem, vel partes imperatas ex ea auferre. 208
Recta connectens duos angulos oppositos in duobus triangulis æqualibus latus commune habentibus, & in diuersas partes vergentibus, à communi latere bifariam diuiditur. 157
Recta cuiuis circumferentiæ æqualis, quo pacto facile reperiatur ex propria figura. 193
Rectæ duæ tangentes circulum, & in vno puncto coeuntes, maiores sunt omnib. chordis interceptum arcum diuidentibus in quotcunq; partes æquales. 196
Rectæ lineæ adiungere rectam, ita vt quadratum totius compositæ æquale sit quadrato rectæ adiunctæ, vna cum quadrato rectæ, quæ ex adiuncta, & proximo segmento prioris lineæ conflatur. 191
Rectæ tres circulum tangentes, & in duobus punctis coeuntes, maiores sunt omnibus chordis arcus duos interceptos in partes æquales secantibus. 196
Rectæ lineæ circumferentiam æqualem reperire. 194
Rectæ quamuis minimæ exhibere multiplicem quamcumque, etiamsi circino ipsa non accipiatur. 207
Rectæ lineæ sub dimensionem cadentes quæ sint. 43
Rectam lineam transuersam in Horizonte, cuius vtrumque extremum in spici potest, per quadrantem notam efficere. 55
Rectam lineam transuersam in Horizonte, cuius vtrumq; extremum videri potest, per quadratum metiri. 83
Rectam lineam, ad cuius extrema accedere non liceat, dummodo ea appareant, & ipsa recta linea producta ad pedes mensoris pertingat, ex altitudine aliqua nota, per quadrantem metiri. 43
Rectam lineam in Horizonte per quadratum metiri, quando mensor in vno eius extremo existens alterum extremum videre non potest, neque altitudo in promptu est, sed solum ad dextram, vel sinistram per lineam perpẽdicularem recedere potest ad locum, è quo alterũ extremũ appareat. 84
Rectam lineam, quando mensor in vno eius extremo, vel in aliqua altitudine nota ad planum, in quo est recta, perpendiculari existens alterum extremũ videre potest, per quadrantem metiri. 43
Rectam lineam è directo mensoris positam, cuius vtrumque extremum, vel alterum non appareat, nisi ad dextram, vel sinistram mensor accedat, per quadrantem comprehendere. 56
Rectam lineam in Horizonte è directo mensoris iacentem, per quadratum cognoscere, ad cuius extrema neque accedere liceat, neque è loco mensoris eam dimetiri: dummodo ad dextram, vel sinistram per lineam perpendicularem ad locum aliquem ire posit mensor, ex quo vtrumque extremũ appareat. 85
Rectam lineam in Horizonte inter turrim aliquam, & aliud quodpiam signum, ex turri per duas stationes in fastigio factas, vel in duabus fenestris, quarum vna sit ad perpendiculum sub alia, quando spatium inter illas fenestras notum est, etiamsi totius turris altitudo sit ignota, per quadrantem dimetiri. Atque hinc obiter altitudinem turris patefacere. 55
Rectam arcui quadrantis æqualem reperire. 191
Rectam lineam datam per instrumentum partium diuidere, vt alia recta diuisa est. 8
Rectanguli trianguli area, ex latere, quod recto angulo opponitur, & vno angulo acuto. 110
Rectanguli trianguli area, ex vno latere circa angulum rectum, & vno angulo acuto. ibid.
Rectangulorum duorum triangulorum similium proprietas quædam. 178
Rectanguli trianguli area, ex vno latere circa angulum rectum, & latere, quod recto angulo opponitur. 110
Rectanguli trianguli area. 109
Rectangulo dato supra datam rectam æquale rectangulũ facile construere. 107
Rectangulum, cuius duo excessus dantur, quibus diameter vtrumque latus superat, constituere. 205
Rectangulum dato rectilineo æquale facile construere. 200
Rectangulum, in quo excessus diametri supra maius latus, & maioris lateris supra minus datur, constituere. 206
Rectangulum sub differentia excessuum, quibus diameter alicuius rectanguli vtrumque latus superat, & minore excessu bis sumpto, vna cum quadrato minoris excessus bis sumpto æquale est quadrato rectæ, quæ minus latus minorem excessum superat. 204
Rectangulum sub segmentis diametri alicuius rectanguli (ductis per idem punctum diametri parallelis) comprehẽsum, æquale est duobus rectangulis sub segmentis duorum laterum inæqualium comprehensis. 208
Rectangulum sub diametro, & circumferentia maximi circuli in sphæra, quadruplum est circuli maximi, & superficiei conuexæ eiusdem sphæræ æquale. 137
Rectangulorum area. 103
Rectangulorum triangulorum rectilineorum problemata. 39
Rectarum duarum proportionem habentium, quã latus quadratricis ad basem, maior æqualis est quadranti circuli, cuius semidiameter est minor recta. 193
Rectilineam figuram planam, vel circulum in data proportione augere, vel minuere. 164
Rectilineum angulum in tres æquales angulos diuidere. 171
Rectis tribus datis in vno plano non parallelis, rectam ducere, etiam per datum interdum punctum in media, ita vt eius segmenta inter mediam, & extremas sint æquales, vel datam habeant proportionem. 169
Rectilineis duobus inæqualib. datis, ex maiore per lineam vni lateri parallelam detrahere rectilineum minori æquale 150
Rectilineo cuilibet æquale rectangulum facile construere. 199
Rectilineo dato æquale quadrilaterum inter duas rectas super datam rectam per lineam parallelam constituere. 148
Rectilineo in triangula resoluto ex vno aliquo puncto, rectas ipsis triangulis ordine proportionales inuenire. 151
Rectilineo dato parallelogrammum rectangulum æquale, & Isoperimetrum constituere. 241
Rectilineum datum per rectam à quouis angulo, vel puncto lateris, in datam proportionem secare. 152
Rectilineum datum ex angulo, vel puncto dato in latere, in quotuis partes æquales distribuere. 154
Rectilineum datum in quotuis partes æquales per rectam datæ rectæ parallelam distribuere. 157
Rectilineum datum per rectam datæ rectæ parallelam in datam proportionem diuidere. 154
Rectilineorum triangulorum obliquangulorũ problemata. 40
Rectilineorum triangulorum rectangulorum problemata. 39
Regionis, aut vrbis, vel campi situm in plano describere. 99
Rectis duabus datis, quarum maior diametrum quadrati minoris non superet: maiorem ita secare, vt partium quadrata simul sumpta quadrato minoris lineæ sint æqualia. 206
Reflexionis angulus cur angulo incidentiæ sit æqualis. 200
Regula communis mensorum in area cuiusuis figuræ, vel agri inuestiganda. 113
Regula propria extractionis radicis cubicæ. 170
Regula vnica ad omnes rectas dimetiendas, quando rerum extrema videntur. 101
Regulæ constructio loco fili cum perpendiculo. 13
Regulare corpus quodlibet dato cubo æquale constituere. 217
Regulari corpori sphæram æqualem exhibere. ibid.
Regularis figuræ area, cui rectangulo æqualis sit. 175
Regularis figuræ area, cui triangulo rectangulo sit æqualis. ib.
Regularis figura circulo circumscriptæ maiorem ambitum habet, quam circulus. 195. 196.
Regularibus figuris rectilineis circulus, cui isoperimetræ sunt, maior est. 223
Regularium figurarum Isoperimetrarum maior est illa, quæ plures continet angulos, pluraue latera. 176
Regularium figurarum areæ à triangulo vsque ad Dodecagonum, quando latus est vnitas. 117
Regularium figurarum area. 114
Regularium quinque corporum superficies conuexa. 135
Regularium quinque corporum area quæ. 133. 135
Rhomboidis, ac Rhombi area. 156
Rhombi ac Rhomboidis area. ibid.
Rhombum, ac Rhomboides, ex excessu diametri supra latus, &c. describere. 203

S.

Saccus tritici, quo pacto mensuretur. 133
Saxi regularis soliditas. ibid.
Scala altimetra quid. 54
Secãtes ac sinus quo pacto in instrumento partium capiãtur. 7
Sectoris circuli area. 127
Sectoris sphæræ soliditas. 143
Segmenta lateris trianguli obliquanguli à perpendiculari facta, ex datis tribus lateribus cognoscere. 40
Semicirculo, quadranti, octauæ parti circuli, &c, rectangulum constituere Isoperimetrum, & æquale. 241
Semidiametri circuli inuentio ex latere figuræ regularis inscriptæ. 115
Similem figuram pluribus figuris similibus, quarum latera homologa data sint, æqualem: Et circulum pluribus circulis, quorum diametri, circumferentiæue datæ sint, æqualẽ describere. 128
Similium duorum triangulorum rectangulorum proprietas quædam. 178
Similium duarum figurarum, aut circulorum proportio, ex datis duobus lateribus homologis, vel diametris, circumferentiisue. 128

Similes partes aliquot æ plurium magnitudinum eandem habent proportionem. 137
Sinus totus quando tam paruus est, vt in instrumentum partium transferri nequeat, quid agendum. 9
Sinu toto posito 10000. quo pacto in instrumento partiũ Tangentes sumantur. 7
Sinu toto posito 100. quo pacto Tangentes per instrumentum partium capiantur. 6
Sinus ac secantes quo pacto in instrumento partium capiantur. 7
Solidam figuram quamcunq; ex iis, de quibus Euclid. in Stereometria agit secundum proportionem datam augere, vel minuere. 164
Solida, vel corpora præcipua, quorum areæ inuestigantur, quæ 130
Solida, superficies, ac lineæ, penes quid mensurentur. 103
Soliditas cuiusuis portionis sphæræ. 143
Soliditas sphæræ. 139
Soliditas sphæræ vera minor, ex circumferentia maximi circuli. 142
Soliditas sphæræ vera maior, ex diametro circuli maximi. ibi.
Soliditas sphæræ vera minor, ex diametro maximi circuli. ibi.
Soliditas sphæræ vera maior, ex circumferentia circuli maximi. ibid.
Soliditas sphæroidis. 144
Soliditas, vel area hemisphærij. 143
Soliditas portionum sphæroidis. 144
Soliditas sectoris sphæræ. 143
Soliditas muri cuiusque. 133
Soliditas frusti regularis marmoris. ibid.
Soliditas frusti sphæræ. 147
Soliditas Conoidis Hyperbolici. 145
Soliditas Conoidis parabolici. 144
Soliditas vasis excauati. 132
Solidum planis superficiebus contentum, & circa sphæram circumscriptibile, cui solido rectangulo sit æquale. 183
Solidorum quinque regularium area quæ. 178.179
Solidorum quinq; regularium superficies conuexa. 179
Solidorum omnino irregularium area. 145
Solidum minus ex maiori detrahere, residuumque in cubum transformare. 217
Solidum rectangulum supra basem quotcunque angulorum datæ sphæræ æqualem construere. ibid.
Solis, vel stellæ cuiusuis altitudinem per quadratum obseruare. 66
Spatium terræ inæquale pro ducendis aquis librare: aut etiã, si lubet, Horizonti æquidistans efficere. 101
Spatium inter duo puncta in quolibet plano eleuato, siue illud ad Horizontem sit rectum, siue inclinatum, per quadrantem metiri. 53
Species radicum infinitæ. 166
Speculi plani beneficio altitudinem monti impositam, si modo altitudinis basis possit conspici: Vel portionem superiorem alicuius turris, metiri. 99
Speculi plani beneficio altitudinem, ad cuius basem pateat accessus, vna cum distantia speculi à cacumine altitudinis, deprehendere. 97
Speculi plani beneficio altitudinem inaccessibilem, vna cum speculi distantia tam à base, etiam non visa, quam à cacumine altitudinis, cognoscere. 98
Sphæra ad cubum circumferentiæ maximi circuli, maiorem proportionem habet, quam 49. ad 2904. minorem vero, quam 5041. ad 298374. 138
Sphæra quolibet cono, & cylindro sibi Isoperimetro maior est 141
Sphæra æqualis est solido rectangulo comprehenso sub semidiametro, & tertia parte superficiei conuexæ. 183
Sphæra maior est quouis corpore regulari sibi Isoperimetro 184
Sphæra omnibus corporib. sibi isoperimetris, quæ planis superficiebus contineantur, circaq; alias sphæras circumscriptibilia sint, maior est. ibid.
Sphæra omnibus corporibus sibi isoperimetris, & circa alias sphæras circumscriptibilibus, quæ superficieb. conicis contineantur, maior est. 185
Sphæræ area, vel soliditas, ex diametro maximi circuli. 143
Sphæræ datæ conum efficere æqualem. 217
Sphæræ datæ cylindrum æqualem exhibere. ibid.
Sphæræ datæ cubum æqualem: Et dato cubo æqualem sphæram efficere 216
Sphæræ datæ pyramidem constituere æqualem. 217
Sphæræ datæ solidum rectangulum æquale supra basem quotcunq; angulorum constituere. ibid.
Sphæræ superficies vera minor, ex circũferentia maximi circuli. 142
Sphæræ supficies vera minor, ex diametro circuli maximi. ibi.
Sphæræ superficies vera maior, ex diametro circuli maximi. i.
Sphæræ area, seu soliditas vera minor, ex circumferentia circuli maximi. 143
Sphæræ area, seu soliditas maior, quam vera, ex circumferentia maximi circuli. ibid.
Spæræ area. siue soliditas, ex diametro maximi circuli. ibid.
Sphæræ soliditas. 139
Sphæra ad cubum diametri sphæræ: maiorem proportionem habet, quam 223. ad 426. minorem vero, quam 11. ad 21. ibi.
Sphæræ superficies conuexa cui rectangulo sit æqualis. 137
Sphæræ superficies conuexa ad quadratum circumferentiæ circuli maximi, maiorem proportionem habet, quam 7. ad 22. minorem vero, quam 71. ad 223. 138
Sphæræ segmentorum area. 142
Sphæræ superficies ad quadratum circumferentiæ circuli maximi est, vt diameter ad circũferentiã circuli maximi. 137
Sphæræ superficies vera maior, ex circumferentia circuli maximi. 141
Sphæræ portionis superficies conuexa. 144
Sphæræ portionis soliditas. 143
Sphæræ area, eiusdem q; superficies conuexa. 137.139
Sphæræ superficies ad quadratum diametri sphæræ, vel circuli maximi maiorem proportionem habet, quam 223. ad 71. minorem vero, quam 22. ad 7. 138
Sphærã duabus, aut pluribus sphæris æqualem describere. 218
Sphærã dato corpori regulari æqualem constituere. 217
Sphæram dato prismati æqualem construere. ibid.
Sphæram minorem ex maiori detrahere, residuoq; æqualem sphæram exhibere. 218
Sphæroidis portionum soliditas. 144
Sphæroidis area, vel soliditas. ibid.
Sphæram, vel figuram solidam in data proportione augere, vel minuere. 164
Squadra Zoppa apud Italos quid, eiusque vsus. 101
Stabilis quadrans quid. 14
Stationum differentia quid. 44
Stellæ cuiusuis, vel Solis altitudinẽ p quadratũ obseruare. 66
Superficies conuexa quinq; corporum regularium. 135.
Superficiei conicæ proportio ad suam basem: 146
Superficies conuexa sphæræ, eiusdemq; area. 137. 140
Superficies conuexa hemisphærij. 142
Superficies conuexæ sphæræ ad quadratum circumferentiæ circuli maximi, maiorem proportionem habet, quam 7. ad 22, minorem vero quam 71. ad 223. 138
Superficies, lineæ, ac solida, penes quid mensurentur. 103
Superficies conuexa sphæræ cui rectangulo sit æqualis. 137
Superficies sphæræ vera maior, ex circumferentia circuli maximi 141
Superficies sphæræ vera maior, ex diametro maximi circuli. ibid.
Superficies sphæræ vera minor, ex circumferentia circuli maximi. ibid.

Super-

Superficies sphæræ vera maior, ex diametro maximi circuli. i.
Superficies sphæræ vera minor, ex circumferentia circuli maximi. ibid.
Superficies sphæræ vera maior, ex diametro maximi circuli. i.
Superficies sphæræ ad quadratum circumferẽtiæ circuli maximi est, vt diameter ad circũferentiã circuli maximi. 137
Superficies conuexa portionis sphæræ. 142
Superficies sphæræ ad quadratum diametri circuli maximi, maiorem proportionem habet, quam 223. ad 71. minorem vero quam 22. ad 7. 138
Superficies conuexa coni, & cylindri recti. 146.
Superficies cylindrica, demptis basibus. ibid.
Superficies frusti coni, demptis basibus. ibid.
Surdesolidæ radicis extractio. 168

T.

Tabula continens latera figurarum regularium à triangulo vsque ad figuram 80. laterum, posita diametro 20000000. vel sinu toto 10000000. 115
Tabula mirifica ad depromendos numeros pro singulis radicum speciebus. 166
Tabulæ constructio & vsus pro minutis, & sec. ex quadrante cognoscendis. 16
Tabula gnomonica. 68
Tabulæ gnomonicæ facillima constructio, eiusque vsus. 66
Tabulæ pro minutis ad plures quadrantes extensio sine regula aurea. 16
Tabula pro minutis, & secundis ex quadrante inuestigãdis. 17
Tabula quadratorum, & cuborum vsq; ad radicem 1000. 220
Tabella pro min. & sec. cognoscendis ex quadrãte cõstructo. 15
Tangens quando superat sinum totum, quid agendum, vt per vnicam translationem per instrumentum partium punctum quæsitum reperiatur. 9
Tangentes, posito sinu toto 10000. quo pacto in instrumento partium sumantur. 7
Tangentes quo modo inueniantur ope instrumenti partium, posito sinu toto 1000. 7
Tangentes tres in duob. punctis coeuntes, maiores sunt omnibus chordis duos arcus interceptos in partes æquales secantibus. 196
Tangentes duæ in vno puncto coeuntes, maiores sunt omnibus chordis arcum interceptum in quotcunq; partes æquales diuidentibus. 195
Tangentes quo modo accipiantur respectu sinus totius 100. ope instrumenti partium. 6
Tangentes quo pacto sumantur, quando instrumentum partium continet 1000. partes. 6
Tangente aliqua inuenta in latere instrumenti partium, quo pacto eadem reperiatur respectu dati sinus totius. 7
Tangentes perexiguæ quo pacto in instrumento partium sumantur. 7
Terræ ambitum ex edito aliquo monte metiri. 214
Tertia & quarta proportionalis, quo pacto per instrumentum partium reperiatur. 9
Trabis longitudinem ad Horizontem inclinatæ, cuius portio superior tantum conspiciatur, vna cum angulo inclinationis, distantia basis à mensore, & altitudine fastigij supra Horizontem, per quadratum metiri. 101
Trapezij habentis duo latera parallela, area. 111
Trapezij irregularis facilis dimensio. 114
Trapezij nulla latera habentis parallela, area. 157
Triangula duo Isoscelia similia basium inæqualiũ, simul maiora sunt duobus Isoscelibus simul super easdem bases, quæ quidem inter se sint dissimilia, prioribus vero Isoperimetra habeant q; quatuor latera inter se æqualia. 179
Trianguli Isoscelis area. 109
Trianguli obliquãguli area, ex vno latere, ac duob. angulis. 111
Arianguli obliquanguli area, ex duobus lateribus, & angulo ab ipsis comprehenso. ibid.
Trianguli rectanguli area, ex vno latere circa angulum rectũ & latere, quod recto angulo opponitur. 110
Trianguli pulchra proprietas, si in eo ducatur vni lateri parallela, &c. 158
Triangulis duobus Isoscelibus datis, quorum bases sint inæquales, & duo latera vnius duobus alterius æqualia: super eisdem basibus duo triangula Isoscela similia, & prioribus simul sumptis Isoperimetra constituere. 178
Trianguli æquilateri area. 109
Trianguli cuiuslibet area cui rectangulo sit æqualis. 174
Trianguli rectanguli area. 109
Trianguli rectanguli area, ex vno latere circa angulum rectum, & vno angulo acuto. 111
Trianguli rectanguli area, ex latere, quod recto angulo opponitur, & vno angulo acuto. 110
Arianguli insignis proprietas, si in eo à duobus angulis ad media puncta oppositorum laterum rectæ ducantur, &c. 158
Triangulo duorum laterum inæqualium supra tertium latus triangulum constituere priori Isoperimetrum duorum æqualium laterum. 177
Triangulo parallelogrammum æquale, & Isoperimetrum cõstituere. 186
Triangulorum rectilineorum rectangulorum problemata. 39
Triangulorum duorum rectangulorum similium proprietas quædam. 178
Triangulorum Isoperimetrorum eandem habentium basem, maius erit illud, quod duo latera habet æqualia. 177
Triangulorum rectilineorum obliquanguloru problemata. 40
Triangulum datũ ex dato puncto in latere in quotlibet partes æquales diuidere. 159
Triangulum datum per lineas vni lateri parallelas in quotlibet partes æquales distribuere. ibid.
Triangulum datum per rectam ex puncto extra triangulum dato in duas partes æquales partiri. 160
Triangulum totum ad triangulum abscissum per rectam, est, vt rectangulum sub duobus laterib. sectis ad rectangulum sub duobus lateribus trianguli abscissi comprehensum. 292
Tritici aceruus, quo pacto mensuretur. 133
Tritici saccus, quo pacto mensuretur. ibid.
Turris, aut montis altitudinem, ex eius summitate per quadratum dimetiri, quando in plano summitatis Horizonti æquidistante duæ stationes fieri possunt, & signum aliquod in Horizonte cernitur. 81
Turris, aut alterius rei altitudinem per baculũ indagare. 94
Turris, aut alterius rei altitudinem, per Normam inuestigare. ibid.
Turris, vel montis altitudinem ex eius summitate per duas stationes in basa aliqua erecta factas, inuestigare per quadratum, quando signum aliquod in Horizonte videri potest. 82
Turris altitudinem ex eius vertice per vnicam stationem per quadrantem metiri, si distantia signi in Horizonte visi vsque ad basem turris nota sit. 51
Turris, vel montis altitudinem, ex eius summitate per vnicã stationem, ope quadrati stabilis metiri, vna cum distantia signi visi in Horizonte vsq; ad turrem, vel montis perpendiculum. 82
Turris, aut montis altitudinem ex eius vertice per quadrantem metiri, si in plano, cui insistit, spatium aliquod è directo mensoris positum notum sit. 52
Turris, vel montis altitudinem ex eius fastigio, quando è directo mensoris interuallum aliquod inter duo signa, vel etiam inter signum quodpiam, ac turrim cognitum est, per quadratum conijcere. 85
Turris, aut montis altitudinem ex eius vertice per duas stationes in eiusdem summitate factas, è quibus signum aliquod in Horizonte appareat, per quadrantem dimetiri.

Atque

Atque hinc ipsam quoq; distantiam à turris base, vel perpendiculo montis ad signum illud inuestigare. 48
Turris, aut montis altitudinem ex eius vertice per duas stationes in hasta aliqua erecta, vel in duabus fenestris turris, quarum vna sit supra aliam, factas, è quibus signum aliquod in Horizonte videri possit, per quadrantem metiri. Atq; hinc distantiam quoque à perpendiculo turris, vel montis, vsque ad signum visum cognoscere. 50
Turrium duarum summitatibus visis, etiamsi bases propter ædificia interiecta occultentur, distantiam tam inter earum bases, quam inter earundem fastigia, vna cum ipsarum altitudinibus, ac distantiis à mensore, per quadratum conijcere. 101

V.

VAllis profunditatem, eiusdemq; descensum obliquum, si non sit valde inæqualis, eiusq; terminus, vel aliquod in valle signum conspici possit, per quadrantem scrutari. 63
Vallis profunditatem, eiusdemq; descensum obliquum, si non sit valde inæqualis, & eius terminus, vel aliquod in ea signum conspici possit, per quadratum cognoscere. 92
Varia instrumenta mensurandi. 42
Vasis excauati soliditas. 133
Vasis excauati capacitas. ibid.
Vmbra recta, ac versa quo pacto in quadrato Geometrico cognoscenda sit. 65
Vmbræ longitudinem ab altitudine, Sole lucente, proiectæ, quando altitudo est cognita, ope quadrati adipisci. 96
Vmbra recta ac versa in quadrato quæ & in quot partes à Geometris vtraque secetur. 66
Vmbra recta ac versa in quot partes in hoc opere diuidatur. ibid.
Vmbræ rectæ ad versam reductio, & contra. 95
Vrbis, vel campi, aut regionis situm in plano describere. 109
Vsus & constructio tabulæ prominutis & sec. cognoscendis ex quadrante. 15
Vsus quadrantis constructi in minutis, & secundis exquirendis. 13
Vsus tabulæ quadratorum, & cuborum in extrahendis radicibus quadratis & cubicis. 14

FINIS.

CHRISTOPHORI CLAVII BAMBERGENSIS E SOCIETATE IESV,

EPITOME ARITHMETICÆ PRACTICÆ.

BENEVOLO LECTORI.

In Epinomide.

CVM omnis me Mathematicarum rerum cognitio delectat, tum verò ex Arithmeticæ tractatione incredibilem capio voluptatem; idq; non solum ob eximiam quandam eius dignitatem, sed etiam, quòd sine Arithmetica, vt ego quidem existimo, nulla scientia, vt Plato andet dicere, neque ipsa hominum societas possit consistere. Plurima enim in mutuis commerciis, conuentisq;, quibus ferè hæc hominum coniunctio continetur, tempora incidunt, vt rationes accepti, & expensi reddendæ, reposcendæve sint, tabulæ conficiendæ, numerus æqualiter, vel inæqualiter, certa quadam proportione seruata, in plures partes diuidendus, summa subducenda; quibus in rebus circumuenire, & circumueniri,

In Epinomide, & in 7. de Repub.

æque turpe, & pernicioſum eſt: Itaque audacius illud quidem ſed tamen verè dixit Plato, prudentiam, atque adeo humanitatem omnem è mundo eos tollere, qui Arithmeticam è vita tollant; cum ſine ea neq; publicæ, neque priuatæ res conſtare poſſint. Iam vero cæteræ diſciplinæ ſic Arithmetica nituntur, vt hæc non videatur concidere poſſe, quin illæ caſu eodem labefactatæ corruant. Neque enim aut Aſtrologus, aut Geometra theoremata in vulgus probabit ſua, vt non ſolum veritatem, ſed etiam voluptatem habeant cum vtilitate coniunctam, qui vniuerſam numerorum naturam animo penitus comprehenſam non habuerit: quod ſi tantillum in rationibus putandis lapſus fuerit, iam cæterarum rerum ingentem ruinam

In 7 de Repub.

videas. Atque id circo princeps ingenij Plato hanc veſtibulum, & aditum ad reliquas doctrinas voluit eſſe, non ea ſolum cauſa, quod illæ ſine numeris nullæ ſint, verum etiam quod numerorum tractatione nitеſcit animus, & præparatur ad reliquos doctrinæ ſatus recipiendos. Huius ego præſtantiſſimæ ſcientiæ pulchritudine captus, olim dederam me ad totam numerorum naturam inueſtigandam, vt cum illam animo, ſcientiaq; comprehendiſſem, tum demum literis eam illuſtrarem, atq; Arithmeticæ præcepta, Algebraq; documenta, (rem ita non omnibus cognitam) quibus in vita præclarius vix aliquid reperias, ad certa quædam capita, & faciliores demonſtrationes reuocarem, vt cuiuis aperta, & prompta eſſent. Res erat præclara illa quidem, ſed multi laboris, atque temporis. Itaque interea dum opus illud à me limatur politius, cœpi, quæ ex multorum libris diſperſa collegeram, ſeparatim ad meum vſum in commētariolum referre, vt videlicet ad manus mihi eſſent, meisq; auditoribus explicarem: qui enim hactenus Arithmeticam tractarunt, vel aut multitudine præceptorum rem perturbarunt, aut breuitate obſcurarunt, ſic, vt (in quo tamen de nullius exiſtimatione detractum velim) quē in hac ſcientia magiſtrum, & ducem tyrones ſequantur, vix inueniant. Is libellus cum imprudenti mihi excidiſſet, & in manus hominum veniſſet, ſummis precibus contenderunt à me viri graues, vt eum cum plurimis communicarem, quòd fore dicerent, vt is vtiliſſimus accideret cum cæteris ſtudioſis, tum vero iis, qui noſtras ſcholas frequentant: quorum vtilitati nolle conſultum, non eſſe eius, qui ſua, ſuaq; omnia Dei gloriæ, omniumq; commodis conſecraſſet. Horum ego precibus, & auctoritate inductus, hunc libellum typis mandare conſtitui, quem tu videlicet, Lector, eo animo ſuſcipias velim, quo damus: atq; eo tantiſper vtere, dum maius illud Arithmemeticæ opus in lucem exeat, quod propediem, Deo iuuante, fore ſperamus. Vale.

NVME-

NVMERATIO INTEGRORVM NVMERORVM.

CAPVT I.

Numeratio quid.

NVMERATIO eſt cuiuſuis numeri propoſiti per proprios characteres, ac figuras deſcriptio, atque expreſſio.

Decem figuræ numerorum.

VTVNTVR autem Arithmetici decem characteribus, ſiue figuris ad omnium numerorum deſcriptionem, videlicet.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0.

quarum priores nouem dicuntur ſignificatiuæ. Quælibet enim illarum tot vnitates ſignificat, quotum ipſa locum in appoſita ſerie occupat, vt hæc figura 6 ſignificat ſex vnitates: quia ſexto loco poſita eſt: atque ita de cæteris. Decima autem figura, & vltima nihil per ſe ſignificat, dicituŕque cifra; auget tamen ſignificationem, ac valorem aliarum figurarum, vt ex ſequentibus perſpicuum fiet.

Quot loca ſint in quolibet numero. Prima figurá, & vltima in quouis numero quæ ſit.

IN quolibet numero, qui pluribus figuris ſcribitur tot dicuntur eſſe loca, quot ſunt figuræ ſiue ſignificatiuæ, ſiue non ſignificatiuæ: primusque locus, ſeu prima figura eſt, quæ extrema eſt verſus dexteram; ſecundus vero locus, ſeu ſecunda figura eſt illa, quæ proxime primam conſequitur verſus ſiniſtram, atque ita deinceps: adeo vt ille locus, ſeu figura dicatur vltima, quæ primam ſedem ad ſiniſtram occupat. vt hic 4352. prima figura eſt 2. & vltima 4. Si tamen ſingulæ figuræ ſingulos numeros repræſentent, hoc modo. 4.3. 5.2. prima figura erit 4 vltima vero 2. Cur autem ordo locorum, figurarumve in quolibet numero progrediatur à dextra verſus ſiniſtram, cauſa hæc eſt: quoniam à Phœnicibus inuenta eſſe dicitur Arithmetica, qui ſcribere ſolent à dextra ſiniſtram verſus, more Hebræorum, Arabum, & Chaldæorum.

Ordo locorum in quouis numero cur à dextra ſiniſtram verſus procedat.

QVÆLIBET figura in primo loco poſita ſeipſam ſimpliciter repræſentat, in ſecundo decies ſeipſam ſignificat, in tertio centies, in quarto millies, in quinto decies millies, in ſexto centies millies, in ſeptimo millies millies, atque hoc pacto in infinitum: ita vt loca ordine ſeſe ſuperent in decuplá proportione, vt ſecundus primum, tertius ſecundum, quartus tertium, &c. vt hic 34567. prima figura 7. ſignificat tantum ſeptem vnitates: ſecunda 6. ſignificat ſexaginta, nempe decies 6. tertia 5. quingentas, id eſt, centies 5. quarta 4. quatuor millia vnitatum, hoc eſt, millies 4. quinta 3. triginta millia vnitatum, ſiue decies millies 3. Itaque totus ille numerus ita proferendus erit. Triginta quatuor millia, quingenta, & ſexaginta ſeptem. Eodemque modo quicunque alius numerus exprimi poterit, ſi diligenter notetur, quoties quælibet figura ſeipſam ſignificat in varijs locis poſita.

Quid quælibet figura in dato numero ſignificet.

CÆTERVM vt facilior reddatur numeratio, diſtribuendus erit numerus in membra, hoc modo. Supra primam figuram ad manum dextram ponatur punctum: Deinde procedendo verſus ſiniſtram, & omiſſis duabus figuris, ſupra ſequentem figuram quarto loco poſitam aliud punctum ſtatuatur: Et ſic deinceps, omiſſis ſemper duabus figuris ſine punctis, ſupra ſequentem figuram punctum ſcribatur. vt hic factum eſſe vides.

Figura in quouis numero ſe ordine ſuperant in decupla proportione.

. . . . . .
4232908956280 0

Quid obſeruandũ ſit, vt datus numerus exprimatur.

Quælibet enim figura ſub quocunque puncto cum duabus antecedentibus verſus ſiniſtram conſtituit vnum membrum, ita vt ſingula membra ternis figuris conſtent, vltimo membro verſus ſiniſtram excepto, quod aliquando vnicam figuram habere poteſt, illam nimirum, quæ ſub puncto collocatur; quemadmodum in propoſito exemplo in quinque membra diſtributo contingeret, ſi vltima hęc figura 4. tolleretur: aliquando verò duas, vt in dato exemplo.

ITAQVE vt quicunque numerus enuncietur, ſatis eſt, ſi quotlibet membrum ſeorſum exprimatur, cuius prima figura vnitates ſignificat, ſecunda denas vnitatum, & tertia centenas. Sed poſt pronuntiationem cuiuſuis membri apponenda eſt hæc vox [Mille] toties, quot membra ſequuntur illud, quod enunciatur, ita tamen, vt primum ea vox ponatur in recto pluralis numeri, deinde verò ſemper dicatur [Millies] vt mox audies,

ILLVD porro membrum, quod vltimum eſt verſus ſiniſtram, primum eſt in enunciatione, & quod

primum est ad partem dexteram, in enunciatione est vltimum. Numerus ergo paulò ante propositus ita pronunciabitur. PRIMVM membrum 42.sic. Quadraginta duo millia, millies, millies, millies, millies, ita vt vox [mille] quater audiatur, propter quatuor membra, quæ hoc, quod enunciatur, subsequuntur.

SECVNDVM membrum 329. hoc modo, Trecenta, vigintinouem millia, millies, millies.

TERTIVM membrum 089. ita Octoginta nouem millia, millies.

QVARTVM membrum 562. sic. Quingenta, sexaginta duo millia.

QVINTVM denique membrum 800. hoc pacto. octingenta.

FACILIOR adhuc reddetur numeratio, si pro primo puncto ponatur 0. & 1. pro secundo puncto, & 2. pro tertio, & 3. pro quarto, & ita deinceps, vt hic in eodem exemplo factum esse vides.

4 3 2 1 0
42329089562800

HAC enim ratione facile intelligitur, quoties vox [mille] apponenda sit in cuiusque membri enunciatione. Toties enim proferenda est, quot vnitates in figura, quæ supra membrum pronuntiandum posita est, continentur.

IAM vero si more Italorum millena millia appellare velimus Milliones, paucioribus verbis, & fortasse significantius, numerum quemcunq; propositum exprimemus, si in maiora eum membra distribuamus, hoc, qui sequitur, modo. Supra primam figuram ad manum dextram ponatur 0. Deinde, omissis quinq; figuris intermedijs, collocetur 1. supra sequentem figuram, quæ septimum locum occupat. Post hanc, omissis rursus quinq; figuris, scribatur 2. supra figuram, quę tertium decimum occupat locum. Atq; ita deinceps, omissis semper quinque figuris, ponatur 3. 4. 5. &c. Vt hic in eodem exemplo factum est.

2 1 0
42329089562800

QVODLIBET membrum continet sex figuras (vltimo membro excepto, quod vnicam potest habere figuram, vel duas, vel tres, vel quatuor, vel quinq; tantum) quę omnes simul enunciandę sunt, & post enunciationem cuiusuis membri toties dictio [Millio] addenda, quot vnitates sunt in figura supra membrum posita, primo quidem in recto, deinde vero semper in aliquo. Vt autem quotlibet membrum facilius enuncietur, ponendum erit punctum sub quarta eius figura, quod significabit, locum ibi millenarum esse. Igitur superius exemplum ita proferendum erit. Quadraginta duo milliones millionum; trecenta viginti nouem millia millionum, octogintanouem milliones: quingenta sexaginta duo millia, octingenta.

ADDITIO INTEGRORVM NVMERORVM.

CAPVT II.

Additio quid. Numeri addendi quo pacto sint collocandi. Quo pacto fiat additio.

ADDITIO est duorum, vel plurium numerorum in vnam summam collectio.

NVMERI addendi ita sunt collocandi, vt vno sub altero posito, primæ figuræ inter se respondeant, item secundæ inter se, & tertiæ, & quartæ, &c. adeo vt defectus figurarum, si quis est, cernatur ex parte sinistra. Vt hi numeri addendi, 710654. 8907. 56789. 880. collocandi erunt, vt hic apparet.

710654
8907
56789
880

777230

8 X 8

DVCTA deinde linea sub numeris addendis, adduntur primum omnes primæ figurę inter se, & numerus compositus, si vnica figura scribi potest, sub primis figuris infra lineam ponitur, si vero duabus figuris scribendus est, ponitur sola prima earum, & reliqua seruatur, vt deinde secundis figuris inter se addendis adijciatur. Post hæc adduntur secundæ figuræ eodem modo, addita prius illa, quæ seruata est, si qua tamẽ seruata sit, item q; tertiæ, quartæ, & aliæ. Quod si ex additione vltimarum figurarum numerus componatur duabus figuris scribendus, ponendæ sunt ambæ sub linea, nulla retenta, quod tunc tota additio peracta sit. Verbi gratia. In primis figuris propositi exempli 0. & 9. faciunt 9. addo 7. fiunt 16. addo 4. fiunt 20. Pono ergo sub primis figuris 0. & seruo 2. Deinde in secundis figuris, ex 2. (quam figuram seruauerã) & 8. fiunt 10. addo 8. fiunt 18. addo 5. fiunt 23. Pono ergo figuram 3. sub secundis figuris, & retineo 2. Post hæc accedo ad tertias figuras, vbi ex 2. (quam figuram retinueram) & 8. fiunt 10. addo 7. fiũt 17. addo 9. fiunt 26. addo 6. fiũt 32. Pono ergo 2. sub tertijs figuris, & retineo 3. Rursus in quartis figuris, ex 3. (q̃ figura retẽta erat) & 6. fiunt 9. addo 8. fiunt 17. addo 0. fiũt 17. Pono ergo 7. sub quartis figuris & seruo 1. quam addo quintis figuris, efficioq; 7. Pono igitur 7. sub dictis figuris, & nihil reseruo. Postremo quia in vltimo loco sola hæc figura 7. reperitur, pono eam sub linea, absolutaque erit additio. Quemadmodum autem figuras numerorum addendorum inter se addidimus ab inferioribus versus superiores ascendendo, ita quoq; colligi possunt in vnam summam, si à superioribus versus inferiores descendatur.

QVOD

Quid faciendum sit, quando ex figuris vnius loci colligitur numerus tribus figuris scribendus.

QVOD si quando ex additione figurarum vnius loci excreuerit numerus tribus figuris scribendus, ponenda erit prima figura sub illo loco, & reliquæ duæ figuris sequentium locorum addendæ, prima videlicet earum figuris proximi loci, & secunda figuris alterius loci: aut certe numerus duabus illis figuris retentis expressus sequentis loci figuris addendus. Vt in appositio exemplo, quoniã ex primis figuris colligitur numerus hic 102. scribenda erit figura 2. sub primo loco, & figura 0. addenda figuris secundi loci, figura vero 1. figuris tertij loci. Vel totus numerus retentus 10. addendus figuris secundi loci, vt colligatur numerus 15. cuius figura 5. sub secundo loco ponatur, & figura 1. figuris tertij loci addatur, &c. Vtroq; enim modo idem semper numerus colligetur. Examinatum autem vides hoc exemplum per abiectionem 9. de quo examine mox dicemus.

6008
5009
4009
308
239
108
108
309
4128
3009
209
308

23752

1 X 1

Quid faciendum sit, quando multi numeri addendi sunt.

Recte porro feceris, quando sunt multi numeri addendi, si eos in plures classes distribuas, & ex singulis classibus singulas summas colligas. Nam si demum hasce summas in vnam redigas summam, habebis summam ex omnibus datis numeris collectam, vitabisque molestiam, quæ in tot figuris in vnam summam colligendis necessario occurrit. Vt si proximum exemplum in quatuor hasce classes partiaris, & singularum summas, 15026. 655. 4545. 3526. in vnam summam redigas, efficies summam, 23752. eandem, quam prius collegeramus, vt hic apparet. Perspicuum autem est, hoc posteriori modo non tam facile errorem posse committi, quam priori, quod in hoc non tot figuræ, quot in illo simul addantur.

6008	308	108	3009
5009	239	309	209
4009	108	4128	308
15026	655	4545	3526

15026
655
4545
3526

23752

Prima probatio additionis per 9 reiiciendo.

Post absolutam additionem solent Arithmetici eam examinare, sicut & alias operationes, quæ sequuntur, num recte facta sit, an non. Quod quatuor modis fieri potest in additione. Primum per abiectionem nouenarij, hoc pacto. Reiiciantur 9. ex omnibus numeris addendis, quoties fieri potest, & quod reliquum est, ponatur seorsum. Deinde ex summa collecta reiiciantur quoque 9. quoties fieri potest, & quod reliquum est, notetur. Si enim hoc illi priori, quod reliquum fuit, æquale est, recte instituta fuit additio: Si vero inæquale, non recte. Vnde iteranda erit additio, vt error corrigatur. Ita vides in superiori exemplo relictum fuisse numerum 8. post abiectionem numeri 9. tam ex omnibus numeris addendis, quam ex summa collecta, qui numerus 8. collocatus est in cruce quadam in hunc finem constructa.

Qua ratione ex quonis numero reiiciantur facile 9. quoties fieri potest.

Cæterum, vt facile abiiciantur 9. satis est, vt figuræ numerorum, ac si omnes primum occuparent locum, inter se addantur, & cum primum summa fuerit 9. aut excesserit 9. ita vt duabus figuris scribatur, reiiciantur 9. vel duæ illæ figuræ inter se addantur, & summa hæc cum sequenti figura addatur eodem modo, &c. Est enim mirabilis hæc proprietas nouenarij, vt si figuras cuiuscunque numeri inter se addas, & ex summa reiicias 9. vel certe, si summa hæc duabus figuris scribitur, duas has figuras in vnam summam colligas, tantundem relinquatur, vel componatur, quantum relinqueretur, si reiiceres 9. toties ex toto numero, quoties potes. Vt si ex hoc numero 38. reiiciantur 9. quoties id fieri potest, nempe quater remanent 2. quater enim 9. faciunt 36. Quod si dicas, 3. & 8. (sumendo figuras eiusdẽ numeri 38. seorsum.) faciunt 11. & reiicias 9. Vel certe dicas, 1. & 1. faciunt 2. (sumendo etiam figuras huius numeri 11. proxime compositi seorsum) habebis eadem 2. quæ prius reliqua fuerunt. Ita quoque si ex hoc numero 41. reiiciantur 9. quoties fieri potest, nempe quater, remanent 5. Et si dicas, ex 4. & 1. (sumendo figuras numeri 41. seorsum) fiunt etiam 5. Denique ex numero 78. si abiiciantur 9. quoties fieri potest, nempe octies, relinquuntur 6. Et si dicas, 7. & 8. faciunt 15. reiiciasque hinc 9. Vel certe dicas, 1. & 5. faciunt 6. tantundem habebis, quantum prius reliquum fuit. Eademque ratio est de cæteris.

Mirabilis proprietas nouenarij.

Itaque vt videas, qua ratione examen additionis instituendum sit, examinabimus primum exemplum hoc modo.

7. & 1. faciunt 8. Additis 6. fiunt 14. id est, 5. Nam 1. & 4. faciunt 5. quantum nimirum relinqueretur, si 9. ex 14. reiicerentur, vt dictum est. Additis 5. ad illa 5. fiunt 10. id est, 1. Additis 4. fiunt 5. Additis 8. fiunt 13. hoc est, 4. additis 7. fiunt 11. (Nam 9. semper omittuntur, cum sint perpetuo abiicienda) id est, 2. Additis 5. fiunt 7. Additis 6. fiunt 13. hoc est, 4. Additis 7. fiunt 11. id est, 2. Additis 8. fiunt 10. id est, 1. Additis 8. fiunt 9. id est, 0. Nam 9. reiicienda sunt. Remanent autem 8. quæ in altera parte crucis colloco. Deinde in summa producta, ex 7. & 7. fiunt 14. id est, 5. Additis 7. fiunt 12. id est, 3. Additis 2. fiunt 5. Et tandem additis 3. fiunt 8. vt prius, quæ statuo in oppositа parte crucis, vt appareat æqualitas numerorum, qui post abiectionem 9. reliqui fuerunt.

710654
8907
56789
880

777230

8 X 8

Probatio per 9. fallax est, & quare fallax sit.

Quoniam vero hac ratione non reiiciuntur 9. quoties fieri potest, sed tantum per dictam proprietatem nouenarij inquiritur residuum, quod remaneret, si omnia 9. reiicerentur, fit, vt hoc examen per abiectionem 9. institutum fallax sit; vt in hoc exemplo apparet. Nam summa collecta falsa est, & nihilominus examen per 9. institutum indicat, eam recte collectam esse, cum vtrobique vnitas supersit: Quod si reiiciantur 9. quoties fieri potest, statim apparebit falsitas summæ collectæ. Sæpius enim reiicientur 9. ex summa, quam

25|7
30|3

64|1

1 X 1

ma, quam ex numeris additis. In summa enim hac 64. continentur 9. septies, superestque vnitas, propterea quod septies 9 sunt 63. At in numero 25. continentur 9. bis, & supersunt 7. quæ ad partem dextram repono. In 30. vero continentur 9. ter, & supersunt 3. quæ etiam ex parte dextra noto. Itaque ex numeris additis reiiciuntur 9. quinquies, & supersunt 7. & 3. in quibus adhuc semel continentur 9. supersteq; vnitas, adeo vt vere sexies tantum reiecta sint 9. ex numeris additis, ex summa vero septies. Vnde mirum non est, summam esse falsam, quamuis semper reliqua fuerit vnitas. Vera autem summa esset hæc 55. in qua continentur 9. sexies, & supersit vnitas, quemadmodum in numeris additis.

Eodem pacto, si quis post summam recte collectam permutaret aliquas figuras, vel interponeret figuris siue summæ, siue numerorum addendorum hanc figuram 9. aut 0. quoties voluerit, vel hasce duas 7.2. aut 6 3. aut 4.5. aut 8.1. semper indicaret examen, summam adhuc recte esse collectam: quod tamen falsum est. Nam postquam hæc additio recte cum suo examine instituta fuerit, si quis per calumniam ita permutaret summam 1565. adhuc haberet examen suam vim, & tamen summa vera non esset. Idem dices, si ordinem figurarum in numeris addendis quis permutaret: vel certe interponeret hanc figuram 9. aut 0. vt hic apparet.

1425
230
1655

8 X 8

14925
2309
10655

8 X 8

Cur ab Arithmeticis probatio per 9. adhibeatur cũ fallax sit.

Hæc cum ita sint, merito quis roget, cur ab Arithmeticis hæc probatio per 9. adhibeatur. Cui respondendum est, licet per calumniam hæc probatio ostendatur esse vitiosa, vt in proximis exemplis patuit, non immerito tamen à peritis Arithmeticis eam vsurpari. Nam nemo, (nisi quis dedita opera errare velit) talem errorem committet, vt examen istud locum habeat, sed solum vna, aut altera vnitate à scopo aberrabit; ita vt facile tunc examen hoc ostendat, errorem fuisse commissum, indicetque proinde, corrigendam esse additionem. Quis enim ita insanus fuerit, vt vltimam illam summam ex primis duobus numeris colligat? Denique nisi de industria numeri ita disponantur, vt reiectis 9. semper idem residuum sit, vix aut raro admodum continget, vt examen istud succedat, nisi quando in additione erratum non fuerit.

Secunda probatio additionis per 7.

Alio modo fit examen per abiectionem septenarij hoc pacto. Reiiciantur 7. ex omnibus numeris addendis, quoties fieri potest, & id quod supererit, seorsum ponatur in vna parte crucis. Deinde ex summa collecta reiiciantur quoque 7. quoties fieri potest, ac residuum in altera parte crucis collocetur. Si enim hoc illi priori residuo fuerit æquale, recte facta est additio; si vero inæquale, non recte. Reiicienda autem sunt 7 ex singulis numeris addendis seorsum, residuaque ad dexteram è regione ipsorum locanda, & ex his residuis in vnam summam collectis etiam abiicienda 7. atque hoc vltimum residuum in vna parte crucis ponendum. Cæterum non eodem modo reiicienda sunt 7. quo abiicienda esse 9 diximus, cum hic numerus 7. illam proprietatem nouenarij non habeat: sed assumendæ sunt duæ figuræ primæ ad sinistram, ac si prior earum denas, & posterior vnitates significaret, dummodo prior minor sit quam 7. (Nam si esset 7. vel maior, reiicienda forent 7. ex illa sola.) & ex eo numero, quem duæ illæ figuræ referunt, abiicienda 7. quoties fieri potest, & residuũ pro denis accipiendum, eique sequens figura addenda pro vnitatibus, atque ex hoc numero, quem residuum, & sequens figura exprimunt, iterum abiicienda 7. quoties fieri potest, atque ita deinceps. Vt ex numero 2379. ita reiicientur 7. Ex 23. si ter abiiciantur 7. remanent 2. Item si ex 27. (Nam figura 2. relicta, & sequens figura 7. constituunt hunc numerum 27.) reiiciantur ter 7 relinquuntur 6. Si tandem ex 69 (qui numerus constituitur ex residuo 6. & figura 9.) reiiciantur 7. quoties fieri potest, remanent 6. Qui numerus etiam reliquus fuisset, si omnia 7. ex dato numero fuissent abiecta. Eodem modo ex hoc numero 783. ita abiicientur 7. Si ex 8. (Nam 7. omittuntur, vt dictum est, & ex 8. reiiciuntur 7.) abiiciantur 7. remanet 1. Rursus si ex 13. reiiciantur 7. remanent 6. atque ita de cæteris.

Quo pacto reiicienda sint 7. ex quolibet numero.

Itaque hac ratione superius exemplum examinabitur.

710654 | 0
8907 | 3
56789 | 5
880 | 5
777230 |

6 X 6

Omissa figura 7. si ex 10. abiiciantur 7. remanent 3. Item si ex 36. abiiciantur 7. remanet 1. Abiectis vero 7. ex 15. remanet 1. Abiectis tandem 7. ex 14. remanet 0. quam figuram colloco ad dexteram primi numeri, ducta prius linea, quæ numeros addendos distinguat à figuris ad dexteram collocandis. Deinde in secundo numero abiectis 7. ex 8. remanet 1. abiectis item 7. ex 19. remanent 5. Abiectis quoque 7. ex 50. remanet 1. Denique abiectis 7. ex 17. remanent 3. quæ ad dextram repono. Rursus in tertio numero abiectis 7. ex 56. remanet 0. Omissa deinde figura 7. & abiectis 7. ex 8. remanet 1. Abiectis denique 7. ex 19. remanent 5. ad dexteram collocanda. In quarto denique numero, abiectis 7. ex 8. remanet 1. Abiectis autem 7. ex 18. remanent 4. Et abiectis 7. ex 40. remanent 5. ad dexteram ponenda. Quoniam vero 5.5.3 & 0. efficiunt 13. ex quibus si abiiciantur 7. remanent 6. repono 6. in vna parte crucis. Sed ex hisce residuis facilius reiicientur 7. si dicatur 5. & 5. efficiunt 10. Abiectis 7. remanent 3. Additis 3. fiunt 6. quemadmodum supra de abiectione 9. dictum est. Postremo in summa, omissis 7.7.7. si ex 23. abiiciantur 7. remanet 2. Item si ex 20. abiiciantur 7. remanent 6. in altera parte crucis reponẽda.

Probatio per 7. fallax est, sed minus quã probatio per 9. & quare.

Verum quemadmodum examen per abiectionem 9. fallax est, vt diximus, ita quoque hoc per abiectionem 7. vitiosum esse deprehenditur: quia non consideramus, an toties reiiciantur 7. ex numeris addendis, quoties ex summa, nec ne; sed solum, an idem residuum vtrobique reperiatur, an non. Nihilominus tamen non sine ratione huiusmodi examen ab Arithmeticis adhiberi solet, quemadmodum & illud prius per abiectionem 9. institutum, ob rationem supradictam: quia, nisi quis per calumniam numeros peruertat, vix aut raro idem residuum vtrobique reperietur, nisi recte facta sit additio: Et multo quidem rarius in hoc quam in illo examine per 9. instituto; propterea quod non ita simpliciter reiiciuntur 7. vt 9. sed maiori quodam artificio: vt non tam facile quis alium possit decipere, aut ab alio decipi.

203 | 0
134 | 1
344

1 X 1

In hoc appositio exemplo additio vitiosa est & tamen examen per abiectionem 7. indicat, eam rite esse institutam.

Propo-

Proposita autem hæc tabella docet, ex quibusnam numeris abiecta 7. nihil relinquunt, vt examen istud per 7. reddatur facilius pro ijs, qui parum in numeris sunt exercitati. Cuius vsus hic est. Si numerus duabus figuris scriptus, ex quo debent reiici 7. in hac tabella reperitur, nihil superabit post abiectionem 7. vt cifræ è regione numerorum huius tabellæ indicant. Si autem non reperitur in hac tabella, accipiendus erit numerus in ea proxime minor. Nam differentia inter hunc, & numerum propositum relinquitur post abiectionem 7. Vt si numerus propositus sit 69. sumendus erit numerus 63. in tabella, qui sex vnitatibus à 69. differt. Reiectis igitur 7. ex 69. remanent 6. Item si propositus numerus sit 37. accipiendus erit in tabella numerus 35. qui duabus vnitatibus superatur à 37. Reiectis igitur 7. ex 37. supersunt 2. Atque ita de cæteris.

7 — 0
14 — 0
21 — 0
28 — 0
35 — 0
42 — 0
49 — 0
56 — 0
63 — 0

Tertia probatio additionis per additionẽ.

Tertio hac ratione Arithmetici additionem factam examinare solent. Si additio facta est ab inferioribus figuris versus superiores, instituunt eandem à superioribus figuris versus inferiores, vel contra: Et si posteriori via eadem prorsus summa colligatur, quæ priori inuenta est, non dubitant, quin recte sit facta additio, propterea quod incredibile quodammodo sit, si priori modo error aliquis esset commissus, eundem prorsus posteriori via committi, cum alio modo figuræ numerorum inter se additæ sint posteriori via, quam priori. Nam si errauero in additione harum figurarum 5. 2. 9. hoc modo dicendo, 5. & 2. faciunt 7. additis 9. fiunt 15. non tam facile in eundem errorem incidero, si è contrario eas inter se addam. Dicam enim 9. & 2. efficiunt 11. additis 5. fiunt 16. quia operatio aliquo modo variatur.

Potest probatio hæc per additionem ita quoque institui. Diuidantur numeri addendi in duas, aut plures classes, & singularum summæ colligantur. Nam si ex hisce summis vnam summam conficias, necesse est, summam hanc æqualem esse summæ prius collectæ, si erratum non est. Vt si primum exemplum in hæc duo membra distribuatur, & eorum summæ collectæ in vnam redigantur summam, vt hic factum est, prodibit eadem summa, quæ prius.

710654 | 56789
8907 | 880
719561 | 57669

719561
57669
777230

Quarto & vltimo examinari solet additio per subtractionem, hac ratione. Quando duo numeri sunt additi, subtrahatur vterque eorum ex summa: quod quo pacto fiat, capite sequenti docebimus. Si enim numerus ex hac subtractione relictus æqualis fuerit alteri numero addito, argumento est, nullum peccatum in additione fuisse commissum. Nam si ex 12. & 20. fiunt 32. necesse est, detractis 12. ex 32. relinqui 20. vel detractis 20. ex 32. relinqui 12. Quando vero plures numeri sunt additi, subtrahatur vnus eorum ex summa, & reliqui omnes in vnam summam colligantur. Nam si hæc summa illi residuo fuerit æqualis, recte facta erit additio. Vel certe, subtracto primo numerorum addendorum ex summa, subtrahatur ex residuo secundus, & ex hoc residuo tertius, & ita deinceps, vltimo excepto. Si enim vltimum residuum vltimo numerorum addendorum æquale fuerit, dubium non est, quin additio recte facta sit. Atque hoc examen certissimum est, licet sit alijs paulo longius.

Quarta probatio additionis per subtractionem.

SVBTRACTIO INTEGRORVM NVMERORVM.

CAPVT III.

Subtractio quid.

Subtractio est minoris numeri ex maiori, vel æqualis ex æquali, subductio.

Vter duorum numerorũ maior sit, quo pacto cognoscatur.

Facile autem cognosces, vter duorum numerorum maior sit, ex vltimis eorum figuris. Cuius enim figura vltima maior est, ille numerus maior etiam erit. Vt horum duorum numerorum superior maior est inferiore, quia vltima eius figura 3. maior est, quam 2 vltima figura inferioris. Quod si vltimæ figuræ duorum numerorum sint æquales, ille maior erit, cuius penultima figura maior est. Et si penultimæ etiam figuræ sint æquales, ille maior erit numerus, in quo prius occurret maior figura, vt in his exemplis semper numerus superior inferiore maior est.

3001234
2986789

445078 | 700001000.
444899 | 700000999.

Sic etiam numerus, qui plures habet figuras, maior est eo, qui pauciores figuras continet, vt hic superior numerus inferiore maior est.

Subtrahendus quo pacto locandus sit.

Numerus subtrahendus sub eo, à quo fieri debet subtractio, ita collocandus est, vt prima figura primæ, secunda secundæ, tertia tertiæ, &c. respondeat: adeo vt defectus figurarum in numero subtrahendo, si quis est, cernatur ex parte sinistra. Vt si numerus 40236. ex numero 3271589. subducendus sit, collocandus erit ille sub hoc, vt hic apparet.

12345
9968

3271589
40236
3231353

Subtractio quomodo fiat.

Ducta deinde linea ſub duobus illis numeris, ſubtrahuntur ſingulæ figuræ inferioris numeri à ſingulis figuris ſuperioris numeri, initio facto à primis figuris; & reſidua ſub linea collocantur eo ordine, quo facta eſt ſubtractio. Quod ſi in ſuperiori numero aliquæ figuræ non habeant reſpondentes figuras in numero inferiori, ita vt ab illis nihil ſubtrahatur, reponendæ illæ erunt ſub linea. Verbi gratia. Subductis 6. ex 9. remanent 3. ſub linea collocanda. Item ſubductis 3. ex 8. relinquuntur 5. Et demptis 2. ex 5. relinquuntur 3. Subtracta autem figura 0. ex 1. remanet 1. At ſubductis 4. ex 7. remanent 3. Quia vero ex figuris 2. & 3. nihil ſubtrahitur, ponendæ eæ erunt eodem ordine ſub linea.

Quid agẽdum ſit, quando figura inferior maior eſt, quam ſuperior.

Quando autem figura aliqua inferior maior eſt ſuperiore ſibi reſpondente, ita vt ſubtractio fieri non poſſit, ſeruanda erit hæc regula. A proxima figura ſuperiori verſus ſiniſtram mutuo accipiatur vnitas, quæ decem vnitates ſignificabit reſpectu illius figuræ, à qua ſubtractio fieri non poteſt. Deinde huic vnitati apponatur figura illa, vt fiat numerus duabus figuris ſcribendus, à quo detrahatur illa figura inferior maior: ſed tunc illa figura, à qua mutuo accepta eſt vnitas, reputanda erit vna vnitate minor. Quod ſi proxima illa figura ſuperior ſit 0. mutuabimur vnitatem ab alia figura verſus ſiniſtram, quæ vnitas ſignificabit 100. vnitates reſpectu illius figuræ, à qua ſubtractio non poteſt fieri: ſed tunc loco figuræ 0. animo reponenda erit figura 9. & figura, à qua mutuo accepta eſt vnitas, vna vnitate minor erit. Ita quoque ſi plures huiuſmodi figuræ 0. antecederent illam, à qua vnitatem mutuamur, cogitandæ eſſent omnes veluti 9. & illa, quæ mutuo dedit vnitatem, vna vnitate minor. Quæ omnia hoc exemplo fient perſpicua.

4500026304827
392903456789 2

570991736935

PRIMVM ſubductis 2. ex 7. remanent 5. Deinde, quia 9. detrahi non poſſunt ex 2. mutuabimur vnitatem ab 8. & ita detractis 9. ex 12. (quem numerum exprimunt 1. quam mutuo accepimus, & 2.) relinquuntur 3. Rurſus quia 8. ex 7. (ſuperior enim figura 8. cum mutuo dederit vnitatem, valet tantum 7.) ſubtrahi nequeunt, mutuabimur vnitatem à 4. & ſic ſubductis 8. ex 17. remanent 9. Poſt hæc, quia 7. ex 3. (figura enim 4. ob vnitatem mutuo datam valet tantum 3.) non poſſunt auferri, accipiemus mutuo vnitatem à 3. poſt 0. Sed quoniam hæc vnitas valet 100. reſpectu figuræ 3. à qua non poteſt fieri ſubtractio, & nos indigemus tantum 10. neceſſe eſt, vt ſi à 100. mutuemur 10. relinquantur 90. Hinc fit, vt figura 3. valeat tantum 2. & ſupra 0. reponenda ſit animo figura 9. quæ ſignificat 90. reſpectu figuræ, à qua ſubtractio fieri non poterat. Itaq; ſubductis 7. ex 13. remanent 6. Et ſubductis 6. ex 9. (ſupra 0. namque diximus cogitari debere 9.) remanent 3. Quoniam vero 5. ex 2. (Nam figura ſuperior 3. valet tantum 2. vt diximus.) auferri nequeunt, accipiemus mutuo 1. à 6. detrahemusque 5. ex 12. vt ſuperſint 7. Subductis deinde 4. ex 5. (figura enim 6. valet tantum 5. ob vnitatem mutuo datam) remanet 1. Et quia rurſus 3. ex 2. non poſſunt detrahi, mutuabimur vnitatem à 5 Sed cum hæc vnitas valeat 10000. reſpectu figuræ 2. à qua ſubductio fieri nequit, nos vero indigeamus tantum 10. neceſſe eſt, vt ſi à 10000. mutuemur 10. remanent 9990. Hinc fit, vt figura 5. valeat ſolum 4. & ſupra ſingulas cifras cogitatione reponenda ſit figura 9. hoc modo, 999. Hæ namque figuræ 999. ſignificant 9990. reſpectu figuræ 2. à qua ſubductio fieri non poterat. Itaque ſubductis 3. ex 12. remanent 9. Et ſubducta figura 0. ex 9. (quam figuram 9. ſupra 10. diximus cogitandam eſſe.) remanent 9. Et ſubductis 9. ex 9. (quam etiam figuram 9. ſupra 0. imaginamur) remanet 0. Item ſubtractis 2. ex 9. (ſupra 0. namque reponenda quoque animo eſt figura 9.) ſuperſunt 7. At vero quoniam 9. ſubtrahi non poſſunt ex 4. (Figura enim 5. ob mutuo datam vnitatem valet tantum 4.) mutuabimur 1. à 4. & deducemus 9. ex 14. vt ſuperſint 5. Poſtremo ſubductis 3. ex 3. (Nam figura 4. ob mutuo datam vnitatem valet tantum 3.) remanet 0. quæ figura 0. quia vltima eſt in hoc exemplo, nihilque propterea ſignificat, omittenda eſt.

Facilior ratio ſubtractionis, quãdo figura inferior ſuperiore maior eſt.

Hac regula plerique Arithmetici vtuntur, quam nos multo facilius ita proponemus. Quando inferior figura maior eſt ſuperiore, accipiatur differentia inter ipſam & 10. atque huic differentiæ addatur ſuperior figura, à qua ſubtractio non poterat fieri, aggregatumque ſcribatur ſub linea. Hoc enim aggregatum relinqueretur, ſi figura illa maior auferretur ex numero compoſito ex 10. & figura illa ſuperiore, à qua non poteſt fieri ſubtractio, non ſecus ac ſi vnitas fuiſſet mutuo accepta: cum figura illa maior primum ſubtrahatur à 10. vt habeatur differentia inter 10. & illam figuram, deinde reſiduo, ſiue differentiæ huic ſuperior figura addatur. Poſtea nec cogamur vnitatem cogitatione auferre ex ſuperiore figura, à qua mutuo ſumpta eſt implicite vnitas, addemus proximæ figuræ inferiori verſus ſiniſtram vnitatem, & hoc aggregatum ex ſuperiori figura (nulla ex ea prius dempta vnitate) ſubducemus. Eadem enim ſemper differentia erit inter inferiorem, ac ſuperiorẽ figuram, ſiue ex ſuperiore auferas vnitatem, & inferiori nihil addas, ſiue ex ſuperiori nihil auferas, & inferiori vnitatem adiicias. Vt propoſitis hiſce duabus figuris 7. 4. ſi ex 7. tollatur vnitas, erit 2. differentia inter reſiduum 6. & 4. Et ſi ex 7. nihil dematur, adiiciatur autem vnitas ad 4. eadem differentia 2. erit inter 7. & 5. Atque hoc modo, quotieſcunque facta fuerit mentio differentiæ inter 10. & figuram inferiorem, quæ ex ſuperiori non poteſt ſubtrahi, addenda erit vnitas proximæ inferiori figuræ verſus ſiniſtram. Sed hæc omnia clariora fient ex eodem exemplo, quod hic repetiuimus.

4500026304827
392903456789 2

570991736935

Primum ſubductis 2. ex 7. ſuperſunt 5. Quia vero 9. ſubtrahi non poſſunt ex 2. ſubtrahemus 9. ex 10. & reliquæ vnitati (quæ differentia eſt inter 10. & 9. adiiciemus 2. vt habeamus 3. pro reſiduo ſub linea ponendo. Hoc facto ſtatim inferiori figuræ 8. addemus 1. propter illam differentiam inter 10. & 9. vt fiant 9. Quæ quoniã rurſus ex 8. non poſſunt ſubduci, detrahemus 9. ex 10. & reliquæ vnitati (quæ rurſus differentia eſt inter 10. & 9.) addemus

8. vt habeamus 9. collocanda ſub linea. Quo peracto, ſtatim inferiori figuræ 7. addemus 1. propter illam differentiam inter 10. & 9. efficiemusque 8. Quæ quoniam ex 4. demi nequeunt, auferemus 8. ex 10. & reſiduo 2. (hoc eſt, differentiæ inter 10. & 8.) adijciemus 4. vt fiant 6. reponenda infra lineam. Deinde ſtatim inferiori figuræ 6. adiungemus 1. propter differentiam illam inter 10. & 8. efficiemuſque 7. Quæ, quoniam ex 0. ſubtrahi nequeunt, ſubduco ex 10. & reſiduo 3. (id eſt, differentię inter 10. & 7.) addo 0. efficioque 3. ponenda ſub linea. Rurſus inferiori figuræ 5. addo 1. propter illam differentiam inter 10. & 7. efficioq; 6. Quæ, quoniam ſubduci nequeunt ex 3. detraho ex 10. & reſiduo 4. (id eſt, differentiæ inter 10. & 6.) addo 3. efficioq; 7. infra lineam ſcribenda. His peractis, ſtatim inferiori figuræ 4. addo 1. propter dictam differentiam inter 10. & 6. facioq; 5. quibus ſubductis ex 6. ſupereſt 1. Quia vero in hac ſubductione mentio facta non eſt differentiæ inter 10. & 5. cum 5. ſubduci potuerint ex 6. non addo 1. inferiori figuræ 3. ſed eam, quoniam ſubduci non poteſt, ex 2. ſubtraho ex 10. & reſiduo 7. (ſiue differentiæ inter 10. & 3.) addo 2. facioque 9. locanda ſub linea.

4500016304827
392903456789 2

Poſt hæc ſtatim figuræ inferiori 0. addo 1. propter differentiam dictam inter 10. & 3. efficioq; 1. Et quoniam 1. ſubtrahi non poteſt ex 0. demo 1. ex 10. reſiduoq; 9. (id eſt differentiæ inter 10. & 1.) addo 0. efficioq; 9. infra lineam reponenda. Poſtea iterũ ſtatim addo 1. figuræ inferiori 9. ppter illam differentiam inter 10. & 1. vt habeam 10. quæ, quoniam ex 0. non poſſunt detrahi, aufero ex 10. reſiduoq; 0. (ſiue differentiæ inter 10. & 10. addo 0.) facioq; 0. pro reſiduo ſub linea collocando. Rurſus quam primum inferiori figuræ 2. addo 1. propter dictam differentiam inter 10. & 10. efficioque 3. quæ cum ex 0. ſubduci nequeant, ſubtraho ex 10. reſiduoque 7. (nempe differentiæ inter 10. & 3.) addo 0. facioque 7. collocanda ſub linea. Præterea mox addo 1. ad figuram inferiorem 9. propter differentiam illam inter 10. & 3. facioque 10. quæ quoniam ex 5. non poſſunt detrahi, aufero ex 10. ac reſiduo 0. (differentiæ nimirum inter 10. & 10.) addo 5. efficioq; 5. pro reſiduo ſub linea reponendo. Poſtremo ſtatim figuræ inferiori 3. adijcio 1. propter illam differentiam inter 10. & 10. vt habeam 4. quæ ſubducta ex 4. reliquunt 0. quam figuram 0. quoniã ſuperuacanea eſt in principio numeri ex parte ſiniſtra, omittemus, cum poſita fruſtra locũ occuparet.

Aliud Exemplum.

per 7: 5×5

per 9: 3×3

4000134 | 5
67823 | 0

3932311 | 5

IN hoc exemplo, quoniam ablatis omnibus figuris inferioribus ex ſuperioribus vnitas adijcienda eſſet ſequenti figurę inferiori, qnæ nulla eſt, reponemus eam in ſequentem locum: que, quoniam auferri nequit ex 0. detrahenda erit ex 10. & reſiduum 9. infra lineam ponendum; Ac rurſus vnitas ſequenti loco adijcienda, atque ex 4. auferenda, vt habeatur reſiduum 3. ſub linea collocandum.

Quando numeri ſint plures quid agendum.

QVOD ſi numerus ex pluribus numeris, vel plures numeri ex pluribus, vel ex vno numero ſint ſubducendi, colligẽdi prius erunt plures numeri illi, à quibus fieri debet ſubtractio, in vnam ſummam; Itemq; plures illi, qui ſubtrahi debent, inter ſe addendi, priuſquam ſubtractio inſtituatur.

Prima probatio ſubtractionis per 9.

EXAMEN ſubtractionis quadruplex eſt. Primum fit per abiectionem 9. Si n. ex ſuperiori numero, à quo facta eſt ſubtractio, reijciantur 9. quoties fieri poteſt, eo modo, quo in additione diximus abijcienda eſſe 9. & reſiduũ collocetur in vna parte crucis, neceſſe eſt, vt idem numerus relinquatur, ſi abijciantur 9. ex numero ſubtracto, & ex relicto, quoties fieri poteſt, niſi in ſubtractione erratum ſit. Ita vides in proximo exemplo ad dextram reſiduum ſemper eſſe 3. ſiue 9. abijcias, quoties potes, ex numero 4000134. à quo facta eſt ſubtractio, ſiue ex numeris 678823. 3932311. ſimul, quorum ille ſubtractus eſt, hic vero reliquus fuit ex ſubtractione.

Secunda probatio ſubtractionis per 7.

SECVNDVM examen fit per abiectionem 7. Nam ſi ex numero, à quo facta eſt ſubtractio, reijciantur 7. quoties fieri poteſt, eo modo, quo in additione diximus abijcianda eſſe 7. & reſiduum ponatur in vna parte crucis, neceſſe eſt, ſi ſubtractio recte facta eſt, vt idem numerus relinquatur, ſi reijciãtur 7. ex numero ſubtracto, ponendo reſiduum ad dexteram illius, & ex numero relicto, ponendo etiam reſiduum ad dextram illius, ac tandem duo hæc reſidua ad dexteram collocata in vnam ſummam colligantur, & ex ea reijciãtur 7. ſi reijci poſſunt. Ita in ſuperiori exemplo, reiectis 7. quoties fieri poteſt, ex numero 4000134. relinquuntur 5. Reiectis autem 7. ex 67823. remanet 0. & abiectis 7. & ex 3932311. ſuperſunt 5. quæ addita ad 0. faciunt quoque 5. vt in cruce ad ſiniſtram ſuperioris exempli poſita apparet.

CÆTERVM vtrumq; hoc examen fallax eſſe poteſt, ſi quis per calumniam numeros permutet, aut alios numeros apponat, quemadmodum in additione diximus.

Tertia probatio ſubtractionis per additionem.

TERTIVM examen fit per additionem. Nam ſi numerum reſiduum ſubtracto numero adijcias, neceſſario componetur numerus, à quo ſubtractio facta eſt. vt in hoc exemplo vides:

NVMERVS à quo fit ſubtractio.	60123
NVMERVS ſubtractus.	45678
NVMERVS reſiduus.	14445
SVMMA ex numero ſubtracto.	60123

& reſiduo compoſita, æqualis numero, à quo facta eſt ſubtractio.

QVAR-

Quarta probatio ſubtractionis per ſubtractionem.

QVARTVM examen fit per ſubtractionem. Facta enim ſubtractione, ſi reſiduum ab eodem numero, à quo facta eſt ſubtractio, auferas, ſupererit neceſſario numerus ſubtractus. Vt in proximo exemplo, ſi numerum reſiduum 14445. ex numero 60123. detrahas, reliquus erit numerus ſubtractus 45678. vt hic apparet.

```
60123
14445
-----
45678
```

Hæc poſteriora duo examina certiſſima ſunt, nullamque admittere poſſunt fallaciam, aut fraudem.

MVLTIPLICATIO INTEGRORVM NVMERORVM.

CAPVT IV.

Multiplicatio quid

MVLTIPLICATIO eſt ductus vnius numeri in alium. Tunc autem numerus quilibet in alium duci dicitur, cum alter ipſorum toties augetur, quoties in altero continetur vnitas. Vt numerus 6. in numerum 5. vel numerus 5. in numerum 6. duci dicitur, quando numerus 6. quinquies accipitur, vel numerus 5. ſexies. quo pacto ſemper accipientur 30. atque huiuſmodi ductus Multiplicatio appellatur. Itaque numerus ex multiplicatione, ſiue ductu vnius numeri in alterum procreatus toties vtrumlibet multiplicatorum continebit, quoties alter vnitatem complectitur, vt in dato exemplo manifeſtum eſt. Ex quo fit, Multiplicationem ita quoque deſcribi poſſe. Multiplicatio duorum numerorum eſt inuentio numeri, qui toties vtrumuis eorum contineat, quoties alter vnitatem continet.

VT expedite omnis multiplicatio fiat, neceſſe eſt noſſe, qui numerus producatur ex ductu, ſiue multiplicatione cuiuslibet figuræ numericæ in quamuis aliam figuram, vt ex 7. in 8. vel ex 8. in 7. Item ex 7. in 9. vel ex 9. in 7. &c. Hoc enim ſi bene tenueris, nullam in multiplicatione ſenties difficultatem, aut laborem. Id quod aſſiduo exercitio magis diſcitur, quam vllo præcepto. Interim tamen mirifice tibi inſeruiet ſequens tabula, quæ Pythagorica dici ſolet, ea fortaſſis de cauſa, quod Pythagoras eam vel primus excogitauerit, vel certe diſcipulos ſuos in ea mirifice exercuerit.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Conſtructio tabulæ Pythagoricæ.

Conſtructio huius tabulæ perfacilis eſt. Prima enim linea ab 1. incipiens progreditur per continuam additionem vnitatis, vſque ad 9. vt ex 1. & 1. fiunt 2. Ex 2. & 1. fiunt 3. Ex 3. & 1. fiunt 4. &c. Secunda vero linea à 2. incipit, progrediturque per continuam additionem 2. Vt ex 2. & 2. fiunt 4. Ex 4. & 2. fiunt 6. Ex 6. & 2. fiunt 8. &c. Ita quoque tertia linea initium ſumit à 3. & per continuam additionem 3. progreditur. Atq; eodem modo reliquæ lineæ compoſitæ ſunt. Quælibet enim per continuam additionem eius numeri, à quo incipit, progreditur.

Vſus tabulæ Pythagoricæ.

Vſus autem eiuſdem tabulæ, quod ad multiplicationem attinet, (infinitos enim alios vſus habet) hic eſt. Propoſitis duabus figuris inter ſe multiplicandis, ſi altera in ſuperiori linea, & altera in ſiniſtro latere ſumatur, & in illa linea deorſum, in hoc vero latere dextrorſum quis progrediatur, reperiet in communi concurſu numerum ex multiplicatione duarum illarum figurarum inter ſe productum. Ita vides ex multiplicatione 7. in 8. vel 8. in 7. produci 56. Item ex 8. in 8. produci 64. & ſic de cæteris.

Regula multiplicandi figuram in figuram.

QVOD ſi huiuſmodi tabula in promptu non ſit, vtendum erit hac regula. Scribatur vna figura ab altera, & vtriuſq; diſtantia à 10. ad latus ponatur. Deinde hæ diſtantiæ inter ſe multiplicentur. Productus enim numerus, ſi vnica figura ſcribitur, dabit primam ſummæ producendæ ex figurarum multiplicatione; ſi vero duabus figuris ſcribitur, ſeruanda erit figura denarum, & prior ponenda pro prima figura ſummæ producendæ. Secunda autem figura eiuſdem huius ſummæ habebitur, ſi alterutra diſtantia ab altera figura denarum reſeruata addatur, ſi qua ſeruata eſt: Vel certe ſi figuræ propoſitæ inter ſe addantur, addita prius figura denarum reſeruata, ſi qua ſeruata eſt, dabit prima figura huius aggregati (reiecta ſecunda figura tamquam ſuperuacanea) ſecundam figuram ſummæ producendæ. Exemplis res fiet illuſtrior.

```
9.  1.      8.  2.      7.  3.
8.  2.      8.  2.      6.  4.
------      ------      ------
7   2       6   4       4   2.
```

In primo exemplo figuræ multiplicandæ ſunt 9. & 8. earumque diſtantiæ à 10. ſunt 1. & 2. quæ inter ſe multiplicatæ, (erit autem multiplicatio diſtantiarum à 10. facillima, cum minores ſint, quam figuræ multiplicandæ. De his n. regula hæc intelligenda eſt) dicendo ſemel 2. vel bis 1. faciunt 2. quæ ſub diſtantijs ſcribo pro prima figura ſummæ

ſummæ producendæ. Ablata autem diſtantia 2. ex 9. vel diſtantia 1. ex 8. relinquuntur 7. quæ ſcribo ſub figuris pro ſecunda figura ſummæ producendæ. Quam ſecundam figuram etiam dabit prima figura aggregati figurarum 9. & 8. quod eſt 17. relicta ſecunda 1. tanquam omnino ad hoc negotium, inutili. Itaque multiplicatio figurarum 9. & 8. efficit 72.

IN ſecundo autem exemplo figuræ propoſitæ ſunt 8. & 8. quarum diſtantiæ à 10. ſunt 2. & 2. His inter ſe multiplicatis, dicendo, bis 2. habebimus 4. pro prima figura ſummæ producendæ. Dempta autem vtrauis diſtantia ex 8. ſupererūt 6. pro ſecunda figura, quam nobis etiam dabit prima figura aggregati ex 8. & 8. quod eſt 16. relicta ſecunda 1. tanquam ſuperuacanea. Figuræ igitur 8. & 8. inter ſe multiplicatæ faciunt 64.

IN tertio deniq; exemplo figuræ datæ ſunt 7. & 6. quarum diſtantiæ à 10. ſunt 3. & 4. Hæ inter ſe multiplicatæ, dicendo, ter 4. vel quater 3. faciunt 12. Prima ergo figura ſummæ producendæ erit 2. ſecunda vero figura 1. ſeruanda erit. Deinde ablata diſtantia 4. ex 7. vel diſtātia 3. ex 6. ſuper ſunt 3. quibus ſi addatur vnitas, quā ſeruauimus, fient 4. pro ſecunda figura ſummæ producendæ: quam etiam figuram dabit prima figura aggregati ex 7. & 6. addita prius vnitate ſeruata, quod eſt 14. omiſſa prorſus ſecunda figura 1. Producuntur ergo 42. ex multiplicatione 7. per 6. vel 6. per 7. Eadem ratio in cæteris eſt dummodo duæ figuræ propoſitæ inter ſe additæ ſuperent 10. Alias diſtantiæ illarum à 10. maiores eſſent ipſis figuris, ac proinde facilius multiplicarentur figuræ, quam diſtantiæ. Rectius tamē feceris, ſi vſu, & exercitatione memoriter ediſcas huiuſmodi multiplicationes figurarum inter ſe, quam vt vel ad tabulam Pythagoricam, vt ad hanc regulam confugias.

IAM vero propoſitis duobus numeris inter ſe multiplicandis, ſcribēdus eſt minor ſub maiore, ita vt prima figura reſpondeat primæ figuræ, & ſecunda ſecundæ, &c. vt in additione, & ſubtractione diximus. Quod tamen neceſſarium nō eſt, cum etiam maior ſub minore ſcribi poſsit, dicto tamen ordine figurarum ſeruato. Vt ſi multiplicanda ſint 4300678. per 600394. collocandi erunt numeri altero horum modorum, quamuis primus ſit magis vſitatus. *Qua ratione collocādi ſint numeri inter ſe multiplicandi.*

```
4300678        Vel        600394.
 600394                  4300678.
```

SED doceamus prius, quo pacto numerus aliquis per vnam ſolam figuram multiplicandus ſit. Ita enim facilius intelligetur, qua ratione numerus per numerum plurium figurarum debeat multiplicari.

Quomodo numerus per vnam figuram multiplicetur.

QVANDO ergo numerus aliquis per vnam tantum figuram multiplicandus eſt, ſolet ſemper figura hæc multiplicans ſubſcribi primæ figuræ numeri multiplicandi. Vt ſi numerus 600394. multiplicandus proponatur per 8. ſic ſtabit exemplum. Multiplicatio autem fiet ſi figura 8. multiplicetur per omnes figuras numeri 600394. incipiendo à dextra, & ſiniſtram verſus progrediendo, ſingulosque numeros productos ſub linea, quæ infra numeros multiplicandos ducitur, ſcribendo; ita tamen, vt ſi productus aliquis numerus duabus figuris ſcribendus ſit, prima earum ponatur, ſecunda vero ſeruetur ſequenti producto adiicienda, hoc videlicet modo. Primum multiplico 8. per 4. dicendo octies 4. faciunt 32. pono 2. ſub 4. & ſeruo 3. Item octies 9. faciunt 72. & additis 3. ſeruatis, fiunt 75. pono 5. ſub 9. & ſeruo 7. Item octies 3. faciūt 24. & additis 7. ſeruatis, fiunt 31. pono 1. ſub 3. ſeruoq; 3. Deinde octies 0. facit 0. & additis 3. ſeruatis, fiunt 3, quæ pono ſub 0. nihilq; reſeruo. Rurſus octies 0. facit 0. cui, quia nihil ſeruaui in præcedenti producto, nihil addendū eſt. Pono ergo 0. ſub 0. nihilq; reſeruò. Deniq; octies 6. faciunt 48. quibus quia in proximo producto nihil ſeruaui, nihil addo. Pono igitur totum hunc numerum ſub linea, quia multiplicatio ad finem perducta eſt, cum nulla alia figura ſuperioris numeri reſtet multiplicanda per 8. Itaque ſi totum numerum 600394. multiplicemus per 8. procreabimus hunc numerum 4803152. Atque hoc modo quemcunque numerum per quamuis figuram multiplicabis.

```
 600394          5
      8        4 X 8
-------          5
4803152
```

Quomodo numerus per numerum pluribus figuris ſcriptum multiplicetur.

SI vero numerus per numerum plurium figurarum ſit multiplicandus, ducatur ſub ipſis diſpoſitis, vt dictum eſt, linea recta. Deinde ſingulæ figuræ inferioris numeri per ſingulas figuras numeri ſuperioris multiplicentur, vt proxime docuimus; hoc ſolum diligenter obſeruato, vt numerus productus ex quacunque figura inferioris numeri per primam figuram numeri ſuperioris multiplicata collocetur ſub illa figura inferioris numeri, per quam ſuperior numerus multiplicatur, reliqui autem numeri ex multiplicatione eiuſdem figuræ numeri producti ſtatuantur ſuo ordine deinceps verſus ſiniſtram, vt in hoc exemplo factum eſſe vides, in quo quatuor ordines numerorum ſub linea conſtituti ſunt ex numeris productis.

```
per 9.                                  per 7.
               4300678
                600394
          ------------
              17202712
   4         38706102              2
 1 X 4      12902034             4 X 4
   4       25804068                2
          ------------
          2582101267132
```

Totus enim numerus productus ex multiplicatione 4. in omnes figuras ſuperioris numeri habet primam ſuam figuram ſub 4. Ita quoque numerus productus ex multiplicatione 9. in omnes figuras numeri ſuperioris primam ſuam figuram habet ſub 9. Eadē ratione prima figura numeri producti ex multiplicatione 3. in omnes figuras numeri ſuperioris collocata eſt ſub 3. Deniq; prima figura numeri pducti ex multiplicatione 6. in omnes figuras ſuperioris numeri poſita eſt ſub 6. Reliquæ autem figuræ ordine ſuo progrediuntur verſus ſiniſtram.

QVO-

QVONIAM verò cifra siue multiplicans siue multiplicata producit 0. omissus in numero inferiori duas cifras, ita vt eas non multiplicauerimus in numerum superiorem, quia semper produxissent 0. Idem faciendum est, quotiescunq; in numero inferiori fuerint aliquot cifræ. Eas n. semper omittemus, & ad proximè sequentem figuram significatiuam nos conferemus. Cifræ tamen superioris numeri, si quæ sint, negligendæ non sunt. Nam licet multiplicatæ per figuras inferioris numeri significatiuas producant 0. sæpenumero tamen, producto illi 0. addendum est aliquid, illud nimirum, quod in præcedenti multiplicatione aliquando reseruatum est, idq; loco producti reponendum sub linea. Immo etiam si nihil reseruatum aliquando, ponenda tamen est figura 0. sub linea loco producti. Quæ omnia in superioribus exemplis obseruanta sunt. In priori enim cum multiplicauimus 8. per 0. produximus 0. sed quia in præcedenti multiplicatione reseruata erant 3. posuimus 3. loco producti 0. Rursus cum multiplicauimus iterum 8. per 0. produximus etiam 0. & quoniam nihil reseruatum fuit, posuimus 0. loco producti. Idemq; factum est in posteriori exemplo.

POST hæc infra omnes numeros productos alia linea ducatur, vt sub ea ponatur summa ex omnibus illis productis collecta. Quæ quidem summa colligenda est, vt in additione traditum est; dummodo prima figura cuiuslibet producti cum intelligatur locum occupare, quem figura primi producti, sub qua illa collocatur, occupat: Hoc est, vt figura 2. quæ prima est secundi numeri producti in proposito exemplo cogitetur esse posita sub secundo loco primi producti; figura autem 4. quæ prima est in tertio producto, intelligatur esse locata sub tertio loco primi producti; Denique figura 8. quæ prima etiam est in quarto producto, concipiatur occupare sextum locum sub primo producto. In his enim locis omnes has figuras vides esse positas. Itaque vt exemplorem monstremus, hac ratione summa colligetur. In numeris productis sola figura 2. occupat primum locum; Ea igitur sola ponenda est in primo loco sub linea. Deinde in secundo loco sunt 1. & 2. quæ faciunt 3. sub linea in secundo loco ponenda. Rursus in tertio loco sunt 7. 0. 4. quæ efficiunt 11. Collocanda ergo erit 1. sub linea in tertio loco, & seruanda 1. vt figuris quarti loci adijciatur, &c. Hac ratione summa collecta erit 2582101267132. atque hic numerus producitur ex multiplicatione 4300678. in 600394.

VT autem videas eundem numerum gigni, etiam si maiorem numerum sub minore statuamus, apposuim⁹ hoc alterum exemplum sequēs, in quo ijdem duo numeri 4300678. & 600394. inter sese multiplicantur, sed maior numerus sub minore positus est, factique sunt quinque ordines numerorum productorum, quot nimirum sunt figuræ significatiuæ in numero inferiori. Idem tamen numerus productus est, qui prius.

per 9. per 7.

600394
4300678

4803152
4202758
3602364
1801182
2401576

2582101267132

HIC modus multiplicandi, quem hacten⁹ exposuimus, apud omnes magis vsitatus est: alias tamen multiplicandi rationes non iniucundas in pleniore nostra Arithmetica explicabimus.

Prima probatio multiplicationis per 9.

EXAMEN multiplicationis triplex est. Primum fit per abiectionem 9. hoc modo. Reijciantur primū 9. ex primo numero multiplicato; quoties fieri potest, vt in additione diximus, residuumq; in sinistra parte crucis ponatur. Deinde reiectis 9. eodem modo ex altero numero multiplicato locetur residuum in dextra parte crucis. Post hæc, multiplicatis his duobus residuis inter se, & ex producto reiectis 9. statuatur residuum in superiori parte crucis. Postremo ex summa omnium productorū reiectis quoque 9. scribatur residuum in parte crucis inferiore. Necesse enim est, residuum hoc æquale esse residuo superiori, si erratum in multiplicatione non est. Exempla posita sunt in superioribus multiplicationibus. Nam in primo exemplo, reiectis 9. ex 600394. residuū est 4. Residuum autem huius numeri 8. est 8. quia 9. abijci non possunt. Multiplicatis autem his residuis 4. & 8. inter se, fiunt 32. à quib⁹ si reijciantur 9. ex producto 4803152. In secundo autem exemplo, residuum primi numeri est 1. secundi autem 4. Multiplicatisq; inter se his residuis 1. & 4. fiunt 4. in suprema parte crucis locanda; quia 9. abijci non possunt. Reiectis autem 9. ex tota summa, superstant etiam 4.

Secunda probatio multiplicationis per 7.

ALTERVM examen fit per reiectionem 7. si nimirum ex ijsdem numeris abijciantur 7. vt in additione diximus, ex quibus in superiori examine præcepimus reijcienda esse 9. Exemplum habes in postremis duab⁹ multiplicationibus. Sed duo hæc examina sunt etiam fallacia, propter causas supra adductas.

Tertia probatio multiplicationis per diuisionem.

TERTIVM examen certissimum est, fitque per diuisionem. Si enim tota summa producta diuidatur per alterutrum numerorum multiplicatorum, prodibit necessario in Quotiente alter numerus. Quæ quidem diuisio facillima erit, cum opus non sit, Quotientes figuras inquirere, cum eæ ordine omnes contineantur in altero numero multiplicato. Sed hoc examen planius intelligetur, cum Diuisio explicata fuerit.

Alia duo exempla cum probatione per 9.

4058 × 23 = 93564

3069 × 45 = 138105

In

In priori horum exemplorum primum residuum est 0. Vnde licet secundum residuum sit 5. tamen residuorum multiplicatio facit 0. In posteriori autem vtrumque residuum numerorum multiplicatorum est 0. Vnde eorum multiplicatio dabit etiam 0. atque ita in vtroque exemplo residuum numeri producti etiam necessario erit 0.

Facilitas multiplicationis, cum numeri in principio habent cifras.

Quod si vterque numerus multiplicandus; vel alter tantum, habuerit in principio aliquot cifras, multiplicatio admodum facilis erit. Abiectis enim omnibus cifris illis, multiplicandi erunt reliqui numeri inter se, & producto numero apponendæ ordine omnes illæ cifræ abiectæ. Vt si multiplicandus sit numerus 3406. per 4000. reiectis cifris 000. multiplicetur datus numerus per 4. & numero producto 13624. apponantur eædem cifræ, hoc modo. 13624000. Sic etiam, si multiplicanda sint 3040000. per 203000 reiectis 7. cifris ad dextram horum numerorum positis, multiplicentur reliqui numeri 304. & 203. inter se, & producto numero 61712. apponantur reiectæ illæ septem cifræ, hoc modo. 6171200000000.

Hinc fit, si numerus aliquis multiplicandus sit per 10. vel 100. vel 1000. vel 10000. &c. addendas esse illi numero ad dextram tot cifras, quot continentur in numero multiplicante, sine vlla alia multiplicatione: quia reiectis cifris, supereſt sola vnitas, quæ numerum datum multiplicans eundem numerum producit. Vt 5067. multiplicata per 10. faciunt 50670. Multiplicata autem per 100000. faciunt 506700000. Ita quoq; 3000. multiplicata per 100. faciunt 300000. &c.

DIVISIO INTEGRORVM NVMERORVM.

CAPVT V.

Diuisio quid.

DIVISIO est distributio propositi numeri in partes ab altero numero dato denominatas. Vt diuisio numeri 36. per 9. est distributio eius in nonas partes, nempe à 9. denominatas; quarū quidem singulæ quaternas vnitates continebunt: ita vt 4. sit numerus ex hac diuisione productus, qui Quotiens dici solet, propterea quod indicat, quoties numerus 9. qui diuidens, siue diuisor appellatur, in diuidendo numero 36. contineatur. Indicat enim contineri quater, toties nimirum, quoties numerus Quotiens 4. vnitatem continet. Ex quo fit, Diuisionem ita quoque describi posse.

Quotiens quid.

Diuisio est inuentio numeri, qui toties vnitatem contineat, quoties numerus diuidendus diuisorem continet. Vt in proposito exemplo perspicuum est.

Quo pacto numeri in diuisione sint collocandi.

In diuisione scribitur diuisor sub numero diuidendo, non quidem ponendo primam figuram sub prima, & secundam sub secunda. &c. vt in additione, subtractione, & multiplicatione factum est, sed contrario ordine. Ponenda enim hic est vltima figura diuisoris sub vltima figura diuidendi numeri, & penultima sub penultima, &c. Vt si diuidendus sit numerus 7809. per 47. collocandi erunt numeri, vt in appositio exemplo apparet.

7809
47

Quod si vltima figura diuisoris maior fuerit vltima figura numeri diuidendi, collocanda erit vltima figura diuisoris sub penultima figura numeri diuidēdi, & penultima sub antepenultima, &c. vt in hoc exemplo est manifestum. Idem faciendum est, si vltima figura diuisoris æqualis fuerit vltimæ figuræ numeri diuidendi, sed penultima maior quam penultima: vel si & vltima vltimæ, & penultima penultimæ fuerit æqualis, sed antepenultima diuisoris maior, quā antepenultima numeri diuidendi; Vel denique, quotiescunque diuisor maior fuerit eo numero, quem tot figuræ vltimæ numeri diudendi exprimunt, quot figuris diuisor scribitur. Quæ omnia in his duobus prioribus exemplis hic positis manifesta sunt. Quod si diuisor æqualis fuerit illi numero, quem tot figuræ numeri diuidendi exprimunt, quot figuris diuisor scribitur, collocandus erit diuisor sub eo numero, vt in posteriore tertio exemplo factum esse vides.

37800
47

46800. 476047. 4793.
47 4762 47

Diuisio quomodo fiat.

Ita autem diuisio fiet. Primum quæratur, quoties diuisor in numero sibi suprascripto contineatur, & numerus indicans, quoties continetur, ad dexteram numeri diuidendi post lineam hanc curuam (scribatur; atq; hic numerus (qui semper vnica figura scribitur, nunquam enim maior numerus, quam 9. poni potest in Quotiente; etiamsi diuisor videatur sæpius aliquando contineri in numero suprascripto, quam nouies, vt in exemplis patebit) in diuisorem multiplicetur, productusque numerus (qui seorsum scribendus non est, sed memoria retinendus) ex suprascripto numero subtrahatur, vt in subtractione docuimus, scribendo singulos numeros residuos supra figuras, à quibus facta est subtractio, deletis prius hisce figuris vna cum diuisore. Numerus autem totus residuus supra diuisorem notatus minor esse debet diuisore, alias erratum esset. Id quod etiam in aliis residuis obseruandum erit.

In Quotiente non potest poni maior numerus quā 9.

Residuus numerus semper debet esse minor diuisore.

Deinde promouendus erit diuisor dextram versus in proximum locum, & iterum quærendum, quoties in numero sibi suprascripto contineatur, & reliqua facienda, vt prius. Quod si in aliqua promotione diuisor maior fuerit numero suprascripto, ita vt nec semel quidem in eo contineatur, scribenda erit figura 0. post illum numerum, quem post lineam curuam scribendum esse diximus, & diuisor delendus, iterumque promouendus ad proximum locum, & quærendum, vt prius, quoties in numero suprascripto contineatur, &c. Atque ita semper promouendus erit diuisor, donec nullus locus in numero diuidendo supersit, in quem diuisor possit promoueri. Verum hæc exemplis fient planiora.

Quomodo numerus per vnicā figuram diuidatur.

Sit primum diuidendus numerus 76048. per vnicam figuram, vt per 8. Primum inuenio diuisorem 8. contineri in numero suprascripto 76. nouies. Dicitur autem ille numerus supra diuisorem esse scriptus, qui exprimitur figura supra primam figuram diuisoris posita, & omnib. aliis versus sinistrā, si quæ sint, vt in dato exemplo numerus supra diuisorē positus est 76. Porro ex tabula Pythagorica, quæ supra posita est, cognosces facile, quoties figura diuisoris in supra posito numero contineatur. Si enim figuram diuisoris sumas in vertice tabulæ, & in eius linea, deorsum descendendo, accipias numerum supra positum, vel, si is non inuenitur, eo proximè minorem, indicabit figura ei respondens in sinistro latere, quoties figura diuisoris in numero suprapositō

Qui numerus dicatur supra diuisorem positus.

Quo pacto ex tabula Pythagorica cognoscatur, quoties figura diuisoris in suprapositio numero contineatur.

to contineatur. Vt in dato exemplo, sub figura 8. non reperitur numerus 76. suprapositus: si igitur accipiatur 72 proximè minor, reperietur in siniſtro latere figura 9. Nouies ergo continetur figura 8 in 76. atque ita de cæteris. Pono igitur 9. post lineam curuam, & multiplico 9. per 8. dicendo, octies 9. faciunt 72. quæ subtrahenda sunt ex numero 76. supra diuisorem posito, hoc modo. Subtractis 2. ex 6. remanent 4. Deleta igitur figura 8. in diuisore, & figura 6. in numero diuidendo, pono 4. supra 6. Subtractis item 7. ex 7. nihil remanet. Deleta igitur figura 7. nihil pono supra 7. quia poni deberet cifra, quæ superuacanea esset, eo quod illam nulla alia figura sequatur versus siniſtram. Atque ita absoluta est vna operatio diuisionis, remanetque hic numerus 4048. vt in proposito exemplo vides.

```
  4
76048 (9
  88
```

Deinde promoto diuisore in præcedentem locum sub 0. vt hic vides in secundo exemplo, video diuisorem 8. in numero supraſcripto 40. contineri quinquies. Pono igitur 5. post figuram 9. iam inuentam, vt in tertio exemplo vides, & dico: quinquies 8. (multiplicando nimirum figuram 5. inuentam per diuisorem) faciunt 40. quæ subtracta ex numero 40. supra diuisorem posito nihil reliquunt. Deleta igitur figura 8. in diuisore, & figuris 0. & 4. in numero diuidendo, absoluta erit secunda operatio diuisionis, remanebitq; hic numerus 48. vt in eodem tertio exemplo apparet.

```
  4
76048 (95
  88
```

Rursus diuisore promoto in præcedentem locum sub 4. vt hic in quarto exemplo cernis, reperio diuisorem 8. nec semel quidem contineri in supraſcripto numero 4. Pono igitur 0. post figuram 5. vltimo inuentam, vt in quinto exemplo factum est. Et quoniam figura 0. multiplicata per diuisorem nihil producit, nihil subtrahendum erit ex numero 4. supra diuisorem posito. Deleto igitur diuisore, absoluta erit tertia operatio diuisionis, remanebitque numerus 48. vt in hoc eodem quinto exemplo manifestum est.

```
  4
76048 (950
  888
```

Postremo, promoto diuisore in præcedentem locum sub 8. vt hic in sexto exemplo cernitur, inuenio diuisorem 8. in numero 48. supraſcripto contineri sexies. Pono igitur 6. post figuram 0. vltimo repertam, vt hic in 7. exemplo factum est, & dico; sexies 8. (multiplicando nimirũ figuram 6. inuentam in diuisorem) faciunt 48. quæ subtracta ex numero 48. supra diuisorem posito nihil relinquunt. Deleta igitur figura 8. in diuisore, & figuris 8. & 4. in numero diuidendo, absoluta erit tota diuisio, cum nullus alius locus superſit in numero diuidendo, in quem diuisor possit promoueri; nihilque in diuisione supererit. Itaq; totus quotiens numerus est 9506.

```
  4
76048 (9506
  8888
```

Posui tot exempla in hac diuisione, vt distinctius appareret, quidnam in qualibet operatione relinquatur, & quid deleatur: quamuis solum extremum sit instar omnium, ita in operatione necesse non sit alia exempla depingere, sed satis sit, si vltimum describatur.

Quotiens quot figuras habeat

Vides igitur, Quotientem tot habere figuras, quoties diuisor sub numero diuidendo positus est. Id quod in omnibus aliis diuisionibus, etiam per plures figuras institutis, euenit. Semper enim tot figuras habebit Quotiens, quoties totus diuisor sub numero diuidendo ponitur.

Quomodo numerus per plures figuras diuidatur.

Sit deinde numerus 18324 87. diuidendus per numerum 469. qui non vna, sed pluribus figuris scribitur. Hic vt sciatur, quoties diuisor in numero supraſcripto contineatur, (est autem in hoc exemplo numerus 1832. supra diuisorem positus.) non est id de toto diuisore inquirendum, sed satis est, si inuestigetur, quoties vltima eius figura, qualis hic est 4. contineatur in numero suprapositio,

```
  42
 685
1832487 (3
 469
```

Qui numerus dicatur supra quancunq; figuram diuisoris esse positus.

(Dico autem etiam hic illum numerum supra vltimam figuram diuisoris, vel supra quamcunq; aliam, esse positum, qui exprimitur figura supra eam scripta, & omnibus aliis versus siniſtram, si quæ sint. Vt in dato exemplo, supra figuram 4. positus est numerus 18. supra 9. autem numerus 1832. qui hic est 18. hac tamen adhibita cautione, vt non semper in Quotiente ponatur figura tot vnitatum, quoties vltima diuisoris figura in numero supra eam posito continetur, sed diligenter curetur, vt ea figura ponatur, quæ in totum diuisorem multiplicata eo ordine, quem iam præscribemus, talem numerum producat, qui & ex numero supra diuisorem posito subtrahi possit, & subtractus relinquat numerum (si quem relinquas) diuisore minorem. Itaque (vt ad exemplum propositũ veniamus) quamuis vltima figura diuisoris, quæ est 4. cõtineatur in suprapositio numero 18. quater, tamen quia figura 4. multiplicata in totum diuisorem producit maiorem numerum, quam 1832. qui supra diuisorem positus est, ita vt ex suprapositio numero subtrahi non possit, non pono 4. in Quotiente, sed 3. Quod si hæc figura 3. multiplicata in totum diuisorem produceret maiorem etiam numerum, quam 1832. ponerem 2. loco 3. Et si figura 2. multiplicata in diuisorem adhuc maiorem numerum procrearet, ponerem 1. atque ita semper minuam figuram Quotientis vna vnitate, donec figuram inueniam, quæ in diuisorem multiplicata numerum gignat, qui ex supraſcripto numero detrahi possit.

Quomodo ducenda sit figura Quotientis inuenta in diuisorem.

Sic autem multiplicanda erit figura Quotientis inuenta in totum diuisorem. Primum ducenda est in vltimam figuram diuisoris, & hoc productum ex numero supra vltimam figuram illam posito auferendum, deleta prius illa figura diuisoris, vna cum numero, ex quo facta est subtractio. Deinde multiplicanda est in figuram penultimam diuisoris, productumque ex numero supra posito detrahendum, vt prius. Atque hoc modo in omnes figuras diuisoris multiplicanda est, &c. vt in nostro exemplo. Ex 3. in 4. fiunt 12. quæ ita subtrahenda sunt ex 18. numero suprapositio. Demptis 2. ex 8. remanent 6. Deleta ergo figura 4. in diuisore, & figura 8. in numero diuidendo, repono 6. supra 8. Dempto item 1. ex 1. nil remanet. Deleo igitur 1. Deinde ex 3. in 6. fiunt 18. quæ ex numero suprapositio 63. sic subducenda sunt. Distantia 8. à 10. (Nam 8. ex 3. subtrahi nequeunt.) est 2. additis 3. fiunt 5. quæ pono supra 3. deleta prius figura 6. in diuisore, vna cum figura 3. in numero diuidendo.

Addo

Addo autem 1. propter distantiam à 10. cuius mentio facta est, ad 1. (nempe ad denam numeri 18. qui subtrahitur.) fiuntq; 2. quæ ex 6. ablata relinquunt 4. quæ pono supra 6. deleta prius dicta figura 6. Tandẽ ex 3. in 9. fiant 27. quæ sic ex supraſcripto numero 452. detrahuntur. Distantia 7. à 10. (quoniam 7. ex 2. detrahi non possunt) est 3. additis 2. fiunt 5. quæ pono supra 2. deleta prius figura 9. in diuisore, & figura 2. in numero diuidendo. Addo autem 1. ad 2. (nempe ad denas numeri 27. subtrahendi) propter dictam distantiam à 10. facioque 3. quæ ablata ex 5. (nimirum ex secunda figura numeri 452. à quo subtractio fit) relinquunt 2. Pono ergo 2. supra 5. deleta prius dicta figura 5. Atque ita deinceps pergendum esset, si plures figuræ in diuisore reperirentur. Absoluta ergo hac ratione erit diuisionis vna operatio, remanebitque hic numerus 4254 87. vt in exemplo supraſcripto vides.

Promoto iam diuisore in præcedentem locum, ita vt singulæ figuræ diuisoris locum vnum mutent, vt hic vides, intelligo vltimam figuram diuisoris, nempe 4. in suprapositio numero 42. contineri nouies. Pono igitur 9. post figuram 3. in priori operatione inuentam, vt in sequenti exemplo patet, & dico ex 9. in 4. fiunt 36. quæ ita subtraho ex numero 42. supraſcripto. Distantia 6. à 10. (quoniam 6. ex 2. subdũci non possunt) est 4. additis 2. fiunt 6. quæ pono supra 2 deleta prius figura 4. in diuisore, vna cum figura 2. in numero diuidendo. Addo autem 1. ad 3. (nimirum ad denas numeri 36. subtrahendi.) propter dictam distantiam à 10. facioque 4. quæ ex 4. ablata nihil relinquunt. Deleo ergo 4. rursus ex 9. in 6. fiunt 54. Detractis igitur 4. ex 5. remanet 1. Demptis quoque 5. ex 6. remanet etiam 1. Quare deleta figura 6. in diuisore, vna cum figuris 5. & 6. in numero diuidendo, pono supra singulas figuram 1. Denique ex 9. in 9. fiunt 81. quæ ita subduco ex numero 114. suprapositio. Dempto 1. ex 4. remanent 3. Pono ergo 3. supra 4. deleta prius figura 9. in diuisore, & figura 4. in numero diuidendo. Distantia autem 8. à 10. (quia 8. ex 1. subduci nequeunt) est 2. si addatur 1. fiunt 3. quæ supra 1. colloco, deleta prius figura 1. Et propter dictam distantiam à 10. subtraho 1. ab 1. nihilque remanet. Deleo ergo 1. absoluta que erit secunda diuisionis operatio. Numerus autem remanens erit 3387. vt in exemplo patet.

```
  42
 685
1832487 (3
 4699
  46
```

Rursus promoto diuisore in proximum locum, vt in proximo exemplo apparet, ita vt figura 9. locetur sub 8. at 6. sub 3. & 4. sub 3. video vltimam figuram diuisoris, puta 4. nec semel quidem in suprapositio numero contineri, quare scribo 0. post figuram 9. proxime inuentam, deleoque diuisorem. Absoluta namque ita erit tertia operatio diuisoris, remanebitque idem numerus 3387. qui in antecedente operatione reliquus fuit.

```
  42
 685
1832487 (390
 46999
  466
  44
```

Postremo promoto diuisore in primum locum, vt in eodem proximo exemplo manifestum est, reperio vltimam diuisoris figuram 4. in supraſcripto numero 33. contineri septies tantum: quia si sumeretur octies, non posset à numero 3387. suprapositio fieri subtractio numerorũ productorum ex 8. in totum diuisorem. Itaque pono in Quotiente figuram 7. post alias figuras inuentas, vt in hoc exemplo apparet & dico: Ex 7. in 4. fiunt 28. quæ hac ratione ex numero 33. suprapositio demo. Distantia 8. à 10. (Nam 8. ex 3. non possunt subtrahi) est 2. si addantur 3. fiunt 5. Deleta ergo figura 4. in diuisore, & figura 3. in numero diuidendo, pono 5. supra 3. Addo autem 1. ad 2. (nempe ad denas numeri 28. subtrahendi) propter dictam distantiam à 10. facioq; 3. quæ ex 3. ablata nihil relinquunt. Quare deleta figura 3. rursus dico: Ex 7. in 6. fiunt 42. quæ ex 58. numero suprapositio ita tollentur. Detractis 2. ex 8. relinquuntur 6. Deleta ergo figura 6. in diuisore, & figura 8. in numero diuidendo, pono 6. supra 8. Detractis item 4. ex 5. remanet 1. Deleta ergo figura 5. pono 1. supra eam, & tandem dico: Ex 7. in 9. fiunt 63. quæ ex 167. numero suprapositio sunt deducenda hoc modo. Demptis 3. ex 7. supersunt 4. Deleta igitur figura 9. in diuisore, & figura 7. in numero diuidendo, statuo 4. supra 7. Detractis item 6. ex 6. remanet 0. Deleta ergo figura 6. pono 0. supra eam. Atque ita tota diuisio absoluta est, remanetque numerus hic 104. qui post Quotientem 3907. collocandus est supra diuisorem 469. interiecta linea inter ipsos, vt fiat numerus fractus, hoc est, partes 104. ex partibus 469. in quas totum aliquod concipitur esse diuisum. Eodem pacto in aliis diuisionibus ponitur residuum, si quod fuerit, supra diuisorem, linea inter ipsos interiecta, vt fiat fractus numerus.

```
  42
 685
1832487 (3907. 104/469.
 469999
  4666
  44
```

Quid agendum sit cũ numero ex diuisione relicto.

Imo vero, quando minor numerus per maiorem proponitur diuidendus, ponendus erit numerus diuidendus supra diuisorem, interiecta dicta linea inter ipsos, vt fiat numerus fractus; Vt si diuidendi sint 48. aurei in 60. milites, fiet numerus fractus, quem hic vides esse appositũ, ita vt quilibet accipiat 48. partes ex 60. in quas vnus aureus intelligitur esse diuisus. Quid autem sit huiusmodi fractus numerus, & quomodo eius valor exploretur tam in monetis, quam in ponderibus, aut mensuris, prout numerus diuidendus significat monetam, aut põdera, mensuraue, dicemus in tractatione fractorum numerorum.

Quando numerus minor per maiorem proponitur diuidendus, quid agendum.

Sunt nonnulli, qui alio modo multiplicant figuram Quotientis inuentam in totum diuisorem. Nam primum eam multiplicant in primam figuram diuisoris, productumque ex numero ei figura suprapositio auferunt: Deinde eandem ducũt in secundam figuram diuisoris, & ita deinceps in reliquas, donec ad vltimam perueneriut, productosque numeros ex supraſcriptis numeris tollunt. Vt si diuidendus sit numerus 3387. per 469 (quemadmodum in vltima operatione superioris exempli factum est.) postquam reperierunt, vltimam figuram diuisoris, nimirum 4. contineri septies in suprapositio numero 33. (Nam octies comprehendi non potest, vt paulo ante diximus.) ponentes in Quotiente figuram 7. non dicunt, ex 7. in 4. fiunt 28. vt nos fecimus, sed; Ex 7. in 9. fiunt 63. quæ ita ex suprapositio nume-

Quomodo nonnulli ducant figurã Quotientis inuentam in diuisorem.

```
  10
 2924
3387 (7
 469
```

ro 3387. subtrahunt. Ablatis 3. ex 7. relinquuntur 4. Deleta ergo figura 9. in diuisore, & figura 7. in numero diuidendo ponunt 4. supra 7. Ablatis quoque 6. ex 8. remanent 2. ponenda supra 8. prius deleta. Deinde iterum dicunt. Ex 7. in 6. fiunt 42: quæ ita demunt ex supraposito numero 332. Ablatis 2. ex. 2. nihil relinquitur. Deleta igitur figura 6. in diuisore vna cum figura 2. in numero diuidendo, ponunt o. supra 2. Et quoniam 4. (nempe altera figura producti numeri 42.) auferri non possunt ex 3. sumunt distantiam 4. à 10. nempe 6. cui addunt 3. vt fiant 9. ponenda supra 3. prius deleta. Propter dictam autem distantiam à 10. auferunt 1. ex vltima figura 3. ponuntque reliqua 2. supra 3. deleta prius figura 3. Postremo dicunt. Ex 7. in 4. fiunt 28. Subductis ergo 8. ex 9. remanet 1. ponenda supra 9. si prius deleatur in diuisore figura 4. vna cum figura 9. in numero diuidendo. Ablatis item 2. ex 2. nil remanet: absolutaque erit operatio. Hac porro ratione plerunque fit, vt non scribantur tot figuræ supra numerum diuidendum, quot in priori illo modo multiplicandi figuram Quotientis in diuisorem ponuntur, quando ea ducitur primum in vltimam figuram diuisoris, deinde in penultimam, &c, vt supra explicauimus. Id quod exemplis addisces. Verum prior ille modus apud Mathematicos, & mercatores magis est in vsu, faciliusq; in eo error corrigi potest, si quādo nimis magna figura posita fuerit in Quotiente, vt mox docebimus.

In quo difficultas diuisionis consistat.

Hoc exemplo, quod explanauimus, plane percepto, nulla erit difficultas in diuidendo quouis numero per numerum quotcunque figurarum. Totus enim labor in eo positus esse videtur, vt cognoscatur, quoties vltima figura diuisoris in numero suprascripto sumi debeat, vt videlicet figura hæc Quotientis in omnes figuras diuisoris multiplcata numerum procreet, qui ex supraposito numero subduci possit, numerusque post hanc subtractionem relictus sit diuisore minor.

Quando in Quotiente sumpta est figura nimis parua, vel magna quid agendum.

Quod si quando contingat, (id quod non raro ijs euenire solet, qui parum in hoc negotio sunt exercitati) figuram talem in Quotiente poni, vt ea in omnes figuras diuisoris multiplicata, productisque ex numero supra diuisorem posito subductis, numerus relictus maior sit diuisore, vel certe non omnes producti subtrahi possint; si id quidem accidat in principio diuisionis, facile error corrigetur, si accipiatur in Quotiente figura maior, aut minor, prout res exiget; quia tunc notæ adhuc sunt figuræ numeri diuidendi supra diuisorem positæ, etiam si deletæ sint, ita vt facile ab ijs numeri ex multiplicatione nouæ figuræ Quotientis in figuras diuisoris producti iterum possint subduci, præsertim si figuræ illæ numeri diuidendi deletæ scribantur ordine supra alias figuras deletas, diuisor etiam sub diuisore deleto reponatur, ne figuræ deletæ negotium nobis facessant. Si vero in media operatione, vel prope finem id contingat, nō tam facile errorem quis corriget, cum vix dignoscātur figuræ numeri diuidendi supra diuisorem in illa operatione positæ ab aliis figuris; quippe quæ iam deletæ sint, & cum aliis permixtæ, ac supra numerum diuidendum positæ. Quare ne tunc cogamur diuisionem totam iterare, (quod necessario faciendum esse omnes docent. Id quod permolestum esset, præsertim si iam plures operationes diuisionis forent absolutæ.) excogitauimus huiusmodi remedium.

Si figura Quotientis accepta sit nimis parua, ita vt numerus relictus post subtractionē numerorum, qui ex multiplicatione illius figurę in omnes figuras diuisoris producuntur, maior sit diuisore, subtrahemus diuisorē ex numero relicto toties, quoties possumus, donec numerus relinquatur minor diuisore, & quoties is subtractus erit, tot vnitates illi figuræ Quotiētis addemus. Si vero figura Quotiētis accepta sit nimis magna, adeo vt post subtractionē aliquot numerorum, q ex multiplicatione illius figurę in aliquot figuras diuisoris producuntur, in aliquē numerum productum incidamus, qui amplius subduci non possit, multiplicabimus figuram illam Quotientis in figuras diuisoris deletas, quarum nimirum numeri producti subtracti iam sunt, & productos numeros, additis prius figuris numeri relicti, ordine supra illas figuras diuisoris scribemus, deletis prioribus figuris relictis. Hac enim ratione restituetur numerus, qui supra diuisorem positus erat ante illam operationem. Quocirca eum iterum per diuisorem (renouatum tamen, quoad figuras deletas, ne confusionem pariant) partiemur, accipiendo aliam figuram in quotiente, quæ vna vnitate minor sit, quam prior accepta. Et si hæc figura etiam nimis magna sit, restituemus eodem modo numerum supra diuisorem collocatum, & accipiemus aliam figuram minorem. Idque toties faciemus, donec figuram inueniamus, quæ in omnes figuras diuisoris multiplicata numeros producat, qui & subtrahi possint, & numerum relinquant diuisore minorem. Sed hæc omnia hoc proposito exemplo fient magis perspicua.

Exempli correctionis, quando nimis parua figura in Quotiente accepta est.

Sit diuidendus numerus 1623149. per 2899. Collocato diuisore sub numero diuidendo, ponamus quempiam parum exercitatum accepisse in Quotiente figuram 4. Vnde si dicamus. Ex 4. in 2. fiunt 8. quibus detractis (eo modo, quem in proximo exemplo explicauimus) ex 16. remanent 8. Deinde ex 4. in 8. fiunt 32. quibus subductis ex 82. remanent 50. Rursus ex 4 in 9. fiunt 36. quibus sublatis ex 503. remanent 467. Deniq; ex 4. in 9. fiunt 36. quibus ex 4671. ablatis, relinquuntur 4635. qui numerus maior est diuisore. Nimis ergo parua est figura accepta 4.

4
563
8075
1623149. (4
2899

Quare deleto residuo hoc, vna cum accepta figura 4. ponemus has figuras 1 6 2 3 1. numeri diuidendi deletas supra alias figuras deletas, & diuisorem deletum renouatum sub diuisore collocabimus, vt in proximo exemplo factum esse vides. Qua ratione restitutus erit totus numerus diuidendus 1623149. vna cum diuisore, ac si nondum inchoata esset diuisio. Ponemus ergo figuram 5. vna vnitate maiorem, quam 4. in Quotiente, vt in hoc altero exemplo vides, & dicemus. Ex 5. in 2. fiunt 10. quibus detractis ex 16. remanent 6. Deleta igitur figura 2. in diuisore, & figura 1. in numero diuidēdo, q̄ decem significat respectu figuræ 6. dicemus rursum. Ex 5. in 8. fiunt 40. quibus subtractis ex 62. remanent 22. Item ex 5. in 9. fiunt 45. quibus ex 2 2 3. subductis, remanent 178. Denique ex 5. in 9. fiunt 45. quibus demptis ex 1781. relinquuntur 1 7 3 6. qui numerus diuisore minor est. Recte ergo accepta est figura 5.

6
423
5631
18078
1623149 (4
2899
2889

1
23
678
4236
5631
18078
1623149 (45
28999
2899
289

Sed

Exempli correctionis, quando nimis magna figura in Quotiente accepta est.

Sed vt exemplum etiam habeas, quando nimis magna figura accipitur, ponamus in Quotiente positam esse figuram 6. Hæc multiplicata in 2. facit 12. quibus ablatis ex 16. remanent 4. Deinde quia ex 6. in 8. fiunt 48. quæ ex 42. detrahi nequeunt, fit vt figura accepta 6. sit nimis magna. Quamobrem deleto residuo hoc 4. vna cum accepta figura 6. scribemus figuras 1. & 6. numeri diuidendi deletas supra easdem, & figuram 2. in diuisore deletam infra eandem, ita vt totus numerus diuidendus ab initio propositus, vna cum diuisore restituatur, ac si diuisio nondum esset inchoata, vt in hoc exemplo apposito factum esse vides.

4
1623149 (6
2899

6
14
1623149 (6
2899
2

Ponemus ergo, vt in sequenti exemplo apparet, figuram 5. vna vnitate minorem, quam 6. in Quotiente, & dicemus. Ex 5. in 2. fiunt 10. quibus sublatis ex 16. relinquuntur 6. Deleta igitur figura 2. in diuisore, & figura 1. in numero diuidendo, quæ decem significat respectu figuræ 6. dicemus rursum. Ex 5. in 8. fiunt 40. quibus detractis ex 62. remanent 22. Item ex 5. in 9. fiunt 45. quibus demptis ex 223. remanent 178. Denique ex 5. in 9. fiunt 45. quibus subductis ex 1781. remanent 1736. Potuerunt ergo omnes numeri producti subduci, relictusq; est numerus diuisore minor. Quare recte accepta est in Quotiente figura 5. Ex his facile intelliges, quid agendum sit, quando in principio diuisionis accepta est figura nimis parua, aut magna. Nunc attende, quo pacto error corrigatur, si in media operatione nimis magna aut parua figura in Quotiente accepta sit.

1
2
63
14786
1623149 (65
2899
2

Promoueatur ergo diuisor in superiori exemplo, in quo nimis parua figura sumpta fuit in principio diuisionis, vt ibidem cernis in tertia positione exempli. Fingamus autē, vltimam diuisoris figuram 2. in suprapposito numero 17. contineri septies, atque adeo in Quotiente post figuram 5. inuentam scribi 7. Quo posito dicemus. Ex 7. in 2. fiunt 14. quibus detractis ex 17. remanent 3. quæ supra 7. scribo, deleta prius figura 2. in diuisore, vna cum figuris 7. & 1. in numero diuidendo. Deinde rursus dicemus. Ex 7. in 8. fiunt 56. quæ ex 33. auferri nequeunt. Est ergo figura 7. accepta nimis magna. Vt igitur restituatur numerus 17. à quo facta est subtractio, si forte is inter tot figuras deletas non internosceretur, muliplicanda est figura 7. accepta in figuram 2. in diuisore deletam, & producto addenda figura 3. supra dictam figuram diuisoris posita.

1
233
678
4236
5631
15078
1623149 (457
28999
2899
289

Vt quoniam ex 7. in 2. fiunt 14. si addantur 3. fiunt 17. Deleta igitur figura 3. scribemus supra eam numerum 7. & supra figuram 1. deletam ponemus 1. atq; ita restitutus erit numerus 17. à quo facta est subtractio, vt in hoc apposito exemplo apparet. Posita autem figura 2. sub figura 2. in diuisore deleta, vt etiam diuisor restituatur, vt in eodem hoc exemplo manifestum est, concipiamus vltimam figuram diuisoris 2. contineri in 17. non septies, sed sexies, atq; adeo, deleta figura 7. in Quotiente, poni figuram 6. vt in exemplo hoc altero apparet. Quo posito, dicemus. Ex 6. in 2. fiunt 12. quibus detractis ex 17. remanent 5. Deleta ergo figura 2. in diuisore, vna cum figuris 7. & 1. in numero diuidendo, scribemus 5. supra 7. & dicemus. Ex 6. in 8. fiunt 48. quibus demptis ex 53. relinquuntur 5. Deleta igitur figura 8. in diuisore, vna cum figuris 3. & 5. in numero diuidendo, scribemus 5. supra 3. & rursus dicemus. Ex 6. in 9. fiunt 54. quibus subductis ex 56. remanent 2. Deleta ergo figura 9. in diuisore vna cum numero 56. in diuidendo numero, ponemus 2. supra 6. ac tandem dicemus. Ex 6. in 9. fiunt 54. quæ ex 24. subtrahi nequeunt. Nimis ergo magna etiam est figura 6. in Quotiente. Quare vt sciamus, quinam numerus supra diuisorem collocatus fuerit, antequam hanc operationem inciperemus, multiplicabimus figuram dictam 6. in figuras diuisoris deletas, vt dictum est. Vt ex 6. in 9. fiunt 54. Additis 2. quæ supra figuram diuisoris 9. deletam posita sunt, fiunt 56. Deleta ergo figura 2. scribemus supra eam 6. & retinebimus 5. Deinde ex 6. in 8. fiunt 48. Additis 5. quæ seruauimus, fiunt 53. Scribemus ergo 3. supra 5. & retinebimus 5. Postremo ex 6. in 2. fiunt 12. Additis 5. quæ reseruauimus, fiunt 17. quæ supra 15. collocabimus: atque ita restitutus erit numerus, qui ante hanc operationem supra diuisorem positus erat. Restitutis autem tribus quoque figuris 2. 8. 9. in diuisore deletis, atque deleta figura 6. in Quotiente, ponamus 5. loco illius, vt in hoc exemplo vides. Quoniam vero ex 5. in 2. fiunt 10. quibus ablatis ex 17 remanent 7. delebimus figuram 2. in diuisore, vna cum figura 1. in diuidendo numero, quæ decem significat respectu figuræ 7. & dicemus. Ex 5. in 8. fiunt 40. quib. subductis ex 73. remanent 33. Deleta ergo figura diuisoris 8. vna cum figura 7. in numero diuidendo, scribemus 3. supra eam, rursusque dicemus. Ex 5. in 9. fiunt 45. quibus demptis ex 336.

1
17
233
678
4236
5631
18078
1623149 (457
28999
2899
289
2
15
178
233
6782
4236
5631
18078
1623149 (4576
28999
289
2
17
153
178
2336
6782
4236
5631
18078
1623149 (4575
28999
2899
289
289
2

 rema-

remanent 291. Deleta igitur figura diuisoris 9. vna cum numero diuidendo 336. ponemus loco illius 291. & tandem dicemus. Ex 5. in 9. fiunt 45. quibus subtractis ex 2914. relinquuntur 2869. qui numerus diuisore minor est. Recte ergo accepta est figura 5.

Promoto tandem diuisore in proximum locum, nimirum in vltimum, vt in præcedenti exemplo vides, cogitemus vltimam diuisoris figuram 2. in suprascripto numero 28. contineri septies. Posita igitur figura 7. in Quotiente, vt in hoc altero exemplo appositio vides, dicemus. Ex 7. in 2. fiunt 14. quibus ablatis ex 28. remanent 14. Item ex 7. in 8. fiunt 56. quibus detractis ex 146. remanent 90. Item ex 7. in 9. fiunt 63. quibus subductis ex 909. relinquuntur 846. Item ex 7. in 9. fiunt 63. quibus demptis ex 8469. remanent 8406. qui numerus maior est diuisore; & proinde figura accepta 7. nimis parua est. Quare subtrahemus diuisorem ex dicto residuo, quoties possumus, & tot vnitatibus maiorem figuram, quam 7. scribemus in Quotiente, quoties diuisor detractus fuerit. Ita autem diuisorem detrahemus in hoc sequenti exemplo, restituto prius diuisore. Ablatis 2. ex 8. remanent 6. Item demptis 8. ex 64. remanent 56. Item subductis 9. ex 560. remanent 551. Tandem detractis 9. ex 5516. remanēt 5507. qui numerus adhuc maior est diuisore. Detractis igitur 2. ex 5. remanent 3. Demptis autē 8. ex 35. remanent 27. Item subductis 9. ex 270. remanent 261. Deniq; subtractis 9. ex 2617. relinquuntur 2608. qui numerus minor iam est diuisore. Quia ergo bis detractus est diuisor, scribemus in quotiente, deleta prius figura 7. numerū 9. duab. videlicet vnitatibus maiorem, quā 7. Itaq; totus numerus Quotiens est 559. Coacti autem fumus rē tot exemplis exponere, vt clarius intelligeretur, q d in singulis operationib. relinquatur, quāuis solum hoc vltimū instar sit omniū. Et licet tot verbis remedium istud exposuerimus, vsus tamen facile docebit, rem esse breuiorem ac faciliorem, quam vt verbis exprimi possit.

Hoc ergo remedium, si adhibeatur, quotiescunq; in Quotiente figura maior, aut minor, quam oportet, sumpta fuerit, incredibile est, quam expedite numerus quilibet per quemcunque numerum diuidatur: quia hac ratione non opus est, vt simus nimis anxii, qualem figurā in quauis operatione scribere debeamus in Quotiente, cum illo remedio errorem, si quis commissus erit, sine vllo fere labore corrigere possimus: ita vt hic modus diuidendi, quem hactenus præscripsimus, sit inter omnes, qui ab aliis auctoribus explicari solent, præstantissimus, atque expeditissimus, ac propterea summa diligentia, & cura adhibenda, vt in eo esse exerceat is, qui in arte supputandi cupit esse excellens, & præstans.

Facilior ratio diuisionis.

Sed quia, si prædictum remedium adhibeatur, diuisio in nimis magnam molem excrescit, vti poterimus hoc alio artificio. Absoluta prima operatione diuisionis, scribatur residuum seorsum vna cum sequente figura numeri diuidendi, & sub hoc numero diuisor reponatur, incipiendo ab vltima figura ad dextram, & versus sinistram procedendo: Ac rursus secunda operatio diuisionis expediatur; qua expedita, residuum iterum seorsum scribatur, cum insequenti figura numeri diuidendi, atq; ita deinceps vsq; ad finem. Hac enim ratione omnis confusio figurarum deletarum vitabitur. Nam quando in aliqua harum partialium diuisionum pro Quotiente sumpta fuerit figura nimis magna, aut parua, facile error corrigetur, si illa partialis diuisio repetatur, quod molestum non erit, cum opus non sit totam diuisionem ab initio repetere. Exemplum habes in diuisione numeri 2596860019. per 38748. Vt autem scias, quamnam figuram numeri diuidendi post quodlibet residuum scribere debeas, recte feceris, si sub vltima figura primæ operationis, vt in dato exemplo sub 6. punctum posueris, vt indicet in secunda operatione assumendam esse figuram post illud punctum. Sub hac figura aliud punctum est signandum, vt significet in tertia operatione sumendam esse figuram post illud punctum, &c. veluti hic obseruatum esse vides.

Operā-

Operatio. 1.

2 1
3729
71448
259686 (6 *Diuidendus* 2596860019
38748 ....

Operatio 2. *Diuisor* 38748

7
184
65004
271980 (7
38748

Operatio 3.

7440 (0
38748

Operatio 4.

3565
46763
74401 (1
38748

Operatio 5.

7
1880
84277 *Totus Quotiens* 67019 $\frac{7807}{38748}$
356539 (9
38748

Probatio per 9. totius exempli.

1
3 X 5
1

Positis ergo ordine omnibus Quotientibus, habebitur totus Quotiens 67019. Habet hoc artificium commoditatem hanc, quod si probatio non succedat ex sententia, non necesse sit totam diuisionem repetere, sed satis est, vt singulæ operationes, quæ paucæ sunt, examinentur, & illa in qua error fuerit deprehensus, repetatur. Atq; hoc artificium facile est, & expeditum, ideoq; à tyronibus adhibendum censeo.

Quomodo alij diuisionem absoluant.

Nam quod alii multiplicent figuram in Quotiente positam in totum diuisorem, productumq; numerum sub diuisore collocent, (prima figura posita sub prima, & secunda sub secunda, &c.) vt eum ex numero supra diuisorem posito detrahant, res est certa illa quidem, ac facilis, sed quæ longiorem efficiat diuisionem, quam par est, eumq;, qui diuidit, non parum remoretur. Vt enim numerum hunc verbi gratia, 40689. per 129 8. diuidant, postquam in prima operatione posuerunt in Quotiente figuram 3. multiplicant eam in diuisorem, primum quidem in figuram 8. dicendo. Ex 3. in 8. fiunt 24. scribunt ergo 4. sub 8. & seruant 2. Deinde ex 3. in 9. fiunt 27. Additis 2. quæ seruata sunt, fiunt 29. Positis ergo 9. sub 9. seruant 2. &c. Post hæc, deleto diuisore, auferunt 4. ex 8. collocantq; residuum 4. supra 8. deletis prius figuris 4. & 8. &c. Promoto deinde diuisore, progrediuntur eodem modo. Quod tamen nos breuius absoluimus, cum numerum productum non scribamus sub diuisore. Habet tamen modus iste hanc commoditatem, quod ex ipsa operatione facile intelligatur, num figura accepta in Quotiente sit nimis magna, nec ne. Nam si productus numerus ex multiplicatione figuræ illius in diuisorem subtrahi possit ex numero supra diuisorem posito, numerumque relinquat diuisore minorem, figura illa recte accepta est; si minus, erratum esse, dubitandum non est.

40689 (31
129
88
3894
129

Commoditas in hoc modo diuidendi.

Fiet autem hic modus expeditior, si pro diuisore ponatur, productus numerus ex figura Quotientis in diuisorem, fiantq; partiales diuisiones, vt paulo ante diximus, vt hic in eodem exemplo patet.

Alia ratio diuisionis facilis.

Operatio 1.	*Operatio 2.*	*Operatio 3.*
259686 (6	271980 (7	7440 (0
232488	271236	
27198	744	

Operatio 4.	*Operatio 5.*
74401 (1	356539 (9
38748	348732
35653	7807

Diuidendus 2596860019
Diuisor 38748
Quotiens 67019

Verbi g. in prima operatione diuidendus est numerus hic 259686. Si igitur sub ipso scriberetur diuisor, caderet figura 8. sub 6. & figura 3. sub 5. Et quia 3. in 25. numero suprapositio cōtinentur sexies, (nam figura 7. esset nimis magna) dicemus, ex 6. in 8. fiunt 48. ponemus 8. sub 6. seruando 4. Deinde ex 6. in 4. fiunt 24. additisq; 4. quæ seruauimus, fiunt 28. Positis ergo 8. sub 8. seruentur 2. & sic deinceps, donec figura Quotientis in omnes figuras diuisoris ducta sit. Facta autem subtractione, fit residuum 27198 &c. In tertia operatione, quia numerus diuidendus 7440. minor est diuisore, posita est figura 0. in Quotiente. Quod si quando productus numerus maior sit diuidendo in aliqua partiali diuisione, figura Quotientis accepta fuit nimis magna: ideoq; repetenda erit illa diuisio partialis. Hoc modo si diuisio instituatur, nulla erit inter figuras deletas confusio, licet futura sit aliquanto longior illo modo, quem in principio tradidimus.

Quod etiam alii diuisorem prius per singulas figuras significatiuas multiplicent, quemlibet productum numerum prope figuram multiplicantem scribendo, vt inter hos productos quærant numerum positum supra diuisorem, eoque inuento, vel certe, si non inuenitur, proxime minore accepto, figuram multiplicantem illi ascriptam in Quotiente ponant, atque numerum acceptum ex numero supra diuisorē posito subducant; res etiam

Alius modus absoluendi diuisionem.

iam facilis est,& commoda, præsertim tyronibus, & parum in hac arte exercitatis,sed nimis longa, ac molesta:Nam vt ver. g. diuidant hunc numerum 97086.per 37.collocant diuisorem iuxta 1. Eundem deinde duplicatũ iuxta 2. triplicatum vero iuxta 3.&c.Postea inter hos numeros inquirunt numerum 97. supra diuisorem positum, quem quoniam non inueniunt,accipiunt 74. proxime minorem, & figuram 2. è regione eius collocatam ponunt in Quotiente, auferuntque 74. ex 97. scribentes residuum 23. supra 97. deletis prius figuris 7. & 9. vna cum diuisore. Promoto deinde diuisore, quærunt inter eosdem numeros hunc numerum 230.positum supra diuisorem: quo non inuento,accipiunt proxime minorẽ 222.collocantque figuram 6. è regione eius positam in Quotiente, & denique numerum eundem 222.ex 230.subducunt. Atque hoc modo progredientes totam diuisionem perficiunt. Sed quis non videt, diuisionem hac ratione longius, quam par est,produci, præsertim,si diuisor quatuor,aut quinq;,vel etiam pluribus figuris scribatur?Item quando Quotiens habet duas tantũ aut tres figuras, non video, cur frustra diuisor in omnes nouem figuras ducatur.

23	37 — 1
97086 (26	74 — 2
377	111 — 3
3	148 — 4
	185 — 5
	222 — 6
	259 — 7
	296 — 8
	333 — 9

Diuisio per Dandam. Maxime tamen mihi probatur modus ille diuidendi, quem Itali (per Dandam) vocant, qui securissimus est: quia statim operatio corrigi potest, si forte in Quotiente posita est figura nimis magna, vel parua,& nunquam figuræ in numero diuidendo delentur. Modus autem est iste,aliquantulum ab eo,quo alii vtuntur diuersus,sed commodior meo iudicio, ac breuior. Sit ver.g.diuidendus numerus 1904639.per 2978.Posito numero cum linea curua (scribatur diuisor supra locum, vbi quotiens reponi solet,vt multiplicationes reddantur faciliores. Deinde sub 6.vbi staret figura 8.diuisoris, si sub diuidendo numero collocaretur,vt in principio huius cap.diximus,ponatur punctum ad denotandum,ibi inchoandam esse subtractionẽ.Igitur quoniam 2.vltima figura diuisoris cõtinetur in 19.sexies(q.a nouies, vel octies, vel septies,totus diuisor in numero 19046. contineri non potest) ponenda est figura 6.in Quotiente,quæ in diuisorẽ ducenda est,& simul subtractio facienda,hoc ordine. Ex 6.in 8.fiunt 48. q̃ ex numero 19046.subtrahenda sunt: sed quia figura 8.maior est quam 6.auferemus 8.ex 10.residuoq; 2. addemus 6.summamque 8.sub 6.collocabimus,seruando 5 in mente (nimirum 4.propter 40.& 1.propter 10.à quibus subtracta fuerunt 8.) Deinde ex 6.in 7.fiunt 42.& additis 5.seruatis, fiunt 47.subtractis ergo 7.ex 10.remanent 3. additisque 4.fiunt 7.quæ sub 4 collocentur, seruatis interim 5.propter 40.& 10.Item ex 6.in 9.fiunt 54.additisque 5.seruatis, fiunt 59.subtractis autem 9.ex 10. (quia ex 0.subtrahi nequeunt) remanet 1.additaq; figura 0.fit 1.sub 0. scribenda,seruatis interim 6. ꝓpter 50.& 10.Postremo ex 6.in 2.fiunt 12.additisq; 6.q̃ seruauimus fiunt 18.quib.subtractis ex 19.remanet 1.sub 9. ponẽda.

Diuisor 2978
1904639. (639 $\frac{1697}{2978}$
...
1178.. | 17868
2849. | 8934
1697 | 26802 *producti.*

Hac absoluta operatione, apponantur duo puncta sub figura 3.vt indicent, inde incipiendam esse subtractionem. Et quia 2.continentur in 11.ter, ponenda est in Quotiente figura 3.(quia figura 5.aut 4.foret nimis magna) quæ iterũ in totum diuisorem ducenda est eodem ordine, videlicet ex 3. in 8. fiunt 24. subtractis 4. ex 10. (quoniam ex 3. subtrahi nequeunt) remanent 6.additisq; 3. fiunt 9. scribenda sub 3. retentis mente 3. propter 20.& 10. Præterea ex 3.in 7.fiunt 21.additisq; 3.quæ retinuimus, fiunt 24. Demptis autem 4.ex 8.supersunt 4.ponenda sub 8. retentis 2. propter 20. Rursus ex 3.in 9.fiunt 27. additisq; 2. quæ retenta sunt fiunt 29. Demptis 9.ex 10. quia ex 7.tolli non possunt,remanet 1.additisq; 7.fiunt 8.sub 7.scribenda, reseruatis interim 3.propter 20.& 10. Deniq; ex 3.in 2.fiunt 6.quæ cum 3.seruatis, faciunt 9.quibus sublatis ex 11.remanent 2.reponenda sub 1.

Diuisor 2978
1904639 (639 $\frac{1697}{2978}$
...
1178.. |
2849. | 17868
1697 | 8934
| 26802 *producti.*

His peractis, ponantur tria puncta sub 9.vt sciamus,inde inchoandam esse subtractionem. Et quia 2.continentur in 28.nouies,scribemus in Quotiente figuram 9.q̃ in totum diuisorem ducetur hoc ordine. Ex 9.in 8. fiunt. 72.subtractis ergo 2.ex 9.supersunt 7.scribenda sub 9.retentis interim 7.propter 70. Deinde ex 9.in 7. fiunt 63.quæ cum 7.seruatis efficiunt 70. subducta ergo figura 0.ex 9. remanẽt 9. scribenda sub 9. seruatis interim 7.propter.70.Amplius ex 9. in 9. fiunt 81.additisque 7.seruatis efficiuntur 88. Ablatis autem 8.ex 10.remanẽt 2.additisque 4.fiunt 6.quæ sub 4.scribantur, retentis in mente 9.propter 80.& 10. Postremo ex 9 in 2. fiunt 18.quæ cum 9.retentis efficiunt 27.quibus ablatis ex 28. remanet 1.ponenda sub 8. Totus igitur Quotiens est 639. & vltimum residuum 1697. est illud, quod ex diuisione remanet,quemadmodum etiam in superioribus partialibus operationibus vltimum residuum 7807.est illud, quod in diuisione superest.

Itaq; vt vides,tota difficultas huiusmodi in eo posita est,vt memoria retineantur denæ numerorũ productorum ex figura Quotientis in figuras diuisoris. Et sane modus hic pulcherrimus est,quia distincte videntur residua operationũ:ita vt si forte in Quotiente accepta esset figura nimis magna vel parua,facile figura illa, vna cum residuo falso deleri possit,assumique alia figura sine vlla confusione.

Quod si molestum videatur,retinere illas denas numerorũ productorum, scribi possunt producti seorsum,vt in exemplo vides sub quotiente. Nam ex 6.in diuisorem fit numerus 17868.& ex 3. in eundem diuisorem numerus 8934.atque ex 9.in eundem diuisorem numerus 26802. Ita enim facilis erit subtractio,cum præcedenti figuræ sit interdum addenda sola 1.quando nimirum ex 10.facta est subtractio. Neq; vero mihi placet, vt producti inter residua collocentur (quod nonnulli faciunt) quia confusio suboriretur inter numeros,cum tamen subtractiones non multo faciliores reddantur.

Prima probatio diuisionis per 9. Restat vt examen diuisionis tradamus,quod triplex est. Primum fit per abiectionẽ 9.hoc pacto.Reiectis 9. ex diuisore quoties fieri potest, vt in additione docuimus, ponatur residuum in sinistra parte crucis. Reiectis item 9.ex Quotiente,quoties fieri potest, ponatur residuum in dextra parte crucis. Multiplicatis deinde hisce duobus residuis inter se, & ex producto abiectis 9. quoties fieri potest, ponatur residuum hoc, si in diuisione

sione nihil remansit,in superiore parte crucis. Si autem in diuisione residuum aliquod fuit, coniungendum est vltimum illud residuum cum figuris huius residui diuisionis, & semper abijcienda 9. istudque residuum in superiori parte crucis reponendum. Postremo reiectis 9.ex numero diuidendo, quoties fieri potest, ponatur residuum in parte inferiori crucis.Si enim residuum hoc æquale fuerit illi residuo in superiori parte crucis collocato, recte peracta est diuisio, sin minus, non recte.

Itaque hæc diuisio ita examinabitur. Reiectis 9.ex diuisore 23.remanent 5. Abiectis item 9.ex Quotiente 176. remanent quoq; 5. Multiplicatis autem hisce residuis 5. & 5. inter se, gignuntur 25. ex quibus si abiiciantur 9.remanent 7.quæ (quoniam nihil ex diuisione relictum est) in superiore parte crucis collocanda sunt. Et quia reiectis 9. ex numero diuidendo 4048. relinquuntur etiam 7.recte peracta est diuisio.

1
131
273
4048 (176
2333
22

7
5 X 5
7

Hæc autem alia diuisio hac ratione examinabitur. Reiectis 9.ex diuisore 236.remanent 2. Reiectis item 9. ex Quotiente 139.remanent 4.Multiplicatis autem hisce residuis 2.& 4 inter se, fiunt 8. ex quibus non possunt reiici 9. Hæc ergo 8. si nihil remansisset in diuisione,collocanda essent in superiori parte crucis: sed quoniam supersunt 130.dicemus 8.& 3.faciunt 11. Reiectis 9.remanent 2. Addito 1. fiunt 3.in superiori parte crucis collocanda. Et quoniam,reiectis 9.ex numero diuidendo 45678.remanent quoq; 3.recte facta est diuisio.

1
2
183
434
22030
45678 (193
23666
233
2

3
2 X 4
3

Secundum examen fit per abiectionem 7. vt in additione docuimus, dummodo ex residuo diuisionis, si quod fuerit eodem modo reijciantur & 7.residuũ adijciatur ad illud residuum, quod in examine per abiectionẽ 9.addendum esse diximus residuo diuisionis,atque ex aggregato reijciantur 7. *Secunda probatio diuisionis per 7.*

Vt prior proximarum duarum diuisionum ita examinabitur. Reiectis 7.ex diuisore 23.remanent 2. Item abiectis 7.ex Quotiente 176.remanet 1. Multiplicatis autem hisce residuis 2. & 1.inter se, procreantur 2. in superiori parte crucis reponenda, quia nihil ex diuisione superfuit. Quia vero reiectis 7.ex diuidendo numero 4048.remanent etiam 2.recte facta est diuisio.

2
2 X 1
2

Posterior vero diuisio hoc modo examinabitur. Reiectis 7.ex diuisore 236.remanent 5.Item abiectis 7.ex Quotiente 193.supersunt 4.Multiplicatis autem duobus hisce residuis 5 & 4. inter se,& ex producto 20.reiectis 7.relinquuntur 6. quæ,si nihil remansisset in diuisione, collocanda essent in parte crucis superiore: sed quoniam reliquus fuit numerus 130.ex quo si abiiciantur 7.supersunt 4. quæ addita ad vltimum residuum seruatum 6.faciunt 10. à quibus si reijciantur 7.remanent 3.in superiore parte crucis collocanda. Tantundem autem remanet,si ex diuidendo numero 45678.abijciantur 7.Recte ergo diuisio facta est. Verum vtrumq; hoc examen fallax esse potest, ob rationem dictam in superioribus.

3
5 X 4
3

Tertia probatio diuisionis per multiplicationem. Tertium examen,quod certum est,& cui nulla fallacia subesse potest,fit per multiplicationem. Si namq; diuisor, & quotiens inter se multiplicentur, & numero producto addatur residuum diuisionis, si quod fuerit, procreabitur numerus diuidendus, si erratum in diuisione non est. Vt posterior duarum ꝓximarum diuisionum ita examinabitur. Multiplicato diuisore 236.per Quotientem 193.antequam producti numeri addantur inter se,scribatur sub ipsis numerus residuus diuisionis 130. prima nimirum figura sub primo loco & secunda sub secundo,&c.Si enim numeros productos & hoc residuum in vnam summam colligamus, vt in Multiplicatione docuimus,producetur numerus 45678. qui diuisus fuit.

236
193
———
708
2124
236
130
———
45678.

Expedit interdum, vt diuisio nondum absoluta examinetur. Expedit interdum, cum, facta operatione aliqua in diuisione,dubitas,num in re aliqua peccaueris, necne, vt diuisionem vsque ad eum locum perductam examines,ne frustra vlterius progrediaris, si forte iam error aliquis commissus sit.Examinabis autem partem illam diuisionis non aliter, ac alias diuisiones, si omittas figuras numeri diuidendi sub quibus nondum diuisor positus est. Vt in hac diuisione, facta prima operatione, eam examinabis per abiectionem 9. Reiectis 9. ex diuisore 2898.remanet 0. Item reiectis 9. ex Quotiente 2. remanent 2. Multiplicatis autem inter se hisce residuis 0. & 2. producitur 0. quæ cifra in superiori parte crucis collocanda esset, nisi aliquid ex diuisione superesset: sed quoniam supersunt 913. reijcienda sunt,9. ex hoc residuo. Quo facto, remanebunt 4.in suprema crucis parte collocanda. Ac tantundem remanet, si reijciantur 9.ex numero 6709.hactenus diuiso,omissis figuris 456. sub quibus nondum positus est diuisor.

191
2123
6709456 (2
2898

4
0 X 2
4

Facilitas diuisionis quando diuisor habet in principio aliquot cifras. Quod si diuisor in principio habuerit aliquot cifras, facilis erit diuisio, si à numero diuidendo remoueantur tot figuræ ad dexteram, quot cifras habet diuisor, & reliquus numerus per diuisorem, demptis prius illis cifris, diuidatur: Sed residuum huius diuisionis, si quod erit, præponendum est versus sinistram figuris ablatis, vt fiat numerator fractionis; Denominator autem erit diuisor totus vna cum cifris. Et si in diuisione nihil remansit, erunt figuræ ablatæ pro numeratore fractionis ponendæ.

2
275
456
23948 (367 $\frac{7003}{38000000}$
3888
33

Vt

Vt si numerus 13946007693. diuidendus sit per 38000000. auferemus ex eo priores sex figuras 007693 ad dexteram, quot nimirum cifræ sunt in principio diuisoris; & reliquum numerum 13946. per 38. diuidemus, omissis illis sex cifris, vt in hoc appositio exemplo factum est. Quoniam vero in diuisione nihil relictum est, scribemus supra diuisorem numerum ablatum 7693. duæ enim illæ cifræ ad sinistram nihil significant, ac propterea omittendæ sunt.

Rursus si idem numerus 13946007693. diuidendus sit per 300800000. auferemus ex eo priores quinque figuras 07693. quot videlicet cifræ sunt in principio diuisoris; & reliquum numerum 139460. per 3008. partiemur, omissis quinque illis cifris, vt factum est in hoc altero exemplo. Quia vero in diuisione reliquus est hic numerus 1092. si eum versus sinistram præponamus hisce figuris ablatis 07693. collocabimus supra diuisorem totum hunc numerum 109207693. vt hic cernis.

09
11142
139460 (46 $\frac{109207693}{300800000}$
30088
300

Hinc fit, si vltima figura diuisoris fuerit 1. & reliquæ omnes cifræ, Quotientem esse numerum diuidendum, sublatis prius ab eo tot figuris versus dexteram, quot cifræ sunt in diuisore; Numerator autem fractionis erit numerus sublatus: & denominator ipse diuisor. vt si numerus 4780920345. diuidendus sit per 100000 erit Quotiens 47809 $\frac{20345}{100000}$. Sic etiam si numerus 9700203. diuidendus sit per 10000. Quotiens erit 970 $\frac{203}{10000}$ atq; ita de cæteris.

Facilis aliquando fit diuisio quãdo diuidendus numerus habet aliquot cifras in principio.

Neque vero hoc prætereundum est, si numerus diuidendus habuerit aliquot cifras in principio, & antequam tota diuisio absoluatur, nulla figura significatiua in diuisione relicta fuerit, ponendas tunc esse post Quotientem omnes cifras numeri diuidendi nondum deletas.

112
338
1863000000 (5400000
3455
34

Vt si diuidendus proponatur numerus 1863000000. per 345. quoniam post secundam operationem nihil in diuisione remansit. si post inuentum Quotientem 54. ponantur quinque cifræ numeri diuidendi nondum deletæ, fiet totus Quotiens 5400000. absolutaq; erit diuisio.

Additio, Subtractio, Multiplicatio & Diuisio fundamenta sunt omniũ quæ in Arithmetica traduntur.

Ex his quæ de additione, subtractione, multiplicatione, diuisioneq; numerorum integrorum dicta sunt, omnia, quæ in vniuersa Arithmetica traduntur, tanquam ex elementis pendent: adeo vt omnia per ea conficiantur, nihilque aliud in quæstionibus Arithmeticis soluendis præcipiendum sit, quam vt numeri vel addantur, subtrahanturue aut multiplicentur diuidanturue. Itaque nisi quis in quatuor illis operationibus Arithmeticis probe sit exercitatus, frustra sese ad alia, quæ tradituri sumus conferet.

NVMERATIO FRACTORVM NVMERORVM.

CAPVT VI.

QVEMADMODVM in superioribus numeros integros numerauimus, pluresq; propositos in vnam summam collegimus, atq; vnum ab altero subduximus, duos item quoscunq; inter se multiplicauimus, & denique vnum per alterum sumus partiti; ita in his, quæ sequuntur, eadem efficiemus in numeris fractis, qui alio nomine Minutiæ, fractioneue dici solent vulgares.

Numerus fractus siue fractio Minutiaue quid.

Est autem Fractio, Minutiaue, siue numerus fractus, vna pars, vel plures partes alicuius totius in plures æquales partes diuisi. Vt si totum aliquod sectum sit in quinq; partes æquales, & quispiam ex illis sumpserit vnam, dicetur illa quinta pars numerus fractus. Sic etiam, si quis duas, tres, aut quatuor acceperit; dicentur duæ illæ, tres, vel quatuor quintæ partes numerus fractus.

Numerator & Denominator fractionis quid.

Constat quælibet Minutia duobus numeris, qui in ea proferenda exprimuntur. Primus dicitur Numerator, quia numerat, quot partes contineat fractio proposita ex illis, in quas totum, cuius est fractio, diuisum est. Alter appellatur Denominator, quia denominat illas partes fractionis, hoc est indicat, in quotnam partes totum intelligitur esse diuisum. Vt cum proponitur fractio continens tres quintas partes, Numerator est 3. quia significat, in illa fractione contineri tres partes totius; Denominator vero est 5. quia indicat, tres illas partes non esse qualescunque, sed quintas.

Fractio quauis quo pacto scribatur, & pronunctetur.

Scribitur autem quælibet fractio hoc modo. Denominator directo sub Numeratore, interiecta lineola quadam inter vtrumque numerum collocatur. Vt tres quintæ partes hoc modo scribuntur $\frac{3}{5}$. pronunciaturque vterq; numerus in recto, primo tamen loco Numerator. Vt dicta Minutia ita proferenda est; Tres quintæ. Hæc vero $\frac{23}{48}$ ita, Viginti quinq; quadragesimæ octauæ, significatq;, totum aliquod diuisum esse in quadraginta octo partes æquales, & viginti quinq; ex illis acceptas esse.

Fractiones vnde oriantur.

Oriuntur plerunq; numeri fracti ex residuo diuisionis integrorum numerorum. Quando enim aliquid in diuisione remansit, fit ex illo Numerator fractionis, cuius Denominator est diuisor, vt supra diximus. Vt cum diuiduntur 46. per 7. Quotiens est 6. supersuntq; 4. Fit ergo huiusmodi fractio $\frac{4}{7}$. ita vt totus Quotiens sit $6\frac{4}{7}$. Item quando minor numerus per maiorem proponitur diuidendus, gignitur fractio, cuius numerator est numerus diuidendus, Denominator autem diuisor. Vt si diuidenda sint 4. per 7. fit fractio $\frac{4}{7}$ significatq; 4. diuisa esse per 7. ita vt Minutia hæc $\frac{4}{7}$. sit septima pars huius numeri 4. Pars inquam, denominata à diuisore 7.

Quando minor numerus per maiorem diuiditur, fit fractio.

Quemadmodum enim diuisis 12. per 3. inuenitur numerus 4. qui tertia pars est numeri diuisi 12. Pars, inquam, à diuisore denominata; ita etiam cum diuidimus 4. per 7. fit Quotiens $\frac{4}{7}$. qui septima pars est numeri diuisi 4. Pars inquam, denominata à diuisore. Eadem ratione quælibet alia Minutia pars est numeratoris à denominatore denominata. Vt hæc Minutia $\frac{3}{4}$. est quarta pars ternarii. Nam si diuidantur 3. per 4. fit Quotiens $\frac{3}{4}$. Quare si sumatur Minutia $\frac{3}{4}$. quater, efficientur $\frac{12}{4}$. quæ ternario æquiualent, vt ex iis, quæ paulo infra scribemus, manifestum erit. atq; ita de aliis.

Fractio quauis est pars Numeratoris à Denominatore denominata.

ÆSTI-

ÆSTIMATIO SIVE VALOR FRACTORVM NVMERORVM.

CAPVT VII.

Minutiarũ valor quo pacto augeatur.

MINVTIÆ cuiusuis æstimatio, siue valor augetur, cum, Numeratore manente eodem, denominator minuitur: vel cum, Denominatore manente eodem, numerator augetur. Vt in his fractionibus $\frac{1}{6}.\frac{1}{5}.\frac{1}{4}.\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.$ vel in his $\frac{2}{7}.\frac{3}{7}.\frac{4}{7}.\frac{5}{7}.\frac{6}{7}.$ quælibet posterior priore maior est, vt ex sequentibus patebit: & in prioribus quidem, manente semper eodem numeratore, denominator minuitur: in posterioribus vero, eodem semper manente denominatore, numerator augetur.

Minutiarũ valor quo pacto minuatur.

Minutiæ vero cuiusuis æstimatio, siue valor minuitur, cum, Numeratore manente eodem, denominator augetur: vel cum, Denominatore manente eodem, Numerator minuitur. Vt in his fractionibus. $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}.\frac{1}{5}.\frac{1}{6}.$ vel in his $\frac{7}{8}.\frac{6}{8}.\frac{5}{8}.\frac{4}{8}.\frac{3}{8}.$ quælibet posterior priore minor est, vt constabit ex sequentibus: & in prioribus quidem, eodem semper numeratore manente, denominator augetur; in posterioribus vero, eodem semper manente denominatore, numerator minuitur.

Minutia, quarũ numeratores ad denominatores eandem habẽt proportionem, æquales sunt.

Minutiæ deinde quæcunq;, quarum vnius numerator ad suum denominatorem eandem habet proportionem, quam reliquarum numeratores habent ad suos denominatores, singuli ad singulos, inter se æquales sunt. Vt hæ minutiæ $\frac{1}{2}.\frac{8}{16}.\frac{50}{100}.\frac{100}{200}.\frac{500}{1000}.$ omnes inter se æquales sunt; quia cuiusuis numerator ad suum denominatorem proportionem habet subduplam, id est, dimidia pars est ipsius. Sic etiam $\frac{3}{4}.\frac{6}{8}.\frac{15}{20}.\frac{300}{400}.$ Nam cuiuslibet numerator ad suum denominatorem habet proportionem subsesquitertiam, hoc est, tres quartas partes ipsius continet.

Si numerator, ac denominator cuiusuis fractionis per quemcunq; numerũ multiplicetur. diuidaturue gignitur eiusdem valoris fractio.

Quoniam vero, si duo numeri per eundem numerum multiplicentur, siue diuidantur, numeri producti eandem habent proportionem, quam duo illi numeri multiplicati, siue diuisi; fit, vt multiplicatis, aut diuisis Numeratore, & Denominatore per quemcunque numerum, procreetur alia minutia eiusdem valoris, quamuis maiores, minoresue numeros habeat. Vt proposita hac minutia $\frac{2}{3}$. si vterque eius numerus multiplicetur per 3. producetur minutia $\frac{6}{9}$. eiusdem valoris. Sic etiam, si vterque numerus per 3. diuidatur, fiet minutia $\frac{2}{3}$. eiusdem valoris. Et licet hæc omnia demonstrari possint ex lib. 7. Eucl. contenti tamen erimus, si vno exemplo ex his duabus minutiis $\frac{2}{3}.\frac{6}{9}$. desumpto, in quo veritas huius rei perspicue apparebit, rem illustremus. Nam si accipiatur numerus 9. qui quidem habet partes à denominatoribus dictarum minutiarum denominatas, nimirum tertiam, ac nonam, erunt duæ eius tertiæ partes æquales sex nonis partibus eiusdem. Cum enim tertia eius pars sit 3. erunt duæ tertiæ partes 6. Item cum nona eius pars sit 1. erunt quoque sex nonæ partes 6. Æquales igitur sunt hæ minutiæ $\frac{2}{3}.\frac{6}{9}.$ & sic de aliis.

Quæ minutia vni integro æquiualeat.

Quando porro numerator alicuius minutiæ denominatori est æqualis, æquiualet minutia illa vni integro. Vt quælibet harum minutiarum $\frac{1}{1}.\frac{6}{6}.\frac{10}{10}.\frac{1000}{1000}.$ constituit vnum integrum, hoc est, totum illud, quod in partes à denominatoribus denominatas diuisum est: propterea quod in numeratore continentur omnes partes, in quas integrum, seu totum est diuisum.

Quæ minutia minor sit vno integro.

Quando vero numerator minutiæ minor est denominatore, minor est illa minutia vno integro, quales sunt hæ minutiæ $\frac{2}{3}.\frac{4}{7}.\frac{9}{16}$ quia cuilibet tot partes à suo denominatore denominatæ desunt ad integrum constituendum, quot vnitatibus numerator à denominatore abest. Vt huic minutiæ $\frac{2}{3}$. deest $\frac{1}{3}$. huic vero $\frac{4}{7}$. desunt $\frac{3}{7}$. & huic $\frac{9}{16}$. deest $\frac{7}{16}$.

Quæ minutia maior sit vno integro.

Quando denique numerator minutiæ denominatore maior est, maior est illa minutia vno integro. quales sunt hæ minutiæ $\frac{4}{3}.\frac{8}{7}.\frac{20}{16}.$ quia in cuiuslibet numeratore plures partes continentur, quam sint illæ, in quas totum, siue integrum diuisum est.

Vtra duarum minutiarũ maior sit, quo pacto cognoscatur.

Iam vero propositis duabus minutiis, vt cognoscas, vtra illarum maior sit, seruabis hanc regulam. Positis minutiis ordine, multiplica earum numeros in crucem, id est, numeratorem prioris in posterioris denominatorem, & posterioris numeratorem in denominatorem prioris, ponendo numeros productos supra numeratores. Nam cuius numerator maiorem numerum produxerit, ea minutia maior erit. Quod si duo numeri producti fuerint æquales, æquales quoque erunt propositæ minutiæ. Vt in primo horum trium exemplorum maior est posterior minutia $\frac{6}{8}$. quam prior $\frac{2}{3}$. quoniam numerus 18. productus ex 6. numeratore posterioris minutiæ in 3. denominatorem prioris, maior est, quam numerus 16. ex 2. numeratore prioris minutiæ in 8. denominatorem posterioris productus. In secundo vero exemplo maior est minutia $\frac{7}{8}$. quam $\frac{20}{48}$. In tertio deniq; æquales sunt minutiæ $\frac{3}{4}$. & $\frac{72}{96}$. vt ex multiplicationibus in crucem factis patet. Ratio huius regulæ est, quod, cum numeratores in crucem per denominatores multiplicati producunt æquales numeros, eadem proportio sit numeratorum ad denominatores, vt constat ex propos. 19. lib. 7. Eucl. Quare vt supra diximus, æquales erunt minutiæ. Hinc fit, numeratorem illum, qui maiorem gignit numerum, ad suum denominatorem habere maiorem proportionem, ac proinde illam minutiam esse maiorem, vt supra dictum est. Sed vt exemplo etiam discas, maiorem esse minutiam $\frac{6}{8}$. quam $\frac{2}{3}$. sumamus numerum 48. qui habet partes à denominatoribus harum minutiarum denominatas, nempe octauam, & tertiam. Itaq; cum vna octaua pars huius numeri 48. sit 6. erunt sex octauæ, 36. Item cum vna tertia pars eiusdem numeri sit 16. erunt duæ tertiæ, 32. qui numerus minor est, quam 36.

16.	18.	41.	40.	48.	48.
$\frac{2}{3} \bowtie \frac{6}{8}$		$\frac{7}{8} \bowtie \frac{20}{48}$		$\frac{3}{4} \bowtie \frac{72}{96}$	

Valor minutiæ dati quo pacto in minore moneta, ponderе vel mensura exploretur.

Quod si data minutia cuiuspiam monetæ, vel ponderis, aut mensuræ maioris, cupiasque valorem eius explorare in minori moneta, vel pondere, aut mensura, hoc est, reuocare eam ad minorem monetam, &c. facies id in hunc modum. Multiplica numeratorem per numerum, qui indicat, quoties moneta minor, ad quam reuocanda est fractio, in maiori continetur, productumque numerum per denominatorem diuide. Quotiens enim numerus valorem datæ minutiæ in minore illa moneta indicabit. Quod etiam de ponderibus, & mensuris intellige. Vt si datasit hæc minutia aureorũ $\frac{5}{7}$. quæ significat, vt supra c. 6. diximus, quatuor aureos in septem

Iulius, Baiochus, & Quatrinus apud Romanos quid significet.

septem æquales partes distributos, redigendaque sit ad Iulios, Baiochos, & Quatrinos, (vtemur enim in hac nostra Arithmetica exemplis monetæ Romanæ, in qua quatuor quatrini, cum Arithmeticam hanc primum conscripsimus, efficiebant vnum baiochum, & 10. baiochi vnum Iulium, ac 10. Iulij vnum aureum nummum.) multiplicabimus numeratorem 4. per 10. quoniam 10. Iulij vnum aureum conficiunt, vt 4. illos aureos in 7. partes diuisos redigamus ad 40. Iulios; numerumq; productum 40. per denominatorem 7. partiemur. Quotiens enim numerus dabit Iulios $5\frac{5}{7}$. Quod si hanc minutiam Iuliorum, $\frac{5}{7}$. quæ significat 5. Iulios in 7. partes æquales diuisos, ad baiochos velimus redigere, multiplicabimus quoq; numeratorē 5. per 10. quia 10. baiochi vnum etiam Iulium conficiunt, vt 5. illos Iulios in 7. partes æquales distributos redigamus ad 50. baiochos: productumq; numerum 50. per denominatorem eundem 7. diuidemus. Dabit enim Quotiens numerus baiochos $7\frac{1}{7}$. Si tandem minutiam hanc baiochorum, $\frac{1}{7}$. quæ significat vnum baiochum diuisum in 7. partes æquales, ad quatrinos velimus reducere, multiplicabimus numeratorem 1. per 4. quod 4. quatrini efficiant vnum baiochum, vt illum baiochum in 7. partes æquales diuisum ad 4. quatrinos reducamus, numerumque productum 4. per denominatorem 7. partiemur, efficiemusque $\frac{4}{7}$. vnius quatrini, hoc est, paulo plus, quam dimidium vnius quatrini. Itaque $\frac{4}{7}$. vnius aurei continent Iulios 5. Baiochos 7. & Quatrinos $\frac{4}{7}$. Si vero $\frac{4}{7}$ vnius aurei redigere statim velimus ad baiochos, multiplicabimus numeratorem 4. per 100. quoniam 100. baiochi vnum aureum constituunt, vt 4 illos aureos in 7. partes distributos redigamus ad 4 0 0. baiochos, numerumque productum 4 0 0. per denominatorem 7. partiemur, efficiemusq; baiochos $57\frac{1}{7}$.

Rursus si explorandum sit, quot passus, pedes, palmos, digitosue contineant $\frac{5}{8}$. vnius milliarij Italici, statuendo milliarium vnum constare 4000. passibus Geometricis, passum vero 5. pedibus, & pedem 4. palmis, palmum autem 4. digitis, & digitum 4. granis hordei; multiplicabimus numeratorem 5. per 1000. vt 5. milliaria in 8. partes æquales distributa redigantur ad passus 5000. productumq; numerum 5000. partiemur per denominatorem 8. efficiemusq; 625. passus.

Sic etiam si $\frac{1}{13}$. vnius passus reducere velimus ad pedes, multiplicabimus numeratorem 10. per 5. productumque numerum 50. per denominatorem 13. partiemur, efficiemusque pedes $3\frac{11}{13}$. Si rursus hunc numeratorem 11. per 4. multiplicemus, numerumque productum 44. per denominatorem 13. diuidamus, efficiemus palmos $3\frac{5}{13}$. Item si hunc numeratorem 5. per 4. multiplicemus, productumq; numerum 20. per denominatorem 13. partiamur, inueniemus digitos $1\frac{7}{13}$. Tandem si numeratorem hunc 7. multiplicemus per 4. & numerum productum 28. diuidamus per denominatorem 13. reperiemus grana hordei $2\frac{2}{13}$. Itaque $\frac{10}{13}$. vnius passus continent pedes 3. palmos 3. digitum 1. & grana $2\frac{2}{13}$.

Item reducenda sit minutia hæc, $\frac{3}{4}$. vnius libræ ad vncias. Quoniam 12. vnciæ vnam libram constituunt, multiplicabimus numeratorem 3. per 12. & productum numerum 36. per denominatorem 4. diuidemus, efficiemusq; 9. vncias.

Postremo inquirendum sit, quot Minuta contineantur in $\frac{5}{6}$ vnius Gradus. Quia 60. Minuta efficiunt 1. Gradum, multiplicabimus numeratorem 5. per 60. & productum numerum 3 0 0. per denominatorem 6. diuidemus, efficiemusq; Minuta 50.

FRACTIONES FRACTORVM NVMERORVM.

CAPVT VIII.

Minutiæ minutiarū vnde oriantur. Minutia quid, Minutiæ minutiarū quomodo pronunciētur, & scribuntur.

NON solum res integra in quotuis partes æquales diuiditur, vt fractiones simplices, de quibus hic agimus, procreentur, verum etiam interdum ipsi fracti numeri intelliguntur in plures æquales partes distribui, ac si essent integræ quædam res. Vnde fractiones fractionum, fractorumue numerorum, siue Minutiæ minutiarum oriuntur. Vt quemadmodum cum accipio quatuor partes alicuius totius in septem partes distributi, efficio hanc minutiam simplicem $\frac{4}{7}$. quæ significat quatuor septimas partes ipsius integri: ita etiam cum intelligo hanc fractionem simplicem $\frac{3}{5}$. diuisam esse in quinque partes æquales, accipioque tres partes, facio minutiam minutiæ illius, nempe tres quintas partes quatuor septimarum alicuius integri; ita vt prior in recto efferatur, scribaturque, sicut minutiæ simplices, posterior vero pronuncietur in obliquo, noteturque sine interiectione lineæ, vt ab aliis distinguatur. Vt prædicta minutia minutiæ ita scribenda est $\frac{3}{5}.\frac{4}{7}$. pronunciaturque sic. Tres quintæ quatuor septimarum vnius integri. Hæc autem minutia minutiarum $\frac{3}{5}.\frac{4}{7}\ \frac{1}{8}.\frac{1}{2}$. ita proferetur. Duæ tertiæ trium quartarum ex vna sexta parte vnius dimidij alicuius integri: significat autem ex dimidio alicuius integri sumptam esse vnam sextam partem illius dimidij in sex æquales partes distributi; & ex hac sexta parte in quatuor partes æquales diuisa, acceptas esse tres quartas; ac demum ex his tribus quartis diuisis in tres æquales partes sumptas esse duas tertias. Eademq; ratio est in aliis.

Quo pacto autem æstimatio, siue valor fractionum fractorum numerorum cognoscatur. docebimus ad finem cap. 10. vbi eas ad simplices fractiones reuocabimus.

REDVCTIO FRACTORVM NVMERORVM AD minimos numeros, siue terminos.

CAPVT IX.

Cur minutiæ ad minimos terminos reducantur.

ACCIDIT nonnunquam, vt minutia aliqua ita magnis numeris scribatur, vt commode minoribus possit exprimi, non mutato eius valore, ac pretio. Vt hæc minutia $\frac{36}{72}$. æquialet huic $\frac{1}{2}$. minimis, vt vides, numeris expressæ. Operæ pretium est autem minutiam maioribus numeris scriptam ad minimos numeros, terminosue reuocare, multas ob causas. Primum, quia facilius minutia quæuis minoribus numeris expressa intelligitur, quam maioribus numeris scripta. Quis enim non facilius percipit $\frac{1}{2}$. quam $\frac{36}{72}$ aut quam $\frac{500}{1000}$. aut quam $\frac{826}{1652}$. cum tamen omnes idem prorsus significent? Deinde, quoniam facilior redditur operatio fractionum, si ad minimos terminos sint reductæ, vt ex sequentibus fiet perspicuum. Tertio, vt Mathematicorum libri, qui minutiasque

minimis solent numeris notare, intelligantur. Si enim, verbi gratia, quis inueniat à quopiam scriptum, numerum hunc 2528. per 48. diuisum facere Quotientem $52.\frac{32}{48}$. ipse vero hoc velit examinare, reperiet Quotientem $52\frac{32}{48}$. qui ab illo differre videtur, cum tamen idem sit. Minutia enim hæc $\frac{32}{48}$. ad minimos terminos reducta facit $\frac{2}{3}$. Quare antequam iudicet, se, aut scriptorem illum errasse, quod videat eius minutiam à sua differre, reducenda prius erit minutia à se inuenta, & maioribus terminis expressa, ad minimos numeros, siue terminos.

Minutiæ quæ arte ad minimos numeros reducantur.

Hac autem arte Minutia quæuis maioribus scripta numeris ad minimos terminos reuocabitur. Diuidatur tam numerator, quam denominator per maximam communem vtriusque mensuram, id est, per maximum numerum, qui vtrumque metiatur. Quotientes enim numeri (si Quotientem numeratoris facias numeratorem, & Quotientem denominatoris denominatorem) dabunt minutiam illi æquialentem, & minimis numeris expressam. Nam cum, diuisis duobus numeris per vnum & eundem numerum, Quotientes eandem habeant proportionem, quam illi numeri, sint autem Quotientes numeri hoc modo inuenti omnium minimi, quod numeri minutiæ propositæ diuisi sint per maximum numerum eos numerantem, ita vt per maiorem diuidi nequeant, quin aliquid in diuisione relinquatur; perspicuum est, minutiam inuentam minimis numeris esse expressam, ita vt minoribus exprimi nequeat.

Exemplum sit in hac minutia proposita $\frac{32}{48}$. cuius numeratorem, ac denominatorem metiuntur, & numerant omnes hi numeri 2. 4. 8. 16. & præterea nullus. Nam licet numerus 24. qui maior illis est, numeret denominatorem 48. tamen numeratorem 32. non metitur. Sic etiam quamuis numerus 32. qui maior adhuc est, metiatur numeratorem 32. nullo tamen modo denominatorem 48. numerat. Nos autem hoc loco intelligimus numerum maximum numerantem, qui vtrumq; numerum minutię propositæ, id est, tam numeratorem, quam denominatorem numeret. Si igitur tam numerator 32. quam denominator 48. diuidatur per maximum illorum numerorum, nimirum per 16. reperientur Quotientes 2. & 3. Quare minutia proposita $\frac{32}{48}$. reducetur ad hanc æquialentem, $\frac{2}{3}$. & minimis numeris expressam. Si eosdem numeros propositæ minutiæ diuideres per alium numerum eos numerantem, qui non sit maximus, redigeres quidem minutiam ad aliam æqualem minoribus terminis expressam, sed non minimis. Vt si iidem numeri 32. & 48. diuidantur per 8. inuenietur hæc minutia $\frac{4}{6}$. quæ minoribus adhuc numeris scribi potest, hoc modo $\frac{2}{3}$.

Eadem ratione hæc minutia $\frac{45}{60}$. cuius numeratorem & denominatorem metiuntur omnes hi numeri 3. 5. 15. redigetur ad hanc, $\frac{3}{4}$. si nimirum tam numerator, quam denominator per 15. qui maximus numerus est illos numerans, diuidatur, atque ita de reliquis.

Quādo minutia non potest redigi ad minimos terminos.

Quod si alicuius minutiæ numeratorem, ac denominatorem nullus numerus, præter vnitatem, numeret, non poterit ad minores terminos redigi minutia illa, sed iam minimis numeris expressa erit. Vt hæ minutiæ $\frac{20}{39}.\frac{20}{03}.\frac{47}{59}$. ad minores terminos reuocari non possunt. Quamuis enim hi numeri 2. 4. 5. 10. numeratorem primæ minutiæ numerent, nullus tamen eorum eiusdem denominatorem metitur. Item licet hi numeri 3. 13. metiantur denominatorem eiusdem minutiæ, neuter tamen eorum eius numeratorem metitur. Rursus quamuis hi numeri 2. 4. 5. 10. numeratorem secundæ minutiæ, hi vero 3. 7. 9. 21. denominatorem eiusdem metiantur, nullus tamen illorum vtrumque numerum: id est, tam numeratorem, quam denominatorem illius minutiæ, numerat. Postremæ autem minutiæ numeros nullus numerus præter vnitatē numerat, cum sint (vt cum Arithmeticis loquamur) primi, quemadmodum & primarum duarum numeri sunt inter se primi, quamuis nullus eorum primus sit. Dicitur enim numerus primus, quem vnitas sola metitur; Primi vero inter se numeri vocantur, quos sola vnitas, communis mensura metitur.

Primus numerus & primi inter se numeri quid.

Qua ratione maxima mensura communis numeratoris ac denominatoris cuiusuis minutiæ reperiatur.

Quoniam vero, vt minutia proposita ad minimos terminos reuocetur, necesse est, vt maxima mensura communis numeratoris, ac denominatoris inueniatur. (Per hanc enim maximam communem mensuram vterque numerus, tam numerator, quam denominator, diuidendus est, vt diximus.) tradi solet ad eam inueniendam hæc regula. Diuidatur denominator per numeratorem: Et si aliquid in diuisione relictum fuerit, diuidatur diuisor, id est, numerator, per residuum illud diuisionis: Et si rursus aliquid remanserit, diuidatur vltimus hic diuisor, id est, residuum illud, per residuum huius vltimæ diuisionis; & sic semper vltimus diuisor per vltimum residuum diuidatur, donec diuisor occurrat, qui nihil in diuisione relinquat. Hic namque diuisor nihil relinquens erit maxima communis mensura numeratoris ac denominatoris minutiæ propositæ. Quod si diuisor aliquis in huiusmodi diuisionibus relinquat vnitatem, non habebunt numerator, & denominator minutiæ propositæ communem mensuram, præter vnitatem, sed erunt numeri inter se primi.

Quādo numerator, & denominator datæ minutiæ nō habeant communē mensuram præter vnitatem.

Vt si proposita sit minutia $\frac{36}{72}$. inueniemus maximam mensuram communem numeratoris, & denominatoris hoc modo. Diuidatur denominator 72. per numeratorem 36. & quoniam, hac diuisione peracta, nihil remanet, erit diuisor hic 36. maxima communis mensura; per quam si diuidamus numeratorem, denominatoremque datæ minutiæ $\frac{36}{72}$. reducemus eam ad $\frac{1}{2}$. minimis terminis expressam.

Inuentio maximæ mensuræ quorumlibet duorū numerorū.

Rursus si data sit minutia $\frac{60}{96}$. reperiemus maximam communē mensuram numeratoris, & denominatoris hac ratione. Diuiso denominatore 96. per numeratorem 60. supersunt in diuisione 36. Diuiso rursus diuisore 60. per residuum 36. remanent in diuisione 24. Item diuiso hoc vltimo diuisore 36. per vltimum residuum 24. relinquuntur 12. diuiso denique vltimo hoc diuisore 24. per vltimum residuum 12. nihil supereſt. Est igitur maxima mensura communis 12. per quam si diuidatur tam numerator, quam denominator datæ minutiæ $\frac{60}{96}$. constituetur hæc minutia $\frac{5}{8}$. minimis numeris expressa.

Sed si proponatur hæc minutia $\frac{488}{1032}$. nō inuenietur vlla communis mensura numeratoris, & denominatoris maior, quam vnitas. Nam denominatore 103. diuiso per numeratorem 48. supersunt 7. Diuiso item diuisore 48. per residuum 7. relinquuntur 6. Deniq; diuiso vltimo hoc diuisore 7. per vltimum residuum 6. supereſt 1. Quare, vt supra dictum est, numerator, & denominator minutiæ huius $\frac{488}{1032}$. sunt numeri inter se primi.

Eadem ratione quorumlibet duorum numerorum (licet fractionem non constituant, sed absolute proponantur.) maximam communem mensuram inueniemus, si maiorem per minorem diuidamus, & hunc diuisorem per residuum diuisionis, si quod erit, & rursus hunc vltimum diuisorem per residuum vltimæ diuisionis,

& sic deinceps, &c. Nam vltimus diuisor nihil relinquens in diuisione erit maxima communis mensura datorum numerorum. Si vero in diuisione aliqua fuerit relicta vnitas, erunt numeri dati inter se primi, nullamque habebunt mensuram communem, præter vnitatem.

Vnde colligatur regula inuenẽdi maximã mensuram duorum numerorum.

Colligitur hæc regula inueniendi maximam mensuram communem duorum numerorum ex propos. 2. lib 7. Eucl. Nam licet Euclides iubeat semper minorem numerum de maiore subtrahere, tamen idem efficitur, & quidem multo breuius, per diuisionem maioris numeri per minorem, cum diuisio sit compendiosa quædam subtractio, quemadmodum & multiplicatio, compendiosa quædam additio est.

Alia ratio redigendarum minutiarum ad minimos terminos.

Alio modo reducetur minutia proposita ad minimos terminos, si tam numerator, quã denominator per communem aliquam eorum mensurã notam, etiamsi maxima nõ sit, diuidatur, vt inueniatur minutia sub minoribus numeris: Et rursus huius inuentæ minutiæ tam numerator, quàm denominator, per aliam communem eorum mensuram diuidatur, & sic deinceps, donec minutia inueniatur, cuius numerator & denominator sint numeri inter se primi. vt proposita minutia hac $\frac{36}{48}$. si vterque eius numerus diuidatur per 2. inuenietur hæc minutia $\frac{18}{24}$. cuius vterque numerus si diuidatur per 3. reperietur hæc minutia $\frac{6}{8}$. cuius tandem numeri diuisi per 2. offerent hanc minutiam $\frac{3}{4}$. sub minimis terminis: sed prior illa ratio præstantior est ac breuior.

REDVCTIO FRACTORVM NVMERORVM AD EANDEM DENOMINATIONEM, ET AD INTEGRA, NEC NON integrorum ad fractionem quamcunque, ac denique fractionum fractorum numerorum ad simplices fractiones.

CAPVT X.

SÆpenumero reducendæ sunt fractiones diuersorum denominatorum ad alias, quæ illis æquales sint, singulæ singulis, habeantque eundem denominatorem. Quod qua ratione fieri debeat, hoc cap. exponemus, primum quidem quando propositæ minutiæ non sunt plures, quàm duæ, deinde vero quando plures sunt.

Quo pacto duæ minutiæ ad eandem denominationẽ reducãtur.

Propositis igitur duabus minutiis diuersos denominatores habentibus, si denominatores inter se multiplicentur, procreabitur communis denominator, ad quem datæ minutiæ sunt reuocandæ: numerator vero cuiuslibet in crucem per denominatorem alterius multiplicatus producet numeratorem. vt in hoc appositio exemplo. Ex denominatore 3. in denominatorem 4. fit denominator communis 12. Item ex 2. numeratore prioris minutiæ in 4. denominatorem posterioris fit numerator 8. At ex 3. numeratore posterioris minutiæ in 3. denominatorem prioris fit numerator 9. Duæ ergo minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. ad has duas $\frac{8}{12}$. $\frac{9}{12}$. reducuntur, quæ illis æquales sunt, habentque vnum & eundem denominatorem communem 12. Quod enim $\frac{8}{12}$. æquiualeant $\frac{2}{3}$. constat ex propos. 17. & 18. lib. 7. Euclid. propterea quod vterque numerus huius multiplicatus per eundem numerum 4. vel multiplicans eundem numerum 4. nimirum denominatorem posterioris minutiæ propositæ, produxit vtrunque numerum illius. Hinc enim fit, numeratorem & denominatorem minutiæ $\frac{8}{12}$. eandem habere proportionem, quam habent numerator, & denominator minutiæ $\frac{2}{3}$. Quare æquales erunt minutiæ ipsæ, vt supra diximus. Eadem ratione æquales erunt minutiæ $\frac{9}{12}$. & $\frac{3}{4}$. quia vterque numerus huius $\frac{3}{4}$. multiplicatus per eundem numerum 3. vel multiplicans eundem numerum 3. denominatorem videlicet prioris minutiæ datæ $\frac{3}{4}$. produxit vtrumque numerum illius $\frac{9}{12}$.

$\frac{2}{3} \bowtie \frac{3}{4}$. reducuntur ad $\frac{8}{12}$. $\frac{9}{12}$.

Si vero plures minutiæ, quàm duæ, ad eandem denominationem proponantur reducendæ, quærendus est primum numerus ab omnibus denominatoribus datarum minutiarum numeratus, ita vt omnes partes ab ipsis denominatas contineat. Ita autem numerum à denominatoribus propositis, vel à quibuscunque numeris datis numeratum inueniemus. Multiplicentur omnes denominatores inter se; ducendo primum in secundum, & hunc numerum productum in tertium, productumque hunc numerum in quartum, & sic deinceps, donec omnes sint multiplicati. Productus enim vltimus numerus erit is, qui quæritur. Vt propositis hisce minutiis $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$. si primus denominator 2. in secundum 3. multiplicetur, & productus numerus 6. in tertium 4. ducatur, productusque numerus 24. in quartum 5. multiplicetur, procreabitur numerus 120. quem dati denominatores, nempe numeri 2. 3. 4. 5. numerant.

Inuentio numeri à quotcunq; datis numeris numerati.

Inuẽtio minimi numeri à quotcunq; numeris numerati.

Quoniam vero numerus hac ratione inuentus interdum ita magnus est, vt eo minor dari possit, qui ab eisdem propositis denominatoribus numeretur, reperiemus minimum numerum à quotcunque numeris numeratum hoc modo. Primum inueniemus minimum numerum à prioribus duobus numeris propositis numeratum, hac ratione. Aut priores duo numeri habent communem aliquam mensuram, præter vnitatem, aut non: (Quod quidem cognosces, si maior per minorem diuidatur, & hic diuisor per residuum diuisionis, & sic deinceps; alterna quadam diuisione. Si enim diuisor occurrat, qui nihil relinquat, habebunt duo illi numeri communem mensuram, ipseque diuisor vltimus erit maxima eorum mensura: si vero occurrat diuisor, qui relinquat vnitatem, carebunt communi mensura, eruntque primi inter se, vt supra cap. 9. docuimus.) Si duo illi numeri priores non habent communem mensuram, erit numerus ex multiplicatione vnius in alterum productus minimus ab illis numeratus, ita vt minor dari non possit: Si vero habent mensuram communem, inuenta maxima earum mensura communi, per ea, quæ cap. 9. scripsimus, diuidatur vterque per eam, ponanturque Quotientes sub ipsis numeris. Nam si Quotientem prioris numeri per posteriorem numerum multiplices, vel Quotientem posterioris numeri per priorem numerum, procreabis minimum numerum à duobus illis numeratum. Deinde eodem modo indagabimus minimum numerum numeratum ab eo, quem hactenus inue-

inuenimus, & à tertio numero proposito, inquirendo videlicet, num tertius numerus propositus, & minimus ille à prioribus duobus numeratus, habeant mensuram communẽ, necne, &c. Hic enim minimus inuentus, erit minimus à primis tribus numeris propositis numeratus. Rursus inuentũ hunc numerum cum quarto numero proposito conferemus, eodemq; modo minimum numerum ab illis numeratum inuestigabimus. Hic enim inuentus, erit minimus à quatuor datis numeris numeratus: atque ita progrediar, donec nullus numerus supersit, cum quo inuentus vltimo loco comparari possit. Demonstratio huius regulæ colligitur ex propos. 36. & 38. lib. 7. Eucl.

Sed explicemus negotium hoc in proximis quatuor minutijs datis, quarum denominatores sunt 2.3.4.5. Primum itaque quia duo priores numeri 2. & 3. non habent aliam mensuram communem, præter vnitatem erit numerus 6. ex eorum multiplicatione, productus, minimus à 2. & 3. numeratus. Deinde, quoniam inuentus hic numerus 6. & tertius numerus datus 4. habent maximam mensurã 2. diuidemus per eam tam 6. quam 4. quotientesq; 3. & 2. sub ipsis statuemus, vt hic vides. Si namq; multiplicemus 6. per 2. aut 4. per 3. procreabimus numerũ 12. qui minimus est, à tribus primis datis numeris 2. 3. 4. numeratum. Tandem, quia hic numerus 12. inuentus, & quartus numerus datus 5. non habent communem mensuram, præter vnitatem, multiplicabimus 12. per 5. producemusque numerum 60. minimum à quatuor denominatoribus 2. 3. 4. 5. numeratum. Sit rursum inueniendus minimus numerus à 4.6.8.12.7. numeratus. Primum, quia primi duo 4. & 6. habent communem maximam mensuram 2. partiemur per eam tam 4. quam 6. quotientesque 2. & 3. sub ipsis statuemus, vt hic vides. Nam si multiplicemus 4. per 3. vel 6. per 2. efficiemus numerum 12. minimum ab illis duobus 4. & 6. numeratum. Deinde, quia numerus hic 12. inuentus, & tertius numerus datus 8. habent maximam mensuram communem 4. diuidemus per eam tam 12. quam 8. & quotientes 3. & 2. sub ipsis collocabimus. Si enim multiplicemus 12. per 2. vel 8. per 3. gignemus numerum 24. minimum à primis tribus datis numeris 4.6.8. numeratum. Rursus, quoniam hic numerus inuentus 24. & quartus propositus 12. habent communem maximam mensuram 12. diuidemus per eam tam 24. quam 12. & quotientes 2. & 1 ponemus sub ipsis. Nam si multiplicemus 24. per 1. vel 12. per 2. producemus numerum 24. minimum à quatuor numeris datis 4.6.8.12. numeratum. Postremo, quia hic numerus 24. inuentus, & vltimus numerus datus 7. non habent vllam mensuram communem, præter vnitatem; multiplicabimus illos inter se, procreabimusque numerum 168. minimum à datis numeris 4.6.8.12.7. numeratum. Quod si quis per priorem regulam numerum inquireret ab eisdem datis numeris 4.6.8.12.7. numeratum, multiplicando nimirum ipsos inter se, reperiret hunc numerum 1.6.1.2.8. qui multo maior est quam hic numerus minimum 168. à nobis inuentus.

	6.	4.
	3.	2.
	4.	6.
	2.	3.
	12.	8.
	3.	2.
	24.	12.
	2.	1.

Quo pacto plures minutiæ, quæ duæ, ad eãdem denominationẽ reducãtur.

Iam vero, inuento numero ab omnibus denominatoribus minutiarum reducendarum numerato, siue is minimus sit, siue non, reducemus minutias datas ad eandem denominationem hoc modo. Denominator communis est numerus ille inuentus: quem si per cuiuslibet minutiæ denominatorem diuidamus, & quotientem per numeratorem multiplicemus, producemus numeratorem, qui supra communem denominatorem scribendus est. vt in postremis quatuor minutijs $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$. numerus à denominatoribus numeratus est 120. Hic ergo erit denominator communis. Quem si diuidamus per 2. denominatorem primæ minutiæ, efficiemus 60. Hunc numerum si multiplicemus per 1 numeratorem eiusdem minutiæ, producemus 60. numeratorem pro prima minutia. Rursus si eundem numerum 120. partiamur per 3. denominatorem secundæ minutiæ, prodibit hic numerus 40. quem si multiplicemus per 2. numeratorem eiusdem minutiæ, efficiemus 80. numeratorem pro secunda minutia, atque ita de cæteris. Itaque datæ quatuor minutiæ reducentur ad has quatuor eiusdem denominationis $\frac{60}{120}, \frac{80}{120}, \frac{90}{120}, \frac{96}{120}$. Quod si accipiamus numerum 60. qui minimus est ab eisdem denominatoribus numeratus, pro denominatore reducemus easdem minutias ad has $\frac{30}{60}, \frac{40}{60}, \frac{45}{60}, \frac{48}{60}$.

Alia ratio reducendi duas minutias ad eãdem denominationẽ.

Eadem ratione redigi poterunt duę etiam minutiæ ad eandem denominationem, licet eas non in crucem multiplicemus. Si enim quæratur numerus siue minimus siue nõ minimus, à denominatoribus numeratus, erit is communis denominator: ex quo inuenientur numeratores, vt proxime docuimus. Vt propositis duabus minutijs $\frac{5}{6}, \frac{7}{12}$. Minimus numerus à denominatoribus numeratus est 12. quem si partiamur per 6. denominatorem prioris minutiæ, quotientẽq; 2. per 5. numeratorem eiusdem minutiæ multiplicemus, efficiemus 10. pro numeratore prioris minutiæ. Et si rursum eundem numerum 12. diuidamus per 12. denominatorem posterioris minutiæ, & quotientem 1. multiplicemus per 7. numeratorem eiusdem minutiæ, reperiemus 7. pro numeratore posterioris minutiæ. Itaque datæ duæ minutiæ reducentur ad has $\frac{10}{12}, \frac{7}{12}$. Quod si quis easdem velit reducere per primam regulam, inueniet has minutias $\frac{60}{72}, \frac{42}{72}$. Ex quibus omnibus perspicuum est, quantum interfit inter minimum numerum à denominatoribus datarum minutiarum numeratum, & non minimum. Per minimum enim datæ minutiæ ad minimas minutias eiusdem denominationis reducuntur, quod per alias regulas non fit.

Vtilitas minimi numeri à denominatorib. datarũ minutiarũ numerati.

Contingit etiam aliquando, numeratorem minutiæ ex additione, multiplicatione, diuisione que productæ maiorem esse denominatore, atque adeo minutiam illam totum ipsum, atque integrum superare. Quare ea ad integra erit reducenda hac ratione: Diuidatur numerator per denominatorem. Quotiens enim dabit integra, quibus minutia data æquiualet: Et si quid in diuisione superfuerit, illud erit numerator, cui idem denominator subscribendus est. vt hæc minutia $\frac{86}{12}$. si numerator diuidatur per denominatorem, reducetur ad 5. integra. Hæc autem minutia $\frac{20}{7}$. redigetur ad $14\frac{2}{7}$. quia in diuisione numeratoris per denominatorem remanserunt 2. atque ita minutia illa continet 14. integra, & insuper duas septimas partes vnius integri.

Quo modo minutia, cuius numerator maior est denominatore, ad integra redigatur.

Item non raro vsu venit, vt integra ad fractionem aliquam reducenda sint, quod hoc modo fiet. Multiplicentur integra proposita per denominatorem minutiæ, ad quam integra reducenda sunt. Productus enim numerus erit numerator, cui denominator datæ minutiæ est subscribendus. Vt si 7. integra ad quintas partes sint redi-

Quo pacto integra ad minutiam reducãtur.

redigenda; Multiplicabimus 7. integra per 5. denominatorem propositæ minutiæ, productoque numero 35. supponemus eundem denominatorem, vt fiat minutia $\frac{3}{5}$. æquiualens 7. integris. Quod si integris adhæreat minutia aliqua, addendus est numerator illius minutiæ ad numerum productum ex integris per denominatorem minutiæ multiplicatis, vt efficiatur numerator. Vt si numerus hic $8\frac{2}{5}$. reducendus sit ad quintas, vt fiat vnica minutia; Multiplicabimus 8. per 5. denominatorem adhærentis minutiæ, ac numero producto 40. addemus 2. numeratorem eiusdem minutiæ, vt habeamus numeratorem 42. huius minutiæ $\frac{42}{5}$. quæ numero proposito $8\frac{2}{5}$. æquialet.

Minutiæ minutiarũ quo pacto ad simplices minutias reuocentur.

Postremo, quando in operatione aliqua minutiæ minutiarum occurrunt, reducendæ erunt ad simplicem minutiam, hoc artificio. Multiplica numeratores inter se, hoc est, primum in secundum, & hoc productum in tertium, atque iterum hoc productum in quartum, & sic deinceps, si plures numeratores fuerint. Vltimus enim numerus productus dabit numeratorem simplicis minutiæ, quæ illi minutiæ minutiarum æqualis erit. Denominator autem erit numerus productus ex multiplicatione denominatorum inter se, si multiplicentur, vt de numeratoribus dictum est. Vt hæc minutia minutiæ $\frac{3}{5}$ $\frac{4}{5}$. reducetur ad hanc simplicem fractionem $\frac{12}{25}$. quia multiplicatio numeratorum facit 12. denominatorum autem 35. ita vt tres quintæ quatuor septimarum partium vnius integri contineant $\frac{12}{35}$. eiusdem integri. Sic etiam hæc minutia minutiarum $\frac{1}{2}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{1}{6}$. $\frac{2}{5}$. reducetur ad hanc simplicem $\frac{6}{240}$. quæ ad minimos numeros reducta facict $\frac{1}{40}$. vt ex antecedenti cap. constat. Denique hæc minutia minutiarum $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{5}$. ad hanc simplicem reuocabitur $\frac{18}{60}$. quæ reducta ad minimos numeros faciet $\frac{3}{10}$.

Hoc autem ita esse, explicabimus hoc modo. Ponamus hanc vltimam minutiam minutiarum $\frac{1}{4}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{5}$. esse desumptam ex vno aureo. Necesse est igitur, si regula præscripta vera est, eam continere tres Iulios, qui sunt $\frac{3}{10}$. vnius aurei. Id quod quilibet facile perspiciet. Nam $\frac{3}{5}$. vnius aurei continent 6. Iulios, quod duo Iulij sint $\frac{1}{5}$. aurei vnius: At $\frac{2}{3}$. sex Iuliorum sunt 4. Iulij: & $\frac{3}{4}$. quatuor Iuliorum sunt 3. Iulij. Eadem ratione hanc minutiam minutiarum $\frac{1}{2}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{5}$. recte ad hanc $\frac{3}{4}$. esse reuocatam, in hoc, numero 45. ostendemus. Nam $\frac{1}{3}$. huius numeri 45. continet 15. vnitates; ex quibus si sumantur $\frac{2}{5}$. accipientur 6. vnitates, ex quibus denique si accipiatur $\frac{1}{3}$. sumentur 2. vnitates, quæ faciunt $\frac{2}{45}$. dicti numeri 45. Non secus alia exempla explicari poterunt, & probari.

ADDITIO FRACTORVM NVMERORVM.

CAPVT XI.

Additio minutiarũ quo modo fiat.

SI minutiæ addendæ habeant eundem denominatorem, addendi sunt numeratores, & aggregato idem denominator supponendus: Si vero diuersos habeant denominatores, reducendæ sunt prius ad eundem denominatorem, & tunc eodem modo additio instituenda. Vt summa collecta ex hisce tribus minutijs $\frac{1}{2}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{5}$. est hæc $\frac{12}{13}$. quia habent eundem denominatorem, summaque ex numeratoribus collecta est 12. quemadmodum ex 2. aureis, 4. aureis, & 6. aureis fiunt 12. aurei. Sic etiam ex hisce minutijs $\frac{3}{10}$. $\frac{7}{10}$. colligitur hæc summa $\frac{10}{10}$. quæ vni integro æquialet. Ita quoque ex his minutijs $\frac{3}{5}$. $\frac{3}{5}$. $\frac{5}{5}$. $\frac{5}{5}$. colligitur hæc summa $\frac{19}{5}$. quæ reducta ad integra facit $2\frac{4}{5}$. At vero vt hæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. in vnam summam colligantur, reducendæ prius sunt ad eundem denominatorem, nimirum ad has minutias $\frac{8}{12}$. $\frac{9}{12}$. ex quibus in vnam summam collectis fiunt $\frac{17}{12}$. hoc est, $1\frac{5}{12}$. atque hæc est summa duarum minutiarum propositarum, quemadmodum ex 2. aureis & 3. Iulijs, si 2. aurei reducantur ad 20. Iulios, fiunt 23. Iulij. Sic etiam minutiæ hæ $\frac{5}{7}$. $\frac{12}{13}$. $\frac{10}{17}$. $\frac{3}{5}$. vt in vnam summam colligantur, reducendæ prius sunt ad has eiusdē denominationis $\frac{2200}{7007}$. $\frac{4620}{7007}$. $\frac{4235}{7007}$. $\frac{4004}{7007}$. ex quibus fit hæc summa $\frac{14739}{7007}$. id est, $3\frac{2448}{7007}$.

Quando integra adsunt quid faciendũ.

Si integra adsint, addenda sunt ea seorsum, & minutiæ etiam seorsum. Vt ex 8. & $\frac{2}{3}$. fiunt $8\frac{2}{3}$. Item ex 8. & $4\frac{2}{3}$. fiunt $12\frac{2}{3}$. Item ex $8\frac{2}{5}$. & $4\frac{3}{5}$. fiunt $12\frac{5}{5}$. hoc est, $13\frac{1}{5}$. Item ex $2\frac{2}{3}$. & $4\frac{3}{4}$. fiunt $12\frac{17}{12}$. id est $13\frac{5}{12}$.

Praxis addendi minutias diuersarum denominationum inter se.

Itaque vt duæ minutiæ diuersarum denominationum in vnam colligantur summam, multiplicandæ eæ sunt in crucem, & producti numeri addendi, vt fiat numerator minutiæ producendæ: Deinde denominatores inter se multiplicandi, vt eiusdem minutiæ denominator habeatur: quia hac ratione reducuntur duæ minutiæ ad eandem denominationem, vt ex præcedenti cap. patet, addunturque numeratores inter se. Vt si hæ duæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. sint addēdæ, multiplicabimus tam 2. numeratorem prioris per 4. denominatorē posterioris, quam 3. numeratorem posterioris per 3. denominatorem prioris, productosque numeros 8. & 9. in vnam summam colligemus, vt fiat numerator 17. Deinde productum numerum ex multiplicatione denominatorum inter se, nempe 12. faciemus denominatorem. Erit igitur minutia collecta $\frac{17}{12}$. Quod si sint plures minutiæ addendæ, quam duæ, addemus primum priores duas, vt diximus. Deinde minutiam collectam cum tertia minutia eodem modo: Et hanc productam cum quarta, & ita deinceps. Vt si addendæ sint hæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{4}{5}$. $\frac{5}{6}$. colligemus primum ex prioribus duabus hanc $\frac{17}{12}$. Deinde ex hac, & tertia efficiemus eodem modo $1\frac{13}{60}$. Denique ex hac, & quarta procreabimus $1\frac{43}{120}$. hoc est $2\frac{103}{120}$. summam omnium.

Probatio additionis minutiarum.

Probatio autem additionis fit per subtractionem. Subtracta enim altera minutiarum addendarum ex summa collecta, remanebit altera si in additione erratum non est. Quod si plures sint addendæ minutiæ, subtracta vna earum ex summa, relinquetur minutia alijs simul sumptis æqualis. Vt quoniam hæ minutiæ $\frac{3}{4}$. $\frac{5}{12}$. additæ faciunt $\frac{56}{48}$. id est, $1\frac{8}{48}$. si ex hac summa subtrahatur prior minutia, nempe $\frac{3}{4}$. vt in sequenti cap. docebimus, remanebit hæc minutia $\frac{80}{240}$. quæ æqualis est alteri minutiæ $\frac{5}{12}$. vt patet, si ad minimos terminos reuocetur, vel numeratores per denominatores in crucem multiplicentur. Producetur enim idem numerus tam ex 80. in 12. quam ex 5. in 92. nempe numerus 960. Quare, vt supra cap. 7. diximus, æquales sunt minutiæ $\frac{80}{240}$. $\frac{5}{12}$.

SVB-

SVBTRACTIO FRACTORVM NVMERORVM.

CAPVT XII.

SI duæ minutiæ, quarum minor ex maiore subducenda est, habeant eundem denominatorem, subtrahendus est numerator minutiæ subtrahendæ ex numeratore alterius, & residuo idem denominator subscribendus. Si vero diuersos habeant denominatores, reducendæ sunt prius ad eundem denominatorem, & tunc eodem modo instituenda subtractio. Vt si subtrahenda sit hæc minutia $\frac{5}{12}$. ex ista $\frac{8}{12}$. subtrahemus numeratorem 5. ex numeratore 8. & residuo 3. eundem denominatorem 17. supponemus, vt fiat minutia residua $\frac{3}{12}$. quemadmodum si 5. aurei ex 8. aureis tollantur, remanent 3. aurei. At vero si deducenda sit hæc minutia $\frac{2}{3}$. ex ista $\frac{3}{5}$. reducendæ erunt prius ambæ ad has $\frac{10}{15}$. $\frac{9}{15}$. eiusdem denominationis: Deinde numerator 18. ex numeratore 24. deducendus, residuoque 6. communis denominator 27. supponendus, vt fiat minutia residua $\frac{6}{15}$. quemadmodum, si 2. Iulij auferendi sint ex 8 aureis, reducendi sunt prius 8. aurei ad 80. Iulios, vt relinquantur 78. Iulij.

Quando integra adsunt, quid faciendũ.

Si ab integris detrahenda est aliqua fractio, reducenda est vna vnitas integrorum ad fractionem eiusdem denominatoris, ita vt fiat minutia, cuius numerator æqualis sit denominatori, à qua deducenda est minutia proposita. Vt si ex 10. auferenda sit minutia $\frac{6}{11}$. faciemus ex vna vnitate $\frac{11}{11}$. ex quibus si auferamus $\frac{6}{11}$. remanebunt $\frac{5}{11}$. Integra enim carebunt illa vnitate, quæ ad minutiam reducta est.

Si vero ab integris detrahenda sint integra, & præterea fractio aliqua, reducenda quoque est vna vnitas illorum integrorum ad minutiam eiusdem denominationis: Deinde integra à reliquis integris, & fractio à fractione detrahenda. Vt si hic numerus $4\frac{3}{5}$. subducendus sit ex 10. faciemus ex vna vnitate huius numeri minutiam hanc $\frac{5}{5}$. à qua si demantur $\frac{3}{5}$. relinquentur $\frac{2}{5}$. & si 4. auferantur ex reliquis 9. supererunt 5. Itaque totus numerus residuus erit $5\frac{2}{5}$.

Denique si ab integris vna cum fractis detrahenda sint integra cum fractis, vel fractiones solæ; si quidem fractio detrahenda minor est, quam illa, à qua fit subtractio, vel illi æqualis, detrahenda est fractio à fractione, & integra ab integris: si vero fractio subtrahenda maior est, quam illa, à qua fit subtractio, reducenda est vna vnitas integrorum, à quibus subtractio fieri debet, ad fractionem, quæ illis adhæret, &c. Vt si hic numerus $6\frac{3}{4}$. subducendus sit ex hoc $10\frac{1}{2}$. quoniam minutia $\frac{3}{4}$. maior est, quam $\frac{1}{2}$. faciemus ex vna vnitate horum integrorum 10. hanc minutiam $\frac{2}{2}$. quæ cum $\frac{1}{2}$. faciet $\frac{3}{2}$. à qua si auferatur minutia $\frac{3}{4}$. relinquetur minutia $\frac{3}{8}$. Ablatis quoque 6. ex 9. supersunt 3. Totus ergo numerus residuus est $3\frac{3}{8}$.

Quando plures sunt minutiæ quid agendum.

Quod si quando vna minutia à pluribus fuerit subtrahenda, vel plures ab vna, vel plures à pluribus, danda erit opera, vt prius plures illæ tam subtrahendæ, quam illæ, à quibus fieri debet subtractio, in vnam summam colligantur.

Praxis subtrahendi minutiam à minutia.

Itaque vt fiat subtractio vnius minutiæ ab alia, cum denominatores sint diuersi, multiplicandi sunt numeratores in crucem per denominatores, & vnum productum ab altero subducendum, residuoque supponendus numerus ex multiplicatione denominatorum inter se productus; quia hac ratione duæ minutiæ propositæ reducuntur ad eandem denominationem, &c. Vt si minutia $\frac{4}{5}$. ex minutia $\frac{7}{9}$. subtrahenda sit, multiplicabimus 3. numeratorem minutiæ subtrahendæ per 9. denominatorem alterius, & productum 27. detrahemus ex numero 28. producto ex multiplicatione 7. numeratoris minutiæ, à qua fit subtractio, per 4. denominatorem alterius & reliquæ vnitati supponemus numerum 36. productum ex multiplicatione denominatorum inter se, vt fiat minutia relicta $\frac{1}{36}$.

Probatio subtractionis minutiarum.

Probatio autem subtractionis fit per additionem Si namque minutia relicta ad subtractam minutiam adiiciatur, componetur minutia illa, à qua subtractio facta est, si non est erratum. Vt quoniam subtracta minutia hac $\frac{4}{5}$. ex ista $\frac{7}{9}$. relinquitur hæc minutia $\frac{1}{36}$. vt in proximo exemplo patuit; si addatur $\frac{1}{36}$. ad $\frac{4}{5}$. componetur hæc minutia $\frac{171}{180}$. quæ ad minimos terminos reducta erit hæc $\frac{7}{9}$. à qua nimirum facta est subtractio. Sic etiam, quia subtracta hac minutia $\frac{2}{3}$. ex ista $\frac{6}{8}$. reliqua est minutia hæc $\frac{2}{24}$. si ea addatur ad $\frac{2}{3}$. fiet minutia $\frac{18}{24}$. quæ æqualis est minutiæ $\frac{6}{8}$. à qua subtractio facta est: vt patet, si vtraque ad minimos terminos reuocetur. Semper enim reperietur minutia hæc $\frac{3}{4}$. Vel certe, quia numeratores earum in crucem per denominatores multiplicati producunt eundem numerum, nimirum 432.

MVLTIPLICATIO FRACTORVM NVMERORVM.

CAPVT XIII.

Multiplicatio minutiarũ quo pacto fiat.

SI numeratores inter se multiplicentur, producetur numerator summæ multiplicationis, ex denominatorum autem multiplicatione denominator eiusdem gignetur. Vt ex multiplicatione $\frac{2}{3}$. per $\frac{3}{4}$. fient $\frac{6}{12}$. hoc est, $\frac{1}{2}$. Numeratores enim inter se multiplicati faciunt 6. denominatores vero 12.

Quãdo adsunt integra quid agendum.

Quando minutia per numerum integrum multiplicanda est, supponenda est numero integro vnitas, vt fiat ex ipso quasi fractio quædam denominata ab vnitate integra. Deinde regula, quam proxime præscripsimus, seruanda. Vt si multiplicanda sint 8. per $\frac{4}{5}$. scribemus 1. sub 8. vt in appositio exemplo vides. Igitur si multiplicentur inter se tam numeratores, quam denominatores, producetur hæc minutia $\frac{32}{5}$. quæ æquiualet huic numero $6\frac{2}{5}$.

$\frac{8}{1}$ $\frac{4}{5}$

Quando autem numero integro adhæret minutia, reducendus erit numerus integer ad illam minutiam, vt fiat vna fractio ex ipso & minutia adiuncta. Vt si multiplicanda sint 8. per $3\frac{5}{6}$. faciemus ex $3\frac{5}{6}$. minutiam $\frac{23}{6}$. & numero 8. supponemus 1. vt hic factum esse vides. Si igitur tam

$\frac{8}{1}$ $\frac{23}{6}$.

$\frac{24}{7}$. $\frac{1}{2}$. numeratores inter se, quam denominatores multiplicentur, procreabitur hæc minutia $15\frac{4}{6}$. huic numero $30\frac{4}{6}$. æquialens. Item si multiplicanda sint $4\frac{2}{3}$. per $\frac{1}{2}$. reducemus $4\frac{2}{3}$. ad $\frac{14}{3}$. vt hic vides. Producetur autem ex multiplicatione minutia hæc $\frac{14}{6}$. id est, $2\frac{2}{6}$. Eodem pacto si multiplicanda sint $4\frac{1}{2}$. per $3\frac{1}{5}$. reducemus priorem numerum ad $\frac{9}{2}$. posteriorem vero ad $\frac{16}{5}$. vt in appositio exemplo vides. $\frac{9}{2}$. $\frac{16}{5}$.

Multiplicatis autem tam numeratoribus inter se, quam denominatoribus, producetur hæc minutia $\frac{144}{10}$. hoc est, $14\frac{4}{10}$.

Probatio multiplicationis minutiarum.

Examinatur autem multiplicatio per diuisionem. Si enim minutia producta diuidatur per alteram minutiarum multiplicantium, prodibit necessario in quotiente altera minutia multiplicans. Vt si ex multiplicatione $\frac{1}{2}$. per $\frac{2}{7}$. fiunt $\frac{2}{14}$. necesse est, vt diuisis $\frac{2}{14}$. per $\frac{1}{2}$. producantur $\frac{2}{7}$. diuisis autem eisdem $1\frac{2}{7}$. per $\frac{2}{7}$. gignatur $\frac{7}{2}$. Perspicuum autem erit ex sequenti cap. diuisis $\frac{3}{14}$. per $\frac{1}{2}$. produci $\frac{3}{14}$. quæ minutia huic $\frac{2}{7}$. æquiualet; diuisis autem eisdem $\frac{4}{14}$. per $\frac{2}{7}$. produci $\frac{28}{98}$. hoc est, $\frac{2}{7}$.

Cur in multiplicatione minutiarum producatur minutia minor vtraq; minutia multiplicante.

Nemini autem mirum videri debet, multiplicationē minutiarum producere semper minutiam minorem vtraque minutia multiplicante, vt in vltimo exemplo, quod in examine tradidimus, patet, vbi ex multiplicatione $\frac{1}{2}$. per $\frac{2}{7}$. producta est minutia $\frac{2}{14}$. id est, $\frac{2}{7}$. quæ minor est vtraque minutia multiplicante. Si enim natura multiplicationis recte consideretur, facile quiuis perspiciet, hoc necessario ita debere fieri. Cum enim vnus numerus per alium multiplicari, seu duci dicatur, cum alter ipsorum toties augetur, quoties in altero continetur vnitas, vt cap. 4. diximus, perspicuum est, neutram minutiarum multiplicantium posse totā sumi in producto, sed fragmenta duntaxat ipsius, qualia nimirum fragmenta vnitatis, altera minutia multiplicans refert, quandoquidem hæc minutia minor est vnitate. Hinc enim fit, vt quemadmodum minutia multiplicans non continet integram vnitatem: ita quoque numerus productus non contineat totā alteram minutiam multiplicantem, vt in proximo exemplo, quemadmodum $\frac{1}{2}$. est dimidiata pars vnitatis, ita etiam numerus productus $\frac{2}{14}$. id est, $\frac{2}{7}$. est pars dimidiata huius minutiæ $\frac{2}{7}$. vt definitio multiplicationis postulat. Recte ergo ex multiplicatione $\frac{1}{2}$. per $\frac{2}{7}$. producitur minutia hæc $\frac{2}{14}$. hoc est $\frac{2}{7}$. Sic etiam ex multiplicatione 9. per $\frac{1}{3}$. producitur minutia hæc $\frac{9}{7}$. id est, numerus hic 3. Nam quemadmodum $\frac{1}{7}$. est tertia pars vnitatis, ita numerus 3. tertia pars est numeri 9. vel quemadmodum numerus productus 3. continet $\frac{1}{7}$. nouies, ita numerus 9. continet nouem vnitates. Non est igitur mirum, quod minor numerus producatur vtraque minutia multiplicante. Si tamen integra per fractionem multiplicentur, producitur quidem numerus quoque minor illo numero integro, maior vero fractione multiplicante. Vt in proximo exemplo patet, vbi ex multiplicatione 9. per $\frac{1}{3}$. productus numerus fuit $\frac{9}{3}$. hoc est, 3. Sic etiam si integra per integra cum fractione, vel integra cum fractione per integra cum fractione multiplicentur, semper producetur maior numerus vtroque numero multiplicante, propter numerum integrum multiplicantem integra. Vt ex multiplicatione 4. per $3\frac{1}{4}$. fit numerus $\frac{52}{4}$. hoc est, 13. quia numerus 4. ter sumptus facit 12. & quarta eius pars est 1. Vel quia numerus 3. sumptus quater facit 12. & minutia $\frac{1}{4}$. sumpta quater facit $\frac{4}{4}$. id est, 1.

DIVISIO FRACTORVM NVMERORVM.

CAPVT XIV.

Diuisio minutiarum quomodo fiat.

FAcilitatis gratia Diuisionis regula ad regulam multiplicationis reduci poterit hoc modo. Commutentur termini diuisoris, id est numerator scribatur infra lineolam, & denominator supra eandem. Quo facto, si regula multiplicationis cap. præcedenti tradita seruetur, id est, si tam numeratores, quam denominatores inter se multiplicentur, producetur numerus Quotiens. Vt si diuidenda sit minutia $\frac{1}{2}$. stabit exemplum, vt hic vides. Multiplicatis igitur tam numeratoribus, quam denominatoribus inter se, producetur minutia hæc $\frac{2}{2}$. hoc est, numerus 3. pro Quotiente. Sic etiam si diuidenda sit minutia $\frac{2}{5}$. per $\frac{2}{7}$. stabit exemplum vt hic apparet. Quotiens autem erit $\frac{14}{10}$.

$\frac{1}{2}$. $\frac{2}{7}$.

$\frac{2}{5}$. $\frac{2}{7}$.

Quando adsunt integra, quid agendum.

Quando numerus integer per minutiam, vel per numerum integrum cum fractione diuidendus est: vel minutia per numerum integrum, vel per numerum integrum cum fractione; vel deniq; numerus integer cum

					Quotientes.
6.	per	$\frac{2}{3}$.	$\frac{6}{1}$.	$\frac{2}{1}$.	$\frac{18}{2}$. vel 9.
6.	per	$4\frac{2}{3}$.	$\frac{6}{1}$.	$\frac{14}{3}$.	$\frac{18}{14}$. vel $1\frac{2}{7}$.
$\frac{2}{3}$.	per	6.	$\frac{2}{3}$.	$\frac{1}{6}$.	$\frac{2}{18}$. vel $\frac{1}{9}$.
$\frac{2}{3}$.	per	$6\frac{2}{3}$.	$\frac{2}{3}$.	$\frac{20}{3}$.	$\frac{4}{90}$.
$6\frac{1}{2}$.	per	$\frac{2}{4}$.	$\frac{13}{2}$.	$\frac{4}{3}$.	$\frac{52}{6}$. vel $8\frac{4}{6}$.
$6\frac{1}{2}$.	per	$3\frac{2}{3}$.	$\frac{13}{2}$.	$\frac{11}{3}$.	$\frac{143}{39}$. vel $1\frac{104}{39}$.
$6\frac{1}{2}$.	per	$3\frac{4}{5}$.	$\frac{13}{2}$.	$\frac{19}{5}$.	$\frac{247}{130}$. vel $1\frac{117}{130}$.

Vtra stabunt exempla.

fractione per minutiam, aut per numerum integrum, aut per numerum integrum cum fractione, supponenda est vnitas numero integro, si ei nō adhæreat minutia, si vero minutia adiuncta sit, reducendus est numerus integer

ger ad minutiam adiunctam, vt fiat vna minutia, quemadmodum cap. præcedenti diximus. Deinde regula iam præscripta seruanda. Vt in sequentibus diuisionibus stabunt exempla, vna cum Quotientibus, vt hic vides.

Qua ratione alij diuisionem minutiarū doceant.

Alii tradunt hanc regulam diuisionis minutiarum, numerator minutiæ diuidendę (posita vnitate sub integris, si adsint, & reductis integris ad minutiam adhærentem, si qua adhæreat) multiplicetur per denominatorem minutiæ diuidentis; procreabitur enim hac ratione numerator Quotientis minutiæ. Denominator autem producetur ex multiplicatione denominatoris minutiæ diuidendæ per numeratorem diuidentis minutiæ. Quod quidem idem est, ac si termini diuisoris commutentur, & regula multiplicationis seruetur, vt perspicuum est. Quoniam vero ambigere quispiam posset aliquando, an numerator minutiæ diuidendæ, an vero diuidentis producat numeratorem minutiæ Quotientis, (facile enim hæc res ex animo excidere potest.) magis mihi placet prior regula à nobis tradita, qua diuisionis regula ad regulam multiplicationis reuocatur.

Probatio diuisionis minutiarū.

Examen autem diuisionis fit per multiplicationem. Nam si Quotiens minutia multiplicetur per minutiam diuidentem, producetur minutia diuisa necessario, vt quia ex diuisione $\frac{2}{7}$. per $\frac{1}{2}$. producitur minutia $\frac{2}{7}$. hoc est, $1\frac{1}{7}$. fit, vt, ex multiplicatione $1\frac{1}{7}$. per $\frac{1}{2}$. producitur minutia diuisa $\frac{2}{7}$. Producitur autem ex hac multiplicatione minuta $\frac{8}{10}$. quæ huic $\frac{2}{7}$. æqualis est, vt patet.

Cur aliquando in diuisione minutiarū Quotiens maior sit minutia diuisa.

Quod autem in diuisione minutiarum plerunque producatur Quotiēs maior minutia diuisa, vt in diuisione $\frac{2}{7}$. per $\frac{2}{7}$. patet, in qua Quotiens est $\frac{14}{14}$. hoc est, 3. mirari nemo debet. Nam cum numerus Quotiens incidet, quoties diuisor in diuidendo numero contineatur, manifestum est, quando minutia diuidens minor est minutia diuidenda, illam in hac sæpius quam semel contineri; atque adeo Quotientem maiorem esse quam 1. etiamsi minutia diuidenda minor sit, quam 1. Veluti in proximo exemplo, quoniam minutia diuidens $\frac{2}{7}$. in minutia diuidenda $\frac{2}{7}$. continetur ter, fit, vt Quotiens sit 3. indicans illam in hac ter contineri. Idem etiam ex definitione Diuisionis perspicue apparet. Cum enim diuisio sit inuentio numeri, qui toties vnitatem contineat, quoties numerus diuidendus diuisorem continet, vt cap. 5. diximus; perspicuum est, in proxima diuisione Quotientem debere esse 3. qui vnitatē ter contineat, quoties nimirū minutia diuidenda $\frac{2}{7}$. continet. Mirum ergo non est in diuisione minutiarū semper produci Quotientem maiorem numero diuidendo, cum diuisor minor est, quam 1. & quam minutia diuidenda, vt in dato exemplo patuit, idemque in diuisione 6. per $\frac{1}{2}$. apparet, vbi quotiens est 12. Nam minutia diuidens $\frac{1}{2}$. duodecies in numero diuidendo 6. continetur.

Quando Quotiens maior sit numero diuidendo in minutijs.

Quod tamen generalius, quando diuisor vnitate minor est, licet non sit minor numero diuidendo, ita ostendemus. Nam cum Quotiens toties vnitatem contineat, quoties diuidendus diuisorem: erit talis proportio Quotientis ad vnitatem, qualis numeri diuidendi ad diuisorem, & permutando talis proportio Quotientis ad numerum diuidendum, qualis vnitatis ad diuisorem. Cum ergo vnitas ponatur maior diuisore, erit quoque Quotiens maior numero diuidendo. Ita vides in diuisione $\frac{2}{3}$. Quotientem $1\frac{2}{3}$. maiorem esse minutia diuisa $\frac{2}{3}$. quia minutia diuidens $\frac{3}{4}$. minor est vnitate, licet maior sit, quam minutia diuisa.

Quando Quotiens in minutijs minor sit diuidendo numero.

Quando tamen diuisor maior est, quam 1. Quotiens semper minor erit numero diuidendo. Vt diuisis $\frac{8}{10}$. per $1\frac{1}{2}$. Quotiens est $\frac{8}{12}$. & diuisis $6\frac{1}{2}$. per $1\frac{1}{2}$. Quotiens est $\frac{13}{3}$. id est $3\frac{4}{10}$. Diuisis rursus $100\frac{1}{2}$. per $10\frac{2}{3}$. Quotiens est $\frac{804}{88}$. hoc est, $9\frac{30}{88}$. siue $9\frac{15}{44}$. Sic etiam diuisis $\frac{2}{3}$. per $3\frac{1}{2}$. fiet Quotiens $\frac{4}{21}$. Denique diuisis $3\frac{1}{3}$. per $1\frac{1}{2}$. Quotiens erit $\frac{20}{12}$. hoc est, $2\frac{4}{12}$. vbi vides Quotientem semper minorem esse numero diuiso. Cuius rei ratio hæc est. Quoniam diuisio est inuentio numeri, qui toties vnitatem contineat, quoties numerus diuidendus continet diuisorem, vt cap. 5. dictum est, erit talis proportio Quotientis ad vnitatem, qualis numeri diuidendi ad diuisorem, & permutando talis proportio Quotientis ad numerum diuidendum, qualis vnitatis ad diuisorem. Cum ergo vnitas ponatur minor diuisore, erit etiam Quotiens minor numero diuidendo.

INSITIO FRACTORVM NVMERORVM.

CAPVT XV.

Insitio minutiarum quid.

SOlent Arithmetici nonnulli vti operatione quadam minutiarum, quam insitionem vocant. Est autem insitio minutiarum nihil aliud, quam propositis duabus, aut pluribus minutijs, quarum quælibet sit fractio vel vnius duntaxat particulæ omnium sequentium, vel fractio integrarum omnium fractionum sequentium, additio huiusmodi fractionum ad vltimam minutiam, respectu cuius omnes illæ fractiones fractionum sumuntur: ita vt quodammodo præcedentes fractiones sequentibus inserantur. Vnde nomen insitionis obtinuit operatio hæc minutiarum: quemadmodū in exemplis patebit. Vt propositis hisce duabus minutijs $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. ita vt prior sit fractio vel vnius tantum particulæ posterioris, vel fractio totius posterioris, hoc est, ita vt prior contineat vel duas partes tertias vnius quartæ partis, vel duas partes tertias trium quartarum: operatio, qua $\frac{2}{3}$. vnius quartæ, vel $\frac{2}{3}$. trium quartarum, ad $\frac{3}{4}$. adduntur, appellatur insitio. Eodem modo propositis quatuor hisce minutijs $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{5}$. $\frac{2}{7}$. ita vt quælibet sit fractio vel vnius particulæ omnium sequentium, vel fractio totarum omnium sequentium, hoc est, ita vt vel prima contineat duas tertias vnius quartæ vnius quintæ vnius septimæ, & secunda significet tres quartas vnius quintæ vnius septimæ, & tertia comprehendat duas quintas vnius septimæ; vel prima contineat duas tertias trium quartarum duarum quintarum quatuor septimarum, & secunda comprehendat tres quartas duarum quintarum quatuor septimarum, & tertia significet duas quintas quatuor septimarum: operationes, qua omnes hæ fractiones fractionum nimirum $\frac{2}{3}$. vnius quartæ vnius quintæ vnius septimæ, & $\frac{3}{4}$. vnius quintæ vnius septimæ, & $\frac{2}{5}$. vnius septimæ; vel $\frac{2}{3}$. trium quartarum duarum quintarum quatuor septimarum, & $\frac{3}{4}$. duarum quintarum quatuor septimarum, & $\frac{2}{5}$. quatuor septimarum, ad $\frac{2}{7}$. adduntur, insitio dicitur. & sic de alijs.

Insitio duplex est.

Est ergo insitio duplex: vna, quando quælibet minutia est fractio vnius duntaxat particulæ omnium sequentium minutiarum; altera, quando quælibet minutia est fractio integrarum omnium minutiarum sequentium, vt in exemplis patuit. Arithmetici omnes de prima solū insitione locuti sunt, nulla prorsus facta mentione

Insitio propter quid excogitata sit.

insitionis secundæ, eam fortassis ob causam, quod prima vtilis sit ad diuidendum quemcunque numerum integrum, vna cum fractione aliqua per numerum integrum, vt paulo post dicemus. Quoniam vero secunda insitio egregium quoque vsum habet in progressionibus Geometricis, vt, Deo iuuante, in maiore nostro Arithmetices opere declarabimus; vtriusque insitionis regulam trademus.

Differẽtia inter insitionem & reductionẽ minutiarum minutiarum.

Magnum autem discrimen est inter insitionem, & operationem illam, qua cap. 9. minutias minutiarum ad simplicem minutiam reducere docuimus. Ibi enim propositis v. g. duabus hisce minutijs, $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. ita vt prior sit fractio posterioris, solum inquirebamus, quamnam minutiam simplicem constituerent duæ tertiæ trium quartarum, inueniebamusq; constituere $\frac{6}{12}$. id est, $\frac{1}{2}$. vnius integri; hic vero indagabimus, quænam minutia efficiatur, si addantur $\frac{2}{3}$. vnius quartæ, vel $\frac{2}{3}$. trium quartarum ad $\frac{3}{4}$. efficieturque priori modo minutia hæc, $\frac{11}{12}$. posteriori vero hæc, $\frac{15}{12}$. hoc est, $1\frac{1}{4}$. quarum vtraque longe abest à $\frac{1}{2}$. Eodem modo discrimen apparebit, si fuerint plures minutiæ, quam duæ.

Prima regula insitionis duarum minutiarum.

Itaque si proponantur duæ minutiæ, quarum prior sit fractio vnius tantum particulæ posterioris, ita fiet insitio. Posterioris minutiæ numerator per denominatorem prioris multiplicetur productoq; numero numerator eiusdem prioris adiiciatur. Hoc enim aggregatũ erit numerator minutiæ producendæ; denominator vero gignetur ex multiplicatione denominatorum inter se. vt datis hisce minutiis $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. ita fiet insitio, siue additio $\frac{2}{3}$. vnius quartæ ad $\frac{3}{4}$. Ex 3. numeratore posterioris minutiæ in 3. denominatorem prioris fiunt 9. Addito numeratore 2. eiusdẽ prioris minutiæ, fiunt 11. pro numeratore minutiæ producendæ. Denominator autẽ erit numerus 12. ex multiplicatione denominatorũ inter se productus: ita vt hæc minutia $\frac{11}{12}$. componatur ex additione $\frac{2}{3}$. vnius quartæ ad $\frac{3}{4}$. Quod facile probari potest ex regula additionis. Quoniam enim $\frac{2}{3}$. vnius quartæ, secundum reductionem minutiarum minutiarum, faciunt $\frac{2}{12}$. si addantur $\frac{2}{12}$. ad $\frac{3}{4}$. fient $\frac{44}{48}$. hoc est, $\frac{11}{12}$. vt prius.

Quo modo plures minutiæ, quã duæ, inserantur per primam regulam.

Si vero plures minutiæ, quàm duæ, dentur, ita vt quælibet sit fractio vnius tantum particulæ omnium sequentium, insitio hoc modo fiet. Multiplicetur numerator vltimæ minutiæ per denominatorem penultimæ, productoque numero addatur numerator eiusdem penultimæ; Deinde hoc aggregatum multiplicetur per denominatorem minutiæ antepenultimæ, productoque numero addatur eiusdem numerator; Post hæc aggregatum hoc multiplicetur per denominatorem proximè antecedentis minutiæ, productoque numero eiusdem numerator adiiciatur; & sic deinceps, si plures fuerint minutiæ, aggregatum vltimum semper multiplicetur per denominatorem præcedentis minutiæ, eiusdemque numerator producto adiiciatur, donec nulla minutia supersit. Postremum enim aggregatum erit numerator minutiæ producendæ: Denominator autem producetur ex multiplicatione denominatorum inter se, vt datis hisce minutijs $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{5}$. $\frac{4}{7}$. ita fiet insitio, hoc est, additio $\frac{2}{3}$. vnius quartæ, vnius quintæ, vnius septimæ, & $\frac{3}{4}$. vnius quintæ, vnius septimæ, & $\frac{2}{5}$. vnius septimæ ad $\frac{4}{7}$. Ex 4. numeratore vltimæ minutiæ in 5. denominatorem penultimæ fiunt 20. Addito numeratore 2. eiusdem penultimæ minutiæ, fiunt 22. quæ multiplicata per 4. denominatorem antepenultimæ minutiæ faciunt 88. Addito numeratore 3. eiusdem minutiæ antepenultimæ, fiunt 91. quæ multiplicata per 3. denominatorem antecedentis minutiæ & primæ, faciunt 273. Addito numeratore 2. eiusdem primæ minutiæ, quæ proxime antecedit, fiunt 275. pro numeratore minutiæ producendæ. Denominator autem erit numerus 420. productus ex multiplicatione denominatorum inter se, si nimirum primus per secundum multiplicetur, & hic numerus productus per tertium, &c. Itaque ex hac insitione orietur minutia hæc $\frac{275}{420}$. quæ ad minimos terminos reducta faciet $\frac{55}{84}$. Quod ex regula additionis probabitur hac ratione. Quoniam $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{7}$. per regulam reductionis minutiarum minutiarum faciunt $\frac{2}{420}$. & $\frac{3}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{7}$. faciunt $\frac{3}{140}$. & $\frac{2}{5}$. $\frac{1}{7}$. faciunt $\frac{2}{35}$. si tres illæ minutiæ $\frac{2}{420}$. $\frac{3}{140}$. $\frac{2}{35}$. addantur ad $\frac{4}{7}$. fient $\frac{9432500}{14406000}$. hoc est in minimis terminis $\frac{55}{84}$. vt prius, sed multo facilius, & citius hæc summa inuenta est per insitionem.

Minutiæ inserendæ iuxta primam regulam non sunt reducendæ ad minimos terminos ante finẽ operationis.

Cæterum in hac regula insitionis nulla minutia reducenda est ad minimos terminos, antequam tota operatio absoluatur, quia sensus variaretur, & magnus fieret error: absoluta tamen operatione, reduci potest summa producta ad minimos terminos, vt à nobis factum est. Reduximus enim minutiam hanc $\frac{275}{420}$. ex insitione productam ad istam $\frac{55}{84}$. Quod autem sensus variaretur, & error contingeret, si minutia aliqua ante finem operationis ad terminos minimos reuocaretur, perspicuum est. Nam si inserendæ sint hæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{8}{12}$. id est, addendæ $\frac{2}{3}$. vnius duodecimæ ad $\frac{8}{12}$. fient $\frac{26}{36}$. At si posterior minutia $\frac{8}{12}$. reuocaretur ad minimos terminos, nempe ad hanc minutiam $\frac{2}{3}$. deberent inseri $\frac{2}{3}$. $\frac{2}{3}$. id est, addi $\frac{2}{3}$. vnius tertiæ ad $\frac{2}{3}$. qui sensus longe alius est, quam prior. Fietque propterea ex hac insitione alia minutia, nimirum $\frac{8}{9}$. valde diuersa à priori minutia producta $\frac{26}{36}$. Prior tamen minutia producta $\frac{26}{36}$. reduci potest ad hanc minimis terminis $\frac{13}{18}$.

Summa insitionis secundum primam regulã semper minor est quam vnitas, & quare.

Prætereundum etiam non est, summam ex insitione hactenus exposita collectam, si vltima minutia minor est, quam vnitas, semper minorem esse vnitate, etiamsi infinitæ minutiæ inserantur. Vt si hæ minutiæ $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{2}$. $\frac{4}{5}$. inserantur, fiet minutia $\frac{119}{120}$. quæ minor est, quam vnitas. Quod ita debere esse, hac ratione declarari poterit. Quoniam vt $\frac{4}{5}$. efficiant vnitatem, deest $\frac{1}{5}$. & præcedens minutia $\frac{1}{2}$. quæ additur ad $\frac{4}{5}$. non est $\frac{1}{5}$. sed $\frac{1}{2}$. vnius quintæ, fit vt ad complendam vnitatem desit adhuc $\frac{1}{2}$. vnius quintæ: at quia antecedens minutia $\frac{2}{3}$. quæ additur, non est $\frac{1}{2}$. vnius quintæ, sed $\frac{2}{3}$. vnius dimidij vnius quintæ, fit, vt ad explendam vnitatem desit adhuc $\frac{1}{3}$. vnius dimidij vnius quintæ. Rursus quoniam præcedens minutia $\frac{3}{4}$. non est $\frac{1}{3}$. vnius dimidij vnius quintæ, sed $\frac{3}{4}$. vnius tertiæ vnius dimidij vnius quintæ, fit, vt ad conficiendam vnitatem desit adhuc $\frac{1}{4}$. vnius tertiæ vnius dimidij vnius quintæ, & sic deinceps, si plures fuerint minutiæ, semper aliquid deerit ad vnitatem complendam.

Vsus primæ regulæ insitionis in diuidẽdo numero integro vna cũ minutia per numerum integrum.

Vt autem videas, quàm præclarum vsum habeat prima hæc regula insitionis in diuidendo numero integro vnà cum minutia per numerum integrum, adducam vnum, vel alterum exemplum. Sint diuidenda $20\frac{1}{4}$. per 12. Diuisis integris 20 per 12. fit Quotiens $1\frac{8}{12}$. & quia minutia $\frac{1}{4}$. diuidi etiam debet per 12. & Quotiens addi priori quotienti; est autem Quotiens (si diuidatur $\frac{1}{4}$. per 12) $\frac{1}{4}$. vnius duodecimæ, quemadmodum si 1. diuidatur per 12. Quotiens est $\frac{1}{12}$. fit, vt si inserantur hæ minutiæ $\frac{1}{4}$. $\frac{8}{12}$. id est, si addatur $\frac{1}{4}$. vnius duodecimæ, (nimirum Quotiens diuisionis $\frac{1}{4}$. per 12.) ad $\frac{8}{12}$. componatur minutia, quæ addita Quotienti integro 1. efficiat totum Quotientem: Fit autem ex insitione harum minutiarum $\frac{1}{4}$. $\frac{8}{12}$. minutia $\frac{33}{48}$. hoc est $\frac{11}{16}$. Igitur totus Quotiens erit $1\frac{11}{16}$. Idem efficies, si diuisorem 12. numero integro diuidendo 20. supponas, vt fiat minutia $\frac{20}{12}$. & huic minutię inseras minutiam $\frac{1}{4}$. diuidendam hoc modo $\frac{1}{4}$. $\frac{20}{12}$. quia minutia $\frac{20}{12}$. est Quotiens diuisionis 20. per 12. cui per

cui per insitionem additur $\frac{1}{4}$. vnius duodecimæ, nempe Quotiens diuisionis $\frac{1}{4}$. per 12. Vtroque autem modo recte fieri diuisionem facile experieris per regulam diuisionis. Si enim diuidas $20\frac{1}{4}$ per 12. reperies quotientem $\frac{81}{48}$. id est, $1\frac{33}{48}$. siue $1\frac{11}{16}$. vt prius.

Sint rursus diuidenda $100\frac{5}{6}$. per 8. Diuisis integris 100. per 8. fit Quotiens $12\frac{4}{8}$. Et quia minutia $\frac{5}{6}$. diuidi etiam debet per 8. & Quotiens addi priori Quotienti; est autem (si diuidantur $\frac{5}{6}$. per 8.) Quotiens $\frac{5}{6}$. vnius octauæ, quemadmodum si 1. diuidatur per 8. Quotiens est $\frac{1}{8}$. fit, vt si inserantur hæ minutiæ $\frac{5}{6}$. $\frac{4}{8}$. id est, si addantur $\frac{5}{6}$. vnius octauę, (nimirum Quotiens diuisionis $\frac{5}{6}$. per 8.) ad $\frac{4}{8}$. conficiatur minutia, quæ addita Quotienti integro 12. componat totum Quotientem: Fit autem ex insitione harum minutiarum $\frac{5}{6}$. $\frac{4}{8}$. minutia $\frac{29}{48}$. Totus igitur Quotiens erit $12\frac{29}{48}$. Idem efficies, si diuisorem 8. numero integro diuidendo 100. supponas, vt fiat minutia $\frac{100}{8}$. & huic minutiæ inseras minutiam $\frac{5}{6}$. diuidendam, hoc modo $\frac{5}{6}$. $\frac{100}{8}$. quia minutia $\frac{100}{8}$. est Quotiens diuisionis 100. per 8. cui per insitionem adduntur $\frac{5}{6}$. vnius octauæ, nempe Quotiens diuisionis $\frac{5}{6}$. per 8. eundem prorsus Quotientem $12\frac{29}{48}$. inuenies, si diuidas per regulam diuisionis, $100\frac{5}{6}$. per 8. Facies enim quotientem $\frac{605}{48}$. hoc est $12\frac{29}{48}$. Postremo sint diuidenda $100\frac{5}{6}$. per 10. Diuisis integris 100. per 10. fit Quotiens 10. nihilque remanet. Et quia minutia $\frac{5}{6}$. diuidi etiam debet per 10. & Quotiens addi priori Quotienti; est autem (diuisis $\frac{5}{6}$. per 10.) Quotiens $\frac{5}{6}$. vnius decimæ, quemadmodum si 1. diuidatur per 10. Quotiens. est $\frac{1}{10}$. fit, vt si inserantur hæ minutiæ $\frac{5}{6}$. $\frac{0}{10}$. id est, si addantur $\frac{5}{6}$. vnius decimæ (nimirum Quotiens diuisionis $\frac{5}{6}$. per 10.) ad $\frac{0}{10}$ (quia enim nulla fractio superfuit in diuisione 100. per 10. ponenda est figura 0. supra diuisorem 10. vt fiat minutia $\frac{0}{10}$. continens nullam decimam.) conflectur minutia, quæ addita Quotienti integro 10. componat totum Quotientem: Fit autem ex insitione harum minutiarum $\frac{5}{6}$. $\frac{0}{10}$. minutia $\frac{5}{60}$. Totus ergo Quotiens erit, $10\frac{5}{60}$. hoc est, $10\frac{1}{12}$. Idem efficies, si diuisorem 10. numero integro diuidendo 100. supponas, vt fiat minutia $\frac{100}{10}$. & huic minutiæ inseras minutiam $\frac{5}{6}$. diuidendam, hoc modo $\frac{5}{6}$. $\frac{100}{10}$. quia minutia $\frac{100}{10}$. est Quotiens diuisionis 100. per 10. cui per insitionẽ adduntur $\frac{5}{6}$. vnius decimæ, nempe Quotiens diuisionis $\frac{5}{6}$. per 100. Eundem omnino Quotiẽtem habebis, si $100\frac{5}{6}$. diuidas per 10. secundum diuisionis regulam. Fiet enim Quotiens $\frac{605}{60}$. hoc est, $10\frac{5}{60}$. siue $10\frac{1}{12}$.

Secunda regula insitionis duarum minutiarum.

Iam vero si proponantur duæ minutiæ, quarum prior sit fractio totius posterioris, fiet insitio hac ratione. Multiplicetur posterioris minutiæ numerator per denominatorem prioris, productoque numero addatur numerus ex multiplicatione numeratorum productus. Fiet enim hac ratione numerator minutiæ producendæ. Denominator vero procreabitur ex multiplicatione denominatorum inter se. Vt hisce minutijs $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. datis, ita fiet insitio, siue additio $\frac{2}{3}$. trium quartarum ad $\frac{3}{4}$. Ex 3. numeratore posterioris minutiæ in 3. denominatorem prioris fiunt 9. Addito numero 6. ex multiplicatione numeratorum producto, fiunt 15. pro numeratore minutiæ producẽdæ. Denominator autem erit numerus 12. ex multiplicatione denominatorum productus. Itaque ex additione $\frac{2}{3}$. trium quartarum ad $\frac{3}{4}$. conflatur minutia $\frac{15}{12}$. hoc est, $1\frac{1}{4}$. Quod facile probari potest ex regula additionis. Quoniam enim $\frac{2}{3}$. trium quartarum faciunt $\frac{6}{12}$. vt patet ex reductione, quam de minutijs minutiarum tradidimus; si addantur $\frac{6}{12}$. ad $\frac{3}{4}$. fient $\frac{60}{48}$. hoc est, $1\frac{1}{4}$. vt prius.

Quo pacto plures minutiæ, quã duæ inserantur per secundam regulam.

Si vero plures minutiæ, quã duæ, sint propositæ, ita vt quælibet sit fractio integrarum minutiarũ omnium sequentium, facienda erit insitio hoc modo. Multiplicetur numerator vltimæ minutiæ per denominatorem penultimæ, productoque numero addatur numerus ex multiplicatione duorum numeratorum postremorum productus. Deinde hoc aggregatum multiplicetur per denominatorem minutiæ antepenultimæ, productoq; numero addatur numerus ex tribus postremis numeratoribus inter se multiplicatis productus: Rursus aggregatum hoc multiplicetur per denominatorem proxime antecedentis minutiæ, productoq; numero adiiciatur numerus ex quatuor vltimis numeratoribus inter se multiplicatis productus; & sic deinceps, si plures fuerint minutiæ, aggregatum vltimum semper multiplicetur per denominatorem præcedentis minutiæ, productoq; numero adiiciatur numerus productus ex omnibus numeratoribus illarum minutiarum, quæ vsque ad eum locũ assumptæ fuerunt, donec nulla minutia supersit. Postremum enim aggregatũ erit numerator minutiæ producendæ: Denominator autem procreabitur ex multiplicatione denominatorum inter se. Vt propositis hisce minutijs $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{5}$. $\frac{4}{7}$. ita fiet insitio, siue additio $\frac{2}{3}$. trium quartarum duarum quintarum quatuor septimarum, & $\frac{3}{4}$. duarum quintarum quatuor septimarum, & $\frac{2}{5}$. quatuor septimarum, ad $\frac{4}{7}$. Ex 4. numeratore vltimæ minutiæ in 5. denominatorem penultimæ fiunt 20. Addito numero 8. producto ex postremis duobus numeratoribus 4 & 2. inter se multiplicatis, fiunt 28. quæ multiplicata per 4. denominatorem antepenultimæ minutiæ, faciunt 112. Addito numero 24. producto ex postremis tribus numeratoribus 4. 2. & 3. inter se multiplicatis, fiunt 136. quæ multiplicata per 3. denominatorem antecedentis minutiæ, quæ prima est, faciunt 408. Addito numero 48. producto ex omnibus quatuor numeratoribus 4. 2. 3. & 2. inter se multiplicatis, fiunt 456. pro numeratore minutiæ producendæ: Denominator vero erit numerus 420. productus ex denominatoribus omnibus inter se multiplicatis. Itaque ex insitione hac generabitur hæc minutia, $\frac{456}{420}$. hoc est $1\frac{36}{420}$. siue in minimis terminis $1\frac{3}{35}$. Quod ex regula additionis confirmabitur hoc modo. Quoniam $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{5}$. $\frac{4}{7}$. per regulam qua minutiæ minutiarum reducuntur, faciunt $\frac{48}{420}$. & $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{5}$. $\frac{4}{7}$. faciunt $\frac{24}{140}$. & $\frac{2}{5}$. $\frac{4}{7}$. faciunt $\frac{8}{35}$. si tres hæ minutiæ $\frac{48}{420}$. $\frac{24}{140}$. $\frac{8}{35}$. addantur ad $\frac{4}{7}$. fiet minutia $\frac{15640800}{14406000}$. hoc est $1\frac{1234800}{14406000}$. siue $1\frac{3}{35}$. in minimis terminis, vt prius. Sed multo facilius, & expeditius eandem summam per insitionem collegimus.

In hac porro secunda regula insitionis possunt minutiæ inserendæ reduci ad minimos terminos ante operationem. Nam si inserantur hæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{8}$. id est, si addantur $\frac{2}{3}$. quatuor octauarum ad $\frac{4}{8}$. fient $\frac{20}{24}$. hoc est, $\frac{5}{6}$. Tantundem faciemus, si prius $\frac{4}{8}$. reducamus ad $\frac{1}{2}$. & inseramus postea $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{2}$ hoc est, addamus $\frac{2}{3}$. vnius dimidij ad $\frac{1}{2}$. Eodem modo si inserantur $\frac{6}{10}$. $\frac{4}{8}$. fient $\frac{64}{80}$. id est, $\frac{4}{5}$. eademque minutia producetur, si prius $\frac{6}{10}$. reducatur ad $\frac{3}{5}$. & $\frac{4}{8}$. ad $\frac{1}{2}$. inseranturque $\frac{3}{5}$. $\frac{1}{2}$. Producentur enim ex hac insitione $\frac{8}{10}$. hoc est, $\frac{4}{5}$. vt prius. Ratio huius rei est, quia cum præcedens minutia sit fractio totius sequentis, idem erit omnino valor. $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{8}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{2}$. Si enim hæ minutiæ minutiarum reducantur ad simplices minutias, reducetur prior ad $\frac{8}{24}$. hoc est, ad $\frac{1}{3}$. posterior vero ad $\frac{2}{6}$. id est, ad $\frac{1}{3}$. quoque. Quod in priori regula non contingit. Cum enim ibi prior minutia sit fractio vnius tantum particulæ posterioris, perspicuum est in eodem exemplo aliud esse $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{8}$. & $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{2}$. Prior enim minutia minutiarum facit $\frac{2}{24}$. hoc est $\frac{1}{12}$. posterior $\frac{2}{6}$. id est, $\frac{1}{3}$.

QVÆSTIVNCVLÆ NONNVLLÆ NVMERORVM INTEGRORVM, AC MINVTIARVM.

CAPVT XVI.

1. Inuentio numeri, à quo facta est subtractio, vel facienda vt propositus numerus relinquatur.
2. Inuentio numeri subtracti, vel subtrahendi ex proposito numero vt alius datus numerus sit reliquus.
3. Inuentio numeri, cui datus numerus adiiciendus sit, vel qui dato numero sit addendus, vt alius numerus datus fiat.
4. Inuentio differentiæ inter duos datos numeros.
5. Inuentio numeri diuisi aut diuidendi per datum numerum vt Quotiens propositus proueniat.
6. Inuentio numeri, qui contineat, vel sit aut det datam fractionem, seu partē, partesue propositi numeri.
7. Inuentio numeri, per quem datus numerus sit diuisus aut diuidendus, vt Quotiēs sit propositus numerus.
8. Inuentio numeri per quem datus numerus sit multiplicādus, vel qui per datum numerū multiplicandus sit, vt gignatur numerus propositus.

OPeræ pretium me facturum arbitror, si priusquam ad alia pergam, subnectam hoc loco varias quæstiunculas numerorum integrorum, ac minutiarum, quæ per additionem, subtractionem, multiplicationem, diuisionemque soluuntur, tum quia in ijs soluendis studiosi sese exercere possunt in operationibus integrorum, & minutiarum, tum etiam, quia sæpenumero similes quæstiones præclarum vsum habent in alijs rebus Arithmeticis. Hinc ergo exordiemur.

1. A quo numero subducta sunt, vel subduci debent 23. vt remaneant 47? Item à quo numero subducta sunt, vel subduci debent $\frac{4}{11}$. vt relinquantur $8\frac{1}{3}$? Huiusmodi quæstiones soluuntur per additionem. Si enim numerum subtractum, subtrahendumue adiicias numero, qui relinqui debet, conficies numerum, à quo datus numerus subtractus relinquet datum numerum. Vt in priori quæstione, ex 23. & 47. fit numerus 70. Ab hoc ergo subducenda sunt 23. vt 47. relinquantur. In posteriori autem quæstione, ex $\frac{4}{11}$. & $8\frac{1}{3}$. fit numerus $9\frac{1}{3}\frac{1}{3}$. à quo si ducas $\frac{4}{11}$. relinquentur $8\frac{1}{3}$. vt patet, si reducas minutias productas ad integra, & ad minimos terminos. Id quod in sequentibus quæstionibus obseruandum etiam erit, hoc est, post absolutam operationem reducendæ erunt minutiæ productæ ad minimos terminos, vt in hac quæstione factum est.

2. Quis numerus subtractus est, aut subtrahi debet ex 87. vt relinquantur 26? Item qui numerus ablatus est, vel auferri debet ex $\frac{8}{13}$. vt relinquantur $\frac{2}{3}$? Huius generis quæstiones expediet subtractio. Nam si numerus, qui relinqui debet, subducatur ex numero, à quo fieri debet subtractio, remanebit numerus, qui ex eodem numero detractus relinquet residuum propositum. Vt in priori quæstione, subtractis 26. ex 87. remanent 61. Si igitur tollantur 61. ex 87. remanebunt 26. In posteriori autem quæstione, si auferantur $\frac{2}{3}$. ex $\frac{8}{13}$. restabunt $\frac{2}{39}$. quæ si subtrahantur ex $\frac{8}{13}$. relinquentur $\frac{2}{3}$.

3. Cui numero adiicienda sunt 38. aut quis numerus adiiciendus est ad 38. vt numerus compositus sit 83? Item cui numero addenda sunt $4\frac{8}{9}$. aut quis numerus adiiciendus est ad $4\frac{8}{9}$. vt componatur numerus $20\frac{1}{2}$? Quæstiones eiusmodi per subtractionem etiam soluuntur. Nam si ex numero, qui componi debet, demas numerum addendum propositum, relinquetur numerus, cui si adiiciatur datus numerus addendus, fiet numerus datus. Vt in priori quæstione, subductis 38. ex 83. remanent 45. Huic ergo numero adiicienda sunt 38. vt fiat numerus 83. In posteriori autem quæstione, subtractis $4\frac{8}{9}$. ex $20\frac{1}{2}$. relinquitur numerus $15\frac{11}{18}$. cui si addas $4\frac{8}{9}$. fiet numerus $20\frac{1}{2}$.

4. Quæ differentia, siue excessus est inter 100. & 349? Item inter $6\frac{1}{2}$. & $20\frac{3}{4}$? Hæ etiam quæstiones per subtractionem explicantur. Si namque minor numerus ex maiore tollatur, relinquetur differentia, siue excessus quæsitus. Vt in priori quæstione, sublatis 100. ex 349. relinquuntur 249. pro excessu, differentiaue inter 100. & 349. In posteriori autem quæstione, demptis $6\frac{1}{2}$. ex $20\frac{3}{4}$. restant $14\frac{1}{4}$. Hoc ergo numero superat numerus $20\frac{3}{4}$. numerum $6\frac{1}{4}$.

5. Quis numerus diuisus, vel diuidendus est per 9. vt quotiens sit 34? Item quis numerus diuisus vel diuidendus est per $4\frac{1}{2}$. vt Quotiens sit $\frac{1}{2}$? Tales quæstiones per multiplicationem expediuntur. Si enim diuisor datus per datum Quotientem multiplicetur, procreabitur numerus diuisus diuidendusue, qui quæritur. Vt in priori quæstione, multiplicatis 9. per 34. fit numerus 306. quo diuiso per 9. Quotiens erit 34. In quæstione vero posteriori, si multiplicentur $4\frac{1}{2}$. per $\frac{1}{2}$. producetur numerus $2\frac{1}{6}$. qui diuisus per $4\frac{1}{2}$. dabit Quotientem $\frac{1}{2}$.

6. Quis numerus continet $\frac{2}{3}$. huius numeri 30? Item quis numerus est, vel dat $\frac{1}{2}$. huius numeri $4\frac{5}{7}$? Multiplicatio etiam huiusmodi quæstiones absoluit. Si enim dati duo numeri inter se multiplicentur, gignetur numerus quæsitus. Vt quoniam in priori quæstione ex multiplicatione $\frac{2}{3}$. per 30. producuntur 18. fit vt numerus 18. contineat $\frac{2}{3}$. numeri 30. In posteriori autem quæstione ex multiplicatione $\frac{1}{2}$. per $4\frac{5}{7}$. fit numerus $2\frac{5}{14}$. qui facit $\frac{1}{2}$. huius numeri $4\frac{5}{7}$. Hæc quæstio ita quoque proponi potest. Da mihi $\frac{2}{3}$ huius numeri 30. Item da mihi $\frac{1}{2}$. huius numeri $4\frac{5}{7}$.

7. Per quem numerum diuisa, aut diuidenda sunt 48. vt Quotiens sit 10? Item per quem numerum diuidentur $\frac{2}{3}$. vt Quotiēs sit $\frac{2}{3}$? Diuisione similibus quæstionibus satisfiet. Nam si numerus diuisus, diuidendusue propositus diuidatur per datum Quotientem, prodibit ex hac diuisione diuisor quæsitus. Vt in priori quæstione, diuisis 48. per 10. fiet Quotiens $4\frac{4}{5}$. per quem si diuidatur numerus datus 48. fiet Quotiens 10. In posteriori autem quæstione, diuisis $\frac{2}{3}$. per $\frac{2}{3}$. fit Quotiens $\frac{9}{14}$. per quem si diuidantur $\frac{2}{3}$. producetur Quotiens $\frac{2}{3}$.

8. Per quem numerum multiplicanda sunt 17. aut quis numerus multiplicandus est per 17. vt productus numerus sit 100? Item per quem numerū multiplicari debent $3\frac{1}{2}$. aut quis numerus per $3\frac{1}{2}$. multiplicari debet, vt numerus productus sit $\frac{1}{2}$? Diuisio quoque similibus quæstionibus satisfaciet. Nam si numerum, qui producti debet, partiamur per numerum qui multiplicandus proponitur, efficiemus numerum quæsitum. Vt in quæstione priori, diuisis 100. per 17. fit Quotiens $5\frac{15}{17}$. per quem si multiplicetur datus numerus 17. procreabitur datus numerus 100. In posteriori vero quæstione, si diuidatur $\frac{1}{4}$. per $3\frac{1}{2}$. fiet Quotiens $\frac{1}{14}$. per quem si multiplicetur datus numerus $3\frac{1}{2}$. gignetur datus numerus $\frac{1}{4}$.

9. Qui duo numeri inter se multiplicati producunt 48. vel $\frac{1}{2}$. vel $6\frac{1}{4}$. Diuisio quoque huiusmodi quæstionibus satisfaciet. Nam si numerum producendum diuidamus per quemuis numerū, erit hic numerus, & Quotiens duo illi, qui quæruntur. Vt si 48. diuidantur per quemcunq; numerum, vt per 6. fiet Quotiens 8. Duo ergo numeri 6. & 8. inter se multiplicati producent 48. Sic etiam si eadem 48. diuidantur per alium numerum quemcunque, vt per 10. fiet Quotiens $4\frac{4}{5}$. Duo ergo numeri 10. & $4\frac{4}{5}$. inter se multiplicati gignent hunc numerum. 48. Item si partiamur $\frac{1}{2}$. per quemcunque numerum, vt per $\frac{2}{3}$. inueniemus Quotientem $\frac{3}{4}$. Duo ergo numeri quæsiti, qui inter se multiplicati faciant $\frac{1}{2}$. erunt $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. Eadem ratione si partiamur $\frac{1}{2}$. per quemuis alium numerum, vt per 8. reperiemus Quotientem $\frac{1}{16}$. Duo igitur numeri quæsiti, qui inter se multiplicati faciant $\frac{1}{2}$. erunt 8. & $\frac{1}{16}$. Denique diuisis $6\frac{1}{4}$. per quemlibet numerum, vt per $3\frac{1}{2}$. fiet Quotiens $1\frac{11}{14}$. Duo ergo numeri, qui inter se multiplicati producant $6\frac{1}{4}$. erunt $3\frac{1}{2}$. & $1\frac{11}{14}$.

9. Inuentio duorum numerorum, qui inter se multiplicati datum numerum producant.

10. Qui sunt duo illi numeri, vt vno diuiso per alterum, Quotiens sit 28? Item qui sunt duo illi numeri, vt vno diuiso per alterum, Quotiens sit $\frac{5}{6}$? Has quæstiones, & alias similes multiplicatio enodat. Si namque Quotientem datum multiplices per quemuis numerum, dabit numerus productus numerum diuidendum: diuisor autem erit numerus multiplicans assumptus. Vt in priori quæstione, si 28. multiplices per quemuis numerum, vt per 6. efficies numerum 168. Hic ergo diuisus per 6. faciet 28. In quæstione autem posteriori, si $\frac{5}{6}$. multiplices per quemlibet numerum, vt per $\frac{1}{2}$. procreabis $\frac{5}{12}$. quibus diuisis per $\frac{1}{2}$. Quotiens erit $\frac{5}{6}$.

11. Per quem numerum multiplicanda sunt 7. aut quis numerus multiplicandus est per 7. vt producto numero diuiso per 8. Quotiens sit 3? Item per quem numerum multiplicari debent $\frac{2}{3}$. Aut quis numerus per $\frac{2}{3}$. multiplicandus est, vt producto numero per $\frac{1}{4}$. diuiso. Quotiens sit $\frac{1}{4}$. Quæstiones huiusmodi multiplicatione, & diuisione soluuntur. Nam si diuisorem datum per datum Quotientem multiplices, numerumq; productum per datum numerum multiplicandum, multiplicantemue partiaris, erit Quotiens numerus, qui quæritur. Vt in priori quæstione, si multiplicetur diuisor datus 8. per datum Quotientem 3. producetur numerus 24. qui diuisus per numerum multiplicandum, multiplicantemue datum, nempe per 7. faciet $3\frac{3}{7}$. numerum quæsitum. Si enim multiplicentur 7. per $3\frac{3}{7}$. fiet numerus 24. qui diuisus per 8. faciet Quotientem 3. In posteriori vero quæstione, si diuisor datus $\frac{1}{4}$. multiplicetur per datum Quotientem $\frac{5}{6}$. fiet numerus $\frac{5}{24}$. qui diuisus per $\frac{2}{3}$. numerum multiplicantem, multiplicandumue datum faciet $\frac{15}{72}$. numerum quæsitum. Si namq; $\frac{2}{3}$. multiplicentur per $\frac{15}{72}$. fiet numerus $\frac{30}{216}$. qui diuisus per $\frac{1}{4}$. faciet Quotientem $\frac{5}{6}$.

12. Quota pars est numerus 6. huius numeri 54? Item quota pars est hic numerus $\frac{2}{3}$. huius numeri $\frac{10}{15}$? Quæstiones tales per diuisionem explicantur. Nam si numerus datus, qui debet esse pars per alterum datum numerum (qui semper maior esse debet altero) diuidatur, indicabit Quotiens, quota pars, aut partes sit numerus datus numeri dati. Vt in priori quæstione, diuisis 6. per 54. fit Quotiens $\frac{6}{54}$. id est, $\frac{1}{9}$. Erit ergo numerus 6. vna nona pars numeri 54. In posteriori autem quæstione, diuisis $\frac{2}{3}$. per $\frac{10}{15}$. fit Quotiens $\frac{30}{45}$. hoc est, $\frac{2}{3}$. Continebit ergo numerus $\frac{2}{3}$. duas tertias partes numeri $\frac{10}{15}$. Hoc autem ita esse experiri licebit per sextam quæstionem. Si enim quæratur numerus, iuxta illam quæstionem, qui sit $\frac{1}{9}$. numeri 54. reperietur numerus 6. Si item inuestigetur, qui numerus contineat $\frac{2}{3}$. numeri $\frac{10}{15}$. inuenietur numerus $\frac{120}{270}$. hoc est, $\frac{2}{3}$.

13. Numerus hic 6. cuius numeri erit vna nona pars? Item numerus $\frac{2}{3}$. cuius numeri duas tertias continebit? Diuisio quæstiones tales soluit. Si namque datus numerus diuidatur per minutiam, quæ significet propositam partem, partesue, dabit Quotiens numerum quæsitum. Vt in quæstione priori, diuisis 6. per $\frac{2}{3}$. fit Quotiens 54. Numerus ergo 6. nona pars erit numeri 54. In quæstione vero posteriori, diuisis $\frac{2}{3}$. per $\frac{2}{3}$. fit Quotiens $\frac{10}{15}$. Huius ergo numeri duas tertias continebit hic numerus $\frac{2}{3}$.

14. Hic numerus 7. quot octauas partes vnius integri comprehendit? Item numerus hic $\frac{7}{12}$. quot duodecimas partes vnius integri continet? Item hic $\frac{3}{4}$. quot octauas vnius integri complectitur? Multiplicatio huius generis quæstiones dirimet. Si enim datus numerus per denominatorem partium, quæ quæruntur, multiplicetur, dabit productus numerus numerum partium quæsitum. Vt in prima quæstione, multiplicatis 7. per 8. fiunt 56. Numerus ergo 7. continebit 56. octauas. In secunda autem quæstione, multiplicatis $\frac{7}{12}$. per 12. fiunt 9. Numerus ergo $\frac{7}{12}$. complectitur nouem duodecimas. In tertia denique quæstione, multiplicatis $\frac{3}{4}$. per 8. fit numerus $\frac{24}{4}$. hoc est, $3\frac{3}{4}$. Numerus ergo $\frac{3}{4}$. continet tres octauas, & $\frac{3}{4}$. vnius octauæ. Atque hoc ita esse, perspicuum est. Si enim $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{8}$. hoc est, $\frac{2}{24}$. & $\frac{3}{8}$. in vnam summam colligantur, deprehendentur $\frac{5}{8}$. Ex quo fit, $\frac{2}{3}$. continere $\frac{1}{8}$. & $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{8}$.

10. Inuentio duorū numerorū, vt vno per alterum diuiso, prouenias Quotiens propositus.
11. Inuētio numeri, per quē datus numerus sit multiplicandus, vel qui multiplicandus sit per datū numerum, vt producto diuiso per aliū datum numerum proueniat Quotiens propositus.
12. Inuentio partis quā datus numerus exhibet respectu alterius numeri dati.
13. Inuētio numeri respectu cuius datus numerus exhibeat partem propositam.
14. Inuentio multitudinis partiū quarūcunque, quas datus numerus continet.

REGVLA TRIVM, QVÆ ALIO NOMINE REGVLA AVREA, SIVE REGVLA PROPORTIONVM DICI SOLET.

CAPVT XVII.

HActenus iacta sunt à nobis necessaria Arithmetices fundamenta; sequuntur iam variæ regulæ, in quibus mirificus eorum vsus apparet, non solum Mathematicis, verum etiam mercatoribus, immo vero & cuilibet priuato homini, si in commerciis, conuentisque mutuis non vult decipi, aut decipere (quorum illud turpe, hoc vero etiam iniquum foret) maxime vtiles, ac necessariæ. Primo autem loco sese offert regula illa nunquam satis laudata, quæ ob immensam vtilitatem, Aurea dici solet, vel regula Proportionum, propterea quod in quatuor numeris proportionalibus, quorum priores tres noti sunt, quartus autem ignotus quæritur, versetur; vnde & regula trium apud vulgus appellata est: quod tres numeros ponat cognitos, & ex ijs quartum ignotum eliciat. Ita autem regula hæc proportionum se habet.

Regula aurea, siue proportionū, aut regula trium cur sic dicta sit.

Dispositis tribus numeris notis, ita vt is, qui quæstionem habet annexam, (Semper enim vnus illorum quæstionem secum affert, vt in exemplis apparebit) tertio statuatur loco; reliquorum autem ille, qui de eadem est re, hoc est, qui tertio similis est, (Exempla autem declarabunt, in quo similitudo hæc consistat.) primum occupet locum, mediam denique sedem teneat alter, cui quartus, qui quæritur, similis esse debet: Dispositis, inquam, hoc modo numeris, multiplicentur tertius, & medius inter se, productusque numerus per primum diuidatur. Nam quotiens numerus erit quartus, qui quærebatur, satisfacietque quæstioni propositæ: hoc est, tertius numerus ad eum habebit eandem proportionem, quam primus ad secundum.

Numeri in regula trium quo pacto sint collocandi.

Quo pacto per regulā trium quartus numerus ignotus sit inquirendus.

Exemplum.

Quatuor aureis emuntur 12. libræ piperis, quæritur, quot libræ emi possint aureis 20. Hic vides, 20. aureos habere annexam quæstionem: de illis enim quæritur, quotnam libras exhibere possint: Huic numero similis est nume-

numerus 4. aureorum. Nam ſicut 4. aureis emptæ ſunt 12. libræ, ita 20. aureis emendæ ſunt aliæ libræ, ita vt vterque numerus ſit pretium: at 12. libræ piperis ſunt merces. Ita ergo ſtabit exemplum.

Aurei.	Lib.	Aurei.		Lib.
4.	12.	20?	fiunt	60.

Multiplicando autem inter ſe ſecundum, & tertium numerum, & productum 240. per primum diuidendo, inueniemus libras 60. pro quarto numero, qui quærebatur. Vbi vides, quemadmodum primus numerus 4. tertia pars eſt ſecundi numeri 12. ita numerum tertium 20. tertiam partem eſſe quarti numeri inuenti 60.

Aliud Exemplum.

Aureos 60. expendo 5. menſibus, peto, 132. aureos quot menſibus expendam? Hic etiam cernis, quæſtionem fieri de 132. aureis, & huic numero ſimilem eſſe hunc 60. aur. Sic igitur exemplum ſtabit.

Aurei.	Menſes.	Aurei.		Menſes.
60.	5.	132?	fiunt	11.

Multiplicando autem ſecundum numerum, & tertium inter ſe, productumque 660. diuidendo per primum, reperiemus 11. menſes, quibus expendam 132. aureos. Vbi etiam vides, tertium numerum 132. duodecies continere quartum inuentum 11. quemadmodum primus 60. ſecundum 5. complectitur duodecies.

Demõſtratio regulæ trium. Demonſtratio huius regulæ hæc eſt. Quoniam eadem proportio eſſe debet primi numeri ad ſecundum, quæ tertij ad quartum inuentum, vt dictum eſt, & ex propoſitis exemplis conſtat; neceſſe eſt, ex propoſ. 19. lib. 7. Euclid. eundem numerum produci ex multiplicatione primi numeri per quartum, qui ex ſecundo in tertium gignitur. Cum igitur numerus ex ſecundo in tertium productus diuidatur per primum, vt quartus inueniatur, vt regula trium præcipit; fit vt primus numerus per Quotientem, hoc eſt, per quartum numerum inuentum multiplicatus producat eundem numerum diuiſum, qui nimirum ex ſecundo in tertium fuit procreatus. Nam numero quolibet per alium quemuis numerum diuiſo, ſi diuiſor per Quotientem multiplicetur, neceſſario numerus diuiſus rurſus procreatur, vt in tertio examine Diuiſionis integrorum cap. 5. dictum eſt. Id quod etiam conſtat ex definitionibus Diuiſionis, ac Multiplicationis: quod hoc exemplo propoſito declarabimus. Numerus 12. diuidatur per 4. vt fiat Quotiens 3. qui nimirum, ſecundum definitionẽ diuiſionis. cap 5. traditã. toties vnitatem contineat, quoties diuiſus numerus 12. diuiſorem 4. continet. Dico ſi multiplicemus diuiſorem 4. per Quotientem 3. neceſſario rurſus produci diuiſum numerum 12. Nam cum, iuxta definitionem Multiplicationis cap. 4. traditam, numerus procreari debeat, qui toties contineat diuiſorem 4. qui eſt vnus numerorum multiplicantiũ, quoties numerus quotiens 3. qui eſt alter numerus multiplicãs, vnitatẽ continet? contineat autem diuiſus numerus 12. toties diuiſorem 4. quoties numerus Quotiens 3. vnitatem includit, vt dictum eſt, liquido conſtat, numerũ diuiſum 12. ex dicta multiplicatione diuiſoris 4. per quotientem 3. procreari. Eademque ratio eſt in omnibus aliis numeris. Quæ cum ita ſint, erit omnino numerus Quotiens per regulam trium inuentus, quartus numerus proportionalis, qui quæritur, vt ex dicta propoſ. 19. lib. 7. Eucl. conſtat: quandoquidem idem numerus producitur ex primo numero in quartum, qui ex ſecundo in tertium, vt diximus.

Numero per aliũ diuiſo ſi diuiſor per Quotientẽ multiplicetur, cur rurſum numerus diuiſus producatur.

Probatio regulæ triũ. Ex his, quæ proxime ſcripſimus, facile colligitur, qua ratione regula trium poſſit examinari. Nam ſi idem procreetur numerus ex primo numero in quartum inuentũ, qui ex ſecundo in tertium, dubitandum non eſt, quin recte inuentus ſit quartus numerus proportionalis: ſi vero non idem numerus gignatur, repetenda erit operatio.

Alia probatio regulæ trium. Eſt tamen alia probatio regulæ trium, à pleriſq; vſurpata, quæ fit hoc modo. Statuatur primus numerus in tertio loco, & tertius in primo, quartuſque in medio. Si namque, iuxta præceptum regulæ trium, reperiatur hoc modo quartus numerus, qui prius erat ſecundus, recte ſoluta fuit quæſtio propoſita. vt primum exemplum ſupra allatum ita ſtabit.

Aurei.	Libræ.	Aurei.		Libræ.
20.	60.	4?	fiunt	12.

Nam ſi verum eſt, 20. aureis emi 60. lib. propterea quod 4. aureis emptæ ſunt libræ 12. efficitur neceſſario, vt viciſſim 4. aureis emantur libræ 12. hoc ipſo, quod 20. aureis, libræ 60. emantur.

Poſſunt interdum duo numeri ex datis tribus, vt primus & ſecundus, vel primus & tertius, ad minores redigi, vt facilior reddatur operatio. Quod quidem fiet, ſi tam primus, quàm ſecundus; vel tam primus, quam tertius, per communem aliquam vtriuſque menſuram notam, ſiue ea maxima ſit ſiue non maxima, diuidatur & loco illorum Quotientes ſtatuantur. vt in hoc exemplo.

4.	12.	20?	fiunt	60.

Quoniam numerus 4. metitur primum, & ſecundum, ſi, diuiſo vtroque per 4. Quotientes 1. & 3. pro illis ponantur, ita ſtabit exemplum.

1.	3.	20?	fiunt	60.

Item quia in eodem exemplo numerus idem 4. numerat primum & tertium, ſi, diuiſo vtroque per 4. Quotientes 1. & 5. pro illis accipiantur, ſic ſtabit idem exemplum.

1.	12.	5?	fiunt	60.

Item in ſequenti hoc exemplo.

36.	48.	63?	fiunt	84.

Quoniam numerus 12. metitur primum, & ſecundum, ſi, diuiſo vtroque per 12. Quotientes 3. & 4. pro illis reponantur, ita ſtabit exemplum.

3.	4.	63?	fiunt	84.

Item quia numerus 9. metitur primum, & tertium in eodem exemplo, ſi, diuiſo vtroque per 9. Quotientes 4. & 7. pro illis in regula collocentur, ſic ſtabit exemplum.

4.	48.	7?	fiunt	84.

Rurſus

Rurſus hoc etiam modo quæſtio propoſita ſoluetur. Diuidatur ſecundus numerus per primum, & per Quotientem tertius multiplicetur: vel tertius per primum diuidatur, & per Quotientem multiplicetur medius. Vtroque enim modo productus numerus erit quartus proportionalis, qui quæritur. Vt in hoc exemplo.

60.	360.	132?	fiunt	792.

Diuiſo ſecundo numero per primum, ſit Quotiens 6. per quem ſi multiplicetur tertius numerus gignetur quartus 792. ac ſi iuxta præceptum regulæ trium operatus eſſes. Item diuiſo tertio numero per primum, ſit Quotiens $2\frac{132}{360}$. hoc eſt, $2\frac{11}{30}$. ſiue $\frac{11}{5}$. per quem ſi multiplicetur ſecundus, producetur idem quartus 792.

His recte intellectis, varijs modis examinare poteris, num per regulam trium quartus numerus recte ſit inuentus, necne. Nam ſi per varias huiuſmodi operationes eundem ſemper quartum numerum repereris, maximo argumento eſt, operationem recte eſſe inſtitutam.

Quod ſi quis roget, qui fieri poſſit, vt per tot vias ad eundem ſemper ſcopum perueniamus, ſciat, huius rei cauſam totam ex proportionibus pendere. Quoniam enim eadem proportio eſſe debet inter primum numerum, & ſecundum, quæ inter tertium, & quartum; fit vt permutando eadem proportio ſit inter primum, & tertium, quæ inter ſecundum, & quartum; Item & conuertendo eadem inter ſecundum & primum quæ inter quartum, & tertium; nec non eadem inter tertium, & primum, quæ inter quartum, & ſecundum. Cum ergo ſemper eadem proportio ſit inter Quotientes duorum numerorum per eundem numerum diuiſorum, quæ inter ipſos numeros; perſpicuum eſt, ſi diuidatur tam primus numerus, quam ſecundus, vel tam primus, quam tertius, per communem aliquam menſuram eandem & pro ipſis numeris Quotientes reponantur, eſſe adhuc eandem proportionem inter Quotientes primi, & ſecundi numeri, quæ eſt inter tertium numerum, & quartum; Item eandem eſſe proportionem inter Quotientes primi, & tertij numeri, quæ eſt inter ſecundum numerum, & quartum. Rurſus quoniam, diuiſo numero quouis per alium numerũ, producitur denominator proportionis, quam diuiſus numerus habet ad diuiſorem, denominator autem alium quemcunq; numerũ multiplicans, producit numerum, qui ad multiplicatum proportionem habet à dicto denominatore denominatam; ſit vt diuiſo ſecundo, aut tertio numero per primum, Quotiens ſit denominator proportionis ſecundi, aut tertij numeri ad primum. Quare ſi per hunc Quotientẽ multiplicetur tertius numerus, aut ſecundus, procreabitur quartus; qui vid. licet eandem proportionem habeat ad tertiũ, quam ſecundus ad primum, vel eandem ad ſecundum, quam tertius ad primum.

Quæſtiones nonnullæ, quibus varia difficultates regulæ triũ explicantur. Quoniam vero frequenter quæſtiones per regulam trium ſoluendæ præpoſtero ordine proponuntur, interdum etiam diuerſæ monetæ, menſuræ, vel pondera in vno numero reperiuntur, deniq; non raro primus numerus diſſimilis eſt tertio, vt facile hærere, atque impediri poſſit is, qui parum in rebus Arithmeticis eſt verſatus, explicabimus quæſtionibus aliquot varias difficultates, quæ occurrere poſſunt, hinc exordientes.

1. Quanti conſtat vna libra piperis, ſi 60. libræ emptæ ſint aureis 20? In hac quæſtione præpoſtere poſiti ſunt numeri. Nam 1. libra, cuius primo loco mentio fit, quæſtionem habet annexam, ac proinde tertium occupare debet locum, primum vero numerus 60. librarum, cum numero vnius libræ ſit ſimilis. Itaque recto ordine proponenda fuiſſet quæſtio hoc modo. Libræ 60. piperis conſtant 20. aureis, libra ergo 1. quanti conſtabit? vt in appoſito hic exemplo apparet.

Lib.	Aur.	Lib.		Aurei.
60.	20.	1?	fiunt	$\frac{20}{60}$. ſiue $\frac{1}{3}$.

Inuenies autem (ſi ſecundum numerum per tertium multiplices, productumque 20. per primum partiaris) valorem 1. libræ eſſe $\frac{20}{60}$. vel $\frac{1}{3}$. vnius aurei, quia cum minor numerus per maiorem diuiditur, fit fractio, cuius numerator eſt numerus diuidendus, denominator autem diuiſor vt cap. 5. & 6. diximus. Reducetur autem vtrauis harum minutiarum, nempe prior ad baiochos hoc modo. Multiplicetur numerator 20. per 100. (tot enim baiochi vnum aureum conficiunt.) productusque numerus 2000. per denominatorem 60. diuidatur. Quotiens enim dabit baiochos $33\frac{20}{60}$. ſiue $33\frac{1}{3}$. Tantundem inueniſſes, ſi poſterioris minutiæ $\frac{1}{3}$. numeratorem per 100. multiplicaſſes, productumque per denominatorem diſtribuiſſes. Quod ſi $\frac{1}{3}$. vnius baiochi ad quatrinos velis reuocare, multiplicabis numeratorem per 4. (cum tot quatrini baiochum conficiant.) productumque per denominatorem partieris. Inuenies enim quatr. $1\frac{1}{3}$. Itaque 1. libra conſtabit baioc. 33. quatr. $1\frac{1}{3}$.

Quæſt 2. 2. Si libræ $10\frac{2}{5}$. & vnciæ $7\frac{1}{2}$. ceræ albæ conſtent aureis 2. & Iul. 6. quantum ceræ emetur baiochis 90? Sic ſtabit exemplum.

Aur.	Iul.	Lib.	Vnc.	Baioc.		Vnc.
2.	6.	$10\frac{2}{5}$.	$7\frac{1}{2}$.	90?	fiunt	$45\frac{207}{260}$.

Quid agẽdum quando diuerſæ monetæ, menſuræ, pondera, & fractiones occurrũt. Quoniam vero in primo numero, ac tertio diuerſæ monetæ continentur, reducendæ erunt omnes ad minimam monetam ibi expreſſam, vt ad baiochos, eruntque in primo numero baiochi 260. Rurſus quia in ſecundo numero reperiuntur diuerſa pondera, redigenda erunt ad minima ibi expreſſa, vt ad vncias, quarum 12. vnam libram efficiunt, eruntque in $10\frac{2}{5}$. libris vnciæ $124\frac{4}{5}$. quibus ſi addantur vnciæ $7\frac{1}{2}$. fient vnciæ $132\frac{7}{10}$. Quo pacto autem fractiones vel ſolæ, vel vna cum integris multiplicari inter ſe debeant, aut diuidi, docuimus cap. 13. & 14. Itaque ſic ſtabit exemplum reductum.

Baioc.	Vnc.	Baioc.		Vnc.
260.	$132\frac{7}{10}$.	90?	fiunt	$45\frac{207}{260}$.

Illud vero hoc loco annotandum eſt, minutiam ex multiplicatione medij numeri per tertiam productam, licet eius numerator ſit denominatore maior, non debere redigi ad integra, donec diuiſio ſit abſoluta, ne operatio impediatur. Vnde quia tunc multiplicatio medij numeri per tertium facit $\frac{1320}{10}$. diuidenda erit hæc minutia, antequam ad integra reducatur, per primum numerum: quæ diuiſio dabit hanc minutiam $\frac{1320}{2600}$. continentem vncias $45\frac{207}{260}$.

Quæst. 3. 3. Quanti constabunt $\frac{7}{8}$. vnius vlnæ panni, si $\frac{3}{4}$. vnius aur. quispiam emerit $\frac{7}{3}$. vnius vlnæ? Sic stabit exemplum.

Vlnæ.	Aur.	Vlnæ.		Aur.
$\frac{7}{3}$.	$\frac{3}{4}$.	$\frac{7}{8}$?	fiunt	$1\frac{3}{32}$.

Multiplicatio medij numeri per tertium facit minutiam $\frac{21}{32}$. qua diuisa per primum numerum, inuenietur minutia hæc $\frac{21}{96}$. vnius aurei, quæ facit aur. $1\frac{3}{32}$. Reducta autem hæc minutia $\frac{21}{32}$. vnius aurei ad Iulios, baiochos, & quatrinos, dat Iul. 9. baioc. 6. quatr. $3\frac{1}{2}$.

Quæst. 4. 4. Studiosus quidam in Vniuersitate volens dare operam literis 6. annos, animaduertit se 7. mensibus, & 13. diebus expendisse aureos 200. Iul. 7. baiochos $8\frac{2}{7}$. Quæritur ergo, quanta pecunia indigeat. Ita stabit exemplum.

Menses.	Dies.	Aur.	Iul.	Baioc.	An.	Aur.	Baioc.
7.	13.	200.	7.	$8\frac{2}{7}$.	6? fiunt	1956.	$7\frac{10}{175}$.

Hic in primo numero menses, & in tertio anni ad dies reuocandi sunt. Quod vt fiat, considerandum est, quinam menses illi sint, quia non omnes menses eundem dierum numerum continent. Nam si ponamus priores septem menses, initio facto à Ianuario, continebunt dicti 7 menses in anno communi dies 212. vt hic vides, (in anno vero bissextili 213. cum in eo Februarius contineat dies 29.) Additis diebus 13. fient dies 225. Deinde considerandum est, quot anni bissextiles in illis 6. annis contineantur. Nam pro singulis addendus est dies 1. ad dies 365. anni vnius communis. Vnde si ponamus duos annos bissextiles contineri, multiplicabimus 6. annos per 365. dies, & producto numero addemus 2. vt efficiantur dies 2192. Rursus in numero medio redigendi sunt aurei, & Iulij ad baiochos, qui erunt numero $2007\frac{2}{7}$. ita vt exemplum reductum ita se habeat.

Ian.	31.	212.
Febr.	28.	
Mart.	31.	
April.	30.	
Maius	31.	
Iun.	30.	
Iul.	31.	
		13.
		225.

Dies.	Baioc.	Dies.		Baioc.
225.	$2007\frac{2}{7}$.	2192?	fiunt	$195607\frac{10}{175}$.

Postremo reducendus erit quartus numerus inuentus baiochorum ad aureos, & Iulios. Faciunt autem omnes illi baiochi aureos 1956. Iul. 0. baioc. 7. $\frac{104}{175}$. Tanta pecunia necessaria est studioso illi 6. annis, quorum duo bissextiles sint.

Hac eadem ratione post operationem semper reducenda est moneta quarti numeri ad maiorem, si fieri potest: Item pondera, mensuræve ad maiora pondera, vel mensuras; vt vnciæ ad libras; palmi vel pedes ad passus, passus autem ad milliaria.

Quæst. 5. 5. Quidam conficit 7. diebus milliaria 210. Peto quot diebus milliaria 1600. conficiet, si quotidie iter faciat, & cursum nec remittat, nec intendat? Sic ponetur exemplum.

Milliar.	Dies.	Milliar.		Dies.
210.	7.	1600?	fiunt	$53\frac{70}{210}$.

Fractio hæc $\frac{70}{210}$. vnius diei in quarto numero, si numerator per 24. multiplicetur, productusque numerus per denominatorem diuidatur, redigetur ad horas 8.

Quæst. 6. 6. Si aureis 100. Iulijs 7. baiochis 8. emptus sit ager passuum quadratorum 400. quanti constabit ager passuum quadratorum 1000. pedum quadratorum 4. & palmorum quadratorum 3? ita stabit exemplum.

Passus.	Aur.	Iul.	Baioc.	Pass.	Ped.	Palm.		Baioc.
400.	100.	7.	8.	1000.	4.	3?	fiunt	$25199\frac{17681}{800000}$.

Reductis aureis, ac Iulijs secundi numeri ad baiochos; & passibus, ac pedibus tertij numeri ad palmos; tribuendo 16. palmos quadratos vni pedi quadrato, & 25. pedes quadratos vni passui quadrato; nec non & passibus primi numeri reductis ad palmos quoque, tribuendo vni passui quadrato 400. palmos quadratos; ita stabit exemplum reductum,

Palmi.	Baioc.	Palmi.		Baioc.
160000.	10078.	400067?	fiunt	$25199\frac{17681}{800000}$.

Quartus autem numerus baiochorum continet aur. 251. Iul. 9. baioc $9\frac{17681}{800000}$.

Quæst 7. 7. In nundinis quibusdam 44. aureis emptæ sunt 52. vlnæ panni cuiusdam, quanti constabunt vlnæ 260. eiusdem panni? Ita stabit exemplum.

Vlnæ.	Aur.	Vlnæ.		Aur.
52.	44.	260?	fiunt	220.

Quæst. 8. 8. Emit quispiam 52. vlnas panni 44. aureis, quot vlnas emet aureis 220? Exemplum ita disponetur.

Aur.	Vlnæ.	Aur.		Vlnæ.
44.	52.	220?	fiunt	260.

Quæst. 9. 9. Emit quispiam summa quadam pecuniæ 52. vlnas panni, atque eodem pretio accepit postea 260. vlnas, quæ constiterunt aureis 220. quid ergo prius expendit? Disponetur exemplum hoc modo.

Vlnæ.	Aur.	Vlnæ.		Aur.
260.	220.	52?	fiunt	44.

10. Vlnas

Quæst. 10. 10. Vlnas aliquot panni emit quidam 44. aureis, atque eodem pretio alius deinde aureis 220. emit vlnas 260. quot ergo vlnas prior emit? Stabit exemplum hoc modo.

Aur.	Vlnæ.	Aur.		Vlnæ.
220.	260.	44?	fiunt	52.

Apposui quatuor hæc postrema exempla, in quibus iidem quatuor numeri regulæ trium varijs modis vices inter se permutant, quippe cum quisque illorum ex alijs tribus datis eruatur, vt intelligas, quo pacto te gerere debeas in alijs quæstionibus similibus.

REGVLA TRIVM EVERSA.

CAPVT XVIII.

DIximus, in quatuor numeris regulæ trium eam proportionem esse primi numeri ad secundum, quæ est tertij ad quartum, atque adeo, (vt ex propos. 14. lib. 5. Euclid. colligitur.) si primus maior est, vel minor tertio, secundum quoque maiorem esse, vel minorem quarto; id quod in exemplis omnibus hactenus adductis perspicuum esse potest. Solet autem nonnunquam accidere, vt quo maior est primus numerus tertio, eo minor esse debeat secundus quarto; & quo minor est primus tertio, eo maior esse debeat secundus quarto. Quare contraria tunc via tenenda erit, nempe primus numerus per secundum multiplicandus, numerusque productus per tertium diuidendus. Quando autem hæc regula trium euersa (ita eam appellant) adhibenda sit, & ratio naturalis dictare videtur, & clarissime ex sequentibus exemplis intelligi potest, quorum primum hoc sit. *Regula trium euersa quo pacto quartum numerum eliciat.*

Quæst. 1. 1. Pannus 9. vlnarum, cuius latitudo est 3. palmorum, emitur à quodam, vt sibi tunica conficiatur. Quot ergo vlnæ alterius panni, cuius latitudo est 2. palmorum, requirantur ad eandem tunicam, vel similem conficiendam? Quoniam quæstio est de panno latitudinem habente 2. palmorum, ita stabit exemplum.

Palmi latitud.	Vlnæ.	Palmi latitud.		Vlnæ.
3.	9.	2?	fiunt	$13\frac{1}{2}$.

Hic manifeste vides, quo angustior est secundus pannus, eo plures vlnas esse necessarias. Quare licet primus numerus tertio maior sit, non tamen propterea secundus maior etiam esse debet quarto, sed minor; ita vt quam proportionem habet tertius numerus ad primum, eam habeat secundus ad quartum. Hinc fit, vt primus per secundum sit multiplicandus, numerusque productus per tertium diuidendus: quia vt debita proportio seruetur, tertius numerus primum locum obtinere debet in regula proportionum, vt dictum est, atque hic apparet.

Palmi latitud.	Palmi latitud.	Vlnæ.		Vlnæ.
2.	3.	9?	fiunt	$13\frac{1}{2}$.

Quæst. 2. 2. Quidam accepit mutuo ab alio 4000. aur. ad annos 3. quos cum ei restitueret, nullum censum accipere voluit, sed tantum petijt, vt ei vicissim pecuniam mutuo daret. Dedit ergo ei mutuo 7480. aur. Quamdiu ergo hic pecuniam istam retinere debet, vt ei satisfiat pro beneficio præstito per 4000. aur. quos illi accommodauerat? In hac quæstione, quia numerus 7480. aur. secum habet quæstionem, collocandi erunt numeri hoc ordine.

Aur.	Anni.	Aur.		Anni.	Dies.	Horæ.
4000?	3.	7480?	fiunt	1.	220.	$13\frac{80}{1887}$.

Perspicuum etiam hic est, maiorem censum deberi inæquali tempore aureis 7480. quam aur. 4000. atque adeo minori tempore opus esse, quã 3. ann. vt idem census, qui debetur aur. 4000. tribus annis, lucrifiat ex aur. 7480. Quare licet primus numerus minor sit, quam tertius, non tamẽ idcirco secundus minor etiam erit, quam quartus, sed maior; ita vt quam proportionem habet tertius numerus ad primum, eam habeat secundus ad quartum. Ex quo fit, multiplicandum esse primum per secundum, productumque numerum per tertium diuidendum: quia vt debita proportio seruetur, tertius numerus primum locum obtinere debet in regula proportionum, vt dictum est, atque hic apparet.

Aur.	Aur.	Anni.		Anni.	Dies.	Horæ.
7480.	4000.	3?	fiunt	1.	220.	$13\frac{80}{1887}$.

Quæst. 3. 3. Quando mensura tritici emitur 6. aureis, panis vno baiocho emptus, iuxta ciuitatis alicuius ordinationem, pondus habet 10. vnciarum; Iam si eadem mensura tritici ematur 4. aureis, vel 8. aureis, quantum esse debet eiusdem panis pondus? Ita stabunt exempla.

Aur.	Vnciæ.	Aur.		Vnciæ.
6.	10.	4?	fiunt	15.
6.	10.	8?	fiunt	$7\frac{1}{2}$.

Ratio dictat, quo vilius est triticum, eo maius pondus habiturum panem, & quo carius, eo minus. Talis enim proportio debet esse 4. aur. ad 6. aur. vel 8. aur. ad 6. aur. qualis est ponderis 10. vnciarum ad pondus ignotum, quod quæritur. Vnde iuxta regulam proportionum ita colloçandi essent numeri.

Aur.	Aur.	Vnciæ.		Vnciæ.
4.	6.	10.	fiunt	15.
8.	6.	10?	fiunt	$7\frac{1}{2}$.

Quæst. 4. 4. Operarij 30. perficiunt opus quoddam in 4. annis; quanto ergo tempore idem absoluent 50. operarij, vel 20? vel, quot operarij idem absoluent in annis 2. & diebus 146? Vel in annis 4. & diebus 292? Quadru-

plex hoc exemplum ita ſtabit, reductis annis (quorum quilibet ſtatuatur dierum 365.) ad dies, in poſterioribus duobus exemplis.

Operarij.	Anni.	Operarij.	Anni.	Dies.
30.	4.	50?	fiunt 2.	146.
30.	4.	20?	fiunt 6.	0.

Dies.	Operarij.	Dies.		Operarij.
1460.	30.	876?	fiunt	50.
1460.	30.	1752?	fiunt	25.

Quo enim plures ſunt operarij, eo minori tempore opus eſt, quo autem pauciores, eo maiore. Item quo minus tempus eſt, eo pluribus operarijs opus eſt, quo autem maius, eo paucioribus. Igitur iuxta regulam proportionum ita collocarentur numeri.

Operarij.	Operarij.	Anni.	Anni.	Dies.
50.	30.	4? fiunt	2.	146.
20.	30.	4? fiunt	6.	0.

Dies.	Dies.	Operarij.		Operarij.
876.	1460.	30?	fiunt	50.
1752.	1460.	30?	fiunt	25.

Quæſt 1. 5. Obſeſſus quidam exercitus 8500. militum victum habet ad 11. menſes; verum ſpes nulla eſt ſolutionis obſidionis, vel futuri auxilij, niſi poſt 25. menſes. Quot ergo milites retinendi ſunt, vt reliquis victus ſufficiat ad 25. menſes? Numeri ita diſponendi ſunt.

Menſes.	Milites.	Menſes.		Milites.
11.	8500.	25?	fiunt	3740.

Retinendi ergo erunt milites 3740. his enim victus ſufficiet ad 25. menſes, dimittendique propterea erunt milites reliqui 4760.

REGVLA TRIVM COMPOSITA.

CAPVT XIX.

Regula triũ compoſita quid & quomodo fiat.

FIT, vt interdum plures, quam tres numeri proponantur noti, ita tamen, vt ſint ſemper tres principales, alij autem illis adiuncti minus principales, denotantes vel tempus, vel lucrum, damnumue. Quod vbi contigerit, fit regula trium compoſita, & tunc vel inſtituenda erit regula trium bis, aut ter, vel quilibet per ſibi adiunctos multiplicandus, vt fiant tres tantum numeri noti, per quos quartus ignotus eliciatur, vel certe alia quædam via tentanda. Id quod ſequentibus exemplis perſpicuum fiet, in quibus variæ quæſtiones de lucro, damno, interueniente etiam diuerſitate temporis, & varietate lucri in ratione tot pro 100. diſcutientur.

Quæſt. 1. 1. Sunt 8. in communi conuictu quorum ſinguli ſingulis mẽſibus ſoluunt 6. aureos. Quantum ergo erit pretium victus omnium ad 4. annos? Hæc quæſtio ita recte proponeretur. Vnus in vno menſe ſoluit 6. aureos quid ergo ſoluent 8. in 4. annis, hoc eſt, in 48. menſibus? Ita autem collocandi erunt numeri.

Conuictor.	Menſes.	Aur.	Conuictores.	Menſes.
1.	1.	6.	8.	48?
	fiunt	Aur.	2304.	

Vbi vides, primum numerum vnius conuictoris habere adiunctum vnum menſem, tertium autem 8. conuictorum habere adiunctos 48. menſes. Primo ergo ita inſtituetur regula trium. Si vnus ſoluit 6. aureos, quantum ſoluent 8? vt hic.

Conuict.	Aur.	Conuict.		Aur.
1.	6.	8?	fiunt	48.

Soluent ergo 8. conuictores in vno menſe 48. aureos, cum vnus ſoluat 6. aureos in menſe. Secundo ergo iterum ita inſtituetur regula trium. Si in vno menſe ſoluunt 48. aureos, quantum ſoluent in 48. menſibus? vt hic.

Menſis.	Aur.	Menſes		Aurei.
1.	48.	48?	fiunt	2304.

Breuius tamen eadem quæſtio explicabitur, ſi tam duo numeri in principio quæſtionis primo loco poſiti inter ſe, quam duo tertio loco poſiti inter ſe multiplicentur, vt fiant tres numeri regulæ trium hoc modo.

	Aur.			Aur.
1.	6.	384?	fiunt	2304.

Nam ex hac multiplicatione procreatur numerus maior conuictorum pro vno menſe, qui æquiualet minori pro pluribus menſibus. Vt ex multiplicatione 8. conuictorũ per 48. menſes producuntur 384. conuictores pro vno menſe. Si enim ſingulis menſibus ſunt 8. conuictores, procul dubio in 48. menſibus, ſi accederent ſemper noui conuictores, fierent 384. conuictores: atq; ita tantum ſoluent hi 384. conuictores in vno menſe, quantũ 8. conuictores in 48. menſibus. Hæc eſt cauſa cur multiplicandi ſint numeri principales, per adiunctos minus principales, qui tempus ſignificant, vel aliud quippiam, dummodo non ſit de eadem re, quã ſignificant numeri principales; alioquin non eſſent duo numeri, ſed vnus. Vt ſi in aliquo loco poſiti ſint aurei, baiochi, & quatrini, cenſebuntur tres hi numeri pro vno, cum ſint de eadem re, vtpote qui monetam ſignificent. Eademque ratio eſt proportione quadam in alijs huiuſmodi quæſtionibus.

2. Pro 200. libris quarundam mercium aduectis per 100. milliaria ſoluendi ſunt 4. aurei: quantum ergo ſoluendum eſt pro 300. libris aduectis per 400. milliaria? Ita collocabuntur numeri. *Quæſt. 2.*

Lib.	Mill.	Aur.	Lib.	Mill.		Aur.
200.	100.	4.	300.	400?	fiunt	24.

Multiplicatis duobus numeris primi loci, & duobus tertij loci inter ſe, confecti erunt tres numeri regulæ trium hoc pacto.

Aur.				Aur.
20000.	4.	120000?	fiunt	24.

Si eadem hæc quæſtio ſoluenda ſit per regulam trium bis repetitam, ita ſtabit primo loco exemplum.

Lib.	Aurei.	Lib.		Aurei.
200.	4.	300?	fiunt	6.

Atque ita ſoluendi eſſent 6. aurei pro 300. libris per 100. milliaria aduectis, per quot nimirum 200. libræ ſunt aduectæ. Sed quoniam 300. libræ vehendæ ſunt per 400. milliaria, ita rurſus ſtabit ſecundo loco exemplum.

Mill.	Aur.	Mill.		Aur.
100.	6.	400?	fiunt	24.

3. Tres Perſonæ conſumunt modium tritici 3. aureis emptum in 5. ſeptimanis, quantus ergo eſt ſingulorum ſumptus in vno die? Ita numeri ordinandi erunt. *Quæſt. 3.*

Perſ.	Sept.	Aur.	Perſ.	Dies.
3.	5.	3.	1.	1?

fiunt Aur. $\frac{3}{105}$. hoc eſt, quatrini $11\frac{3}{7}$.

Reductis autem 5. ſeptimanis ad dies, vt primus numerus, ac tertius ſimiles ſint, ita ſtabit exemplum.

Perſ.	Dies.	Aur.	Perſ.	Dies.
3.	35.	3.	1.	1?

fiunt Aur: $\frac{3}{105}$. hoc eſt, quatrini $11\frac{3}{7}$.

Multiplicatis duobus numeris primi loci, & duobus tertij inter ſe, diſponentur tres numeri ad regulam trium hoc modo.

Aur.		Aur.		quatrini.
105.	3.	1?	fiunt	$\frac{3}{105}$. hoc eſt, $11\frac{3}{7}$.

Per regulam trium bis repetitam ita ſoluetur eadem quæſtio.

Perſ.	Aur.	Perſ.		Aur.
3.	3.	1?	fiunt	1.

Item.

Dies.	Aur.	Dies.		Aur.	quatrini.
35.	1.	1?	fiunt	$\frac{3}{35}$.	hoc eſt, $11\frac{3}{7}$.

4. Si 300. aurei in 4. annis lucrantur 100. aureos, quid lucrabuntur 1580. aurei in 7. annis? Multiplicatis aureis, qui ad lucrum exponuntur, per tempus adiunctum, ita ſtabit exemplum. *Quæſt. 4.*

Aur.				Aur.
1200.	100.	11060?	fiunt	$921\frac{3}{5}$.

Per regulam trium bis repetitam ita ſtabit exemplum.

Aur.	Aur. lucrum.	Aur.		Aur. lucrum.
300.	100.	1580?	fiunt	$526\frac{2}{3}$.

Item.

Anni.	Aur.	Anni.		Aur.
4.	$526\frac{2}{3}$.	7.	fiunt	$921\frac{3}{5}$.

5. Quidam in tribus menſibus 10. aureis lucratus eſt 4. aureos in quanto ergo tempore 100. aureis lucrabitur 2000. aureorum? Hæc quæſtio redigi non poteſt ad ſimplicem regulam trium, propterea quod tempus, in quo 100. aurei lucrari debent 2000. aureos, ignotum eſt, atque adeo per 100. aureos multiplicari non poteſt. Adhibenda ergo erit regula trium bis, hoc modo. *Quæſt. 5.*

Aur.	Aur. lucr.	Aur.		Aur. lucr.
10.	4.	100?	fiunt	40.

Atque ita 100. aurei lucrabuntur 40. aureos in tribus menſibus, in quibus 10. aurei lucrati ſunt 4. Quare vt ſciatur, in quanto tempore 100. aurei lucraturi ſunt 2000. inſtituetur ſecundo regula trium hoc modo.

Aur.	Menſes.	Aur.		Menſes.
40.	3.	2000?	fiunt	150.

Itaque ſi 10. aurei in 3. menſibus lucrantur 4. aureos, 100. aurei lucrabuntur 2000. aur. in 150. menſibus. Quod facile probabitur, ſi quæſtio ita proponatur. Si 10. aur. in 3. menſ. lucrantur 4. aur. quantum in 150. menſ. lucrabuntur aurei 100? Reperietur enim lucrum 2000. aur. vt hic apparet.

Aur.	Menſ.	Aur.	Aur.	Menſ.		Aur.
10.	3.	4.	100.	150.		fiunt 2000.

Nam si tempus quodlibet per suam pecuniam multiplicetur, stabit exemplum ad simplicem regulam trium reductum hoc modo.

Aur.			Aur.
30.	4.	15000? fiunt	2000.

Quæst. 6. 6. Si 100. aurei in 8. mensibus lucrantur 20. aureos, in quanto tempore iidem 100. aurei lucrabuntur 3000. aur? Dispositio numerorum ita se habet.

Aur.	Mens.	Aur.		Mens.
20.	8.	3000?	fiunt	1200.

Quando enim eadem semper summa exponitur ad lucrum, non ponenda est ea inter numeros alios. Idem etiam fiet, quando idem tempus proponitur, vt in sequenti exemplo apparebit.

Quæst. 7. 7. Si 300. aurei in 7. mensibus lucrantur 45. aureos, quid lucrabuntur 1780. aurei in eisdem 7. mensibus? Ita stabit exemplum.

Aur.	Lucr. aur.	Aur.		Lucr. aur.
300.	45.	1780.	fiunt	267.

Quæst. 8. 8. Si singulis militibus in singulos menses tribuerentur 4. aurei, quantum pecuniæ expenderetur in militibus 13000. nouem mensibus? Ita stabit exemplum.

Milit.	Mens.	Aur.	Milit.	Mens.	Aur.
1.	1.	4.	13000.	9?	fiunt 468000.

Quæst. 9. 9. Si 10. equis quotidie dentur 7. mensuræ hordei, vel auenæ, quot mensuræ, iuxta eandem distributionem, conuenient 100. equis ad 20. dies? ita stabit exemplum.

Equi.	Dies.	Mensuræ.	Equi.	Dies.	Mensuræ
10.	1.	7.	100.	20?	fiunt 1400.

Quæst. 10. 10. Si duodecim messores demetant 20. iugera in 9. diebus, quanto tempore 30. messores demetent 45. iugera? Hic opus est regula trium bis repetita, primo tamen loco euersa, quod 30. messores minori tempore indigeant ad demetenda 20. iugera, quam 12. messores. Ita ergo stabit regula trium euersa.

Messores.	Dies.	Messores.		Dies.
12.	9.	30?	fiunt	$3\frac{3}{5}$.

Atque diebus $3\frac{3}{5}$. demetent 30. messores 20. iugera. Quare ita rursum stabit exemplum ad regulam trium.

Iugera.	Dies.	Iugera.		Dies.
20.	$3\frac{3}{5}$.	45.	fiunt	$8\frac{3}{10}$.

Quæst. 11. 11. Romæ aureus ducatus æstimatur Iulijs $11\frac{1}{2}$. hoc est, baiochis 115. Quot ergo eiusmodi ducatos recipiam pro 1000. aureis, quorum singuli 10. Iulijs, siue 100. baiochis æstimantur? Vel si 20. ducati constituant 23. aureos, quot ducatos efficient 1000. aurei? Vtrumque exemplum sic stabit, reductis prius 1000. aureis ad baiochos 100000.

Baioc.	Duc.	Baioc.		Duc.
115.	1.	100000?	fiunt	$869\frac{11}{23}$.
Aur.	Duc.	Aur.		Duc.
23.	20.	1000?	fiunt	$869\frac{11}{23}$.

Quæst. 12. 12. Quot aureos reddent ducati 4000. si 1. aureus contineat 100. baiochos, at 1. ducatus 115. baiochos? vel vel si 20. ducati æstimentur 23. aureis, quot aureos continebunt ducati 4000? Reductis 4000. ducatis prioris exempli ad baiochos 460000. sic stabit vtrumque exemplum.

Baioc.	Aur.	Baioc.		Aur.
100.	1.	460000?	fiunt	4600.
Duc.	Aur.	Duc.		Aur.
20.	23.	4000?	fiunt	4600.

Quæst. 13. 13. Mercator quidam emit 300. libras cuiusdam mercis aureis 60. scire autem cupit, quantum pro 100. aureis lucraturus sit, si easdem 300. libras vendat 64. aureis? vel quantum pro 100. aureis perditurus sit, si 300. illas libras vendat 57. aureis? Hic manifestum est, eum pro 60. aureis esse lucraturum 4. aureos, vel perditurum 3. aureos: vt patet, si minus pretium à maiori subducatur. Dic ergo. Si 60. aur. lucrantur 4. aureos, vel perdunt 3. aur. quantum lucrabuntur, vel perdent 100. aurei?

Aur.	Lucr. aur.	Aur.		Lucr. aur.
60.	4.	100?	fiunt	$6\frac{2}{3}$.
Aur.	Damnum aur.	Aur.		Damnum aur.
60.	3.	100?	fiunt	5.

Quæst. 14. 14. Quærit apud se mercator quidam, quanti emendæ sint libræ 100. alicuius mercis, vt eædem postea venditæ 64. aureis lucrum dent aur. $6\frac{2}{3}$. pro 100. aur? Perspicuum est, eum, qui $6\frac{2}{3}$. aur. lucrari vult pro 100. aur. augere velle 100. vt fiant $106\frac{2}{3}$. Dic ergo. Si $106\frac{2}{3}$. aur. qui continent & pretium 100. aureorum, & lucrum $6\frac{2}{3}$. aur. proueniunt ex 100. aureis, ex quo prouenient 64. aurei, qui continent & pretium 100. librarum ignotum, & lucrum simul, ignotum etiam, quod reddat $6\frac{2}{3}$. pro 100.

Pret. & lucr.	Aur.	Pretium, & lucr.		Aur.
$106\frac{2}{3}$.	100.	64?	fiunt	60.

Emen-

Emendæ ergo sunt 100. libræ aureis 60. Nam diuenditæ postea 64. aureis dant lucrum 4. aureorum, aut pro 100. dabunt lucrum $6\frac{2}{3}$. aur.

Quæst. 15. 15. Empta est gemma quædam, quæ si vendatur 200. aureis, perduntur 10. aurei pro 100. quanti ergo constitit gemma illa? Hic etiam clarum est, eum, qui perdit 10? pro 100. facere 90. ex 100. Hic ergo. Si 90. aur. fiunt ex 100. aur. ex quo fient 200. aur.

Aur.	Aur.	Aur.		Aur.
90.	100.	200?	fiunt	$222\frac{2}{9}$.

constitit ergo gemma illa $222\frac{2}{9}$. aur. Quod vt probes, dic. Si ex $222\frac{2}{9}$. aur. fiunt 200. aur. quid fiet ex 100? Inuenies enim fieri. 90. aureos, ac proinde damnum fieri 10. aureorum pro 100. vt hic vides.

Aur	Aur	Aur		Aur
$222\frac{2}{9}$.	200.	100?	fiunt	90.

Vel dic. Si pro $222\frac{2}{9}$. aur. amitto $22\frac{2}{9}$. aur. (Nam si gemma illa empta sit $222\frac{2}{9}$. aur. vendatur autem 200. aureis, liquido constat, damnum fieri $22\frac{2}{9}$. aur.) pro 100. quid amittam? Inuenies enim damnum 10. aureorum, vt hic apparet.

Aur.	Damnum aur.	Aur.		Damnum aur.
$222\frac{2}{9}$.	$22\frac{2}{9}$.	100?	fiunt	10.

Quæst. 16. 16. Emit quidam 1000. vlnas panni certo pretio, quas si 3. aureis minores emisset, & vendidisset postea 3600. aureis lucratus fuisset 10. pro 100. aureis: quanti ergo 1000. illas vlnas emit? Quoniam qui lucrari cupit 10. pro 100. vult ex 100. facere 110. Dic ergo. Si 110. fiunt ex 100. ex quo fient 3600? vt hic cernis.

Aur.	Aur.	Aur.		Aur.
110.	100.	3600?	fiunt	$3272\frac{8}{11}$.

Si igitur voluisset tantum lucrari 10. pro 100. constitisset ille 1000. vlnæ aureis $3272\frac{8}{11}$. Nam si $3272\frac{8}{11}$. aur. dant 3600. aureos, aurei 100. dabunt 110. aureos, ac proinde 10. cedent in lucrum ex 100. vt hic patet.

Aur.	Aur.	Aur.		Aur.
$3272\frac{8}{11}$.	3600.	100?	fiunt	110.

Vel si certe $3272\frac{8}{11}$. aur. lucrantur $327\frac{3}{11}$. aur. (Qui enim emit quippiam $3272\frac{8}{11}$. aureis, postea autem vendit aureis 3600. lucratur necessario $327\frac{3}{11}$. aur.) 100. aur. lucrabuntur 10. aur. vt hic vides.

Aur.	Lucr. aur.	Aur.		Lucr. aur.
$3272\frac{8}{11}$.	$327\frac{3}{11}$.	100?	fiunt	10.

Sed quoniam in quæstione additum est, eum lucraturum fuisse 10. aur. pro 100. si 1000. illas vlnas 3. aureis minoris emisset, vendidisse tque 3600. aureis; liquido constat, eum 3. aureos expendisse vltra $3272\frac{8}{11}$. aureos. Quare 1000. constiterunt $3275\frac{8}{11}$ aur.

Quæst. 17. 17. Emit quidam 1000. vlnas panni certo pretio, quæ si 6. aur. constitissent; & venditæ postea fuissent 3600. aureis, perditi fuissent 10. aur. pro 100. quantum ergo fuit pretium illarum 1000. vlnarum? Quoniam qui perdit 10. pro 100. facit 90. ex 100. Dic ergo. Si 90. fiunt ex 100. ex quo fient 3600?

Aur.	Aur.	Aur.		Aur.
90.	100.	3600?	fiunt	4000.

Si igitur perdidisset tantum 10. pro 100. constitissent 1000. vlnæ 4000. aureis. Nam si 4000. aur. dant 3600. aur, dabunt 100. aurei aureos 90. vt patet. Vel si 4000. aur. pendunt 400. aur. (Qui enim emit rem aliquam 4000. aureis, eandem autem vendit 3600. perdit omnino 400. aur.) 100. aurei perdent 10. aureos, vt hic vides.

Aur.	Dam. aur.	Aur.		Damn. aur.
4000.	400.	100?	fiunt	10.

Quia vero additum est in Quæstione, eum perditurum fuisse 10. pro 100. si 1000. vlnas 6. aureis pluris emisset, easque vendidisset postea 3600. aureis; liquet, eum 6. aureos minus expendisse, quam 4000. Quare 1000. vlnæ constiterunt 3994. aur.

Quæst. 18. 18. Qui singulas libras mercis alicuius vendit 20. baiochis, lucratur 30 pro 100. quantum ergo lucrabitur, si vendat maiori pretio, nempe 24. baiochis? Hic primum inuestigare oportet, quanti constat vna libra, vt vendita 20. baiochis, det lucrum 30. pro 100. vt in quæstione 14. docuimus, hoc modo. Si 136. (pretium nimirum 100. & lucrum 30?) proueniunt ex 100. vt pretio; ex quo prouenient 20. baiochi, qui continent & pretium vnius libræ ignotum, & lucrum simul, ignotum etiam, quod reddat 30. pro 100?

130.	100.	20.	fiunt	$15\frac{5}{13}$.

Constabit ergo vna libra $15\frac{5}{13}$. baiochis. Ita enim fiet, vt cum baiochi $15\frac{5}{13}$. (vna libra vendita 20. baiochis) lucrentur baiochos $4\frac{8}{13}$. lucrifiant ex baiochis 100. baiochi 30. vt hic vides.

$15\frac{5}{13}$.	$4\frac{8}{13}$.	100?	fiunt	30.

Iam vero inuento pretio vnius libræ, $15\frac{5}{13}$. baioch. perspicuum est, si vna libra vendatur 24. baiochis, ex baiochis $15\frac{5}{13}$. lucrifieri baiochos $8\frac{8}{13}$. Quare ex 100. baioch. lucrifient 56. baiochi, vt hic vides.

$15\frac{5}{13}$.	$8\frac{8}{13}$.	100?	fiunt	56.

Quæst. 19. 19. Qui 100. libras mercis alicuius vendit 10. aur. perdit 10. pro 100. quantum ergo pro 100. perdet, si eas vendat minori pretio, nempe 8. aureis? Hic etiam primum inuestigare oportet, quanti constent 100. illæ libræ, vt venditæ 10. aureis damnum inferant 10. aureorum pro 10. vt in quæstione 15. docuimus, hoc modo. Si 90. fiunt ex 100. (qui enim perdit 10. pro 100. facit 90. ex 100.) ex quo numero fient 10?

90.	100.	10?	fiunt	$11\frac{1}{9}$.

Emptæ ergo sunt illæ 100. libræ aureis $11\frac{1}{9}$. Ita enim fiet, vt cum aurei $11\frac{1}{9}$. (venditis 100. illis libris 10. aureis) perdant aur. $1\frac{1}{9}$. perdantur 10. pro 100. vt hic cernis.

$11\frac{1}{9}$. $1\frac{1}{9}$. 100? fiunt 10.

Inuento autem pretio 100. illarum librarum $11\frac{1}{9}$. aur. manifestum est, si eædem 100. libræ vendantur 8. aureis, ex $11\frac{1}{9}$. aur. amitti aureos $3\frac{1}{9}$. Quam ob rem pro 100. perdentur 28. vt hic vides.

$11\frac{1}{9}$. $3\frac{1}{9}$. 100? fiunt 28.

Quæst. 20. 20. Mercator quidam in Lusitania emit 50000. lib. piperis, aut 10000. & ibidem pro vectigali soluit aureos 500. Naulum autem illinc in Italia constitit 300. aureis, & in portu aliud vectigal exactum est 200. aur. Vectura deinde à mari Florentiam vsque constitit 100. aur. ibique aliud vectigal persolutum 100. aur. Ministris denique ad eam negotiationem missis pro mercede, & victu dati sunt 1000. aurei. Verum hæsitat, quanti vendenda sit libra, vt supra omnes impensas de singulis libris lucretur 2. Iulios. Hic omnes impensas primum in vnam summam colligere oportet, vt habeatur pretium, quod cum omnibus illis impēsis pro 50000. libris expositum est. Summa autem hæc in exemplo dato complectitur 12200. aur. Quare si 50000. lib. constant 12200. aureis siue 122000. Iulijs, vna libra constabit $2\frac{11}{25}$. Iul. vt hic vides.

Aurei.	
Piper.	10000.
Vectigal.	500.
Naulum.	300.
Vectigal.	200.
Vectura.	100.
Vectigal.	100.
Ministri.	1000.
	12200.

Lib. Iul. Lib. Iul.
50000. 122000. 1? fiunt $2\frac{11}{25}$.

Igitur si singulas libras vendat $4\frac{11}{25}$. Iul. lucrabitur de singulis libris Iulios 2.

REGVLA SOCIETATVM.

CAPVT XX.

Regula societatum, quādo adhibetur, & quo pacto fiat. Quoties regula trium adhibenda sit in regula societatū. Quando est diuersitas temporum in regula societatum quid agendum.

SEquitur societatum regula immensum vsum apud mercatores habens, quæ quidem totā nititur regula trium, vt ex propositis exemplis fiet perspicuum. Adhibetur autem quando plures consortium ineunt, ita vt singuli summam quandam pecuniæ conferant, si tq; hoc modo. Pecuniæ omnium in vnam summam colliguntur, & numerus collectus primo loco in regula trium statuitur. Secundum vero locum occupat lucrum commune, vel damnum, quod ex omnium pecuniis prouenit: Tertium denique locum tenent pecuniæ singulorum, &c. ita vt toties adhibenda sit regula triū, quot sunt illi, qui societatem inierunt. Quando autem interuenit temporum diuersitas, multiplicanda erit cuiusque pecunia per suum tempus, antequam omnium pecuniæ in vnam summam colligantur. Deinde hi numeri producti colligendi in vnam summam, vt habeatur primus numerus in regula trium. Tertium autem locum occupabunt singuli numeri producti ex multiplicatione pecuniæ cuiusq; in suum tempus, collocato rursus lucro, vel damno communi in medio loco. Id quod in exemplis manifestum erit, quorum primum hoc sit.

Quæst. 1. 1 Quatuor mercatores, inito consortio, lucrati sunt in nūdinis quibusdam 6000. aur. Primus autem illorum contulit tantum 60. aur. secundus 100. tertius 120. & quartus 200. in quæstionem iam vocatur, quid quisque ex illo lucro accipere debeat, habita ratione pecuniæ, quam exposuit. Ante omnia colligenda est summa ex omnium pecuniis, quæ est 480. aur. Deinde quater instituenda est regula trium hoc modo. Si 480. aurei (quæ est pecunia ex omnium pecuniis collecta) lucrati sunt 6000. aur. quid lucrabuntur 60. aur. quid 100. quid 120. & quid 200. quos singuli posuerunt? veluti hic apparet.

Aur Lucr. aur. — Aur. — fiunt — Lucr. aur.
480. 6000. — 60? — 750. Pri.
100? — 1250. Secun.
120? — 1500. Tert.
200? — 2500. Quar.
6000

Facta operatione, vt præcipit regula trium, reperies, primum debere accipere 750. aur. secundum 1250. tertium 1500. & quartum 2500.

Examen huius rei erit, si lucra omnium in vnam summam collecta efficiant lucrum totum, vt in proposito exemplo factum esse vides.

Quæst. 2. 2 Tres mercatores, emptis mercibus nauem onerarunt. Primi merces constiterunt 300. aur. secundi 500. tertii 180. Graui deinde tempestate orta, proiectæ sunt in mare merces grauiores, quæ constabant 400. aur. Conuenit autem inter eos, vt iactura hæc communis sit. Quantum ergo quisque damnum feret pro rata suarum mercium portione? Colligantur in vnam summam aurei omnium & numerus collectus 980. in primo loco regulæ trium collocetur, damnum vero commune in secundo, & pecuniæ singulorum in tertio, vt hic vides.

Aur. Damn. aur. — Aur. — fiunt — Dam. aur.
980. 400. — 300? — $122\frac{440}{980}$. prim.
500? — $204\frac{80}{980}$. secun.
180? — $73\frac{460}{980}$. tertij.

Primus ergo perdet $122\frac{440}{980}$. aur. secundus $204\frac{80}{980}$. & tertius $73\frac{460}{980}$.

3. Tres

3. Tres emere volunt 4000. libras sacchari, quæ æstimantur 5000. aur. Primus tamen vult 1300. lib. secundus 1460. tertius denique reliquas lib. 1240. quantum ergo soluet quilibet? Dic, si 4000. lib. valent 500. aur. quid valent 1300. quid 1460. & quid 1240. lib. quas singuli capere volunt? Inuenies enim primum soluere aur. $162\frac{1}{2}$. secundum $182\frac{1}{2}$. & tertium 155. vt hic vides. *Quæst. 3.*

Lib. Aur. — Lib. — fiunt — Aur.
4000. 500. — 1300? — $162\frac{1}{2}$. primi.
1460? — $182\frac{1}{2}$. secundi.
1240? — 155. tertij.

4. Tres societate inita, lucrati sunt 1000. aur. Primus exposuit 200. aur. eosque post 8. menses repetijt. Secundus contulit 450. aur. eosque post 6. menses recepit. Tertius denique 500. aur. attulit, eosque in negotiatione reliquit 10. mensibus. Quantum ergo quisque ex lucro accipiet, habita ratione suæ pecuniæ, & temporis? Cuiusque pecunia per suum tempus multiplicetur, & numeri producti in vnam summam colligantur, pro primo numero regulæ trium: secundum vero locum occupet lucrum: tertium denique tres illi producti. In nostro exemplo, ex pecunia primi in suum tempus fiunt 1600. ex pecunia secundi in suum tempus, 2700. ex pecunia tertij in suum tempus, 5000. horum autem productorum summa est 9300. Sic ergo stabit exemplum. *Quæst. 4.*

Lucr. aur. — Lucr. aur. — fiunt — Lucr. aur.
9300. 1000. — 1600? — $172\frac{4}{93}$. Primi.
2700? — $290\frac{10}{93}$. Secun.
5000? — $537\frac{59}{93}$. Tertij.

5. Tres, societate inita, lucrati sunt 1000. aur. Primus posuit 300. aur. per 10. menses. Secundus attulit 700. aur. Tertius vero 800. aur. Accepit autem primus ex lucro 500. aur. secundus 300. & tertius 200. Quanto ergo tempore fuerunt duorum posteriorum pecuniæ in negotiatione? Quoniam, vt in præcedenti quæstione dictum est, pecunia cuiusque in suum tempus multiplicanda est; multiplicabimus pecuniam primi per suum tempus, faciemusque 3000. atque ex hoc producto prouenit lucrum primi. Vt igitur sciamus, ex quibusnam productis lucra posteriorum duorum proueniant, dicemus. Si 500. aur. (quod est lucrum primi) proueniunt ex 3000. ex quo prouenient 300. & 40. aur. quæ sunt lucra posteriorum? Veluti hic apparet. *Quæst. 5.*

Lucr. aur. — Lucr. aur. — fiunt — Lucr. aur.
500. 3000. — 300? — 1800. Secundi.
200? — 1200. Tertij.

Secundi ergo tempus per suam pecuniam multiplicatum facit 1800. Tertij vero 1200. Quare si 1800. diuidamus per 700. hoc est, per pecuniam secundi, inuenietur menses $2\frac{4}{7}$. quibus à secundo expositi sunt ad lucrum 700. aurei. Item si 1200. partiamur per 800. id est, per pecuniam tertij, reperiemus menses $1\frac{1}{2}$. pro tertio.

Hoc ita esse experieris, si ita consortium proponas. Tres, inito consortio, lucrati sunr 1000. aur. Primus posuit 300. aur. per 10. menses: secundus 700. aur. per menses $2\frac{4}{7}$. tertius denique 800. aur. per $1\frac{1}{2}$. menses. Quantum ergo quisq; pro rata pecuniæ suæ, ac temporis portione ex lucro accipiet? Si cuiusque pecunia per suum tempus multiplicetur, faciemus ex pecnnia primi in suum tempus 3000. ex pecunia secundi in suum tempus, 1800. ex pecunia tertij in suum tempus, 1200. Hi autem tres producti faciunt summam 6000. Sic ergo stabit exemplum.

Lucr. aur. — Lucr. aur. — fiunt — Lucr. aur.
6000. 1000. — 3000? — 500. primi.
1800? — 300. secund.
1200? — 100. tertij.

Vbi vides prodijsse lucra singulorum, sicut in quæstione proponebantur. Recte ergo tempora duorum posteriorum explorata sunt.

6 Quatuor societatem inierunt biennio duraturam, lucratique sunt 10000. aur. Primus in initio societatis attulit 3000. aur. & post menses octauum transactum abstulit ex illis 1000. aureos. vicesimo deinde mense inchoante exposuit rursum 1200. aur. Secundus à principio dedit 2400. aur. & post 6. menses elapsos abstulit 800. aur. sed ad initium mensis 16. denuo protulit 1400. aur. Tertius sub initium consortij exhibuit 2000. aur. transactisque 7. mensibus, totam pecuniam suam repetijt: sed mense 18. incipiente, iterum posuit 1600. aur. Quartus denique inchoante 7. mense exposuit 1800. aur. & post 4. menses finitos recepit 900. aur. sed ad initium mensis 17. rursus contulit 1500. aur. Quantum ergo quilibet ex communi lucro pro ratione suæ pecuniæ, ac temporis recipiet? Hic diligenter explorandum est, quantam quisque pecuniam, & quanto tempore exposuerit, vt semper pecuniam per tempus multiplicemus, &c. Quod vt planius fiat, exemplum propositum ita explicabimus. *Quæst. 6.*

Quoniam primus in principio consortij dedit 3000. aur. recepitque 1000. post 8. menses exactos, manifestum est eum in communi negotiatione exposuisse 3000. aur. per 8. menses. Multiplicantes ergo 3000. per 8. faciemus 24000. Et quia post 8. menses elapsos abstulit 1000. aur. certum est remansisse in communi consortio 2000. aur. vsque ad finem 19. mensis, vbi nouam pecuniam contulit. Auferentes igitur 8. menses ex 19. remanent 11. menses, quibus exposuit tantum 2000. aur. & multiplicantes 2000. per 11. faciemus 22000. Post hæc, quoniam denuo attulit 1200. aur. ad initium 20. mensis vsque ad finem secundi anni, liquet, si addamus hos 1200. aur. ad 2000. aur. eum in communi negotiatione per 5. reliquos menses duorum annorum, habuisse 3200. aur. Multiplicantes ergo 3200. per 5 faciemus 16000. Colligentes iam tres hosce productos 24000. 22000. 16000. in vnam summam, efficiemus 62000. qui numerus erit positio primi, productus ex pecunijs, & temporibus ipsius.

Rursus

Rursus, quoniam secundus per 6. menses imposuit 2400. aur. propterea quòd elapso 6. mense, abstulit 800 aur. multiplicabimus 2400. per 6. faciemusque 14400. Quia vero ad principium 16. mensis nouam pecuniam dicitur exhibuisse, perspicuum est, eum per 9. menses à principio 7. mensis vsque ad finem 15. habuisse in consortio communi 1600. aur. qui relinquuntur, subtractis 800. ex 2400. Multiplicantes igitur 1600. per 9. faciemus similiter 14400. Deinde, quia dicitur ad initium 16. mensis iterum posuisse 1400. aur. manifestum est, hanc pecuniam expositam esse per reliquos 9. menses duorum annorum, quibus si addantur aurei 1600. qui adhuc in communi negotiatione exponuntur, fient aurei 3000. qui per 9. illos vltimos menses in communi vsu fuerunt. Multiplicantes ergo 3000. per 9. faciemus 27000. Collectis autem tribus hisce productis 14400. 14400. 27000. in vnam summam, efficiemus 55800. pro numero secundi producto ex pecuniis, & temporibus ipsius.

Post hæc, cum tertius per 7. menses contulerit 2000. aur. quod eos repetierit post 7. menses elapsos; multiplicabimus 2000. per 7. efficiemusque 14000. Sed quia ad principium 18. mensis denuo exhibuit 1600. aur. multiplicabimus 1600. per 7. (tot enim menses ex duobus annis supersunt) faciemusque 11200. Collectis autem duobus hisce productis 14000. 11200. in vnam summam, procreabimus 25200. numerum ex pecuniis, ac temporibus tertii mercatoris productum.

Quia tandem quartus à principio 7. mensis per 4. menses posuit 1800. aur. multiplicabimus 1800. per 4. efficiemusque 7200. Sed quia, finitis 4. mensibus, recepit 900. aur. relicti sunt 900. aurei, qui fuerunt in negotiatione per 6. menses à principio 11. mensis vsque ad finem 16. mensis, quando nouam pecuniam attulit. Multiplicantes ergo 900 per 6. faciemus 5400. Quoniam vero sub principium 17. mensis posuit iterum 1500. aur. vsque ad finem duorum annorum, additis 900. aur. qui adhuc in communi vsu sunt, fient 2400. Multiplicantes ergo 2400. per 8. menses residuos, faciemus 19200. Collectis autem tribus hisce productis 7200. 5400. 19200. in vnam summam, efficiemus 31800. pro numero ex pecunijs, temporibusque quarti mercatoris procreato.

Iam vero colligentes hos quatuor numeros 62000. 55800. 25200. 31800. qui ex singulorum pecunijs, ac temporibus producti sunt, in vnam summam faciemus 174800. pro primo numero regulæ trium. In secundo autem loco erit lucrum commune, & in tertio numerus ex pecunijs, & temporibus cuiusque procreatus, vt in 4. quæstione dictum est. Ita ergo stabit exemplum.

174800.	10000.	62000?	fiunt	$3546\frac{1575}{1748}$. primi.
		55800?		$3192\frac{184}{1748}$. secundi.
		25200?		$1441\frac{1422}{1748}$. tertij.
		31800?		$1819\frac{428}{1748}$. quarti.

Quæst. 7. 7. Tres ineunt societatem. Primus confert 400. aur. Secundus 300. aur. & 86. baioch. Tertius 1000. aur. Iul. 7. baioch. 9. In ipsa autem negotiatione vsi sunt fortuna aduersa, iacturamq; fecerunt de tota summa 100. aureorum. Quantum ergo cuiuslibet damnum? Reductis omnibus ad baiochos, fient pro primo 40000. baiochi: pro secundo 30086. pro tertio vero 100079. quorum omniũ summa est 170165. Ita ergo stabit exemplum.

	Baioch.		Damn. baioc.
Si	170165.	dant	10000.
Quid	40000?	fiunt	$2350\frac{1175}{1701}$.
	30086?		$1768\frac{884}{1701}$.
	100079?		$5881\frac{4705}{1701}$.

Quæst. 8. 8. Tres societatem inierunt. Primus attulit 200. aur. eosque in societate reliquit 12. mensibus. Secundus contribuit 240. aur. Tertius aureum torquem, cuius pretium repetijt, post decem menses elapsos. Lucrum acquisitum fuit 138. aureorum. Facta autem debita distributione, primus habuit 60. aur. secundus 48. & tertius 30. Quot ergo mensibus reliquit secundus pecuniam collocatam in consortio, & quanti torques aureus æstimatus, vt dictæ portiones lucri cuilibet deberentur? Quoniam pecunia cuiusque per suum tempus multiplicari debet, multiplicabimus 200. aur. primi per 12. menses, faciemusque 2400. atque ex hoc numero illi prouenerunt 60. aur. Dic ergo, vt scias, ex quo secundus lucrum 48. aureorum acquisierit: Si 60. aur. prouenerunt 2400. ex quo prouenerunt aurei 48? vt hic vides.

60. 2400. 48? fiunt 1920.

Inueniesque 1920. qui numerus productus est ex 240. aur. secundi in suum tempus. Diuiso igitur numero dicto 1920. per 240. prodibunt menses 8. quibus pecunia secundi in negotiatione mansit. Rursus, vt scias, ex quo tertius lucrum 30. aureorum adeptus sit, dic. Si lucrum primi 60. aur. prouenit ex 2400. ex quo oritur lucrum tertij 30. aur? Vel si lucrum secundi 48. aur. ortum est ex 1920. ex quo proueniet lucrum tertij 30. aur? vt hic cernis.

60.	2400.	30?	fiunt	1200.
48.	1920.	30?	fiunt	1200.

Semper enim inuenies numerum 1200. qui productus est ex 10. mensibus tertij in suam pecuniam, hoc est, in pretium torquis. Diuiso ergo hoc numero 1200. per 10. menses, prodibit valor torquis aureorum 120. quos tertius ad negotiationem per 10. menses attulit.

Rem ita se habere, cognosces, si ita proponas sodalitatem. Tres, consortio inito, lucrati sunt 138. aur. Primus contulit 200. aur. per 12. menses: secundus 240. aur. per 8. menses: & tertius 120. aur. per 10. menses.

Quan-

Quantum ergo cuilibet de lucro debetur? Multiplicata enim pecunia cuiusque per suum tempus, inuenies lucra singulorum, quemadmodum in quæstione dictum est, vt hic apparet.

				Lucr. aur.
Lucr.	aur.	2400?	fiunt	60. primi.
5520.	138.	1920?		48. secund.
		1200?		30. tertij.

Quæst. 9. 9. Tres, inito consortio per annum duraturo, lucrati sunt summam quandam aureorum. Primus exposuit statim ab initio 1000. aur. secundus vero aureos, nescio quot, cõtulit post 2. menses exactos. Tertius demũ post 4. menses à secundo contribuit etiam multitudinem aureorum mihi ignotam. Finita tamen societate, lucrum participarunt æqualiter. Quid ergo secundus & tertius in eam societatem contulerunt? Multiplicando 1000. aur. primi per 12. menses, quibus eos in sodalitate reliquit, fient 12000. Ac tantundem debet fieri ex pecunia secundi in suum tempus, atque ex pecunia tertij in suum tempus; quandoquidem æqualia lucra habere debent. Quoniam vero secundus pecuniam suam 10. mensibus reliquit in negotiatione, si partiamur 12000. per 10. inueniemus pecuniam secundi fuisse 1200. aur. at si diuidamus per 6. menses, quibus tertius suam pecuniam exposuit, deprehendemus pecuniam tertij fuisse 2000. aur. Nam hac ratione ex pecunia cuiusque in suum tempus producetur numerus 12000. qui tertium locum in regula trium occupabit, ac proinde æqualia lucra omnes tres habebunt, quodcunq; fuerit lucrum illud commune. Si enim lucrum commune fuisset 900. aur. & tres hi numeri 12000. 12000. 12000. qui ex singulorum pecunijs in sua tempora sunt producti, in vnam summam colligerentur, ita starct exemplum.

36000.	900.	12000?	fiunt	300.
		12000?		300.
		12000?		300.

Quæst. 10. 10. Tres in communi negotiatione lucrati sunt 190. aur. quos ita distribuerunt, vt portio primi tripla esset portionis secundi, & quadrupla portionis tertij. Primus autẽ contulit per 12. menses 80. aur. Secundus suam pecuniam exposuit per 8. menses, & tertius per 4. Quantum ergo quisque duorum posteriorum contulit in hanc societatem, & quid de lucro singuli acceperunt? Multiplica pecuniam primi, nempe 80. aur. per suum tempus, vt per 12. menses? faciesque 960. Huius numeri sume $\frac{1}{3}$. nimirum 320. Item $\frac{1}{4}$. nempe 240. Atque hi numeri sunt, qui produci debent ex pecunijs duorum posteriorum in sua tempora: quia hac ratione lucrum secundi erit $\frac{1}{3}$ lucri primi, & lucrum tertij erit $\frac{1}{4}$. eiusdem, quemadmodum & numerus 320. ex quo lucrum secundo oritur, est $\frac{1}{3}$. numeri 960. ex quo lucrum primi gignitur, & numerus 240. quod parit lucrum tertij, est $\frac{1}{4}$. eiusdem numeri 960. Si igitur partiamur 320. per 8. menses secundi, inueniemus 40. aur. quos secundus posuit: Si vero diuidamus 240. per 4. menses tertij, producentur 60. aur. pro tertio. Nam hac ratione pecuniæ singulorum per sua tempora multiplicatę producunt numeros. 960. 320. 240. quorum primus triplus est secundi, & quadruplus tertij. Ex quo fit, lucra easdem quoque proportiones habitura. Vt hic vides.

1520.	190.	960?	fiunt	120.	Lucra.
		320?		40.	
		240?		30.	

Quæst. 11. 11. Tres, inito consortio, contulerunt in communem negotiationem 1520. aur. lucratique sunt aur. 190. quos (habita ratione pecuniæ cuiusque quam posuit) ita partiti inter se sunt, vt primus haberet 120. secundus 40. Quid ergo tertius habuit, & quid quisque in societatem contulerũt? Si lucrum tam primi, quam secundi ex toto lucro demas, relinquetur lucrum tertij 30. aur. Cognitis autem singulorum lucris, dic. Si totum lucrum 190. aur. ortum est ex communi pecunia 1520. aur. ex quo prouenit lucrum primi 120. aur. & lucrum secundi 40. aur. & lucrum tertij 30. aur. Reperies enim primum attulisse 960. aur. secundum 320. & tertium 240. Vt hic vides.

190.	1520.	120?	fiunt	960. primi.
		40?		320. secundi.
		30?		240. tertij.

Examinabitur, si dicas. Si 1520. (quæ est summa pecuniarum, quas singuli contulerunt) lucrantur 190. quid lucrabuntur 960. 320. & 240? Inuenies enim lucra 120. 40. & 30.

Quæst. 12. 12. Tres, inita sodalitate, in negotiationem contuleruut 1520. aur. quibus lucrati sunt 190. aur. Primus, facta distributione, recepit 1080. aur. conflatos ex sua pecunia, quam posuit, & lucro, quod illi obtigit. Similiter secundus accepit 360. aur & tertius 270. Quantum ergo quisque posuit & quantum est lucratus? Facta vna summa ex pecunia, quam omnes posuerunt, & lucro communi, quæ est 1710. Dic. Si 1710. pecunia omnium, & lucrũ, prouenit ex 1520. pecunia omnium. ex quo proueniunt 1080. qui numerus continet & pecuniam primi, & lucrum? & ex quo orientur 360. quæ continent & pecuniam & lucrum secundi? & ex quo numerus 270. producetur continens & pecuniam, & lucrum tertij? Inuenies enim hoc modo pecunias, quas singuli posuerunt. vt hic manifestum est,

1710.	1520.	1080?	fiunt	960. Primi.
		360?		320. Secun.
		270?		240. Tertij.

Ablata autem pecunia cuiusq; ex numero, qui illi obtigit, relinquetur lucrum solum. Ita deprehendes lucrum primi esse aur. 120. secundi 40. & tertij 30.

Quæst. 13. 13 Duo in communi consortio lucrati sunt 200. aur. ex quibus primo obtigerunt 50. aur. secundus tamen duplo plus contulit, quam primus, & præterea 8. aur. Quantum ergo vterque exposuit? Quoniam primus lucratus est 50. aur. manifestum est, secundum, qui duplo plus posuit, lucratum esse 100. ac proinde reliquos 50. aur. qui ex toto lucro 200. aur. supersunt, esse lucrum 8. aureorũ, quos præterea secundus attulit. Vt ergo habeas pecuniã, quam vterq; posuit, dic. Si 50. aurei residui proueniunt ex 8. aur. quos secundus præterea contribuit, ex

quo

quo producentur 50.aur.quos primus lucratus est,& ex quo 100.aur.quos lucratus est secundus? Reperies enim hac ratione primum posuisse 8.aureos, & secundum 16. vt hic apparet.

50. 8. { 50? / 100? } fiunt { 8. / 16. }

Si igitur addas 8.ad 16 aur.secundi, facies 24.aur.quos secundus in eam sodalitatem contulit.

Examen huius rei erit,si 8.aur.& 24.quos ambo contribuerunt, in vnam summam colligas, quæ est 32. & dicas. Si 32.lucrati sunt 200.quid lucrabuntur 8.& quid 24? Deprehendes enim lucrum primi esse 50. aur.& secundi 150.vt hic vides.

32. 200. { 8? / 24? } fiunt { 50. / 150. }

Quæst. 14. 14. Duo contraxerunt societatem,quorum primus exposuit 120. aur. & secundus 180. Assumpserunt autem procuratorem ea conditione, vt ex lucro acciperet 10. pro 100. Lucrum vero fuit 1000. aur. Quid ergo debuit habere procurator, & quid vterque illorum? Dic. Si 100. dant 10. procuratori, quid dabunt 1000. inueniesque 100.aur.qui procuratori debentur in ratione 10.pro 100. Ablatis autem his 100.aur.ex toto lucro, hoc est,ex 1000.aur. remanent 900. aur. pro lucro amborum. Dic ergo. Si 300.aur. quos ambo posuerunt, lucrati sunt 900.aur. quid lucrabuntur aurei 120. & quid 180. veluti hic appositum est.

300. 900. { 120? / 180? } fiunt { 360. / 540. }

Quæst. 15. 15. Tres inierunt societatem,lucratique sunt 1520.aur.Primus contulit 1080.aur.& secundus 360.tertius autem tantam pecuniam exposuit, vt ei de lucro cederent 240.aur. Quid ergo hic tertius posuit, & quid duorum priorum quisque est lucratus? Subtrahe 240.aur. quos tertius lucratus est,à toto lucro 1520.aureorum. vt reliqui sint 1280.aur.pro lucro priorum duorum. Dic ergo. Si 1440. aur.quos primus & secundus exposuerunt, lucrantur 1280. aur. quid lucrabuntur 1080. aur. primi, & quid 360. aur.secundi? Inuenieſque lucrum primi esse 960. & secundi 320. vt hic cernis.

1440. 1280. { 1080? / 360? } fiunt { 960. / 320. }

Ita enim omnium lucra conficient 1520. aur. vt autem habeas pecuniam à tertio expositam, dic. Si lucrum priorum duorum 1280. aur. prouenit ex 1440.aur. quos in societatem attulerunt,ex quo proueniet lucrum tertii 240.aur.inuenieſque 270.aur.vt hic vides.

1280. 1440. 240? fiunt 270.

Quæst. 16. 16. Tres exposuerunt æquales pecuniæ summas,lucratique sunt 1000.aur.in vno anno.Primus reliquit suam pecuniam in consortio 7. mensibus: secundus suam repetiit post 6. menses: tertius autem suam vsque ad finem anni exposuit. Quid ergo quisque de lucro accipiet? Collectis omnibus mensibus quibus singuli suas pecunias exposuerunt,vt fiat summa 25.dic.Si 25.lucrantur 1000.quid lucrabuntur 7.menses,& quid 6.& quid 12. quemadmodum hic factum est.

25. 1000. { 7? / 6? / 12? } fiunt { 280. / 240. / 480. }

Verum hoc esse perspicuum est, cum omnium lucra efficiant 1000. aur.quos quidem dicebantur esse lucrati.

Idem tamen hoc modo examinabis.Finge singulos exposuisse 100 aur. quos per tempus cuiusque multiplica,vt fiant 700. 600. 1200. Collectis autem hisce numeris in vnam summam, quæ est 2500.dic.Si 2500.lucrantur 1000. quid lucrabuntur 700.600.& 1200? Inuenies enim eadem lucra,quæ prius,vt hic apparet.

2500. 1000. { 700? / 600? / 1200? } fiunt { 280. / 240. / 480. }

Quæst. 17. 17. Quatuor simul lucrati sunt 340. aur.quos ita inter se,habita ratione pecuniarum collatarum, partiti sunt,vt quoties secundus habuit 5.toties tertius habuerit 9.quoties autem tertius habuit 7.toties quartus habuerit 11. quoties denique quartus habuit 9. toties primus habuerit 13. Primus autem contulit 286. aur. quid ergo alii tres exposuerunt, & quid singuli ex lucro reportarunt? Hic exprimuntur proportiones lucrorum, atque adeo pecuniarum, ex quibus lucra proueniunt. Sunt enim lucra pecuniis expositis proportionalia. Quoniã igitur primus toties habiturus est 13.quoties quartus 9. erit proportio pecuniarum expositarum eadem,quæ 13.ad 9. propterea quod idem numerus multiplicans 13. & 9. producit pecunias vtriusque cum toties in illa contineri debeant 13.quoties 9.in hac. Dic ergo. Si 13. dant 286. aur. quos primus posuit, quid dabunt 9. inueniesque 198. aur.pro collatione quarti, vt hic cernis.

13. 286. 9? fiunt 198.

Vbi vides,totics contineri 9.in 198. quoties 13.in 286.

Quoniam vero quartus dicitur habiturus toties 11. quoties tertius 7. erit proportio 198. nempe pecuniæ quarti,ad pecuniam tertii,quæ 11.ad 7. Dic ergo. Si 11.dant 198. quid 7.reperieſque collationem tertii 126.aur.vt hic constat.

11. 198. 7? fiunt 126.

Vbi etiam liquet,toties contineri 7.in 126. quoties 11. in 198.

Rursus quia tertius toties debet habere 9. quoties secundus 5. erit proportio 126. nimirum pecuniæ tertii, ad pecuniã secundi,quæ 9.ad 5. Dic ergo.Si 9.dant 126.quid 5?inueniesq; collationẽ secundi 70.aur.vt hic patet.

9. 126. 5? fiunt 70.

Vbi

Vbi etiam apparet, toties reperiri 5.in 70.quoties 9.in 126.

Habitis autem pecuniis, quas singuli contribuunt, inueniemus lucra eorum, sicuti in aliis societatibus. Collectis enim omnium pecuniis in summam 680.dicemus. Si 680.lucrantur 340.quid lucrabuntur 286.70. 126.198.quos primus,secundus, tertius, ac quartus posuit? veluti hic vides.

680. 340. { 286? / 70? / 126? / 198? } fiunt { 143.primi. / 35.secundi. / 63.tertii. / 99.quarti. }

Vbi quidem liquido cernis, omnia lucra facere 340.& toties contineri 13.in 143.quoties 9. in 99. & toties 5.in 35.quoties 9.in 63. Item toties 7.in 63.quoties 11.in 99.

Quæst. 18. 18. Tres partiri inter se volunt 760. aur. ea conditione, vt quoties primus habet 10. toties secundus habeat 7.& tertius 2. Quantum ergo singuli sunt accepturi? Iunge simul 10.7.& 2.vt habeas 19. Deinde dic.Si 19. dant 760. quid dabunt 10.7.& 2. veluti hic vides.

19. 760. { 10? / 7? / 2? } fiunt { 400. primi. / 280. secundi. / 80. tertii. }

Quæst. 19. 19. Quatuor partiri inter se volunt 785.aur. ea lege, vt quoties primus habet 10.toties secundus habeat 7. quoties autem secundus habet 14.toties tertius habeat 3.quoties deniq; tertius habet 12.toties quartus habeat 9. Quid ergo quisq; accipiet? Vt facilior reddatur operatio, incipiendum erit ab vltimo, nempe à quarto,qui ponatur habere semel 9. Habebit igitur tertius semel etiam 12. Quia vero quoties tertius habet 3.toties secundus habere debet 14.si diuidamus 12.numerum tertii,per 3.inueniemus Quotientẽ 4.qui indicabit in 12.quater contineri 3. Multiplicabimus igitur 14.per dictum Quotientem 4.vt inueniamus 56.numerum secundi, in quo toties 14.continentur; quoties 3.in 12.Et quoniam quoties secundus habet 7.toties primus habere debet 10.si partiamur 56. numerum secundi,per 7.inueniemus Quotientem 8.qui indicat, in 56.octies contineri 7. Multiplicabimus igitur 10.per Quotientem hunc 8.vt producatur numerus primi 80. in quo toties 10.continetur,quoties 7.in 56. Atq; ita partes numeri dati habere debent proportiones horum numerorum 80.56.12.9. Ita enim toties primus habebit 10 quoties secundus 7. Et toties secundus 14.quoties tertius 3.Et quoties tertius 12.toties quartus 9.Collectis igitur illis numeris in vnam summam,quæ erit 157.Dic.Si 157. dant 785.quid dabunt 80.56. 12.& 9? vt hic vides.

157. 785. { 80? / 56? / 12? / 9? } fiunt { 400.Primi. / 280.Secundi. / 60.Tertii. / 45.Quarti. }

Alio modo ita soluetur eadem quæstio proposita. Quoniam cum primus habet 10 secundus habet 7. Ponemus 10.pro primo & 7.pro secundo. Deinde, quia cum secundus habet 14 tertius habet 3.dicemus. Si 14.secundi sunt 7.quid erunt 3.tertii? Inueniemusq; $1\frac{1}{2}$.atq; talem proportionem habebit positio secundi ad positionem tertii, qualem 7.ad $1\frac{1}{2}$.hoc est,toties erunt 14.in 7.quoties 3.in $1\frac{1}{2}$. Rursus, quia cum tertius habet 12.quartus habet 9.dicemus. Si 12.tertii sunt $1\frac{1}{2}$.quid erunt 9.quarti? inueniemusq; $1\frac{1}{8}$.atq; talem proportionẽ habebit positio tertii ad positionem quarti,qualem $1\frac{1}{2}$.ad $1\frac{1}{8}$.hoc est,totics erunt 12 in $1\frac{1}{2}$.quoties 9.in $1\frac{1}{8}$. Collectis iam his numeris 10.7.$1\frac{1}{2}$.$1\frac{1}{8}$. in vnam summam, efficiemus $19\frac{5}{8}$. Quare dicemus. Si $19\frac{5}{8}$ dant 785.quid dabunt 10.7. $1\frac{1}{2}$.& $1\frac{1}{8}$. vt hic vides.

$19\frac{5}{8}$. 785. { 10? / 7? / $1\frac{1}{2}$? / $1\frac{1}{8}$? } fiunt { 400. primi. / 280. secundi. / 60.tertii. / 45. quarti. }

Quæst. 20. 20. Quatuor duces,sex signiferi,& 100. milites in direptione cuiusdam vrbis irruerunt in domum quãdam,vbi repererunt 72400.aur. quos inter se ita partiti sunt, vt quoties quilibet dux acceperit 8. toties quilibet signifer acceperit 5.& quilibet miles 3. Quid ergo cuilibet ex illa præda obuenit? Multiplica numerum ducum, id est 4.per 8.nempe per numerum,quem toties quilibet dux debet habere, quoties alii 5.& 3.efficiesque 32. Similiter multiplica 6.numerum signiferorum per 5.& 100.numerum militum per 3.efficiesque30.& 300. Iunctis simul tribus his numeris 32.30.300.vt fiant362.Dic.Si 362.dant 72400.quid dabunt 32.30.& 300.vt hic vides.

362.72400. { 32? / 30? / 300? } fiunt { 6400. / 6000. / 60000. }

Itaque quatuor duces acceperunt ex illa præda 6400. aur.at 6. signiferi 6000. & 100. milites 60000. qui omnes conficiunt summam aureorum inuentam 72400.Iam vero si partiamur aureos ducum 6400. per 4. numerum ducum,reperiemus quemlibet habuisse 1600. aur. Item si aureos signiferorum diuidamus per 6. deprehendemus cuilibet obtigisse1000.aur. Si denique aureos militum per 100.distribuamus, inueniemus singulos accepisse 600.aur. vbi manifeste vides, toties 8.contineri in 1600. quoties 5.in 1000.& 3.in 600.nimirum ducenties.

Quæst. 21. 21. Quidam extremum spiritum agens,cui filia erat, & filius,qui in bello dicebatur occubuisse, ita hæreditatem 18088. aureorum distribuendam inter vxorem.& filiam reliquit,vt vxor haberet $\frac{2}{3}$.filia autem $\frac{1}{3}$.sed si forte filius rediret, vt filius $\frac{2}{3}$.haberet. Accidit autem, vt filius reuerteretur. Qua igitur ratione dicta hæreditas diuidenda est,vt voluntati testatoris satisfiat? Certum est,quæstionem hanc non posse intelligi,vt verba sonant. Nam si filius accipiat $\frac{2}{3}$.non poterit vxor habere $\frac{2}{3}$.& filia $\frac{1}{3}$. Quare omnes Arithmetici voluntatem testatoris

interpretã tur, vt voluerit, filium duplo plus debere habere, quam vxorem, & vxorem duplo plus, quam filiam. Id quod proportio harum minutiarum $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.$ quæ dupla est, (continet enim minutia $\frac{1}{2}$. minutiam $\frac{1}{3}$. bis.) indicare videtur. Itaque numerus 18088. secandus est in tres partes, ita vt prima contineat secundam bis, & secunda tertiam etiam bis, hoc est, quæ habeant continuam proportionem duplam, quod hoc modo fiet. Pone tertiam esse 1. Erit ergo secunda 2. & prima 4. quæ omnes faciunt 7. Dic igitur. Si 7. dant 18088. quid dabunt 4.2.& 1? vt hic vides.

7. 18088. { 4? 2? 1? } fiunt { 10336. filii. 5168. vxoris. 2584. filiæ.

Quæst. 22. 22. Tres crumenã inuenerunt cum 3042. aur, quos ita inter se distribuerunt. Primus accepit $\frac{1}{2}$. secundus $\frac{1}{3}$. & tertius $\frac{1}{4}$. Quid ergo quisque accepit? Hic etiam perspicuum est, quæstionem non posse intelligi, vt sonat. Si namque primus accepisset $\frac{1}{2}$. secundus $\frac{1}{3}$. non potuisset tertius accipere $\frac{1}{4}$. Nam hæ tres minutiæ efficiunt plus, quam integrum, nempe $\frac{1}{12}$. Quare sensus est, vt datus numerus distribuatur in tres partes, quæ easdem proportiones inter se habeant, has quæ minutiæ $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}$. Quod vt fiat inueniatur numerus à denominatoribus numeratus. Minimus autem hic numerus est 12. inuentus per ea, quæ cap. 10. scripsimus. Ex hoc numero cape $\frac{1}{2}$. nempe 6. Item $\frac{1}{3}$. nempe 4. Item $\frac{1}{4}$. nempe 3. quas partes simul adde, vt habeas 13. Dic ergo. Si 13. dant 3042. quid dabunt 6.4.& 3? vt hiç cernis.

13. 3042. { 6? 4? 3? } fiunt { 1404. primi. 936. secundi. 702. tertii.

Examen ita fiet. Reduc datas minutias ad eandem denominationem, vt ad $\frac{6}{12}.\frac{4}{12}.\frac{3}{12}$. Habebunt enim hæ minutiæ easdem proportiones, quas numeratores habent. Easdem autem habent tres numeri inuenti 1404. 936 702. vt apparet.

Quæst. 23. 23. Tres inuento loculo cum 1407. aur. ita distributionem fecerunt: primus accepit $\frac{1}{2}$. secundus $\frac{1}{3}$. tertius $\frac{1}{11}$. quid ergo quisque accepit? Hic etiam sensus est, vt datus numerus in tres partes secetur datis minutiis proportionales: alias impossibilis quæstio foret. Inuento igitur, ex cap. 10. minimo numero 110. dictas minutias continente, sume eius dimidium 55. & tres quintas 66. & octauo vndecimas 80. easque in vnam summam 201. collige, ac dic. Si 201. dant 1407. quid dabunt 55.66.& 80? vt hic apparet.

201. 1407. { 55? 66? 80? } fiunt { 385. primi. 462. secundi. 560. tertii.

Examen fiet, vt in antecedente quæstione. Reductis enim datis minutiis ad eandem denominationem, vt ad $\frac{55}{110}.\frac{66}{110}.\frac{80}{110}$. habebunt tres numeri inuenti easdem proportiones; quas hæ minutiæ, nempe earum numeratores, habent, vt constat.

Quæst. 24. 24. Quatuor partiri inter se volunt 396 aur. ita vt primus habeat $\frac{1}{2}$. & præterea 10. secundus $\frac{1}{3}$. minus 20. tertius $\frac{1}{4}$. & præterea 8. quartus denique $\frac{1}{5}$. minus 6. quantum ergo quisque accipiet? In huiusmodi quæstionibus aufer ex tota summa numeros, qui accipi debent vltra partes dictas, & alios, qui deesse debent dictis partibus, ad eandem summam adiice. Vt hic aufer 10.& 8. vt remaneant 378. adde rursus 20.& 6. fiunt 404. Deinde inuento minimo numero 60. continente datas minutias, cuius $\frac{1}{2}$. est 30.& $\frac{1}{3}$ 36. & $\frac{1}{4}$.20. & $\frac{1}{5}$.15. quæ omnes faciunt 101. Dic ergo. Si 101. dant 404 (qui numerus productus est ex additione & subtractione datorum numerorum ex tota summa 396.) quid dabunt 30.36.20.& 15? vt hic vides.

101. 404. { 30? 36? 20? 15? } fiunt { 120. primi. 144. secundi. 80. tertii. 60. quarti.

Quatuor igitur hi numeri inuenti proportiones habent easdem, quas datæ minutiæ, sed in vnam summam collecti faciunt 404. non autem 396. vt quæstio proponit. Quod si primo addas 10. vt fiant 130. & à secundo auferas 20. vt relinquantur 124. tertio item adiicias 8. vt fiant 88. & à quarto demum auferas 6. vt remaneant 54. efficient hi quatuor numeri 396. Vt autem habeant dictas proportiones, auferendi erunt prius numeri, & addendi, qui additi sunt, & subtracti: Ita vt vere 130. ad 124. proportionem habeant, quam $\frac{1}{2}$. ad $\frac{1}{3}$. si prius 10. detrahantur ex illo, & huic adiiciantur 20. vt recte dicatur numerus 130. continere $\frac{1}{2}$.& præterea 10. numerus vero 124. continere $\frac{1}{3}$. minus 20,&c.

Quæst. 25. 25. Est cisterna habens in imo fundo tres fistulas inæquales: maxima referata, effluit tota aqua in 2. horis; media autem aperta, effluit tota in 3. horis; minima denique aperta effluit tota aqua in 6. horis. Quanto ergo tempore reseratis omnibus tribus fistulis, tota aqua effluet, si per singulas fistulas à principio vsque ad finem aqua semper eodem modo effluat? Sumpto minimo numero, quem tempora in quæstione expressa, nempe horæ 2.3.& 6. metiantur, qui hic est 6. dic. Si maxima fistula in 2. horis vnam cisternam exhaurit, quot cisternas in 6. horis exhauriet? inuenies que 3. Item si media fistula vnam cisternam exhaurit in 3. horis, quot cisternas in 6 horis exhauriet? inuenies que 2. Item si minima fistula in 6. horis vnam cisternam exhaurit quot cisternas exhauriet in 6. horis? inuenies que 1. vt hic vides.

Horæ.	Cisterna.	Horæ.	Cisternæ.
2. 3. 6.	1.	6?	3. 2. 1.

Colle-

Collectis iam in vnum his tribus inuentis numeris 3.2.1. vt fiãt 6. dic, Si sex cisternæ euacuãtur in 6. horis, quanto tempore 1. euacuabitur? inuenies que in vna hora. Id quod hac ratione examinabis. Simaxima fistula exhaurit totam cisternam in 2. horis, & media in 3. & minima in 6. quantam partem cisternæ exhaurient singulæ fistulæ in 1. hora? veluti hic appositum est.

Horæ.	Cisterna.	Hora.	Cisterna.
2. 3. 6.	1.	1?	$\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{6}$.

Inuenies enim maximam fistulam euacuare $\frac{1}{2}$. cisternæ, & mediam $\frac{1}{3}$ & minimam $\frac{1}{6}$. quæ omnes partes efficiunt vnam integram cisternam.

Eadem hæc quæstio ita proponi potest. Est cisterna habens in summitate tres fistulas inæquales: maxima replet cisternam in 2. duis horis, media in 3 & minima in 6. quanto ergo tempore omnes simul cisternam implebunt? Inuenies enim 1. horam.

Pari ratione ita potest proponi. Sunt tres artifices: primus absoluit opus quoddam in 2. annis, secundus in 3. & tertius in 6. quanto ergo tempore omnes simul idem opus perficient? Inuenies enim 1. annum. *Alia solutio huius quæstionis.*

Cæterum huiusmodi quæstiones solui etiam possunt hoc pacto. Inuestigetur per regulam trium, quantum aquæ singulæ fistulæ exhauriant in 1. hora, tresque numeri inuenti in vnam summam colligantur. Nam si hæc summa fuerit 1. requiritur 1. hora, vt omnes fistulæ totam cisternam euacuent: si vero non fuerit 1. inuenietur tempus requisitum per regulam trium, vt in hoc exemplo erit manifestum. Sunt tres artifices: primus absoluit opus quoddam in 6. annis, secundus in 9. & tertius in 18. Quanto ergo tempore omnes simul idem opus perficient? Dic Si primus in 6. annis absoluit 1. opus. & secundus in 9. & tertius in 18. quantum absoluet quilibet in 1. anno? vt hic vides.

Anni.	Opus.	Ann.	Operis.
6. 9. 18.	1.	1?	fiunt $\frac{1}{6}$. primi. $\frac{1}{9}$. secundi. $\frac{1}{18}$. tertii.

Efficiunt autem tres numeri inuenti $\frac{1}{3}$. Dic ergo Si $\frac{1}{3}$. operis requirit 1. annum, quot annos requiret 1. opus inueniesque 3. annos. Quod examinabis, vt supra, veluti hic vides.

Anni.	Opus.	Anni.	
6. 9. 18.	1.	3?	fiunt $\frac{1}{2}$. prim. $\frac{1}{3}$. secund. $\frac{1}{6}$. tert.

Inuenies enim primum in 3. annis absoluere $\frac{1}{2}$. operis secundum $\frac{1}{3}$. & tertium $\frac{1}{6}$. quæ omnes partes efficiunt. 1.

Si prius exemplum hac arte explicaretur, prima statim operatione scopus attingeretur: quia in 1. hora tota cisterna euacuatur, vt constat ex operatione examinis dicti exempli.

Quæst. 26. 26. Est cisterna habens fistulam in orificio, per quam impletur in 4. horis: habet autem in imo fundo aliam fistulam, per quam in 6. euacuatur. Si ergo continue influat aqua, & effluat, quanto tempore cisterna replebitur? Primum inuestigare oportet, quanta pars cisternæ (posita illa conditione) in 1. hora impleatur; quod hoc modo fiet: Si in quatuor horis 1 cisterna impletur, quantum implebitur in 1. hora? Inuenies autem $\frac{1}{4}$. cisternæ. Rursus. Si in 6. horis 1. cisterna exhauritur, quantum euacuabitur in 1. hora? Inuenies autem $\frac{1}{6}$. cisternæ. Si ergo auferas $\frac{1}{6}$. ex $\frac{1}{4}$. remanebit $\frac{1}{12}$. cisternæ: ac tanta portio cisternæ implebitur in 1. hora. Dic ergo. Si $\frac{1}{12}$. cisternæ requirit vnam horã, quid requiret 1. cisterna? Inuenieque 12. horas. Atque in tot horis cisterna tota implebitur. Quod hac ratione examinabis verũ esse. Si in 4. horis impletur 1. cisterna, in 12. horis quot cisternæ implebuntur? Inuenies autem 3. cisternas. Item si in 6. horis euacuatur 1. cisterna, in 12. quot cisternæ euacuabuntur? Inuenies auten 2. cisternas, quas si auferas ex 3. inuentis, remanebit 1. cisterna plena.

Quod si quis dicat: Cisterna per fistulam superiorem impletur in 3. horis, per inferiorem euacuatur in 8. hor. eodem modo soluetur quæstio, si dicas. Si in 3. horis 1. cisterna impletur, quantum implebitur in 1. hora? Inuenies autem $\frac{1}{3}$. cisternæ. Item si in 8. horis vna cisterna euacuatur, quantum euacuabitur in 1. hora? Inuenies autem $\frac{1}{8}$. cisternæ. Si ergo demas $\frac{1}{8}$. ex $\frac{1}{3}$. remanebunt $\frac{5}{24}$. ac tanta portio cisternæ implebitur in 1. hora. Dic ergo. Si $\frac{5}{24}$. cisternæ requirunt 1. horã, quid requiret 1. cisterna? Inuenieque $4\frac{4}{5}$. hor. quo tempore tota cisterna implebitur. Quod ita probabis. Si in 3. hor. impletur 1. cisterna, in $4\frac{4}{5}$. hor. quot cisternæ replebuntur? Inuenies autẽ $4\frac{4}{5}$. si item in 8. horis euacuatur vna cisterna, in $4\frac{4}{5}$. hor. quot cisternæ euacuabuntur? Inuenies autem $\frac{4}{5}$. quas si ex $1\frac{1}{5}$. auferas, remanebit 1 cisterna plena. *Alia solutio huius quæstionis.*

Breuius fortassis huiusmodi quæstiones soluentur, si quæratur, quanta portio cisternæ impleatur in illis horis, in quib. tota impleretur, si nihil efflueret. Quod ita fiet in priori quæstione. Dic. Si 6. horæ 1. cisternã euacuant, quantum euacuabunt 4 horæ? inuenieque $\frac{4}{6}$. quas si ex 1, auferas (ponimus enim 1. cisternam 4. horis impleri, si nihil efflueret) remanebit $\frac{2}{6}$. quæ 4. horis implebitur. Dic igitur rursus. Si $\frac{2}{6}$. cisternæ requirit 4. horas, quid requiret 1. cisterna? Inuenieque 12. horas, vt prius.

In posteriori vero quæstione dic. Si 8. horæ 1. cisternam euacuant, quantum exhaurient 3. horæ? Inuenieque $\frac{3}{8}$. quas si demas ex 1. (ponimus enim 1. cisternam 3. horis impleri, si nihil efflueret) remanebunt $\frac{5}{8}$. quæ 3. horis implebuntur. Dic ergo rursus. Si $\frac{5}{8}$. cisternæ expoſcunt 3. horas, quid expoſcet 1. cisterna? inuenieque $4\frac{4}{5}$. horas, vt prius.

REGVLA ALLIGATIONIS.

CAPVT XXI.

Regula alligationis quid.

SOLENT nonnunquam Arithmetici varias merces variorum pretiorum miscere, ita vt, statuto quodam pretio medio, omnes eo emantur: quod quidem efficiunt regula quadam, quam regulam alligationis dicunt, eo quod variæ merces alligentur quodammodo ad vnum pretium, vt ex sequentibus exemplis perspicuum fiet.

Quæst. 1.

1. Duo genera vini sunt: mensura 1. primi constat 20. baioch. at mensura 1. secundi venditur 12. baioch. Quantum ergo ex vtroq; sumendum est, vt mensura 1. valeat 15. baioch? Pone vnum pretium sub altero, & ad sinistram illorum colloca pretium statutum, quod medium est inter data duo pretia. Deinde confer vtrunq; pretium datum cum statuto pretio, differentiamque vtriusque pone ad dexteram pretiorum, alternatim tamen, hoc est, differentiam maioris pretii iuxta minus pretium, & differentiam minoris iuxta maius: atq; has differentias in vnam summam collige, vt in exemplo vides.

Regula alligationis quomodo fiat.

Pretium medium.	Pretia.	Differentiæ.
	20.	3.
15.		
	12.	5.
		8.
		Summa differentiarum.

Post hæc instituę regulam trium bis, ita vt summa differentiarum primum locum occupet; mensura vero 1. secundum; & vtraq; differentia tertium, veluti hic cernis.

8. 1. { 3? / 5? } fiunt { 3/8 primi. / 5/8 secundi. }

Dic ergo. Si summa differentiarum 8. dat 1. mensuram, quid dabunt singulæ differentiæ 3. & 5? Inuenies enim ex primo vino accipiendas esse 3/8 vnius mensuræ, ex secundo vero 5/8. atq; ita fiet 1. mensura ex vtroq; constans 15. baiochis. Quod ita probabis. Dic. Si 1. mensura primi vini valet 20. baioch. quid valebunt 3/8? Item, si 1. mensura secundi vini valet 12. baioch. quid valebunt 5/8? vt hic cernis.

1. 20. 3/8 fiunt 7 1/2.
1. 12. 5/8 fiunt 7 1/2.

Inuenies enim duo pretia efficere 15. baiochos, quemadmodum proponitur.

Quæst. 2.

2. Sunt duo genera argenti non puri. Primi libra 1. valet aur. 30. alterius libra 1. valet aur. 24. Vt ergo lib. 1. valeat aur. 28. quantum ex vtroq; argento sumendum est? Facta alligatione, vt in præcedenti quæstione, dic. Si summa differentiarum 6. dat 1. lib. quid dabunt singulæ differentiæ 4. & 2. vt hic vides.

Pretium medium.	Pretia.	Differentiæ.
	30.	4.
28.		
	24.	2.
		6
		Summa differentiarum.

6. 1. { 4? / 2? } fiunt { 2/3 primi. / 1/3 secundi. }

Hoc enim modo habebis 1. lib. ex vtroq; argento constantem 28. aureis, vt examines, dic. Si 1. lib argenti prioris valet aur. 30. quid valebunt 2/3 vnius libræ? Item si 1. lib. posterioris argenti valet 24. aur. quid valebit 1/3? vt hic apparet.

1. 30. 2/3? fiunt 20.
1. 24. 1/3? fiunt 8.

Atque ita 1. lib. constabit 28. aur. vt proponitur.

Quæst. 3.

Nota.

3. Libra 1. piperis valet 4. Iul. Libra 1. garyophilli 3. Iul. Libra 1. cinnamomi 6. Iul. Libra 1. croci 10. Iul: Libra 1. zingiberis 8. Iul. Quantum ergo ex quolibet accipiendum est, vt 1. libra constet 7. Iuliis? Quando plures res proponuntur alligandæ, variis modis fieri potest alligatio, dummodo qualibet semel saltem alligetur. Potest n. quodlibet pretiũ cum quolibet alio, vel cum pluribus etiam alligari ad pretium medium, ita tamen, vt statutum pretium sit medium inter duo, quæ alligantur ad ipsum, vel certe alteri illorum æquale: vt in hoc exemplo apparebit, quod variis alligationibus explicabimus.

Variis modis fieri posse alligationẽ eiusdem exempli.

Primo ergo alligabimus pretia piperis, & zingiberis ad pretium medium, quorum differentiæ sunt 3. & 1. alternatim collocatæ. Deinde pretia garyoph. & croci, quorum differentiæ sunt 4. & 3. alternatim quoq; positæ. Denique quia superest solum cinnam. alligabimus eius pretium cum pretio Zingib. exempli gratia, quorum differentiæ sunt 1. & 1. alternatim etiam scriptæ. Omnium differentiarum summa est 13. Differentiæ autem è regione Zingib. faciunt 4. Semper enim differentiæ plures è regione eiusdem pretii positæ colligendæ sunt in vnam summam. Dic iam. Si summa differentiarum 13. dat 1. lib. quid dabunt singulæ differentiæ 1. 3. 1. 4. 4? vt hic vides.

Quid faciendũ, quãdo plures differentiæ ponuntur è regione eiusdem pretij.

Pretium medium.	Pretia.	Differentiæ.
	Piper.	4. 1.
	Garyoph.	3. 3.
7.	Cinnam.	6. 1.
	Crocus.	10. 4.
	Zingib.	8. 3. 1.
		13.
		Summa differentiarum.

13. 1. { 1? / 3? / 1? / 4? / 4? } fiunt { 1/13. pip. / 3/13. garyoph. / 1/13. cinnam. / 4/13. croc. / 4/13. zingib. }

Hac ratione habebis 1. lib. ex omnibus, quæ constet 7. Iul. Vt examines, dic. Si 1. lib. piperis valet 4. Iul. quid valebit 1/13? Item, si 1. lib. garioph. valet 3. quid valebunt 3/13? Item, si 1. lib. cinnã. valet 6. Iul. q.d valebit 1/13? Item si 1. lib. croci valet 10. Iul. quid valebunt 4/13? Item si 1. lib. zingib. valet 8. Iul. quid valebunt 4/13? veluti hic cernis.

1. { 4. / 3. / 6. / 10. / 8. } quid { 1/13? / 3/13? / 1/13? / 4/13? / 4/13? } fiunt? { 1/13. pip. / 3/13. garyoph. / 1/13. cinnam. / 3 1/13. croc. / 2 6/13. zingib. }

Inuenies q; omnia pretia efficere 7. Iul. vt proponitur.

Alia alligatio huius 3. quæstionis.

Alio modo fiet alligatio, si pretia piperis, & zingib. alligentur ad pretium medium: Item pretia piperis, & croci. Deinde pretia garyoph. & zingib. & rursus pretia garyoph. & croci. Postremo pretia cinnam. & croci: Item pretia cinnam. & zingib. vt in hoc appositio exemplo factum est. Neque vero plures alligationes fieri possunt in hoc exemplo. Nam pretia piperis, garyoph. & cinnam. inter se alligari non possunt, cum singula minora sint statuto pretio medio: atq; ita quodlibet illorum bis tantum alligari potest; posteriorum autem duorum vtrumque ter, nempe cum quolibet trium priorum. At inter se alligari nequeunt, cum statutum pretium 7. Iuliorum non sit medium inter illa, aut alteri eorum æquale, sed vtroque minus. Dic ergo. Si summa differentiarum 28. dat 1. lib. quid dabunt singulæ differentiæ 4. 4. 4. 8. & 8. vt hic cernis.

Pretium medium.	Pretia.	Differentiæ.
	Piper.	4. 1. 3.
	Garyoph.	3. 1. 3.
7.	Cinnam.	6. 3. 1.
	Crocus.	10. 3. 4. 1.
	Zingib.	8. 3. 4. 1.
		28.
		Summa differentiarum.

28. 1. { 4? / 4? / 4? / 8? / 8? } fiunt { 4/28. pip. / 4/28. garyoph. / 4/28. cinnam. / 8/28. croc. / 8/28. zingib. }

Ita enim conflabis 1. librã ex omnibus, quæ constet 7. Iuliis. Quod vt probes, dic. Si 1. lib. pip. valet 4. Iul. quid valebunt 4/28? Item, Si 1. lib. garyoph. valet 3. Iul. quid valebunt 4/28? &c. veluti hic factum esse vides.

1. { 4. / 3. / 6. / 10. / 8. } quid { 4/28? / 4/28? / 4/28? / 8/28? / 8/28? } fiunt { 6/28. pip. / 12/28. garyoph. / 4/28. cinnam. / 2 4/28. croc. / 2 8/28. zingib. }

Alia alligatio huius 3. quæstionis.

Inuenies enim omnia pretia conficere 7. Iuliios, quemadmodum in quæstione proponitur.

Potest etiam alia ratione institui alligatio huius eiusdem exempli, si pretia piperis, & croci alligentur; Deinde pretia garyoph. & zingib. ac postremo pretia cinnam. & zingib. vt in hoc exemplo videre licet. Dic ergo. Si summa differentiarum 13. dat 1. lib. quid dabunt singulæ differentiæ 3. 1. 1. 3. & 5? quemadmodum hic vides.

Pretium medium.	Pretia.	Differentiæ.
	Piper.	4. 3.
	Garyoph.	3. 1.
7.	Cinnam.	6. 1.
	Crocus	10. 3.
	Zingib.	8. 4. 1.
		13.
		Summa differentiarum.

13. 1. { 3? / 1? / 1? / 3? / 5? } fiunt { 3/13. pip. / 1/13. garyoph. / 1/13. cinnam. / 3/13. croc. / 5/13. zingib. }

Sic enim habebis 1. lib. ex omnibus pro 7. Iuliis. Quod probabis, vt supra.

Quid obseruandũ sit in alligationibus pluriũ rerum.

Vides igitur, variis modis fieri posse alligationem, si res alligandæ plures sint, quam duæ; dummodo pretium medium semper minus sit vno pretio alligando, & maius altero? vel æquale vni, & maius vel minus altero. Verum licet ex variis alligationibus semper habeas pondus rerum miscendarum propositum pro pretio medio statuto, non tamen eadem semper pondera ex rebus miscendis accipies, vt ex propositis exemplis perspicuũ est.

Quæst. 4. Quando quæstio alligationis est impossibilis.

4. Vlna 1. panni rubri valet 4. aur. & vlna 1. panni viridis valet 6. aur. & vlna 1. panni nigri valet 10. aur. Vult quidam ex omnibus 80. vlnas pro 480. aureis, quantum ergo ex singulis pannis accipiet? In huiusmodi quæstionibus oportet prius inuestigare pretium vnius vlnæ ex omnibus pannis mixtæ, quod ita fiet, in nostro exemplo. Si 80. vlnæ mixtæ valent 480. aur. quid valebit 1. vlna? inuenieſque 6. aur. quod est pretium 1. vlnæ medium inter pretium vilioris panni, & pretium carioris. Quod si reperiretur pretium non medium, impossibilis esset quæstio. Vt si diceret aliquis. Vult quidam ex omnibus pannis 80. vlnas pro 300. aur. vel pro 900. aur. impossibilis esset quæstio. Nam si 800. valent 300. aur. valebit 1. vlna 3 3/4. quod pretium minus est pretio vilioris panni. Quare

neque ex viliori panno habere poteſt quiſpiam 80.vlnas pro 300. aureis, tantum abeſt, vt ex omnibus vlnas 80. rurſus accipiat. Rurſus, ſi 80.vlnæ valent 900. aur. valebit 1.vlna $11\frac{1}{4}$. aur. quod pretium maius eſt pretio carioris panni. Quare plures vlnas carioris panni, quam 80. emet quiſpiam aureis 900. ac proinde multo plures, ſi ex omnibus aliquot vlnas accipere velit: Sed redeamus ad noſtrum exemplum.

Pretium medium.	Pretia.		Differentiæ.
	rub.	4.	4.
	6.virid.	6.	4.
	nig.	10.	2.0.
			10.
	Summa differentiarum.		

Inuento pretio medio vnius vlnæ, fiat alligatio vt in præcedentibus, quemadmodũ hic eſt factum. Primum enim alligauimus pretia 4. & 10. ad medium pretium 6. Deinde pretia 6. & 10. Dic igitur. Si ſumma differentiarum 10. dat 80. vlnas, (tot enim vlnas accipere vult ex triplici panno) quid dabunt ſingulæ differentiæ 4. 4. & 2? vt hic factum eſt.

10. 80. { 4? 4? 2? } fiunt { 32. rubri. 32. viridis. 16. nigri.

Ita enim ex tribus illis pannis ſumentur 80. vlnæ pro 480. aut. Quod ita probabis. Si 1. vlna valet 6. aur. (hoc enim pretium medium inuentum eſt vnius vlnæ ex tribus pannis mixtæ.) quid valebunt 32. vlnæ panni rubri, & 32. viridis, & 16. nigri? veluti hic cernis.

1. 6. { 32? 32? 16? } fiunt { 192. rub. 192. virid. 96. nig.

Pretium medium.	Pretia.		Differentiæ.
	rub.	4.	4.0.
	6.virid.	6.	2.
	nig.	10.	2.
			8.
	Summa differentiarum.		

Reperieſq; omnia pretia conficere 480. aureos.

Quod ſi pretium panni viridis non alligaſſemus cum pretio panni nigri, ſed cum pretio panni rubri, fieret ſequens alligatio. Verum alios numeros inueniſſemus. Dixiſſemus enim. Si ſumma differentiarũ 8. dat 80. vlnas, quid dabunt ſingulæ differentiæ 4. 2. & 2? vt hic vides.

8. 80. { 4? 2? 2? } fiunt { 40. rub. 20. virid. 20. nig.

Examen fiet, vt prius, ſi dicas. Vlna 1. valet 6. aur. quid valebunt vlnæ 40. panni rubri, & 20. viridis, & 20. nigri? inuenies enim omnia pretia conficere 480. aureos.

Queſt. 5. 5. Sunt quatuor genera vini: primi amphora 1. valet 21. baioch. ſecundi 27. tertii 30. & quarti 40. Vult quidam miſcere ex his 300. amphoras, ealege, & conditione, vt ſingulæ amphoræ valeant 33. baioch. Quantum ergo ex quolibet accipiet? Hic neceſſario tria priora pretia cum poſteriori alliganda ſunt ad medium pretium 33. baioch. cum illa tria ſint hoc minora, vt in dato exemplo vides. Dic ergo. Si ſumma differentiarum 42. dat 300. amphoras quid dabunt ſingulæ differentiæ 7. 7. 7. & 21? vt patet in exemplo.

	Pretia.	Differentiæ.
	21.	7.
	27.	7.
33	30.	7.
	40.	12. 6. 3.
		42.
	Summa differentiarum.	

42. 300. { 7? 7? 7? 21? } fiunt { 50. primi. 50. ſecundi. 50. tertii. 150 quarti.

Sic enim conficies 300. amphoras, quarum ſingulæ conſtabunt 33. baioch. Quod vt probes, dic. Si ſumma differentiarum 42. dat 1. amphoram, quid dabunt ſingulæ differentiæ 7. 7. 7. & 21? vt hic vides.

42. 1. { 7? 7? 7? 21? } fiunt { $\frac{1}{6}$. primi. $\frac{1}{6}$. ſecundi. $\frac{1}{6}$. tertii. $\frac{1}{2}$. quarti.

Atque ita habebis vnam amphoram ex quadruplici illo vino mixtam. Dic ergo rurſus. Si 1. amphora vini primi valet 21. baioch. quid valebit $\frac{1}{6}$. amphoræ? Item ſi 1. amphora ſecundi valet 27. quid valebit $\frac{1}{6}$? Item ſi 1. amphora tertii valet 30. quid valebit $\frac{1}{6}$? Item ſi 1. amphora quarti valet 40. quid valebit $\frac{1}{2}$? vt hic vides.

1. { 21. 27. 30. 40. } quid { $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{2}$ } fiunt { $3\frac{1}{2}$. primi. $4\frac{1}{2}$. ſecundi. 5. tertii. 20. quarti.

Quæ omnia pretia efficiunt 33. baioch. vt proponitur.

Breuius tamen ita quoq; inſtitui poteſt examen. Quoniam ſi 1. amphora valere debet 33. baioch. valebunt 300. amphoræ 9900. baioch. Dicemus ergo ſi 300. amphoræ valent 9900. baioch. quid valebunt 50. amphoræ primi vini, & quid 50. ſecundi, & 50. tertii, & 150. quarti? vt hic vides.

30. 9900. { 50? 50? 50? 150? } fiunt { 1650. primi. 1650. ſecundi. 1650. tertii. 4950. quarti.

Inuenies enim omnia pretia conficere 9900. baiochos.

Queſt. 6. 6. Quidam pro 400. aur. emere vult 400. lib. aromatum variorum, nimirum garyophillorum, piperis, cinnamomi, Zingiberis, nucum myriſticarum, & croci, quorum hæc ſunt pretia pro ſingulis libris, Iulii 6. 7. 9. 11. 12. 16. Quot ergo ſingulorũ libras accipiet, vt 400. lib. pro 400. aur. habeat? Hic vt in quæſtione 4. dictum eſt, inueſtigandum eſt prius pretium medium vnius libræ, ad quod alligatio fieri debet, hoc modo. Si 400. lib. valent 400. aur. quid valebit 1. lib? Inuenies enim 1. aur. hoc eſt, 10. Iul. Quoniam vero, vt diximus, variæ fieri poſſunt alligationes, alligabimus primum garioph. cum Zingib. & croco. Deinde piper cum nuc. myriſt. & croco. Poſtremo cinnam. cum nuc. myriſt. vt hic factũ eſſe vides. Deinde dicemus. Si ſumma differentiarum 32. dat 400. lib. quid dabunt ſingulæ differentiæ 7. 8. 2. 4. 4. & 7? vt hic vides.

Pretium medium.	Pretia.		Differentiæ.
	garyoph.	6.	1. 6.
	piper.	7.	2. 6.
	cinnam.	9.	2.
	10.zingib.	11.	4.
	nuc.myr.	12.	3. 1.
	crocus.	16.	4. 3.
			32.
	Summa differentiarum.		

32. 400. { 7? 8? 2? 4? 4? 7? } fiunt { $87\frac{1}{2}$. garyoph. 100. pip. 25. cinnam. 50. zingib. 50. nuc. myr. $87\frac{1}{2}$. croc.

Inuenies enim 400. lib. quæ valebunt 400. aur. & ſingulæ lib. conſtabunt 10. Iul. Quod probabis, vt in præcedenti quæſtione dictum eſt.

Poſſunt fieri in hac quæſtione plures aliæ alligationes diuerſæ, vt in quatuor exemplis hic appoſitis apparet.

Pretium medium.	Pretia.	Differentiæ.
	6	1. 2. 6.
	7.	1. 2. 6.
	9.	1. 2. 6.
	10. 11.	4 3. 1.
	12.	4. 3. 1.
	16.	4. 3. 1.
		51.
	Summa differentiarum	

Pretium medium.	Pretia.	Differentiæ
	6.	1.
	7.	2.
	9.	6.
	10. 11.	4.
	12.	3.
	16.	1.
		17.
	Summa differentiarum.	

Pretium medium.	Pretia.	Differentiæ.
	6.	6.
	7.	2.
	9.	1.
	10. 11.	1.
	12.	3.
	16.	4.
		17.
	Summa differentiarum.	

Pretium medium.	Pretia.	Differentiæ.
	6.	2.
	7.	1.
	9.	6.
	10. 11.	3.
	12	4
	16	1.
		17.
	Summa differentiarum.	

In primo enim quodlibet priorum trium pretiorum alligatum eſt cum omnibus tribus poſterioribus. In ſecundo vero primum cum quarto, & ſecundum cum quinto, & tertium cum ſexto. In tertio deinde primum cum ſexto, & ſecundum cum quinto, & tertium cum quarto. In quarto deniq; primum cum quinto, & ſecundum cum quarto, & tertium cum ſexto. Atq; ita in ſimilibus quæſtionibus plures fieri poſſunt alligationes inter ſe diuerſæ.

Queſt. 7. 7. Quidam vult ſtatuam argenteam 300. librarum. Offeruntur ei duo genera argenti: Primi lib. 1. valet 30. aur. ſecundi 20. quæ ita inter ſe miſcere vult, vt 1. lib. conſtet 24. aur. Quantum ergo ex quolibet argento ſumet, vt habeat 300. lib. quarum ſingulæ conſtent 24. aur? Ita ſtabit alligatio, vt hic vides. Dic ergo. Si ſumma differentiarum 10. dat 300. lib. quid dabunt ſingulæ differentiæ 4. & 6? vt hic vides.

Pretium medium.	Pretia.	Differentiæ.
	30.	4.
	24.	
	20.	6.
		10.
	Summa differentiarum.	

10. 300. { 4? 6? } fiunt { 120. primi arg. 180. ſecundi arg.

Ita enim reperies 300. libras, quarum ſingulæ valent 24. aur. Quod probabis, vt in quæſtione 5. dictum eſt.

REGVLA FALSI SIMPLICIS POSITIONIS.

CAPVT XXII.

Regula falſi cur ſic dicta ſit. *Regula falſi duplex.*

INTER alias Arithmeticæ regulas non poſtremum locum obtinet regula falſi, quæ ſic dicitur, non quod falſum nos doceat, ſed quod ex falſo poſito verum eruere oſtendat: quod quidem efficit, ponendo quemuis numerum, qui propoſitæ quæſtioni putatur ſatisfacturus, licet reipſa non ſatisfaciat. Hæc autem regula duplex eſt. Quædam enim vocatur ſimplicis poſitionis, in qua nimirum vnica fit poſitio vnius dumtaxat numeri, qui quæſtioni creditur ſatisfacturus: quædam vero duplicis poſitionis dicitur, in qua videlicet duplex fit poſitio duorum numerorum, quorum vterque quæſtioni ſatisfacturus putatur.

Discrimen inter duas regulas falsi.

Cæterum magnũ est inter duas has regulas discrimen. Quidquid. n. per priorem soluitur, id etiam per posteriorem explicari potest, non autem contra. Innumeræ enim propemodum quæstiones per posteriorem solvuntur, quæ nulla ratione per priorem possunt explicari. Nã sub priori continentur illæ tantum quæstiones, in quibus tales partes, aut numeri exprimuntur, qui eandẽ proportionem habent in paruis numeris, quam in magnis: quales sunt, $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{2}{3}.\frac{1}{4}.\frac{3}{4}$. &c. Item numeri dupli, tripli, quadrupli, &c. Itaque satis esset, si posterior regula sola proponeretur. Sed quia per priorem plurimæ quæstiones multo breuius expliçantur, quam per posteriorem, vtramque paucis declarabimus, initio sumpto à priori, quæ facilior est.

Nota.

Regula falsi simplicis positionis quomodo fiat.

Proposita igitur quæstione quacunq; per regulam falsi simplicis positionis soluenda, ponatur quiuis numerus, qui quæstioni creditur satisfacturus, isque iuxta quæstionis tenorem examinetur; & quidem si omnia consonent, numerus positus erit is, qui quæritur: Si vero aliter se res habeat, falsa fuit positio numeri assumpti. Quarẽ ex hoc falso eliciendum erit verum beneficio regulæ trium, vt in exemplis declarabitur.

Quæst. 1.

1. Tres emere constituunt domum quandam 7200. aur. Secundus duplo plus vult dare, quam primus, & tertius triplo plus, quam secundus. Quantũ ergo quisque expendet? Hac quæstione nihil aliud quæritur, quam vt numerus 2700. diuidatur in tres partes ea lege, vt secunda sit dupla primæ, & tertia tripla secundæ. Pone ergo primum dare quotcunque aureos volueris, nempe 6. Igitur iuxta tenorem quæstionis secundus dabit 12. cum hic numerus sit duplus primi; tertius vero dabit 36. quod hic numerus sit triplus secundi. Omnes autem hi tres numeri efficiunt 54. aur, cum tamen efficere deberent 2700. Dic ergo. Si 54. prouenerunt ex falsa positione 6. aur. primi, ex qua vera positione prouenient 2700? Inuenieſque primum dedisse 300. aur. ac proinde secundum 600. tertium 1800. qui omnes tres numeri efficiunt 2700.

Posset quoque pecunia secundi, & tertij reperiri ex vtriusque positione, si diceretur. Si 54. prouenerunt ex falsa positione 12. aur. secundi, & ex falsa positione 36. aur. tertij, ex quo prouenient 2700. Inuenires enim pecuniam secundi esse 600. aur. & tertij 1800. Sed satius est inuestigare per regulam trium pecuniam vnius duntaxat. Ex hac enim aliorum pecuniæ facili negotio elicientur, iuxta tenorem quæstionis.

Eosdem prosus numeros reperisses, si pro primo alium numerum posuisses, quam 6. ac proinde pro secundo alium, quam 12. & pro tertio alium, quam 36.

Quæst. 2.

2. Interrogatus quidam, quantum pecuniæ in arca haberet, respondit se nescire, hoc tamen se certo à procuratore cognouisse, $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{4}$. & $\frac{1}{5}$. suæ pecuniæ constituere 4700. aur. Quantum ergo pecuniæ is habuit? Hic etiam nihil aliud quæritur, quam numerus, cuius $\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\&\frac{1}{5}$. simul efficiant 4700. Pone ergo illum habere 60. aur. (vt autem fractiones vitentur, quoad fieri potest, sumendus est semper numerus, qui contineat fractiones in quæstione expressas, vt cap. 10. docuimus, qualis hic est 60.) cuius $\frac{1}{2}$. est 20. & $\frac{1}{4}$. 15. & $\frac{1}{5}$. 12. quæ omnes partes constituunt 47. Debebant autem conficere 4700. Dic ergo. Si 47. prouenerunt ex 60. quem numerum falso posuimus, ex quo prouenient 4700. inueniemusque 6000. atque tot aureos in arca habuit. Nam $\frac{1}{2}$. continet 2000. & $\frac{1}{4}$. 1500. & $\frac{1}{5}$. 1200. quæ omnes partes efficiunt 4700.

Quæst. 3.

3. Interrogatus quidam ludimagister, quot haberet discipulos, respondit: Si adhuc semel tot haberem, quot habeo, & accederet $\frac{1}{2}$. eorum, & $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. & præterea 1. haberem 112. Quot ergo discipulos habuit? Hæc quæstio ita proposita solui non potest per hanc regulam, propterea quod vnitas, cuius postremo loco fit mentio, non potest habere eandem proportionem cum $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}$. & duplo parui numeri, quam cum eisdem partibus, & duplo magni numeri. Si tamen auferatur 1. ex numero 112. qui in quæstione debet produci, soluetur quæstio proposita. Tunc enim nihil aliud quæritur, quam numerus, qui bis sumptus vna cum $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\&\frac{1}{4}$. facit 111. Nam si tandem addatur 1. fient 112. Pone ergo illum habuisse 12. discipulos. Hic n. numerus continet fractiones datas. Si ergo totidem discipuli accedant, habebit 24. nempe duplo plures, quã prius. Ad quos si rursus accedat $\frac{1}{2}$ nimirũ 6. & $\frac{1}{3}$. nempe 4. & $\frac{1}{4}$. vt pote 3. habebit 37. Debebant autem esse 111? vt additio 1. haberet 112. Dic ergo. Si 37. prouenerunt ex 12. ex quo prouenient. 111? Inuenieſque eum habuisse 36. discipulos. Nam si accedant totidem habebit 72. quibus si addantur $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\&\frac{1}{4}$. videlicet 18. 12. & 9. fient 111. addito denique 1. fient 112.

Quæst. 4.

4. Quidam emit equum, hortum, ac domum 5000. aur. ea lege vt hortus quadruplo pluris constet, quam equus, at domus quincuplo pluris quam hortus. Quanti ergo emit equum, & quanti hortum, & quanti domum? Hic quæritur, vt numerus datus 5000. distribuatur in tres partes, ita vt secunda sit primæ quadrupla, & tertia secundæ quincupla. Estque quæstio hæc similis primæ. Pone ergo equum valere 30. aur. quo posito, valebit hortus 120. aur. & domus 600, qui omnes numeri conficiunt 750. Deberent autem conficere 5000. Dic ergo. Si 750. prouenerunt ex 30. ex quo prouenient 5000? Inuenieſque 200, atque tot aureis fuit emptus equus, ac proinde hortus empus fuit 800. aur. & domus 4000. qui omnes numeri constituunt 5000. aur.

Quæst. 5.

5. Quidam proficiscens Venetiis Hierosolymam expendit in itinere $\frac{2}{3}$. & $\frac{1}{5}$. suæ pecuniæ; domum autem reuersus deprehendit sibi supersesse 36. aureos. Quantum ergo pecuniæ is secum tulit? Hic quæritur numerus à quo si auferatur $\frac{2}{3}$. & $\frac{1}{5}$. reliquus sit numerus 36. Pone illum habuisse 300. aur. ex quo si auferas $\frac{2}{3}$. nempe 200. & $\frac{1}{5}$. nimirnm 60. supersunt 40. Debebant autem remanere tantum 36. Dic ergo. Si 40. prouenerunt ex 300. ex quo prouenient 36. Inuenieſque 270. atque tot aureos habuit. Nam ablatis $\frac{2}{3}$. nempe 180. $\frac{1}{5}$. nimirum 54. supersunt 36.

Nota.

Quod si quando contingat, partes in q̃stione expressas vnitatẽ superare, ac proinde nõ posse ex posito numero subtrahi, quæstio impossibilis erit. Vt si diceret quis. Da mihi numerum, vt, si ex eo demas $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. relinquantur 36. quæstio esset impossibilis. Nam $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. vnitatem superant, ac proinde auferri nequeunt ex posito numero 300. quia $\frac{2}{3}$. sunt 180. & $\frac{3}{4}$. sunt etiam 180. quæ partes simul constituunt 360. qui numerus ex 300. auferri non potest.

Quæst 6.

6. Quæratur numerus, cuius $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}.\frac{1}{5}.\&\frac{1}{6}$. efficiant 522. Pone numerum eum esse 60. cuius $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}.\frac{1}{5}.\&\frac{1}{6}$. nempe 30. 20. 15. 12. 10. efficiunt 87. Nos autem volumus 522. Dic ergo. Si 87. prouenerunt ex 60. ex quo prouenient 522? Inuenieſque 360. Huius enim numeri $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}.\frac{1}{5}.\&\frac{1}{6}$. nimirum 180. 120. 90. 72. & 60. efficiunt 522.

Quæst 7.

7. Quidam interroganti se, quantum pecuniæ haberet, respondit, se tot aureos habere, vt si ad eos addatur $\frac{1}{2}$. eorum, & $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. & præterea 100. aur. constituant 300. aur. Quantam ergo pecuniam habuit? Vt hæc quæ-

stio

quæstio per hanc regulã soluatur, detrahendi sunt 100. aur. ex 300. vt in q̃stione tertia diximus, & inquirendus numerus, vt, si addatur eius $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. fiant 200. Tunc enim additis 100 fient 300. vt in quæstione proponitur. Pone ergo eũ numerũ esse 24. Huius $\frac{1}{2}$. est 12 & $\frac{1}{3}$. 8 $\frac{1}{4}$. 6. quæ omnes partes additæ ad 24. faciunt 50. Nos autẽ volumus, vt efficiant 200. Dic ergo. Si 50. prouenerunt ex 24. ex quo prouenient 200? Inuenieſq; 96. ac tanta fuit summa aureorum. Nam $\frac{1}{2}$. continet 48. & $\frac{1}{3}$. 32. & $\frac{1}{4}$. 24. qui omnes numeri faciunt 104. additi autem ad 96. efficiunt 200. ad quem numerum si tandem adijciantur 100. fient 300.

Quæst. 8.

8. Quidam volens molere 500. modios tritici adit molitorem habentem 5. molas, quarum prima singulis horis molit 7. modios, secunda 5. tertia 4. quarta 3. quinta 1. Quanto ergo tempore totum triticum molетur, si omnibus molis triticum imponatur, & quantũ tritici singulis molis imponendum? Pone in 4. horis. Quo posito, prima mola conficiet 28. modios, secunda 20. tertia 16. quarta 12. & quinta 4. qui omnes modii faciunt 80. Debent autem esse 500. Dic ergo. Si 80. modii prouenerunt ex 4. horis 500. modii ex quot horis prouenient? Inuenieſq; 25. horas. In tot enim horis prima mola molet 175. modios, secunda 125. tertia 100. quarta 75. & quinta 25. qui omnes sunt 500. modii; atq; tot modii cuilibet molæ subiiciendi sunt, quot ipsa modios molit in 25. horis.

Quæst. 9.

9 Quidam proficiscens ad nundinas lucratus est ex pecunia, quã secum attulerat, tantum, vt lucrum vna cum pecunia allata triplum esset pecuniæ allatæ. Ex hac deinde pecunia in aliis nundinis tantam pecuniam lucratus est, vt lucrũ vna cum pecunia ad has nundinas allata quincuplũ esset huius pecuniæ; Postremo ex hac pecunia in aliis nundinis tantũ lucratus est, vt lucrũ vna cum pecunia, quã proxime habebat, quadruplum esset huius pecuniæ; inuenit q; se habere 40000. aur. Quantũ ergo pecuniæ ad primas nundinas attulit? In hac q̃stione inquiritur numerus, qui multiplicatus per 3 & productus numerus per 5. & hic numerus productus per 4. faciat 40000. Pone eum numerũ esse 10. quem si multiplices per 3. facies 30. pro lucro vna cum pecunia in primis nũdinis. Si autẽ multiplices 30. per 5. procreabis 150. pro lucro vna cum pecunia in secundis nundinis. Si denique multiplices 150. per 4. faciens 600. pro lucro vna cum pecunia in tertiis nundinis. Nos vero diximus, in tertiis nundinis eum habuisse 40000. aur. Dic ergo. Si 600. prouenerunt ex 10. ex quo prouenient 40000? Inuenieſq; $666\frac{2}{3}$. atq; tot aureos secũ ille attulit ad primas nundinas. Nã si multiplicemus $666\frac{2}{3}$. per 3. efficiemus 2000. pro lucro & pecunia in primis nũdinis. Si deinde multiplicemus 2000. per 5. gignemus 10000. pro lucro ac pecunia in secundis nundinis. Si deniq; multiplicemus 10000. per 4. producemus 40000. pro lucro ac pecunia in tertiis nundinis.

Quæst. 10.

10. Inuestigetur numerus, vt eo muliplicato per 4. & producto per 3. & hoc producto per 6. atque huic producto additis 10. producantur 800. Hæc quæstio per hanc regulam solui nequit, nisi prius detrahantur 10. ex 800. propter rationem in quæstione 3. dictam. Subtrahe ergo 10. ex 800. relinquenturque 790. atque hic numerus producendus est ex multiplicationibus in quæstione expressis. Nam si ei addantur 10. fiet numerus 800. Pone numerum quæsitum esse 10. quẽ si multiplices per 4. facies 40. qui numerus multiplicatus per 3. facit 120. hic denique numerus muliplicatus per 6. producit 720. Deberent autem produci 790. Quare dic. Si 720. prouenerunt ex 10. ex quo prouenient 790? Inuenieſque $10\frac{7}{36}$ atque hic est numerus, qui quæritur. Si enim multiplices $10\frac{7}{36}$. per 4. facies $43\frac{8}{9}$. quem numerum si rursus multiplices per 3. gignes numerum 13, $\frac{2}{3}$. quem si deniq; per 6. multiplices, procreabis 790. Additis autem 10. fient 800.

Quæst. 11.

11. Senex quidam interroganti de sua ætate, respondit, se tot habere annos, vt si eis adderetur $\frac{1}{2}$. ipsorum, & ex summa detraheretur $\frac{1}{4}$. ipsius, haberet 99. annos. Quot ergo annos habuit? Hic inueniendus est numerus, ad quem si adiiciatur $\frac{1}{2}$. ipsius, & ex summa detrahatur $\frac{1}{4}$. eiusdem summæ reliquus sit numerus 99. Pone eum habuisse 80. annos. Si igitur adiiciatur eorum $\frac{1}{2}$. nempe 40. anni fient 120. à quibus si detrahatur $\frac{1}{4}$. nimirum 30. supererunt 90. Dicuntur autem supersesse 99. Dic ergo. Si 90. prouenerunt ex 80. ex quo prouenient 99. Inuenieſq; 88. atque tot annos senex ille habuit. Si namque eis adiicias $\frac{1}{2}$. eorum nimirum 44. facies 132. à quibus si auferas $\frac{1}{4}$. nempe 33. supererunt 99.

Quæst. 12.

12. Apparet fastigium cuiusdem turris 24. palmorum: dicit autem quidam, $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{5}$. eiusdem turris à circumiacentib. ædificiis occultari. Quanta ergo est totius turris altitudo? Hic quærendus est numerus, ita vt, si ab eo auferatur $\frac{1}{3}$. & præterea $\frac{1}{5}$. relinquãtur 24. Pone eum numerum esse 30. à quo si auferas $\frac{1}{3}$. videlicet 10. & $\frac{1}{5}$. nimirum 12. remanent 8. Nos autem volumus, vt relinquantur 24. Dic ergo. Si 8. prouenisset ex 30. ex quo prouenient 90. Inuenieſq; 24? ac tanta est altitudo turris. Nam si auferas $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{5}$. nempe 30. & 36. relinquentur 24.

Quæst. 13.

13. Est hasta, cuius $\frac{1}{3}$. alba est, & $\frac{1}{5}$. nigra & $\frac{3}{5}$. cærulei coloris, supersunt autẽ 12. palmi rubri. Quanta est ergo longitudo illius hastæ? Hic etiam inquirendus est numerus, ita vt, si ex eo demantur $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{5}$. & $\frac{3}{5}$. reliquus sit numerus 12. Pone eum numerum esse 45. à quo si auferas $\frac{1}{3}$. nempe 15. & $\frac{1}{5}$. nimirum 9. & $\frac{3}{5}$. hoc est, 10. supersunt 11. Debent autem remanere 12. Dic ergo. Si 11. prouenerunt ex 45. ex quo prouenient 12? Inuenieſque. $49\frac{1}{11}$. ac tot palmorum est hastæ illius longitudo. Nam eius $\frac{1}{3}$ continet palmos $16\frac{4}{11}$. at $\frac{1}{5}$. continet palmos $9\frac{1}{11}$. Item $\frac{3}{5}$. continent palmos $10\frac{10}{11}$. qui omnes numeri ablati ex longitudine hastæ palmorum $49\frac{1}{11}$. relinquunt 12. palmos.

Quæst. 14.

14. Quidam pro 30. vlnis panni albi, & 40. vlnis panni nigri expendit 660. aureos, constituruntque singulæ vlnæ panni nigri duplo pluris, quam singulæ vlnæ panni albi. Quanti ergo constitit vna vlna panni albi, & quanti vna vlna nigri? Pone vnam vlnam panni albi constitisse 4. aur. Et quoniam pretium vnius vlnæ panni nigri est duplo maius, necesse est, vnam vlnam panni nigri constitisse 8. aur. Ex quo sit 30. vlnas panni albi constare 120. aur. & 40. vlnas panni nigri valere 320. aur. qui omnes aurei efficiunt 440. Nos autem diximus, illum expendisse 660. aur. Dic ergo. Si 440. prouenerunt ex 4. ex quo prouenient 660? Inuenieſque 6. aur. pro pretio vnius vlnæ panni albi, ac proinde 12. aur. pro pretio vnius vlnæ panni nigri. Ita enim 30. vlnæ panni albi constabunt 180. aur. & 40. vlnæ panni nigri valebunt 480. qui omnes aur. conficiunt 660. aur.

RE-

REGVLA FALSI DVPLICIS POSITIONIS.

CAPVT XXIII.

Regula falsi duplicis positionis quomodo fiat.

PROPOSITA quæstione quacunque per regulam falsi duplicis positionis explicanda, ponatur quiuis numerus siue paruus, siue magnus, qui iuxta tenorem quæstionis examinetur. Nam si is quæsito respondeat, soluta erit quæstio; sin minus; notandus erit excessus, vel defectus, quo à veritate aberratum est vna cum litera P. vel M. quarum illa plus, hæc vero minus significat, prout videlicet error veritatem excesserit, aut ab ea defecerit. Deinde ponatur rursus aliquis alius numerus siue maior priore, siue minor, qui eodem modo examinetur, &c. Nam ex duplici hac positione, & duplici errore veritas elicietur hoc modo

Quando vtraq; positio veritatem excedit, fit subtractio.

Si in vtraque positione à veritate aberratū est per excessum, vel defectum subtrahatur minor error ex maiore, & numerus relictus pro diuisore seruetur. Deinde numerus primo positus per secundū errorē, & numerus secundo positus per primum errorem multiplicetur, minorque numerus productus ex maiore detrahatur. Nam si numerus hic residuus per diuisorem iam inuentum nimirum per differentiam errorum, diuidatur, dabit quotiens numerum quæsitum, qui quæstioni propositæ satisfaciet.

Quando vna positio veritatem excedit, altera deficit, fit additio.

Si vero in alterutra positione à veritate aberratum est per excessum, & in altera per defectum, colligendi erunt duo errores in vnam summam, vt habeatur diuisor. Similiter duo illi numeri, qui ex multiplicatione numerorum positorum per errores, vt dictum est, producuntur, in vnam summam sunt colligendi, vt habeatur numerus diuidendus &c. Id quod ex quæstionibus fiet perspicuum.

Quæst. 1.

1. Quæratur numerus, à cuius dimidio subtracta $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. relinquātur 300. Ponatur numerus 24. qui nimirū habeat partem $\frac{1}{2}$. in quæstione expressam, & eius $\frac{1}{3}$ alias partes expressas, nempe $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$ contineat vt fractiones quoad fieri potest, vitentur: qui quidem numerus facile inuenietur, si numerus sumatur habens posteriores fractiones, & is postea duplicetur. Solet autem numerus hic primo acceptus poni ad sinistram in superiori parte crucis & error in parte inferiori ad sinistrā quoque, litera denique P. vel M. prout veritatem excesserit error ille, vel ab ea defecerit, in medio crucis ad eandem sinistrā: Secundus vero numerus acceptus cum errore, & litera P. vel M. eodē ordine collocari solet ad dextrā eiusdem crucis, vt in nostro exēplo factum esse vides. Hic numerus 24. positus ita iuxta pronunciationem quæstionis examinabitur. Eius $\frac{1}{2}$. est 12. à quo numero detrahenda est $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. Est autem $\frac{1}{4}$. numeri 12. numerus 4 & $\frac{1}{4}$. numerus 3. qui numeri detracti ex 12. relinquunt 5. Debebant autem relinqui 300. Aberratum est ergo à veritate per defectum 295. vnitatum; ac proinde error hic notandus est cum litera M.

24 96
M X M
295. 280.
15.
diuisor.

Ponatur secundo numerus 96. qui ita iuxta quæstionem examinabitur. Eius $\frac{1}{2}$. est 48. at $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$. huius numeri 48 sunt 16. & 12. qui ex 48. ablati relinquunt 20. Debebant autem relinqui 300. Defecimus ergo rursus à veritate 280. vnitatibus, ac proinde error hic notandus est etiam cum litera M.

Iam vero quia in vtraq; positione defecimus à vero, subtrahendus erit minor error ex maiore, vt habeatur diuisor 15. in inferiori parte crucis collocandus. Deinde multiplicandus numerus 24. primo positus per 280. secundum errorem, & numerus 96. secundo positus per 295. primum errorem, minorque numerus productus 6720. ex maiore 28320. subtrahendus, vt relinquatur numerus diuidendus 21600. Hic enim numerus diuisus per diuisorē inuentum 15. dabit quotientem 1440. qui est numerus quæsitus. Eius enim $\frac{1}{2}$. est 720. & huius $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. sunt 240. & 180. qui numeri ex 720. detracti relinquunt 300. vt in quæstione proponebatur.

96 24
P X P
700. 200.
500.
diuisor.

Sed soluamus eandem quæstionem per alios duo numeros, qui veritatem excedāt. deinde per alios, quorum vnus veritatem excedat & alter ab eadem deficiat. Ponatur ergo primū numerus 4800. Huius $\frac{1}{2}$. est 2400. cuius $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ sunt. 800. & 600. qui numeri ex 2400. ablati relinquunt 1000. Debebant autem relinqui 300. excessimus ergo veritatem 700. vnitatibus atque adeo error hic scribendus est cum litera P. ponatur deinde numerus 2400. Huius $\frac{1}{2}$. est 1200. cuius $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. sunt 400. & 300. quibus numeris ex 1200. ablatis remanent 500. Debebant autem relinqui 300. Excessimus ergo rursus veritatem 200. vnitatibus. Iam vero, subtracto minore errore de maiore, relinquetur diuisor 500. facta autem multiplicatione numerorum positorum per errores in crucem, vt dictum est, subtractoque minore numero producto 960000. de maiore 1680000. relinquetur numerus diuidendus 720000. qui per 500. diuisus dabit Quotientem 1440. vt prius.

4800. 2400
P X P
700. 200.
500.
diuisor.

Rursus ponamus primo numerum 2400 quo examinato iuxta quæstionem propositam, inueniemus excessum 200. qui error scribendus est cum litera P. Deinde ponamus numerum 96. quo eadē ratione examinato, deprehendemus defectū 280. qui scribendus est cum litera M. Quoniam vero in vna positione excessimus veritatem, & in altera defecimus à vero, faciendа erit additio errorum vt componatur diuisor 480. Item duo numeri producti ex multiplicatione numerorum positorum per errores in crucem, nempe 672000. & 19200. in vnam summam colligendi, vt fiat diuidendus numerus 691200. Diuiso enim hoc numero 691200. per 480 fiet Quotiens 1440. veluti prius.

2400. 96.
P X M
200. 280.
480.
diuisor.

2. Quæst.

2. Alexander Magnus in familiari colloquio, quod cum Calisthene Philosopho quodam die habuit in ætatum mentionem forte fortuna, vt accidere solet, incidit, hoc modo eum alloquens. Ego Ephestionem duobus supero annis, Clytus vero nostram amborum ætatem complectitur, & insuper quatuor annos. Ex quo, fit, vt omnes tres compleamus annos 96. quot nimirum pater tuus vixisse dicitur. Quot ergo annos habuit tunc Alexander, Ephestion, & Clytus? Vides hic numerum 96. distribuendum esse in tres partes, ita vt prima superet secundā binario, tertia vero duas primas simul sumptas quaternario excedat. Vel inuenies dos esse 3. numeros, quorū primus secundū superet binario, & tertius primos duos simul sumptos quaternario excedat, omnes vero tres constituant 96. Pone ergo Alexandrum habuisse annos 20. ac proinde Ephestionem 18. & Clytum 42. Ita enim ætas Alexandri superat Ephestionis ætatem annis 2. Clytus autem amborum ætatem annorum 38. comprehendit, & insuper 4. annos, vt in quæstione proponitur. Quoniam vero hi numeri 20. 18. 42. constituunt tantum 80. qui 96. deberent conficere, fit vt à vero defecerimus 16. vnitatibus. pone ergo rursus Alexandri annos fuisse 30. ac propterea Ephestionem habuisse annos 28. & Clytum 62. qui omnes efficiunt 120. Deberent autem efficere tantum 96. Excessimus ergo veritatem 24. vnitatibus. Facta iam additione errorum inter se, quod vnus defecerit à veritate, & alter eandem excesserit, fient 40. pro diuisore. Facta item multiplicatione 20. per 24. & 30. per 16. productisque 480. 480. inter se additis, fient 960. quibus diuisis per 40. fiet Quotiens 42. atque tot annos tunc Alexander Magnus habuit, ac proinde, iuxta quæstionis tenorem, Ephestio 22. Clytus 50. qui omnes constituunt 96. annos.

20. 30.
18. 28.
42. 62.
——M X P——
80. 120.
16. 24.
40.
Diuisor.

Quæst. 3.

3. Tres habent summam quandam pecuniæ, nempe 44. aureos. Secundus habet duplo plus quam primus, & præterea 4. aureos. Tertius autem tantum habet quantum primus & secundus, & præterea 6. aur. Quantum ergo quisque habet? Hic vides numerum 44. distribuendum esse in tres partes, vt secunda dupla sit primæ, contineatque præterea 4. tertia vero æqualis sit primæ, ac secundæ, contineatque præterea 6. Vel quærendos esse tres numeros, quorum secundus contineat primum bis, & insuper 4. tertius vero contineat primum, & secundum semel, & præterea 6. ipsi vero tres numeri conficiant 44. Pone ergo primum habere 10. quo posito, habebit secuudus 24. nempe duplo plus quam primus, & insuper 4. tertius autem habebit 40. tantum videlicet quantum primus & secundus, ac præterea 6. qui tres numeri conficiunt 74. Deberent autem conficere solum 44. Excessimus ergo veritatem 30. vnitatibus. Pone deinde primum habere 6. Habebit ergo secundus 16. & tertius 28. qui tres numeri conficiunt 50. Deberent autē conficere solum 44. Excessimus ergo rursum veritatem 6. vnitatibus, facta iam subtractione minoris erroris de maiore, quia vterque error excessit veritatem, reliquus erit diuisor 24. Facta item multiplicatione 10. per 6. & 6. per 30. subtractoque illo producto 60. ex hoc 180. remanebit diuidendus numerus 120. quo diuiso per 24. fiet Quotiens 5. Tantum ergo habet primus: secundus vero 14. & tertius 25. qui tres numeri in vnam summam collecti efficiunt 44.

10. 6.
24. 16.
40. 28.
——P X P——
74. 50.
30. 6.
24.
Diuisor.

Si multiplicarentur numeri, quos posuimus secundum ac tertium habere per eosdem errores, &c. inuenirentur numeri, quos secundus ac tertius habent. Vt ex 24. per 6. fiunt 144. & ex 16. per 30. fiunt 480. Subtracto autem illo numero ex hoc, remanent 336. quo numero diuiso per 24. diuisorem inuentum, fiet Quotiens 14. pro numero secundi. Item ex 40. per 6. fiunt 240. & ex 28. per 30. fiunt. 840. subtracto autem illo numero ex hoc, reliquus erit numerus 600. quo diuiso per 24. fiet Quotiens 25. pro numero tertii. Sed satius est, inuento numero primi, inuestigare reliquos, iuxta pronunciationem quæstionis, nempe eo modo, quo vterque numerus falso positus est examinatus. Aliquando tamen commodius erit inquirere alios numeros ea ratione, qua primus quæsitus est; vt in quæstione, 6. manifestum erit.

Quæst. 4.

4. Quærantur tres numeri, qui faciant 60. secundus autem contineat primum bis, & insuper 4. tertius vero contineat primum ac secundum, & præterea 6. Hæc quæstio similis est antecedenti. Pone primum numerum esse 6. ac proinde secundum 16. & tertiū 28. qui tres numeri faciunt 50. Deberent autem facere 60. Factus est ergo error per defectum 10. Pone rursus primum numerum esse 8. ac proinde secundum 20. & tertium 34. qui tres numeri faciunt 62. Deberent a facere 60. Excessimus ergo verum 2. vnitatibus. Operare, vt regula præcipit, inueniesque primum numerum esse $7\frac{1}{2}$. ac proinde secundum $19\frac{1}{2}$. & tertium 33. qui tres numeri efficiunt 60.

6. 8.
16. 20.
28. 34
——M X P——
50. 62.
10. 2
12.
diuisor.

Quæst. 5.

5. Diuidatur numerus 30. in duas partes, quarum prior cum 60 numerum faciat triplum numeri ex posteriori parte, & 20. compositi. Pone priorem partem esse 20. ac proinde posteriorem 10. Prior cum 60. facit 80. & posterior cum 20. facit 30. Deberet autem numerus 80. triplus esse numeri 30. iuxta pronunciationem exempli. Cum ergo numerus 90. triplus sit numeri 30. defecimus 10. vnitatibus à vero. Pone rursus priorem partem esse 24. ac proprea posteriorem 6. Prior cum 60 facit 84. & posterior cum 20. facit 26. Deberet autem numerus 84. iuxta tenorem quæstionis triplus esse numeri 26. Cum ergo numerus 78. triplus sit numeri 26. excessimus veritatem 6. vnitatib. Operare, vt regula præcipit, inueniesque priorem partem esse $22\frac{1}{2}$. atque adeo posteriorem $7\frac{1}{2}$. Prior enim cum 60. facit $82\frac{1}{2}$. & posterior cum 20. facit $27\frac{1}{2}$. cuius numeri ille triplus est.

20. 24.
10. 6.
P X M——
200. 280.
480.
diuisor.

Alio modo institui potest solutio huius quæstionis. Postquam enim in prima positione deprehendimus priorem partem 20. cum 60. facere 80. & posteriorem partem 10. cum 20. facere 30. cujus numeri ille deberet esse triplus; videndum est, cuius numeri triplus sit numerus 80. Est autem triplus numeri $26\frac{2}{3}$. quem numerus 30, superat numero $3\frac{1}{3}$. Excessimus ergo veritatem hoc numero $3\frac{1}{3}$. Rursus postquam in secunda positione inuentum est priorem partem 24. cum 60. facere 84. & posteriorem partem 6. cum 20. facere 26. cuius numeri ille deberet esse triplus; videndum est, cuius numeri triplus sit numerus 84. Est autem triplus numeri 28. à quo numerus 26. deficit 2. vnitatibus. Defecimus ergo à veritate binario. Operare iam secundum regulæ præcepta, inueniesque priorem partem esse $22\frac{1}{2}$. & posteriorem $7\frac{1}{2}$. vt prius. Sed prior ratio commodior videtur, cum facilius per eam vitentur fractiones.

29. 24.
10. 6.
P X M——
$3\frac{1}{3}$. 2.
$5\frac{1}{3}$.
Diuisor.

Quæſt. 6. 6. Quærantur tres numeri, quorum primus additus ad 73. faciat duplum reliquorum duorum; ſecundus vero cum 73. faciat triplum duorum reliquorum; tertius denique cum 73. faciat quadruplum reliquorum duorum. Pone primum numerum eſſe 1. vel alium quemuis numerum imparem, vt additus ad 73. faciat numerum parem, qui poſſit habere dimidium, quandoquidem primus cum 73. debet facere numerum duplum reliquorum duorum. Quoniam igitur 1. cum 73. facit 74. qui numerus duplus debet eſſe iuxta pronunciationem exempli reliquorum duorum, neceſſe eſt, reliquos duos ſimul eſſe 37. Et quia ſecundus cum 73. debet facere numerum triplum primi, (qui eſt 1.) & tertii, diuidendus erit per antecedentem quæſtionem, numerus 37. in duas partes, quarum prior cum 73. faciat triplum numeri qui ex poſteriore parte, & 1. componitur, atque ita, antequam propoſita quæſtio ſoluatur, neceſſe eſt, aliam prius ſoluere, quæ in ipſa operatione occurrit.

1. 3.
10¼. 12½.
P X P
26¾. 25½.
54¾. 36½.
18½.
diuiſor.

Pone ergo priorem partem eſſe 2. atque adeo poſteriorem 35. Facit autem prior cum 73. numerum 75. poſterior vero cum 1. facit 36. cuius triplus non eſt numerus 75. ſed numerus 108. Defecimus ergo à veritate 33. vnitatib. cum tot vnitatibus minor ſit noſter numerus 75. quam 108. Pone rurſus, priorem partem eſſe 5. atque adeo poſteriorem 32. Prior autem cum 73. facit 78. & poſterior cum 1. facit 33. cuius numeri triplus non eſt numerus 78. ſed numerus 99. Defecimus ergo rurſus 21. vnitatibus. Operare iam ſecundum præcepta regulæ falſi, inueniesque priorem partem eſſe 10¼. ac proinde poſteriorem 26¾. Itaque ſi primus numerus propoſitæ quæſtionis eſt 1. erit ſecundus 10¼. tertius 26¾. Ita enim primus cum 73. facit duplum reliquorum duorum, & ſecundus cum 73. facit triplum duorum reliquorum. Si ergo tertius cum 73. faciat quadruplum reliquorum duorum, ſatisfactum erit quæſtioni. Facit autē tertius cum 73. numerum 99¾. qui quadruplus non eſt numeri 11¼. qui ex primo, & ſecundo conflatur, ſed numerus 45. quadruplus eſt numeri 11¼. Exceſſimus ergo veritatem hoc numero 54¾.

2. 5.
35. 32.
M X M
33. 21.
12.
diuiſor.

Pone iam primum numerum eſſe 3. qui cum 73. facit 76. qui numerus duplus eſſe debet reliquorum duorum. Duo ergo reliqui efficient 38. Et quia ſecundus cum 73. debet facere triplum primi, (qui eſt 3.) & tertii diuidendus erit per antecedentem quæſtionem numerus 38. in duas partes, quarum prior cum 73. faciat triplum eius numeri, qui ex poſteriore parte, & 3. componitur. Pone ergo priorem partem eſſe 2. atque adeo poſteriorem 36. Facit autem prior cum 73. numerum 75. at poſterior cum 3. facit 39. cuius triplus non eſt numerus 75. ſed numerus 117. Defecimus ergo à veritate numero 42. Pone rurſus priorem partem eſſe 23. ac proinde poſteriorem 15. Prior autem cum 73. facit 96. at poſterior cum 3. facit 18. cuius numeri triplus non eſt numerus 96. Sed numerus 54. Exceſſimus ergo verum numero 42. Operare ſecundum regulam falſi, inueniesque priorem partem eſſe 12½. ac proinde poſteriorem 25½.

2. 23.
36. 15.
M X P
42. 84.
Diuiſor.

Itaq; ſi numerus primus quæſtionis propoſitæ eſt 3. ſecundus erit 12½. & tertius 25½. Ita enim primus cum 73. facit duplum reliquorum duorum, & ſecundus cum 73. facit triplum reliquorum duorum. Si igitur tertius cum 73. faciat quadruplum reliquorum duorum, ſoluta erit quæſtio. Facit autem tertius cum 73. numerum 98½. qui quadruplus non eſt numeri 15½. ſed numerus 62. Exceſſimus ergo verum numero hoc 36½.

Iam vero ſi multiplices primos numeros per errores in crucem, item ſecundos, & tertios, (commodius. n. inuenientur ſecundus & tertius hoc modo, quam ſi ex primo inuento illos elicere vellemus, propterea quod opus eſſet quæſtione præcedenti hic vti) & facta ſubtractione, reſiduos numeros diuidas per diuiſorem inuentum 18¾. nempe per differentiam errorum, quod in vtraque poſitione factus eſt ſemper exceſſus, inuenies primum numerum eſſe 7. ſecundum 17. & tertium 23. Nam primus cum 73. facit 80. qui numerus duplus eſt reliquorum duorum: at ſecundus cum 73. facit 90. qui numerus triplus eſt duorum reliquorum. Tertius denique cum 73. facit 96. qui numerus reliquorum duorum quadruplus eſt.

Quæſt. 7. 7. Quæratur numerus, quo multiplicato per 3. & producto additis 10. Et ſumma hac multiplicata per 4. productoque additis 20. Sūma vero hac multiplicata per 5. & producto additis 30. Summa denique hac muliplicata per 6. productoque additis 40. numerus producatur 6700 Finge numerum eum eſſe 2. qui multiplicatur per 3. facit 6. additis autem 10. fiunt 16. Hac autem ſumma multiplicata per 4. fiunt 64. & additis 20. fiunt 84. Rurſus hac ſumma multiplicata per 5. fiunt 420. additiſque 30 fiunt 450. Hac denique ſumma multipicata per 6. fiunt 2700. additiſque 40. fiunt 2740. Debebat autem vltima hæc ſumma eſſe 6700. Defecimus ergo à veritate hoc numero 3960. Finge denide eundem numerum eſſe 3. qui multiplicatus per 3. facit 9. additiſque 10. fiunt 19. Hæc autem ſumma multiplicata per 4. facit 76. additiſque 20. fiunt 96. Hæc rurſum ſumma per 5. muliplicata facit 480. additiſque 30. fiũt 510. Deniq; hæc ſumma multiplicata per 6. facit 3060. additiſque 40. fiunt 3100. Debebant autem effici 6700. Defecimus ergo iterum à veritate numero hoc 3600. Operare ſecundum regulam, inueniesque numerum quæſitum eſſe 13. Hic. n. numerus multiplicatus per 3. facit 39. additiſque 10. fiũt 49. Hęc ſumma multiplicata per 4. facit 196. additis vero 20. fiunt 216. quæ ſumma multiplicata per 5. facit 1080. additis autem 30. fiunt 1110. quæ denique ſumma multiplicata per 6. facit 6660. additiſque 40. fiunt 6700.

2. 3.
P X M
3960. 3600.
360.
diuiſor

Quæſt. 8. 8. Ludimagiſter quidam tot habet diſcipulos, vt ſinguli perſoluant 5. aur. deſint illi 30. aur. ad emendam domum, in qua habitat; ſi vero ſinguli dent 6. aur. ſuperſint 40. aurei vltra pretium domus. Quot ergo habet diſcipulos, & quantum eſt pretium domus? Hic nihil aliud quæritur, quam numerus, qui multiplicatus per 5. talem procreet numerum, vt additis 30. eadem ſumma fiat, quæ relinquitur, ſi idem numerus per 6. multiplicetur,

tur, & à producto detrahantur 40. Pone ergo numerum diſcipulorum eſſe 30. qui multiplicatus per 5. facit 150. additiſque 30. fiunt 180. Tanti ergo conſtabit domus, ſi 30. diſcipulos habeat, quorum ſinguli perſoluant 5 aureos. Videamus iam, an ſuperſint vltra hoc pretium aur. 40. ſi ſinguli ſoluant 6. aur. Multiplicatus autem idem numerus diſcipulorum 30. per 6. facit 180. nihilq; ſupereſt vltra pretium domus 180. aureorum: debebant autem ſupereſſe 40. aurei. Defecimus ergò à veritate hoc numero 40. Finge rurſus, numerum diſcipulorum eſſe 100. qui multiplicatus per 5. facit 500. additiſq; 30. fiunt 530. Tanti ergo conſtabit domus, ſi 100. habeat diſcipulos, quorum ſinguli perſoluant 5 aureos. Videamus iam, an ſuperſint 40. aurei vltra hoc pretium, ſi ſinguli dent 6. aureos. Multiplicatus autem idem numerus diſcipulorum 100. per 6. facit 600. ſuperſuntq; 70. aurei vltra pretium domus 530. aureorum: debebant autem ſupereſſe tantum 40. Exceſſimus ergo veritatem hoc numero 30. Operare per regulam falſi, inueniesq; numerum diſcipulorum 70. Hic enim numerus multiplicatus per 5. facit 350. additiſq; 30. fiunt 380. Tantum ergo eſt pretium domus. Idem numerus diſcipulorum 70. multiplicatus per 6 facit 420 qui numerus ſuperat pretium domus 380. aur. hoc numero 40.

1. 100.
P X P
40. 30.
70.
Diuiſor.

Quæſt. 9. 9. Duo inter ſe partiri debebant æqualiter 60. aureos. Orta autem rixa inter eos, quilibet rapuit, quantum potuit. Inita poſtea pace, primus depoſuit ⅓. ſuæ pecuniæ, ſecundus vero ¼. factumq; eſt tunc, vt tam primus accipiens ⅓. ſecundi, quam ſecundus accipiens ¼ primi habuerit 30. aur. Quantum ergo quiſque primo rapuit? Pone primum rapuiſſe 36. aur. atque adeo ſecundum reliquos 24. Si igitur primus deponat ⅓. nempe 9. aur. relinquentur ei aur. 27. quibus ſi addamus ⅓. ſecundi, quam dicitur depoſuiſſe, nempe 8. aur. faciemus 35. aur. pro primo. Debebat autem ſolum habere 30. Exceſſimus ergo verum numero 5. Pone iam primum ſurripuiſſe 12. ac propterea ſecundū reliquos 48. Si igitur primus deponat ⅓. hoc eſt, 3. aur. remanebunt ei 9. aur. quibus ſi addamus ⅓. ſecundi, puta 16. aur. efficiemus 25. aur. pro primo. Debebat autem habere 30. Defecimus ergo 5. vnitatibus à vero. Operare ſecundum regulam, inueniesq; primum rapuiſſe 24. & ſecundum propterea 36. Nam ſi primus deponat ⅓. nimirum 6. aur. & reliquis 18. addat ⅓. ſecundi, nempe 12. habebit 30. aur. Sic etiam ſi ſecundus, depoſita ⅓. nempe 12. aur. reliquis 24. addat ⅓. primi, id eſt, 6. aur. habebit 30. aur.

1. 12.
24. 48.
P X M
5. 5.
10.
diuiſor.

Porro ex poſitione ſecundi eodem modo verum eliciemus. Nam in priori poſitione, ſi ſecundus deponat ⅓. nempe 8. aureos & reliquis 16. adiungat ¼. primi hoc eſt, 9. aur. habebit 25. aur. qui deberent eſſe 30. Defecimus ergo à veritate 5. vnitatibus. In poſteriori vero poſitione, ſi ſecundus deponat ⅓. nempe 16. aur. & reliquis 32. adijciat ¼. primi, nimirum 3. aur. efficiet 35. aur. qui deberent eſſe tantum 30. Exceſſimus ergo verum rurſus 5 vnitatibus. Operare per regulam, multiplicando errores per poſitiones ſecundi, &c. reperieſque ſecundum ſurripuiſſe 36. aur. & primum 24.

36. 12.
2. 48.
M X P
5. 5.
10.
Diuiſor.

Quæſt. 10. 10. Duo partiri debebant inter ſe 100. aur. æqualiter: orta autem inter eos rixa, quilibet quantū potuit arripuit. Cōpoſita deinde pace inter eos, depoſuit primus ⅓. ſuæ pecuniæ, ſecundus vero depoſuit ⅕. primus autem accepit hanc ⅕. & ſecundus illam ⅓. quo facto vterque habuit 50. Quantum ergo quiſq; primo rapuit? Finge, primum rapuiſſe 30. aur. ac proinde ſecundum 70. Primi ⅓. eſt 10. quam ſi deponat, relinquuntur illi 20. Secundi ⅕ eſt 14. quæ ſi detur primo, habebit primus 34. aureos. Debebat autem habere 50. Defecimus ergo à veritate numero hoc 16. Finge rurſus, primum ſurripuiſſe 60. ac propterea ſecundum 40. Primi ⅓. eſt 20. quam ſi deponat, ſupererunt ei aur. 40. Secundi ⅕. eſt 8. quam ſi demus primo, habebit primus 48. Debebat a. habere 50. Defecimus ergo in hac etiam poſitione à veritate numero 2. Operare per regulam, reperieſq; primum ſurripuiſſe 64⅔. atq; adeo ſecundum 35⅓. Primi enim ⅓ eſt 21⅓. quam ſi deponat, remanebunt ei 42⅔. Secundi ⅕. eſt 7⅕. quam ſi deponat, ſupererunt ei 28⅘. Iam vero ſi ⅕. ſecundi, nempe 7⅕. detur reſiduo primi. quod fuit 42⅔. habebit primus 50. Item ſi ⅓. primi, nimirum 21⅓. detur reſiduo ſecundi, quod fuit 28⅘. habebit quoque ſecundus 50, vt in quæſtione proponebatur.

1. 60.
70. 40.
M X M
16. 2.
14.
Diuiſor.

Quæſt. 11. 11. Duo inter ſe ita diſtribuunt 100. aur. vt ſi primus deponat ⅓. & ſecundus ¼. atque aggregatum harum partium bifariam ſecetur, deturque ½. vtriq; numero relicto, numeri fiant æquales, nempe 50. & 50. Quantæ ergo ſunt amborum partes? Finge primi partem eſſe 60. ac proinde ſecundi 40. Si primus deponat ⅓. nempe 20. remanent ei 40. Si vero ¼. ſecundi, nempe 10. adijciatur ad ⅓. primi, hoc eſt, ad 20. fient 30. atq; huius aggregati ½. nimirum 15. demus reſiduo primi, quod fuit 40. faciemus 55. Debebamus autem facere tantummodo 50. Exceſſimus ergo veritatem hoc numero 5. Finge deinde, primum habere 24. ac proinde ſecundum 76. (Poſui autem hoſce numeros, quod prior habeat ⅓. & poſterior ¼. ſine fractionibus.) Si primus deponat ⅓. nempe 8. ſuperſunt ei 16. Si vero ¼. ſecundi videlicet 19. adijciatur ad ⅓. primi, nempe ad 8. vt fiant 27. atq; huius aggregati ½. hoc eſt, 13½. demus reſiduo primi, quod fuit 16. habebit primus 29½. Debebat autem habere 50. Defecimus ergo à veritate 20½. Operare iam per regulam, inueniesq; partem primi eſſe 52 12/17. ac proinde ſecundi 47 5/17. Nam primi ⅓. eſt 17 1/17. quam ſi deponat, remanent ei 35 5/17. Secundi ¼. eſt 11 12/17. quam ſi deponat, ſuperſunt ei 35 5/17. Aggregatum autem ex ⅓. primi, & ex ¼. ſecundi, id eſt, ex 17 1/17. & 11 12/17. eſt 29 5/17. cuius ½. videlicet 14 12/17. adiecta ad reſiduum primi, hoc eſt, ad 35 5/17. & ad reſiduum ſecundi, id eſt, ad 35 5/17. facit 50. & 50.

60. 24.
40. 76.
P X M
5. 25½.
Diuiſor.

12. Diuidatur numerus 1000. in duas partes, quarum maior superet minorem numero hoc 49. Finge, maiorem partem esse 600. ac proinde minorem 400. Superat autem illa hanc numero 200. & nos volebamus, excessum esse 49. Excessimus ergo veritatem numero 151. Finge deinde, maiorem partem esse 550. ac proinde minorem 450. Superat autem illa hanc numero 100. & nos volebamus, excessum esse 49. Excessimus ergo rursus veritatem numero 51. Operare secundum regulam, inueniesq; maiorem partem esse 524 $\frac{1}{2}$. ac propterea minorem 475 $\frac{1}{2}$. Illa enim hanc superat numero dato 49.

600.	550.	
400.	450.	
P X P		
151.	51.	
100.		
Diuisor.		

Quæst. 13. 13. Quidam habet duo pocula aurea, & vnum cooperculum 150. aureorum, quod additum priori poculo facit eius pretium triplũ pretii posterioris poculi, additum vero posteriori poculo facit illud eiusdem pretij cum priori. Quanti ergo constant duo illa pocula? Hic quæruntur duo numeri, quorum primus cum 150. triplus sit secundi, secundus vero cum 150. æqualis sit primo. Pone, prius poculum constare 30. aur. (Pono autem hunc numerum, quia additis 150. fit numerus, qui habet subtriplum sine fractione.) Addito cooperculo 150. aureorum, constabit 180. aur. & quoniam pretium hoc triplum esse debet pretii posterioris poculi, constabit posterius poculum 60 aur. Addito cooperculo, constabit 210. Debebat autem constare tantum 30. vt eius pretium æquale esset pretio prioris. Excessimus ergo veritatem numero 180. Pone deinde, prius poculum constare 90. aur. Addito cooperculo 150. aureorum, constabit 240. aur. ac proinde posterius poculum constabit 80. aur. cum ille numerus huius sit triplus. Addito cooperculo, constabit 230. Debebat autem constare tantum 90. vt eius pretium prioris pretio esset æquale. Excessimus ergo etiam hic veritatem numero 140. Operare per regulam, inueniesq; pretium prioris poculi 300. aur. Addito enim cooperculo 150. aur. fiet pretium 450. aur. atq; adeo pretium posterioris poculi erit 150. aur. subtriplum videlicet illius; additoq; cooperculo fiet pretium 300. aur. æquale pretio prioris.

30.	90.	
150.	150.	
M X P		
180.	240.	
180.	140.	
40.		
Diuisor.		

Quæst. 14. 14. Quidam habet duo pocula aurea, & vnum cooperculum 100. aureorum, quod additum priori poculo facit eius pretium triplum pretii posterioris: additum vero posteriori facit eius pretium duplum pretii prioris. Quanti ergo æstimantur duo illa pocula? Finge, prius valere 50. aur. addito cooperculo 100. aur. valebit 150. aur. ac proinde posterius valebit etiam 50. aur. cum ille numerus huius triplus sit. Addito cooperculo, valebit 150. aur. qui numerus duplus non est pretii prioris, sed numerus 100. duplus est illius pretii. Excessimus ergo veritatem numero 50. Pone rursus, prius valere 110. aur. Addito cooperculo, valebit 210. aur. ac propterea posterius valebit 70. aur. cum ille numerus huius sit triplus. Addito cooperculo valebit 170. aur. qui numerus duplus non est pretii prioris, sed numerus 220. eius duplus est. Defecimus ergo à veritate numero 50. Operare per regulam, inueniesq; pretiũ prioris poculi 80. aur. Addito n. cooperculo 100. aureorum, fiet pretium 180. aur. ac proinde pretium posterioris poculi erit 60. aur. subtriplum videlicet illius: additoq; cooperculo, fiet pretium 160. aur. duplum pretii prioris, quod erat 80. aur.

50.	110.	
100.	100.	
P X M		
150.	210.	
50.	50.	
100.		
Diuisor.		

Quæst. 15. 15. Quidam emit tot perdices, vt si emisset $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. illarum, & præterea 22. haberet 100. Quot ergo emit? Hic quæritur numerus, cuius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. cum 22. faciãt 100. Pone eum emisse 12. Huius numeri $\frac{1}{2}$. est 6. & $\frac{1}{3}$. 4. & $\frac{1}{4}$. 3. quæ partes faciunt 13. additisq; 22. fiunt 35. Debebant autem fieri 100. Defecimus ergo numero 65. Pone secundo, eũ emisse 60. Huius numeri $\frac{1}{2}$. est 30. & $\frac{1}{3}$. 20. & $\frac{1}{4}$. 15. q̃ partes faciunt 65. additisq; 22. fiunt 87. Debebãt a. fieri 100. Defecimus ergo iterũ numero 13. Operare per regulam, inueniesq;, eum emisse 72. perdices. Huius namq; numeri $\frac{1}{2}$. est 36. & $\frac{1}{3}$. 24. & $\frac{1}{4}$. 18. quæ partes conficiunt 78. additis a. 22. fiunt 100. quemadmodum propositum est.

12.	60.	
M X M		
65.	13.	
52.		
Diuisor.		

Quæst. 16. 16. Duo habent summam quandam aureorum: si secundus primo det 12. habebit primus sextuplo plus, quam secundus: si vero primus det 15. secundo, habebit secundus decuplo plus, quam primus. Quot ergo quisq; aureos habet? Hic quæruntur duo numeri, quorum primus cum 12. vnitatibus secundi sextuplus sit residui secundi, secundus vero cum 15. vnitatibus primi decuplus residui primi. Vt hanc, & similes quæstiones facilius sine fractionibus soluas, incipiendum erit à numero secundo. Finge ergo, secundum habere 20. ex quo si dentur 12. vnitates primo, habebit primus iuxta quæstionis pronunciationẽ, sextuplum residui secundi, quod est 8. Habebit tunc ergo primus 48. atq; adeo antequam 12. accepit à secundo, habuit 36. Iam vero si ex hoc numero 36. primi dentur 15. vnitates secundo, habebit secundus 35. qui numerus decuplus esse debet, iuxta quæstionis tenorẽ, residui primi, quod est 21. Constat autem, numerum 35. non esse decuplum numeri 21. sed numerum 210. Defecimus ergo à veritate numero 175. Pone rursus secundum habere 100. ex quo si detur 12. primo, habebit primus, vt vult quæstio, sextuplum residui secundi, quod est 88. Habebit ergo tunc primus 528. atq; adeo, antequam 12. accepit à secundo habuit 516. Iam vero si ex hoc numero 516. primi dentur 15 vnitates secundo, habebit secundus 115. qui numerus decuplus esse debet, vt quæstio vult, residui primi, quod est 501. constat autem, numerum 115. non esse decuplum numeri 501. sed numerum 5010. Defecimus ergo rursus à veritate numero 4895 Operare per regulam, inueniesq; secundum habere 17 $\frac{2}{3}$. ex quo si dentur 12. vnitates primo, habebit primus sextuplum residui secundi, quod est 5 $\frac{2}{3}$. Habebit ergo tunc primus 30 $\frac{1}{3}$. ac proinde, antequam à secundo accepit 12. habuit 18 $\frac{1}{3}$. Si enim ex hoc numero dentur secundo 15. vnitates, habebit secundus 32 $\frac{2}{3}$. qui numerus decuplus est residui primi, quod est 3 $\frac{1}{3}$. vt quæstio proponit.

20.	100.	
M X M		
175.	4895.	
4720.		
Diuisor.		

Quæst. 17. 17. Duo habent summã quandam aureorũ: Si secundus det 6. primo, habet primus duplum residui secundi; si vero primus secundo det 3. habebit secundus numerum æqualem residuo primi. Quot ergo aureos quisq; habuit? Hic etiam quæruntur duo numeri, quorum primus cum 6. vnitatibus secundi duplus sit residui secundi, secundus vero cum 3. vnitatibus primi æqualis residuo primi. Pone secundum habere 15. ex quo si dentur 6 vnitates primo, habebit primus 18. duplum videlicet residui secundi, quod est 9. atque adeo, priusquam acciperet

ret 6. à secundo, habuit 12. Iam vero si ex hoc numero dentur 3. vnitates secundo, habebit secundus 18. qui numerus æqualis non est residuo primi, quod est 9. sed maior. Excessimus ergo veritatem numero 9. Pone deinde, secundum habere 20. ex quo si dentur 6. vnitates primo, habebit primus 28. duplum videlicet residui secundi, quod est 14. Antequam ergo acciperet 6. à secundo, habuit 22. Iam vero si primus det secundo 3. vnitates, habebit secundus 23. qui numerus non est æqualis residuo primi, quod est 19. sed maior. Excessimus ergo rursus veritatem numero 4. Operare per regulam, inueniesque, secundum habere 24. ex quo si dentur 6. vnitates primo, habebit primus 36. nempe duplum residui secundi, quod est 18. Prius ergo habuit 30. atque adeo si det 3. vnitates secundo, habebit secundus 27. qui numerus æqualis est residuo primi, quod etiam est 27.

15.	20.	
P X P		
9.	4.	
5.		
Diuisor.		

Quæst. 18. 18. Est cisterna habens in fundo tres fistulas inæquales: per maximam reseratam effluit tota aqua in 2. horis, per mediam in 3. & per minimam in 6. Si ergo aqua semper æquabiliter effluat, quanto tempore effluet, si omnes tres fistulæ simul referentur? Finge in 4. horis, & dic. Si maior fistula in 2. horis euacuat 1. cisternam, quid euacuabit in 4. horis? inueniesq; 2. cisternas. Item, Si media fistula in 3. horis euacuat 1. cisternam, quantum exhauriet in 4. horis? inueniesq; 1 $\frac{1}{3}$. cistern. Item, Si minima fistula in 6. horis exhaurit 1. cisternam, quantum euacuabit in 4. horis? inueniesq; $\frac{2}{3}$. cistern. atq; ita omnes tres fistulæ in 4. horis euacuarent 4. cisternas. Nos autem volumus tantum 1. cisternam. Excessimus ergo veritatem numero 3. Pone secundo in 10. horis, & dic. Si maxima fistula in 2. horis exhaurit 1. cisternam, quantum exhauriet in 10. horis? inueniesq; 5. cisternas. Item si media fistula 1. cisternam euacuat in 3. horis, quantum euacuabit in 10. horis? reperiesq; 3 $\frac{1}{3}$. cistern. Item si minima fistula in 6. horis euacuat 1. cisternam, quid exhauriet in 10. horis? inueniesq; 1 $\frac{2}{3}$. cistern. atq; ita omnes tres fistulæ euacuarent in 10. horis 10. cistern. Nos autem volumus 1. cistern. Excessimus ergo veritatem numero 9. Operare per regulam, inueniesq; in 1. hora euacuari cisternam. Nam maxima fistula in vna hora exhauriet $\frac{1}{2}$. & media $\frac{1}{3}$. & minima $\frac{1}{6}$. quæ omnes partes conficiunt 1. cisternam.

4.	10.	
P X P		
3.	9.	
6.		
Diuisor.		

Hæc quæstio etiam ita proponi potest. Est cisterna habens in orificio tres canales inæquales. Per maximum impletur cisterna in 2. horis, per medium in 3. & per minimum in 6. &c.

Quæst. 19. 19. Est cisterna habens fistulam in orificio, per quam impletur in 12. horis: in imo vero fundo habet aliam fistulam, per quam euacuatur in 18. horis. Si igitur per superiorem continue influat aqua, & per inferiorem semper effluat, quanto tempore replebitur tota cisterna? Pone in 20. horis, & dic. Si in 18. horis euacuatur 1. cistern. quid euacuabitur in 20. horis? inueniesq; 1 $\frac{1}{9}$. cistern. Necesse est ergo in 20. horis impleri 2 $\frac{2}{9}$. cistern. vt eodem tempore euacuata 1 $\frac{1}{9}$. cisterna maneat 1. cisterna repleta. Dic ergo: si in 12. horis impletur 1. cisterna, quid implebitur in 20. horis? inueniesq; 1 $\frac{2}{3}$. cistern. Nos autem volumus 2 $\frac{2}{3}$. cister. Defecimus ergo à veritate numero hoc $\frac{2}{3}$. Pone secundo in 30. horis, & dic. Si in 18. horis euacuatur vna cisterna, quid euacuabitur in 30. horis? inueniesq; 1 $\frac{2}{3}$. cistern. Necesse est ergo in 30. horis impleri 2 $\frac{2}{3}$. cistern. vt eodem tempore euacuata 1 $\frac{2}{3}$. cistern. relinquatur 1. cisterna plena. Dic ergo. Si in 12. horis impletur in 1. cisterna, quid implebitur in 30. horis? Inueniesque 2 $\frac{1}{2}$. cistern. Nos autem volumus 2 $\frac{2}{3}$. cistern Iterum ergo à veritate defecimus hoc numero $\frac{1}{6}$. Operare per regulam, inueniesq; in 36. horis cisternam impleri. Nam in 36. horis superior fistula implebit 3. cisternas; inferior autem exhauriet 2. cisternas; atq; ita remanebit vna plena.

20.	30.	
M X M		
$\frac{4}{9}$.	$\frac{1}{6}$.	
$\frac{5}{72}$.		
diuisor.		

Quæst. 20. 20. Artifex quidam absoluit opus quoddam in 30. diebus; at si accedat alius, absoluent ambo idem opus in 18. diebus. Quanto ergo tempore secundus hic solus idem opus perficiet? Dic primo. Si primus artifex in 30. diebus absoluit opus, quantum absoluet in 18. diebus? inueniesq; $\frac{3}{5}$. operis. Eodem ergo tempore secundus absoluet $\frac{2}{5}$. vt ambo totum opus perficiant. Pone ergo primo secundum absoluere totum opus in 40. diebus, & dic. Si secundus in 18. diebus absoluit $\frac{2}{5}$. operis, quantum absoluet in 40. diebus? inueniesq; $\frac{8}{15}$. operis. Nos autem posuimus eum absoluere totum opus. Defecimus ergo à veritate hoc numero $\frac{1}{3}$. Pone deinde secundum absoluere opus in 60. diebus, & dic. Si secundus in 18. diebus absoluit $\frac{2}{5}$. operis, quantum absoluet in 60. diebus? inueniesq; 1 $\frac{1}{5}$. Nos autem posuimus eum absoluere 1. opus. Excessimus ergo veritatem hoc numero $\frac{1}{5}$. Operare per regulam, inueniesq; secundum absoluere opus totum in 45. diebus. Nam si in 18. diebus absoluit $\frac{2}{5}$. operis, absoluet in 45. diebus 1. opus.

40.	60.	
M X P		
$\frac{1}{5}$.	$\frac{3}{5}$.	
$\frac{4}{5}$.		
Diuisor.		

Alia solutio huius quæstionis.

Facilius tamen sine regula falsi hæc quæstio soluetur, hoc modo. Postquam inuenisti, secundum in 18. diebus absoluere $\frac{2}{5}$. operis, ita vt superfint $\frac{3}{5}$. Dic. Si $\frac{2}{5}$. requirunt 18. dies, $\frac{3}{5}$. quot dies requirent? inueniesq; 27. dies, qui additi ad 18. faciunt 45. dies, quibus totum opus perficiet, vt prius. Vel certe dic. Si $\frac{2}{5}$. requirunt 18. dies, quot dies requiret 1. opus integrum? Inuenies namq; rursum 45. dies, vt prius.

Quæst. 21. 21. Tres inter se ita luserunt, vt statim primus lucratus sit $\frac{1}{2}$. pecuniæ secundi: postea vero secundus $\frac{1}{3}$. pecuniæ tertii: tertius deniq; $\frac{1}{4}$. pecuniæ eius, quam primus in ludum attulit. Finito autem ludo, quisq; ipsorum 700. aur. habuit: quantum ergo pecuniæ quisque in ludum attulit? Hic aliud nihil quæritur, quam vt datus numerus 2100. (Si enim singuli habent 700. habebunt omnes tres 2100.) in tres partes distribuatur, ita vt, si prima det $\frac{1}{4}$. tertiæ, accipiat vero $\frac{1}{2}$. secundæ: secunda autem accipiat $\frac{1}{3}$. tertiæ, fiant tres numeri æquales, nempe 700. 700. 700. Vel certe quæruntur tres numeri, quorum primus deposita $\frac{1}{4}$. si accipiat $\frac{1}{2}$. secundi, faciat 700. similiter secundus, deposita $\frac{1}{2}$. cum $\frac{1}{3}$. tertii faciat 700. eodemq; modo tertius, deposita $\frac{1}{3}$. cum $\frac{1}{4}$. primi faciat 700. Pone primum lusorem attulisse 100. aur. deposita $\frac{1}{4}$. nempe 25. supersunt ei 75. Et quia hoc residuum cum $\frac{1}{2}$. secundi debet facere 700. erit $\frac{1}{2}$. secundi 625.

1250.	1100.	
225.	450.	
M X M		
525	350.	
175.		
diuisor.		

quod hic numerus cum residuo primi, nempe cum 75. faciat 700. Attulit ergo secundus 1250. Postquam autem perdiderit $\frac{1}{5}$. remanebunt ei 625. Quoniam vero residuum hoc cum $\frac{1}{3}$. tertii debet facere 700. erit $\frac{1}{3}$. tertii 75. quod hic numerus cum residuo secundi faciat 700. Quare tertius secum attulit in ludum 225. Postquam autem perdiderit $\frac{1}{3}$. supererunt ei 150. Et quia hoc residuum cum $\frac{1}{4}$. primi, h.e. cum 25. facit 175. Debebat autē facere 700. defecimus, ppterea à veritate numero 525. Qui defectus hinc etiā cognoscitur, q̄ tres numeri positi 100. 1250. 225. faciunt 1575. qui numerus à 2100. quē numerum oēs tres conficere debent, deficit hoc numero 525.

Pone deinde, primum attulisse in ludum 200. aur. Deposita $\frac{1}{4}$. nempe 50. superlunt ei 150. aur. qui cum $\frac{1}{2}$. secundi facere debent 700. Erit ergo $\frac{1}{2}$. secundi 550. aur. Attulit ergo secum 1100. Perdita autem $\frac{1}{3}$. supersunt ei 550. aur. qui cum $\frac{1}{3}$. tertii facere debent 700. Erit ergo $\frac{1}{3}$. tertii 150. ac proinde in initio ludi habuit 450. Amissa autem $\frac{1}{5}$. remanent ei 300. aur. qui cum $\frac{1}{4}$. primi, hoc est, cum 50. faciunt 350. Debebant a. facere 700. Defecimus ergo etiam nunc à veritate numero 350. Qui defectus hinc quoq; elici potest, quod tres numeri positi 200. 1100. 450. faciunt 1750. qui numerus à 2100. deficit hoc numero 350. Operare per regulam, inuenieſq; primum lusorē attulisse 400. aur. secundum 800. & tertium 900. Numeros porro hos secundi & tertii inuenies vel ex regula falsi, multiplicando errores per secundi ac tertii positiones, &c. vel ex primo inuento, quemadmodum paulo ante ex 100. & 200. quos numeros posuimus primum habere, numeros secundi, ac tertii inuestigauimus. Nam si primus habet 400. habebit (deposita $\frac{1}{4}$. nimirum 100. quam perdidit) 300. & quia cum $\frac{1}{2}$. secundi debet habere 700. erit $\frac{1}{2}$. secundi 400. ac proinde secundus attulit 800. Amissa autem $\frac{1}{3}$. supererunt ei 400. Quoniam vero hæc $\frac{1}{2}$. cum $\frac{1}{3}$. tertii facere debet 700. erit $\frac{1}{3}$. tertii 300. propterea q; tertius attulit 900. Amissa enim $\frac{1}{5}$. remanebunt ei 600.

Quæſt. 22. quibus si addatur $\frac{1}{4}$. primi, hoc est, 100 aur. habebit 700. vt quæstio vult.

22. Tres mercatores lucrati sunt 400. aur. quos, habita ratione pecuniæ, quam quisq; posuit, ita distribuerunt, vt secundi portio superaret portionem primi numero 12. tertii vero portio excederet portionem secundi numero 16. Quanta ergo fuit portio cuiusq;? Finge, primū accepisse 1. aur. (volo enim quæstionem hanc soluere per minimos numeros, nempe per positionem 1. & 2. vt clarius appareat generalitas huius regulæ falsi.) ac proinde secundum 13. & tertium 29. qui omnes numeri conficiunt 43. Debebant autem conficere 400. Defecimus ergo à veritate numero 357. Finge rursus, primum accepisse 2. aur. atq; adeo secundum 14. & tertium 30. qui omnes numeri conficiunt 46. Debebant a. conficere 400 Defecimus ergo etiā nunc à veritate numero 354. Operare per regulā, inuenieſq; primi portionē esse 120. aur. secundi 132. & tertii 148. qui tres numeri conficiunt summā 400. aur. vt in quæstione proponitur.

	1.	2.	3.
	13.	14.	
M	29.	M 30.	
	43.	46.	
	357.	354.	
			Diuisor.

Quæſt. 23. 23. Imperatoris exercitus contra Turcas continet 40000. Germanorum: peditum, tot vero Italos, & Hungaros, vt numerus Italorum sit $\frac{1}{2}$. Germanorum, atq; Hungarorum: numerus vero Hungarorum sit $\frac{1}{3}$. Germanorum atq; Italorum. Quantus ergo est Italorum, & quantus Hungarorum numerus atq; adeo quantus totus exercitus? Finge, Italos esse 30000. Et quoniam hic numerus debet esse $\frac{1}{2}$. Germanorum, atq; Hungarorum, erunt Germani, atq; Hungari 60000. Cum ergo Germani sint 40000. erunt Hungari 20000. qui debent conficere $\frac{1}{2}$. Germanorum, atq; Italorum, nempe numeri 70000. Conficiunt autem $\frac{1}{3}$. numeri 60000. Excessimus ergo veritatem numero 10000. Finge secundo, Italos esse 24000. Et quoniam hic numerus debet esse $\frac{1}{2}$. Germanorum, atq; Hungarorum, erunt Germani, atq; Hungari 48000. Cum ergo Germani sint 40000. erunt Hungari 8000. qui debent conficere $\frac{1}{2}$. Germanorum, atq; Italorum, nempe numeri 64000. Conficiunt autem $\frac{1}{3}$. numeri 24000. Excessimus ergo rursus veritatem numero 40000. Operare per regulam, inuenieſq; Italos esse 32000. Hungaros vero 24000. ac proinde totum exercitum 96000. Nam hac ratione Itali conficiunt $\frac{1}{2}$. Germanorum, atq; Hungarorum, Hungari vero $\frac{1}{3}$. Germanorum, atq; Italorum, vt patet.

	30000.	24000.
	20000.	8000.
P X P		
	10000.	40000.
	30000.	
	diuisor.	

Quæſt. 24. 24. Visum est hic apponere artificium illud Archimedis, quo teste Vitruuio lib. 9. cap. 3. deprehendit furtum aurificis cuiusdam in corona aurea, hoc est, quantum argenti fuerit commistum, nō dissoluta corona. Cum enim Hiero rex statuisset Diis suis votiuum offerre coronam ex puro auro, aurifex, sublata auri portione, argenti tantundem commiscuit. Indignatus vero Hiero se contemptum, (vt verbis Vitruuii vtar) neq; inueniens, qua ratione id furtum deprehenderet, rogauit Archimedem, vti in se sumeret sibi de eo cogitationem. Tunc is, cum haberet eius rei curam, casu venit in balneum, ibiq; cum in solium descenderet, animaduertit, quantū corporis sui in eo insideret, tantum aquæ extra solium effluere. Itaq; cum eius rei rationem explicationis offendisset, non est moratus, sed exiluit gaudio motus de solio, & nudus vadens domū versus significabat clara voce, inuenisse, q̄ quæreret. Nā currens iuentidem græce clamabat εὕρηκα, εὕρηκα. Tū vero ex eo inuentionis cōgressu duas dicitur fecisse massas æquo pondere, quo etiā fuerat corona, vnam ex auro, alterā ex argento. Cum ita fecisset, vas amplū ad summa labra impleuit aqua, in quo demisit argenteam massam, cuius quanta magnitudo in vase depressa est, tantū aquæ effluxit: ita exempta massa, quāto minus factum fuerat, refudit, sextario mensus, vt eodē modo, quo prius fuerat ad labra æquaretur. Ita ex eo inuenit, quantū ad certū pondus argenti certa aquæ mensura respōderet. Cū id expertus esset, tum aureā massam similiter pleno vase demisit, & ea exempta eadem ratione, mensura addita, inuenit ex aqua nō tantum defluxisse, sed tantum minus, quantū minus magno corpore eodem pondere auri massa esset, q̄ argenti. Postea vero repleto vase in eadem aqua ipsa corona demissa, inuenit plus aquæ defluxisse in coronam, quam in auream eodem pondere massam, & ita ex eo, quod plus defluxerat aquæ in corona, q̄ in massa, ratiocinatus, deprehendit argentū in auro mixtionem. Hactenus Vitruuius. Explicemus a nos, quo pacto per regulam falsi furtum dictum deprehendi possit, si adhibeatur artificium illud Archimedis.

Ponatur exempli causa, coronam illam fuisse 100. lib. caq; imposita in vase effluxisse 65 lib. aquæ, imposita vero massa puri auri 100. lib. effluxisse 60. lib. aquæ; imposita tandem massa pura argenti 100. lib. effluxisse 90. lib. aquæ. Finge ergo, aurificem abstulisse 40. lib. aur. totidemq; libras argenti substituisse, ita vt in corona fuerint 60. lib. auri, & 40. lib. argenti. Vide iam, an corona ita confecta ejiciat 65. lib. aquæ, quod ita scies. Dic. Si 100. lib. aur. ejiciūt 60. lib. aquæ, quantum aquæ ejicient 60. lib. auri? Itē si 100. lib. argenti expellunt 90. lib. aquæ, quantum aquæ expellent 40. lib. argenti? Inueniesq; in vtraq; operatione 36. lib. aquæ, ita vt corona ejiciat 72. lib. aquæ. Debebat autem ejicere tantum 65. lib. Excessimus ergo veritatem numero 7. Finge secundo, aurificem surripuisse 30. lib. auri, ac proinde in corona fuisse 70. lib. auri, & 30. lib. argenti. Dic ergo. Si 100. lib. auri expellunt 60. lib. aquæ, quantum aquæ expellent 70. lib. auri? Item, si 100. lib. argenti ejiciunt 90. lib. aquæ, quantum

	60.	70.
	40.	30.
P X P		
	7.	4.
	3.	
	diuisor.	

aquæ ejicient 30. lib. argenti? Inueniesque in priori operatione 42. lib. aquæ, in posteriori vero 27. quæ efficiunt 69. lib. aquæ. Debebant autem esse tantum 65. lib. Rursus ergo excessimus veritatem numero 4. Operare per regulam, inuenieſq;, aurificem accepisse $16\frac{2}{3}$. lib. auri, atq; adeo, coronam illam mixtam fuisse ex $83\frac{1}{3}$. lib. auri, & ex $16\frac{2}{3}$. lib. argenti. Quod vt probes, dic. Si 100. lib. auri ejiciunt 60. lib. aquæ, quantum aquæ ejicient $83\frac{1}{3}$. lib. auri? Item, si 100. lib. argenti ejiciunt 90. lib. aquæ, quantum aquæ ejicient $16\frac{2}{3}$. lib. argenti? Inueniesque in priori operatione 50. lib. aquæ, in posteriori vero 15. lib. aquæ, quæ omnes conficiunt 65. libras aquæ, quas posuimus coronam ejicere.

Eodem modo deprehensum fuisset furtum, etiamsi massæ auri, & argenti non fuissent 100. lib. quot libras habebat corona, sed quotcunque librarum, nempe auri 10. lib. v. g. & argenti 20. dummodo diligenter exploretur, quantum aquæ singulæ massæ ejiciant. Nos ponamus 10. lib auri ejicere 6. lib. aquæ. at 20. lib. argenti ejicere 18. lib. aquæ. Vnde in priori positione dices. Si 10. lib. aur. ejiciunt 6. lib. aquæ, quantum aquæ ejicient 60. lib. auri? &c.

	100.	101.
	200.	199.
— P X P		—
	4.	$3\frac{2}{3}\frac{2}{3}$.
		Diuisor.

Si ponatur corona 300. lib. & massæ auri, argentique totidem lib. hac conditione, vt corona ejiciat 218. lib. aquæ, aurum vero 206. lib. aquæ, & argentum 230. lib. aquæ; inueniemus in corona fuisse 150. lib. auri, totidemq; argenti. Vt patet in hisce duabus positionibus, in quarum priore statuuntur 100. lib. auri, & 200. lib. argenti: in posteriore autem 101. lib. aur. & 199. argenti, &c.

Hoc ergo artificio deprehendetur in quacunque massa ex auro, argentoque commixta, quantum auri, quantumque argenti permixtum sit.

PROGRESSIONES ARITHMETICÆ.

CAPVT XXIV.

Progreſſio Arithmetica quid.

PROGRESSIO Arithmetica est series plurium numerorum se æqualiter superantium, vt hic.

Progreſſio naturalis numerorum incipiens ab 1.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. &c.

Progreſſio numerorum imparium incipiens ab 1.

1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21. 23. 25. 27. &c.

Pregreſſio numerorum parium incipiens à 2.

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20. 22. 24. 26. 28. &c.

Progreſſio naturalis numerorū, & numerorum imparium parium quid.

Prima enim harum trium progressionum dicitur progressio naturalis numerorum, incipitque ab 1. in qua omnes numeri se ordine superant vnitate. Secunda vero dicitur progressio numerorum imparium, incipitque ab 1. in qua omnes numeri se ordine superant binario. Tertia denique appellatur progressio numerorum parium, incipitque à 2. qui est primus numerus par, quemadmodum & 1. est primus numerus impar, atque adeo primus omnium numerorum, licet impropric. In hac autem progressione numerorum parium omnes numeri se ordine superant etiam binario, quemadmodum & in progressione numerorum imparium. Eodem modo hic.

Aliæ progreſſiones.

2. 5. 8. 11. 14. 17. 20. 23. 26. 29. &c.

4. 8. 12. 16. 20. 24. 28. 32. 36. 40. &c.

Prior namque harum progressionum incipit à 2. progrediturque per 3. cum omnes numeri in ea se ordine superent ternario: posterior vero incipit à 4. progrediturque per eundem numerum 4. cum in ea omnes numeri se ordine superent quaternario.

Arithmetica progreſſio quo pacto continuetur.

Continuatur quælibet progressio Arithmetica, si differentia, excessusue numero illi addatur, post quem progressio extendenda est. Vt si progressio hæc, 4. 9. 14. 19. 24. continuanda sit, addemus differentiam, siue excessum progressionis, nempe 5. (quam quidem differentiam, excessumue inuenimus, si primum progressionis numerum à secundo, vel quemuis alium à proxime maiore in eadem progressione subtrahamus.) vltimo numero 24. efficiemusque 29. Huic iterum numero adiiciemus 5. componemusque 34. & ita deinceps in infinitum. Sic etiam, si quis progressionem incipere velit à 7. & progredi per differentiam, excessumue 6. addenda erunt 6 ad 7. vt fiant 13. pro secundo numero progressionis: Item 6. ad 13. vt fiant 19. pro tertio numero, &c.

Differētia progreſſionis Arithmetica quo modo inueniatur.

Pari ratione progressio Arithmetica continuatur retrocedendo, si differentia progressionis à minori extremo subducatur. Vt si progressio hæc 30. 37. 44. 51. 58. continuanda sit versus minores numeros, auferemus differentiam 7. ex minori extremo 30. vt relinquantur 23. Ex his rursus subducemus 7. vt remaneant 16. Ex his rursus subducemus 7. vt supersint 9. à quibus rursus auferemus 7. vt supersint 2. à quibus amplius auferri nequeunt 7. ac propterea dicta progressio amplius non potest decrescere. Sic etiam, si quis progressionem inchoare velit à 40. & progredi per 4. versus vnitatem, auferenda erunt 4. ex 40. vt relinquantur 36. Item 4. ex 36. vt remaneant 32. Rursus 4. ex 32. vt supersint 28. Item 4. ex 28. vt relinquantur 24. &c.

Progreſſio Arithmetica decrescere non potest in infinitum.

Proprium est progressionis Arithmeticæ trium numerorum, vt aggregatum extremorum æquale sit duplo medii numeri, vt hic apparet, 7. 18. 29. demonstraturque à Iordano lib. 1. propos. 2.

Proprietas progreſſionis Arithmeticæ triū numerorū.

Pregressionis vero Arithmeticæ quatuor numerorum proprium est, vt aggregatum extremorum æquale sit aggregato mediorum; veluti hic apparet, 4. 12. 20. 28. demonstraturque à Iordano lib. 1. propos. 3. Atque hoc non solum verum est in quatuor numeris sese continue eodem numero superantibus, quales sunt numeri in dato exemplo; sed etiam in quatuor, quæ non continue se superant eodem numero, dummodo eadem sit differentia inter primum ac secundum, quæ inter tertium, ac quartum; vt hic vides 4. 12. 30. 38.

Proprietas progreſſionis Arithmeticæ quatuor numerorum.

Ex his proprietatibus colligitur, in omni progressione Arithmetica, cuius numerus terminorum est impar, aggregatum extremorum æquale esse cuilibet aggregato duorum numerorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium, nec non duplo medii numeri. Vt hic apparet.

F 3 3. 7. 11.

Proprietas progreſſionis Arithmeticæ quotcunq; terminorum, ſi numerus terminorum fuerit impar.

3.7.11.15.19.23.27.31.35.39.43.

Cum enim quatuor hi numeri 3.7.39.43. habeant eandem differentiam, licet non continuatam (Nam eadem est differentia inter 3.&7. quæ inter 39.&43.) erit, ex iis, quæ proxime diximus, aggregatum extremorum 3.&43. æquale aggregato mediorum 7.&39. Eadem ratione aggregatum ex 7.&39. æquale erit aggregato ex 11.&35. quod hi quatuor numeri 7.11.35.39. habeant eandem differentiam, licet non continuatam & ita de reliquis, donec ad tres medios numeros 19.23.27 perueniamus; qui cum habeant eandem differentiam, erit, per ea, quæ paulo ante docuimus, aggregatum extremorum 19.&27. æquale duplo medii numeri 23. Eadem est ratio de omnibus aliis huius generis progressionibus Arithmeticis.

Proprietas progressionis Arithmeticæ quotcunq; terminorũ, si numerus terminorũ fuerit par.

Ex posteriore quoque proprietate efficitur, in omni progressione Arithmetica, cuius numerus terminorum est par, aggregatum extremorum æquale esse cuilibet aggregato duorum numerorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium. Vt hic manifestum est.

3.7.11.15.19.23.27.31.35.39.

Quod probabimus, vt prius, hoc dempto, quod postremo loco sumendi sunt quatuor numeri medii 15.19.23.27. non autem tres tantum, vt prius; quia hic non est vnicus numerus medius, sed duo. Nunc sequuntur regulæ ad Arithmeticas progressiones spectantes.

REGVLA I.

Summa cuiuscunq; progressionis Arithmeticæ quo pacto inueniatur.

SI in quauis progressione Arithmetica notus fuerit numerus terminorum vna cum minore, & maiore extremo, perueniemus in cognitionem summæ omnium terminorum, hac ratione. Addatur primus terminus vltimo, & aggregatum per numerum terminorum multiplicetur. Dimidium enim numeri producti erit summa omnium terminorum. Vt in hac progressione.

4.7.10.13.16.19.22.25.28.31.34.37.

Ex 4.&37. fiunt 41. quæ multiplicata per numerum terminorum, hoc est, per 12. (Sunt enim 12. numeri in ea progressione) faciunt 492. Huius numeri dimidium 246. est summa omnium numerorum datæ progressionis. Eademq; ratio est de cæteris.

Summa cuiuscunq; progressionis Arithmeticæ quo pacto aliter inueniatur.

Hæc regula à nonnullis diuiditur in duo membra, hoc modo. Quando numerus terminorum est par, multiplicant aggregatum ex primo, & vltimo termino per dimidium numeri terminorum. Si vero numerus terminorum est impar, multiplicant dimidium aggregati ex primo, & vltimo termino (quando enim numerus terminorum est impar, semper illud aggregatum est par) per numerum terminorum. Hac enim ratione semper producitur summa omnium numerorũ progressionis. Vel hoc modo. Quando aggregatum ex primo, & vltimo termino est par, multiplicant eius dimidium per numerum terminorum, siue is par sit, siue impar. Si vero aggregatum illud est impar, multiplicant illud per dimidium numeri terminorum, qui numerus tunc semper par est. Vt in superiori exemplo, quia numerus terminorum est par, nempe 12. vel quia aggregatum ex primo termino, & vltimo est impar, videlicet 41. multiplicant illud per 6. dimidium numeri terminorum, efficiuntque summam omnium numerorum 246. vt prius. In his autem duabus progressionibus, in quarum priore numerus terminorum est par, nempe 10. & in posteriori impar, nempe 11. quoniam aggregatum ex primo termino, & vl-

3.7.11.15.19.23.27.31.35.39.

4.7.10.13.16.19.22.25.28.31.34.

timo est par, nimirum 42. in priore, & 38. in posteriore, multiplicant tam dimidium illius, nimirum 21. per 10. numerum terminorum, quam dimidium huius, quod est 19. per 11. numerum terminorum, vt in priori efficiant summam 210. & in posteriori 209.

Ratio harum regularum hæc est. Quoniam supra diximus, quando numerus terminorum est par, aggregatum extremorum æquale esse cuilibet aggregato duorum quorumlibet numerorum ab extremis æqualiter distantium, fit, vt omnia aggregata simul sint tot, quot vnitates sunt in dimidio numeri terminorum. Quare si vnum aggregatum, nempe extremorum multiplicetur per dimidium numeri terminorum, producetur summa omnium aggregatorum. Rursus quia docuimus, quando numerus terminorum est impar, aggregatum extremorum esse æquale cuilibet aggregato duorum quorumlibet numerorum ab extremis æqualiter distantium, necnon duplo medii numeri, fit, vt medius numerus sit dimidium cuiuslibet aggregati. Ergo omnia aggregata simul, vna cum medio numero, continebunt tot dimidia vnius aggregati, quot sunt termini. Si igitur dimidium vnius aggregati, nempe extremorum, multiplicetur per numerum terminorum, producetur summa omnium terminorum.

Itaque, vt vides, satis est, vt cognoscatur primus terminus, & vltimus, vna cum numero terminorum, ad eliciendam summam totius progressionis, etiamsi intermedii termini ignorentur. Quo pacto autem ex primo numero cognito, vna cum numero terminorum, & differentia progressionis, vltimus terminus inuestigetur, sequenti regula explicabimus.

Particularis inuentio summæ progressionis naturalis numerorum. Numerus terminorũ progressionis naturalis numerorum est vltimus terminus.

In progressione autem naturali numerorum, quæ ab 1. incipit, inuenietur breuissime summa omnium terminorum, hoc modo. Multiplicetur vltimus numerus (qui semper indicat numerum terminorum) per numerum proxime maiorem. Huius enim numeri producti dimidium est summa omnium terminorum. Vt hic.

1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.

Ex multiplicatione vltimi numeri 11. per 12. numerum proxime maiorem producitur numerus 332. cuius dimidium 66. est summa totius progressionis. Sic etiam in hac progressione.

1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.

Ex multiplicatione vltimi numeri 10. per 11. numerum proxime maiorem fit numerus 110. cuius dimidium 55. est totius progressionis summæ.

Itaque si quis velit summam progressionis naturalis, quæ terminetur in quouis numero dato, vt in 100. in qua nimirum sint 100. termini, multiplicandus erit vltimus numerus datus, in quo progressio dicitur terminari, vt hic

vt hic numerus 100. per numerum proxime maiorem, vt hic per 101. Nam producti numeri (qui hic est 10100.) dimidium, nempe 5050. in dato exemplo, erit summa dictæ progressionis. Eademq; ratio est in aliis.

Alia inuentio summæ progressionis naturæ lis numerorum.

Alii hanc etiam regulam distrahunt in duo membra, hoc modo. Si vltimus numerus est par, multiplicant numerum proxime maiorem in dimidium vltimi numeri: Si vero est impar, multiplicant eum in dimidium numeri proxime maioris. Hac enim ratione semper producitur summa omnium numerorum progressionis. Vt in posteriori progressione naturali, multiplicant 11. numerum proxime maiorem vltimo numero per 5. dimidium vltimi numeri, faciuntq; 55. summam totius progressionis, vt prius. In priori autem progressione naturali, multiplicant 11. vltimum numerum per 6. dimidium numeri proxime maioris vltimo numero, efficiuntq; 66. summam totius progressionis, vt prius.

Particularis inuentio summæ numerorum imparium.

In progressione quoq; numerorum imparium, quæ ab 1. incipit, inuenietur facillimo negotio summa omnium terminorum, si numerus terminorum in seipsum multiplicetur, vt hic.

1.3.5.7.9.11.13.15.17.19,

Ex multiplicatione numeri terminorum, qui est 10. in seipsum procreatur numerus 100. qui est summa totius progressionis.

Numerus terminorũ in progressione numerorum imparium quo pacto reperiatur.

Habetur autem numerus terminorum, si vltimo numero adiiciatur 1. & compositi numeri dimidium sumatur, vt in dato exemplo, si addatur 1. ad 19. fit numerus 20. cuius dimidium 10 indicat numerum terminorum.

Particularis inuentio summæ numerorum parium. Numerus terminorũ in progressione numerorum pariũ quæ ratione inueniatur.

Itaq; si quis velit summam progressionis numerorum imparium, quæ terminetur in quovis dato numero, vt in 67. addenda erit vnitas ad vltimum numerum, in quo progressio terminari dicitur, vt hic ad 67. Nam compositi numeri (qui hic est 68.) dimidiũ, nempe 34. in dato exemplo, dabit numerum terminorum: qui in se multiplicatus producet summam illius progressionis. Vt in proposito exemplo, in quo ponuntur 34. termini, si multiplicetur numerus 34. in se, procreabitur summa illius progressionis 1156. Atq; ita de cæteris.

In progressione denique numerorum parium, quæ à 2. incipit, nullo etiam labore reperietur summa. si dimidium vltimi numeri, quod semper indicat numerum terminorum progressionis, (semper enim tot sunt termini progressionis eiusmodi numerorum parium, quot sunt vnitates in dimidio vltimi termini.) multiplicetur per numerum proxime maiorem illo dimidio. Vt hic.

2.4.6.8.10.12.14.16.18.20.22.24.

Ex multiplicatione 12. (qui numerus est dimidium vltimi termini, vel numerus terminorum) per 13. numerum proxime maiorem illo dimidio, fit numerus 156. hoc est, summa omnium illorum numerorum parium.

Particularis inuentio summæ numerorum parium. Numerus terminorũ in progressione numerorum pariũ quæ ratione inueniatur.

Itaq; si quis velit summam progressionis numerorum parium, quæ terminetur in quolibet dato numero vt in 100. multiplicandus erit numerus, qui dimidium conficit numeri vltimi dati, in quo dicitur terminari progressio, vt numerus 50. in dato exemplo, (hic enim dimidium est vltimi numeri dati 100.) per numerum proximè maiorem illo dimidio, vt hic per 51. Productus enim numerus vt 2550. in dato exemplo, erit summa illius progressionis; & numerus terminorum erit 50. in eodem exemplo, quot nimirum vnitates sunt in dimidio vltimi numeri. Et sic de aliis.

REGVLA II.

Vltimus terminus cuiuscunq; progressionis Arithmeticæ quo pacto elicitur ex numero terminorum vna cum primo termino, & differentia progressionis. Quæstio de bobus Augiæ.

SI in quauis progressione Arithmetica notus fuerit numerus terminorũ; vnà cum primo termino, & differẽtia progressionis, inueniemus vltimum terminum, etiamsi intermedios terminos non habeamus, hoc modo. Ex numero terminorum abijciatur 1. reliquus vero numerus per differentiam multiplicetur, ac tandem huic producto primus terminus adijciatur. Numerus n. cõpositus erit vltimus terminus. Vt si primus terminus alicuius progressionis sit 3. numerus autem terminorũ sit 10. & differentia 8. cognoscemus decimum terminum, hoc est, vltimum huius progressionis sine intermedijs, hac ratione. Ex 10. numero terminorum auferemus 1. & reliquum numerum 9 multiplicabimus per 8. differentiam progressionis, producto tandem numero 72. adijciemus 3. primum terminum. Compositus enim numerus 75. est decimus terminus progressionis, cuius primus terminus est 3. & differentia 8. Veluti hic apparet, vbi omnes termini ponuntur.

3.11.19.27.35.43.51.59.67.75.

Itaque si quis hanc quæstionem proponat. Augias Herculi de numero boum, quos habebat, interroganti respondit, boues suos omnes per loca 40. ita esse dispositos, vt quoties in primo loco continentur tres boues, toties in secundo contineantur 5. in tertio toties 7. in 4. toties 9. &c. Accessit Hercules ad primum locum, & reperit boues 30. Quot igitur boues habuit Augias, & quot boues in vltimo loco fuerunt? Soluenda erit hoc modo. Quoniam in primo loco sunt decies 3. boues, erunt in secundo loco decies 5. nimirum 50. & in tertio decies 7. nempe 70. & sic deinceps, vt sit progressio quædam Arithmetica, cuius primus terminus sit 30. differentia vero 20. & numerus terminorum 40. Eliciendus ergo est primùm vltimus terminus per regulam, hoc modo. Ex 40. numero terminorum abijciatur 1. & reliquus numerus 39. per 20. differentiam multiplicetur, productoque numero 780. primus terminus 30. adijciatur. Fiet enim vltimus terminus, siue quadragesimus, 810. atque tot boues fuerunt in vltimo loco.

Deinde vero ex hoc vltimo termino inuento & ex primo dato, vnà cum numero terminorũ eruenda per primam regulam summa totius progressionis, etiamsi non habeamus intermedios omnes terminos, hoc modo. Primus terminus 30. vltimo termino 810. adijciatur compositusque numerus 840. per 20. hoc est, per dimidium numeri terminorum, multiplicetur. Productus namque numerus 16800. est summa totius progressionis, atque adeo numerus boum Augiæ. Vt autem videas, quot boues in singulis locis fuerint, atque adeo in vltimo loco fuisse 810. apposuimus hic totam progressionem.

30. 50. 70. 90. 110.130.150.170.190.210.230.250.270.290.310.330.350.370.390.410.
430.450.470.490.510.530.550.570.590.610.630.650.670.690.710.730.750.770.790.810.

Quæstio de ducibus militũ.

Similis erit quæstio, si quis ita dicat. Imperator strenuis ducibus numero 20. distribuit pecuniam in direptione vrbis inuentam, hac lege, vt ei, qui vltimus murum hostilem transcẽderat, daret 100. aur. penultimo 130. antepenultimo 160. & ita deinceps eodẽ modo progrediẽdo. Quanta ergo fuit ea summa pecuniæ, & quantum,

qui primus murum transcendit,accepit ? Si namque ex 20.numero terminorum(tot enim sunt termini in illa progressione, quot sunt duces.) auferas 1.& reliquum numerum 19.multiplices per 30.differentiã progressionis,productoque numero 570.adiicias primum numerum, nempe 100.efficies 670. pro vltimo progressionis termino : atque tot aureos habuit primus dux. Inuento autem vltimo termino,si ei addatur primus, nimirum 100.vt fiant 770.atque hic numerus per 10.dimidium numeri terminorum multiplicetur,fiet summa omnium terminorum 7700. Tanta ergo fuit summa pecuniæ distributæ. Tota vero progressio ita se habet.

100.130.160.190.220.250.280.310.340.370. 400.430.460.490.520.550.580.610.640.670.

PROGRESSIONES GEOMETRICÆ.

CAPVT XXV.

Progressio Geometrica quid.

PROGRESSIO Geometrica est series plurium numerorum se in eadem proportione superantium, vt hic apparet.

1.2.4.8.16.32.64.128.256.512.1024.2048.&c.
1.3.9.27.81.243.729.2187.6561.19683.&c.
3.6.12.24.48.96.192.384.768.1536.&c.

Prima enim harum progressionum progreditur per proportionem duplam, ita vt quilibet numerus sit duplo maior eo numero, qui eum proxime præcedit; Secunda vero per triplam, ita vt quilibet numerus sit triplo maior eo, qui proxime eum antecedit; atque vtraque harum progressionum ab 1.incipit; tertia deniq; per duplam etiam proportionem progreditur, non tamen ab 1.sed à 3.initium sumit.

Geometrica progressio quo pacto continuetur.

Continuatur quælibet progressio Geometrica; si per denominatorem proportionis numerus ille, post quem progressio extendenda est,multiplicetur. Vt sit progressio hæc proportionis triplæ,4.12.36.continuanda sit,multiplicabimus vltimum numerum 36.per 3 denominatorem proportionis, (quem quidem denominatorem inueniemus, si secundum numerum per primum diuidamus, vel quemuis alium per proximè minorem in eadem progressione.)efficiemusque 108.Hunc iterum numerum per 3.multiplicabimus,producemusque 324.& ita deinceps in infinitum.Sic etiam, si quis progressionem incipere velit à 7.& progredi per proportionem quincuplam, cuius denominator est 5. multiplicanda erunt 7. per 5. vt fiant 35. pro secundo numero progressionis. Item 35.per 5.vt fiant 175.pro tertio numero,&c.

Denominator proportionis in progressione Geometrica quomodo inueniatur.

Pari ratione progressio Geometrica continuatur retrocedendo,si minus extremum per denominatorem diuidatur. Vt si progressio hæc 64.128.256.512. continuanda sit versus minores numeros,cum denominator proportionis sit 2. diuidemus 64. per 2. faciemusque 32. quæ rursum partiemur per 2. inueniemusq; 16.& sic deinceps in infinitum. Vt in hoc exemplo apparet.

512.256.128.64.32.16.8.4.2.1.$\frac{1}{2}$.$\frac{1}{4}$.$\frac{1}{8}$.$\frac{1}{16}$.&c.

Progressio Geometrica decrescit in infinitum.

Et nunquam erit finis huius decrementi in progressione Geometrica. Sic quoque, si quis progressionem inchoare velit à 100. & progredi versus vnitatem per proportionem sesquialteram, cuius denominator est 1$\frac{1}{2}$. diuidemus 100.per 1$\frac{1}{2}$.vt habeamus 66$\frac{2}{3}$. Item 66$\frac{2}{3}$.per 1$\frac{1}{2}$.vt habeamus 44$\frac{4}{9}$.&c.

Proprietas progressionis Geometricæ trium terminorũ.

Proprium est progressionis Geometricæ trium numerorũ, vt numerus qui ex primo numero in tertium producitur,æqualis sit numero,qui ex medio fit in seipsum multiplicato. Vt hic apparet,3.9.27.demonstraturque ab Euclide lib.7. propos.20.

Proprietas progressionis Geometricæ quatuor terminorum.

Progressionis vero Geometricæ quatuor numerorum proprium est, vt numerus qui ex multiplicatione primi numeri in quartum fit,æqualis sit numero,qui ex secundo in tertium procreatur.Vt hic vides,2.6.18.54. demonstraturque ab Euclide lib.7.propos.19. Atque hoc non solum est in quatuor numeris continue proportionalibus ,quales sunt quatuor numeri in dato exemplo, sed etiam in quatuor,qui non sunt continue proportionales,dummodo eadem sit proportio secundi ad primum,quæ quarti ad tertium. Vt hic cernis,3.6.10.20.

Proprietas progressionis Geometricæ quotcunq; terminorum, si numerus terminorũ sit impar.

Ex his proprietatibus colligitur, in omni progressione Geometrica, cuius numerus terminorum est impar,numerum, qui fit ex multiplicatione extremorum inter se, æqualem esse numero, qui ex multiplicatione duorum numerorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium producitur, necnon numero, qui ex medio in seipsum fit. Veluti hic apparet.

3.6.12.24.48.96.192.384.768.

Cum enim quatuor hi numeri 3.6.384.768.habeant eandem proportionem, licet non continuam,erit, ex iis,quæ proxime diximus,numerus,qui fit ex 3.in 768. æqualis ei,qui fit ex 6.in 384. Eadem ratione numerus , qui fit ex 6. in 384. æqualis erit ei, qui ex 12.in 192. producitur, quod hi quatuor numeri 6.12.192.384. eandem habeant proportionem, licet non continuatam; & ita de reliquis, si plures sint, donec ad tres medios 24.48.96. perueniamus; qui cum eandem habeant proportionem, erit, per ea,quæ paulo ante docuimus,numerus productus ex primo in tertium æqualis numero, qui ex medio in seipsum gignitur. Eademque ratio est de omnibus aliis huiusmodi progressionibus Geometricis.

Proprietas progressionis Geometricæ quotcunq; terminorum, si numerus terminorũ sit par.

Ex posteriore quoq; proprietate efficitur, in omni progressione Geometrica, cuius numerus terminorum est par,numerum ex multiplicatione extremorum productum æqualem esse numero,qui ex multiplicatione duorum quorumlibet numerorum ab extremis æqualiter distantium producitur. Vt hic manifestum est.

3.6.12.24.48.96.192.384.

Summa cuiuscunq; progressionis Geometricæ quo pacto inueniatur.

Quod probabimus,vt prius, hoc dempto, quod postremo loco sumendi sunt quatuor numeri medii 12. 24.48.96,non autem tres tantum, vt prius; quia hic non est vnicus numerus medius,sed duo. Sequuntur iam regulæ ad progressiones Geometricas spectantes.

REGVLA I.

SI in quauis progressione Geometrica notus fuerit denominator proportionis, vna cum minore,& maiore extremo, perueniemus in cognitionem summæ omnium terminorum, hac ratione. Detrahatur primus terminus ab vltimo,& reliquus numerus per numerum,qui vna vnitate minor sit,quam denominator,diuidatur. Si enim Quotienti vltimus terminus, siue maius extremum adiiciatur,componetur summa omnium terminorum. Vt in hac progressione.

3.12.48.192.768.3072.12288.49152.

Demptis 3.ex 49152. remanent 49149. Et quoniam denominator proportionis quadruplæ,quam habent numeri datæ progressionis, est 4. diuidemus 49149. per 3. & Quotienti 16383. vltimum terminum, siue maius extremum 49152.adijciemus,conficiemusque summam totius progressionis 65535.Item hic.

4.6.9.13$\frac{1}{2}$.20$\frac{1}{4}$.30$\frac{3}{8}$.45$\frac{9}{16}$.

Subtractis 4.ex 45$\frac{9}{16}$. relinquuntur 41$\frac{9}{16}$. quæ si diuidantur per $\frac{1}{2}$. (Est enim 1$\frac{1}{2}$. denominator proportionis sesquialteræ,quam habent numeri huius progressionis,ablata autem 1. remanet $\frac{1}{2}$.)fiet Quotiens 83$\frac{1}{8}$ cui si addatur vltimus numerus, siue maius extremũ 45$\frac{9}{16}$. fiet summa totius progressionis 128$\frac{11}{16}$. atque eodem modo summam cuiuscunque progressionis Geometricæ inueniemus.

Itaque, vt vides,satis est,vt cognoscatur primus terminus,& vltimus, vnà cum denominatore proportionis, ad inueniendam summam totius progressionis, etiamsi intermedij termini ignorentur. Quo pacto autem in cognitionem vltimi termini peruenire possimus, licet non continuetur tota progressio, sequenti regula explicabimus.

Particularis inuẽtio summæ progressionis proportionis duplæ, cuius initium est 1.

In progressione autem Geometrica duplæ proportionis, cuius initium est 1. facillimo negotio summa totius progressionis quotcũque terminorum reperietur,si vltimus terminus duplicetur,& à duplo abijciatur 1. Vt hic.

1.2.4.8.16.32.64.128.256.512.

Si vltimus terminus 512.duplicetur, & à duplo 1024 reijciatur 1.habebitur summa totius progressionis 1023.

Ex quo fit,quemlibet numerum, in huiusmodi progressione, abiecta prius vnitate, esse summam omnium numerorum antecedentium,cum quilibet numerus sit proxime præcedentis numeri duplus.

REGVLA II.

In progressione proportionis duplæ incipiente ab 1. quilibet numerus, abiecta prius vnitate, est summa omnium antecedentium numerorũ.

IN omni progressione Geometrica,quæ ab 1.incipit,quiuis numerus seipsum multiplicans gignit numerum, qui ab eo abest tanto interuallo, quanto ipse ab vnitate distat: quiuis autem numerus alium maiorem multiplicans producit numerum,qui à maiore tanto interuallo distat,quanto ipse minor ab vnitate abest Hæc regula clarissimè ex propos.11.lib.8.Euclidis colligitur,vt in scholio eiusdem propos.declarauimus. Exempli gratia

1.2.4.8.16.32.64.128.256.512.1024.

In hac progressione duplę proportionis,quæ sequitur,si numerus 16. qui quintũ locũ ab vnitate occupat, in seipsum multiplicetur,producetur numerus 256.qui quintum etiam locum à numero 16.occupat, nempe nonũ. Sic quoque si numerus 32.sextum locum ab vnitate occupans seipsum multiplicet,procreabitur numerus1024. qui sextum etiam locum à numero 32.occupat, nimirum vndecimum. Ita etiam numerus 8. quarti loci multiplicans numerum 64.producit numerum 512.quarto loco à numero 64.reponendum.

Si in progressione Geometrica incipiente ab 1.numerus aliquis seipsum, vel alium numerũ multiplicet, quem locũ numerus productus occupet.

Itaq; hanc licebit regulam colligere.Si in progressione Geometrica cuius initium est 1.numerus aliquis quẽcunque locum occupans seipsum multiplicet, procreabitur numerus in duplo maiore loco minus vna vnitate,quàm sit locus numeri multiplicantis,ponendus. Vt si numerus seipsum multiplicans occupet tertium locum, gignetur numerus in quinto loco reponendus: si occupet septimum locum, producetur numerus in tertiodecimo loco ponẽdus &c.Id quod aperte ostensum est in progressione superiori proportionis duplæ,idemq; clarissime in hac altera progressione pro portionis quadruplæ apparet.

1.4.16.64.256.1024.4096.16384.65536.

Quilibet numerus in progressione Geometrica incipiente ab 1. seipsum multiplicans producit numerũ in duplo maiore loco minus vnitate,& numerus multiplicans ponendum.

Nam si numerus 64.in quarto loco positus,seipsum multiplicet, gignetur numerus 4096. in septimo loco ponendus.Ita quoque numerus 256.quintum occupans locum seipsum multiplicãs producit numerum 65536. in nono loco reponendum.

Vt autem facilius sciatur, quo in loco quilibet numerus productus sit collocandus,subscribenda est progressioni Geometricæ progressio naturalis numerorum hoc ordine. Sub 1. hoc est, sub primo numero, scribatur 0. sub secundo numero ponatur 1. sub tertio 2. sub quarto 3. & ita deinceps, vt in hac progressione proportionis duplæ factum est.

Progressio naturalis numerorũ quo pacto indicet, quo in loco quilibet numerus productus collocandus sit in progressione Geometrica incipiente ab 1.

1.2.4.8.16.32.64.128.256.512.1024.2048.
0.1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.

Nam quilibet numerus grogressionis Geometricæ seipsum multiplicans producit numerum supra illum numerum progressionis naturalis numerorum collocandum,qui duplus est illius, qui subscribitur numero seipsum multiplicanti: quilibet vero numerus alium multiplicans procreat numerum supra illum numerũ progressionis naturalis numerorum reponendum,qui componitur ex duobus numeris,qui numeris multiplicantibus subscribuntur. Vt si numerus 32. in se multiplicetur, procreabitur numerus 1024. supra 10. collocandus, quòd numerus 10.duplus sit numeri 5.qui numero 32.subscribitur.Item ex multiplicatione 8.in 256. producetur numerus 2048.supra 11.reponendus,cp numerus 11. cõponatur ex 3.& 8.qui numeri sub 8.& 256.scripti sunt.

Et quoniam, quot vnitates sunt in quolibet numero progressionis naturalis numerorum, talem locum vno amplius occupat in progressione Geometrica numerus illi suprapositus, vt in superiore exemplo perspicue apparet;facile inueniemus numerũ cuiusq; loci in progressione Geometrica,etiamsi non scribamus oẽs numeros intermedios.Sit enim inueniẽdus, verbi gratia,numerus in vigesimo loco supradictę progressionis collocãdus. Primũ scribo quatuor, aut quinq;, vel plures numeros progressionis,vnà cũ progressione naturali, vt hic vides.

1.2.4.8.16.32.64.
0.1.2.3.4.5.6.

Deinde multiplico.v.g.8.in se,facioq; 64.numerum septimi loci,sub quo nimirum positus est numerus 6.vna vnitate minor numero locorum;quòd numerus 3.sub 8.duplicatus faciat 6.Quòd si multiplicemus 8.in 64. faciemus 512.numerum decimi loci,sub quo nimirũ scriberetur numerus 9.vna vnitate minor numero locorũ, quòd numeri 3.& 6.sub quarto & septimo loco faciant 9.Rursus si 512. numerum decimi loci, sub quo ponitur numerus 9.multiplicemus in se,producemus numerũ 262144.in loco decimonono scribẽdum,sub quo nimirum poneretur numerus 18.vna vnitate minor numero locorum, propterea quòd numerus 9.sub decimo loco duplicatus facit 18.Iã vero quia ex 18.qui numerus sub decimonono loco scribitur,& ex 1.sub secundo loco posita

sita fiunt 19. si multiplicemus numerum 2. supra 1. positum per numerum 262144. supra 18. positum, conficiemus numerum 524288. in vicesimo loco, sub quo videlicet numerus 19. ponitur scribendum.

Rursus, si quis velit in eadem progressione numerũ in decimooctauo loco reponendum, multiplicabimus numerum 32. sub quo ponuntur 5. in seipsum, producemusque numerum 1024. in vndecimo loco scribendum, sub quo numero ponitur numerus 10. qui duplus est numeri 5. Et quoniam ex 10. qui numerus sub vndecimo loco ponitur, & ex 6. qui numerus ponitur sub septimo loco, fiunt 16. qui numerus sub loco decimo septimo scribitur, si numerum 64. septimi loci per numerum 1024. vndecimi loci multiplicemus, procreabimus numerum 65536. loci decimiseptimi. Tandem quia ex 16. qui numerus sub decimoseptimo loco ponitur, & ex 1. quæ sub secundo loco ponitur, fit numerus 17. qui sub decimooctauo loco scribitur; si multiplicemus numerum inuentum 65536. decimiseptimi loci, per numerum 2. secundi loci, gignemus numerum 131072. in loco octauo decimo scribendum, sub quo videlicet ponitur numerus 17.

Quæ dicta sunt in hac regula de progressione Geometrica incipiente abr. vera etiã esse de progressione Geometrica incipiẽte non ab 1. sed ab alio numero.

Hæc omnia quadrant etiam in progressionem quamcunque Geometricam nõ ab 1. sed à quouis alio numero incipientem, dummodo quemlibet numerum ex multiplicatione productum diuidamus per primum numerũ progressionis. Quotiens enim erit numerus quæsitus. Vt in hac progressione proportionis duplę apparet.

5. 10. 20. 40. 80. 160. 320. 640. 1280. 2560. 5120.
0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

Nam si numerus 80. quintũ locum à primo numero occupans in seipsum multiplicetur, procreabitur numerus 6400. quo diuiso per primum numerũ, vtpote per 5. fiet Quotiens 1280. in quinto loco à numero 80. collocandus, nempe in nono loco, sub quo ponitur numerus 8. qui duplus est numeri 4. sub numero 80. multiplicante positi. Vbi vides, numerum 80. quinti loci, cum seipsum multiplicat, producere numerum, quo diuiso per primum numerum progressionis, fit Quotiens 1280. in duplo maiore loco, minus vnitate, quàm sit locus numeri multiplicantis, reponendus. Sic etiam, si numerus 40. quarti loci multiplicet numerum 640. & productus numerus 25600. per primum numerum 5. diuidatur, fiet Quotiens 5120. quarto loco à numero 640. scribendus, nempe loco vndecimo, sub quo ponitur numerus 10. conflatus ex 3. sub 40. & ex 7. sub 640. Quod si numerum 1280. multiplicemus per 5120. procreabimus numerum 6553600. quo diuiso per primum numerum 5. reperiemus Quotientem 131720. reponendum in loco decimonono, qui nimirum vnitate superat numerum 18. conflatum ex numeris 8. & 10. positis sub numeris multiplicantibus.

Ita quoque (vt in alia progressione exemplum etiam ponamus.) in hac progressione proportionis septuplæ

2. 14. 98. 686. 4802. 33614. 235298. 1647086. 11529602. 80707214.
0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Quo pacto numerus cuiuscunq; loci in progressione Geometrica, incipiente à quouis numero inuesti get sine inter medijs numeris.

si numerus 4802. quintum locum à primo numero occupans seipsum multiplicet, procreabitur numerus 23059204. quo diuiso per primum numerum, nempe per 2. fiet Quotiens 11529602. in quinto loco à numero 4802. locandus, in nono videlicet loco sub quo numerus 8. ponitur. Sic etiam, si numerus 98. tertii loci multiplicet numerum 1647086. & productus numerus 161414428. per primum numerum 2. diuidatur, fiet Quotiens 80707214. tertio loco à numero 1647086. scribendus, nimirum loco decimo, sub quo ponitur numerus 9. conflatus ex 2. sub 98. & ex 7. sub 1647086. &c.

Summa quotcunq; terminorũ progressionis Geometricæ proportionis duplæ ab 1. incipientis, addita prius vnitate, seipsã multiplicãs producit numerũ, qui, abiecta prius vnitate, summa est duplo plurium terminorum.

Ex his facile inueniemus numerum cuiusq; loci. Si namq; in priori progressione inueniendus sit numerus tricesimo loco ponendus, multiplicabimus numerum 5120. in se, producemusq; numerum 26214400. quo diuiso per 5. fiet Quotiens 5242880. ponendus loco vicesimo primo, qui videlicet vnitate superat numerum 20. qui duplus est numeri 10. sub 5120. positi, ponitur q; sub vicesimo primo loco. Et quoniam 20. & 9. faciunt 29. si numerum 5242880. vicesimi primi loci, sub quo numerus 20. ponitur, multiplicemus per 2560. sub quo numerus 9. scribitur, efficiemus numerum, quo diuiso per 5. fiet Quotiens 268435460. locandus in loco tricesimo, qui nimirum vnitate superat conflatum illum numerum 29.

Quo pacto facile inueniatur summa 64. lo corum progressionis Geometri cæ duplæ proportionis ab 1. incipientis.

Vides igitur, nos reperire posse extremum numerum cuiuslibet progressionis Geometricæ, etiam si nõ scribantur omnes numeri intermedij illius progressionis: pluribus tamen operationibus, quàm supra in secunda regula progressionum Arithmeticarum adhibuimus.

Quoniam vero in prima regula diximus, numerum quemcunq; in progressione Geometrica proportionis duplæ incipiente ab 1. abiecta prius vnitate, summam esse omnium antecedentium numerorum; in hac autem secunda regula docuimus, quemlibet numerum progressionis Geometricæ ab 1. incipientis, si seipsum multiplicet, gignere numerum in duplo maiore loco, minus vnitate, quam sit locus numeri se multiplicantis, ponendum: hit, vt si summæ quotcunq; numerorum progressionis Geometricæ proportionis duplæ ab 1. incipientis addatur 1. & aggregatum in seipsum multiplicetur, producatur summa, abiecta prius vnitate, duplo plurium numerorum eiusdem progressionis: quia prior summa, addita vnitate, constituit proxime sequentem numerum in eadem progressione, qui numerus seipsum multiplicans producit numerum in duplo maiore loco, minus vnitate, quam sit locus numeri multiplicantis, reponendum; ac proinde, abiecta vnitate, idem numerus summa accepta fuit. Exempli gratia, summa septem terminorum, addita vnitate, constituit octauum terminum, qui multiplicatus in se producit terminum decimumquintum, nempe numerum in duplo maiore loco, quam sit octauus, minus vnitate, ponendum; qui quidem, abiecta vnitate, summa erit quatuordecim antecedentium terminorum, nimirum duplo plurium, quam septem, quorum summa accepta fuit. Eademq; ratio est de cæteris.

Itaq; si quis breuiter cupiat inuenire summam 64. terminorum progressionis Geometricæ proportionis duplæ ab 1. incipientis, quot nimirum loca sunt in ludo latrunculorum, quem scacchiorum ludum vocãt, accipienda erit primum summa horum quatuor terminorum 1. 2. 4. 8. nempe 15. Deinde, addita vnitate, multiplicandum aggregatum 16. in se. Si enim ex numero producto 256. abijciatur 1. erit summa octo terminorum 255. Rursus, addita 1. multiplicandum aggregatum 256. in se, vt fiant 65536. ac proinde summa 16. terminorum 65535. Quod si rursus, addita 1. aggregatum 65536. in se multiplicetur, procreabitur numerus 4294967296. qui, abiecta

abiecta prius vnitate, dabit summam 32. terminorũ. Postremo si 4294967296. in se multiplicentur, fiet numerus 18446744073709551616. qui, abiecta prius vnitate, dabit summam 64. terminorum. Atque tot quatrini requiruntur, vt quis replere possit omnia 64. loca dicti ludi latrunculorum, ponendo 1. quatrinum in primo loco; 2. quatr. in secundo; 4. in tertio, 8. in quarto, & sic deinceps progrediendo per duplam proportionem: qui efficiunt aureos, (tribuendo singulis aureis 400. quatrinos) 46116860184273879$\frac{3}{80}$. quanta pecunia vix in toto vno regno, vel etiam pluribus, aut toto mundo reperitur; quod multis incredibile videtur.

Quanta pecunia requiratur, vt impleatur 64. loca ludi latrũculorum, ita vt in primo loco ponatur 1. quatr. in secundo 2. in tertio 4. & ita deinceps pregrediendo per proportionẽ duplam.

Immo vix tot grana frumenti in vniuerso orbe terrarum existunt, quot in dictis 64. locis continerentur, si in primo ponitur 1. granum, in secundo 2. in tertio 4. &c. quod ita perspicuum faciemus, licet multis omnino incredibile videatur. Secundum Medicos, & pharmacopolas, grana 60. efficiunt 1. drachmam, id est $\frac{1}{8}$. vnius vnciæ; ac proinde 480. grana 1. vnciam & 5760. grana 1. libram. Cum ergo 600. libræ communiter constituant 1. mensuram, quam Romani Rubium dicunt, & quę parum ab illa mensura differt, quam Nautæ in Italia Salmam appellant; constabit 1. Rubius granis 3456000. Quare si grana 18446744073709551615. quæ in dictis 64. locis continentur, per grana 3456000. vnum Rubiũ constituentia diuidantur, prodibunt Rubij 5337599558365. & paulo amplius: quot vix in toto terrarum orbe arbitror simul reperiri. Nam cum communiter nauis oneraria ferat Rubios 3000. requirerentur, vt minimum, ad frumentum illud portãdum naues 1779199852. ad quas onerandas vix satis esse totius mundi frumẽtum, facile sibi quiuis persuadebit. Quod si in toto mundo vix sunt 18446744073709551615. grana frumenti, multo minus tot quatrini existent, etiamsi omnes monetæ in quatrinos resoluerentur: cum nulli dubium sit, maiorem in mundo frumenti esse copiam, quàm pecuniæ. Quod etiam hinc colligi potest.

Quot grana frumẽti constituant vnum Rubium.

Quoniam ducatus aureus Romæ æstimatur baiochis 115. siue quatrinis 460. si quatrini 18446744073709551615. in dictis locis 64 contenti diuidantur per baiochos 115. hoc est, per quatrinos 460. efficientur ducati aurei 40101617551542503. & paulo amplius. Quia vero 100 ducati aurei faciunt 1. libram, continebunt 1800000. libræ aureos ducatos 180000000. quot nimirum commode vna nauis oneraria ferre potest, cum rubij frumẽti 3000. vnam nauem onerantes faciant libras 1800000. quod pondus multis partibus superat Obeliscum illum immensum, qui Romæ iuxta templum S. Petri visitur, quippe cum hic, vt periti affirmarunt, contineat libras duntaxat 1180000. quem tamen vix ferri posse ab vna naue, facile sibi persuadebit, qui eius molem diligentius intueatur. Quod ideo dixerim, ne quis putet parũ nos vni nauj tribuere, cum ei concedimus libras 1800000. hoc est rubios frumenti 3000. siue aureos ducatos 180000000. Ex quo fit, ad aureos ducatos 40101617551542503. vehendos necessarias esse naues 2227867 64. & amplius: quis autem dubitet, totius mundi pecuniam etiamsi ad aureos ducatos reducatur, tantam non esse, vt tot naues oneret?

Quot naues requirantur ad ferendum frumẽtum in 64. locis ludi latrunculorum positum.

Quod si quis in primo loco ponat 1. quatrinum, vel granum; 2. in secundo; 6. in tertio; 18. in quarto; 54. in quinto & sic deinceps, ita vt vnitates in quolibet loco positæ sint duplo plures quàm in omnibus præcedentibus locis simul: quod tum demum fiet, si vnitates secundi loci triplices, & productum numerum rursus triplices, atq; ita deinceps, vt in hac progressione manifestum est, & ita ostendi potest. Quoniam vnitates cuiuslibet loci duplæ sunt vnitatum in omnibus præcedentibus locis positarum, continebunt dictæ vnitates bis vnitates proxime antecedentis loci, & vnitates omnium quoque aliorum locorum præcedentium bis. Cum ergo vnitates proxime antecedentis loci bis contineant vnitates omnium locorum antecedentium, comprehendent vnitates proxime antecedentis loci ter. Verbi gratia, quoniam vnitates 18. in quarto loco duplæ sunt harum vnitatum 1. 2. 6. continebũt dictæ vnitates 18. bis vnitates 6. ac præterea vnitates 1. 2. bis. Quare cum vnitates 6. duplæ quoque sint vnitatum 1. 2. continebunt eædem vnitates 18. bis vnitates 6. & insuper semel, nempe vnitates quoque 1. 2. bis ac proinde si triplicentur vnitates 6. producentur vnitates 18. sequentis loci, quæ triplæ quidem sunt vnitatum proxime antecedentis loci, duplæ vero omnium præcedentium locorum. Eademque ratio est in cæteris. Quod si quis, in quam hac ratione ponat quatrinos, vel grana in dictis 64. locis, reperietur summa multo maior, quàm prius.

In progressione cuius primus terminus est 1. secundus 2. tertius vero secundi triplus & similiter quartus tertij triplus, & ita deinceps: quilibet terminus duplus est omnium præcedentium terminorum.

Hoc autem modo summa elicietur, etiamsi non ponãtur omnes numeri illius progressionis. Quoniã omnes numeri prodeuntur per proportionem triplam, initio facto à secundo loco; inuestigandus erit numerus loci sexagesimi tertij in proportione tripla, cuius principium est 2. Hic enim numerus inuẽtus occupabit locum 64. in ludo latrunculorum, atq; eo cognito reperietur summa omnium 63. locorum, vt in prima regula progressionum Geometricarum docuimus; cui si adijciatur 1. in primo loco dicti ludi posita, habebitur summa omniũ 64. locorum. Exempli gratia. Positis his quinque terminis, 2. 6. 18 54. 162. si quintus in se multiplicetur, productusque per primum diuidatur, producetur numerus 13122. nono loco ponendus, nempe in duplo maiore loco, minus vnitate, quam est locus numeri in se multiplicati, vt in secũda hac regula docuimus. Quod si rursum numerus 13122. noni loci in se multiplicetur, productusq; per primum hoc est, per 2. diuidatur, gignetur numerus 86093442. septimodecimo loco ponendus: qui si rursum in seipsum multiplicetur, productusq; per primum diuidatur, fiet numerus hic sequens 37060403777037682. tricesimo tertio loco ponendus: qui rursum si multiplicetur in se, productusq; diuidatur per primum, procreabitur numerus 6867367640585024969315698178562. loco sexagesimo quinto locandus. Nos autem quærimus numerum sexagesimi tertij loci, ad quem inuentus numerus sexagesimi quinti loci proportionem habet triplæ duplicatam hoc est, noncuplam, ex defin. 10. lib. 5. Eucl. propterea quòd numeri positi in loco sexagesimo tertio, sexagesimo quarto & sexagesimo quinto continuam proportionem triplam habent. Quare si numerum inuentum per 9. partiamur, reperiemus numerum hunc sequentem 7630404859538916632572997976 18. loco sexagesimo tertio reponendum.

Qua arte inueniatur summa 64. terminorũ ab 1. incipientium atque ita pregredientiũ, vt quilibet duplus sit omnium antecedentium terminorũ.

Detracto iam primo numero 2. & reliduo diuiso per numerum vnitate minorem denominatore proportionis triplæ, nempe per 2. Quotiente denique ad numerum inuentum sexagesimi tertij loci adiecto, fiet summa omnium sexagintatriũ locorum, cui si apponatur 1. in primo loco ludi latrunculorum posita, componetur summa omnium 64. locorum dicti ludi hæc sequens.

11445612734308374948859496964 27.

Hanc eandem summam ita quoque inueniemus. Multiplicetur summa trium primorũ locorum ludi latrunculorum,

Alia ratio inueniendi summã 64. terminorũ ab 1. incipientium atque ita progredientiũ, vt quilibet omniũ antecedentiũ terminorũ sit duplus.

culorum, quæ est 9. in se fietque summa 81. duplo plurium locorum minus vno, hoc est, quinque locorum: quæ si rursus in se multiplicetur, fiet eadem ratione summa 6561. nouem locorum, nempe duplo plurium, quam quinque minus vno: quæ rursus multiplicata in se producet summam 43046721. septemdecim locorum: Hæc iterum in se multiplicata faciet hanc summam 1853020188851841. trigintatrium locorum: quæ in se rursum

3433683820292512484657849089281.

multiplicata, gignet summam sexagintaquinque locorum. Nos autem quærimus summam sexaginta quatuor tantum locorum, quæ in summa inuenta ter continetur. Nam summa quotcunq; locorum tripla est summæ omnium locorũ præcedẽtium: propterea quòd numerus vltimi loci, nempe (in dato exemplo) sexagesimi quinti, duplus est omnium præcedentium locorum. Hinc enim fit, vt addita summa omnium præcedentium locorum ad numerum sexagesimiquinti loci, fiat summa omniũ sexagintaquinque locorũ, continens nimirũ ter summã præcedentium sexaginta quatuor locorum. Quocirca diuisa summa inuenta per 3. reperietur summa hæc sexa-

1144561273430837494885949696427.

ginta quatuor locorum ludi latrunculorum vt prius.

Quantum frumẽtum requiratur vt impleãtur 64. loca ludi latrunculorũ ita in primo loco ponatur 1. granum. in secundo 2. in tertio 6. in quarto 18. & ita deinceps vt grana subsequentis loci sint dupla omniũ granorũ in præcedentibus omnibus locis simul. Et quot naues necessariæ sint ad illud frumẽtum portandum.

Hæc omnia grana, si diuidantur per 3456000. quot vnum Rubium constituunt, efficient Rubios sequentes, 331180924025126589955425$\frac{32201}{128000}$. ad quos vehẽdos, impositis 3000. Rubijs in quamlibet nauem, necessariæ sunt naues numero 110393641341708863318$\frac{10}{40}$. quæ 102714380. globos ex terra & aqua confectos contegerent. Ponimus enim supremam aream vnius nauis æquiualere quadrato, cuius latus continet 70. palmos, quibus Mechanici, atq; architecti vtuntur: cũ plerunque longitudo nauis sit 120. palmorum, latitudo autem 40. si ad parallelogrammum rectangulum redigeretur; atque adeo area ipsius contineat palmos quadratos 4800. cuius radix quadrata fere est 70. Cum ergo 5500 palmi, plus minus, conficiant vnum milliare, ac propterea palmi 133750000. milliaria 22500. quot in toto ambitu terræ continentur; si partiamur hos palmos per 70, hoc est, per latitudinem, longitudinemve vnius nauis quadratæ, reperiemus in toto ambitu terræ contineri naues 1910714. se inuicem tangentes. Eodem modo conficient palmi 39374500. totam terræ diametrum milliaria 7159. cõplectentem: quos palmos si rursus per 70. partiamur, inueniemus in terræ diametro comprehendi naues se inuicem tangentes 562493. ferè. Multiplicantes autem naues 562493. diametri per 1910714. naues ambitus, faciemus naues 1074763250002. totam superficiem terræ marisque tegentes, vt ad finem primi cap. sphæræ scripsimus: per quas si diuidamus illas superiores 110393641341708863 18. naues quę ad frumẽtum asportãdum requiruntur, deprehendemus globos ex terra marique cõfectos 102714380. & quidem omnes nauibus ad frumentum portandum necessarijs contectos: quæ summa frumenti multis partibus superat frumentum totius orbis, cum ne vnam quidem terram operire possint naues in quibus totius orbis frumentum contineretur, vt patet.

Quot naues totam superficiem terræ & maris operirent si se mutuo tangerent. Quot globi ex terra ac mari confecti tegerentur à nauibus, quæ necessariæ sũt ad proximè dictum frumentũ portãdum.

Alia ratione incomprehẽsibilem hanc multitudinem frumenti explicabimus, si nimirum inquiramus, quot globi, siue sphæræ ex illis granis, quæ posteriori modo in 64. locis ludi latrunculorum continentur, confici possint, quarum sphærarum quælibet globo terrestri sit æqualis: quod ita fiet. Quoniam grana frumenti rotunda non sunt, sumemus pro ipsis grana coryandri, quæ rotunda sunt, licet paulò minora sint, quam frumenti grana. Ita enim fiet, vt plures globi conficiantur ex granis frumenti, quàm ex granis coryandri, cum pauciora illorum requirantur, quam horum, ad vnum globum constituendum, sitque tanta multitudo illorum, quanta horum, in 64. locis ludi latrunculorum. Quia igitur 18. grana coryandri (vt experientia deprehensum est à me) cõstituunt quartam partem pedis Geometrici, & paulo amplius, fit, vt recte dicere possimus, 70. grana secundum longitudinem disposita explere longitudinem vnius pedis. Quare cum sphæræ triplicatam suarum diametrorũ proportionem habeant, vt Euclides demonstrauit lib. 12. propos. 18. continebuntur in sphæra, cuius diameter pedi Geometrico æqualis est, grana coryandri 343000. cum hic numerus ad 1. proportionem habeat triplicatam eius, quam habet pes Geometricus 70. granorum ad 1. vt hic apparet.

1. 70. 4900. 343000.

Rursus quia 5000. pedes Geometrici vnum milliare constituunt, habebit eadem ratione sphæra, cuius diameter vni milliario, æqualis sit ad sphæram, cuius diameter æqualis sit vni pedi, proportionem, quam ad 1 habet hic numerus 125000000000. cum numerus hic ad 1. habeat proportionem triplicatam eius quam 5000. pedes habent ad 1. vt hic vides.

1. 5000. 25000000. 125000000000.

Quot globos toti terræ æquales cõstitueret frumẽtum in 64. locis proxime dictis contentum.

Quare cum sphæra habens diametrum pedalem contineat grana coryandri 343000. existent in sphæra, cuius diameter vni milliario sit æqualis, grana 42875000000000000.

Deinde quoniam diameter terræ complectitur milliaria 7159. ponemus nos eam contiuere 7200. milliaria. Quo posito, habebit tota sphæra terræ ad sphærã, cuius diameter vni milliari est æqualis, proportionem, quam hic numerus 373248000000. ad 1. propterea quod numerus hic ad 1. proportionem habet triplicatam eius, quam habent 7200. milliaria totius diametri terræ ad 1. milliare vt hic manifestum est.

1. 7200. 51840000. 373248000000.

Quocirca cum sphæra diametri vnius milliarij comprehendat grana 42875000000000000. complectetur totus globus terræ grana numero 16003008000000000000000000000. Si igitur per hunc numerum partiamur numerum granorum omnium in illis 64. locis ludi latrunculorum cõtentum, efficiemus globos terræ 71$\frac{1}{2}$. & amplius. Tot ergo sphæræ, quarum quælibet toti terræ sit æqualis, requiruntur ex granis coryandri compositæ, vt dicta 64. loca repleri possint eo modo, quo diximus, quod omnium fidem superare videtur.

Quot naues ferrent aureos ducatos ex quatrinis, qui replerent 64. loca eo modo quo de granis frumenti dictum est.

Iam vero si grana illa sint quatrini, efficiemus ex illis aureos ducatos sequentes numero.

2488176681371385858447716731.

Quoniam autem supra diximus, vnam nauem commode ferre ducatos aureos 180000000. si illos per hos diuidamus, deprehendemus naues has 13823203785396588103 24. necessarias esse, vt dictam pecuniam ferrent, quæ tot superficies terræ marisque contegerent, quot sunt in hoc numero 1286162676. vnitates; propterea quòd supra posuimus 1074763250002. naues vnam superficiem terræ ac maris contegere. Quæ summa pecuniæ omnem captum ingenij humani excedit.

Et quot globos terræ ac maris dictæ naues tegerent.

Pari

Qua ratione facile inueniatur summa 40. terminorũ progressionis Geometricæ proportionis duplæ ab 1 incipientis. Quanti cõstet 40. oppida, si vendantur ita vt pro primo soluatur 1. quatr. pro secũdo 2 quatri pro tertio 4. &c.

Pari ratione, si quis optet summam 40. terminorum eiusdem progressionis, accipienda primum erit summa horum 5. terminorum 1. 2. 4. 8. 16. nempe 31. Deinde, addita 1. multiplicandum aggregatum 32. in se, abiecta enim vnitate ex producto numero, fiet summa 10. terminorum 1023. Rursus si aggregatum multiplicetur in se, & ex producto numero reijciatur 1. exurget summa 20. terminorum 1048575. Postremo, addita rursus 1. si aggregatum in seipsum multiplicetur, & ex producto numero dematur 1. producetur summa 40. terminorum, videlicet 1099511627775. Atq; tot quatrinos reciperet Dux aliquis, qui 40. oppida sua ea lege diuenderet, vt ei pro primo solueretur 1. quatrinus, pro secundo 2. quatr. pro tertio 4. & ita deinceps progrediendo semper per proportionem duplam. Hi autem quatrini conficiunt aureos 2748779069$\frac{175}{400}$. Quod si hac pecunia emerentur redditus annui, ita vt 100. aurei tantum lucrifacerent 5. aureos (cum tamen lege ordinaria plus lucrentur) haberentur aurei hi 137438953. & baioch. 47$\frac{1}{10}$. quantos redditus nullus vnquam Monarcha, aut Resp. habuit: vt non insanus iudicandus sit Dux ille, (vt plerisq;, qui in Arithmeticis parum sunt exercitati, videtur) qui ea ratione 40. sua oppida diuendit, sed sapientissimus.

Quo modo breuiter eliciatur sũma 24. terminorum progressionis Geometricæ proportionis duplæ ab 1. incipientis. Quanti constet equus habens 24. clauos in pedibus, si ita vendatur, vt detur 1. quatri pro primo clauo, 2. pro secundo & 4. pro tertio, &c.

Postremo si quis cupiat expedite summam habere 24. terminorum eiusdem progressionis, sumenda erit primum summa trium horum terminorum 1. 2. 4. quæ est 7. Deinde, addita 1. multiplicandum aggregatum in se, & à producto numero auferenda 1. vt habeatur summa 6. terminorum 63. Addita 1. rursus multiplicandum aggregatum in se, & auferenda 1. ex numero producto, vt fiat summa 12. terminorum 4095. Tandem, addita rursus 1. multiplicandum aggregatum in se, & 1. subducenda ex numero procreato, vt exurgat summa 24. terminorum 16777215 Non ergo ridendus esset, qui bellicosum equum, qui in pedibus habet 24. clauos, ita venderet, vt ei pro primo clauo soluatur 1. quatr. pro secundo 2. pro tertio 4. pro quarto 8. &c. Nam reciperet pro equo 16777215. quatr. qui conficiunt 41943$\frac{1}{25}$. aur. pro quo pretio vnusquisq; libenter suum equum daret. Hæc pauca de progressionibus dicta sint satis. Multo enim plura de eisdem scribemus in pleniore nostra Arithmetica.

EXTRACTIO RADICIS QVADRATAE.

CAPVT XXVI.

Quadratus numerus quid. Radix quadrata quid. Extractio radicis quadratæ quid.

NVmerus quadratus dicitur, qui ex aliquo numero in seipsum multiplicato producitur. qualis est 4. qui ex multiplicatione numeri 2. in seipsum gignitur. Item 9. cum ex 3. in se producatur. Item 2209. quia generatur ex multiplicatione 47. in se, &c. Vnitas quoque ab Arithmeticis numerus quadratus, licet impropriè, appellatur, propterea quod ex 1. in se producatur. Numerus autem, qui in se multiplicatus producit quadratum numerum, vocatur latus, siue radix quadrati.

Extractio igitur radicis quadratæ est inuentio numeri, qui in se multiplicatus producat numerum propositum, si quadratus est, vel si non est quadratus, maximum numerum quadratum in eo contentum. Vt extractio radicis quadratæ ex numero 2209. est inuentio numeri 47. quia hic in se multiplicatus producit propositum numerum 2209. Item extractio radicis quadratæ ex numero 3375. est inuentio numeri 58. quia hic in se multiplicatus gignit numerum quadratum 3364. qui est omnium maximus in 3375. contentus. Nam proxime maior quadratus numerus, cuius latus, siue radix est 59. vna vnitate maior, quam 58. est 3481.

Quomodo numerus, cuius radix quæritur, punctis sit signandus. Quot figuras habeat radix propositi numeri.

Primum autem numerus propositus, cuius radix inuestiganda est, signandus est punctis quibusdam, posito puncto sub prima figura ad dextram, vel supra primam figuram, & alio sub tertia, & alio sub quinta, & ita deinceps sub septima, nona, & sub aliis locis imparibus: ita vt quodlibet punctum habeat duas figuras, illam videlicet, sub qua punctum signatum est, & aliam, quæ hanc versus sinistram præcedit; excepto vltimo puncto ad sinistram, quod aliquando vnicam figuram habet, quando nimirum numerus figurarum est impar. Tot autem figuras habebit radix propositi numeri, quot puncta signata sunt. Vt hic numerus 21178404. ita signabitur, habebitq; eius radix quatuor omnino figuras. Hic autem numerus 456789012. ita signabitur, eiusq; radix 5. figuris scribetur.

Quo pacto radix quadrata ex dato numero eruatur.

Signato hac ratione numero, ita radix ipsius eruetur. Sub vltimo puncto ad sinistram ponitur radix maximi quadrati in figuris ad illud punctum spectantibus contenti, quæ maior esse non potest, quam 9. eademque radix scribitur ad dexteram numeri propositi post hanc lineam curuam (vt de diuisione integrorum numerorum diximus: atq; hæc radix, instar Quotientis figuræ, per radicem sub puncto positam, instar diuisoris, multiplicatur, productusq; numerus ex suprascripto numero subtrahitur, deletis prius figuris, à quibus fit subtractio, vna cum radice sub puncto notata, quemadmodum in diuisione integrorum docuimus. Numerus autem residuus non potest esse maior, quam duplus radicis sub puncto positæ.

Post hæc duplicatur radix inuenta, scribiturq; numerus hic duplicatus sub sequenti puncto, hoc ordine, vt prima eius figura ponatur sub figura, quæ proxime punctum vltimum sequitur versus dextram, aliæ vero si quæ sint, ordine suo versus sinistram progrediendo, ita vt figura, sub qua sequens punctum ponitur, nihil scribatur. Sub ea enim ponenda est noua figura Quotientis. Posito hac ratione numero illo duplicato, diuiditur per illum numerus suprascriptus, Quotientisq; figura ad dexteram post propositum numerum scribitur, atq; etiam sub puncto, vt fiat quasi integer diuisor ex duplicato illo numero, & figura hac Quotientis. Quo facto, multiplicatur figura hæc Quotientis in totum illum diuisorem, vt in diuisione integrorum, productusq; numerus ex suprascripto numero subducitur, &c. Antequam autem figuram hanc nouam Quotientis scribas, tentandum prius erit, num ea multiplicata in duplicatum illum numerum, & in seipsam positam post illum numerum duplicatum, talem numerum producat, qui à suprapositο numero possit subtrahi.

Rursus eodem modo totus numerus post lineam hanc curuam (hactenus positus duplicatur, duplicatusque numerus sub sequenti puncto scribitur eo ordine, quem supra præscripsimus, ita vt rursus sequens punctũ vacuum relinquatur pro noua figura Quotientis. Per hunc numerum vero duplicatum diuiditur suprascriptus numerus, sumiturq; talis figura pro Quotiente, quæ in numerum illum duplicatum, & in seipsam post illum numerum duplicatum positam multiplicata, numerum procreet, qui ex suprascripto numero detrahi possit.

Pari ratione totus numerus in Quotiente hactenus positus, duplicatur, & reliqua fiunt, vt prius: atq; ita deinceps, donec omnia puncta sint absoluta. Verum hæc omnia exemplis fient clariora.

Sit

Sit eruenda radix quadrata ex numero 2117840 4. Notatis punctis, vt supra dictum est, pono sub vltimo ad sinistram figuram 4. tanquam radicem maximi quadrati in suprascripto numero 21. contenti, (quadratus enim numerus maioris radicis nempe 5. est 25.) eamq; rursus scribo post lineam hanc curuam (. Multiplicata autem figura 4. in Quotiente per figuram 4. sub puncto, fiunt 16. quæ ex 21. sublata, vt in diuisione integrorum præcepimus, relinquunt 5. spectabuntq; ad sequens punctum tres hæ figuræ 517.

5.
21178404 (46
486.

Deinde duplicata figura Quotientis 4. vt fiant 8. scribo 8. sub 1. vt in exemplo vides; diuidoq; 51. per 8. & inuenio 8. contineri in 51. sexies. Pono ergo 6. tam in Quotiente post 4. quam sub puncto figuræ 7. Multiplicata autem figura hac Quotientis 6. per totũ diuisorem 8 6. productoq; detracto ex supraposito numero 517. remanet 1. pertinebuntq; hæ tres figuræ 184. ad sequens punctum.

531
21178404 (460.
48620
9

Rursus duplicato Quotiente 46. hactenus inuento, vt fiant 92. scribo 2. sub 8. & 9. sub 1. vt in exemplo vides; diuidoq; 18. per 92. Sed quia 92. non continentur in 18. pono 0. in Quotiente, & sub puncto figuræ 4. deleoq; totum diuisorem 920. spectabit autem ad postremum punctum totus hic numerus 18404.

531
21178404 (4602
486202

Postremo duplicato Quotiente 460. hactenus inuento, vt fiant 92 0. scribo 0. sub 0. & 2. sub 4. & 9. sub 8. vt vides in exemplo. Diuidendo autem 1840. per 920. inuenio hunc numerum in illo contineri bis. Pono ergo figuram 2. tam in Quotiente, quam sub puncto primæ figuræ 4. Multiplicata vero hac figura 2. per totum diuisorẽ 9202. productoq; numero dempto ex numero suprascripto, nihil superest. Radix ergo quadrata numeri propositi est 4602. ipseq; numerus propositus quadratus est, cum nihil superfuerit post vltimam subtractionẽ factam.

992
531
21178404 (4602.
486202
992

Sit rursus inquirenda radix quadrata ex numero 456789012. Signatis punctis, vt docuimus, scribo sub vltimo puncto ad sinistram figuram 2. tanquam radicem maximi quadrati in suprascripto numero 4. contenti, eamque rursus pono in Quotiente. Multiplicata autem figura 2. in Quotiente per figuram 2. sub puncto, fiunt 4. quæ ex 4. subducta nihil relinquunt, pertinebuntq; hæ duæ figuræ 56. ad punctum sequens.

456789012 (21
241

Duplicata figura Quotientis 2. fiunt 4. quæ scribo sub 5. relicto puncto sequenti vacuo pro noua figura Quotientis. Diuidendo autem 5. per 4. inuenio Quotientem 1. quem scribo tam post Quotientẽ 2. quam sub puncto figuræ 6. Multiplicata autem figura hac Quotientis 1. per totum diuisorem, ablatoque numero producto ex 56. remanent 15. ita vt ad sequens punctum spectent quatuor hæ figuræ 1578.

15
456789012 (213
24123
4.

Deinde duplicato Quotiente 21. hactenus inuento, vt fiant 42. pono 2. sub 7. & 4. sub 5. Diuidendo autem 157. per 42. reperio Quotientem 3. quem pono & in Quotiente, & sub puncto figuræ 8. Multiplicata autem hac figura Quotientis 3. per totum diuisorem 423. subtractoque numero producto ex 1578. relinquuntur 309. Pertinebunt ergo ad sequens punctum quinq; istæ figuræ 30990.

30
1519
456789012 (2137
2412367
442

Rursus duplicato Quotiente 213. hactenus inuento, vt fiant 426. scribo 6. sub 9. & 2. sub 9. & 4. sub 0. Diuidendo autem 3099. per 426. inuenio Quotientem 7. quem scribo tam in Quotiente, quam sub puncto figuræ 0. Multiplicata vero hac Quotientis figura 7. per totum diuisorem 4267. detractoq; producto numero ex 30990. remanent 1121. atq; adeo ad punctum sequens pertinebunt sex hæ figuræ 112112.

1
21
3052
151971
456789012 (21372
241236742
44227

Postremo duplicato Quotiente 2137. hactenus inuento, vt fiant 4274. colloco 4. sub 1. & 7. sub 1. & 2. sub 2. & 4. sub 1. Diuidendo autem 1121. per 4274. reperio Quotientem 2. quem scribo & in Quotiente, & sub puncto figuræ 2. Multiplicata autem hac Quotientis figura 2. per totum diuisorem 42742. & dempto producto numero ex 112112. superfunt 26628. Numerus ergo propositus quadratus non est, ac proinde Quotiens inuentus 21372. non est eius radix, sed alterius numeri, qui est maximus quadratus in dato numero comprehensus, qualis est numerus 456762384. Nam proxime maior quadratus, qui videlicet habet radicem vna vnitate maiorem radice inuenta 21372. constituit numerum maiorem proposito numero.

4
2
136
2186
305272
15197138
456789012 (21372
241236742
44227
4

Extractio radicis quadratæ per Dandam. Potest etiam fieri radicis quadratæ extractio, more Italorum per Dandam, vt in diuisione numerorum integrorum explicauimus, qui modus securissimus est. In eo enim omnis confusio vitatur, si forte nimis parua, magnaue figura accipiatur: propterea quod nullæ figuræ delentur. Modus autem est hic. Sit eruenda radix quadrata ex hoc numero 456789 signatis punctis, vt dictum est, pono in Quotiente figuram 6. radicem videlicet maximi quadrati in vltimo puncto 45. contenti, eandemq; figuram 6. scribo ad dexteram, quemadmodum in diuisione per Dandam ad dextram quoq; diuisorem collocauimus: & dico. Ex 6. figura Quotiẽtis in 6. figuram in parte dextra collocata fiunt 36. quæ ex 45. subtraho hoc modo. Quoniam 6. ex 5. detrahi nequeunt, detraho 6. ex 10. & residuo 4. addo 5. vt fiant 9. quæ sub 5. scribo, ac mente retineo 4. nimirum 3. propter 30. & 1. propter 10. quæ 4. subducta ex 4. nihil relinquunt, ideoq; punctum subsequens erit 967.

456789 (675.	6.
9	127.
78	1345
1164	

Dein-

Deinde duplicatur figura 6. inuenta, vt fiant 12. per quæ diuido sequens punctum 967. omissa tamen figura 7. sub qua punctum est scriptum: Et dico. In 9. continetur 1. septies (Nam octies contineri non potest) scribo ergo 7. tam in Quotiente, quam seorsum post diuisorem 12. atq; figuram 7. multiplico in totum numerum 127. hoc modo ex 7. in 7. fiunt 49. Et quia 9. ex 7. detrahi non possunt, detraho 9. ex 10. relinquamq; 1. addo ad 7. vt fiant 8. quæ scribo sub 7. ita tamen vt figura 8. demissior sit quam 9. atq; retineo 5. nimirum 4. propter 40. & 1. propter 10. Rursus ex figura 7. inuenta in 2. fiunt 14. additisq; 5. quæ reseruauimus, efficio 19. Et quia 9. ex 6. subtrahi nequeunt, detraho 9. ex 10 & reliquæ 1. addo 6. vt fiant 7. sub 6. iuxta 8. scribenda, retineoq; 2. nimirum 1. propter denam numeri 19. & 1. propter 10. à quibus detraximus 9. &c. Tandem ex eadem figura 7. inuenta in 1. fiunt 7. additisq; 2. quæ seruauimus, fiunt 9. qua subducta ex 9. nihil superest, idcircò nihil scribendum est sub 9. eritq; sequens punctum, quod est vltimum 7889.

Postremo tota radix 67. hactenus inuenta duplicanda est, vt fiant 134. per quæ diuido punctum vltimum 7889. relicta tamen figura 9. supra punctum posita: Et dico. In 7. continetur 1. quinquies. Pono ergo 5. in Quotiente, & post diuisorem 134. & figuram 5. duco in totum numerum 1345. hoc modo. Ex 5. in 5. fiunt 25. ablatisque 5. ex 9. supersunt 4. quæ pono sub 9. & reseruo 2. propter 20. Atque iterum dico. Ex figura 5. inuenta in 4. fiunt 20. additisque 2. quæ seruauimus, fiunt 22. Detractis autem 2. ex 8. supersunt 6. quæ sub 8. scribo; & mente retineo 2. propter 20. siue duas denas. Rursus dico. Ex inuenta figura 5. in 3. fiunt 15. additisque 2. quæ seruata sunt, fiunt 17. Demptis autem 7. ex 8. remanet 1. quã pono sub 8. & reseruo 1. propter 10. siue propter vnam denam. Tandem dico. Ex eadem figura 5. inuenta in 1. fiunt 5 additaq; 1. quam seruauimus, fiunt 6. quæ subtracta ex 7. relinquunt 1. quam sub 7. pono. Atq; ita tota radix inuenta est 675. supersuntq; 1164. Ex quibus formatur fractio hæc $\frac{1164}{1351}$. ita vt radix propinqua (vt in appropinquatione radicum in sequenti cap. dicemus) sit $675\frac{1164}{1351}$. minor tamen; quam vera, cum eius quadratus numerus hic tantummodo $456788\frac{1607533}{1825201}$.

Atque modus hic extractionis præclarus est: quippe cum in eo omnia residua operationum distincte, & sine confusione appareant, adeo vt si in Quotientem accepta forte esset figura nimis magna, aut parua, (nimis quidem magna foret, si numeri producti à puncto proposito subtrahi non possent, nimis vero parua, si facta subtractione, residuum maius esset duplo radicis inuentæ) facili negocio error possit corrigi, quemadmodum supra in Diuisione per Dandam dictum est.

Examen extractionis radicis quadratæ triplex est, quemadmodum & diuisionis integrorum. Primum enim fit per abiectionem 9. alterum per abiectionem 7. & tertium per multiplicationem, vt in diuisione integrorum dictum est. Sed radix inuenta accipienda est hic loco diuisoris: quia si numerus propositus diuidatur per radicem inuentam, fiet Quotiens eadem radix: Et si quid superfuerit in extractione radicis, idem supererit in diuisione, dummodo in Quotiente sumantur eædem figuræ radicis inuentæ, licet in vltima diuisione partiali maior aliquando figura sumi posset, quando nimirum residuum extractionis radicem excesserit. Itaq; prius exemplum ita examinabitur per 9. Reiectis 9. ex radice 4602. remanent 3. quæ in vtroq; latere crucis scribo, propterea quod radix est & diuisor, & Quotiens, vt diximus. Multiplicatis iam inter se duabus hisce figuris 3. & 3. fiunt 9. reiectisque 9. remanet 0. in superiori parte crucis collocanda. Tandem reiectis 9. ex proposito numero, remanet etiam 0. Posterius autem exemplum ita examinabitur per 9. Reiectis 6. ex radice 21372. remanent 6. in vtroq; latere crucis ponenda. Multiplicatis autem inter se hisce figuris 6. & 6. fiunt 36. reiectisq; 9. ex 36. & ex residuo extractionis, supersunt 6. Tantundem remanet, si reiiciantur 9. ex dato numero. *Examen extractionis radicis quadratæ triplex.*

0
3 X 3
0

6.
6 X 6
6.

Quod si multiplicetur radix prioris numeri in se, producetur idem numerus prior. Itẽ si radix numeri posterioris in se multiplicetur, productoq; numero addatur residuũ extractionis gignetur idẽ numerus posterior.

Obiter etiam hic animaduertendum est, in nulla extractione radicis quadratæ residuum, si quod est, maius esse posse, quam duplum radicis inuentæ. Si enim superaret duplum radicis inuentæ, vel vna vnitate, haberet numerus propositus radicem vna vnitate maiorem illa, quæ inuenta est. Ratio huius rei est, quod quilibet quadratus superat proxime minorem numerum quadratum duplo radicis ipsius minoris quadrati, & insuper vna vnitate; adeo vt, si addatur 1. ad duplum radicis cuiusuis quadrati, & hoc aggregatum ad quadratum proxime minorem, fiat quadratus proxime maior. Vt quadratus numerus 64. superat numerum quadratum 49. numero 15. Constat autem numerum 14. duplum esse radicis quadrati 49. quæ est 7. superesseq; vnam adhuc vnitatem in 15. ac proinde, si addatur 1. ad 14. duplum radicis 7. & hoc aggregatum ad 49. fieri quadratum numerum 64. proxime maiorem, q̃ 49. cuius radix est 7. Si igitur proponat quis numerum 63. vt eius radix quadrata eruatur, reperietur radix 7. supereruntq; 14. quæ radicis sunt dupla: Si vero quis proponeret numerũ 64. inueniretur q; radix 7. erratum esset, quia superessent 15. quæ maiora sunt, q̃ duplum radicis 7. Quare radix numeri 64. erit 8. *Residuum in extractione quadratæ radicis maius esse non potest quam duplum radicis inuentæ. Quæ sit differentia inter duos quadratos pioximos.*

APPROPINQVATIO RADICVM IN NVMERIS NON QVADRATIS.

CAPVT XXVII.

QVONIAM cum numerus propositus non est quadratus, inuenta radix in se multiplicata producit numerum minorem numero ipso, quemadmodum in posteriori exemplo patuit, vbi radix in se multiplicata gignit numerum, qui à numero proposito superatur toto hoc numero 26628. monstrabimus hoc loco duplicem viam, qua radix propinquior inueniatur, ita vt eius numerus quadratus à proposito numero non quadrato insensibili fere differentia distet. Vera enim radix numero exprimi non potest, sed solum per lineam, vt in pleniore nostra Arithmetica demonstrabitur. Priori via reperietur radix propinquior quidem in infinitum, sed tamen minor, quam vera; adeo vt eius quadratus numerus semper à numero proposito superetur. Posteriori via inuenietur radix propinquior quoq; in infinitum, sed quæ veram excedat; ita vt eius numerus quadratus maior semper sit numero proposito. Vtraq; porro via demonstrata est Geometrice & à Theone Alexandrino in lib. 1. Almagesti Ptolemæi, & à Federico Commandino in lib. Archimedis de dimensione circuli. *Quo modo inueniatur radix propinquior, quæ tamen minor sit quã vera.*

Prior ergo via ita se habet. Inuenta radice maximi quadrati in proposito numero comprehensi, adijciatur

G 2 ad eam

ad eam fractio, cuius numerator est residuum extractionis, quo nimirum propositus numerus quadratum numerum proxime minorem, quem radix inuenta producit in se multiplicata, excedit, denominator vero duplum radicis inuentæ, & præterea vnitas, qua nimirum radix numeri quadrati, qui proxime maior est proposito numero, superat radicem inuentam numeri quadrati, qui proxime minor est numero proposito. Hac enim ratione composita erit radix multo propinquior, quam inuenta, minor tamen, quam vera. Ad quam si addatur id, quod prouenit ex diuisione excessus, quo propositus numerus non quadratus excedit quadratum radicis propinquioris iam inuentæ, per numerum compositum ex duplo eiusdem radicis propinquioris, & excessu, quo radix quadrati numeri proxime maioris superat radicem propinquiorem inuentam, exurget radix adhuc propinquior, minor tamen quam vera. Ad quam si iterum apponatur id, quod prouenit ex diuisione excessus, quo propositus numerus non quadratus superat quadratum radicis propinquæ vltimo loco inuentæ, per numerum compositum ex duplo eiusdem vltimæ radicis propinquæ & excessu, quo radix quadrati numeri proxime maioris excedit radicem eandem vltimam propinquam, efficietur adhuc propinquior radix, minor tamen, quam vera. Atque hoc modo licebit semper inuenire radicem propinquiorem in infinitum, nunquam tamen vera radix inuenietur, sed semper radix aliquanto minor, quam vera.

Exemplum. Sit propositus numerus non quadratus 20. Radix quadrati proxime minoris est 4. quæ in se multiplicata producit 16. supersuntq; 4. Si ergo ad radicem 4. addatur fractio $\frac{4}{9}$. cuius numerator est residuum illud, denominator vero duplum inuentæ radicis 4. & præterea 1. fiet propinquior radix $4\frac{4}{9}$. Huius enim quadratus numerus est $19\frac{61}{81}$. qui minor quidem est, quam propositus numerus 20. sed minus ab eo differt, quam quadratus numerus 16. radicis primæ 4.

Ablato hoc quadrato $19\frac{61}{81}$. ex numero proposito non quadrato 20. supersunt $\frac{20}{81}$. Item radix 5. quadrati proxime maioris numero proposito, excedit radicem propinquam $4\frac{4}{9}$. proxime inuentam hac minutia $\frac{5}{9}$. quæ addita ad duplum radicis propinquæ $4\frac{4}{9}$. hoc est, ad $8\frac{8}{9}$. facit numerum $9\frac{4}{9}$. per quem si diuidatur residuum illud $\frac{20}{81}$. fiet Quotiens $\frac{180}{6885}$. qui additus ad radicem propinquam $4\frac{4}{9}$. proxime inuentam faciet radicem propinquiorem $4\frac{29160}{61965}$. hoc est, $4\frac{8}{17}$. Huius enim numerus quadratus est $19\frac{285}{289}$. qui minor quoq; est, quam numerus propositus 20. nō quadratus, sed magis ad eum accedit, q̃ quadratus $19\frac{61}{81}$. radicis $4\frac{4}{9}$. ante hanc radicē $4\frac{8}{17}$. inuentæ.

Rursus subtracto hoc quadrato numero $19\frac{285}{289}$. ex proposito numero 20. non quadrato, supersunt $\frac{4}{289}$. Item radix 5. quadrati proxime maioris numero proposito excedit radicem propinquam $4\frac{8}{17}$. vltimo inuentam minutia hac $\frac{9}{17}$. quæ addita ad duplum vltimæ radicis propinquæ $4\frac{8}{17}$. hoc est, ad $8\frac{16}{17}$. facit numerum $9\frac{8}{17}$. per quem si diuidatur residuum illud $\frac{4}{289}$. fiet Quotiens $\frac{68}{46529}$. qui additus ad radicem propinquam $4\frac{8}{17}$. vltimo inuentam, facit radicem propinquiorem $4\frac{373388}{790993}$. hoc est $4\frac{76}{161}$. Huius enim numerus quadratus est $19\frac{25901}{25921}$. qui minor quoq; est proposito numero 20. non quadrato, magis tamen ad eum accedit, quam quadratus $19\frac{285}{289}$. radicis propinquæ $4\frac{8}{17}$. ante hanc radicem $4\frac{76}{161}$. inuentæ. Atq; in hunc modum licebit semper magis ac magis ad veritatem accedere, ad quam tamen nunquam perueniemus, sed semper ab ea deficiemus.

Quomodo reperiatur radix propinquior, quæ tamen maior sit, quam vera.

Posterior autem via hæc est. Inuenta radice maximi quadrati in proposito numero comprehensi, adijciatur ad eam fractio, cuius numerator est residuum extractionis, quo nimirum propositus numerus quadratum numerum proxime minorem, quem radix inuenta producit in se multiplicata, excedit, denominator vero duplum radicis inuentæ. Componetur enim hac ratione radix multo propinquior, quam inuenta, maior tamen, quam vera. A qua si auferatur id, quod prouenit ex diuisione excessus, quo quadratus numerus radicis propinquioris iam inuentæ excedit numerum propositum, per duplum eiusdem radicis propinquioris, relinquetur radix adhuc propinquior, maior tamen, quam vera. A qua si rursus detrahatur id, quod prouenit ex diuisione excessus, quo numerus quadratus radicis propinquæ vltimo loco inuentæ superat numerum propositum, per duplum eiusdem radicis vltimæ propinquæ, remanebit adhuc proquinquior radix, maior tamē quam vera. Atque hoc modo licebit semper inuenire radicem propinquiorem in infinitum, nunquam tamen vera radix inuenietur, sed semper radix aliquanto maior, quam vera.

Exemplum. Sit propositus idem numerus non quadratus 20. Radix quadrati proxime minoris est 4. quæ in se multiplicata facit 16. supersuntq; 4. Si ergo ad radicem 4. adijciatur fractio $\frac{4}{8}$ cuius numerator est residuum illud, denominator vero duplum inuentæ radicis 4. fiet propinquior radix $4\frac{4}{8}$. hoc est, $4\frac{1}{2}$. Huius enim numerus quadratus est $20\frac{1}{4}$. qui maior quidem est, quam propositus numerus 20. sed minus ab eo differt, quam quadratus numerus 16. radicis primæ 4.

Iam vero, si $\frac{1}{4}$. excessus nimirum, quo numerus quadratus $20\frac{1}{4}$. radicis $4\frac{1}{2}$. proxime inuentæ superat numerum propositum 20. diuidatur per duplum radicis propinquæ $4\frac{1}{2}$. iam inuentæ, hoc est, per 9. fiet Quotiens $\frac{1}{36}$. qui ablatus ex radice $4\frac{1}{2}$. proxime inuenta relinquet propinquiorem radicem $4\frac{34}{72}$ hoc est, $4\frac{17}{36}$. Huius enim numerus quadratus est ex $20\frac{1}{1296}$. qui maior quoq; est numero proposito 20. sed minus ab eo distat, quam quadratus $20\frac{1}{4}$. radicis $4\frac{1}{2}$. ante hanc inuentæ.

Quod si rursus $\frac{1}{1296}$. excessus nimirum, quo numerus quadratus $20\frac{1}{1296}$. radicis $4\frac{17}{36}$. proxime inuentæ superat propositum numerum 20. diuidatur per duplum radicis $4\frac{17}{36}$. iam inuentæ, id est, per $8\frac{34}{36}$. hoc est per $8\frac{17}{18}$. fiet Quotiens $\frac{1}{11592}$. qui subductus ex radice $4\frac{17}{36}$. proxime inuenta relinquet radicē propinquiorem $4\frac{197028}{417312}$. hoc est, $4\frac{5473}{11592}$. Huius enim quadratus numerus est sequens $20\frac{1}{134374464}$. qui maior etiam est numero proposito 20. sed minus ab eo distat, quam quadratus $20\frac{1}{1296}$. radicis $4\frac{17}{36}$. ante hanc inuentæ. Atq; in hunc modum licebit semper magis ac magis accedere ad veritatē, ad q̃ tamen nunq̃ perueniemus, sed semper eam excedemus.

Alia extractio radicis quadratæ propinquæ.

Libet hoc loco explicare aliam rationem inueniendi radicem satis propinquam per vnicam extractionem radicis quæ Mathematicis valde familiaris est, atq; vsitata. Est autem eiusmodi. Post numerum cuius radix quæritur, apponantur aliquot binarij cifarum vt 0000. vel 000000. vel 00000000. &c. quo autem plures cifrarum binarij apponantur, eo propinquior radix eruetur. Postea ex toto numero cum appositis cifris extrahatur radix, vt traditum est, ex qua ad dextram tot figuræ abscindantur, quot binarij cifrarum appositi fuere ad numerum propositum. Reliquæ namq; figuræ radicem exhibebunt, vna cum minutia, cuius numerator erit numerus per figuras abscissas expressus, denominator autem erit 10. si vnus tantum binarius cifrarum fuit appositus vel 100. Si duo binarij fuere appositi, vel 1000. si tres binarii &c. ita vt fractio illa contineat vel decimas, vel centesimas, vel millesimas, &c.

Sit

Sit v.g. eruenda radix quadrata ex 20. Appositis tribus cifrarum binariis, exurget numerus 20000000. cuius radix per Dandam eruta est 4472. (Negligimus hic residuum 1216.) Demptis tribus figuris 472. ad dexterā propter tres binarios Cifrarum appositos, erit radix $4\frac{472}{1000}$. sattis propinqua, minor tamen quam vera, cum eius quadratus numerus sit tantum $\frac{19998784}{1000000}$. hoc est, $19\frac{998784}{1000000}$. qui paulo minor est numero dato 20. Quod si ad numeratorē adijcias 1. fiet radix $4\frac{473}{1000}$. maior quam vera, quippe cum quadratus eius numerus sit $20\frac{7729}{1000000}$. paulo maior dato numero 20.

20000000(4472

4	4
64	84
191	887
1216	8942

Hac porro ratione recte inueniri propinquam radicem quadratam demonstratum à nobis est in Geometria practica lib. 6. propos. 20.

Extractio radicis quadratæ propinquæ ex minutiis.

Eadem hæc ratio locum etiam habet in numeris fractis. Nam si tam Numeratori, quam Denominatori apponantur aliquot Cifrarum binarij, fiet ex radice Numeratoris illis Cifris aucti Numerator, & ex radice Denominatoris totidem Cifris aucti Denominator. Vt si desideretur radix huius minutiæ $\frac{2}{3}$. Additis duobus binariis cifrarum fit minutia $\frac{20000}{30000}$. Radix numeratoris est 141. & Denominatoris 173. Ergo radix propinqua minutiæ $\frac{2}{3}$. erit $\frac{141}{173}$. cuius quadratus numerus est $\frac{19881}{29929}$. paulo minor quam $\frac{2}{3}$. & sic de aliis.

Lege quæ in Geometria practica lib. 4. cap. 2. num. 5. & lib. 6. propos. 21. scripsimus. Ibi enim reperies rationem facilem extrahendi radicem quadratam ex qualibet minutia non quadrata.

EXTRACTIO RADICIS CVBICÆ.

CAPVT XXVIII.

Numerus Cubus quid.

CVBVS est numerus qui ex aliquo numero in se ipsum multiplicato, deinde in productum gignitur, qualis est 8. qui ex multiplicatione numeri 2 in se ipsum, & in productum numerum 4. producitur. Item 27. qui producitur ex 3. in se, & in productum 9. Item 103823. quia gignitur ex 47. in se, & in productum 2209 &c. Vnitas quoq; ab Arithmeticis numerus cubus, licet improprie, nominatur, propterea quod ex 1. in se, & in productū 1. producitur. Numerus a. qui in se multiplicatus, & in productū, cubum procreat, vocatur latus, siue radix cubi.

Extractio radicis cubicæ quid.

Extractio igitur radicis Cubicæ ex dato numero est inuentio numeri qui in se primum multiplicatus, deinde in productum procreet datum numerū, si cubus est, vel si non est cubus, maximum numerum cubum in eo contentum. Vt extractio radicis cubicæ ex numero 59319. est inuentio numeri 39. quia hic in se ductus, & in productum 1521. gignit numerum 59319. propositum. Item extractio radicis cubicæ ex numero 116592. est inuentio numeri 48. quia hic in se ductus, & in productū 2304. producit numerū 110592. qui est maximus cubus in dato numero 116592. contentus: quippe cum proxime maior cubus, cuius latus, siue radix est 49. vna vnitate maior quam 48. sit 117649. Difficilior autem est extractio radicis cubicæ, quam quadratæ, & quam variis viis præscribunt Auctores. Nos eam trademus, quam nouam quodammodo lib. 6. Geometriæ Practicæ ad finem propos. 19. extraximus. Est autem eiusmodi.

Quomodo numerus, cuius radix quæritur punctis sit signandus.

Quot figuras habeat radix cubica dati numeri.

Primum numerus propositus, cuius radix cubica eruenda est, signandus est punctis quibusdam, posito puncto sub prima figura ad dextram, vel supra ipsam figuram & alio sub quarta figura, omissis duabus figuris in medio, atq; alio sub septima, omissis duabus aliis in medio, & sic deinceps sub decima, decima tertia, &c. relictis semper duabus figuris post quodlibet punctum, ita vt quoduis punctum habeat tres figuras, illam videlicet, sub qua punctum est signatum, & alias duas, quæ hanc versus sinistram præcedunt, excepto vltimo puncto ad sinistram, quod aliquando vnicam figuram habet, aliquando vero duas tantum. Tot autem figuras habebit radix propositi numeri, quot puncta signati sunt. Vt hic numerus 256047896. signabitur, vt in hac formula cernis, habebitq; eius radix cubica tres figuras. Hic vero numerus 3456789012786. ita signabitur, eiusq; radix quinq; figuris scribetur.

256047896

Quo pacto radix cubica ex dato numero eruatur.

Deinde in promptu esse debet apposita hæc tabella cōtinens cubos nouem figurarū Arithmeticarum vt primum punctum ad sinistram expediri possit. Quibus paratis sit eruenda radix cubica ex numero 256047896. Notatis punctis vt diximus, ex primo puncto 256. ad sinistram sub traho cubū 216. (cuius radix 6.) maximum in eo contentum. Et quia remanent 40. erit sequens punctum 40047. & prima radicis figura 6.

Radices	Cubi
1.	1
2.	8
3.	27
4.	64
5.	125
6.	216
7.	343
8.	512
9.	729

Paro diuisorem, multiplicando quadratum radicis 6. cubi subtracti, nimirum 36. per 300. qui erit 10800. per quē si diuidam meum punctū 40047. inueniam Quotientem 3. pro secunda figura radicis. Hanc duco in 10800. diuisorem inuentum, facioq; 32400. Deinde duco quadratum nouæ figuræ inuentæ 3. nimirum 9. in productum ex prima figura inuenta 6. in 30. videlicet in 180. facioq; 1620. Postremo ad summam duorum horum productorum 32400. 1620. id est, ad 34020. adjcio cubum inuentæ nouæ figuræ 3. nimirum 27. totamque summā 34047. ex meo puncto 40047. subtraho. Et quia supersunt 6000. erit vltimum punctum 6000896. scribo ergo inuentam figuram 3. post priorē 6. id est, post radicem maximi cubi 216. ex primo puncto subtracti.

Radix propositi numeri 635.

32400
1620
———
34020
27
———
34047

40047
34047
———
6000

Post hæc paro eodem modo diuisorem nouum pro vltimo puncto, hoc modo. Quadratum totius radicis 63. hactenus inuentæ hoc est 3969. duco iterum in 300. Productus namq; numerus 1190700. erit diuisor, per quem si diuidam meum punctum 6000896. reperiam Quotientem 5. scribendum post radicem 63. hactenus inuentam. Hanc figuram 5. inuentam similiter duco in diuisorem inuentum 1190700. facioq; 5953500. Deinde quadratum eiusdem nouæ figuræ 5. nimirum 25. duco in productum ex radice 63. prius inuenta, multiplicata per 30. hoc est in 1890. efficioq; 47250. Postremo ad summam horum duorum productorum 5953500. 47250. adijcio cubum 125. figuræ 5. inuentæ, ac totam summam 6000875. ex meo puncto subtraho, id est, ex 6000896. supersuntque 21. Numerus ergo propositus cubus non est, ac proinde Quotiens inuentus

5953500
47250
125
———
6000875

 uentus

uentus635.non est eius radix cubica,sed alterius numeri qui est maximus cubus in dato numero comprehensus, qualis est,256047875. Nam proxime maior cubus habens radicem vna vnitate maiorem radiçe inuenta 635, constituit numerum maiorem proposito numero.

Quod si supereſſet aliud punctum,ducendus esset quadratus totius radicis 635.hactenus inuentæ in 300. vt nouus diuisor exurgeret,&c. Ex hoc porro exemplo declarato satis puto intelligi regulam noſtram pro extractione cubica ab aliorum quidem regulis nonnihil differentem, sed meo iudicio faciliorem.

Quantum possit esse residuum in Extractione Cubica.

Sciendum autem est,in nulla Extractione radicis cubicæ residuum,si quod est, maius esse posse, quam triplum quadrati radicis inuentæ, vna cum triplo eiusdem radicis: alias haberet numerus propositus radicem vna vnitate maiorem illa, quæ inuenta est. Ratio est,quod quilibet cubus superat proxime minorem cubum triplo, quadrati ex radiçe minoris cubi producti,vna cum eiusdem radicis triplo,& insuper vna vnitate,adeo vt si addatur 1.ad triplum quadrati ex radice cuiusuis cubi producti,&ad triplum eiusdem radicis,atq; hæc summa ad eum cubum adijciatur,fiat cubus proxime maior. Vt cubus numerus 27.superat cubum 8.numero 19. Constat autem numerum 18.conflatum esse ex triplo quadrati radicis 2. hoc est ex 12. & ex triplo ipsius radicis 2. nimirum ex 6. atq; adeo, si addatur 1.confici differentiam inter duos cubos proximos 8.& 27.

Quanta sit differentia inter duos cubos proximos.

Quo pacto cognoscatur, num figura sumpta sit nimis parua in Quotiente.

Itaq; si quando in Extractione tam magnus numerus fuerit residuus,vt dubites, te in Quotiente figuram sumpsisse nimis paruam. (Nam ipsa operatio,quando subtractio fieri nequit,docet nimis magnam fuisse figuram assumptam)capiendum est triplum quadrati radicis ad eam vsq; operationem inuentæ,vna cum triplo eiusdem radicis. Si enim summa horum duorum numerorum minor fuerit residuo extractionis,scito, te nimis paruam figuram in Quotientem sumpsisse. Si vero dicta summa æqualis fuerit residuo,vel maior,recte in Quotiente figuram fuisse assumptam. Idem cognosces si periculum feceris cum figura maiore. Si namq; multiplicationes fiant,vt in regula præcipitur,& subtractio fieri non possit, recte accepta fuit figura prior, si vero fieri possit subtractio,figura accepta fuit nimis parua.

Probatio Extractionis radicis cubicæ triplex.

Examen extractionis radicis Cubicæ tribus etiam modis fieri potest,vt & diuisionis integrorum,& Extractionis radicis Quadratæ: primo videlicet modo per abiectionem 9.altero per abiectionem 7.ac tertio per multiplicationem,vt in diuisione integrorum dictum est: sed radix inuenta sumenda hic est pro diuisore. Vt exemplum superius ita per 9.examinabitur. Reiectis 9.ex radice 635.remanent 5.quæ in vtroq; latere crucis colloco:propterea quod radix loco diuisoris sumitur,& pro Quotiente, vt diximus. Multiplicatis iam duabus hisce figuris 5. & 5. inter se, & producto 25. ducto in eandem figuram 5.vt gignatur Cubus 125. figuræ 5. atq; ex hoc cubo vna cum residuo extractionis 21. reiectis 9. supersunt 2.collocanda in superiori parte Crucis. Et quia si abijciantur 9.ex numero proposito,remanent quoq; 2.in inferiori parte Crucis scribenda, recte fuit radix extracta.

2 / 5 X 5 / 2

At per 7.ita idem exemplum examinabitur. Reiectis 7.ex radice 635.remanent 5.quæ in vtroq; Crucis latere scribo. Multiplicata autem figura hac 5.cubicæ,& ex cubo 125.reiectis 7. supersunt 6. quæ addita ad 0.nimirum ad residuum, quod remanet si ex 21. residuo extractionis abijciantur 7. faciunt 6.Et quoniã supersunt etiã 6.si ex numero proposito abijciantur 7.rectius inuenta est radix cubica.

6 / 5 X 5 / 6

Quod si multiplicetur radix inuenta 635.cubice,hoc est primum in se, deinde in productum, numeroq; genito addatur residuum 21.procreabitur propositus numerus,ex quo radix eruta fuit.

APPROPINQVATIO RADICVM IN NVMERIS NON CVBIS.

CAPVT XXIX.

Appropinquatio radicis cubicæ.

VT ex numeris, qui Cubi non sunt, propinqua radix eruatur, non est ad hanc vsq; diem inuenta via magis accurata,quam ea,quã in Geometria Practica lib.6.cap.20.demonstrauimus. quæ est eiusmodi. Numero proposito apponantur aliquot ternarij Cifrarum (quo autem plures Cifrarum ternarij apponentur,eo propinquior radix eruetur) & ex toto hoc numero radix cubica extrahatur, vt traditum est. Deinde ex ea radice abiectis ad dextram tot figuris quot Cifrarum ternarij appositi fuere, reliquæ figuræ radicem integram dabunt, cui addenda est fractio numeratorem habens figuras abiectas,denominatorem vero vnitatem cum totidem Cifris, quot ternarii Cifrarum additi fuerunt, nimirum 10.si vnus ternarius fuit additus vel 100. si duoternarii additi fuerunt,vel 1000.si tres,& sic deinceps:ita vt fractio illa cõtineat,vel decimas,vel centesimas,vel millesimas,&c.

Exempli causa; Ex numero 29160. qui cubus non est, eruenda sit radix cubica propinqua. Apponantur tres ternarij Cifrarum vt in fractione habeantur partes millesimæ, denominatæ videlicet à 1000. atque ex toto numero 29160000000000.extrahatur radix Cubica,quæ reperietur 30779.minor quam vera, quod in extractione fuerit aliquis numerus residuus,atq; adeo maior radix, quam vera,erit 30780. Abiectis tribus figuris ad dexteram propter tres Cifrarũ ternarios appositos,erit propinqua radix $30\frac{779}{1000}$. minor,q̃ vera,cum eius cubus sit $29158\frac{1884101791}{1000000000}$. maior a propinqua radix.q̃ vera,erit $30\frac{780}{1000}$.quippe cum eius cub. sit $29161\frac{232055200}{1000000000}$.

Extractio radicis pro pinqua Cubicæ ex minutijs.

Ratio hæc locum etiam habet in numeris fractis. Nam si tam Numeratori, quam Denominatori apponantur aliquot Cifrarum ternarij,fiet ex radice numeratoris illis Cifris aucti Numerator & Denominator ex radice Denominatoris illis Cifris aucti,quemadmodum supra de radice quadrata fractorum numerorũ diximus.

Aliam rationem expeditam pro extrahenda radice cubica ex dato numero fracto reperies in noſtra Geometria Practica lib.6. Propositione 21.

Agendum iam esset de Extractione aliarum radicum, quæ infinitæ sunt, vt in noſtra Geometria Practca propoſit. 19.explicauimus. Sed quoniam tractatio hæc difficilior est,inuentioq; radicis quadratæ,& Cubicæ magis est necessaria ad libros Archimedis,Ptolomæi,cæterorumq; Mathematicorum intelligendos, consulto à nobis in pleniorem noſtram Arithmeticam,& in Geometricam Practicam differtur. In ea namq; Arithmetica pleniore, non solum omnes radices,cum earum appropinquationibus (quod in Geometria quoq; practica lib.6.fecimus)tractabimus,sed innumera alia,à quibus in hoc Compendio dedita opera abstinuimus,exponemus.

FINIS.

INDEX OMNIVM CAPITVM HVIVS ARITHMETICAE.

1 Numeratio integrorum numerorum. pag.3
2 Additio integrorum numerorum. 5
3 Subtractio integrorum numerorum. 7
4 Multiplicatio numerorum integrorum. 10
5 Diuisio integrorum numerorum. 13
6 Numeratio fractorum numerorum. 22
7 Æstimatio,siue valor fractorum numerorum. 23
8 Fractiones fractorum numerorum. 24
9 Reductio fractorum numerorum ad minimos numeros,siue terminos. 25
10 Reductio fractorum numerorum ad eandem denominationem,&ad integra,nec non integrorũ ad fractionem quamcunq;, ac deniq; fractionũ fractorum numerorũ ad simpliçes fractiões. 26
11 Additio fractorum numerorum. 28
12 Subtractio fractorum numerorum. 29
13 Multiplicatio fractorum numerorum. 29
14 Diuisio fractorum numerorum. 30
15 Insitio fractorum numerorum. 31
16 Quæstiunculæ nonnullæ numerorum integrorũ, ac minutiarum. 34
17 Regula trium; quæ alio nomine regula aurea, siue regula proportionum dici solet. 35
18 Regula trium cuersa. 39
19 Regula trium composita. 40
20 Regula Societatum. 40
21 Regula alligationis. 52
22 Regula falsi simplicis positionis. 55
23 Regula falsi duplicis positionis. 58
24 Progressiones Arithmeticæ. 65
25 Progressiones Geometricæ. 68
26 Extractio radicis quadratæ. 73
27 Appropinquatio radicum in numeris non quadratis. 76
28 Extractio radicis cubicæ. 77
29 Appropinquatio radicum in numeris nõ cubis. 78

INDEX EORVM, QVÆ IN SINGVLIS Capitibus continentur.

IN PRÆFATIONE.

Arithmeticæ præstantia,atque vtilitas. pag. 2

In numeratione integrorum numerorum.

Numeratio quid. 3
Valor decem figurarum Arithmeticarum quo pacto cognoscatur. ibid.
Quot loca sint in quolibet numero. ibid.
Prima figura,& vltima in quouis numero quæ sit. ibid.
Ordo locorum in quouis numero cur à dextra siniſtram versus procedat. ibid.
Quid quælibet figura in quouis loco posita significet. ibidem.
Loca in quouis numero superant seſe ordine in decupla proportione. ibid.
Quid obseruandum sit, vt datus numerus facile exprimatur. ibid.

In additione integrorum numerorum.

Additio quid. 4
Numeri addendi quo pacto sint collocandi. ibid.
Additio quo pacto fiat. ibid.
Quid agendum sit quando ex figuris vnius loci colligitur numerus tribus figuris scribendus. 5
Quid faciendum sit,quando multi numeri addendi sunt. ibidem.
Probatio additionis per 9.quomodo fiat. ibid.
Qua ratione ex quouis numero reijciantur facile 9. quoties fieri potest. ibid.
Nouenarii mirabilis proprietas. ibid.
Probatio additionis per 9.fallax est,& quare. 6
Probatio additionis per 9. cur ab Arithmeticis adhibeatur, cum fallax sit. ibid.
Probatio additionis per 7.quomodo fiat. ibid.
Quo pacto reiicienda sint 7.ex quolibet numero. ibid.
Probatio additionis per 7.fallax est,& quare. ibid.
Probatio additionis per 7. cur ab Arithmeticis adhibeatur, cum fallax sit. ibid.
Probatio additionis per 7. minus fallax est, quam per 9.& quare. ibid.
Tabella probationis per 7. 7
Probatio additionis per additionem quo pacto fiat. ibid.
Probatio additionis per subtractionem quo pacto fiat. ibidem.

In subtractione integrorum numerorum.

Subtractio quid. ibid.
Vter duorum numerorum maior sit, quo pacto cognoscatur. ibid.
Subtrahendus numerus quo pacto locandus sit sub eo à quo fit subtractio. ibid.
Subtractio quomodo fiat. 8
In subtractione quid agendum sit,quando figura inferior maior est, quam superior. ibid.
Facilior ratio subtractionis quando figura inferior superiore maior est. ibid.
In subtractione quid agendum sit, quando plures sunt numeri. 9
Probatio subtractionis per 9.& 7.quo pacto fiat. ibid.
Probatio subtractionis per additionem,& subtractionem quo pacto fiat. ibid.

In multiplicatione integrorum numerorum.

Multiplicatio quid. 10
Tabula Pythagorica. ibid.
Tabula Pythagorica quo pacto constituatur. ibid.
Vsus tabulæ Pythagoricæ ad cognoscendũ, quid faciat multiplicatio vnius figuræ in aliam figuram. ibid.
Regula multiplicandi figuram in figuram. ibid.
Numeri in multiplicatione quomodo collocandi sint. ibid.
Numerus quiuis per vnam figuram quo pacto multiplicet. ibid.
Numerus quiuis per numerum pluribus figuris scriptum quo pacto multiplicetur. ibid.
Probatio multiplicationis per 9.& 7. quo pacto fiat. 12
Probatio multiplicationis per diuisorem quo pacto fiat. 12. & 13.
Numeri habentes in principio cifras, quo pacto facilius multiplicentur. 14

In diuisione integrorum numerorum.

Diuisio quid. 15
Quotiens quid. ibid.
Numeri in diuisione quomodo sint collocandi. ibid.
Diuisio quomodo fiat. ibid.

In quotiente non potest poni maior numerus quam 9. ibidem.
Residuus numerus in diuisione semper minor esse debet quam diuisor. ibid.
Numerus per vnam figuram quomodo diuidatur. ibid.
Qui numerus dicatur supra diuisorem positus. ibid.
Vsus tabulæ Pytagoricæ ad cognoscendum, quoties figura diuisoris in suprapositio numero contineatur. ibid.
Quotiens quot possit figuras habere. 14
Numerus per plures figuras quo pacto diuidatur. ibid.
Qui numerus dicatur supra quamcunq; figuram diuisoris positus. ibid.
Quomodo ducenda sit figura Quotientis inuenta in diuisorem. ibid.
Quid agendum sit cum numero ex diuisione relicto. 15
Quando numerus minor per maiorem proponitur diuidendus, quid agendum sit. ibid.
Quomodo nonnulli ducant figuram Quotientis inuentam in diuisorem. ibid.
Difficultas diuisionis in quo consistat. ibid.
Quid agendum sit, quando in Quotiente sumpta est figura nimis parua vel magna. 16
Quo pacto diuisio facile instituatur, vt non erretur. 18
Diuisio ab aliis quo modo fiat. 19
Commoditas in modo diuisionis, quo alij vtuntur. ibid.
Quo pacto hic modus fiat expeditior. ibid.
Alius modus absoluendi diuisionem. ibid.
Diuisio per Dandam quo pacto fiat. 20
Probatio diuisionis per 9. quo pacto fiat. ibid.
Probatio diuisionis per 7. quomodo fiat. 21
Probatio diuisionis per multiplicationem quo pacto fiat. ibidem.
Diuisio nondum absoluta quo pacto examinetur. ibid.
Facilitas diuisionis, quando diuisor in principio habet aliquot cifras. ibid.
Facilis aliquando fit diuisio quando diuidendus numerus habet aliquot cifras in principio. 22
Additio, Subtractio, Multiplicatio, & Diuisio fundamenta sunt omnium, quæ in Arithmetica traduntur. ibid.

In numeratione fractorum numerorum.

Fractæ numerus quid. ibid.
Numerator, & Denominator fractionis quid. ibid.
Fractio quæuis quo pacto scribatur, & pronuncietur. ibidem.
Fractiones vnde oriantur. ibid.
Quando minor numerus per maiorem diuiditur, fit fractio. ibid.
Fractio quæuis est pars aliquota Numeratoris à Denominatore denominata. ibid.

In æstimatione siue valore fractorum numerorum.

Minutiarum valor quo pacto augeatur. 23.
Minutiarum valor quo pacto minuatur. ibid.
Minutiæ, quarum numeratores ad denominatores eandem habent proportionem, æquales sunt. ibid.
Si numerator, ac denominator cuiusuis fractionis per quemcunq; numerum multiplicetur, diuidaturue gignitur eiusdem valoris fractio. ibid.
Quæ minutia vni integro æquiualeat. ibid.
Quæ minutia minor sit vno integro. ibid.
Quæ minutia maior sit vno integro. ibid.
Vtra duarum minutiarum maior sit, quo pacto cognoscatur. ibid.
Valor minutiæ datæ quo pacto in minore moneta, pondere, vel mensura exploretur. ibid.
Iulius, Baiochus, & Quatrimus apud Romanos quid significent. 24

In fractionibus fractorum numerorum.

Minutiæ minutiarum quid, & vnde oriantur. ibid.
Minutiæ minutiarum quomodo pronuncientur, ac scribantur. ibid.

In reductione fractorum numerorum ad minimos numeros, siue terminos.

Minutiæ cur ad minimos terminos reducantur. ibid.
Minutiæ qua arte ad minimos terminos redigantur. 25
Quæ minutiæ ad minores termines redigi non possit. ibid.
Primus numerus, & primi inter se numeri quid. ibid.
Maxima mensura communis Numeratoris, ac Denominatoris minutiæ datæ quo pacto reperiatur. ibid.
Quando Numerator, & Denominator datæ minutiæ non habeant communem mensuram, præter vnitatem. ibid.
Maxima mensura quorumlibet duorum numerorum quo pacto inueniatur. ibid.
Vnde colligatur regula inueniendi maximam mensuram duorum numerorum. 26
Alia ratio redigendarum minutiarum ad minimos terminos. ibid.

In reductione fractorum numerorum ad eandem denominationem, & ad integra, nec non integrorum ad fractionem quamcunq;, ac deniq; fractionum fractorum numerorum ad simplices fractiones.

Duæ Minutiæ quo pacto ad eandem denominationem reducantur. ibid.
Inuentio numeri à quot cunq; datis numeris numerati. ibid.
Inuentio minimi numeri à quot cunq; numeris numerati. ibid.
Plures minutiæ, quam duæ, quo pacto ad eundem denominatorem reducantur. 27
Alia ratio reducendi duas minutias ad eandem denominationem. ibid.
Vtilitas minimi numeri à denominatoribus datarum minutiarum numerati. ibid.
Minutia, cuius numerator maior est denominatore, quo pacto ad integra reducatur. ibid.
Integra qua ratione ad minutiam quamcunq; redigantur. ibid.
Minutiæ minutiarum quo pacto ad simplices minutias reuocentur. ibid.

In additione fractorum numerorum.

Additio minutiarum quomodo fiat. ibid.
In additione minutiarum quid faciendum sit, quando integra adsunt. ibid.
Praxis addendi minutias diuersarum denominationum inter se. ibid.
Probatio additionis minutiarum per subtractionem quomodo fiat. ibid.

In subtractione fractorum numerorum.

Subtractio minutiarum quomodo fiat. 29
In subtractione minutiarum quid faciendum sit, quando integra adsunt. ibid.
In subtractione, quando plures sunt minutiæ, quid agendum. ibid.
Praxis subtrahendi minutiam à minutia. ibid.
Probatio subtractionis minutiarum per additionem quomodo fiat. ibid.

In multiplicatione fractorum numerorum.

Multiplicatio minutiarum, quo pacto fiat. 30

In multiplicatione minutiarum, quando adsunt integra, quid agendum. ibid.
Probatio multiplicationis minutiarum per diuisionem quo pacto fiat. ibid.
In multiplicatione minutiarum cur producatur minutia minor vtraq; minutia multiplicante. ibid.

In diuisione fractorum numerorum.

Diuisio minutiarum quomodo fiat. ibid.
In diuisione minutiarum, quando adsunt integra, quid agendum, ibid.
Diuisio minutiarum qua ratione ab aliis tradatur. 31
Probatio diuisionis minutiarum per multiplicationem quo pacto fiat, ibid.
In diuisione minutiarum cur aliquando producatur Quotiens maior, quam minutia diuisa. ibid.
Quando Quotiens maior sit numero diuidendo in minutiis. ibid.
Quando Quotiens in minutiis minor sit diuidendo numero. ibid.

In insitione fractorum numerorum.

Insitio minutiarum quid. ibid.
Insitio minutiarum duplex est. ibid.
Insitio minutiarum propter quid excogitata sit: 32.
Differentia inter insitionem minutiarum, & reductionem minutiarum. ibid.
Prima regula insitionis duarum minutiarum. ibid.
Quomodo plures minutiæ, quam duæ, inserantur per primam regulam. ibid.
Minutiæ inserendæ per primam regulam non sunt reducendæ ad minimos terminos ante finem operationis, & quare. ibid.
Summa insitionis secundum primam regulam semper minor est, quam vnitas & quare. ibid.
Vsus primæ regulæ insitionis in diuidendo numero integro vna cum minutia per numerum integrum. ibid.
Secunda regula insitionis duarum minutiarum. 33
Quo pacto plures minutiæ, quam duæ inserantur per primam regulam. ibid.
Minutiæ inserendæ per secundam regulam reduci possunt ad minimos terminos ante finem operat. ibid.

In quæstiunculis nonnullis numerorum integrorum, ac minutiarum.

Vtilitas quæstiuncularum quarundam. 34
Inuentio numeri à quo facta est subtractio, vel facienda, vt propositus numerus relinquatur. ibid.
Inuentio numeri subtracti, vel subtrahendi, ex proposito numero, vt alius datus numerus sit reliquus. ibid.
Inuentio numeri cuius datus numerus adijciendus sit, vel qui dato numero sit addendus, vt alius numerus datus remaneat. ibid.
Inuentio differentiæ inter datos duos numeros. ibid.
Inuentio numeri diuisi, aut diuidendi per datum numerum, vt Quotiens propositus proueniat. ibid.
Inuentio numeri, qui contineat vel sit, aut det datam fractionem, seu partem, partesue propositi numeri. ibid.
Inuentio numeri, per quem datus numerus sit diuisus aut diuidendus, vt Quotiens sit propositus numerus. ibid.
Inuentio numeri, per quem datus numerus sit multiplicandus, vel qui per datum numerum multiplicandus sit, vt gignatur numerus propositus. ibid.
Inuentio duorum numerorum, qui inter se multiplicati datum numerum producant. ibid.
Inuentio duorum numerorum, vt vno per alterum diuiso, proueniat Quotiens propositus. 35
Inuentio numeri per quem datus numerus sit multiplicandus, vel qui multiplicandus sit per datum numerum, vt producto diuiso per alium datum numerum proueniat Quotiens propositus. ibid.
Inuentio partis, quam datus numerus exhibet respectu alterius numeri dati. ibid.
Inuentio numeri, respectu cuius datus numerus exhibeat partem propositam. ibid.
Inuentio multitudinis partium quarumcunq;, quas datus numerus continet. ibid.

In regula trium, quæ alio nomine regula aurea, siue regula proportionum dici solet.

Regula trium, siue aurea, siue proportionum cur sic dicta sit. ibid.
Numeri in regula trium quo pacto sint collocandi. ibidem.
Quo pacto per regulam trium quartus numerus ignotus inquiratur. ibid.
Demonstratio regulæ trium. 36
Numero per alium diuiso, si diuisor per Quotientem multiplicetur, cur rursum numerus diuisus producatur. ibidem.
Probatio regulæ trium. ibid.
Compendia varia regulæ trium. ibid.
Probationes variæ regulæ trium. 37
Demonstratio compendiorum regulæ trium. ibid.
Quæstiones nonnullæ, quibus variæ difficultates regulæ trium explicantur. ibid. & seqq.
Quid agendum, quando diuersæ monetæ, mensuræ, pondera, & fractiones in regula trium occurrunt. 38

In regula trium euersa.

Regula trium euersa quo pacto quartum numerum eliciat. 39.
Quæstiones aliquot ad regulam trium euersam spectantes. ibid. & seq.

In regula trium composita.

Regula trium composita, quid, & quomodo fiat. 41
Quæstiones aliquot ad regulam trium compositam spectantes. ibid. vsq; ad 44.

In regula Societatum.

Regula Societatum quando adhibeatur, & quo pacto fiat, ibid.
Quoties regula trium in regula Societatum adhibenda sit. ibid.
Quid agendum, quando in regula Societatum est diuersitas temporum. ibid.
Quæstiones aliquot ad regulam Societatum spectantes. ibid. & seqq.

In regula alligationis.

Regula alligationis. 52
Regula alligationis quomodo fiat, ibid.
Quæstiones aliquot ad regulam alligationis spectantes. ibid. & seqq.
Variis modis fieri potest alligatio, si res alligandæ plures sint, quam duæ. 52
Quid agendum, quando in regula alligationis ponuntur plures differentiæ è regione eiusdem pretij. ibid.
Quid obseruandum sit in alligationibus plurium rerum. 53
Quando quæstio alligationis sit impossibilis. ibid.

In regula falsi simplicis positionis.

Regula falsi cur sic dicta sit. 55
Regula falsi duplex est. ibid.
Discrimen inter duas regulas falsi. 56
Regula falsi simplicis positionis quomodo fiat, ibid.

Quæ-

Quæstiones aliquot ad regulam falsi simplicis positionis spectantes. ibid. & seqq.

In regula falsi duplicis positionis.

Regula falsi duplicis positionis quo pacto fiat. 58
In regula falsi duplicis positionis, quando vtraque positio veritatem excedit, vel ab ea deficit, fit subtractio. ibidem.
In regula falsi duplicis positionis, quando vna positio veritatem excedit, & altera ab ea deficit, fit additio. ibidem.
Quæstiones aliquot ad regulam falsi duplicis positionis spectantes. ibid. & seqq.

In progressionibus Arithmeticis.

Progressio Arithmetica quid. 65
Progressio naturalis numerorum, & numerorum imparium, pariumq; quid. ibid.
Arithmetica progressio quo pacto continuetur. ibid.
Differentia progressionis Arithmeticæ quomodo inueniatur. ibid.
Arithmetica progressio decrescere non potest in infinitum. ibid.
Proprietas progressionis Arithmeticæ trium numerorum. ibid.
Proprietas progressionis Arithmeticæ quatuor numerorum. ibid.
Proprietas progressionis Arithmeticæ quotcunque terminorum, si numerus terminorum fuerit impar. ibid.
Proprietas progressionis Arithmeticæ quotcunque terminorum, si numerus terminorum fuerit par. 66.
Summa cuiuscunq; progressionis Arithmeticæ quo pacto inueniatur. ibid.
Particularis inuentio summæ progressionis naturalis numerorum. ibid.
Numerus terminorum progressionis naturalis numerorum est vltimus terminus. ibid.
Particularis inuentio summæ numerorum imparium. 67
Numerus terminorum in progressione numerorum imparium quo pacto reperiatur. ibid.
Particularis inuentio summæ numerorum parium. ibid.
Numerus terminorum in progressione numerorum parium qua ratione inueniatur. ibid.
Vltimus terminus cuiuscunq; progressionis Arithmeticæ quo pacto eliciatur ex numero terminorum, vna cum primo termino, & differentia progressionis. ibid.
Quæstio de bobus Augiæ. ibid.
Quæstio de ducibus militiæ. ibid.

In progressionibus Geometricis.

Progressio Geometrica quid. 68
Geometrica progressio quo pacto continuetur. ibid.
Denominator proportionis in progressione Geometrica quomodo inueniatur. ibid.
Progressio Geometrica decrescit in infinitum. ibid.
Proprietas progressionis Geometricæ trium terminorum. ibidem.
Proprietas progressionis Geometricæ quatuor terminorum. ibid.
Proprietas progressionis Geometricæ quotcunq; terminorum, si numerus terminorum sit impar. ibid.
Proprietas progressionis Geometricæ quotcunq; terminorum si numerus terminorum sit par. ibid.
Summa cuiuscunq; progressionis Geometricæ quo pacto inueniatur. 68
Particularis inuentio summæ progressionis proportionis duplæ, cuius initium est 1. 69
In progressione proportionis duplæ incipiente ab 1. quilibet numerus, abiecta prius vnitate, est summa omnium antecedentium numerorum. ibid.
Si in progressione Geometrica incipiente ab 1. numerus aliquis seipsum, vel alium numerum multiplicet quem locum numerus productus occupet. ibid.
Quilibet numerus in progressione Geometrica incipiente ab 1. seipsum multiplicans producit numerum in duplo maiore loco, minus vnitate, quam numerus multiplicans ponendum. ibid.
Progressio naturalis numerorum quo pacto indicet, quo in loco quilibet numerus productus collocandus sit in progressione Geometrica incipiente ab 1. ibid.
Quo pacto numerus cuiuscunque loci in progressione Geometrica incipiente ab 1. inuestigetur sine intermediis. ibid.
Quo pacto ea, quæ de progressione Geometrica incipiente ab 1. dicta sunt, accommodentur progressioni Geometricæ non incipienti ab 1. 70
Quo pacto numerus cuiuscunque loci in progressione Geometrica incipiente à quouis numero inuestigetur sine intermediis numeris. ibid.
Summa quotcunque terminorum progressionis Geometricæ proportionis duplæ ab 1. incipientis, addita prius vnitate, seipsam multiplicans producit numerum, qui abiecta prius vnitate, summa est duplo plurium terminorum. ibidem.
Quo pacto facile inueniatur summa 64. terminorum progressionis Geometricæ duplæ proportionis ab 1. incipientis. ibid.
Quanta pecunia requiratur vt impleantur 64. loca ludi latrunculorum, ita vt in primo loco ponatur 1. quatr. in secundo 2. in tertio 4. & ita deinceps progrediendo per proportionem duplam. 71
Quot grana frumenti constituant vnum Rubium. ibid.
Quot naues requirantur ad ferendum frumentum in 64. locis ludi latrunculorum positum. ibid.
Quot naues requirantur ad ferendam pecuniam in 64. locis ludi latrunculorum positam, si ad aureos reduceretur. ibidem.
In progressione, cuius primus terminus est 1. secundus 2. tertius vero secundi triplus, & similiter quartus tertij triplus, & ita deinceps: quilibet terminus duplus est omnium præcedentium. ibid.
Qua arte inueniatur summa 64. terminorum ab 1. incipientium, atq; ita progredientium, vt quilibet duplus sit omnium antecedentium terminorum. ibid.
Alia inuentio eiusdem summæ. 72
Quantum frumentum requiratur, vt impleantur, 64. loca ludi latrunculorum, ita vt in primo loco ponatur 1. granum, in secundo 2. in tertio 6. in quarto 18. & ita deinceps, vt grana subsequentis loci sint dupla omnium granorum in præcedentibus omnibus locis simul. ibid.
Quot naues necessariæ sint ad prædictum frumentum portandum. ibid.
Quot naues totam superficiem terræ & maris operirent, si se mutuo tangerent. ibid.
Quot globi ex terra ac mari confecti tegerentur à nauibus, quæ necessariæ sunt ad proxime dictum frumentum portandum. ibid.
Quot globos toti terræ æquales constitueret frumentum in 64. locis proxime dictis contentum. ibid.
Quot naues ferrent aureos ducatos ex quatrinis, qui replerent 64. loca eo modo, quo de granis frumenti dictum est. ibid.
Quot globos terræ ac maris prædictæ naues tegerent. ibid.
Qua ratione facile inueniatur summa 40. terminorum progressionis Geometricæ proportionis duplæ ab 1. incipientis 73
Quanti constent 40. oppida si vendantur ita, vt pro primo soluatur 1. quatr. pro secundo 2. pro tertio 4. &c. ibidem.

Quomo-

Quomodo breuiter eliciatur summa 24. terminorũ progressionis Geometricæ proportionis duplæ ab 1. incipientis. ibid.
Quanti constet equus habens 24. clauos in pedibus, si ita vendatur, vt detur 1. quatr. pro primo clauo, & 2. pro secundo, & 4. pro tertio, &c. ibid.

In Extractione radicis quadratæ.

Quadratus numerus quid. ibid.
Radix quadrata quid. ibid.
Extractio radicis quid. ibid.
Numerus, cuius radix quæritur, quomodo punctis signetur. ibid.
Quot figuras habeat radix propositi numeri. ibid.
Quo pacto radix quadrata ex dato numero eruatur. ibid.
Extractio radicis quadratæ per Dandam. 74
Examen extractionis radicis quadratæ triplex. 75
Residuum in extractione radicis quadratæ maius esse non potest, quam duplum radicis inuentæ. ibid.
Quæ sit differentia inter duos quadratos proximos. ibid.

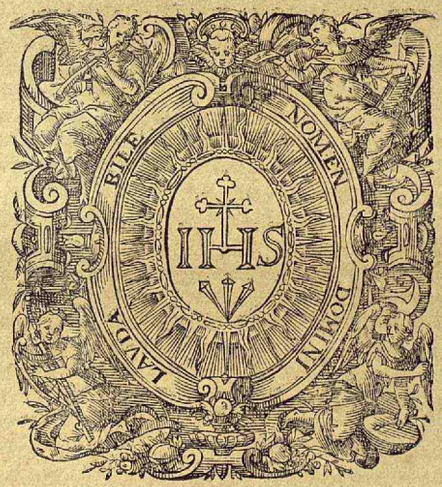
In appropinquatione radicum in numeris non quadratis.

Quomodo inueniatur radix propinquior, quæ tamen minor sit, quam vera. ibid.
Quomodo reperiatur radix propinquior, quæ tamen maior sit, quam vera. 76
Alia extractio radicis quadratæ propinquæ. ibid.
Extractio radicis propinquæ ex minutiis. 77
Cubus numerus quid. ibid.
Extractio radicis cubicæ quid. ibid.
Quomodo numerus, cuius radix cubica quæritur, punctis sit signandus. ibid.
Quot figuras habeat radix cubica dati numeri. ibid.
Quo pacto radix cubica ex dato numero eruatur. ibid.
Quantum possit esse residuum in extractione cubica. 78
Differentia inter duos cubos proximos quanta sit. ibid.
Quo pacto cognoscatur, num figura sumpta sit nimis parua in radice. ibid.
Præbatio extractionis radicis cubicæ. ibid.
Appropinquatio radicis cubicæ. ibid.
Extractio radicis cubicæ propinquæ ex minutiis. ibid.

FINIS INDICIS.

CHRISTOPHORI CLAVII BAMBERGENSIS E SOCIETATE IESV

ALGEBRA.



MOGVNTIÆ,

Sumptibus ANTONII HIERAT, excudebat

IOANNES VOLMARI.

Cum Gratia & Priuilegio Sacræ Cæsar. Maiest.

ANNO M. DC. XII.

PROOEMIVM
DE ALGEBRÆ PRÆSTANTIA.

ET dignitate summa, & amplissimarum laudum præconijs nulli postrema ea ars est, quam recepto vocabulo Algebram nostrates appellarunt: siue enim eius veluti natiuam originem inquiras, inde vsque ab Arabum felicibus ingenijs repetenda est: siue honestatem, inter Mathematicarum ordinis primas versatur: siue amplitudinem, nullis numerorum statis finibus, nulla magnitudinum mole, nullis gentium priuatis, publicis, priscis, recentibus, cultis, barbaris institutis, non vllo terrarum, vasto licet, ambitu continetur. Propositum siue scopus eius est, vt certam aliquam à sensuum cognitione, ac sensu secretam quantitatem explo- Scopus Algebræ.
ret, & tandem inter duos aliquos numeros æqualitate, siue æquatione comperta, deprehendat, atque demonstret. Venaticæ canis instar, quæ si quando diuturna venatione fatigata, & fame exagitata delitescentem feram subodorata fuerit, tamdiu oculis, tamdiu odora narium sagacitate scrutatur singula, donec comprehensam, dentibusque hærentem prædam domino sistat. Et sane multo etiam opificium ipsum opus admiratione antecellit, & arduum sua sponte facinus, atque præclarum exornat ipsa conficiendi ratio, redditque præstantius. Persimile est, quod dissimili in re andabatarum more ludentibus euenire solet. Quamdiu enim obuelatis oculis vrgentur ipsi, vrgentque vrgentes se, comprehensuros se aliquem nunquam desperant, è multis tamen, quis tandem sit intercipiendus, ignotum habent, & frustra sæpe his atque illis tentatis tenebris, vbi aliquem tenuerunt, tum demum detracta vitta, lucem oculi recipiunt, & ludus absoluitur. Obscuros enim numeros Algebra nunc addendo, nunc diuidendo, nunc multiplicando, suspenso velut vestigio, pertentat, certa, se in aliqua Geometrica progressione ab vnitate profecta deprehensuram, quod quærit, in qua tamen progressione inuentura sit, incerta; ac tamdiu cæco labore ludit, tamdiu latitantis numeri tenebras omnes explorat, vestigat, ac perfert, donec eo progrediatur, & ad eum numerum deueniatur, qui fuerat quæstioni subiectus, qui tum demum in lucem emergit, cum ipsa absoluitur operatio. Et primo quidem is numerus existit, qui in toto illo numerorum labore vnitatem progressionis ab vnitate incipientis proxime consequitur, tum etiam ij omnes numeri deprehenduntur, qui ad quæstionem explicandam indagandumque propositum additi & diuisi fuere, vt suis deinde locis planum faciemus. Quam igitur scopus iste late vagatur, qui nec genus vllum numerorum, nec vllius magnitudinis diuersitatem, à se alienam putat? vt non numerorum modo latebras omnes detegat, sed vniuscuiusque etiam molis finitam magnitudinem, suorum metrum, ponderum momenta, mensurarumque certos terminos assequatur; neque vlla Arithmeticæ quæstio subijciatur, quam non veluti suam agnoscat Algebra, atque expediat. Tam multas, tam varias, tam obscuras, tam difficiles Mathematicæ partes vna Algebra pertractat vniuersas. Nam quod rerum Mathematicarum inextricabiles nodos solui non posse, accidit aliquando, aut si quid obscurum extrahi à tenebris nunquam potuit, non huius facultatis præcepta certissima, sed æquationum & æqualitatum difficultates, & quæ nondum innotuit, earundem ratio causanda est. De his tamen plura ad finem capitis 12. habentur. Illud modo agamus, vt quantis interuallis Algebra Arithmeticæ præceptionibus antecellat, videamus: Quid enim in illa est, quod non etiam huius veluti fasces vereatur? quæ exempla tam sua, quæ tam ancipites quæstionum ambages, quæ tantæ moles difficultatum, qui tam inextricabiles meandri rerum abditissimarum, quæ non sint omnia illi cum ista communia? Nihil habet Arithmetica, nihil quod Algebram fugiat; quæ explicare ipsa cum nequeat, cognoscenda Algebræ tradat, habet quã plurima. Illud vero quam præclarum est, quam vnicuique optandum maxime, quam huius facultatis peculiare? Quod enim cæteris commune est, vt non ante proposita difficultas expediri possit, nec ne, sentias, quam totam absoluas, & bis iterumque integram repetas, itereque operationem; id in hac, in ipso operationis decursu obuiam fit, & prodit ipsa se quæstio, prius quam labor finem accipiat. Quæ enim sæpe suppositæ fallaciæ, & quæstionum pugnantes inter se sententiæ Algebræ imperitos latent, eas Arithmeticæ studiosus, nisi per hanc exploratas habeat, totus de ppositæ quæstionis solutione sollicitus frustra laborat, atq; ad has, atq; ad illas regulas animum refert, experitur singulas, singulas recognoscit, torquet sese & conficit, ad extremum inanes labores suos sentit, studiumque infelix damnat. Quare ne illud quidem in hac facultate est magnopere verendum, ne laborem vllum temere susceptum, & ad extremum vsque frustra toleratum dolendum sit; quod aliæ Mathematicæ partes accipere quidem ab hac possunt, præstare ipsæ non possunt. Atque hæc pauca de præstantia ac dignitate Algebræ præfationis loco dicta sint. Algebræ excellentia.

DE INVENTORE ALGEBRÆ AC NOMINE.

CAPVT I.

DE inuentore huius artis non conuenit inter omnes; Gebrum Arabem Aſtronomum aſſerunt non pauci, & à Gebro Algebram dictam contendunt. Vero ſimilius tamen Ioannes Regiomontanus in præfatione Alphragani Diophanto Alexandrino hoc inuentum attribuit. Ipſe enim Diophantus in tredecim librorum præfatione, quos hac de re ſcripſit ad Dionyſium, ſe primum huius ſcientiæ inuentorem profitetur, & à nemine ante ſe in lucem datam, immo ad ſuam vſque ætatem ignotam omnino fuiſſe, pronunciat. Maiorem accepit nomen ipſum varietatem; nam quod inter cæteras Arithmeticæ regulas maxime præſtat, Ars maior à plurimis appellata eſt. Regulam cenſus & rei Latini dixerunt; hoc eſt, regulam Radicis & quadrati. Magna enim ex parte quæſtiones in hac arte propoſitæ ſoluuntur per calculationes radicum, quas ipſi res, & quadratorum, quos ijdem cenſus vocant, vt ſuo loco conſtabit. Apud Italos Regula coſæ (ſeu della coſa) nuncupatur; quod in quæſtionibus ſoluendis ſemper vna radix ponatur, quam ipſi coſam dicunt. Ex quo etiam nomen illud ſortita eſt, quo à multis regula Coſſica nominatur. Non vno eam nomine Arabes omnes nominarunt, Algebram enim quidam vocant, quod apud eos idem ſonat, ac reſtauratio; quia nimirum in quæſtionibus hac arte ſoluendis ad aliquam ſemper æquationem, ſiue æqualitatem eſt deueniendum; in qua, quicquid ablatum, quidquid diminutum eſt, quiquid deeſſe comperitur, reſtaurari oportet. Almuchabulam vero, quod oppoſitionē eorum lingua ſignificat, propterea vocant alij, quod in quæſtionum abditis exponendis in hac ſcientia, cum ad æquationem æqualitatemve aliquam peruentum eſt, duo ſemper numeri æquales, diuerſo tamen nomine, ſibi inuicem opponuntur. Atq; hinc poſtremo factum eſt, vt geminatis nominibus Algebram & Almuchabulam aliqui vocauerint; quod ſcilicet tum per reſtaurationem, tum per hanc, quam modo diximus, oppoſitionem, quæſtiones omnes expediat. Harum tamen appellationum rationes is cognoſcet planius, qui quæſtionum, quæ hoc opere continentur, ſolutiones diligentius cognouerit. Vſus tamen apud ſcriptores, vt cum Arabibus Algebra hæc tota noſtra ſcientia communi appellatione diceretur obtinuit.

Varia nomina Algebræ.

HÆC de inuentore & nomine Algebræ dicta ſufficiant. Quæ ſi quam præclara eſt, quam iucunda ſtudioſis ſui, quam omnibus ſe ſe præſtat admirabilem; tam etiam perſpicue tradita eſſet, nec in Arithmeticorum, qui eam docuerunt, obſcuritate declaranda magis, quam in eiuſdem facultatis præceptis explicandis laborandum eſſet, coleretur etiam ipſa inter primas, ſuamque dignitatem pariter, & nominis ſplendorem integrum retineret: nec tam multi ſcriptorum vel ambagibus impediti, vel obſcuritate deterriti, relato repente veſtigio, ante diſcendæ Algebræ voluntatem & ſpem perdiſcendi abieciſſent, quam Algebram ipſam, primo, vt aiunt, è limine ſalutarent.

HORVM mihi laborem leuandi labor incumbit in præſentia, nec moleſtus, licet grauis, nec ſi eius fructus exiſtat, iniucundus. Quod & diuina ope præſtare pro meis viribus enitar. Omnia proinde, quæ ad Algebram ſpectant, ea methodo tradere, difficultatumque moles omnes explanare conabor, vt quiuis mediocriter tantum in Arithmeticæ præceptis verſatus, quam fieri poſſit, nimirum in ea addiſcēda laboris experiatur. In quo tamen præſtando, ſicut diligentiam non patiar deſiderari meam, ita eorum à me opinionem alienam puto, ſi qui ſunt, qui vſquequaque perfectam & numeris omnibus abſolutam Algebræ tractationem à me requirant.

NON adeo me amo, vt me tantopere cæteris omnibus, qui ad hanc diem eam deſcripſerunt, præferendum putem; vt quod ipſi non effecerunt, præſtare me poſſe profitear.

ÆQVATIONES eſſe plurimas inter tres pluresve numeros diuerſis nominibus appellatos, probe ſcio, quæ in quæſtionibus Algebræ beneficio diſſoluendis interdum, licet non ita frequenter, incidunt, nec tamen ſatis adhuc compertum apud omnes eſt, qua arte ab ipſis radices ſint educendæ, quarum ego æquationum & eas, quæ adhuc cognitæ exploratæque ſunt, & eas, quæ nondum ſuis è tenebris emerſerunt, cap. 12. enumerabo. Meum igitur hoc opus eſt, ea vna cura, vt quæ inuolute alij, ego explicatius exponam, apertius, quæ illi obſcurius; proferre quæ latent, ardua explanare, facem præferre, ſingula, quo ad mea induſtria feret, dilucide & enucleate tradere atque docere. Poſtremo non tam de Algebræ dignitate & exiſtimatione detrahere illæ æquationes debent, ex quibus radices inuenire nondum didicimus, quam eam quæſtiones infinitæ propemodum commendare, quæ æquationibus inuentis ſoluuntur, certamque, vt ſuis locis conſtabit, ſcientiæ rationem habent. Verum qui ſuos labores non omnino otioſos in Algebræ ſcientia poſuiſſe optat, eum in vulgaribus Arithmeticæ præceptis ſe ſe aliquando exercuiſſe oportebit, nec eorum omnino rudem ad huius cognitionem inſtitutionemque accedere, cuiuſmodi illa ſunt: quæ quaſi fundamenta ſunt tyronibus iacienda; Additio numerorum, ſubtractio, multiplicatio, atque diuiſio, non integrorum modo, ſed & fractorum. His adde proportionum regulam, quæ à pleriſque regula trium nuncupatur; atque his ſimilia non pauca: Proportiones prætera, progreſſioneſque numerorum tum Arithmeticas, tum Geometricas calluiſſe debet. Tertio noſſe debet radicum omnium extractiones ex quocunque numero, qui proponatur, ſiue integer is fuerit, ſiue fractus. Demum & Geometria, & diſciplinis alijs excultum, nec leuiter expolitum eſſe præſtabit.

Intētio auctoris.

STVDII prætera plurimum in Algorithmo addiſcendo collocandum erit, quem habet hæc facultas à cæteris peculiarem. Algorithmum vero dicimus tractationem, quæ additionem, ſubtractionem, & alias operationes numerorum complectitur. Eum inquam Algorithmum numerorum quorundam, quos vulgari Arithmetica explicari in vſu non eſt. Eorum porro numerorum triplex omnino genus numeratur. Primum quidem eorum, quos Coſſicos plerique; vel Denominatos dixerunt, ijque in aliqua Geometrica progreſſione quæ ab vnitate ducit initium, reperiuntur; cuiuſmodi ſunt Radices, Quadrati, Cubi, & quæ eiuſdem generis ſunt non pauca, de quibus mox dicere inſtituam. In altero genere inſunt numeri, qui radicales appellantur, vt radix quadrata, cubica, & huiuſmodi cuiuſcunque numeri, ſiue is eam habeat radicem, ſiue non habeat. atque de his diſſeremus, cū ad caput 16. peruenerimus. Tertij deniq; generis ſunt numeri radicales numerorū eius generis, quod primo loco poſitum eſt à nobis, quales ſunt radix quadrata, vel cubica, & ſimiles, quotcunq; quadratorum, cuborum, vel radicum, &c. de quibus poſtremus nobis erit labor. Et quoniam eorum numerorū Algorithmus, quos in ſecundo ac tertio genere collocauimus, difficultatem non minimam, & obſcuritatem habet non contemnendam, de induſtria eum in finem regulæ Algebræ reijci placuit. Nam etiamſi quæſtionum ſatis multæ cum Geometricarum, tum Arithmeticarum per hanc Algebræ regulam enodari ac ſolui nequeant ſine illo Algorithmo; nulla tamen inter Algebræ ſcientiam, & eum Algorithmum cognatio tanta eſt, vt hæc ab illo, tanquam nexu quodam adhæreſcant ſibi, aut nunquam diuelli queat, aut aliquo modo ab eodem pendere dicenda ſit. Primum igitur Algorithmus Coſſicorum, ſiue eorum, qui Denominati dicuntur, numerorum explicandus nobis eſt, qui ad hanc ſcientiam penitus cognoſcendam omnino cenſetur neceſſarius. Tum ipſam Algebræ regulam, eaque omnia perſequemur, quæ ad eiuſdem regulæ plenam cognitionem faciunt; quibus abſolutis, à cap. 16. initium facientes, totoque 26. numerorum radicalium, & abſolutorum & Denominatorum, ſiue Coſſicorum Algorithmum trademus. Extremas partes Ænigmata agent, quibus propoſitis, & tandem explicatis, planior ac perfectior totius regulæ Algebræ ſenſus fiet, & fructus vberior.

Algorithmus quid.

Tria genera numerorum in Algebra vſitatorū.

DE NVMERIS COSSICIS, SIVE DEnominatis.

CAPVT II.

NVMERI Coſſici, ſiue Denominati ſunt omnes numeri cuiuſcunque progreſſionis Geometricæ ab vnitate incipientis. Propoſita namque progreſſione qualibet Geometrica ab vnitate initium ſumente, Primus terminus, id eſt, vnitas numerum abſolutum, & ſimplicem repræſentat: Secundus vero terminus vnitatem ſequens vocatur radix omnium ſequentium, cum ex eius multiplicatione in ſeipſum procreetur tertius, & ex multiplicatione eiuſdem ſecundi termini in tertium producatur quartus, & ſic deinceps, vt in ſcholio propoſ. 10. lib. 8. Eucl. demonſtrauimus. Tertius deinde terminus, quia producitur, vt dictum eſt, ex ſecundo in ſeipſum, dicitur Quadratus, ſeu Cenſus, vel Zenſus, vt nonnulli huius artis periti volunt. Quartus poſtea terminus appellatur Cubus, quoniam fit ex multiplicatione radicis, hoc eſt, ſecundi termini in ſuum quadratum nimirum in tertium terminum, vt diximus. Atque ita deinceps omnes numeri progreſſionis Geometricæ, cuius initium eſt vnitas, denominantur, habita ratione multiplicationis radicis in ſequentes terminos.

Numeri Coſſici qui ſint.

QVIA vero varie huiuſcemodi numeri à varijs auctoribus denominantur, delegimus nos ex omnibus modum quendam denominandi illos numeros facilem, & valde accommodatum, vt denominationes has quantumlibet extendere poſſimus, & appoſitis characteribus deſignare; appellantes nimirum numeros progreſſionis Geometricæ, numeros Coſſicos. qua quidem in re nonnullos ſcriptores recentiores ſecuti ſumus. Parum enim refert, ſi hoc nomine, vel alio appellentur numeri progreſſionis Geometricæ, dummodo res ipſa intelligatur. Denominationes autem hæ exprimuntur ſequentibus characteribus.

Cur numeros proportionis Geometricæ dicamus Coſſicos.

N.	℞.	ȝ.	ce.	ȝȝ.	ß.	ȝce.	Bß.	ȝȝȝ.	cce.
ȝß.	Cß.	ȝȝce.		Dß.	ȝBß		ceȝ.	ȝȝȝȝ.	Eß. &c.

PRIMVS character N. appellationem habet numeri abſoluti & ſimplicis, ita vt numerus, cui appoſitus fuerit, pro abſoluto & ſimplici habeatur. vt 4 N. nihil aliud ſignificant, quam quatuor vnitates ſimplices ac abſolutas: Plerunque tamen character hic vel ſignum N, non ſolet numeris apponi, quando pro abſolutis habendi ſunt. Itaque ſiue numerus aliquis gerat hoc ſignum N, ſiue eo careat, accipiendus eſt pro numero abſoluto.

Explicatio characterū Coſſicorū.

Secundus character ℞. habet appellationem Radicis, vel Rei, ita vt numerus, cui appoſitus ſit, à radicibus denominetur. vt 4 ℞. ſignificant quatuor radices, vel res. Vnde ſi progreſſio Geometrica habeat 2. in ſecundo loco, erunt 4 ℞. octo vnitates: ſi vero 3. duodecim vnitates. & ſic de cæteris.

Tertius character ȝ. repræſentat quadratum, quem cenſum nonnulli dicunt. vt 4 ȝ. ſunt quatuor quadrati vel zenſi. Itaque ſi tertius numerus progreſſionis Geometricæ ſit 4. erunt 4 ȝ. decem & ſex vnitates: Si autem 9. triginta ſex vnitates. &c.

Quartus character ce. denotat cubum. vt 4 ce. ſignificant quatuor cubos; ita vt ſi cubus fuerit 8. 4 ce. ſint 32. vnitates: ſi 27. 4 ce. ſint 108. vnitates. &c.

Idem dicendum eſt de reliquis characteribus, quorū ſignificationes hic ſunt ſubſcriptæ, vna cum appellationibus,

tionibus, & signis, quibus alij scriptores vtuntur. Quemadmodum enim appellationes numerorum Cossicorum apud scriptores varios variæ sunt, vt diximus, ita etiam signa seu characteres, quibus ipsas exprimunt, ijdem non sunt.

N. Numerus simplex, & absolutus.

2ℓ. Radix. Italis Res, vel Cosa. Vnde hoc modo ab ipsis radix exprimitur. 1 co. 4 co 20. co &c. Alij vero ita designant. 1 ℞. 100 ℞. &c.

ʒ. Zensus, siue Quadratus. Alij quadratum exprimunt hoc charactere q. vt 1 q. 30 q. 8 q. &c. Itali sic notant. ce. vt 1. ce 4. ce 20. ce. &c.

ℂℓ. Cubus. Alij artifices ita depingunt. cu. vt 7 cu. 8 cu. 200. cu. &c.

ʒʒ. Zenzizensus, siue Quadratiquadratus. Nonnulli ita signant. qq. vt 3 qq. 10 qq. &c. Itali vero sic. ce. ce. vt 4 ce. ce. 9. ce. ce. 12 ce. ce. &c.

ß. Surdesolidus. Hunc alij dicunt Sursolidum, vel Supersolidum. Italis dicitur Relatum primum. Vnde ita solent exprimere. Rel. P. vt 11 Rel. P. 20 Rel. P. &c.

ʒℂℓ. Zensicubus, seu Quadratus cubi. vel Cubizensus. Quadraticubus. Cubus quadrati. Cubiquadratus. Alij hoc charactere vtuntur. qℂℓ. Posset quoque hic numerus inuersis notis signari. vt ℂℓʒ. ℂℓq. Itali hoc modo signant. ce. cu. vel cu. ce.

Bß. Bisurdesolidus. Secundum quosdam Bisursolidus, vel Sursolidus, aut Supersolidus secundus. Apud Italos vocatur Relatum secundum. vnde ita depingunt. Rel. 2.

ʒʒʒ. Zensizenzensus, seu Quadratus quadratiquadrati. Quem ita nonnulli denotant. qqq. Itali vero sic. ce. ce. ce.

Cℂℓ. Cubicubus, seu Cubus cubi. qui ita à quibusdam pingitur. ℂℓℂℓ. Ab Italis autem sic. cu. cu.

ʒß. Zensurdesolidus, seu quadratus Surdesolidi, vel Surdesolidus quadrati. Hunc ita nonnulli designat. qß. Itali vero, quoniam eum vocant censum Relati primi, hoc modo notant. ce. Rel. P.

Cß. Csurdesolidus. Secundum alios Tersurdesolidus, vel Supersolidus tertius. Italis dicitur Relatum tertium, & ita pingitur. Rel. 3.

Eodem modo proportione quadam reliqua signa, siue characteres Cossici explicari poterunt, qui quidem in infinitum progrediuntur, vt mox dicemus

Quando series naturalis numerorum numeros Cossicos progressionis Geometricæ exponat.

VT autem cognoscamus, quidnam sibi velint prædictæ denominationes, & qua ratione originem ducant à terminis cuiusque progressionis Geometricæ ab vnitate initium sumentis; considerandæ sunt diligenter sequentes duæ progressiones, vna cum supradictis characteribus Cossicis in medio earum positis.

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
N.	2ℓ.	ʒ.	ℂℓ.	ʒʒ.	ß.	ʒℂℓ.	Bß.	ʒʒʒ.	Cℂℓ.	ʒß.
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.	1024.

11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	&c.
Cß.	ʒʒℂℓ.	Dß.	ʒBß.	ℂℓß.	ʒʒʒʒ.	Eß.	&c.
2048.	4096.	8192.	16384.	32768.	65536.	131072.	&c.

PRIOR progressio est naturalis numerorum series incipientium ab 0. qui exponunt & signa Cossica subscripta, & terminos posterioris progressionis, quæ Geometrica est, ab vnitate initium ducens: appellanturque numeri ordinis superioris exponentes terminorum progressionis Geometricæ, & signorum Cossicorum. Hæc autem expositio in hoc consistit. Prima figura 0. habens sub se N, & 1. indicat numerum simplicem & absolutum ex vnitatibus compositum, & ob id nullo exponente insignitur. quamuis improprie hæc figura 0, dici possit Exponens numeri absoluti. Secundus terminus 1. supra 2. & 2ℓ ostendit numerum secundum progressionis Geometricæ esse primam denominationem in numeris Cossicis, appellarique Radicem. Tertius deinde terminus 2. manifestat, tertium numerum Geometricæ progressionis esse secundam denominationem vocarique Zensum, siue Quadratum. Sic quoque 6. demonstrat, sextam denominationem esse numerum Zensicubum, & sic de cæteris.

Quot proportiones inter vnitatẽ & quemlibet numerũ progressionis Geometricæ intercipiantur.

DEINDE ijdem numeri exponentes progressionis naturalis numerorum docent, quot proportiones progressionis Geometricæ interijciantur inter quemlibet numerum eiusdem Geometricæ progressionis, atque vnitatem. Vt 1. supra 2ℓ. & 2. significat, inter 2. siue radicem progressionis Geometricæ, atque vnitatem contineri vnicam proportionem 2. ad 1. At 2. supra ʒ. & 4. indicant, inter 4. siue ʒ. quadratum ve, atque vnitatem comprehendi duas proportiones 4. ad 2. & 2. ad 1. Item 3. supra ℂℓ, & 8. monet, inter 8. siue ℂℓ, & vnitatem cadere tres proportiones 8. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. & sic de cæteris, vt 6. supra ʒℂℓ. & 64. monstrat, inter 64. siue ʒℂℓ. atque vnitatem intercipi sex proportiones 64. ad 32. & 32. ad 16. & 16. ad 8. & 8. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1.

Cuius characteris exponens gignatur ex mutua multiplicatione diuisioneque duorũ exponentium.

PRÆTEREA quilibet duo exponentes numeri inter se multiplicati producunt exponentem characteris Cossici, qui ex characteribus assumptorum exponentium componitur. Vt ductis 2. in 3. fit 6. exponens characteris ʒℂℓ. qui ex ʒ & ℂℓ componitur. Item ex 3. in 5. fit exponens 15. characteris ℂℓß. ex ℂℓ, & ß. compositi, &c. Sic etiam diuiso quouis numero exponente maiore per minorem quemcunque, indicabit Quotiens, si integer numerus est, exponentem characteris Cossici, qui relinquitur, si ex charactere numeri exponentis diuisi, tollatur character numeri exponentis, per quem facta est diuisio. Vt si 6. exponens characteris ʒℂℓ. diuidatur per 2. exponentem characteris ʒ. fit quotiens 3. exponens characteris ℂℓ. qui relinquitur, si ex ʒℂℓ. exponentis 6. auferatur character ʒ. exponentis 2. Item si numerus 15. exponens characteris ℂℓß. diuidatur per 5. exponentem characteris ß. fit Quotiens 3. exponens characteris ℂℓ. qui relinquitur, si ex ℂℓß. tollatur ß. &c.

RVRSVS hæc figura 2. posita supra 4. & ʒ. docet, quadratum, seu secundam denominationem produci ex multiplicatione radicis bis positæ. Nam si radix 2. ponatur bis hoc modo 2. 2. & fiat multiplicatio 2. in 2. procreabitur Quadratus, seu Zensus 4. Eodem pacto figura hęc 3. posita supra 8. & ℂℓ. significat, cubum, siue tertiam denominationem produci ex radice ter posita, & multiplicata. Nam si radix 2. ter ponatur, vt hic, 2. 2. 2. fiatque multiplicatio 2. in 2. & producti numeri in 2. exurget cubus 8. Sic quoque figura 5 monstrat, numerum Surdesolidum procreari ex multiplicatione radicis quinquies positæ, vt hic 2. 2. 2. 2. 2. Eademque est ratio de omnibus alijs.

Definitio vniuscuiusque numeri Cossici.

EX his facile definientur omnes numeri Cossici. Si enim petatur, quid sit v. g. numerus Bsurdesolidus; dicemus eum esse numerum, qui ex aliquo numero septies posito, & multiplicato gignitur. Vt 128. nascitur ex multiplicatione huius radicis 2. septies positæ in hunc modum, 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. Similiter Zensizensus erit numerus, quem numerus aliquis quater positus sua multiplicatione producit, &c. Semper autem numerus, qui aliquoties positus multiplicatione sua numerum aliquem procreat, dicitur radix producti numeri. Vt quoniam 2. positus decies hoc modo, 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. & multiplicatus facit hunc numerum 1024. qui est ʒß. idcirco 2. dicitur radix Zensurdesolida huius numeri 1024. Idemque de aliis dicendum est.

VIDES igitur, quam apposite naturalis progressio numerorum ab 0. incipientium, & supra progressionem Geometricam ab vnitate cœptam posita, dicatur exponere terminos progressionis Geometricæ.

CÆTERVM non solum ex multiplicatione radicis aliquoties positę producuntur numeri progressionis Geometricę, vt expositum, verum etiam ex multiplicatione numerorum aliorum inter se, vt signa eorum Cossica demonstrant. Vt licet hic numerus Zensurdesolidus 1024. gignatur ex radice decies posita, hoc modo, 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. vt eius exponens 10. indicat: tamen quia eius signum Cossicum ʒß. constat ex his duobus signis Cossicis ʒ. & ß. quorum exponentes sunt 2. & 5. idcirco si eadem radix 2. bis ponatur, hoc modo, 2. 2. propter 2. exponentem signi ʒ. & multiplicetur, vt producatur 4. & hic productus quinquies positus, hoc modo, 4. 4. 4. 4. 4. ob 5. exponentem signi ß. multiplicetur, procreabitur idem numerus 1024. Eodem modo, si radix 2. quinquies ponatur, propter signum ß. atque ita multiplicetur, & productus numerus 32. ponatur bis, propter signum ʒ. idem numerus gignetur. Nam radix ita multiplicata 2. 2. 2. 2. 2. facit 32. hic autem numerus ita multiplicatus 32. 32. procreat 1024. atque ita de reliquis dicendum est, si eorum signa Cossica ex pluribus signis Cossicis componantur.

Additio & subtractio idẽ faciunt in serie naturali numerorum, quod Multiplicatio & Diuisio in progressione Geometricæ.

EST quoque in superioribus progressionibus dignum consideratione, quod additio numerorum progressionis Arithmeticę respondet multiplicationi numerorum progressionis Geometricæ; & subtractio diuisioni. Sicut enim exempli gratia, 2. & 5. faciunt 7. si simul addantur, ita quoque ʒ. & ß. quorum 2. & 5. sunt exponentes, nempe 4. & 32. inter se multiplicati producunt 128. id est, Bß. cuius exponens est 7. Item sicut 3. & 9. simul faciunt 12. ita ℂℓ. & Cℂℓ. nimirum 8. & 512. quorum exponentes sunt 3. & 9. inter se multiplicati gignunt 4096. hoc est, ʒʒℂℓ. cuius exponens est 12. atque eodem modo de reliquis dicendum est.

RVRSVS quemadmodum subtrahendo 5. à 7. remanent 2. ita diuidendo Bß, nempe 128. cuius exponens est 7. per ß, hoc est, per 32. cuius exponens est 5. prodit numerus 4. nempe ʒ. cuius exponens est 2. Similiter sicut subtrahendo 3. ex 12. relinquuntur 9. ita diuidendo ʒʒℂℓ. hoc est, 4096. cuius exponens est 12. per ℂℓ, id est, per 8. cuius exponens est 3. producitur cℂℓ. nempe 512. cuius exponens est 9. & sic de cæteris. Demonstrationem huius rei afferemus in Multiplicatione, & Diuisione numerorum Cossicorum.

QVOD autem dictum est hactenus de progressione Geometrica duplæ proportionis, quæ ab vnitate incipit, idem intelligendum est in quauis alia progressione Geometrica, cuius initium vnitas est: cuiusmodi sunt verbi gratia duæ sequentes progressiones Geometricæ, quarum prior continet proportiones quadruplas, posterior autem septuplas complectitur.

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	&c.
N.	2ℓ.	ʒ.	ℂℓ.	ʒʒ.	ß.	ʒℂℓ.	Bß.	ʒʒʒ.	&c.
1.	4.	16.	64.	256.	1024.	4096.	16384.	65536.	&c.

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	&c.
N.	2ℓ.	ʒ.	ℂℓ.	ʒʒ.	ß.	ʒℂℓ.	Bß.	&c.
1.	7.	49.	343.	2401.	16807.	117649.	823543.	&c.

Omnia namque quæ dicta sunt, ad has duas progressiones, & ad omnes alias transferri facile possunt.

Quomodo omnes numeri progressionis Geometricæ sint denominãdi.

SVPEREST, vt doceamus, quanam ratione omnes numeri propositæ cuiuscunque progressionis Geometricæ ab vnitate incipientis denominandi sint, aut (quod idem est) quænam signa Cossica dictis numeris tribuenda sint, & ascribenda. Quod quidem facile præstabimus, si prius denominemus numeros, quorum exponentes sunt numeri primi, cuiusmodi sunt sequentes.

2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. 37. 41. 43. 47. 53. 59. 61. &c.

Horum autem characteres, siue signa, quæ ipsi exponunt, hęc sunt.

ʒ. ℂℓ. ß. Bß. Cß. Dß. Eß. Fß. Gß. Hß. Iß. Kß. Lß. Mß. Nß. Oß. Pß. Qß. &c.

Cum enim tertius numerus ab vnitate in progressione quauis Geometrica sit quadratus, vt demonstratur propos. 8. lib. 9. Euclid. erit eius signum ʒ. cuius exponens 2. Rursus quia quartus numerus ab vnitate est Cubus, vt constat ex eadem propos. erit eius nota ℂℓ, & exponens 3. Deinde quia sextus ab vnitate numerus, quem exponit numerus primus 5. neque quadratus est, neque cubus, nisi quando secundus numerus ab vnitate quadratus est, vel cubus, vt ex propos. 10. lib. 9. Euclid. liquido constat, tribuerunt ei scriptores hoc signum ß. ita vt

Surdesolidus appellatus sit. Quoniam vero idem in reliquis numeris, quorum exponentes sunt numeri primi, contingit, ita vt neque quadrati sint, neque cubi, primo ab vnitate non existente quadrato, vel cubo, vt ex eadem propos. perspicuum est, apellati sunt quoque illi numeri progressionis Geometricæ, qui exponentes habent numeros primos, Surdesolidi, ita vt is, quem exponit 7. dicatur secundus Surdesolidus, qui vero exponitur ab 11. Tertius Surdesolidus, & sic de cæteris. Sed quia, si secundus Surdesolidus ita signetur, 2ſ. & tertius sic, 3ſ. &c. facile notæ Arithmeticæ huic signo ſ. appositæ alios numeros confundere & perturbare possunt; visum est artificibus loco notarum Arithmeticarum ascisscere literas Alphabeti, denominareque secundum ſ. Bſ. à secunda litera, & tertium Cſ. à tertia litera, &c. Hoc igitur modo formantur signa & characteres numerorum Cossiçorum, quorum exponentes sunt numeri primi, vt hæc formula indicat.

2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. 37. &c.
9. ℂ. ſ. Bſ. Cſ. Dſ. Eſ. Fſ. Gſ. Hſ. Iſ. Kſ. &c.

EX his inueniemus characteres cæterorum numerorum Cossicorum, quorum exponentes non sunt numeri primi, sed compositi, hoc modo. Resoluatur numerus exponens compositus, cuius denominatio, & character desideratur, in suas partes aliquotas incompositas, quæ inter se ordine multiplicatæ ipsum constituant, atque producant. quod in hunc modum fiet.

Numerum compositū in suas partes incompositas resoluere, quæ ipsum producant.

NVMERVS compositus datus diuidatur per minimum numerum primum, per quem diuidi potest: Similiter quotiens, si fuerit numerus compositus: Rursus hic quotiens, si fuerit compositus, per numerum primum minimum, qui eum numeret, diuidatur: atque ita deinceps continue fiat diuisio, donec occurrat quotiens, qui sit numerus primus, nullam videlicet habens partem aliquotam. Nam si omnes diuisores eiusmodi, etiamsi aliqui sæpius repetantur, vna cum vltimo quotiente ordine ponantur, & inter se multiplicentur, producetur præcise datus numerus compositus: atque ipsi diuisores, vna cum vltimo quotiente sunt partes incompositæ datum numerum compositum per multiplicationem constituentes. Vt si numerus compositus datus sit 924. Primo diuido eum, quoniam par est, per 2. tanquam per eius partem incompositam minimam, inuenioque quotientem 462. Reseruo autem 2. Rursus quotientem 462. quia par est, diuido per 2. efficioque quotientem 231. & reseruo iterum 2. Deinde quotientem 231. quia impar est, diuido per 3. tanquam per minimum numerum primum, reperioque quotientem 77. (quod si aliquid in diuisione relictum fuisset, expertus fuissem diuisionem per 5. 7. & alios numeros primos, donec nihil fuisset residuum. Et si nullum talem diuisorem, qui nihil relinquat, inuenirem, tunc primi duo diuisores 2. 2. & vltimus quotiens essent partes incompositæ datum numerum restituentes, & nulla alia dari posset, præter vnitatem) Reseruo igitur 3. Et rursus diuido 77. per 3. sed quoniam aliquid supereſt in diuisione, non reseruo 3. sed eundem quotientem 77. partior per 5. sed quia aliquid supereſt in diuisione, diuido eundem per 7. inuenioq; quotientem 11. numerum primum. Sunt ergo partes incompositæ 2. 2. 3. 7. 11. numerum datum 924. sua multiplicatione restituentes.

DEINDE omnibus partibus aliquotis incompositis inuentis characteres debiti subscribantur. Hac enim ratione profiliet character integer compositus integri numeri exponentis. Exemplum. Inueniendum sit signum Cossicum numeri trigesimi primi Cossici, cuius exponens est numerus hic compositus 30. Quotus enim numerus Cossicus est ab vnitate, tot vnitates, minus vna, continet eius exponens, vt ex antedictis progressionibus apparere potest. Quoniam igitur partes ipsius aliquotæ incompositæ sua multiplicatione ipsum procreantes sunt 2. 3. 5. quarū signa sunt 9. ℂ. ſ. idcirco numerus dictus trigesimus primus hoc signo Cossico decorabitur 9ℂſ. appellaturque Zensicubisurdesolidus. Eodē modo exponens 24. cuius partes incompositæ sunt 2. 2. 2. 3. habebit signum Cossicum 99ℂℂ. Ita quoque exponens 100. cuius partes incompositæ sunt 2. 2. 5. 5. hoc signum Cossicum sortietur 99ſſ. & sic de cæteris.

IDEM consequemur hac ratione. Accipiantur duo quicunque numeri, qui inter se multiplicati producunt exponentem numerum oblatum. Nam eorum signa Cossica component signum Cossicum propositi numeri exponentis. vt si exponens sit 12. numeri sua multiplicatione ipsum producentes sunt 3. & 4. quorum signa Cossica sunt ℂ. & 99. Signum igitur Cossicum exponentis 12. est 99ℂℂ. Semper enim signa Cossica minora præponuntur maioribus. Eodem pacto numeri sua mutua multiplicatione producentes eundem numerum exponentem 12. sunt 2. & 6. quorum prior signum Cossicum habet 9. posterior vero 9ℂℂ. Signum ergo Cossicum numeri exponentis 12. est 99ℂℂ. vt prius. Quod si aliquando ignoretur alterius numerorum multiplicantium, vel etiam vtriusque signum Cossicum, sumendi erunt alij duo numeri ipsum producentes, vt in posteriori exemplo, si nos lateat signum Cossicum huius multiplicantis 6. accipiemus 2. & 3. qui ipsum procreant, quorum signa sunt 9. ℂ. Inuenitur ergo idem signum Cossicum numeri exponentis 12. 99ℂℂ. &c.

Quem locū progressionis Geometricæ occupet quilibet numerus Cossicus.

IAM vero si è contrario signi cuiuslibet Cossici propositi numerus exponens quæratur; si quidem fuerit incompositum, accipiemus ex superiori progressione numerorum primorum numerum primum proposito signo debitum. vt si offeratur Cossicum hoc signum Dſ. erit eius exponens 13. Si vero signum sit compositum, sumemus exponentes signis componentibus debitos, eosque inter se multiplicabimus. nam productus numerus erit exponens propositi signi Cossici, vt si detur signum Cossicum 99ℂℂ. compositum ex his tribus 9. 9. ℂ. capiemus horum exponentes 2. 2. 3. ex superiori progressione primorum numerorum, eosque inter se multiplicabimus. nam productus numerus 12. est exponens dicti signi 99ℂℂ. atque ita de cæteris dicendum est.

Quomodo alij numeros progressionis Geometricæ denominent.

NON est autem prætereundum, quosdam auctores hac in arte non mediocriter versatos aliter hos numeros Cossicos denominare, habita nimirum ratione multiplicationis, qua ex radice producuntur. Quoniam enim tertius numerus ab vnitate progressionis Geometricæ, quem nos Quadratum, vel Zensum diximus, producitur ex multiplicatione radicis bis positæ hoc modo, 2. 2. vel 3. 3. vel 4. 4. vel 5. 5. &c. ita vt vna tantum fiat multiplicatio; propterea numerum hoc modo genitum, id est, quadratum, appellant Primam quantitatem: quia prima est omnium, quæ ex radice nascuntur. Cubum deinde, quia gignitur ex radice ter posita, ita vt fiant duæ multiplicationes, dicunt Secundam quantitatem. Zensizensum vero eadem de causa vocant Tertiam quantitatem. & sic de cæteris intelligendum est. Sed placet nobis proprijs signis, & characteribus vti, vt clarius res ipsa percipiatur. Nostra etenim signa, & characteres à literis, ac numeris facile discernuntur, ita vt confusio nulla possit exoriri: quæ in aliorum signis, characteribusque vitari vix potest.

DE NVMERATIONE COSsicorum numerorum.

CAPVT III.

FACILIS est ex dictis Numeratio numerorum Cossicorum. Quando enim soli ponuntur, vt 52, vel 8. vel 20ℂ. &c. exprimuntur hoc modo, quinque radices, vel 8. Zensi, siue quadrati, vel 20. cubi, &c. Quando autem coniuncti inter se proponuntur, medio hoc signo +, vel hoc —. vt 52 + 8. vel 8 — 52 vel 20ℂ + 8 — 5. habenda est maxima ratio horum signorum +. —. quorum illud dicitur signum additorum, significatque plus, vel additionem; hoc vero appellatur signum subtractorum, denotatque minus, vel diminutionem, aut subtractionem. Hinc factum est, vt numeri illi, quibus interponitur signum +, dicti sint compositi. Quibus vero interiicitur signum —. nominati sint Diminuti. Quibus denique vtrumq; signum interponitur, appellati sint mixti. licet omnes dici possint compositi. Itaq; compositus hic. 52 + 8. effertur hoc modo. 5. radices, plus 8. zensi, Hic vero Diminutus 8 — 52. hoc modo. 8. zensi, minus 5 radices. Mixtus vero iste, 20ℂ + 8 — 5. hoc pacto. 20. cubi, plus 8. zensi, minus 5. vnitates. Nam, vt dictū est, numerus, qui post se non habet characterem aliquem Cossicum, significat numerum absolutum ex vnitatibus compositum.

Exylicatio signorum + & —.

Numeri Cossici cō positi, Diminuti, & mixti qui.

REFERVNTVR autem, vt patet, hæc signa +. —. ad numeros, qui ea sequuntur, nunquam autem ad præcedentes. Item numerus, quem neutrum horum signorum præcedit, intelligitur habere signum additorum +. Sensus porro numerorum compositorum, diminutorum, vel mixtorum facilis est. Nam cum dicimus 52 + 8. intelligimus 5. radices vna cum 8. zensis: hoc est, vnitates 42. si radix est 2. & quadratus, vel zensus 4. Sic cum dicimus 8 — 5 2. intelligimus ex 8. zensis detractas esse 5. radices. vnde si radix est 2. atq; adeo zensus 4. continebit numerus propositus vnitates 2. Idem dicendum est de alijs.

QVONIAM vero in antecedenti capite characteres numerorum Cossicorum, cuiusmodi sunt 2. 9. ℂ. &c. appellauimus interdum etiam signa Cossica; vt vitemus omnem confusionem, appellabimus in sequentibus has notas 2. 9. ℂ. &c. characteres, has vero +. —. signa.

PLERIQVE auctores pro signo + ponunt literam P, vt significet plus: pro signo vero — ponunt literam M, vt significet minus. Sed placet nobis vti nostris signis, vt à literis distinguantur, ne confusio oriatur.

Radices surda, quo pacto signentur.

PRÆTEREA inter recentiores non pauci radices surdas, vt vocant, vel irrationales, quæ videlicet numeris exprimi nequeunt, notant hoc signo √. quod statim insequitur character Cossicus 9, vel ℂ, vel 99. &c. prout radix illa est quadrata, Zensicaue, vel Cubica, vel Zensizensica, siue quadrati quadrata, &c. V. g. radicem quadratam numeri 12. designant hoc modo. √9 12. cubicam hoc modo √ℂ 12. & Zensizensicam hac ratione, √99 12. atq; hanc ob causam signū hoc √ radicale appellatur. Quo signo nos etiā in sequētibus vtemur: quippe cum minor confusio ex eo oriatur, quam si, quod plerique faciunt, radicem quadratam ita signemus, Rq. Cubicam hoc modo. R cu. Zensizensicam hoc alio, Rqq. &c. Facile enim ex hac designatione, literæ Rq. R cu. Rqq. cum aliis literis confunduntur. Diligenter ergo hæc signa √9. √ℂ. √99. √ſ. &c. addiscenda sunt, vt ea, quæ sequuntur, intelligantur, quando nimirum huiusmodi signa occurrent. Sciendum tamen, quotiescunque nominatur radix alicuius numeri, sine voce, quadrata, cubica, surdesolida, vel zensizensica, &c. vel illi numero præfigitur signum hoc √. sine characterе 9, ℂ. ſ, 99, &c. intelligi radicem quadratam simpliciter apud scriptores. quod à nobis etiam non raro obseruabitur.

Signum radicale quid.

DE ADDITIONE ET SVBTRActione numerorum Cossicorum.

CAPVT IV.

Additio Cossicorum numerorū diuersarū denomtnationum.

QVANDO numerus Cossicus additur numero Cossico alterius denominationis, vel characteris, absoluitur additio mediante hoc signo +, fitque numerus compositus. Vt hi duo numeri 6 2. & 8. simul additi faciunt 6 2 + 8. Item 6 2. & 8 ℂ. faciunt 6 2 + 8ℂ. &c.

Additio numerorū Cossicorum diuersarū eiusdem appellationis. Subtractio numerorū Cossicorum diuersarū appellationum.

QVANDO vero addendus est numerus Cossicus alteri numero Cossico eiusdem appellationis, vel characteris, adduntur simul numeri, & summæ apponitur idem character Cossicus. Vt hi numeri 4 9. & 9 9. simul additi faciunt 13 9. Item 52, & 4 2, faciunt 92 &c.

PARI ratione, quando numerus Cossicus subtrahitur à numero Cossico alterius denominationis, absoluitur subtractio mediante hoc signo —, fitque numerus diminutus. Vt hic numerus 62 detractus ex 8 9. relinquit 8 9 — 62. Item 12. ex 6 2. relinquunt 6 2 — 12. & sic de cæteris.

QVAN-

Subtractio numerorũ Cossicorum eiusdẽ denominationis.

QVANDO vero numerus Cossicus subtrahendus est ex altero numero Cossico eiusdem characteris, subtrahitur numerus à numero, & reliquo numero idem character affigitur. Vt 42ℰ. ex 92ℰ. relinquunt 52ℰ. Et 9 ℭℰ. ex 20 ℭℰ. relinquunt 11 ℭℰ. &c.

Additio & subtractio Cossicorum numerorũ compositorum, &c.

SED quando Cossici numeri compositi, diminuti & mixti inter se adduntur, vel alter ab altero subtrahitur, ponendus erit alter sub altero, ita vt numeri eiusdem appellationis inter se respondeant, quemadmodum in fractionibus Astronomicis fieri consueuit. Quod si in alterutro eorum non reperiatur numerus respondens alicui in altero numero, ponenda erit loco eius figura hæc nihili 0. cum signo +. Quibus constitutis addendi erunt numeri eiusdem appellationis, vel alter ab altero detrahendus, & summæ vel numeri reliqui propriis in locis subscribendi, vna cum iisdem signis, +, vel —, quæ in numeris addendis, vel subtrahendis reperiuntur.

Exempla Additionis.

2ℰ.	N.
6	+ 8
7	+ 10.
13	+ 18

☉.	2ℰ.	N.
7	+ 8	— 5.
3	+ 9	— 8.
10	+ 17	— 13

ℭℰ.	N.	☉.
7	+ 8	— 3
4	+ 11	— 5
11	+ 19	— 8

ℭℰ.	☉.	2ℰ.	N.
4	+ 11	+ 0	— 6
3	+ 0	+ 8	— 4
7	+ 11	+ 8	—10

ʃ.	☉☉.	2ℰ.	N.	☉.
7	+ 0	+ 8	— 5	+ 4
4	+ 9	+ 6	— 9	+ 0
11	+ 9	+ 14	—14	+ 4

☉.	N.
4	— 8
10	— 10
14	— 18

In penultimo exemplo additus est huic numero, $7ʃ+8\,2ℰ-5+4☉$. hic numerus, $4ʃ+9☉☉+6\,2ℰ-$ factaque est hæc summa $11ʃ+9☉☉+14\,2ℰ-14+4☉$.

Exempla Subtractionis.

ℭℰ.	☉.	2ℰ.	N.
7	+ 11	+ 8	—10
3	+ 0	+ 8	— 4
4	+ 11	+ 0	— 6

ℭℰ.	N.	☉.
11	+ 19	— 8
4	+ 11	— 5
7	+ 8	— 3

ℰ.	☉☉.	2ℰ.	N.	☉.
	+ 9	+ 14	—14	+ 4
7	+ 0	+ 8	— 5	+ 4
4	+ 9	+ 6	— 9	+ 0

☉.	2ℰ.	N.
10	+ 17	— 13
7	+ 8	— 5
3	+ 9	— 8

In penultimo exemplo reliquus numerus est, $4ʃ+9☉☉+6\,2ℰ-9$. Reiicitur enim +0. quia neque in reliquo numero subtractionis, neque in summa additionis poni debet figura hæc 0. cum sit superuacanea. Eodem modo reliquus numerus in primo exemplo erit, $4\,ℭℰ+11☉-6$.

POTEST etiam fieri additio, & subtractio, si characteres Cossici scribantur post numeros, non autem supra ipsos numeros. vt secundum exemplum Additionis, ita stabit.

7	☉	+ 8	2ℰ	— 5	N	
3	☉	+ 9	2ℰ	— 8	N	
10	☉	+ 17	2ℰ	— 13	N	

Secunda item exemplum Subtractionis ita stabit.

11	ℭℰ	+ 19	N	— 8	☉	
4	ℭℰ	+ 11	N	— 5	☉	
7	ℭℰ	+ 8	N	— 3	☉	

Quid agendum, quãdo vnus numerus habet signũ +, & alter signum —, in additione, & subtractione.

Quod etiam de multiplicatione, diuisione neque intelligendum est. Atque hic modus vt plurimum à nobis obseruabitur in hoc opere.

QVOD si in additione, vel subtractione alter numerorum habuerit signum +, alter vero —, commutatur species, seu operatio; hoc est, in Additione subtrahitur minor ex maiore, & reliquo numero tribuitur signum maioris numeri, à quo facta est subtractio, siue illud fuerit +, siue —.

In Subtractione vero adduntur simul numeri, & summæ apponitur signum superioris numeri, à quo fieri debebat detractio; quodcunque illud fuerit siue +, siue —.

Exem-

Exempla Additionis.

☉ℰ.	ʃ.	☉☉.	ℭℰ.	2ℰ.	N.
7	+ 0	+ 8	+ 0	— 4	+ 8
7	+ 5	— 11	— 11	+ 0	+ 0
14	+ 5	— 3	— 11	— 4	+ 8

☉.	2ℰ.
6	+ 8
2	— 10
8	+ 2

Si hi duo numeri $6☉-8\,2ℰ$. & $12\,2ℰ-3☉$ debeãt addi, formabimus exemplum hoc modo, vt singula singulis respondeant.

	☉.	2ℰ.
	+ 6	— 8
	— 3	+ 12
	3	+ 4

Vel sic

+ 6☉	— 82ℰ
— 3☉	+ 12ℰ
3☉	+ 42ℰ

Rationem vero huius operationis pulchre docent numeri absoluti. vt hic vides.

8 + 5	8 — 5	8 + 4	8 — 4
10 — 4	10 + 4	10 — 5	10 + 5
18 + 1	18 — 1	18 — 1	18 + 1

Quoniam enim in primo exemplo ad 8+5, hoc est, ad 13. non adduntur integre 10. vt fiant 23. sed subducti prius 4. Ideo fit summa 19. nempe 18+1. Itaque postquam addita sunt 8. & 10. factaque sunt 18. detrahenda sunt 4. ex 5, vt remaneat 1, cum hoc signo +.

Eodem modo in secundo exemplo, non adduntur integre 8, sed minus 5. ad 10+4, hoc est, ad 14. propterea postquam ex 8. & 10. facta sunt 18. detrahenda sunt 5. ex 4. Et quia deest vnitas, vt possit subtrahi, idcirco ponitur 1. cum signo —. Eadem ratio est in cæteris. Vbi vides in primo exemplo ex 8+5. & 10 — 4. id est, ex 13. & 6. effici 18+1. id est, 19. In secundo vero ex 8 — 5. & 10+4. hoc est, ex 3. & 14. fieri 18 — 1. hoc est, 17. In tertio quoque ex 8+4. & 10 — 5. hoc est ex 12. & 5. conflari 18 — 1. hoc est, 17. In quarto denique ex 8 — 4. & 10+5. id est, ex 4. & 15. confici 18+1. id est, 19.

Exempla Subtractionis.

☉ℭℰ.	ʃ.	☉☉.	ℭℰ.	2ℰ.	N.
14	+ 5	— 3	— 11	— 4	+ 8
7	+ 0	+ 8	+ 0	— 4	+ 8
7	+ 5	— 11	— 11	± 0	+ 0

☉	2ℰ.
8	— 2
6	+ 8
2	— 10

In priori exemplo, quãdo detrahuntur — 42ℰ. ex — 42ℰ. potest signari reliqua figura 0, vel signo +, vel signo —. Nihil enim interest vtrum illorum ponatur, quando reliquus numerus est 0. Immo totus reliquus numerus ita scribendus erit. $7☉ℭℰ+5ʃ-11☉☉-11\,ℭℰ$.

Ratio quoque huiusce operationis perspicua est in numeris absolutis, vt ex sequentibus exemplis apparet.

18 + 5	18 + 4	18 — 5	18 — 4
8 — 4	8 — 5	8 + 4	8 + 5
10 + 9	10 + 9	10 — 9	10 — 9

Quoniam enim in primo exemplo non integre subducuntur 8. ex 18+5. hoc est ex 23. sed minus 4. propterea subductis 8. ex 18. vt relinquantur 10. addenda sunt rursum 4. ad 5. Eademque est ratio in secundo exemplo. In tertio vero exemplo, cum 8. deducantur ex 18, ex quibus iam ablata sunt 5. restituenda sunt 5. ipsis 4. & summa per signum — notanda. Quod etiam fit in quarto exemplo. Vbi vides in primo exemplo, si ex 18+5. hoc est, ex 23. detrahantur 8 — 4. hoc est, 4. relinqui 10+9. id est, 19. In secundo quoque, si ex 18+4. hoc est, ex 22. detrahantur 8 — 5. id est, 3. relinqui 10+9. hoc est, 19. In tertio vero, si ex 18 — 5. id est, ex 13. detrahantur 8+4. id est, 12. remanere 10 — 9. id est, 1. In quarto denique, si ex 18 — 4. hoc est, ex 14. demantur 8+5. id est, 13. remanere quoque 10 — 9. hoc est, 1.

Quid agendũ in subtractione, quando vterque numerus habet signum + vel — & numeri præpostere ponuntur.

QVOD si quando contingat, vt idem signum + vel — reperiatur tam in numero subtrahendo, quam in eo, à quo fit subtractio, sed subtrahendus maior sit; subtrahendus erit præpostero ordine superior ab inferiori, sed numero reliquo dandum signum contrarium, ita vt ex signo +, fiat —, & ex — fiat +. Vt duo exempla, quæ sequuntur, indicant.

☉.	2ℰ.	N.
9	+ 4	— 5
4	+ 7	— 8
5	— 3	+ 3

ℭℰ.	☉.	N.
6	— 5	+ 3
7	— 9	+ 10
— 1	+ 4	— 7

In po-

In posteriori exemplo, quoniam 6☉. & 7☉. intelliguntur habere signum +, idcirco reliquus numerus adeptus est signum —. Vnde ita scribendus erit, 4✳ — 1☉ — 7. Non enim recte primus numerus afficitur signo ——. Huius etiam operationis veritas perspicua est in duobus hisce exemplis numerorum absolutorum. Vbi vides, si in priori exemplo

9 + 4 — 5	6 — 5 + 3
4 + 7 — 8	7 — 9 + 10
5 — 3 + 3	— 1 + 4 — 7

ex 9 + 4 — 5. id est, ex 8. subtrahantur 4 + 7 — 8, id est, 3. relinqui 5 — 3 + 3. nimirum 5. In posteriori vero, si ex 6 — 5 + 3. subducantur 7 — 9 + 10. hoc est, 8. ex 4. remanere — 1 + 4 — 7. hoc est, —— 4. quia nimirum superiori numero desunt 4. vnitates, vt inferior subtrahi possit.

CÆTERVM omnia præcepta hactenus tradita de additione, & subtractione, quod ad signa + & — spectat, comprehenduntur facile his duabus regulis ad memoriam iuuandam.

I

Duæ regulæ obseruandæ in additione, & subtractione.

Eadem signa idem signum ponunt, nisi in subtractione, quando numeri præponere ponuntur. Tunc enim subtrahitur superior ab inferiore, & ex + fit —, & ex — fit +.

II.

Diuersa signa mutant speciem operationis; Et in additione ponitur signum maioris numeri; In subtractione vero superioris, à quo fit subtractio, siue maior is sit, siue minor, aut æqualis. Quæ quidem regulæ, intellectis præceptis traditis, difficiles non sunt.

Probatio additionis & subtractionis.

SVPEREST, vt doceamus, quo modo instituenda sit probatio, siue examen Additionis, & Subtractionis. Duobus igitur modis comprobari potest, an recte nec ne in Additione, vel Subtractione operatum sit. Primum enim probari potest Additio per subtractionem, & subtractio per Additionem; quemadmodum in absolutis numeris solet fieri.

Secundo construatur tabula cum aliquibus progressionibus Geometricis ab vnitate incipientibus. vt hic cernis.

N	2☉	✳	☉	✳✳	ß	✳☉	Bß	✳✳✳
1	2	4	8	16	32	64	128	256
1	3	9	27	81	243	729	2187	6561
1	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$

Deinde resoluantur numeri Cossici addendi, iuxta aliquam harum progressionum, in numeros absolutos, ijque simul addantur, vel vnus ab altero detrahatur, ratione signi +, vel —. Post hæc eodem modo resoluantur numeri Cossici summæ collectæ. Si enim recte facta est additio, erunt numeri summæ collectæ resoluti simul æquales numeris addendis resolutis simul. Vt in hoc exemplo. 6☉. (si probatio instituatur per progressionem, cuius radix est 2.) faciunt 48. & 4✳. faciunt 16. iungantur simul 48. & 16. propter signum +. fiunt 64. Item 4☉. faciunt 32. addantur ad 64. propter signum + (semper enim numerus nullo signo notatus, intelligitur insignitus hoc signo +; vt dictum est.) fiunt 96. Denique 8✳ faciunt 32. quæ ablata ex 96. ob signum ——, relinquunt 64. Videiam, an 10☉ — 4✳. resoluti faciant quoque 64. Perspicuum autem est, 10☉. facere 80. à quibus si deducantur 4✳ hoc est, 16. propter signum ——, relinqui 64. &c.

☉.	✳.
6 + 4	
4 — 8	
10 — 4	

NON secus Subtractio comprobabitur, si eius numeri Cossici in absolutos numeros commutentur. Nam numeri subtracti, & reliqui simul æquales debent esse numeris, à quibus facta est subtractio, &c. Vt in hoc proposito exemplo, si probationem instituamus iuxta progressionem, cuius radix est 3. 10 ☉. faciunt 270, à quibus, si deducantur 4✳, id est, 36. propter signum ——, remanent 234.

☉.	✳.
10 — 4	
6 + 4	
4 — 8	

Satis autem constat 6☉ + 4✳. & 4☉ — 8✳. resolutos ac simul additos facere quoque 234.

Eodem modo si 6☉ + 4✳. resoluti detrahantur ex 10 ☉ — 4✳. resolutis, relinquentur 4☉ — 8✳. Vel certe si 4☉ — 8✳. resoluti deducantur ex 10☉ — 4✳. remanebunt 6☉ + 4✳. resoluti.

Idem exemplum examinabitur per progressionem, cuius radix est $\frac{1}{2}$. licet aliquanto laboriosius, hoc modo. 10 ☉. faciunt $\frac{10}{8}$. à quibus si tollantur 4✳. nimirum $\frac{4}{8}$. hoc est, $\frac{8}{8}$, remanent $\frac{2}{8}$. Necesse igitur est, vt 6☉ + 4✳. resoluti, & detracti ex $\frac{2}{8}$. relinquant 4☉ — 8✳. resolutos. Et quia 6☉. faciunt $\frac{6}{8}$. & 4✳. effieiunt $\frac{4}{8}$. id est, $\frac{8}{8}$. quæ cum $\frac{6}{8}$ faciunt $\frac{14}{8}$. quæ ex $\frac{2}{8}$. subtrahendæ sunt. At quoniam numeri præponere ponuntur, subtrahendæ sunt $\frac{2}{8}$. ex $\frac{14}{8}$. vt remaneant — $\frac{12}{8}$. iuxta primam regulam. Atque tantundem debent conficere 4☉ — 8✳. Sunt autem 4☉. $\frac{4}{8}$. à quibus vt auferatur 8✳. id est, $\frac{8}{8}$. vel $\frac{16}{8}$. auferendæ sunt $\frac{4}{8}$. ex $\frac{16}{8}$. propterea quod numeri sunt positi præponere, vt remaneant — $\frac{12}{8}$. iuxta legem primæ regulæ. quod est propositum.

DE MVL-

DE MVLTIPLICATIONE & Diuisione numerorum Cossicorum.

CAPVT V.

Multipl. & Diuisio numeri Cossici per absolutum.

CVM numerus Cossicus per numerum absolutum multiplicatur, aut diuiditur, producitur numerus (facta multiplicatione, aut diuisione, vt in numeris absolutis) eiusdem denominationis Cossicæ. Vt multiplicatis 4☉. vel 8✳. per 3. proueniunt 12☉. vel 24✳. &c. Item diuisis 12☉ vel 24✳. per 3. producuntur 4☉. vel 8✳. &c.

Multipl. & Diuisio numeri Cossici per Cossicum numerum.

QVANDO vero numerus Cossicus per numerum Cossicum multiplicatur, vel diuiditur, producitur numerus (facta multiplicatione, aut diuisione, vt in numeris absolutis) alterius denominationis Cossicæ, vt autem sciatur, quænam denominatio procreetur, pulchre id commõstrat progressio quælibet Geometrica ab vnitate incipiens, vna cum numeris exponentibus, de quibus in cap. 2. dictum est, & hic apparet.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	&c.
N.	2☉	✳	☉	✳✳	ß	✳☉	Bß	✳✳✳	C☉☉	&c.
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	&c.

Nam in multiplicatione fit exponens numerus denominationis Cossicæ conflatæ ex additione exponentium numerorum, qui videlicet denominationes illas, quæ multiplicantur, exponunt. In diuisione autem reperitur exponens numerus Cossicæ denominationis productæ, qui relinquitur, si exponens numerus denominationis diuidentis subtrahatur ab exponente numero denominationis diuidendæ. Vt ex multiplicatione. 4☉. in 4☉ vel 4☉ in 7☉ fiunt 16✳. vel 28✳. Nam vnitas, quæ est exponens huius characteris Cossici 2☉ addita ad vnitatem, facit 2. exponentem huius characteris ✳. Sic etiam ex multiplicatione 4☉. in 5✳. fiunt 20☉. Et ex 4✳. in 6ß. fiunt 24 Bß. &c. Item ex diuisione 24 Bß. per 4✳. fiunt 6ß. Et ex diuisione 36 ✳☉ per 4✳✳. producuntur 9✳. Et ex diuisione 12✳✳. per 4☉, fiunt 3☉. Et ex 8✳. per 8✳. fit 1 N. quia subductis 2. à 2. relinquitur 0, exponens numeri absoluti. Ita quoque diuisis 12 ✳☉. per 4ß. proueniunt 3☉. &c.

Demõstratio Multiplicationis & Diuisionis numerorũ Cossicorum.

EX his facile intelligitur, quõnam modo numerus Cossicus in seipsum multiplicetur quadrate, cubice, &c. Nam 5. ☉, in se quadrate faciunt 25. ✳☉. cum 3. & 3. faciant 6. At 5 ☉, in se cubice faciunt 125. C☉☉. Nam primum 5 ☉, in se faciunt 25. ✳☉. Deinde 25 ✳☉. in 5☉. faciunt 125 C☉☉. &c.

DEMONSTRATIO huius rei facilis est. Repetatur enim progressio characterum Cossicorum numeros progressionis Geometricæ denominantium, vna cum naturali progressione numerorum exponentium, vt hic.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	&c.
N.	2☉.	✳.	☉.	✳✳.	ß.	✳☉.	Bß.	✳✳✳.	C☉☉.	✳ß.	Cß.	&c.

Quoniam igitur, vt in scholio propos. 11. lib. 9. Euclid. docuimus, quilibet numerus progressionis Geometricæ ab vnitate incipientis seipsum multiplicans producit numerum eiusdem progressionis, qui tantum ab eo distat exclusiue, quantum ipse abest exclusiue ab vnitate; fit vt ☉, seipsum multiplicans producat ✳☉. qui tertium locum occupat post ☉, exclusiue, quemadmodum & ☉, tertium habet locum post N. hoc est, post vnitatem exclusiue. Quare cum exponens huius characteris ☉, nempe 3. ad se additus faciat 6. exponentem, qui tertium locum possidet post 3. exclusiue, propterea quod tres vnitates continentur in 3. per quot nimirum interualla denominatio ☉. distat à N. seu vnitate exclusiue (Nam exponens cuiusque denominationis Cossicæ tot continet vnitates, quotum locum ipsa denominatio obtinet ab vnitate, siue à N. exclusiue.) perspicuum est, numerum 6. qui fit ex additione 3. ad 3. esse exponentem huius characteris Cossici ✳☉. qui producitur ex multiplicatione ☉, in se. Eademque ratio est de cæteris characteribus Cossicis, qui seipsos multiplicant.

RVRSVS, quia, vt ex eodem scholio constat, si minor aliquis numerus progressionis Geometricæ ab vnitate incipientis multiplicet maiorem quempiam eiusdem progressionis, procreatur numerus, qui tantum à maiore distat exclusiue in progressione eadem, quantum minor ab vnitate abest exclusiue; efficitur vt ☉. multiplicans ✳☉, producat C☉☉, qui tertiũ occupat locum post ✳☉ exclusiue, sicut & ☉, tertium possidet locũ exclusiuè post N, hoc est, post vnitatem. Quocirca cũ exponens 3. characteris ☉, additus ad 6, exponentem characteris ✳☉, faciat 9. exponentem, qui tertium locum adeptus est post 6. exclusiue, propterea quod in 3. continentur tres vnitates, quotum nimirum locum exclusiue ab vnitate, seu N, occupat character hic ☉; manifestum est, numerum 9. qui fit ex additione 3. ad 6. exponentem esse huius characteris Cossici C☉☉ qui gignitur ex multiplicatione ☉, in ✳☉. Eadem de causa idem character C☉☉, procreatur ex multiplicatione ✳✳. in ß. & sic de cæteris.

QVONIAM vero, vt Additio Subtractionem, & Subtractio Additionem; ita quoque Multiplicatio Diuisionem, & Diuisio Multiplicationem probat; fit vt quemadmodũ ex additione 3. ad 3, fiunt 6. & ex multiplicatione ☉, in ☉, fit ✳☉; ita subtractis 3. ex 6. relinquantur 3. & diuiso ✳☉. per ☉, proueniat ☉. Item sicut ex additione 3. ad 6. fiunt 9. & ex multiplicatione ☉. in ✳☉, fit C☉☉; sic etiam subtractis 3. ex 9. relinquantur 6. & diuiso C☉☉. per ☉, producatur ✳☉. eademque ratio est de reliquis.

EX hac demonstratione perspicuum fit, id quod cap. 2. tradidimus; Additionem videlicet numerorum progressionis Arithmeticæ respondere multiplicationi numerorum progressionis Geometricæ, & Subtractionem Diuisioni. Demonstrauimus enim, quemadmodum ex additione 2 ad 4. fiunt 6. ita ex multiplicatione ☖, in ☖☖, fieri ☖☾. Item sicut subtractis 2. ex 6. relinquuntur 4. ita diuiso ☖☾, per ☖, fieri ☖☖, &c.

Multipl. & Diuisio numeri Cossici compositi per absolutum, vel per Cossicũ tam simplicem, quam compositũ.

ITAQVE ex multiplicatione cuiusuis characteris Cossici in alium quemcunque producitur character Cossicus tantũ à maiore distans excluſiue, quantũ minor ab vnitate, hoc est, ab hoc signo N. recedit excluſiue, vel quantus est exponens minoris characteris Cossici. Vt ex ☾☾, in ☖☖☖, fit C☖. &c. Ex diuisione vero cuiuslibet characteris Cossici maioris per alium quemuis minorem prouenit character Cossicus tantum à maiore distans excluſiue, retrocedendo tamen, quantum minor ab vnitate, seu charactere N, abest excluſiue, vel quantus est exponens minoris characteris Cossici. vt ex diuisione C☾☾, per ☖☖, producitur ☖. &c.

QVANDO autem numerus Cossicus compositus, vel diminutus multiplicatur, aut diuiditur per numerum absolutum, vel Cossicum tam simplicem, quam compositum, diminutumue, præter documentum iam traditum habenda est maxima ratio horum signorum +. & —. Nam quando numeri se mutuo multiplicantes, vel diuidẽtes habuerint idem signum +. vel —. apponitur producto semper hoc signum +. Quando vero alter illorum habuerit signum +, & alter hoc —, afficitur productus numerus perpetuo hoc signo —. Quod alij scriptores docent his verbis. In multiplicatione ac diuisione, Plus per Plus, vel Minus per Minus producit Plus: At Plus per Minus, vel Minus per Plus producit Minus. Hoc autem vnica hac regula memoriæ mandabitur.

Regula in multipl. & diuisione numerorũ Cossicorum obseruãda.

Eadem signa ponunt signum additorum: Diuersa vero signa ponunt signum subtractorum.

Exempla Multiplicationis.

$$\begin{array}{l|l|l} 7\,☖ + 4\,☾ & 7\,☖ - 4\,☾ & 7\,☖ - 4\,☾ \\ \quad 9\ \ N & \quad 9 & \quad 9\ \ ☾ \\ \hline 63\,☖ + 36\,☾ & 63\,☖ - 36\,☾ & 63\,☾ - 36\,☖ \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 8\,☖ + 9 & 8\,☖ - 9 \\ 8\,☖ + 9 & 8\,☖ - 9 \\ \hline 72\,☖ + 81 & -72\,☖ + 81 \\ 64\,☖☖ + 72\,☖ & 64\,☖☖ - 72\,☖ \\ \hline 64\,☖☖ + 144\,☖ + 81 & 64\,☖☖ - 144\,☖ + 81 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 8\,☾ - 4\,☖ & 6\,☖ + 8\,☾ - 6\,N \\ \quad 6\,☾ & \quad 2\,☖ - 4\,N \\ \hline 48\,☖☖ - 24\,☾☾ & -24\,☖ - 32\,☾ + 24\,N \\ & 12\,☖☖ + 16\,☾☾ - 12\,☖ \\ \hline & 12\,☖☖ + 16\,☾☾ - 36\,☖ - 32\,☾ + 24\,N \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 9\,☖ + 8\,N - 32\,☾ \\ 7\,☾☾ - 4\,☖☖ - 8\,☖ \\ \hline -72\,☖☖ - 64\,☖ + 24\,☾☾ \\ -36\,☖☾☾ - 32\,☖☖ + 12\,☗ \\ 63\,☗ + 56\,☾☾ - 21\,☖☖ \\ \hline -36\,☖☾☾ + 75\,☗ - 125\,☖☖ + 80\,☾☾ - 64\,☖ \end{array}$$

In hoc vltimo exemplo præcedunt semper in summa maiores denominationes Cossicæ minores denominationes Cossicas. Sed quoniam non recte in initio ponitur hoc signum —, propterea ita collocanda erit summa producta.

$$75\,☗ - 36\,☖☾☾ - 125\,☖☖ + 80\,☾☾ - 64\,☖$$

Exempla Diuisionis.

$$\begin{array}{l|l|l} \overset{I}{\text{per } 3\,☾} & \overset{I}{\text{per } 3\,2☾} & \overset{I}{\text{per } 3\,2☾} \\ \hline (3\tfrac{1}{3}N & (3\tfrac{1}{3}☖ & (3\tfrac{1}{3}N \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \overset{I}{\quad} & \overset{2}{\quad} \\ 3\,☖ + 4\,2☾ & 18\,☖☖ - 12\,☖ \\ 3\,2☾ \quad 3\,2☾ & 4\,2☾ \quad 4\,2☾ \\ \hline (3\,2☾ + 1\tfrac{1}{3}N & (4\tfrac{1}{2}☾☾ - 3\,2☾ \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \overset{4\emptyset}{\quad} \\ 3\emptyset\,☖ - 58\,2☾ + 24\,N \qquad (62☾ - 8\,N \\ \emptyset\,2☾ - 3\,N \\ \quad \emptyset\,2☾ - 3\,N \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \qquad -12\,☖ \qquad \emptyset\,2☾ \\ 12\,☖☖ + 16☾☾ - 36\,☖ - 32\,2☾ + 24\,N \qquad (6☖ + 82☾ - 6\,N \\ 2\,☖ + \emptyset\,2☾ - 4\,N \\ \quad 2\,☖ + \emptyset\,2☾ - 4\,N \\ \quad\quad 2\,☖ + \emptyset\,2☾ - 4\,N \end{array}$$

Quoniam in omni diuisione numerorum Cossicorum denominationes debent esse continuatæ, idcirco in vltimo exemplo, in quo diuisor est $2\,☖ - 4\,N$. interposuimus $0\,2☾$, cum signo +, vt totus diuisor sit $2\,☖ + 0\,2☾ - 4\,N$. Idem factum esse vides in sequenti exemplo, vbi diuidendus numerus est $1\,☾☾ + 1$. & diuisor $1\,2☾ + 1$.

$$\begin{array}{l} \qquad -1\,☖ + 1\,2☾ \\ 1\,☾☾ + \emptyset\,☖ + \emptyset\,2☾ + 1 \qquad (1☖ - 12☾ + 1\,N \\ 1\,2☾ + 1 \\ \quad 1\,2☾ + 1 \\ \quad\quad 1\,2☾ + 1 \end{array}$$

CÆTERVM tria hæc vltima exempla, in quibus diuisor est numerus compositus, vel diminutus, arte sunt excogitata. Nam vt plurimum per huiusmodi diuisores diuisio fieri non potest, sed subscripto diuisore ipsi diuidendo numero, interiectaque linea, fit fractio, vt hic. *Quando nõ possit fieri diuisio.*

$$8\,☗ \text{ per } 2☖ + 4\,N \quad || \quad 8☖ - 92☾ \text{ per } 42☾ + 3\,N$$

Quotientes sunt.

$$\frac{8\,☗}{2☖ + 4N} \quad || \quad \frac{8☖ - 92☾}{42☾ + 3\,N}$$

Quid autem faciendum sit cum fractionibus huiusmodi, infra cap. 10. docebimus, cum de reductione æquationum inter minutias inuentarum agemus. Eodem modo fractio constituitur, cum numerus Cossicus simplex, vel compositus per Cossicum numerum simplicem maioris denominationis diuiditur, vt $8\,☖$. per $2\,☾☾$. constituunt hanc fractionem $\frac{2☖}{2☾☾}$. Item diuisis $9\,☖ + 4$. per $3\,2☾$. fit hæc fractio $\frac{9☖+4}{3\,2☾}$. &c.

SVPEREST, vt tradamus examen Multiplicationis atque Diuisionis. Hoc autem duplex est. Primum Multiplicatio per Diuisionem, & contra examinari potest, vt in numeris absolutis præcipitur. *Probatio Multiplicationis & Diuisionis.*

DEINDE probatio institui potest per resolutionem Cossicorum numerorum secundum aliquam radicem progressionis Geometricæ, vt dictum est ad finem cap. 4. Nam numeri Cossici, qui multiplicantur inter se, resoluti tantum faciant necesse est, si multiplicentur inter se, quantum numeri Cossici producti, secundum eandem radicem resoluti. Et diuidendus numerus Cossicus resolutus tantum debet producere diuisus per diuisorem resolutum, quantum Quotiens secundum eandem radicem resolutus. vt hic apparet.

Exemplum Multiplicationis.

Secundum radicem 2. faciunt $62☾ - 8$. & $52☾ - 3$. faciunt 7. Ex multiplicatione autem 4. per 7. fiunt 28. Tantundem quoque fit ex resolutione producti numeri secundum eandem radicem 2. vt patet.

$$\begin{array}{l} 62☾ - 8 \\ 52☾ - 3 \\ \hline -18\,2☾ + 24 \\ 30\,☖ - 40\,2☾ \\ \hline 30\,☖ - 58\,2☾ + 24 \end{array}$$

Exemplum Diuisionis.

$$\begin{array}{l} \qquad -18\,2☾ \\ 30\,☖ - 58\,2☾ + 24 \qquad (52☾ - 3\,N \\ \emptyset\,2☾ - 8 \\ \quad \emptyset\,2☾ - 8 \end{array}$$

Diuidendus numerus $30\,☖ - 58\,2☾ + 24$. secundum radicem 2. resolutus facit 28. Diuisor vero $62☾ - 8$. facit 4. Diuisis autem 28. per 4. producuntur 7. Perspicuum autem est, quotientem hunc $5\,2☾ - 3$. secundum eandem radicem resolutum efficere quoque 7.

QVOD autem eadem signa + & +, vel — & —, in Multiplicatione & Diuisione producant semper signum hoc +. Diuersa autem signa +, & —, vel —, & +, faciant semper hoc signum — ; præterquam quod examen Multiplicationis & Diuisionis abunde id comprobare possit: tamen idipsum clare perspicitur in numeris absolutis. Vt in hoc exẽplo sequenti, quis nõ videt, si multiplicẽntur 8 — 2. hoc est, 6. per 7. — 3. hoc est, per 4. produci 24. nempe 56 — 38 + 6? Nam cũ ex 7 in 8. fiunt 56. quoniã nõ multiplicatur totus hic numerus 7. in hunc 8. sed in 8. detractis prius 2. propterea numerus hic 56. maior est vero producto. Vnde ex multiplicatione postea eiusdem numeri 7. in — 2. fiunt 14. signando hoc signo —, atque ita ex + in —, fit —. Rursus quia non *Quod eadẽ signa producant signum +. Diuersa autem signũ —.*

$$\begin{array}{l} 8 - 2 \\ 7 - 3 \\ \hline 56 - 14 \\ \quad - 24 + 6 \\ \hline 56 - 38 + 6 \end{array}$$

totus hic numerus 7. sed detractis prius 3. multiplicatur in 8 — 2, sit vt productus 56 — 14. sit vero producto maior. Quare ex multiplicatione — 3, in 8. fiunt 24. notanda hoc signo —, atque ita rursus ex — in + fit —. Sed quia non totum hoc, quod prouenit ex — 3. in 8 sed quod producitur ex — 3. in 8 subtractis prius 2. idcirco restituendum est id, quod iniuste ablatum est; atque ita postremo ex — 3. in 2. fiunt 6. notanda signo hoc +, quod additionem significat, vt restituantur 6. quæ ablata fuerant. Eadem ratio est in cæteris exemplis Multiplicationis.

IAM vero cum ex multiplicatione 6. in — 4. gignatur hic numerus — 24. vt dictū est, necesse est, vt ex diuisione — 24. per — 4. producantur 6; & ex diuisione — 24. per 6. fiant — 4. Quare in diuisione quoq; ex —, in —, fit +, & ex —, in +, vel contra, fit —. Itaque quemadmodum affirmatio affirmationis, & negatio negationis affirmant, ita siue Plus in Plus, siue Minus in Minus multiplicatum, aut diuisum producit Plus. Item, sicut affirmatio negationis, siue negatio affirmationis negat, ita siue Plus in Minus, siue Minus in Plus multiplicatum, aut diuisum producit Minus.

DE NVMERIS FICTIS, SIue minoribus quam nihil.

CAPVT VI.

Numerificti, siue minores quã nihil.

QVEMADMODVM variæ singuntur radices numerorum, qui eas non habent, qualis est radix quadrata, vel cubica, vel Zensizensica, vel Surdesolida huius numeri 20. sitque hæc fictio summa vtilitate, & commodo eorum, qui in rebus Mathematicis versantur, vt suo loco dicemus: Ita etiam à scriptoribus Algebræ finguntur non temere numeri quidam minores quam nihil, vt 0 — 4. hoc est, nihil detractis prius quatuor vnitatibus. Item 6 — 10. hoc est, sex vnitates minus 10. vnitatibus. Quod vnico exemplo hoc subtractionis perspicuum fiet. Sint ex 8 — 2, deducenda 10 — 5. hoc est, 5. ex 6. Primo detraho — 5. ex — 2, hoc est, quia superior numerus minor est, detraho 2. ex 5, & reliquo numero 3, tribuo contrarium signum +, iuxta legem subtractionis supra traditam. Nam re vera hic numerus — 2, intelligitur superare hunc numerum — 5, tribus vnitatibus, cum — 2, cadat infra nihil duabus vnitatibus, at — 5. infra idē nihil descendat quinq; vnitatibus, hoc est tribus vnitatibus magis, quã — 2, recedat à nihilo. Quod etiã hinc potest intelligi, quod huic numero — 2, desint tantū duæ vnitates, vt æqualis sit nihilo, at huic — 5, desint quinque, vt nihilo æquiualeat. Deinde subtraho + 10, ex + 8, maiorem numerum ex minore, quod fieri non potest. Vnde non inuenio numerum aliquem verum, quem pro relicto reponam, si 10. ex 8. subducam. Nam si superior numerus 8, maior esset inferiore 10, remaneret verus numerus ex illa subtractione: Et si æqualis esset superior numerus inferiori, relinqueretur nihil. Nunc vero cum numerus subtrahendus 10, maior sit numero 8, à quo fieri debet subtractio, efficitur, vt numerus infra 0, hoc est, minor nihilo relinquatur, ille nimirum, qui deest superiori, vt ab eo inferior detractus relinquat 0, cuiusmodi est numerus, qui relinquitur ex subtractione superioris ab inferiore, notatus signo —. quod defectum significat, nempe — 2. Vt totus numerus relictus sit — 2 + 3. Sed quia nō recte ad initium numeri præfigitur hoc signum —, ita statuendus erit relictus. 32. — Eodem modo, quotiescunque maior numerus aliquis ex minore detrahendus est, (quod vera fieri non potest) ponitur in hac scientia pro relicto excessus, quo inferior numerus superiorem superat, præfixo hoc signo —, vt subtractis 20, ex 12, relinquuntur — 8, &c.

8	— 2
10	— 5
— 2	+ 3

VIDES igitur, quam pulchre hæc ars pro immensa copia sua vtatur & ijs, quæ sunt, & ijs, quæ non sunt, sed tantum esse finguntur. Quod accuratius adhuc ex ijs, quæ sequuntur, iam iam intelliges.

QVEMADMODVM supra vnitatem ponuntur numeri integri, & infra vnitatem fractiones vnitatis, vt vnitas media sit inter numeros integros & fractos; ita supra 0, seu nihilum, ponitur vnitas cum reliquis numeris veris, & infra 0, fingitur vnitas cum reliquis numeris, præposito tamen semper signo hoc —, ita vt 0, seu nihilum, medium sit inter numeros veros, & fictos, siue minores nihilo. Quod appositæ sequentes duæ progressiones commonstrant, quarum superior est naturalis series numerorum, inferior autem Geometrica,

&c.	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	&c.
&c.	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	&c.

illiusque numeri numeros huius exponūt, vt cap. 2. diximus. Nam & hic superioris progressionis numeri idem faciunt additione, & subtractione, quod inferioris progressionis numeri multiplicatione, atque diuisione. Vt enim ex multiplicatione $\frac{1}{4}$. in 32. fiunt 8. ita ex additione — 2, ad 5. fiunt 3. Item sicut ex multiplicatione $\frac{1}{2}$. in 8. fiunt 4. ita ex additione — 1. ad 3. fiunt 2. Rursus, vt ex diuisione 8, per $\frac{1}{4}$, prodeūt 32, sic ex subtractione — 2, de 3, relinquuntur 5. Et quemadmodū ex diuisione 8, per $\frac{1}{2}$, exeunt 16, ita ex subtractione — 1, de 3, relinquuntur 4 &c. Vt ex ijs, quæ de additione subtractioneque numerorum Cossicorum diximus, perspicuum est. Immo ex hoc facile constat, in additione & subtractione diuersa signa mutare speciem operationis, &c. vt docuimus cap. 4. alias non responderet additio & subtractio in progressione naturali numerorum multiplicationi ac diuisioni in Geometrica progressione.

EX his liquido constat, non frustra excogitari huiusmodi numeros fictos, siue nihilo minores, quandoquidem tā concinne eorum additio ad numeros integros, vel subtractio respondet multiplicationi, & diuisioni numerorū integrorum progressionis Geometricæ per numeros fractos eiusdem progressionis, vt dictum est.

EST

Vnum & eundem numerū habere posse duas radices quadratas inæquales.

EST autem hoc loco obseruatione dignum, dari posse numerum Cossicum, qui habeat duas radices quadratas inæquales; siue (quod idem est) exhiberi posse duos numeros inæquales, quorum vterque in sei ipsum ductus producat eundem numerum. Nam si duo numeri, 2♃ — 3♎. & 3♎ — 2♃. si vterque in se multiplicetur, producunt 4♃♃ + 9♃ — 12♏. vt hic vides.

2 ♃ — 3 ♎	3 ♎ — 2 ♃
2 ♃ — 3 ♎	3 ♎ — 2 ♃
— 6 ♏ + 9 ♃	— 6 ♏ + 4 ♃♃
4 ♃♃ — 6 ♏	9 ♃ — 6 ♏
4 ♃♃ + 9 ♃ — 12 ♏	4 ♃♃ + 9 ♃ — 12 ♏

Cum tamen ipsi numeri multiplicati inter se sint valde inæquales. Prior enim 2♃ — 3♎, si per radicem 2. resoluatur, efficit 8 — 6. hoc est, 2. qui numerus in se ductus procreat 4. qui æqualis est producto 4♃♃ + 9♃ — 12♏. cum hic per eandem radicem 2. resolutus efficiat quoque 4. Posterior vero 3♎ — 2♃. efficit 6 — 8. id est 0 — 2. qui numerus in se multiplicatus producit quoque 4. si leges multiplicationis seruentur. Itaque tam numerus 2♃ — 3♎. quam 3♎ — 2♃. radix est quadrati numeri 4♃♃ + 9♃ — 12♏. quod sane mirum videri possit, & paradoxum, cum tamen ita rem sese habere, resolutiones radicum, & producti numeri euidenter comprobent.

HOC idem cernitur in numeris absolutis. Nam vterque horum numerorum 4 — 1. & 1 — 4. id est 3. & ● — 3. in se multiplicatus gignit 9. vt hic cernis.

4 — 1	1 — 4
4 — 1	1 — 4
— 4 + 1	— 4 + 16
16 — 4	1 — 4
9	9

Idemque in infinitis alijs numeris licebit experiri. Quod si ducantur 4 — 1. in 1 — 4. producetur numerus 8 — 17. hoc est, 0 — 9. At ex multiplicatione 2♃ — 3♎. in 3♎ — 2♃. p[r]oreabitur numerus 12♏ — 4♃♃ — 9♃. qui resolutus per radicem 2. efficit 32 — 36. id est, 0 — 4. cum tamen vterque illorum in se ductus producat 4. Causa autem huius rei in multiplicationem numerorum Cossicorum, & signorum + & — reiicienda videtur: & debilitas ingenij humani accusanda, quod capere non potest, quo pacto id verum esse possit. Neque enim de ratione prædictæ multiplicationis dubitandum est, cum illa per multa exempla sit confirmata.

DE FRACTIONIBVS numerorum Cossicorum.

CAPVT VII.

Numeratio fractionum Cossicarum.

EÆDEM fere operationes sunt in fractionibus, seu Minutijs Cossicis, quæ in vulgaribus Minutijs, adhibitis tamen ijs, quæ de integris Cossicis numeris hactenus tradidimus, quod ad characteres Cossicos, & signa + & — attinet. Nam, vt de Numeratione exempla nonnulla ponamus, hæc fractio $\frac{1\mathcal{N}}{8\mathcal{C}}$. significat, tres vnitates diuisas esse per 8♎. Et $\frac{7\mathcal{S}}{9}$. denotat 7. Zensos esse diuisos per 9. vnitates. Item $\frac{9\mathcal{S}\mathcal{S} + 8\mathcal{S}}{6\mathcal{C}}$. indicat hunc numerum 9♃♃ + 8♃. diuisum esse per 6♏. Et $\frac{9\mathcal{S}\mathcal{S} - 8\mathcal{S}}{6\mathcal{C}}$. vult numerum hunc 9♃♃ — 8♃ esse diuisum per 6♏. &c.

Abbreuiatio fractionum Cossicarum.

Abbreuiatio duobus modis fieri potest. Aut enim solum abbreuiantur numeri, vt in Minutijs vulgaribus fit, intactis characteribus Cossicis, aut etiam characteres Cossici abbreuiantur. Vt fractio hæc $\frac{8\mathcal{S}}{2\mathcal{C}\mathcal{C}}$. quod ad numeros attinet, reducitur ad hanc $\frac{4\mathcal{S}}{1\mathcal{C}\mathcal{C}}$. Hæc autem $\frac{9\mathcal{S} + 36}{6\mathcal{S}}$. reducitur ad hanc $\frac{1\mathcal{S} + 4}{9}$. quia maxima mensura communis est 9. Modus autem inueniendi maximam mensuram trium aut plurium numerorum colligitur ex propos. 3. lib. 7. Euclid. Si enim sunt tres numeri, inuenta maxima mensura duorum, si hæc metiatur quoque tertium, erit ipsa maxima mensura omnium; si vero non metiatur tertium, erit maxima mensura illius maximæ mensuræ, & tertij numeri, omnium trium mensura maxima. Eodem modo, datis quatuor numeris, inuenta maxima mensura trium, si hæc metiatur & quartum numerum, erit ipsa maxima omnium quatuor mensura; si vero non metiatur, erit maxima mensura mensuræ illius maximæ, & quarti numeri, maxima mensura omnium quatuor. Et sic de reliquis. Similiter hæc minutia $\frac{8\mathcal{S}}{2\mathcal{S} - 4}$. ad hanc reducitur $\frac{4\mathcal{S}}{1\mathcal{S} - 2}$. Hæc autem $\frac{1\mathcal{S}\mathcal{S} - 9\mathcal{S}\mathcal{C}}{2\mathcal{C} + 3\mathcal{S}}$. reducitur ad hanc $\frac{6\mathcal{S} - 7\mathcal{C}}{2\mathcal{S}\mathcal{C} + 1\mathcal{S}}$. &c.

Abbreuiatio fractionum Cossicarum.

AT vero abbreuiatio characterum Cossicorum fit per subtractionem exponentis minoris characteris ab exponentibus aliorum characterum. Nam si reliquis numeris proprij characteres tribuantur, peracta erit abbreuiatio, quod ad characteres attinet. Hinc perspicuum est, numerum minoris characteris Cossici fieri in hac abbreuiatione Absolutum. Itē Minutiam, in quo Absolutus numerus reperitur, nō posse abbreuiari, quod ad characteres attinet. Vt hæc Minutia $\frac{7}{1\mathcal{S}\mathcal{S}\mathcal{S}}$. abbreuiari non potest, quod spectat ad characteres: sed quod ad

numeros attinet, reducetur per abbreuiationem ad hanc, $\frac{1}{2ℨß}$. At vero hæc Minutia $\frac{8ℨ}{2ℨℭ}$. quod ad characteres ſpectat, ad hanc reducitur. $\frac{8}{2ℨℨ}$. Deinde quod ad numeros attinet, ad hanc $\frac{4}{1ℨℨ}$. Hæc autem $\frac{18ℨ-9℞}{6℞+3ℨ}$. reducitur ad iſtam, quod ad numeros & characteres attinet, $\frac{6℞-3}{2+1℞}$.

Demonſtratio abbreuiationis fractionū Coſſicarū.

FACILIS autem eſt demonſtratio huiuſce abbreuiationis. Nam quod ſpectat ad numeros, cum Minutiæ propoſitæ numeri diuidantur per eundem numerum, per maximam videlicet eorum menſuram, erit eadem proportio inter quotientes, quæ inter numeros diuiſos. Quare æquales erunt hæ fractiones, $\frac{8ℨ}{2ℨℭ}$. $\frac{4ℨ}{1ℨℭ}$. Quod vero ad characteres attinet, cum ſinguli characteres per eundem exponentem deprimantur, ita vt eadē prorſus ſit diſtantia inter characteres, ad quos facta eſt reductio, quæ inter characteres initio propoſitos, habebunt eandem proportionem characteres, ad quos facta eſt reductio, quam priores characteres propoſiti. Æquales itaq; erunt hæ Minutiæ, $\frac{4ℨ}{1ℨℭ}$. $\frac{4N}{1ℨℨ}$. [a] Nam eadem proportio eſt 4ℨ. ad 1ℨℭ, quæ 4. ad 1ℨℨ. cum idem numerus fiat ex multiplicatione 4ℨ, primi numeri, in 1ℨℨ, numerū quartum, qui ex 4. numero tertio in 1ℨℭ, numerum ſecundum. Vtrobique enim producitur hic numerus 4ℨℭ. &c. Vel certe, cum & inter ℨ, ac ℨℭ, & inter N, ac ℨℨ, tres medij termini cadant proportionales, propterea quod ℨ, & ℨℭ, æqualiter ſunt depreſſi, nempe per 2. exponentem huius characteris minoris ℨ, &c.

a 19.7.

Reductio fractionū Coſſicarū.

REDVCTIO fractionum ad eundem denominatorem abſoluitur multiplicando numeratores in denominatores per crucē, & denominatores inter ſe, vt in Minutijs vulgaribus. Vt hæc fractiones $\frac{3℞}{4ℨ}$. ⋈ $\frac{4ℭ}{5ℨℭ}$. reducuntur ad has. $\frac{15Bß}{20ℨℨℨ}$. $\frac{16ß}{20ℨℨℨ}$.

Demonſtratio reductionis fractionū Coſſicarum.

RATIO autem huius reductionis perfacilis eſt. Quoniam enim idem numerus 5ℨℭ, multiplicans duos numeros 3℞, & 4ℨ, produxit 15Bß, & 20ℨℨℨ. [b] eadem proportio erit 15Bß, ad 20ℨℨℨ. quæ 3℞, ad 4ℨ. ac propterea eundem habebunt valorem fractiones hæ $\frac{3℞}{4ℨ}$. & $\frac{15Bß}{20ℨℨℨ}$. Eodem modo æquales erunt hæ fractiones $\frac{4ℭ}{5ℨℭ}$. & $\frac{16ß}{20ℨℨℨ}$. Nam hic numerus 4ℨ, multiplicans duos 4ℭ, & 5ℨℭ, genuit hos duos 16ß, & 20ℨℨℨ.

b 17.7.

QVOD ſi numerus aliquis integer, & fractio ad eandem denominationem ſint reducenda, ſupponenda eſt vnitas numero integro pro denominatore, & reliqua peragenda, vt prius. Vt 6. & $\frac{4℞}{7ℨ}$. hoc modo $\frac{6}{1}$. ⋈ $\frac{4℞}{7ℨ}$. reducentur ad has fractiones $\frac{42ℨ}{7ℨ}$. & $\frac{4℞}{7ℨ}$. Et hæ duæ $\frac{5ℨ}{1}$. $\frac{4ℭ}{3ℨ}$. ad has $\frac{15ℨℨ}{3ℨ}$. $\frac{4ℭ}{3ℨ}$. Nam huic numero Coſſico integro 5ℨ, ſuppoſita eſt vnitas pro denominatore.

SI vero integris adhęreat fractio aliqua, reducenda erunt prius integra ad eam fractionem; quod quidem fit multiplicando integra per denominatorem fractionis, & numerum productum numeratori addendo. Vt ſi 4ℨ + $\frac{2℞}{1ℭ}$. & $\frac{3ℨ}{1ß}$. reducere velimus ad eandem denominationem, multiplicabimus prius 4ℨ, per 1ℭ, vt habeamus duas fractiones has $\frac{4ß+2℞}{1ℭ}$ $\frac{3ℨ}{1ß}$. quas ad has duas reuocabimus. $\frac{4ℨß+2ℨℭ}{1ℨℨℨ}$. $\frac{3ß}{1ℨℨℨ}$. & ſic de cæteris.

Additio, Subtractio, Multiplicatio, & Diuiſio fractionū Coſſicarum.

IAM vero quatuor reliquæ operationes fractionum Coſſicarum, hoc eſt, Additio, Subtractio, Multiplicatio, atque Diuiſio, non differunt ab ijs, quas de Minutijs vulgaribus tradidimus, habita tamen ſemper ratione ſignorum + & −, nec non characterum Coſſicorum, quorum operationes in ſuperioribus præceptis continentur. Itaque ſolum exemplis rem abſoluemus hoc loco.

Exempla Additionis.

$\frac{3℞}{2N}$ ⋈ $\frac{4ℨ}{3ℭ}$ faciunt $\frac{9ℨℨ+8ℨ}{6ℭ}$ hoc eſt, $\frac{9ℨ+8N}{6℞}$. Itē $\frac{48N}{7ℨ}$ ⋈ $\frac{48N}{12℞-3ℨ}$ faciūt $\frac{192ℨ+576℞}{84ℭ-21ℨℨ}$. Item $\frac{9℞+1ℨ}{36ℭ}$ ⋈ $\frac{21ℨℨ-8ℨ}{36ℭ}$. faciunt $\frac{21ℨℨ-6ℨ+9℞}{36ℭ}$. Quoniam enim in poſteriori exemplo denominatores omnino ſimiles ſunt, propterea ſolum numeratores adduntur inter ſe, & ſummæ idem denominator ſubſcribitur. Hæc autem fractio quod ad numeros & characteres ſimul ſpectat, reducetur ad hanc $\frac{7ℭ-2℞+3N}{12ℨ}$.

Exempla Subtractionis.

$\frac{3℞}{2N}$ de ⋈ $\frac{9ℨℨ+8ℨ}{6ℭ}$ relinquunt $\frac{16ℨ}{12ℭ}$ hoc eſt, $\frac{4N}{3℞}$. Item $\frac{3N}{4℞}$ de ⋈ $\frac{31ℨ}{20ℭ}$ relinquunt $\frac{64ℭ}{80ℨℨ}$ hoc eſt, $\frac{4N}{5℞}$. Item $\frac{5ℨ}{6N}$ de $\frac{20ℨ+21℞}{24N}$ relinquunt $\frac{126℞}{144N}$ hoc eſt, $\frac{7℞}{8N}$. Item $\frac{9ℨ+8℞}{2ℭ-6N}$ de $\frac{11ℭ+16ℨ+8℞}{2ℭ-6N}$ relinquunt $\frac{11ℭ+7ℨ}{2ℭ-6N}$. Quoniam enim in poſteriori exemplo denominatores omnino ſunt ſimiles, & iidem, detrahendus eſt numerator à numeratore, & reliquo numero idem denominator ſubſcribendus.

Exempla Multiplicationis.

$\frac{9ℨℨ+8ℨ}{6ℭ}$ per $\frac{3℞}{2N}$ faciunt $\frac{27ß+24ℭ}{12ℭ}$. Item $\frac{7ℨ}{8ℨℨ}$ per 4℞ − 8N. faciunt $\frac{28ℭ-56ℨ}{8ℨℨ}$. Hic enim integro numero ſupponitur vnitas pro denominatore, vt exemplum ad Multiplicationem paretur hoc modo. $\frac{7ℨ}{8ℨℨ}$ per $\frac{4℞-8N}{1N}$. Item $\frac{7ℨ+8℞}{5ℭ-11N}$ per $\frac{4℞}{5ℨ}$ − 8N. faciunt $\frac{32ℨ-280ℨℨ-292ℭ}{25℞-55ℨ}$. Prius enim in hoc exemplo facta eſt reductio −8N, ad fractionem, cui adhærebant, multiplicando videlicet −8N, per 5ℨ, denominatorem. Quare fractiones multiplicandæ fuerunt hæ $\frac{7ℨ+8℞}{5ℭ-11N}$ per $\frac{4℞-40ℨ}{5ℨ}$.

Exempla Diuiſionis.

$\frac{27ß+24ℭ}{12ℭ}$ per $\frac{3℞}{2N}$ faciunt $\frac{54ß+48ℭ}{36ℨℨ}$. Item $\frac{8℞}{9ℨ}$ per $\frac{2N}{3℞}$ faciunt $\frac{24ℨ}{18ℨ}$ hoc eſt, $\frac{4}{3}$ ſiue $1\frac{1}{3}$. Item $\frac{7℞-14ℨ}{2ℨℨ}$ per 4℞ − 8N. faciunt $\frac{7ℭ-14ℨ}{8ß-16ℨℨ}$. Item $\frac{7ℭ-14ℨ}{2ℨℨ}$ per $\frac{7ℨ}{8ℨℨ}$ faciunt $\frac{56Bß-112ℨℭ}{14ℨℭ}$.

QVONIAM vero Additio, & Subtractio, Item Multiplicatio ac Diuiſio ſe mutuo probant, fit vt ſi ex additione $\frac{3℞}{2N}$ & $\frac{4ℨ}{3ℭ}$ fiunt $\frac{9ℨℨ+8ℨ}{6ℭ}$ hoc eſt, $\frac{9ℨ+8N}{6℞}$; ſubductis $\frac{3℞}{2N}$ ex $\frac{9ℨℨ+8ℨ}{6ℭ}$ relinquatur $\frac{4ℨ}{3ℭ}$. Relinquuntur autem iuxta regulam $\frac{16ℨ}{12ℭ}$ hoc eſt, in minimis terminis $\frac{4N}{3℞}$. Neceſſe eſt igitur, has duas minutias $\frac{4ℨ}{3ℭ}$ & $\frac{4N}{3℞}$ eſſe æquales, hoc eſt, eandem proportionem eſſe 4ℨ. ad 3ℭ, atque 4N, ad 3℞. Quod quidem verum eſt. Nam ſi Minutiæ dictæ multiplicentur per crucem, producentur æquales numeri, hoc eſt, tantum fiet ex primo numero in quartum, nimirum ex 4ℨ, in 3℞, quantum ex ſecundo in tertium, nimirum ex 3ℭ, in 4N. Itaque non

non eſt neceſſe vt eadem Minutia omnino proueniat, ſed ſatis eſt, vt æqualis Minutia producatur, quæ quidem æqualitas facile comprobari poteſt ex multiplicatione per crucem. Idem dicendum eſt de exemplis Multiplicationis ac Diuiſionis, vt ex ſuperioribus exemplis apparet.

Compendiariæ quædam operationes Minutiarum ad plurimas quæſtiones ſoluendas, perutiles.

I.

Dati numeri partem quamcunque, vel partes nominatas ad ipſum numerum addere.

Compendia quædā fractionum.

SIT datus numerus $\frac{3℞-16N}{2N}$ cui volo addere $\frac{3}{4}$ ipſius numeri. Vtor ergo hoc cōpendio, etiamſi ignorem quę ſint $\frac{3}{4}$ ipſius. Addo ad partem, vel partes addendas, vnitatem, (quod breuiter fit, addendo denominatorem numeratori) nimirum ad $\frac{3}{4}$ facio $\frac{7}{4}$. Hanc vero Minutiam multiplico per numerum datum efficioq; $\frac{21℞-112N}{8N}$ ſummam quæſitam.

Item ſi $\frac{2}{3}$, addendæ ſint ad 12 ℨ. addo vnitatem ad $\frac{2}{3}$ vt fiant $\frac{5}{3}$. Hanc minutiam multiplico per 12. ℨ, facioque ſummam hanc $\frac{60ℨ}{3N}$ hoc eſt, 20 ℨ. Similiter ſi ad hanc minutiam $\frac{3}{5}$ addendum ſit eius dimidium; addita vnitate ad $\frac{1}{2}$, fiunt $\frac{3}{2}$. Multiplico $\frac{3}{2}$ per $\frac{3}{5}$. fit ſumma tota $\frac{9}{10}$.

II.

Dati numeri partem, vel partes quaſcunque ad partem, vel partes quaſcunque eiuſdem numeri addere.

SIT datus numerm $\frac{8℞-12}{7N}$ ad cuius $\frac{1}{3}$, volo addere $\frac{3}{4}$, eiuſdem dati numeri. Addo partes propoſitas inter ſe, vt $\frac{1}{3}$ & $\frac{3}{4}$, facioque $\frac{13}{12}$. Hanc minutiam multiplico in datum numerum $\frac{8℞-12N}{7N}$ efficioque ſummam $\frac{104℞-156N}{84}$.

Similiter ſi $\frac{2}{5}$ huius numeri 35. ad $\frac{4}{7}$ eiuſdem volo addere Addo prius $\frac{2}{5}$ & $\frac{4}{7}$ facioque $\frac{34}{35}$. Multiplico $\frac{34}{35}$ per 35. efficioque $\frac{1190}{35}$ hoc eſt, 34. &c.

III.

Dati numeri partem, vel partes quaſcunque ab ipſo numero ſubtrahere.

SIT datus numerus $\frac{7ℨ+8℞-10}{12℞}$, à quo volo ſubtrahere $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{5}$, hoc eſt $\frac{8}{15}$ (ſunt enim prius in vnam ſummam redigendæ fractiones, ſi plures fuerint) Demo $\frac{8}{15}$ ex vnitate (quod breuiter fit, ſubtrahendo numeratorem à denominatore. Nam reliquus numerus eſt numerator) remanentque $\frac{7}{15}$. Multiplico $\frac{7}{15}$. per datum numerum $\frac{7ℨ+8℞-10}{12℞}$ facioque reliquum numerum $\frac{49ℨ+56℞-70}{180℞}$.

Similiter volo ſubtrahere $\frac{4}{5}$ huius numeri $\frac{9}{10}$, ab ipſo numero $\frac{9}{10}$ Detraho $\frac{4}{5}$ ex vnitate, manet $\frac{1}{5}$. Multiplico $\frac{1}{5}$ per $\frac{9}{10}$, facioq; $\frac{9}{50}$ pro ſumma reliqua, &c.

IIII.

Dati numeri partem, vel partes quaſcunque à parte, vel partibus quibuſcunque eiuſdem numeri ſubtrahere.

SIT datus numerus $\frac{12℞+8}{5}$ à cuius $\frac{1}{3}$ volo detrahere $\frac{1}{4}$. Demo prius $\frac{1}{4}$ ex $\frac{1}{3}$ remanet $\frac{1}{12}$. Multiplico $\frac{1}{12}$ per $\frac{12℞+8}{5}$ facioque ſummam relinquam $\frac{12℞+8}{60}$.

Item volo ſubducere $\frac{3}{4}$ huius numeri 36. ex $\frac{8}{9}$ eiuſdem numeri. Demo $\frac{3}{4}$ ex $\frac{8}{9}$ manent $\frac{5}{36}$ Multiplico $\frac{5}{36}$ per 36. facioq; $\frac{180}{36}$ hoc eſt, 5. pro numero reliquo. &c.

V.

Dati numeri partem, vel partes quaſcunque inuenire.

SIT datus numerus $\frac{12℞+8}{5}$. Volo ipſius $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$, id eſt, $\frac{7}{12}$. (quando enim plures ſunt fractiones, colligendæ ſunt prius in vnam ſummam.) Multiplico $\frac{7}{12}$ per datum numerum $\frac{12℞+8}{5}$ facioque $\frac{84℞+56}{60}$ atque hic numerus conſtituit $\frac{7}{12}$, hoc eſt, $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$. dati numeri $\frac{12℞+8}{5}$.

Similiter volo $\frac{3}{4}$ huius numeri 24. Multiplico $\frac{3}{4}$ in 24. facioq; $\frac{72}{4}$ hoc eſt, 18, &c.

VI.

Numerum inuenire, cuius pars nominata data ſit, vel partes. Hoc eſt, numerum inuenire, cuius datus quilibet numerus ſit data quæuis pars, vel partes.

SIT hic numerus $\frac{12℞-4}{5}$ duæ tertiæ partes alicuius numeri. Volo reperire illum numerum. Diuido $\frac{12℞-4}{5}$. per $\frac{2}{3}$. facioque $\frac{36℞-12}{10}$ atque hic eſt numerus, cuius $\frac{2}{3}$ faciunt $\frac{12℞-4}{5}$.

Pari ratione volo inuenire numerum, cuius hic numerus 8, ſit $\frac{4}{5}$ Diuido 8 per $\frac{4}{5}$ facioque $\frac{40}{4}$, hoc eſt, 10. atque hic eſt numerus, cuius $\frac{4}{5}$. faciunt 8. &c.

DE REGVLA ALGEBRÆ.

CAPVT VIII.

ABSOLVTO Algorithmo numerorum Cossicorum, ordo iam postulat & locus, vt celeberrimam Algebræ regulam exponamus. Occasione. n. huius omnia, quæ hactenus tradita sunt de numeris Cossicis, planiora fient, & reliqua, quæ ad perfectiorem huius regulæ cognitionem requiruntur, declaranda erunt. Neque enim omnia, vt debent, explicari possunt, nisi occasione accepta à partibus regulæ Algebræ, vt suo loco dicemus. Regula igitur Algebræ, quam alij scriptores in plures distraxerunt, huiusmopi est,

Regula Algebræ

Pro numero incognito in quæstione ponatur radix vna hoc modo, 1 ☉. (Possunt etiam interdum plures radices poni hoc modo 2 ☉. vel 3 ☉. &c. vel alius quidam numerus, pro commoditate quæstionis propositæ.) Quæ iuxta quæstionis tenorem examinetur, donec Æquatio aliqua inueniatur: Hæc reducatur si reductione opus fuerit: Deinde per numerum characteris Cossici maioris diuidatur reliquus æquationis numerus. Nam vel Quotiens ipse erit numerus, qui quærebatur, pretium scilicet radicis in principio positæ, vel certe radix aliqua Quotientis numeri numerum, qui quærebatur, notum reddet. Pulchre autem diuisor suo charactere Cossico demonstrabit, quando radix ex Quotiente, & quænam sit extrahenda.

HABET autem regula hæc quatuor partes. Prima est inuentio Æquationis: Secunda, Reductio Æquationis inuentæ: Tertia, Diuisio alterius numeri Æquationis per numerum maioris characteris Cossici: Quarta & vltima, Extractio radicis alicuius ex Quotiente.

HARVM duæ sunt omnino necessariæ, nimirum Inuentio Æquationis, & Diuisio. In omni enim quæstione per hanc regulam soluenda inuenienda est Æquatio siue Æqualitas inter duos numeros, & Diuisio instituenda. Reliquæ duæ, nimirum Reductio Æquationis, & Extractio radicis ex Quotiente, non omnino sunt necessariæ. Neque enim omnis Æquatio inuenta reductionem exigit, neque semper ex Quotiente radix extrahenda est, vt ex ijs, quæ sequuntur, manifestum erit. Quid porro inter vnicam hanc regulam nostram, & multiplices aliorum regulas intersit (Plures enim alij regulas præscribunt) cap. 13. manifestum erit.

SED priusquam omnes has quatuor partes regulæ singulatim pertractemus, rudi quadam Minerua, & obiter regulam ipsam explanabimus, hoc proposito problemate.

Inuenire numerum, ita vt dimidio ipsius, & tertiæ parte ab eo sublatis, reliquus numerus sit 7.

Prima pars regulæ Algebræ.

PONO hunc numerũ ignotũ, qui quæritur, esse 1 ☉. ita vt 1 ☉. æqualis intelligatur numero absc̃dito, quem inquirimus. Cum n. omnis numerus siue integer siue fract⁹, siue integer cũ fracto obtinere possit secundũ locũ alicuius progressionis Geometricæ ab vnitate incipientis, ita vt sit radix illius progressionis: consistit totum artificium huius regulæ Algebræ in eo, vt inueniat, quamnam progressionẽ Geometricam numerus quæsitus

In quo consistat artificium regulæ Algebræ.

constituat; hoc est, in quanam progressione numerus, qui quæritur, locum vnitati proximum occupet. Iuxta igitur quæstionis tenorem examino 1 ☉. hoc est, sumo ipsius $\frac{1}{2}$, & $\frac{1}{3}$, hoc est, $\frac{1}{2}$ ☉. & $\frac{1}{3}$ ☉. quæ partes simul constituunt $\frac{5}{6}$ ☉. Aufero $\frac{5}{6}$ ☉. ex 1 ☉. remanet $\frac{1}{6}$ ☉. Iam si ratiocinor. Quoniam 1 ☉. posita est æqualis toti numero abscondito, qui quæritur, erit $\frac{1}{6}$ ☉. æqualis dimidio totius numeri, & $\frac{1}{6}$ ☉. tertiæ parti eiusdem. Et quoniam dimidio, ac tertia parte ex toto numero subtractis, reliquus numerus est 7; fit, vt $\frac{1}{2}$ ☉. & $\frac{1}{3}$ ☉. hoc est, $\frac{5}{6}$ ☉. detractis ex 1 ☉. reliquus numerus, nimirum $\frac{1}{6}$ ☉. æqualis sit reliquo numero 7, quia si ab æqualibus æqualia ablata sint, quæ relinquuntur, sunt æqualia. Inuenta est igitur Æquatio, siue Æqualitas inter $\frac{1}{6}$ ☉. & hunc numerum 7. atq; ita prima pars regulæ absoluta est, quæ ita habet. [*Pro numero incognito in quæstione ponatur 1 ☉. quæ iuxta quæstionis tenorem examinetur, donec Æquatio aliqua inueniatur.*]

Æquatio quid.

Satis autem patet ex proposito exemplo, qua ratione iuxta tenorem quæstionis Æquatio inuenienda sit. Est autem Æquatio, vt hic sumitur, nihil aliud, quam proportio æqualitatis inter duas quantitates, siue res varie denominatas. Vt in dato exemplo, proportio æqualitatis est inter $\frac{1}{6}$ ☉. & 7. quæ duo varie denominantur. Nam cum duæ res æquales dicuntur, quæ eandem habent denominationem, est ea æqualitas, siue æquatio vel falsa, vt cum dico æquationẽ esse inter 5, & 7, aut inter $\frac{1}{6}$ ☉. & $\frac{1}{7}$ ☉. vel certe identitas quædam ad regulam Algebræ inutilis prorsus, vt cum dico, æqualitatem esse, seu æquationem inter 4 ☉. & 4 ☉. aut inter 7. & 7. Necesse est ergo, vt æqualitas ad regulam Algebræ pertinens sit inter duas res diuersorum nominum.

Secunda pars regulæ Algebræ.

Sequitur deinde in regula. [*Hæc reducatur si reductione opus fuerit.*] Hoc est, Æquatio inuenta reducatur, si res postulauerit. Quando autem, & quomodo sit reducenda Æquatio, paulo post docebimus. Nunc certum sit, nostram Æquationem inter $\frac{1}{6}$ ☉. & 7. non indigere reductione.

Tertia pars regulæ Algebræ.

QVARE subiungit regula. [*Deinde per numerum characteris Cossici maioris diuidatur reliquus æquationis numerus.*] Quoniam in omni Æquatione reperiuntur duo numeri inæqualiter denominati, præcipit regula Algebræ, vt per numerum maioris characteris Cossici diuidatur reliquus numerus æquationis. Non iubet vt diuisio fiat per maiorem numerum Cossicum, sed per maioris characteris Cossici numerum. Nam Diuisor in hac regula, dum diuidit, abijcit characterem suum, alioquin Quotiens semper foret vnitas. Cum enim numerus maioris characteris Cossici, quando à charactere denominatur, æqualis sit reliquo æquationis numero perspicuum est, si alter per alterum ita diuidatur, produci vnitatem, propterea quod numerus quicunque in altero numero

numero sibi æquali semel duntaxat continetur. Cur autem Diuisor huiusmodi abijciat suum signum Cossicum paulo inferius cap. 11. dicam, vbi hanc diuisionem, quæ in Algebræ regula præcipitur, plenius explanabimus. In nostra Æquatione inuenta inter $\frac{1}{6}$ ☉. & 7 N, maior character Cossicus est ☉., hoc est maiorem exponentem habet, quam N, cum huius exponens sit 0, illius vero 1. Per exponentes enim cognoscimus, vter character Cossicus maior sit, vel minor. Itaque diuidendus est hic numerus 7 N, per $\frac{1}{6}$, relicto charactere ☉. fitque Quotiens 42.

Quarta pars regulæ Algebræ.

ADDITVR autem tandem in regula. [*Nam vel quotiens ipse erit numerus, qui quærebatur, pretium scilicet radicis in principio positæ, vel certe radix aliqua Quotientis numeri numerum, qui quærebatur, notum reddet, &c.*] Quando, & quæ radix Quotientis manifestet numerum incognitum, qui quæritur, perpulchre docet maior character Cossicus, per cuius numerum diuisio instituitur, vt proprio loco docebimus. In proposito nostro exemplo non est extrahenda vlla radix, sed ipse Quotiens offert numerum, qui quærebatur. Itaque numerus, qui in problemate proponitur inueniendus, est 42. versaturque propositum problema in progressione Geometrica ab 1. incipiente, in qua numerus vnitati proximus est 42. qualis est hæc.

1. 42. 1764. 74088. 3111696. &c.

In hac enim sola apparet, veram esse vltimam æquationem inuentam inter $\frac{1}{6}$ ☉. & numerum 7. Iam vero si huius numeri 42. inuenti sumatur $\frac{1}{2}$. nimirum 21 & $\frac{1}{3}$. videlicet 14. atq; hæ partes ex ipso numero 42. detrahantur, sit reliquus numerus 7. id quod in quæstione proposita desiderabatur.

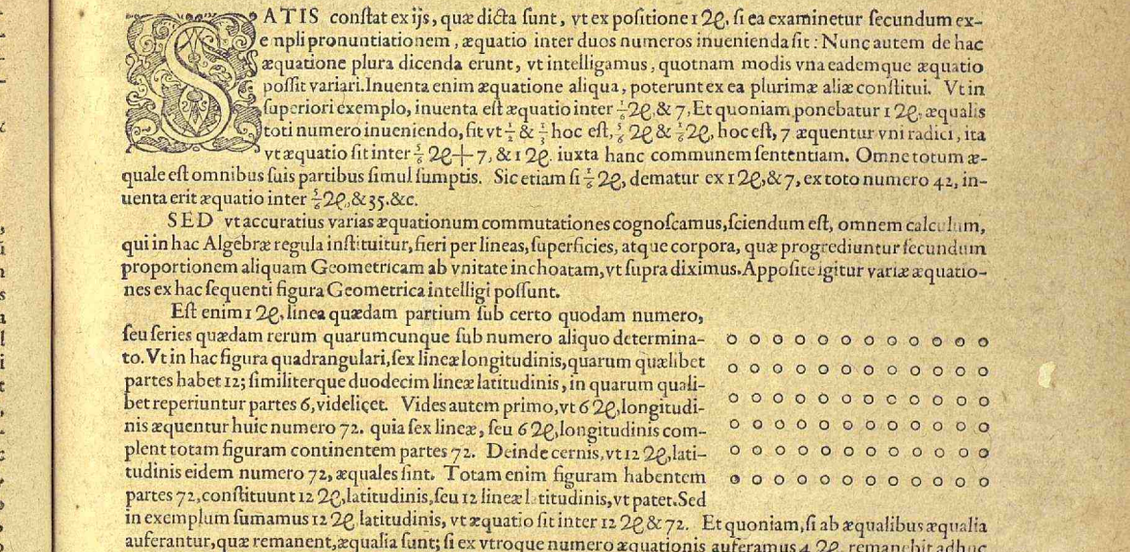
ATQVE hoc modo, inuento numero, qui inquirebatur, & vni radici ponebatur æqualis, institui potest examen, siue probatio, iuxta problematis, vel quæstionis propositæ tenorem. Sed problemate proposito, & explicatione regulæ pingui, vt diximus, Minerua, absoluta, declarandæ sunt deinceps singulæ partes regulæ exquisitius, ac clarius, vt facturos nos paulo ante recepimus.

DE ÆQVATIONVM VARIETATE.

CAPVT IX.

SATIS constat ex ijs, quæ dicta sunt, vt ex positione 1 ☉. si ea examinetur secundum exempli pronuntiationem, æquatio inter duos numeros inuenienda sit: Nunc autem de hac æquatione plura dicenda erunt, vt intelligamus, quotnam modis vna eademque æquatio possit variari. Inuenta enim æquatione aliqua, poterunt ex ea plurimæ aliæ constitui. Vt in superiori exemplo, inuenta est æquatio inter $\frac{1}{6}$ ☉. & 7. Et quoniam ponebatur 1 ☉. æqualis toti numero inueniendo, fit vt $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ hoc est, $\frac{5}{6}$ ☉. & $\frac{1}{6}$ ☉. hoc est, 7 æquentur vni radici, ita vt æquatio sit inter $\frac{5}{6}$ ☉. + 7, & 1 ☉. iuxta hanc communem sententiam. Omne totum æquale est omnibus suis partibus simul sumptis. Sic etiam si $\frac{1}{6}$ ☉. dematur ex 1 ☉. & 7, ex toto numero 42, inuenta erit æquatio inter $\frac{1}{6}$ ☉. & 35. &c.

SED vt accuratius varias æquationum commutationes cognoscamus, sciendum est, omnem calculum, qui in hac Algebræ regula instituitur, fieri per lineas, superficies, atque corpora, quæ progrediuntur secundum proportionem aliquam Geometricam ab vnitate inchoatam, vt supra diximus. Apposite igitur variæ æquationes ex hac sequenti figura Geometrica intelligi possunt.



Est enim 1 ☉. linea quædam partium sub certo quodam numero, seu series quædam rerum quarumcunque sub numero aliquo determinato. Vt in hac figura quadrangulari, sex lineæ longitudinis, quarum quælibet partes habet 12; similiterque duodecim lineæ latitudinis, in quarum qualibet reperiuntur partes 6, videlicet. Vides autem primo, vt 6 ☉. longitudinis æquentur huic numero 72. quia sex lineæ, seu 6 ☉. longitudinis complent totam figuram continentem partes 72. Deinde cernis, vt 12 ☉. latitudinis eidem numero 72, æquales sint. Totam enim figuram habentem partes 72, constituunt 12 ☉. latitudinis, seu 12 lineæ latitudinis, vt patet. Sed in exemplum sumamus 12 ☉. latitudinis, vt æquatio sit inter 12 ☉. & 72. Et quoniam, si ab æqualibus æqualia auferantur, quæ remanent, æqualia sunt; si ex vtroque numero æquationis auferamus 4 ☉. remanebit adhuc æquatio inter 8 ☉. & 72 — 4 ☉. Nam 8 ☉. latitudinis in figura superiori continent partes 48. at 4 ☉. faciunt 24. Sublatis autem 24, ex 72. relinquuntur 48. Similiter, quoniam si æqualibus æqualia addantur, quæ fiunt, æqualia sunt; si vtrique parti huius vltimæ æquationis inter 8 ☉. & 72 — 4 ☉. addamus 10, inueniemus æquationem inter 8 ☉. + 10, & 82 — 4 ☉. Nam 8 ☉. + 10, faciunt 58, & tantundem efficiunt 82 — 4 ☉. vt constat. Quod si rursus vtrique parti huius æquationis inter 8 ☉. + 10, & 82 — 4 ☉. auferamus 4 ☉. remanebit æquatio inter 4 ☉. + 10, & 82 — 8 ☉. Nam ex superiori figura vtraque pars constituit 34. Ita quoque si ex huius æquationis vltimæ parte vtraque detrahamus 10. constituetur æquatio inter 4 ☉. & 72 — 8 ☉. Vtraque enim pars facit 24. Atque hac arte ex vna æquatione inuenta sexcentæ aliæ possunt constitui, non variato valore, seu pretio vnius radicis.

Varie permutationes æquationum.

SVMMA autem huius variationis in hoc præcepto consistit.

Vtrique termino Æquationis idem commune addatur, aut ab vtroque idem commune subtrahatur, aut certe vterque terminus per eundem numerum multiplicetur, diuidaturve. Ita enim remanebit illæsa æquatio sub terminis mutatis.

Præceptum variandi quam-uis æquationem.

IN qua quidem Additione, Subtractione, Multiplicatione, ac Diuisione in memoriam reuocanda sunt documenta illa, quæ de signis istis +, & —, tradidimus. Variatio superiorum æquationum facta est per additionem, & subtractionem eiusdem numeri ab vtroque termino æquationis: Nunc subijciemus alterum

exemplum

exemplum multiplicationis,& diuisionis. Sit igitur ex eadem figura superiori inuenta æquatio inter $3\,2\mathcal{Q}+12$, & $72-7\,2\mathcal{Q}$. Quod si vtrunque terminum multiplicemus per 2, efficiemus æquationem inter $6\,2\mathcal{Q}+24$ & $144-14\,2\mathcal{Q}$. Nam vterque terminus facit 60. Sic etiam, si vtrunque terminum huius posterioris æquationis diuidamus per 6, prodibit æquatio inter $1\,2\mathcal{Q}+4$, & $24-2\frac{1}{2}\,2\mathcal{Q}$. Vt perspicuum est.

DE REDVCTIONE ÆQVATIONIS.

CAPVT X.

QVANDO in solutione alicuius quæstionis ad Æquationem deuentum fuerit, ita vt per numerum, maioris characteris Cossici reliquus Æquationis numerus diuidi non possit, vt regula Algebræ præcipit; reducenda est Æquatio inuenta prius, quam Diuisio instituatur. Tunc autem Diuisio fieri non potest, cum maior character Cossicus, per cuius numerum fieri debet diuisio, vel non solus ponitur in altera parte æquationis, vel etsi solus ponitur, tamen in reliqua quoque parte idem character reperitur, vt ex his exemplis perspicuum fiet. Sit inuenta æquatio inter $9\,2\mathcal{Q}-12$, & 42. Hic vides diuisionem fieri non posse per 9. numerum videlicet maioris characteris Cossici $2\mathcal{Q}$, quia non solum $9\,2\mathcal{Q}$, constituunt alteram æquationis partem, sed $9\,2\mathcal{Q}-12$. Sic quoque, si æquatio fuerit inter $9\,2\mathcal{Q}$, & $72-3\,2\mathcal{Q}$; non poterit diuisio fieri per 9, numerum scilicet huius characteris $2\mathcal{Q}$, quia licet solus hic numerus $9\,2\mathcal{Q}$ occupet alteram partem æquationis, idem tamen character $2\mathcal{Q}$, in altera quoque parte æquationis reperitur. Similiter inuenta æquatione inter $9\,2\mathcal{Q}+12$, & $78-2\,2\mathcal{Q}$, diuisio nulla fieri potest, quod in vtraque parte æquationis reperiatur & character hic $2\mathcal{Q}$, & hic N. Idem iudicium de alijs æquationibus huiusmodi habeto, qualis est inter $1\,\mathcal{Z}-3\,2\mathcal{Q}$, & 108. Item inter $1\,\mathcal{Z}-48$, & $8\,2\mathcal{Q}$. Item inter $108+8\,2\mathcal{Q}$, & $2\,\mathcal{Z}-12\,2\mathcal{Q}+60$, &c. Omnes hæ æquationes, in quibus valor radicis est 12. & similes aliæ, reducendæ sunt ad alias, in quibus maior character Cossicus in altera parte æquationis solus statuatur, & in altera parte amplius non repetatur & in quibus nullus character Cossicus bis ponatur. Fit autem hæc reductio per variationem illam, seu permutationem particularum æquationis, quam in præcedenti cap. descripsimus. Vt æquatio inter $9\,2\mathcal{Q}-12$, & 42, reducitur per restaurationem huius diminuti -12, hoc est, per additionem huius numeri 12, ad vtramque partem, ad hanc inter $9\,2\mathcal{Q}$, & 54. Ita etiam æquatio inter $9\,2\mathcal{Q}$ & $72-3\,2\mathcal{Q}$, per restaurationem huius diminuti $-3\,2\mathcal{Q}$, hoc est, per additionem $3\,2\mathcal{Q}$, ad vtramque partem, reuocatur ad æquationem inter $12, 2\mathcal{Q}$ & 72. Pari ratione æquatio inter $9\,2\mathcal{Q}+12$, & $78-2\,2\mathcal{Q}$, primo per restaurationem diminuti huius $-2\,2\mathcal{Q}$, seu additionem $2\,2\mathcal{Q}$, ad vtramque partem, reducitur ad æquationem inter $11\,2\mathcal{Q}+12$, & 78. Secundo hæc per transpositionem huius additi $+12$, hoc est, per subtractionem 12, ex vtraque parte, reducitur ad æquationem inter $11\,2\mathcal{Q}$ & 66.

Varia æquationes reducenda.

Æquationes ita reducendæ sunt, vt maior character solitarie in vna parte ponatur, &c.

Reductiones variæ æquationum.

RVRSVS æquatio inter $1\,\mathcal{Z}-3\,2\mathcal{Q}$, & 108, reducitur per restaurationem diminuti huius $-3\,2\mathcal{Q}$, ad æquationem inter $1\,\mathcal{Z}$, & $3\,2\mathcal{Q}+108$. vtrique enim parti additæ sunt $3\,2\mathcal{Q}$. Sic etiam æquatio inter $1\,\mathcal{Z}-48$, & $8\,2\mathcal{Q}$, reducitur per restaurationem huius diminuti -48, hoc est, per additionem 48. ad vtramque partem, ad istam inter $1\,\mathcal{Z}$, & $8\,2\mathcal{Q}+48$. Denique æquatio inter $108+8\,2\mathcal{Q}$, & $2\,\mathcal{Z}-12\,2\mathcal{Q}+60$, reducitur primo per restaurationem $-12\,2\mathcal{Q}$, ad æquationem inter $108+20\,2\mathcal{Q}$ & $2\mathcal{Z}+60$. Secundo hæc per transpositionem $+60$, id est, per ablationem 60, ex vtraque parte, reducitur ad æquationem inter $2\,\mathcal{Z}$, & $20\,2\mathcal{Q}+48$. Itaque omnis reductio æquationum, vt expeditior fiat, initium sumere debet à restauratione diminuti, si quod fuerit, hoc est, numerus ille, qui hoc signum $-$ gerit, vtrique parti æquationis addi debet. Deinde transponendus est numerus signum $+$ gestans, ex vna parte in alteram, hoc est, ex vtraque parte est detrahendus. Quæ quidem restauratio, seu additio, & transpositio, seu subtractio, quamuis recte fiat per regulam additionis, & subtractionis, vt ex dictis patet. tota tamen ars reductionis continetur in his duobus præceptis, quorum primum est.

Primum præceptum reductionis.

Quicquid transponitur, mutat signum. Hoc est particula æquationis habens signum $-$, transposita in alteram partem acquirit signum $+$, nimirum additur alteri parti. Particula vero gerens signum $+$, transposita mutat $+$ in $-$, id est, subtrahitur. Quod quidem in omnibus reductionibus præmissis obseruatum est. Quod si particula illa, quæ transponitur, habuerit similem denominationem in altera parte, in quam est transponenda, vsurpandum erit secundum hoc præceptum.

Secundum præceptum reductionis.

Eadem signa subtrahunt, diuersa vero addunt. Hoc est, si particula æquationis transponenda gerens signum quodcunque ex his duobus $+$, $-$, habuerit in altera parte æquationis numerum maiorem eiusdem denominationis cum eodem signo, subtrahendus est numerus illius particulæ ab hoc numero, relinquendumque est idem signum, quod habet numerus, à quo fit subtractio: Vnde inchoanda erit transpositio à minori numero. Si vero particula transferenda habuerit in altera parte numerum eiusdem denominationis cum opposito signo, addendus est numerus illius particulæ huic numero, relinquendumque est idem signum, quod habet numerus, ad quem fit additio. Atque vt vtriusq; regulæ vsus melius intelligatur, reducemus adhuc vnam aut alteram æquationem. Sit æquatio inter $6\,2\mathcal{Q}-10$, & $10\,2\mathcal{Q}-34$. quoniam igitur numeri 10. & 34. habent idem signū $-$, propterea, vt minor 10. transferatur, auferendus est numerus 10, ex 34. atque ita remanebit æquatio inter $6\,2\mathcal{Q}$ & $10\,2\mathcal{Q}-24$. Rursus quia numeri $10\,2\mathcal{Q}$, & $6\,2\mathcal{Q}$, idem habēt signū $+$, idcirco minor $6\,2\mathcal{Q}$, à maiori $10\,2\mathcal{Q}$ auferetur, vt maneat æquatio inter $0\,2\mathcal{Q}$ & $4\,2\mathcal{Q}-24$. Deniq; transponendo -24, erit æquatio inter 24, & $4\,2\mathcal{Q}$. Sit rursum æquatio inter $54+4\,2\mathcal{Q}$, & $1\,\mathcal{Z}-6\,2\mathcal{Q}+30$. Primū quia $+4\,2\mathcal{Q}$, & $-6\,2\mathcal{Q}$, diuersa signa habent, propterea adduntur $4\,2\mathcal{Q}$ ad $6\,2\mathcal{Q}$, vt fiant $-10\,2\mathcal{Q}$. sitque æquatio inter 54, & $1\,\mathcal{Z}-10\,2\mathcal{Q}+30$. Deinde quia 54, & $+30$, idem signum $+$ habent, ideo subtrahuntur 30, à 54, vt maneat æquatio inter 24, & $1\,\mathcal{Z}-10\,2\mathcal{Q}$. Tertio transpono $-10\,2\mathcal{Q}$, vt sit æquatio inter $1\,\mathcal{Z}$, & $10\,2\mathcal{Q}+24$. & sic de cæteris.

ITAQVE

ITAQVE colligitur ex ijs, quæ diximus, totum negotium reductionis in transpositione particularum esse positum; Transpositionem autem istam ex proximè dictis documentis pendere. Oblata enim æquatione aliqua, in qua numerus characteris maioris Cossici non solus vnam partem æquationis constituit, sed ei coniunctus est alius numerus Cossicus minoris denominationis, transferendus est hic in alteram partem, iuxta præceptum quidem primum, si in altera parte, in quam transfertur, non reperiatur numerus eiusdem denominationis: At vero si altera pars æquationis, in quam fieri debet hæc transpositio, habuerit eiusdem denominationis numerum, peragenda est hæc translatio iuxta alterum documentum, quæ omnia in superioribus exemplis obseruata esse vides. Denique cousque continuanda est æquatio, addendo, auferendo, & transponendo, quoad maioris characteris numerus in vna parte solitarius conspiciatur.

Summa reductionis.

VOLO autem studiosum hoc loco esse monitum, hæc duo præcepta solum inuenta esse pro compendio reductionis. Nam qui additionis & subtractionis regula vult esse contentus, potest citra omne incommodum illis carere. Quod etiam nonnullis consulerem, ne hæc præcepta cum præceptis additionis, & subtractionis confundant, id quod sæpe accidere solet, præsertim tyronibus huius artis.

Securior est reductio sine duobus præceptis prædictis.

SED agamus iam de reductione illarum æquationum, quæ inter Minutias reperiuntur. Omnis autem eiusmodi æquatio reducitur ad æquationem integrorum per multiplicationem in crucem. Sit inuenta æquatio inter has Minutias $\frac{3\,2\mathcal{Q}+12}{5} \bowtie \frac{368-198\mathcal{Q}}{12\mathcal{Q}}$. Multiplicentur in crucem, nempe numerato prioris Minutiæ in denominatorem posterioris ducatur, & denominator prioris in numeratorē posterioris; eritque facta æquatio inter $9\,\mathcal{Z}+36\,2\mathcal{Q}$, & $1\,80\,\mathcal{Z}-990\,2\mathcal{Q}$. Hoc est per abbreuiationem characterū, inter $9\,2\mathcal{Q}+36$, & $180\,2\mathcal{Q}-990$. & per abbreuiationem numerorum, inter $1\,2\mathcal{Q}+4$, & $20\,2\mathcal{Q}-110$. Quod si fiat reductio per transpositionem, vt nuper tradidimus, erit eadem hæc æquatio inter $19\,2\mathcal{Q}$, & 114.

Reductio æquationum inter Minutias, & inter numeros Cossicos irrationales, & numeros absolutos inuentam.

SIC æquatio inter $\frac{3\,2\mathcal{Q}+12}{5\,2\mathcal{Q}}$ & $\frac{12\,2\mathcal{Q}-5\,\mathcal{Z}}{2}$, reducitur per multiplicationem in crucē ad hanc inter $8\,2\mathcal{Q}+36$, & $12\,\mathcal{Z}-58\,2\mathcal{Q}$. Quæ si per transpositionem reducatur, erit eadem æquatio inter $66\,2\mathcal{Q}+36$, & $12.\mathcal{Z}$.

QVOD si æquatio inuenta sit inter hanc minutiam $\frac{628}{186+12\mathcal{Q}}$ & quamcunque aliam rem, vt libram, vel vntiam, vel horam, vel gradum, vel minutum, &c. sumenda est hæc res tanquam integrum aliquod, & pro ea vnitas cōstituenda, cui alia vnitas supponatur, vt fiat fractio. Vnde in dato exemplo erit æquatio inter $\frac{628}{186+12\mathcal{Q}}$ & $\frac{1}{1}$ quæ per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 628, & $186+12\mathcal{Q}$.

Demonstratio reductionis æquationum inter minutias.

DEMONSTRATIO reductionis æquationū inter Minutias perfacilis est. Quoniam. n. duę Minutiæ ponuntur æquales, erit eadem proportio numeratoris Minutiæ prioris ad denominatorem eiusdem, quæ numeratoris Minutiæ posterioris ad denominatorem eiusdem. Quare si Minutiæ per crucem multiplicentur, hoc est, numerator prioris Minutiæ in denominatorem posterioris ducatur, & denominator prioris in numeratorem posterioris, nempe primus numerus in quartum, & secundus in tertium, producti erunt numeri æquales: atque adeo Æquatio inuenietur inter illos numeros productos, Quod erat demonstrandum.

QVO pacto autem æquatio inter numerum Cossicum irrationalem, & numerum absolutum, vt inter $\sqrt{\mathcal{Z}}\,24\,2\mathcal{Q}$ & 12. vel inter $\sqrt{\mathcal{Z}}\,10\,\mathcal{Z}$. & 20. reducenda sit, docebimus ad finem cap. 26. vbi dehuiusmodi numeris acturi sumus.

Characteres abbreuiandi sunt vt habeatur numerus absolutus in vna parte æquationis.

SI occurrat tandem æquatio, in qua nullus sit numerus absolutus, abbreuiandi erunt characteres Cossici vt cap. 7. docuimus. Vt æquatio inter $2\,\mathcal{Z}$, & $12\,2\mathcal{Q}$ reducenda est ad æquationem inter $2\,2\mathcal{Q}$, & 12.

SIMILITER æquatio inter $1\,\mathcal{Z}\mathcal{Q}\mathcal{Q}$, & $1\mathcal{S}+35156\,\mathcal{Z}\mathcal{Z}$. reducenda est ad æquationem inter $1\,\mathcal{Z}$, & $12\mathcal{Q}+35156$.

Item æquatio inter $1\mathcal{S}$, & $1\,\mathcal{Z}\mathcal{Z}+35156\,\mathcal{Q}\mathcal{Q}$, reducenda est ad æquationem inter $1\,\mathcal{Z}$. & $1\,2\mathcal{Q}+35156$.

Item æquatio inter $1\,\mathcal{Z}\mathcal{Z}$. & $1\,\mathcal{Q}\mathcal{Q}+35156\,\mathcal{Z}$, reducenda est ad æquationem inter $1\,\mathcal{Z}$. & $1\,2\mathcal{Q}+35156$.

Item æquatio inter $1\,\mathcal{Q}\mathcal{Q}$. & $1\,\mathcal{Z}+35156\,2\mathcal{Q}$, reducenda est ad æquationem inter $1\,\mathcal{Z}$. & $1\,2\mathcal{Q}+35156$. & sic de alijs huiusmodi.

VERVM hæc abbreuiatio non est omnino necessaria, vt in cap. 12. dicemus ante extractiones radicum numerorum Cossicorum simplicium.

Reducenda est æquatio per diuisionem, vt numerus maioris characteris solitarie positus sit vnitas.

POSREMO si facta reductione æquationis, vt maior character Cossicus ponatur solus ex altera parte æquationis, qui maior sit quā $2\mathcal{Q}$, qualis est $\mathcal{Z}$, vel $\mathcal{Q}\mathcal{Q}$ vel $\mathcal{Z}\mathcal{Z}$, &c. diuidendi erunt omnes numeri æquationis per numerum illius characteris Cossici maioris, si non est vnitas; ita vt vnitas ab illo characterе Cossico denominata æqualis sit alteri parti æquationis. Vt si æquatio sit inuenta inter $4\,\mathcal{Z}$, & $8\,2\mathcal{Q}+96$. diuidendi erunt singuli numeri per 4. vt reducatur æquatio ad æquationem inter $1\,\mathcal{Z}$. & $2\,2\mathcal{Q}+24$.

Item æquatio inter $12\,\mathcal{Z}$. & $66\,2\mathcal{Q}+36$. reducenda est per diuisionem ad æquationem inter $1\,\mathcal{Z}$. & $5\frac{1}{2}\,2\mathcal{Q}+3$. &c.

RATIO huius reductionis obscura non est. Cum enim singuli numeri per eundem numerum diuidantur, nempe per numerum maioris characteris Cossici, habebunt Quotientes eandem proportionem, quam numeri diuisi. Quamobrem, quemadmodum inter numeros diuisos, ita & inter Quotientes Æquatio necessario reperietur.

CÆTERVM hæc reductio fiet, si iuxta tenorē regulæ Algebræ diuisio instituatur per numerum maioris characteris, ipso characterе abiecto, retentis tamen characteribus numerorum, qui diuiduntur, vt cap. insequenti dicetur: adeo vt hæc reductio, de qua proxime diximus, superuacanea esse videatur, quandoquidem Diuisio, quæ in regula Algebræ præcipitur, eam nobis exhibeat. Quia tamen alij auctores eam reductionem necessariam esse docent, libuit eam etiam hic explicare, quamuis, vt diximus, eam diuisio iuxta legem regulæ Algebræ, commodissime quoque offerat.

DE

DE DIVISIONE, QVAM PRÆCIPIT *regula Algebræ.*

CAPVT XI.

Explicatio plenior diuisionis, quæ regula Algebræ præcipit.

FACTA reductione æquationis, vbi id res postulat, quemadmodum cap. præcedenti docuimus, præcipit regula Algebræ, vt per numerum maximi characteris Cossici, abiecto charactere, totus reliquus æquationis numerus diuidatur, vna cum characteribus Cossicis. Est autem hæc diuisio compendium quoddam regulæ illius aureæ proportionum, quam trium appellant. Nam si exempli gratia 7 2ℚ. æquales sint huic numero 42. inquirendum est, cui numero 1 2ℚ æqualis sit. Quare iuxta doctrinam regulæ trium, multiplicantur inter se 42, & 1 2ℚ, producunturq; 42 2ℚ, quibus diuisis per 7 2ℚ, prodeunt 6. pro æstimatione vnius radicis. Quando enim Cossicus numerus per numerum Cossicum eiusdem characteris diuiditur, producitur numerus absolutus, vt ex ijs constat, quæ cap. 5. scripsimus; quia nimirum exponentes æquales sunt, ac proinde detracto vno ex altero, remanet 0, exponens numeri absoluti. Hinc est, quod regula Algebræ absolute docet, per numerum maioris characteris Cossici diuidendum esse alterum numerum æquationis. Nam hac ratione idem numerus producitur, qui per proportionum regulam produceretur. Vt ex proposito exemplo constat. Idem enim numerus producitur ex diuisione 42 2ℚ. per 7 2ℚ, qui ex diuisione 42, per 7.

SIMILITER si 12 ☍, æquales sint 66 2ℚ + 36, inquirendum est, cui numero æqualis sit 1 ☍. Quare multiplicantur inter se 66 2ℚ + 36. & 1 ☍, producunturque 66 ℚℚ + 36 ☍: quibus diuisis per 12 ☍, vt iubet regula trium proueniunt 5½ 2ℚ + 3. pro pretio vnius Zensi, seu quadrati. Idem hic numerus producetur, si per 12 ☍ abiecto prius charactere hoc ☍, diuidantur 66 2ℚ + 36. vt constat: propterea ait regula Algebræ, per numerum maioris characteris Cossici diuidendum esse simpliciter reliquum æquationis numerum, ne longior operatio per regulam trium instituatur. Eodem modo si ½ ☍. & 6 2ℚ + 13½. æquales sint, quærendum est, quanta sit æstimatio vnius Zensi vel quadrati. Quod quidem fiet, iuxta legem regulæ Algebræ, diuidendo singulos numeros per ½, numerum scilicet maximi characteris. Qua ratione inuenietur æquatio inter 1 ☍. & 18 2ℚ + 40. hoc est, pretium 1 ☍. erit 18 2ℚ + 40.

Item si æquatio inueniatur inter 3 ☍ℚ. & 600 ℚℚ + 10368 indagandum est pretium vnius zensicubi. quod per regulam trium fiet, si dicatur. Si 3 ☍ℚ. dant 600 ℚℚ + 10368. quid dabit 1 ☍ℚ? Multiplicando enim duos posteriores numeros inter se, producetur numerus 600 CCℚ + 10368 ☍ℚ. quo diuiso per primum numerum, videlicet per 3 ℚℚ fiet Quotiens 200 ℚℚ + 3456. eritque æquatio inter 1 ☍ℚ & 200 ℚℚ + 3456. quæ facilius inuenitur, si singuli numeri huius æquationis inter 3 ☍ℚ. & 600 ℚℚ + 10368. diuidantur per 3. nimirum per numerum maioris characteris, vt ad finem antecedentis cap. scripsimus. Ita enim opus non erit adhibere regulam trium: sed satis erit, vt per numerum maioris characteris, abiecto charactere, singuli numeri alterius partis æquationis vna cum characteribus diuidantur, vt regula Algebræ iubet.

QVOD si diuisor fuerit vnitas denominata à maiore charactere Cossico, non opus est diuisione, quoniam vnitas diuidens nihil noui producit. Vt si 1 ☍, æqualis sit 3 2ℚ + 18 &c. Quare operæ pretium est, vt æquatio reducatur, ita vt numerus maioris characteris sit vnitas, quemadmodum ad finem præcedentis cap. docuimus.

QVOD autem, quando vnitas denominatur à maiore charactere, diuisione non sit opus, liquido constat ex regula trium. Nam in hac æquatione inter 1 ☍. & 3 2ℚ + 18. si dicatur. Quando 1 ☍. dat 3 2ℚ + 18. quid dabit 1 ☍? erit identitas, & nugatio. Nam ex multiplicatione 3 2ℚ + 18. per 1 ☍. fit numerus 3 ℚℚ + 18 ☍. qui diuisus per 1 ☍. facit 3 2ℚ + 18. vt ex lege multiplicationis, atque diuisionis liquet.

DE EXTRACTIONE RADICVM CVIVS *mentionem facit regula Algebræ.*

CAPVT XII.

Quando quotiens indicat pretium radicis.

DOCENDVM est vltimo loco, quando numerus Quotiens Diuisionis numerum ignotum, qui quæritur, patefaciat, & quando radix aliqua Quotientis, & quænam eundem numerum absconditum indicet. Quando igitur, facta reductione characterum Cossicorum, maior character Cossicus fuerit 2ℚ. tunc numerus quotiens continuo numerum, qui quæritur, manifestum facit. Vt si 5 2ℚ, æquales sint 30. facta diuisione 30. per 5. dabit Quotiens nempe 6, pretium vnius radicis; vt ad initium præcedentis cap. dictum est. Immo quotiescunque numerus Cossicus maioris denominationis æquatur numero Cossico proximè minoris denominationis, diuiso numero minoris denominationis per maioris denominationis numerum, dabit Quotiens valorem vnius radicis, etiamsi non sit facta abbreuiatio characterum: quia huiusmodi æquatio per abbreuiationem characterum reducitur ad æquationem inter 2ℚ & N. Vt si 5 ☍. æquentur 30. ☍☍. diuisis 30. per 5. fit Quotiens 6. pro pretio vnius radicis. Nam hæc æquatio reducitur ad æquationem inter 5 2ℚ, & 30. si characteres abbreuientur. Quod etiam ex regula trium manifestum est. Nam si dicatur. Si 5 ☍. dant 30 ☍☍. quid dabit 1 2ℚ? multiplicando 30 ☍☍. per 1 2ℚ. fiunt 30 ☍. quibus diuisis per 5 ☍. fit Quotiens 6. numerus absolutus. Eademque ratio est de cæteris numeris Cossicis collateralibus. Ratio huius rei est, quod in omni progressione Geometrica incipiente ab 1. eadem semper est proportio cuiuscunque numeri ad proxime antecedentem, quæ secundi ad primum, hoc est, radicis ad vnitatem.

Quãdo, & quæ radix sit extrahenda, quãdo alter numerorum æquationis est numerus absolutus.

SI vero maximus character Cossicus æquationis, qui solus ex vna parte æquationis statuitur, maior sit, quam 2ℚ, & numerus absolutus sit in altera parte, extrahenda est ex Quotiente radix, quam ipse character significat. Vt si character sit ☍, extrahenda est radix Zensica, siue quadrata: si ℚℚ, cubica: si ☍☍, Zensizensica: si ☍ℚ, Surdesolida, &c. Quia in huiusmodi æquationibus ex diuisione inuenitur æstimatio vnius zensi, vel cubi, vel zensizensi, &c. Exempli gratia, si æquatio sit inter 2 ☍, & 144 — 12 2ℚ, erit (facta prius diuisione, vt 1 ☍, æqualis sit 72 — 6 2ℚ.) extrahenda radix quadrata ex 72 — 6 2ℚ. Similiter, si æquatio sit inter 1 ☍, & 6 2ℚ + 72, vel 72 + 6 2ℚ, eruenda erit quadrata radix ex 6 2ℚ + 72, vel ex 72 + 6 2ℚ Sic etiam, si æquatio inueniatur inter 5 ☍, & 720. erit, facta diuisione, quærenda radix quadrata ex Quotiente hoc 144. Item si 10 ℚℚ, æquales sint 466560, inuenienda erit, facta diuisione, radix cubica huius Quotientis 46656. & sic de cæteris. Vt autem generaliter sciatur, quænam radix eruenda sit ex quotiente, quando duo numeri Cossici non collaterales inter se æquantur, quorum neuter est numerus absolutus, abbreuiandi sunt characteres, vt æquatio fiat inter N. & numerum Cossicum. Vt si æquatio sit inter 10 ☍ℚ. & 466560 ℚℚ. reducetur ea ad æquationem inter 10 ℚℚ & 466560. Facta ergo diuisione, eruenda erit radix cubica ex Quotiente 46656. Et sic de cæteris. Ratio est, quia per diuisionem inuenitur valor vnius cubi, vel alterius numeri Cossici, ad quem facta est abbreuiatio per characteres. Nam si dicas. Si 10 ℚℚ dant 466560. quid dabit 1 ℚℚ? facies ex multiplicatione secundi numeri in tertium, 466560 ℚℚ. quibus diuisis per 10 ℚℚ fit Quotiens 46656. valor vnius cubi &c.

Quænam radix sit extrahenda, quãdo duo numeri Cossici non collaterales inter se æquantur, quorũ neuter est numerus absolutus.

DENIQVE quando duo numeri Cossici non collaterales inter se æquantur, vt cognoscas, quænam radix, facta diuisione minoris numeri Cossici per maiorem, ex Quotiente sit eruenda, etiamsi characteres non abbreuientur: vide quot denominationes in progressione Geometrica inter propositos duos numeros Cossicos sint interiectæ. Nam si vna tantum est intermedia, extrahenda est radix quadrata: si duæ, cubica: si tres, Zensizensica, &c.

Qualis radix sit extrahenda, etiamsi characteres non abbreuientur.

CÆTERVM qua arte radices ex numeris absolutis sint extrahendæ, copiose satis in Geometria practica exposuimus, nunc vero explicandum est, quonam modo ex numeris Cossicis sint eliciendæ.

Extractio radicum ex numeris Cossicis simplicibus.

SI igitur extrahenda est radix aliqua ex numero Cossico simplici, sumatur proposita radix illius numeri, relicto charactere, ac si absolutus esset. Deinde exponens characteris eiusdem numeri diuidatur per exponentem characteris, à quo radix extrahenda denominatur, inuenieturque exponens characteris, à quo radix quæsita denominabitur. Vt sit inuenda radix quadrata huius numeri 144 ☍. Sumpta radice quadrata ipsius numeri 144. quæ est 12. diuidatur exponens huius characteris ☍, per exponentem characteris ☍, à quo videlicet radix quadrata, quæ quæritur, denominatur nimirum 2. per 2. prouenietenim 1, pro exponente characteris 2ℚ. Est ergo 12 2ℚ. radix quadrata huius numeri 144 ☍. Nam si hic numerus 12 2ℚ, in seipsum multiplicetur, producetur numerus propositus 144 ☍.

RVRSVS sit eruenda radix quadrata ex 144 ☍ℚ. Accepta radice quadrata numeri, nempe 12. diuidatur exponens characteris huius ☍ℚ. nempe 6, per exponentem radicis quadratę, nimirum per 2, reperieturque exponens 3. cuius character est ℚ. Igitur 12 ℚ, radix quadrata est huius numeri 144 ☍ℚ.

SIC quoque radix cubica huius numeri 64 ℚℚ. erit 4 2ℚ. Nam radix cubica numeri huius 64, est 4. & exponente huius characteris ℚℚ, nempe 3, diuiso per 3. exponentem scilicet characteris, à quo radix cubica nomen sumit, producitur vnitas, exponens videlicet huius characteris 2ℚ.

Item radix quadrata huius numeri 25 ☍☍. erit 5 ☍.

Et radix Zensizensica huius numeri 16 ☍☍☍. erit 2 ☍.

Et radix Surdesolida numeri huius 32 ☍☍. erit 2 ☍.

Et radix Zensizensica huius numeri 81 ☍☍. erit 3 2ℚ. &c.

QVOD si vel numerus non habeat radicem, quæ inquiritur, vel ex diuisione exponentium non producatur numerus exponens integer, carebit propositus numerus Cossicus radice illa, quæ desideratur. Vt numerus 25 ℚℚ non habet radicem quadratam, vel cubicam, quia etiamsi numerus 25. habeat radicem quadratam nempe 5. tamen ex diuisione 3. exponentis scilicet huius characteris ℚℚ, per 2, exponentem quadratæ radicis, prouenit numerus 1½, cui nullus character respondet. Rursus etsi ex diuisione 3, exponentis huius characteris ℚℚ, per 3. exponentem radicis cubicæ, proueniat 1, exponens characteris huis 2ℚ. tamen numerus 25. caret radice cubica, &c.

Qui numeri compositi habeant rãdices.

QVOD vero attinet ad extractiones radicum ex numeris Cossicis compositis, & diminutis, sciendum est, tunc solum posse certa via & arte ex eiusmodi numeris extrahi radices, quando tres numeri Cossici æquationis habent exponentes, qui eundem inter se excessum habeant: hoc est, qui sint Arithmetice proportionales. Quales sunt sequentes æqutiones.

1 ☍.	62ℚ + 71.	Exponentes sunt.	2. 1. 0.
1 ☍.	72 — 62ℚ.	Exponentes sunt.	2. 0. 1.
1 ☍.	142ℚ — 48.	Exponentes sunt.	2. 1. 0.
1 ☍☍.	18☍ + 648.	Exponentes sunt.	4. 2. 0.
1 ☍☍.	725 — 48☍.	Exponentes sunt.	4. 0. 0.
1 ☍☍.	433☍ — 41616.	Exponentes sunt.	4. 2. 0.
1 ☍ℚ	200ℚℚ + 3456.	Exponentes sunt.	6. 3. 0.
1 ☍ℚ.	5120 — 160ℚℚ.	Exponentes sunt.	6. 0. 3.

1.☾☾.	800☾☾—156751.	Exponentes sunt.	6. 3. 0.
1.☽☽☽.	2000☽☽+185076881.	Exponentes sunt.	8. 4. 0.
1.☽☽☽.	21465170I—20☽☽.	Exponentes sunt.	8. 0. 4.
1.☽☽☽.	20000☽☽—78461119.	Exponentes sunt.	8. 4. 0.
1.☽ß.	80ß+39609.	Exponentes sunt.	10. 5. 0.
1.☽ß.	7424—200ß.	Exponentes sunt.	10. 0. 5.
1.☽ß.	2000ß—999424.	Exponentes sunt.	10. 5. 0. &c.

Quando exponentes Arithmeticam progressionem seruantes omnes sunt maiores quam 0. abbreuiandi sunt per subtractionem minimi numeri exponentis. Vt hæ sequentes æquationes.

1.C ß.	725B ß—4C☾☾.	Exponentes sunt.	11. 7. 9.
1.C ß.	200☽☽☽+3456ß.	Exponentes sunt.	11. 8. 5.
1.☽ß.	200☽☾☾+14336☽.	Exponentes sunt.	10. 6. 2.

reducuntur ad has.

1.☽☽.	725—4☽.	Exponentes sunt.	4. 0. 2.
1.☽☾☾.	200☾☾+3456.	Exponentes sunt.	6. 3. 0.
1.☽☽☽.	200☽☽+14336.	Exponentes sunt.	8. 4. 0.

Et sic de alijs infinitis dicendum est. Ita enim facile cognoscetur, quænam radix eruenda sit.

Qui numeri Cossici cõ positi non habeat radices.

QVANDO autem exponentes non seruant Arithmeticam proportionalitatem, hoc est, non habent eundẽ excessum, vt si æquatio foret inter 1 ☾☾, & 4☽+16. vbi exponẽtes sunt 3. 2. 0. Vel inter 1. ☾☾, & 10☾☾+24. vbi exponentes sunt 3. 1. 0. nondum est inuenta ars, qua huiusmodi radices certo eruantur; quamuis Cardanus, & Nicolaus Tartalea in quibusdam exemplis singularibus inuenerint æstimationem vnius radicis. Raphael autem Bombellus ex quibusdam etiam æquationibus eiusmodi, & alijs nonnullis putat se inuenisse, quo pacto eruendæ sint radices. Franciscus quoque Vieta dicitur demonstrasse regulam generalem pro eiusmodi radicibus extrahendis: quam quia videre hactenus non licuit, & rationes Bombelli obscuræ valde sunt, atque æquationes eiusmodi, in quibus nimirum plures numeri Cossici quam duo æquantur vni numero Cossico, (qualis est V. g. æquatio inter 1 ☾☾+3☽+72☾ & 34) numero fere infinitæ existunt, & quæ raro in vsum vniunt, patiunturque, ipso teste, non paucas exceptiones, contenti erimus in hac nostra Algebra ijs, quæ facilem, certam, atque exploratam habent scientiam, id est, explicabimus tantummodo extractiones radicum ex numeris Cossicis prioris generis, quando nimirum vnus numerus Cossicus duobus æquatur, exponentesque seruant proportionalitatem Arithmeticam: quippe cum hæ satis sint ad innumera fere numerorum anigmata dissoluenda.

AC primo quidem agemus de extractione radicum ex ijs numeris, quorum exponentes sunt 2 1 0, vel 2. 0. 1, quæ omnes quadratæ sunt. Deinde vero de inuentione radicum illorum numerorum dicemus, quorum exponentes sunt 4. 2. 0. vel 6. 3 0. vel 8. 4 0. vel 10. 5. 0. &c. quæ quidem radices sunt vel Zensizensicæ, vel Zensicubicæ, vel Zensizenzensicæ, vel Zensursolidæ, &c. vt maximi characteres æquationum indicant. Hæ enim æquationes omnes exploratam, ac certissimam habent scientiam, qua earum radices inueniantur.

HAC igitur arte per Michaelem Stifelium nobilem Arithmeticum radices quadratæ eruuntur ex compositis, siue diminutis numeris Cossicis.

Extractio radicis quadratæ ex Cossico numero composito vel diminuto.

1. *Dimidium numeri radicum sume.*
2. *Ad huius dimidij quadratum adde, vel ab eodem subtrahe numerum absolutũ, prout signo + vel — fuerit affectus.*
3. *Ad huius summæ, vel relicti radicem quadratam adde, vel ab eadem subtrahe dimidium numeri radicum, prout radicum numerus signo + vel — fuerit notatus. Nam vltima hæc summa, vel relictum dabit æstimationem, & pretium vnius radicis quadratæ.*

SIT æquatio inuenta inter 1 ☽ & 72—6☾. Facta diuisione 72—6☾, per 1, vt iubet regula Algebræ proditidem numerus, pretium videlicet vnius Zensi, cuius radicem ita inueniemus.

Primum sumo dimidium numeri radicum, nimirum 3.

Deinde ad huius dimidij quadratum, vt ad 9, addo absolutum numerum 72, propterea quod gerit signum +, facioque 81.

Tertio à radice quadrata huius summæ 81, nempe à 9, detraho dimidium numeri radicum, puta 3. Nam numerus radicum signo—affectus est, relinquunturque 6. pro æstimatione radicis quæsitæ. Quod sic probatur. Si 1 ☾, est 6, erunt 6, 6☾, 36, quibus sublatis ex 72, remanent 36, quibus æqualis est quadratus numerus huius radicis 6.

SIT rursus æquatio inuenta inter 1 ☽. & 6 ☾+72. Inuenienda igitur est radix quadrata huius numeri 6☾+72.

Primum capio dimidium numeri radicum, puta 3.

Deinde ad huius dimidij quadratum, vt ad 9, addo 72, propter signum +, quod gerit numerus absolutus, facioque 81.

Tertio ad radicem quadratam huius summæ 81, nimirum ad 9, adijcio dimidium numeri radicum, nempe 3; affectus enim est numerus radicum signo +, efficioque 12, pro pretio radicis. Quod ita confirmatur. Cum 1 ☾, est 12, erunt 6 ☾, 72, quibus additis ad 72, fiunt 144, quibus æqualis est numerus quadratus radicis 12.

SIT

SIT denique inuenta æquatio inter 1 ☽. & 18 ☾—72. Quærenda ergo est radix huius quadrati 18 ☾—72.

Primum accipio dimidium numeri radicum, nimirum 9.

DEINDE ab huius dimidij quadrato, puta ab 81, deduco 72, propter signum—, quod præponitur numero absoluto, relinquunturque 9.

Tertio ad radicem quadratam huius relicti 9, hoc est, ad 3, addo dimidium numeri radicum, vtpote 9. Gerit namque numerus radicum signum +. efficioque 12, pro valore radicis. Quod hac ratione patet. 18 ☾, faciunt 216, si 1 ☾, est 12. ablatis igitur 72, ex 216, remanent 144. quibus æqualis est numerus quadratus radicis inuentæ 12.

Qui numeri Cossici habeant duplicem radicem.

SED hoc loco monendus lector est, huiusmodi numeros Cossicos Diminutos, in quibus numerus absolutus gerit signum—, habere duplicem radicem, quæ æquationi satisfaciat, maiorem scilicet & minorem. Maior inuenitur, vt proxime dictum est. Minor vero habebitur, si radix quadrata illius relicti ex dimidio numeri radicum detrahatur. Vt in dato exemplo postremo, si 3, radix quadrata huius relicti 9, subtrahatur à 9, dimidio numeri radicum, relinquentur 6, pro altera radice, & minore huius numeri Cossici 18 ☾—72. Quod ita constat. 18 ☾, faciunt 108, si 1 ☾, est 6, ablatis igitur 72, remanent 36, quibus æqualis est quadratus numerus huius radicis 6.

Quo pacto tum maior tum minor radix inueniatur.

ITAQVE in huiusmodi numeris liberum erit, tertio loco ad radicem quadratam inuentam ex relicto illo vel addere dimidium numeri radicum, vel eandem illam radicem inuentam ex dimidio numeri radicum subducere. Non tamen semper vtraque radix propositum problema soluet, sed altera tantum, vt in ænigmate 25. cap. 32. manifestum fiet.

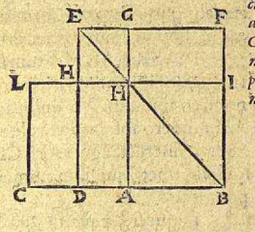
SOLVM numerus ille Cossicus Diminutus habens numerum absolutum signo—affectum. vnicam habet radicem, cuius numerus absolutus quadrato dimidij numeri radicum æqualis est. Huius enim numeri Cossici radix est dimidium ipsum numeri radicum. Vt si æquatio sit inter 1 ☽, & 12 ☾—36. erit radix huius numeri diminuti 12 ☾—36, dimidium numeri radicum, nimirum 6: quia numerus absolutus 36, æqualis est quadrato dimidij numeri radicum. Nam capiatur dimidium numeri radicum, nempe 6, & à quadrato huius dimidij, vt à 36, detrahatur 36, quo facto remanet 0, cuius radix quadrata quoq; est 0. Siue igitur ad hanc radicem addatur dimidium numeri radicum, puta 6, siue ex hoc dimidio radix dicta tollatur, semper inuenietur radix esse 6, quæ æquationi satisfaciat, vt constat.

EX his perspicuum est, triplicem esse numerum Cossicum, cuius radix quæritur. Aut enim compositus est, cuius tam numerus radicum, quam numerus absolutus gerit signum +; Aut Diminutus, cuius vel numerus radicum, vel numerus absolutus signo—est notatus, vt ex tribus exemplis adductis liquido constare potest.

AGE vero, aperiamus rationem huius extractionis radicum Geometricis demonstrationibus, vt non solum experientia, sed etiam certissima scientia cognoscamus, recte hac arte erui radices quadratas ex numeris Cossicis compositis, diminutisve. Repetamus ergo primum exemplum, in quo æquatio erat inter ☽, & N—2☾. vel si restauretur diminutum hoc—2☾, inter ☽+2☾, & N.

Demonstratio extractionis radicum ex Cossicis numeris compositis, diminutisve.

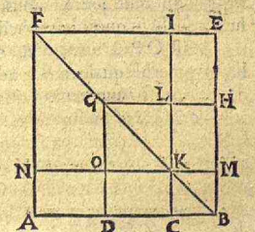
SIT AB. latus Zensi, seu quadrati nobis ignotum, quod quæritur, quo producto ad partes A, sumatur recta AC, numero radicum æqualis, quæ bifariam secetur in D, vt sit AD, dimidium numeri radicum. Super rectam BD, compositam ex latere quadrati ignoti, & dimidio numeri radicum, describatur quadratum DF, cuius Diameter BE. Ducta deinde ipsi DE, parallela AG, quæ diametrum secet in H, ducatur per H, recta IL, ipsi BC, parallela secans DE, in K, occurrensque rectæ, quæ ex C, ipsi DE, parallela ducitur, in L. Quoniam igitur AI, KG, quadrata sunt ex coroll. propos. 4. lib. 2. Eucl. erit rectangulum CH, contentum sub AC, numero radicum, & AH, latere quadrati, quod quæritur, valor, seu pretium radicum; (Numerus enim radicum multiplicatus in valorem radicis producit omnium radicum valorem. Vt existente vna radice 6, valebunt 5 ☾, 30.) atque adeo DH, dimidium pretij radicum, cum [a] æqualia sint rectangula DH, DL. [b] Cum ergo rectangula, DH, HF, æqualia quoque sint, erunt DH, HF, æqualia integro radicum pretio. Et quoniam quadratum AI, æquale ponitur alicui numero absoluto, minus valore radicum: vel quia quadratum AI, vna cum valore radicum, quarum numerus est AC, ponitur æquale alicui numero absoluto, erit gnomon GBK, illi numero absoluto æqualis: qui si addatur ad GK, quadratum dimidij numeri radicum cognitum erit totum quadratum DF, à cuius latere DB, si auferatur AD, dimidium numeri radicum, vt præcipit regula, notum fiet latus AB. Quod est propositum.



[a] *36. primi.*
[b] *43. primi*

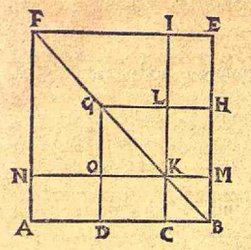
SED sumamus iam secundum exemplum, vbi æquatio erat inter ☽, & 2☾+N.

SIT rursus AB, latus quadrati, quod inquiritur. Et quia ponitur 1 ☽, æqualis 2☾+N, erit numerus radicum minor latere AB. Sit ergo recta AC, numero radicum æqualis, cuius dimidium AD, vel DC. Descripto ex AB, quadrato AE, vna cũ diametro BF, ducatur DG, ipsi AF, parallela secans BF, in G, puncto, per quo agatur GH, ipsi AB, parallela. Deinde ducatur CI, parallela ipsi BE, secãs BF, in K, & GH, in L. Deniq; per K, agatur MN, parallela ipsi AB, secans DG, in O. Eruntque DH, OL, CM, quadrata per coroll. propos. 4. lib. 2. Eucl. Quoniam igitur rectangulum AI, comprehensum sub AF, latere quadrati ignoti, & numero radicum, AC, valor est omnium radicum, vt in præcedenti demonstratione dictum est, ponitur que quadratum AE, æquale valori



radicum, vna cum numero aliquo absoluto, erit rectangulum CE, numero illi absoluto æquale. [a] Et, quoniam AO, DK, æqualia sunt, necnõ [b] & DK, KH; æqualia erũt AO, KH. Addito ergo cõmuni DM, erit rectangulum AM, gnomoni LBO, æquale. Sed AM, ipsi CE, æquale est, hoc est, numero absoluto. [c] (Sunt enim, AK KE, æqualia, additoque communi CM, æqualia fient AM, CE.) Igitur & gnomon LBO, numero absoluto æqualis erit: qui si addatur ad OL, quadratum dimidij numeri radicum cognitum erit quadratum DH, cuius lateri DB, si adijciatur AD, dimidium numeri radicum, vt regula extractionis radicum iubet, notum fiet latus AB. Quod est propositum.

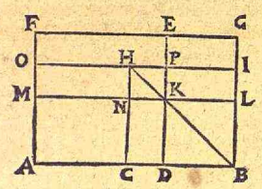
[a] 36. & 43. primi.
[b] 43. primi
[c] 43. primi



SVMAMVS denique tertium exemplum, in quo posita fuit æquatio inter ☐, & 2▭ — N. Vel si restauretur diminutum hoc, — N, inter ☐ + N & 2▭.

SIT numero radicum æqualis recta AB, quæ bifariam secetur in C, & non bifariam in D. Super maiorem patem AD, describatur quadratum ADEF, & perficiatur rectangulum AG. Deinde ex BC, dimidio numeri radicum fiat quadratum BCHI, cuius diameter BH, secet DE, in K, puncto, per quod agatur ipsi AB, parallela LM, secans CH; in N. Producta quoque IH, secet AF, in O, & DE, in P. Eruntque quadrata DL, NP, ex coroll. propos. 4. lib. 2. [d] & rectangulum AH, quadrato CI, æquale. Siue igitur quadratum datum, quod quæritur, sit AE, siue DL, siue CI, semper vera erit æquatio, hoc est, erit ☐, æqualis radicibus minus aliquo numero absoluto, vel 1 ☐, cum aliquo numero absoluto æqualis radicibus. Sit enim primum quadratum propositum AE. Erit ergo rectangulum AG, contentum sub latere quadrati AF, & numero radicum AB, valor omnium radicum: Atque adeo cum valori radicum æquale sit quadratum AE, vna cum numero absoluto, vel quadratum AE, æquale sit valori radicum AG, minus numero absoluto, ex hypothesi; erit DG, rectangulũ numero absoluto æquale. Et quoniam rectangulum DG, rectangulo AK, æquale est, quod latera DE, DB, lateribus DA, DK, æqualia sint, propter quadrata AE, DL: Est autem AK, gnomoni PBN, æquale. [e] (Cum enim æqualia sint complementa CK, KI; addito communi DL, erit CL, ipsi DI, æquale: [f] Sed CL, ipsi AN, æquale est. Igitur & DI, ipsi AN, æquale erit; additoq; communi CK, fiet AK, gnomoni PBN, æquale.) Igitur & DG, hoc est, numerus absolutus gnomoni PBN, æqualis erit. Qui si auferatur, vt præscribit regula extractionis radicum, ex CI, quadrato dimidij numeri radicum, relinquetur notum quadratum NP, cuius latus CD, additum ad AC, dimidium numeri radicum, constituet latus AD, quadrati AE, notum. Quod est propositum.

[d] 36. primi
[e] 43. primi
[f] 36. primi.



SIT iam datum quadratum DL, eodem numero radicum, & numero absoluto eodẽ manentibus; Erit ergo rectangulũ AL, contentum sub numero radicum AB, & latere quadrati BL, æstimatio omnium radicum: Acproinde, cum quadratum DL, vna cũ numero aliquo absoluto, valori radicum æquale sit, vel quadratũ DL, æquale sit valori radicum AL, minus aliquo numero absoluto, ex hypothesi; erit rectangulum AK, numero absoluto æquale. quod cum æquale fit gnomoni PBN, vt ostensum est, erit & numerus absolutus gnomoni PBN, æqualis. quo ablato ex CI, quadrato dimidij numeri radicum, notũ remanebit quadratum NP, cuius latus CD, ex CB, dimidio numeri radicum subtractum, notũ relinquet DB, latus quadrati dati DL. Quod est propositum.

POSREMO datum sit quadratum CI. Erit igitur rectangulum AI, sub AB, numero radicum, & latere BI, comprehensum, pretium radicum propositarum, quibus æquale ponitur quadratum CI, vna cum dato numero absoluto. Vel quibus æquale ponitur quadratum CI, minus numero absoluto. Rectangulum igitur AH, numero absoluto æquale erit. Quo ablato ex CI, quadrato dimidij numeri radicũ, nihil remanebit [g] cum æqualia sint rectangula AH, CI, atq; adeo nihil addendum erit vel subtrahendum à dimidio numeri radicum, sed ipsummet dimidium, numeri radicum, nempe CB, latus erit quadrati dati, vt ante docuimus. Quod est propositum.

[g] 36. primi

Itaque si ☐ æquetur 2▭ — N. vel æquatio sit inter ☐ + N & 2▭ (quod idem est) si radicem numeri, qui relinquitur, subtracto numero absoluto ex quadrato dimidij numeri radicum, addamus dimidio numeri radicum, inueniemus radicem maiorem æquationi propositæ satisfacientem: Si vero eandem ex dimidio numeri radicum subtrahamus, reperiemus radicem minorem æquationis propositæ: Si denique numerus absolutus æqualis sit quadrato dimidij numeri radicum, erit ipsum dimidium numeri radicum radix, quæ inquiritur.

Demonstratio alia extractionis radicũ ex numeris Cossicis cõpositis, dimiutisue.

PETRVS Nonius cap. 4. primæ partis suæ Algebræ adducit alias demonstrationes non minus elegantes, quibus prius inuestigat Geometrice, quinam quadratus numerus, vel Zensus, æqualis sit cuicumque numero absoluto, minus quotcunq; radicibus, siue qui vna cum quotlibet radicibus, æqualis sit cuicunque numero absoluto: Vel qui æqualis sit quotcunque radicibus, vna cum quouis numero absoluto: Vel denique qui sit æqualis quotcunque radicibus, minus quolibet numero absoluto, siue qui vna cum quocunque numero absoluto æqualis sit quotlibet radicibus.

PROPONATVR ergo primum hic numerus Cossicus 55 — 6▭. Inueniendum est quadratum huic numero æquale, atque adeo demonstrandum, recte ex superioribus præceptis, eius radicem quadratam fuisse inuentam. Prius restituatur ablatum illud — 6▭, per transpositionem, vt sit æquatio inter 1 ☐ + 6▭ & 55. Sit numerus radicum recta AB, quæ bifariam secetur in C, & ex C, erigatur perpendicularis CD, æqualis lateri illius quadrati, quod numero absoluto est æquale. (omnis enim numerus, ℮t non quadratus, habet in quantitate continua radicem, seu latus, vt propos. 22. lib. 6. Geometriæ Practicæ docui.) connectatur; recta BD, cui ex CB, producta æqualis abscindatur CE. Dico quadratum rectæ BE, vna cum radicibus propositis, quarum numerus est AB, æquale esse numero absoluto cuius latus quadratum est CD; ac proinde idem quadratum

quadratum rectæ BE, æquale esse eidem numero, cuius latus quadratum CD, minus radicibus propositis, quarum numerus est AB. [a] Quoniam enim quadratum ex BD, æquale est quadratis ex CD, CB; estque quadratum ex BD, quadrato ex CE, æquale; erit quoque quadratum ex CE, quadratis ex CD, CB, æquale. [b] Sed quadrato ex CE, quale est rectangulum sub AE, BE, vna cum quadrato ex CB. Igitur & rectangulum sub AE, BE, vna cum quadrato ex CB, æquale erit quadratis ex CD, CB: ablatoque communi quadrato rectæ CB; æquale erit rectangulũ sub AE, BE, quadrato ex CD. [c] Est autem rectangulũ sub AE, BE, æquale quadrato ex BE, & rectangulo sub AB, BE. Igitur & quadratum ex BE, vna cum rectagulo sub AB, BE, æquale erit quadrato ex CD. Cum igitur (posito quadrato ex BE) rectangulum sub AB, BE; numero radicum, & latere quadrati comprehensum sit valor radicum, liquido constat, quadratum rectæ BE, vna cum radicibus datis, quarũ numerus est AB, æquale esse numero proposito absoluto, cuius latus quadratum est CD, ideoque idem quadratum rectæ BE, æquale esse numero absoluto, cuius latus quadratum est CD, minus valore radicum, quarum numerus est AB. Quod est propositum.

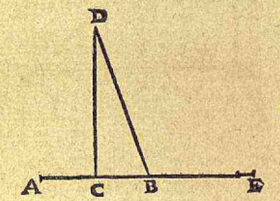
[a] 47. primi
[b] 6. secun.
[c] 3. secun.

EX hac demonstratione manifestum est, præceptum superius recte præscribere modum inueniendi radicem ex numero hoc Cossico 55 — 6▭. Nam si ad quadratum rectæ CB, dimidij numeri radicum, adijciatur numerus absolutus, nempe quadratum ex CD, nota fient duo simul quadrata ex CB, CD, [d] hoc est, quadratum ex BD, atque adeo & quadratum ex CE. Si igitur ex hoc latere CE, auferatur CB, dimidium numeri radicum, cognitum erit latus BE, hoc est, radix quadrata, quæ quærebatur.

[d] 47. primi

SIT rursum Cossicus numerus 6▭ + 55. Exhibendum est quadratum illi æquale, demonstrandumque recte eius radicem esse extractam, iuxta præcepta superiora. Sit rursus recta AB, secta bifariam in C, numerus radicum, & perpendicularis CD, latus quadratum numeri absoluti, & ductæ rectæ BD, æqualis sit recta CE. Dico quadratum rectæ AE, æquale esse radicibus datis, quarum numerus AB, vna cum numero dato absoluto, cuius quadratum latus CD. [e] Quoniam enim quadratum ex BD, atque adeo & quadratum ex CE, quadratis ex CD, CB, æquale est, [f] Est autem quadrato ex CE, æquale quadratum ex CB, vna cum rectangulo sub AE, BE: Erit quoque quadratum ex CB, vna cum rectangulo sub AE, BE, comprehensum quadratis ex CD, CB, æquale; ablatoque communi quadrato rectæ CB, æquale erit rectangulum sub AE, BE, quadrato ex CD, hoc est, numero absoluto proposito. Quare cum & rectangulum sub AE, AB, latere quadrati, (posito quadrato ex AE,) & numero radicum contentum sit radicum propositarum valor, sitque [g] quadratum ex AE, duobus rectangulis sub AE, BE, & sub AE, AB, æquale; perspicuum est, quadratum rectæ AE, æquale esse radicibus, quarum numerus est AB, vna cum dato numero absoluto, cuius latus quadratum CD. quod est propositum.

[e] 47. primi
[f] 6. secun.



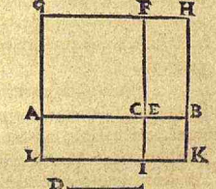
[g] 2. secun.

LATVS autem AE, ita notum fiet ex superioribus, & hac demonstratione. Ad quadratũ rectæ CB, dimidij numeri radicum, addatur numerus absolutus, quadratum videlicet rectæ CD; fientque nota duo quadrata simul rectarum CB, CD, [h] hoc est quadratum ex BD, seu CE. Quod si ad latus CE, cognitum opponatur dimidium numeri radicum, nempe recta AC, nota erit tota AE, quæ quærebatur.

[h] 47. primi

SIT denique numerus Cossicus 18▭ — 56. cui inueniendum est quadratum æquale, & ostendendum, recte inuentum esse eius latus. Sit, vt prius, numerus radicum recta AB, secta bifariam in C; & recta D, latus sit quadratum numeri absoluti; restituaturque diminutum hoc, — 56, vt fit etiam æquatio inter 1 ☐ + 56, & 18▭. Sit autem primum recta D, minor dimidio numeri radicum AC, vel CB. Diuidatur recta AB, in E, ita vt D, sit medio loco proportionalis inter segmenta AE, EB, ex ijs, quæ ex Peletario docuimus ad propos. 13. lib. 6. Eucl. [i] Erit igitur rectangulum sub AE, EB, quadrato ex D, hoc est, numero absoluto proposito æquale. Dico tam quadratum rectæ AE, quam EB, vna cum dato numero absoluto æquale esse radicibus propositis quarum numerus est AB: ideoque tam quadratum rectæ AE, quam EB, æquale esse valori radicum propositarum, minus numero absoluto. Describantur enim ex AE, EB, quadrata AF, EK, perficianturque rectangula AH, BL. Eritque tam rectangulum EH, quam EL, contentum sub AE, EB, numero absoluto, hoc est, quadrato rectæ D, æquale. Posito igitur latere quadrati AE, erit rectangulum AH, contentum sub AB, numero radicum, & AE, latere quadrati, valor radicum propositarum; Manifestum autem est, quadratum AF, vna cum EH, numero absoluto, æquale esse valori radicum AH, ac proinde idem quadratum AF, æquale esse valori radicum AH, minus absoluto numero EH. Posito rursus EB, latere quadrati, erit pretium omnium radicum rectangulum BL, sub AB, numero radicum, & latere quadrati EB, comprehensum, Perspicuum autem est, quadratum etiam BI; vna cum EL, absoluto numero esse valori radicum BL, æquale: ideoque idem quadratum BI, æquale esse valori radicum BL, minus numero absoluto EL.

[i] 17. sexti.

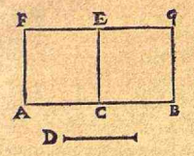


Vtrumque autem latus AE, EB, ita notum efficietur. [k] Quoniam rectangulum sub AE, EB, vna cum quadrato ex CE, æquale est quadrato ex AC, vel CB; si ex quadrato rectæ AC, vel CB, id est, dimidij numeri radicum, auferatur rectangulum sub AE, EB, nempe numerus absolutus, relinquetur notum quadratum ex CE. Si igitur latus hoc CE, cognitum addatur ad AC, dimidium numeri radicum, notum fiet latus AE; Si vero idem latus CE, ex CB, dimidio numeri radicum dematur, notum remanebit latus EB.

[k] 5. secun.

SIT deinde recta D, æqualis dimidio numero radicum AC, vel CB. Dico quadratũ ex AC, dimidio numeri radicum, vna cum numero absoluto dato æquale esse radicibus propositis. Describatur enim ex AC, quadratum AE, compleaturque rectangulum AG, eritque CG, quoque quadratum. Quoniam igitur

recta D, æqualis ponitur rectæ AC, vel CB, erit quadratum CG, æquale numero absoluto; positoque AC, latere quadrati æquationis, erit rectangulum AG, sub latere AC, & numero radicum AB, contentum, æstimatio, siue pretium radicum. Liquido autem constat, quadratum AE, vna cum CG, numero absoluto, æquale esse radicibus AG: ideoque quadratum idem AE, esse æquale valori radicum AG, minus numero absoluto CG.



ITAQVE cum recta D, minor est dimidio numeri radicum AC, vel CB, hoc est, cũ numerus absolutus æquationis minor est quadrato dimidij numeri radicũ, inuenitur duplex radix æquationis. Cũ vero recta D, æqualis est dimidio numeri radicum, id est, numerus absolutus propositus æqualis est quadrato dimidij numeri radicum, est radix æquationis ipsum dimidium numeri radicum. Neque vero recta D, maior esse potest dimidio numeri radicum AC, vel CB. Nam falsa esset æquatio, cum quadratum ipsius D, nempe numerus absolutus, ex quadrato dimidij numeri radicum auferri non posset, atque adeo, radix, secundum præceptum traditum, nullo modo inueniri. Accedit etiam, quod D, si maior esset quam AC, vel CB, non posset esse medio loco proportionalis inter duo segmenta rectæ AB, vt patet ex demonstratione illa, quam ex Peletario apposuimus ad propos. 13. lib. 6. Eucl. Quare inueniri non posset quadratum æquationi satisfaciens.

POSSVMVS cum eodem Petro Nonio artem hanc extractionis radicum ex numeris Cossicis compositis hoc etiam modo proponere.

Alius modus extrahendi radicem quadratam ex numero Cossico composito, vel diminuto.

1. *Ad quadratum numeri radicum adde, vel ab eodem subtrahe quadruplum numeri absoluti, prout signo +, vel −, fuerit affectus numerus absolutus.*
2. *Ad huius summæ, vel relicti radicem quadratam adde, vel ab eadem subtrahe numerum radicum, prout radicum numerus signo +, vel −, fuerit notatus. Nam vltima hæc summa, vel relictum dabit æstimationem, & pretium duplicatæ radicis quadratæ. Quare dimidium ipsius valor erit vnius radicis.*

SIT enim extrahenda radix ex hoc numero Cossico, 72 − 6 ☐. Ad quadratum numeri radicum, vt ad 36, addo 288, quadruplum numeri absoluti; & ex radice quadrata summæ confectæ 324, hoc est, ex 18, detraho numerum radicum, nempe 6; remanentq; 12, pro valore duarum radicum. Pretium ergo vnius radicis erit 6.

RVRSVS ex numero hoc Cossico, 6 ☐ + 72, eruenda sit radix. Ad quadratum numeri radicum, vt ad 36, addo 288, quadruplum numeri absoluti, facioq; 324. Ad huius summæ deinde radicem quadratã, vt ad 18, adijcio numerum radicum, vtpote 6, facioq; 24, pro pretio duplicatæ radicis. Vnius ergo radicis pretium erit 12.

POSTREMO inuenienda sit radix huius numeri Cossici, 18 ☐ − 72. Ex 324, quadrato numeri radicum, subtraho 288, quadruplum absoluti numeri; relinquunturque 36. Ad huius relicti radicem quadratam, nempe ad 6, adiungo 18, numerum radicum, cõficioque 24, pro duplicatæ radicis pretio. Vna ergo radix erit 12. Quod si radicem quadratam relicti illius, nempe 6, detraham ex 18, numero radicum, remanebunt 12, pro valore duplicatæ radicis minoris; (Huiusmodi enim numerus Cossicus duplicem habet radicem, vt dictum est,) Quare vna radix erit 6.

Commoditas huius posterioris modi extracti onis.

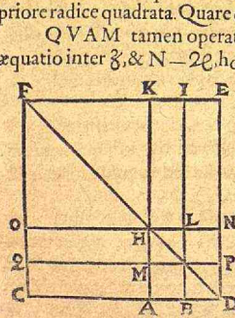
ATQVE hic modus commodissimus est, quando radicum numerus impar est, vel fractus, ne cogamur accipere dimidium illius, quod semper est numerus fractus, &c.

RATIO vero huius operationis hæc est. [a] Quoniam quadratum numeri radicum quadruplum est quadrati, quod ex dimidio numeri radicum gignitur, quemadmodum & numerus absolutus quadruplicatus numeri absoluti quadruplus est, [b] fit vt & summa, quæ fit ex quadrato numeri radicum, & quadruplo numeri absoluti, quadrupla sit summæ, quæ prius in alio modo operationis conficiebatur ex quadrato dimidij numeri radicum, & numero absoluto: [c] efficitur quoque, vt & relictum, quod fit ex detractione quadrupli numeri absoluti ex quadrato numeri radicum, quadruplum sit relicti, quod antea fiebat ex detractione numeri absoluti ex quadrato dimidij numeri radicum. [d] Quam ob rem radix quadrata huius summæ, vel relicti, dupla erit radicis quadratæ prioris summæ, vel relicti. quemadmodum & numerus radicum duplus est dimidij numeri radicum. Siue igitur ad hanc radicem quadratam adijciamus numerum radicum, vel ab eadem subtrahamus eundem, [e] fiet quoque summa, vel relictum duplum summæ, vel relicti, quod fit ex additione dimidij numeri radicum ad radicem quadratam in priore operatione inuentam, vel ex detractione dimidij numeri radicum ex priore radice quadrata. Quare dimidium summæ huius, vel relicti pretium erit radicis æquationi satisfacientis.

[a] Schol. pro pos. 4. lib. 2
[b] 1. quinti.
[c] 5. quinti.
[d] Schol. pro pos. 4. lib. 2.
[e] 1. vel 5. quinti.

QVAM tamen operationem ita quoque Geometricè confirmabimus cum Petro Nonio. Sit primum æquatio inter ☐, & N − 2☐, hoc est, si restauretur diminutum, inter ☐ + 2☐, & N.

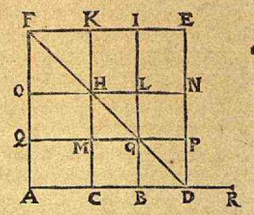
Demonstratio alterius huiusmodi extractionis.



PONATVR AB, latus quadrati ignotum, quod quæritur, quo producto ad partes A, sumatur recta AC, numero radicum æqualis. Sumatur quoque ex eadem AB, ad partes B, protracta, recta BD, ipsi AB, æqualis; & ex tota CD, describatur quadratum CDEF, vna cum diametro DF, perficiaturque figura, vt vides, ita vt similis sit omnino figuræ propos. 8. lib. 2. Euclidis. Erunt igitur, vt in propos. 8. lib. 2. Eucl. demonstratum est BP, ML, AG, GN, OK, quadrata, & gnomon ODK quadruplus rectãguli CG. Quoniam vero AG, ponitur quadratum, cuius latus AB, quæritur, erit rectangulum CM, contentum sub numero radicum AC, & latere quadrati AM, valor radicum omnium. Cum ergo æquatio sit inter ☐ + 2☐, & N, erit rectangulum CG, æquale numero absoluto, atque adeo gnomon ODK, quadruplus numeri absoluti; qui si addatur ad OK, quadratum numeri radicum AC, totum quadratum CE, cognitum erit; ex cuius latere CD, cognito, si tollatur AC, numerus radicum, relinquetur recta AD, dupla lateris AB, quod quæritur, cognita. Quod est propositum.

SIT

SIT deinde æquatio inter ☐ & 2☐ + N. Ponatur AB, latus ignotum quadrati, quod quæritur, & AC, numerus radicum. Producta recta AB, sumatur BD, ipsi BC, & DR, ipsi AC, æqualis; & ex AD, describatur quadratum ADEF, vna cum diametro DF, perficiaturque figura, vt prius. Erit rursum, vt antea, gnomon ODK, quadruplus rectanguli KG, & OK, QI, quadrata. Et quia QI, quadratum ponitur, cuius latus AB, quæritur, erit rectangulum QK, contentum sub QM, numero radicum, ([a] est enim QM, ipsi AC, æqualis) & latere quadrati QF, valor omnium radicum. Quocirca cum sit æquatio inter ☐, & 2☐ + N, erit rectangulum KG, numero absoluto æquale, ac propterea gnomon ODK, numeri absoluti quadruplus; quo addito ad OK, quadratum numeri radicum, notum fiet totum quadratum AE; ad cuius latus AD, cognitum si addatur DR, numerus radicum (posita enim est recta DR, numero radicum AC, æqualis) cognita erit tota recta AR, quæ dupla est lateris AB, quod quæritur. Si enim æqualibus BC, BD, æquales rectæ adiiciantur CA, DR, totæ BA, BR, æquales fient, atque adeo AR, dupla erit ipsius AB. Quod est propositum.

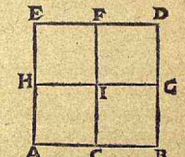


[a] 34. pri.

DENIQVE sit æquatio inter ☐, & 2☐ − N, hoc est, si diminutum restauretur, inter ☐ + N, & 2☐. Repetatur præcedens figura, sitque numerus radicum recta AD, & AB, latus quadrati, quod quæritur, sit primum maius dimidio numeri radicum. Quoniam igitur QI, ponitur quadratum, cuius latus AB, inueniendum est, erit rectangulum AI, contentum sub latere quadrati AB, & numero radicum AD, vel AF, valor radicum. Cum ergo æquatio sit inter ☐ + N, & 2☐, erit rectangulum AG, numerus absolutus, atq; adeo gnomon ODK, ipsius quadruplus, vti prius; qui si ex AE, quadrato numeri radicum demat, remanebit quadratum OK, notum, cuius lateri cognito AC, vel DR, si adiiciatur numerus radicum AD, fiet nota tota AR, quæ dupla est lateris quadrati AB, vt prius est demonstratum. Quod est propositum.

SIT iam BD, latus quadrati inueniendum dimidio numeri radicum minus. eritque rectangulum AP, contentum sub latere quadrati DP, & numero radicum AD, valor radicum. Et quia æquatio est inter ☐ + N, & 2☐, erit rectangulum AG, numerus absolutus, ac proinde gnomon ODK, ipsius quadruplus; qui ablatus ex AE, quadrato numeri radicum relinquit quadratum OK, eiusque latus propterea AC, notum fiet. Quod si AC, ex AD, numero radicum demat, remanebit nota recta CD, quæ lateris BD, dupla est. Quod est propositum.

IAM vero, si quadruplum numeri absoluti æquale fuerit quadrato numeri radicum, erit dimidium numeri radicum latus quadrati, quod quæritur. Sit enim AB, recta numerus radicum secta bifariam in C; describatoque quadrato AD, ducantur rectæ CF, GH, secantes quatuor latera bifariam, & quadratum in quatuor quadrata æqualia. Si igitur AC, dimidium numeri radicum ponatur latus quædrati, erit rectangulum AG, contentum sub latere quadrati AH, & numero radicum AB, valor radicum; ac propterea cum æquatio sit inter ☐ + N, & 2☐, erit CG, rectangulum numero absoluto æquale, & quadruplum eius quadrato AD, ex numero radicum AB, descripto æquale. Si igitur quadruplum numeri absoluti, hoc est, quadratum AD, auferatur ex AD, quadrato numeri radicum AB, remanebit o. quod siue addatur ad AB, numerum radicum. siue ab eo subtrahatur, nota fiet recta AB, quæ dupla est lateris AC. Quod est propositum.



Extractio radicis Zensicensicarum, vel Zensicubicarum, vel Zensizenzensicarum, vel Zensursolidarum, &c.

QVOD vero spectat ad extractionem radicum Zensizensicarum, vel Zensicubicarum, vel Zensizenzensicarum, vel Zensursolidarum, quando nimirum numeri Cossici æquationis, abbreuiatis tamen eorum characteribus, habent exponentes, qui progressionem Arithmeticam constituant vnam ex his. 4. 2. 0. vel 4. 0. 2. vel 6. 3. 0. vel 6. 0. 3. vel 8. 4. 0. vel 8. 0. 4. vel 10. 5. 0. vel 10. 0. 5. &c. in quibus maior character semper cõponitur ex ☐. & alio charactere Cossico, vt ex numeris exponentibus manifestum est: extrahenda est prius radix quadrata, propter characterem ☐. iuxta modum hactenus descriptum, accommodando omnia ea, quæ de numero radicum præcepimus, illi numero, qui affectus est charactere Cossico in illa parte æquationis, ex qua radix eruenda est. perinde ac si æquatio foret inter tres numeros Cossicos characteribus ☐. 2☐. & N. affectos. Deinde ex hac radice quadrata inuenta, siue ea rationalis sit, siue irrationalis, elicienda est radix alia, iuxta reliquam partem characteris Cossici maioris, relicto hoc charactere ☐. (est enim character maior Cossicus compositus) hoc est, eruenda est radix denominata à charactere Cossico, qui in ea parte æquationis cernitur, in qua duo numeri reperiuntur, & qui medius est inter maximum characterem, & minimum, siue N. Vt si æquatio sit inter 1 ☐☐. & 18 ☐ + 648. extrahenda erit radix quadrata ex hoc numero 18 ☐ + 648, propter priorem partem signi Cossici ☐. non aliter, ac si esset æquatio inter 1 ☐. & 18 2☐ + 648. quæ radix est 36. ex qua rursus eruenda est radix quadrata, nempe 6. ob reliquam partem characteris Cossici, nimirum ☐. qui medium locum obtinet inter ☐☐. & N. Igitur 6. erit radix numeri Cossici propositi.

Zensicensica, zensicubicensica, &c.

EODEM modo si sit æquatio inter 1 ☐☐☐. & 5120 − 16 ☐☐. sumenda est prius radix quadrata huius numeri 5120 − 16 ☐☐, & ex hac elicienda radix cubica. Sic etiam, si æquatio habeatur inter 1 ☐☐☐. & 20000 ☐☐ − 78461119. accipienda est primum quadrata radix, & ex hac eruenda deinde radix Zensizensica. Et sic de cæteris.

QVOD autem ex huiusmodi numeris Cossicis extrahatur radix quadrata eodem artificio, quo superius vsi sumus, perspicuum est. Nam maximus character Cossicus, cum sit compositus ex ☐. & alio quodam charactere Cossico siue simplici, siue composito, indicat vnitatem ab eo denominatam esse zensum, seu quadratum alicuius numeri à reliqua parte maximi characteris Cossici denominati, ita vt reliqua illa pars sit tanquam radix prioris partis. Quare cum hæc reliqua pars reperiatur quoque in altera æquationis parte, cuius radix inuestigatur, denominari poterit eius numerus à 2☐, si numerus maximi characteris, nempe vnitas, à ☐. denominetur: atque adeo iuxta præcepta tradita recte ex illo numero æquationis radix quadrata inuenietur. V. g.

In æquatione inter 𝔷ℭ, & ℭ+N. cum hic character 𝔷ℭ. significet zensum vnius cubi, erit vnus cubus radix quadrata illius zensi, ac proinde numerus cuborum in altera parte æquationis, numerus erit radicum eiusdem zensi. Et sic de cæteris. Inuenta autem hac radice quadrata, extrahēda est ex ea radix à reliqua parte maximi characteris Cossici denominata, quia illa radix quadrata est numerus denominatus ab illa reliqua parte, & non absolutus. Quemadmodum qui vult radicem zensicubicam huius numeri 64. inuenire prius debet eius radicem quadratam, nempe 8. Deinde quoniam hæc radix quadrata non est numerus absolutus, sed cubus, cum numerus 64. sit zensus vnius cubi, sumenda erit radicis inuentæ 8. radix cubica, nimirum 2. atque hic numerus radix erit Zensicubica dati numeri 64.

EXEMPLA DVO, IN QVIBVS occurrunt radices surdæ.

SIT æquatio inter 1. 𝔷ℭ. & 800ℭ—156751. Dimidium cuborum, nimirum 400. quadro, efficioque 160000. Detraho 156751. & reliqui numeri 3249. quadratam radicem 57. ad dimidium numeri cuborum, nimirum ad 400. adiicio, efficioque 457. cuius radix cubica dat radicem Zensicubicam quæsitam, quæ surda est. Eius cubus est 457. qui ductus in se facit Zensicubum 208849. qui æqualis est 800ℭ. id est, 365600. minus 156751. vt patet. Idem fere constabit, si per radicem cubicam numeri 457. in numeris inuentam agemus. Radix enim cubica numeri 457. propinqua est $7\frac{7}{10}$. inuenta per appositionem duorum ternariorum cifrarum. Eius cubus est $\frac{456533}{1000}$. & Zensicubus 208422. proxime: qui æqualis est ferme 800ℭ, hoc est, $\frac{365226400}{1000}$. minus 156751. Nam post detractionem reliquus fit numerus $208475\frac{2}{5}$. qui parum differt à 208422. Causa huius inæqualitatis est, quod propinqua illa radix non est vera radix. Felicius ergo æquatio succedit, si operatio per ipsammet radicem surdam instituatur.

ET quoniam numerus 800ℭ—156751. duplicem radicem habet, vt supra diximus, propterea quod numerus absolutus signo — affectus est; maior inuenitur, vt dictum est, nimirum radix cubica numeri 457. minor vero reperietur, si superioris numeri 3249. relicti post detractionem numeri absoluti ex quadrato dimidij numeri cuborum, radicem quadratam 57. ex 400. dimidio numeri cuborum detrahamus. & reliqui numeri 343. radicem cubicam sumamus 7. Huius enim Zensicubus est 117649. qui æqualis quoque est 800ℭ. id est, 274400. minus 156751. vt manifestum est. Itaque maior radix huius numeri 800ℭ—156751. surda est, nimirum radix cubica numeri 457. minor autem rationalis est, nimirum 7. radix videlicet cubica cubi 343.

SIT rursus æquatio inter 1𝔷. & 8℞—5. Dimidium numeri radicum, nimirum 4. quadro, & ex quadrato 16. demo 5. & reliqui numeri 11. propinquam radicem quadratam $3\frac{79}{250}$. (quæ inuenta est per appositionem trium binariorum cifrarum.) addo ad dimidium numeri radicum, vt ad 4. efficioque radicem propinquam $7\frac{79}{250}$. numeri propositi 8℞—5. Eius quadratum est $53\frac{32741}{62500}$. quod fere æquale est 8℞—5. quippe cum 8℞—5. efficiant $53\frac{66}{125}$.

RADIX minor eiusdem numeri 8℞—5. (Habet enim duplicem radicem, propter signum — quod numerus absolutus gerit, vt supra diximus) est $\frac{171}{250}$. quæ habetur, si reliqui numeri superioris 11. radix propinqua $3\frac{79}{250}$. ex 4. dimidio numeri radicum detrahatur. Quadratum radicis $\frac{171}{250}$. est $\frac{29241}{62500}$. quod fere æquale est 8℞—5. Nam 8℞—5. conficiunt $\frac{59}{125}$. qui numerus illum quadratum superat hoc fracto numero $\frac{259}{62500}$. qui minor est, quam $\frac{1}{241}$.

FELICIVS quoque æquatio succedet, si per radices surdas operari velimus. Nam maior radix est 4+√𝔷11. Minor vero 4—√𝔷11. Illius tam quadratum, quam octuplum radicis —5. efficit 27+√𝔷704. hoc est, $53\frac{28}{53}$. proxime. Huius vero tam quadratum, quam octuplum radicis —5. conficit $\frac{25}{53}$. proxime, nimirum 27—√𝔷704. Ratio porro huius operationis per radices surdas intelligetur cap. 23. in algorithmo surdorum numerorum.

Multiplicationes ita formantur.

4 + √𝔷 11	4 — √𝔷 11
4 + √𝔷 11	4 — √𝔷 11
+ √𝔷 176 + 11	— √𝔷 176 + 11
16 + √𝔷 176	16 — √𝔷 176
Summa. 27 + √𝔷 704	Summa. 27 — √𝔷 704.
4 + √𝔷 11	4 — √𝔷 11
8	8
32 + √𝔷 704	32 — √𝔷 704
Demptis 5. remanent	Demptis 5. remanent
27 + √𝔷 704	27 — √𝔷 704

Quando aliquando quæstio aliqua nō soluitur, culpa in Arithmeticū, nō autē in Algebrā trāsferēda est.

Posui duo hæc exempla, vt videas, non minus veram esse regulam Algebræ à nobis traditam in numeris surdis, quam in rationalibus.

IAM vero, si quando æquatio occurrat, quam resoluere nescias, culpa transferenda non est in artem Algebræ, sed in te potius, qui non omnium æquationum scientiam perdidicisti. Verbi gratia. Si incides in æquationem inter 1ℭ. & 3𝔷+2℞+8. & nescias ex hoc numero 3𝔷+2℞+8. extrahere radicem cubicam, culpa erit tua, non autem regulæ Algebræ, quæ docet, si ex illo numero radix cubica extrahatur, quæstioni satisfactum

esse.

esse. Est autem radix cubica prædicta 4. Nam eius cubus est 64. qui æqualis est tribus quadratis, nimirum 48. & duabus radicibus, id est, 8. & octo vnitatibus. Idem iudicium habeto de æquatione inter 1ℭ. & 4𝔷+147. Item inter 1ℭ. & 30℞+133. Quia enim exponentes denominationum non seruant proportionem Arithmeticam, nondum est inuenta ars, qua resolui possint, cum tamen sint solubiles. Nam in vtraque radix valet 7.

SIC etiam, quando occurrunt radices surdæ, quarum doctrinam non perfecte calles, non erit vitio vertendum scientiæ Algebræ, si quæstio proposita maneat adhuc ignota. Id quod in duobus exemplis superioribus perspicuum esse potest, in quibus, vt æquatio proposita explicaretur, opus fuit, per numeros surdos, siue irrationales, operationem instituere.

SÆPENVMERO etiam accidit, vt in quęstionibus nonnullis explicandis requiratur magna doctrina Geometrię, vel alterius cuiuspiam scientię, vt infra, quando varias quęstiones proponemus dissoluendas, perspicuum fiet. Qui ergo in ea doctrina satis non fuerit exercitatus, frustra se ad quæstionis propositę explicationem accinget. Nunquam enim ea scientia destitutus illam expediet. quod quidem non culpa Algebrę, sed ipsius accidere, pro certo tenendum est.

QVEMADMODVM si forte in regula illa aurea, quam regulam Trium dicunt, occurrant numeri surdi, ac irrationales, aut numeri fracti, atque is, qui per eam regulam ratiocinationem instituit, ignarus sit doctrinę illorum numerorum, ac proinde quęstionem propositam soluere nequeat; accusanda non est ipsa regula, sed artifex. Cum enim prędicta regula iubeat multiplicare secundū numerum per tertium, ac productum per primum diuidere, vt Quotiens exhibeat quęstionis solutionem, culpa erit artificis, si operari nesciat per numeros surdos, aut fractos, non autem ipsius regulę. Vt si proponatur hæc quęstio. 2. dant √𝔷3. quid ergo dabit √𝔷12? certum est, eum, qui nesciat multiplicare, ac diuidere radices surdas, quęstionem non posse soluere. Secundus enim numerus √𝔷3. ductus in tertium, id est, in √𝔷12. facit √𝔷36. qua diuisa per primum numerum 2. fit Quotiens √𝔷9. hoc est, numerus 3. Eadem ratione regula Algebrę docet, quid agendum sit in qualibet quęstione proposita, vt ad æquationem aliquam deueniatur: quam etiamsi artifex enodare nesciat, nihil tamen Algebræ regula de sua firmitate, ac robore amittit, sed tota culpa in artificem reiicienda est.

DE MVLTITVDINE REGVLARVM Algebræ, quam alij auctores introducunt;

CAPVT XIII.

VIDISTI hactenus, opinor, studiose lector, vnicam nostram regulam Algebræ perfecte planeque nos docere, qua ratione quamlibet quęstionem propositam euoluere debeamus: quippe quæ præcipiat, vt 1℞, quæ pro numero inuestigando ponitur, vel alium numerum, iuxta quęstionis tenorem examinemus, donec in æquationem aliquam incidamus duorum numerorū: Deinde, æquatione huiusmodi inuenta, ac reducta, vt cap. 10. de reductione æquationis tradidimus, per numerū maioris characteris Cossici reliquū æquationis numerum diuidamus; ac tandē ex Quotiente, radicem æquationi congruentem extrahamus, si opus est. Vt autem te nō lateat, quam varias alij scriptores regulas Algebræ tradant, operæ pretium duxi, eorum regulas hic proponere, vt illis collatis cum vnica nostra, quid inter nostram, & multiplices aliorum regulas intersit, intelligas.

ALII ergo scriptores æquationes illas potissimum considerant, quę inter tres primos terminos progressionis Geometricę ab vnitate incipientis, hoc est, inter Numerum, Radicem, atque Quadratum, siue Zensum, reperiuntur. qui quidem tres termini sex possunt modis inter se æquari. Aut enim æquatio est inter 𝔷, & ℞: aut inter ℞. & N: aut inter 𝔷. & N. quę tres æquationes ab illis simplices dicuntur, quod solum vnus terminus in ijs vni termino æquetur: Aut inter 𝔷+℞. & N: aut inter 𝔷. & ℞+N: Vel (quod idem est) inter 𝔷. & N+℞. Aut denique inter 𝔷+N & ℞; quę tres æquationes ab eisdem compositę vocātur, propterea quod in ijs semper duo termini vni termino adęquantur. Pro his sex æquationibus sex regulas pręscribunt.

Inter quos numeros alij potissimū æquationes obseruent. Tres simplices æquationes. Tres compositæ æquationes.

REGVLA I.

QVANDO reperitur æquatio inter 𝔷 & ℞. diuiso numero signi ℞. per numerum signi 𝔷. Quotiens exhibet pretium 1℞. Vt si 5𝔷. ęquales sint 30℞. diuisis 30. per 5, prodibit Quotiens 6. pro æstimatione vnius radicis. Nam quadratum huius radicis est 36. atque idcirco 5𝔷. faciunt 180. quantum nimirum faciunt 30℞.

Quando æquatio est inter 𝔷 & ℞.

REGVLA II.

QVANDO æquatio reperitur inter ℞. & N. diuiso numero absoluto per numerum signi ℞. procreabitur in Quotiente pretium 1℞. quemadmodum in 1. regula. Vt si 5℞. æquales sint 30. diuisis 30. per 5. exit Quotiens 6. pro valore 1℞. Nam radix 6. quinquies sumpta facit 30.

Quando æquatio est inter ℞ & N.

REGVLA III.

QVANDO inter 𝔷. & N, æquatio deprehenditur, diuiso numero absoluto per numerum signo 𝔷. affectum, habebitur in Quotiente valor 1𝔷. Eius ergo radix quadrata dabit pretium 1℞. Vt si æquatio sit inter 4𝔷 & 144. diuisis 144. per 4. prouenit Quotiens 36. pro valore 1𝔷. Radix ergo quadrata numeri 36. quæ est 6. offeret pretium 1℞. Nam quadratum numeri 6. est 36. quo multiplicato per 4 fit numerus 144.

Quando æquatio est inter 𝔷 & N.

REGV-

REGVLA IV.

Quando æquatio est inter ☖+2☗ & N.

QVANDO æquatio occurrit inter ☖+2☗ & N. multiplicanda est semissis numeri radicum in se, productoque numerus absolutus addendus. Nam si ex huius aggregati radice quadrata dematur semissis numeri radicum, reliquum fiet pretium 1☗. Vt si æquatio constituatur inter 1☖+12☗ & 85. multiplicabimus 6. semissem videlicet numeri radicum, in se, productoque 36. adiiciemus 85. vt fiant 121. Ab huius enim numeri radice quadrata 11. si subducatur semissis numeri radicum, nimirum 6. remanebunt 5. pro valore 1☗. Nam 1☖. est 25. additis autem 12☗, videlicet 60. fit numerus absolutus 85. vt proponitur.

REGVLA V.

Quando æquatio est inter ☖ & 2☗+N.

QVANDO æquatio instituitur inter ☖. & 2☗+N, vel inter ☖. & N+2☗. multiplicanda est semissis numeri radicum in se, & producto numerus absolutus adiiciendus. Nam si ad huius aggregati radicem quadratam addatur semissis numeri radicū, conflabitur æstimatio 1☗. Vt si æquatio ponatur inter 1☖. & 6☗+16. vel inter ☖. & 16+6☗. ducemus 3. id est, semissem numeri 2☗. in se, ac producto 9. adiiciemus numerum absolutum 16. vt fiant 25. Ad huius enim numeri radicem quadratam 5. si addatur semissis numeri radicum, nimirum 3. conflabitur numerus 8. pro pretio 1☗. Nam eius quadratum est 64. qui numerus æqualis est 6☗. id est, 48. vna cum 16. vt patet.

REGVLA VI.

Quando æquatio est inter ☖+N. & 2☗.

QVANDO denique æquatio reperitur inter ☖+N. & 2☗; multiplicanda est semissis numeri radicum in se, & ex producto auferendus numerus absolutus propositus. Nam si ad radicem quadratam reliqui numeri adiicias semissem numeri radicum, vel ex hac semisse eandem rādicem detrahas, conficies pretium 1☗. ita vt eiusmodi æquatio duplicem habeat radicem, maiorem scilicet ac minorem. Vt si proposita sit æquatio inter 1☖+21. & 10☗. ducemus 5. semissem numeri radicum in se, & ex producto numero 25. auferemus numerum absolutum 21. Nam si ad reliqui numeri 4. radicem quadratam 2. addemus semissem numeri radicum, hoc est, 5. efficiemus 7. valorem maioris radicis: Et si eandem radicem 2. subtrahemus ex 5. nimirum ex semisse numeri radicum, reliqua fient 3. pro valore minoris radicis. Nam maioris radicis 7. quadratum est 49. & additis 21. fit numerus 70. qui æqualis est 10☗. At vero minoris radicis 3. quadratum est 9 & additis 21. fit numerus 30. qui æqualis est 10☗. vt liquet.

Quando in æquatione reperiūtur plures, paucioresue ζenſi.

PORRO quando plures, vel pauciores ζenſi, quam 1. in aliqua æquatione occurrunt, diuidendi erunt omnes numeri æquationis per numerum signo ☖. affectum, vt æquatio fiat inter 1☖. &c. quod & nos faciendum esse præcepimus. V.g. si æquatio detur inter 3☖+63. & 30.☗. diuidendi erunt singuli numeri per 3. vt æquatio fiat inter 1☖+21. & 10☗. ac deinde regula 6. vsurpanda. Sic si detur æquatio inter ½☖. & 32☗+8. Vel inter ½☖. & 8+32☗. si numeri singuli diuidantur per ½. inuenietur æquatio inter 1☖. & 6☗+16. vel inter 1☖. & 16+6☗. quæ per 5. regulam explicabitur.

Quo pacto aliæ æquationes ad 6. superiores regulas reuocētur.

HÆ ergo sunt 6. regulæ ab omnibus ferme auctoribus traditæ. Omnes enim aliæ æquationes inter alios numeros Cossicos, qui diuersi sunt à ☖.☗. & N. ad prædictas 6. reducuntur; vt frustra nonnulli scriptores plures regulas præscribant. Nam si huiusmodi æquationes occurrant, in quibus numeri exponentes characterum seruant proportionalitatem Arithmeticam, abbreuiandi erunt characteres, vt supra dictum est, ad eum finem, vt in altera parte æquationis numerus absolutus reperiatur: Deinde obseruanda ea, quæ circa finem cap. 12. de extractione radicis Zenſizenſicæ, Zenſicubicæ, &c. scripsimus: quando videlicet exponentes seruant hanc proportionem Arithmeticam 4.2.0. vel 4.0.2. aut 6.3.0. vel 6.0.3. &c.

Præstātiorem esse vnicam nostram regulam Algebræ 6. aliorū regulis.

QVOD si rem attentius introspicere velimus, facile deprehendemus, vnicam nostram Algebræ regulam longe esse præstantiorem supradictis 6 regulis aliorum: quippe cum in nostra fiat semper reductio æquationis ad 1☖. in vna parte æquationis, ac proinde signa + & —. in altera æquationis parte plene, atque abunde nos instruant, quando fieri debeat additio, & quando subtractio. quod in superioribus 6. regulis non tam clare apparet.

Æquatio simplex, & composita qua.

QVEMADMODVM autem scriptores Algebræ æquationes priorum trium regularum, simplices appellant, trium vero posteriorum regularum æquationes compositas, vt paulo ante diximus: ita quoque nos in ijs, quæ sequuntur, æquationem, quæ inter duos numeros duntaxat occurrit, doctrinæ gratia, simplicem nominabimus, compositam vero eam, quæ inter tres numeros deprehenditur.

QVÆSTIO PROPOSITA VTRVM POSSIBILIS sit, nec ne, an vero inepta, ac nugatoria, quo pacto ex ipsa operatione, quæ per Algebræ regulam fit, cognoscatur.

CAPVT XIV.

Quo pacto cognoscatur, num quæstio sit possibilis, an impossibilis.

QVONIAM in principio huius lib. diximus, regulam Algebræ hanc habere excellentiam, vt in ipso opere nos edoceat, num quæstio, quæ proponitur, solui possit, nec ne: docendum iam paucis erit, qua id ratione fiat. Quotiescunq; igitur in dissoluenda per Algebræ præcepta quæstione aliqua incidimus in æquationem aliquam impossibilem, vel nugatoriam, atque ineptam, pronunciabimus quæstionem solui nulla ratione posse: vel certe esse nugatoriam, & ineptam. quod nonnullis exemplis declarabitur.

1. Quæ-

1. *Quæratur numerus, qui ductus in 3. & hic productus in se, tantum faciat, quantum ex ipso numero in se multiplicato, & ex hoc producto in 5.* *1. quæstio impossibilis.*

PONATVR quæsitus numerus 1☗ quæ ducta in 3. facit 3☗. & hic productus in se, facit 9☖. qui numerus debet esse æqualis ei, qui fit ex 1☗, in se, & ex producto in 5. Fit autem ex 1☗ in se, 1☖. & hic numerus in 5. ductus facit 5☖. Inuenta ergo est æquatio inter 9☖. & 5☖. quæ est impossibilis. Quapropter enunciabimus, quæstionem propositam esse impossibilem.

2. *Diuidatur numerus 12. in tales duas partes, vt ⅓. vnius cum ¼. alterius efficiat 4* *2. quæstio impossibilis.*

PONATVR pro vna parte 1☗ eritque altera 12—1☗. Tertia pars illius est ⅓☗. & quarta pars huius est 3—¼☗. quæ simul efficiunt 3+1/12☗. (Nam ex +⅓☗. & —¼☗. fit —1/12☗. vt ex cap. 4. constat) quæ æqualia esse debent numero 4. Ablatis vtrinque 3. erit æqualitas inter —1/12☗. & 1. Igitur diuisa 1. per —1/12. fiet 12☗. atque hæc est prima pars numeri 12 & altera pars 0. quod est ineptum. Improprie tamen ⅓. illius, nimirum 4. cum ¼. huius, id est, cum 0. facit 4.

QVOD si, positis eisdem partibus 1☗. & 12—1☗. accipiamus ¼. prioris, nempe ¼☗. & ⅓. posterioris, videlicet 4—⅓☗. quæ partes simul conficiunt 4—1/12☗ quod ¼☗. & —⅓☗ faciant —1/12☗. vt ex cap. 4. constat) quæ æqualia non possunt esse numero 4. Ergo neque hoc modo quæstio possibilis est.

3. *Diuidatur numerus 10. in tales duas partes, vt ex ductu vnius in alteram producantur 26.* *3. quæstio impossibilis.*

PONATVR pro vna parte 1☗. eritq; altera 10—1☗. quæ partes inter se multiplicatæ faciunt 10☗—1☖. qui productus æqualis esse debet numero 26. Addito 1☖. vtrinque, fiunt 10☗. æquales 1☖+26: ablatisque 26. vtrinque, erit æqualitas inter 1☖. & 10☗—26. Ex hoc numero, qui æqualis est 1☖. extrahemus radicem quadratam hoc modo, vt supra docuimus. Semissis radicum est 5. huius quadratum 25. ex quo auferri non possunt 26. vt vult signum —. Igitur dicemus, quæstionem solui non posse.

4. *Inueniantur duo numeri, vt ex ductu vnius in alterum fiat numerus triplus summæ ipsorum.* *4. quæstio impossibilis.*

PONATVR vnus 1☗. & alter 2. vnitates. Ex 1☗. in 2. fit numerus 2☗. qui triplus esse debet summæ ipsorum, quæ est 1☗+2. Ergo summa hæc triplicata, nimirum 3☗+6. æqualis debet esse 2☗. quod falsum est. Impossibilis igitur est quæstio proposita, si alter numerorum constituatur 2. Si pro secundo numero positæ fuissent plures vnitates, quam in denominatore proportionis datæ continentur, nimirū 4. vel 5. vel 6. &c. quæstio solui posset. Nam posito secundo numero 4. inueniretur 1☗. esse 12. atque ita duo numeri quæsiti essent 12. & 4. qui inter se multiplicati efficiunt 48. qui numerus triplus est summæ ipsorum, quæ est 16.

5. *Quæratur numerus, qui per 3. multiplicatus producat ipsius quadratum, & summa ex ipso numero, & eius quadrato collecta sit 7.* *5. quæstio impossibilis.*

PONAMVS numerum esse 1☗. quæ multiplicata per 3. facit 3☗. qui numerus æqualis debet esse quadrato ex 1☗. producto, nimirum 1☖. eritque vnius radicis pretium 3. qui numerus per 3. multiplicatus, hoc est, in seipsum, procreat eius quadratum 9. Sed quoniam hic quadratus cum sua radice 3. conficit 12. non autem 7. dices quæstionem esse impossibilem. quod etiam ex ipsis æquationibus constat. Nam 1☗. cum suo producto 3☗ facit 4☗. quæ æquales esse debent 7. atque ita 1☗. erit 7/4. Et quia 1☗. cum suo quadrato, id est, cum 1☖. etiam æqualis debet esse numero 7. erit æquatio inter 1☖+1☗. & 7. hoc est, (ablata 1☗ vtrinque) inter 1☖. & 7—1☗. inuenieturq; 1☗. esse √(29/5 — ½). quæ à priori valde differt. Immo si tam 4☗ quam 1☖+1☗. æquales sunt 7. erūt bis 7. id est, 14. æquales 1☖+5☗. hoc est, æquatio constituetur inter 1☖. & 14—5☗. eritq; 1☗. quæ ab vtraque superiori longe etiam differt. Denique si tam 4☗. quam 1☖+1☗. æquales sunt 7. erit etiam æqualitas inter 4☗. & 1☖+1☗. ablataque vtrinque 1☗. erunt 3☗. æquales 1☖. Pretium ergo 1☗. erit 3. Quocirca cum tam variæ æstimationes 1☗. inueniantur, quæstio solui non poterit, præsertim cum per nullam radicum inuentarum quæstioni satisfiat, nisi priori eius parti per radicem 3.

6. *Quæratur numerus, cuius quadratus cum numero 40. æqualis sit 12. radicibus eiusdem quadrati.* *6. quæstio impossibilis.*

PONATVR numerus esse 1☗. Eius quadratus erit 1☖. Igitur 1☖+40. æqualia sunt 12☗. hoc est, 1☖. æqualis erit 12☗—40. Sumatur semissis numeri radicum, nimirum 6. Et quia ab huius semissis quadrato, id est, ex 36. numerus 40. detrahi non potest, erit quæstio impossibilis.

7. IAM vero si quando accidat, æquationem inuentam esse inter duos numeros Cossicos æquales, eiusdemque denominationis, quæstio solui poterit per quemuis numerum. *7. quæstio possibilis quidē, sed nugatoria.*

Vt si

Quando quæstio per quemuis numerum solui possit.

Vt si quæratur numerus, quo multiplicato per 2. & producto in seipsum ducto, faciat numerum æqualem ei, qui ex numero in seipsum ducto producitur, & ex producto in 4.

PONATVR numerus esse 1☉. Ex 1☉. in 2. fiunt 2☉. & ex 2☉ in se fiunt 4☽. Et quia 1☉ ducta in se gignit 1☽. & ex 1☽. in 4. fiunt 4☽. inuenta erit æquatio inter 4☽. & 4☽. quæ nugatoria est & inepta. Quæstio igitur exerceri poterit in omni numero. Nam V.g. ex 10. in 2. fiunt 20. & ex 20. in se fiunt 400. quantum videlicet fit ex 10. in se, & ex producto 100. in 4.

8 quæstio possibilis, sed nugatoria.

8. Item numerus 10. diuidendus sit in tales duas partes, vt numerus, qui fit ex vna parte in totum numerum, æqualis sit quadrato eiusdem partis, vna cum numero, qui ex eadem parte in alteram ducta procreatur.

PONATVR prima pars esse 1☉ ideoq; altera 10—1☉. Et quia ex priori parte, id est, ex 1☉. in totum numerum 10. fiunt 10☉: Ex eadem autem parte in se fit 1☽. & ex 1☉ in 10—1☉ fiunt 10☉—1☽. quæ addita ad 1☽, fiunt 10☉. quia vt 1☽ addatur ad —1☽. debet fieri subtractio, vt in additione dictum est. Igitur inuenta est æquatio inter 10☉. & 10☉. quæ similiter nugatoria est: fierique potest, quod proponitur, in quolibet numero, quomodocunque in duas partes distributo, vt demonstratum est ab Euclid. lib. 2. propos. 3. Quod si altera pars 10—1☉ ducatur in totum numerū 10. fiunt 100—10☉. Si vero eadem pars in se ducatur, fiunt 100—20☉+1☽. & duæ partes 1☉. & 10—1☉ inter se multiplicatæ faciunt 10☉—1☽. quæ cum 100—20☉+1☽. faciūt 100—0☉. quæ æqualia esse debent 100—10☉. producto scilicet secundæ partis in 10. quæ æquatio nugatoria quoque est.

9. quæstio nugatoria, quamuis possibilis.

9. Sit rursum diuidendus numerus 10. in tales duas partes, vt producti ex toto numero 10. in ipsas partes sint simul æquales quadrato totius numeri.

PONATVR vna pars 1☉. ideoque altera 10—1☉. Ex toto numero 10. in 1☉. & 10—1☉ fiunt 10☉. & 100—10☉. qui numeri simul efficiunt 100. vt ex regula additionis patet. Et quoniam ex 10. in se fiunt quoque 100. erit æquatio inter 100. & 100. quod est ineptum. Quæstio ergo soluitur per quemcunque numerum in quascunque duas partes diuisum, vt ab Eucl. lib. 2. propos. 2. ostensum est.

LIQVET igitur, ex ipsa operatione cognosci posse, num proposita quæstio solui possit, nec ne; an vero sit vana, ac nugatoria, quæ videlicet in omnem numerum conueniat.

DE SECVNDIS RADICIBVS.

CAPVT XV.

Cur excogitatæ sint secundæ radices.

QVÆRVNTVR non raro duo, vel tres, aut etiam plures numeri sub incerta proportione: idcirco postquam pro primo numero posita est 1☉. non videtur commodum pro secundo numero ponere iterum 1☉: & pro tertio etiam 1☉. &c. quia cum 1☉ primo loco posita diuersum plerumque valorem habeat à radice secundo loco posita, itemque à radice tertio loco posita; facile eueniret, vt in operatione exempli radices inter se confunderentur, nisi diuersis characteribus designentur. Quam ob rem excogitatæ sunt radices secundæ, quas Cardanus Quantitates surdas, Petrus Nonius, & alij Quantitates simplices, aut absolutas appellant, notantque hoc modo. 1q. 2q. &c. hoc est, vna quantitas, duæ quantitates, &c. Nos cum alijs appellabimus radices secundas, notabimusque hoc modo, 1A. hoc est, 1☉. secunda distincta ab ea, quæ primo loco posita est 1B, id est, 1☉ secunda distincta à duabus, quæ primo & secundo loco positæ sunt. & sic deinceps. Hac enim ratione facilius secundarum radicum algorithmus explicabitur.

IN numeratione quando numerus duo signa habet, intelligitur numerus cum priore signo ductus in vnitatem posterioris signi. Vt 1☉A, significat 1☉, ductam in 1A. & 3☉A, significat 3☉, ductas in 1A. Sic 1☽A☽, indicat 1☽. ductum in 1A☽. &c.

Additio secundarum radicum.

ADDITIO vero perficitur, si numeri inter se addantur, & character idem secundæ radicis apponatur: quando videlicet secundæ radices sunt eiusdem generis. Vt ex 3A. & 4A, fiunt 7A, atque ex 3B, & 4B, fiunt 7B, &c. Quando vero secundæ radices non sunt eiusdem generis, fit additio per signum additorum +. Vt ex 3A, & 4B, fiunt 3A+4B. Item ex 3☉. & 4.A, fiunt 3☉+4A. &c.

Subtractio secundarū radicum.

SVBTRACTIO quoque, quando secundæ radices sunt eiusdem generis, fit, si numerus à numero subtrahatur, & reliquo numero idem character secundæ radicis apponatur. Vt 3 A, ex 7 A, relinquunt 4A. & 3B, ex 7B, relinquunt 4B, &c. Quando autem secundæ radices sunt diuersæ, fit subtractio per signum subtractorum —. Vt 3A, ex 4B, relinquunt 4B—3A.

Multiplicatio secundarum radicum.

MVLTIPLICATIONES autem ita fiunt. Quando numerus radic.s primæ multiplicandus est cum numero radicis secundæ signatæ solum litera A, vel B, &c. multiplicantur numeri inter se, & eadem signa apponuntur. Vt ex 2☉. in 2A. fiunt 4 2☉A. id est, 4☉ multiplicatæ in 1A. Similiter ex 2A, in 2☉. fiunt 4A☉, hoc est, 4A, multiplicatæ in 1☉. Sic etiam ex 3☽ in 4B, fiunt 12☽B, id est, 12☽. multiplicati in 1B. &c. Sic etiam ex 1☉ in 1A, fit 1☉A, id est, 1☉ multiplicata in 1A. Et ex 1☽. in 1A☽. fit 1☽A☽. hoc est, 1☽. ductus in 1A☽.

QVAN-

QVANDO numerus absolutus in numerum secundæ radicis ducitur, fit numerus secundæ radicis. Vt ex 6. in 3 C, fiunt 18 C. Et ex 7. in 4 B, fiunt 28 B, &c.

QVANDO numerus secundæ radicis ducitur in numerum secundæ radicis diuersæ literæ, ducitur numerus in numerum, productoque eædem literæ apponuntur. Vt ex 3 A, in 9 B, fiunt 27 AB, hoc est, 27 A, multiplicatæ in 1B.

QVANDO numerus secundæ radicis ducitur in numerū secundæ radicis eiusdem literæ, producitur character ☽, præposita tamen eadem litera. Vt ex 3 A, in 4 A, fiunt 12A☽.

QVANDO numerus secundæ radicis ducitur in se quadrate, vel cubice, &c. producitur character ☽, vel ☉. &c. præposita eadē litera. Vt 1 A, in se quadrate, facit 1A☽. hoc est, 1. quadratum secundæ radicis. Rursus ex 1☉A, in 1☉A, fit 1☽A☽. id est, 1☽ primæ radicis ductus in 1☽. secundæ radicis. Item 3 B, in se quadrate faciunt 9B☽. Sic 3 B, in se cubice, faciunt 27 B☉.

QVANDO numerus secundæ radicis ducitur in alium numerum eiusdem radicis secundæ, quæ etiam habet characterem Cossicum, intelligitur primus numerus habere etiam signum Cossicum 2☉. Vt ex 1 A, in 1 A☾ fit 1 A☾. Et ex 3 B, in 4 B☾, fiunt 12 B☽☽.

QVANDO numerus Cossicus simplex, absque litera secundæ radicis, multiplicatur in numerum signatum litera, & signo Cossico, ducitur numerus in numerum, & producto eadem signa apponuntur. Vt ex 2 ☾. in 4 A☽. fiunt 8 ☾A☽. hoc est, 8 ☾ multiplicati in 1 A☽. Item ex 1 ☾ in 1☉A☽. fit 1☽☽A☽. id est, 1☽☽. ductus in 1A☽. Tantum quoque fit ex 1☽A, in se quadratè. Nam ex 1☽. in se fit 1☽☽. & ex 1 A, in se fit 1 A☽.

QVANDO numerus post literam secundæ radicis signum Cossicum gerens ducitur in numerum, qui post eandem literam secundæ radicis gerit quoque signum Cossicum, producitur numerus cum characterē Cossico, quem exponentes characterum dant, cui præponenda insuper est litera eadem secundæ radicis. Vt ex 2 A☽, in 5 A☾ fiunt 10 A☾. Item ex 3 B☽. in 4 B☾. fiunt 12 B☾.

QVANDO numerus post literam secundæ radicis characterem Cossicum gerens ducitur in numerum, qui post characterem Cossicum literam quoque secundæ radicis habet, producitur numerus cum posteriore charactere Cossico, quem insequitur litera secundæ radicis, deinde apponitur character Cossicus productus ex priore charactere Cossico in literam secundæ radicis, ac si haberet signum hoc 2☉. Vt ex 1A☾, in 1☽A, fit 1☽A☽☽. Tantundem quoque fit ex 1☉A☽. in se quadratè. Item ex 3 A☽, in 4 ☾A, fiunt 12☾A☾. id est, 12 ☾ multiplicati in 1 A☾.

Diuisio secundarum radicum.

In diuisione secundarum radicum, fit prius reductio signorum Cossicorum, per subtractionem similium signorum. Vt ex diuisione 8☾A☽. per 4 A☽. reductis signis, diuiduntur 8 ☾ per 4. fitque Quotiens 2 ☾. Sic 8 ☾A☽. per 4 ☾. fit Quotiens 2 A☽.

QVANDO autem diuiditur numerus 2☉. per numerum secundarum radicum, fit minutia in Quotiēte. Vt 2☉ per 4 A, fit $\frac{2☉}{4A}$.

Extractio radicū ex secundis rādicibus.

IN extractione radicum, eruitur radix ex numero, si habet, eique apponitur litera secundæ radicis, reiecto charactere Cossico. Vt radix quadrata numeri 25 A☽. est 5 A. Item radix cubica numeri 27 A☾. est 3 A. Et radix zensizensica numeri 16D☽☽. est 2D.

QVANDO vero numerus non habet talem radicem, vel character Cossicus non est eiusdem appellationis cum radice extrahenda, præponitur toti numero cum litera, & charactere, signum radicale. Vt radix cubica numeri 3A☽. est √☾3A☽. Item radix quadrata numeri 4A☾. est √☽4A☾.

Examen operationū radicum secundarū.

PROBANTVR prædictæ multiplicationes, diuisionesque per progressiones Geometricas ab 1. incipientes. Claritatis autem gratia progressionem duplarum proportionum ascribemus primis radicibus, & progressionem triplarum radicibus secundis. cuiusmodi sunt hæ.

N	2☉	☽	☾	☽☽	ß	☽☾	B ß	☽☽☽	C☾	☽ß	&c.
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	&c.
1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049	&c.

Itaque vt videas, ex 2☉ in 2A, fieri 4 2☉A, id est, 4 2☉, ductas in 1A. resolutæ 2☉, faciunt 4 & 2 A, faciunt 6. at 4. in 6. efficiunt 24. quantum videlicet faciunt 4 2☉. id est, 8 ductæ in 1A, id est, in 3.

DEINDE ex 2A, in 2☉ diximus fieri 4A☉. hoc est, 4A, ductas in 1☉. Et quia 2A, sunt 6. & 2☉, sunt 4. fiunt autem 24. ex 6. in 4. quantum nimirum faciunt 4 A, id est 12. in 1 ☉, videlicet in 2.

PRÆTEREA ex 1. ☉ in 1 A, producitur 1☉A, quia 1☉ est 2. & 1 A est 3. fiunt autem 6. ex 2. in 3. quantum nimirum fit ex 1☉ id est, ex 2. in 1 A, id est in 3.

SIC etiam ex 1 ☽ in A☽, fit 1☽A☽, nimirum 1☽, ductus in 1A☽. Et quia 1☽ est 4. & 1 A☽, est 9. fiunt autem 36. ex 4. in 9. quantum nimirum fit ex 1☽. id est, ex 4. in 1A☽, id est in 9.

RVRSVS ex 3 ☽ in 4 B, facti sunt 12 ☽B, hoc est, 12 ☽. ducti in 1 B. Nam 3 ☽. sunt 12. & 4B, sunt etiam 12. fiunt autem 144. ex 12. in 12. quantum nimirum fit ex 12 ☽. id est, ex 48. in 1 B. id est, in 3.

ITEM ex 6. in 3 C. fiunt 18 C, hoc est, ex 6. in 9. fiunt 54. hoc est, 18 C. Sic ex 7. in 4 B. factæ sunt 28B, nimirum 84. quantum nimirum fit ex 7. in 4 B, id est, in 12.

EX 3 A, in 9 B, procreatæ sunt 27 AB, id est, 27 A, multiplicatæ in 1 B. Nam 3 A, sunt 9. & 9 B, sunt 27. Fiūt autem 243. ex 9. in 27. quantum nimirum fit ex 27 A, id est, ex 81. in 1 B, id est, in 3.

ITEM ex 3 A, in 4 A, fiunt 12 A☽, hoc est, 12 ☽. secundæ radicis. Nam 3A, sunt 9 & 4A, sunt 12. Fiunt autem 108. ex 9. in 12. quantum nimirum faciunt 12☽. secundæ radicis.

PRÆTEREA ex 1 A, in se quadrate fit 1 A☽. hoc est, 1☽ secundæ radicis. Item 3 B, in se quadrate faciunt 9B☽. id est, 9☽. secundæ radicis. Nam 3B, sunt 9. at ex 9. in 9. fiunt 81. nimirum 9☽. secundæ radicis. Item ex 1☉A, in 1☉A, fit 1☽A☽, id est, 1☽. primæ radicis ductus in 1☽. secundæ radicis. Nam 1☉A, significat 1☉. primam ductam in 1. radicem secundam, id est, 2. ducta in 3. hoc est, 6. Fit autem ex 6. in 6. numerus 36. quantum

nimirum fit ex 1☗. primæ radicis, id est, ex 4. in 1. quadratum secundæ radicis, nimirum in 9. Sic 3B, in se cubice faciunt 27 B☾☾, id est, 27☾☾ secundæ radicis. Quia 3B, sunt 9. & 9. in se cubice faciunt 729. quantum videlicet faciunt 27☾☾ secundæ radicis.

POST hæc, ex 1A, in 1A☗, fit 1A☾☾, hoc est, cubus secundæ radicis, nimirum 27. Nam 1A, valet 3, & 1☗. secundæ radicis 9. Liquet autem ex 3. in 9. gigni 27.

ITA quoque ex 3B, in 4B☾☾. fiunt 12B☗☗. hoc est, 12☗☗. secundæ radicis. Nam 3B, sunt 9. & 4☾☾ secundæ radicis 108. Fiunt autem 972. ex 9. in 108. quantum videlicet faciunt 12☗☗. secundæ radicis.

AMPLIVS ex 2☾☾. in 4A☗. fiunt 8☾☾A☗. hoc est, 8☾☾ multiplicati in 1☗ secundæ radicis. Nam 2☾☾ sunt 16. & 4☗ secundæ radicis 36. Fiunt autem 576. ex 16. in 36. quantum nimirum faciunt 8☾☾. id est, 64. multiplicati in 1☗. secundæ radicis, videlicet in 9. Item ex 1☾☾. in 12☾A☗ fit 1☗☗A☗. id est, 1☗☗. ductus in 1☗ secundæ radicis. Nam 1☾☾. est 8. & 12☾A☗. id est, 12☾ ducta in 1☗ secundæ radicis, est 18: Fiunt autem 144. ex 8. in 18. quantum scilicet facit 1☗☗, nimirum 16. ductus in 1☗. secundæ radicis, id est, in 9.

ITEM ex 2A☗. in 5A☾☾. fiunt 10A☗. Nam 2☗. secundæ radicis sunt 18. & 5☾☾ secundæ radicis sunt 135. Fiunt autem 2430. ex 18. in 135. quantum scilicet faciunt 10☗. secundæ radicis. Item ex 3B☾. in 4B☾☾, fiunt 12B☗. Nam 3☗ secundæ radicis faciunt 27. & 4☾☾ secundæ radicis faciunt 108. Fiunt autem 2916. ex 27. in 108. ac tantundem faciunt 12☗. secundæ radicis.

POSTREMO ex 1A☾☾. in 1☗A, fit 1☗A☗. hoc est, 1☗. ductus in 1☗☗. secundæ radicis. Nam 1☾☾ secundæ radicis est 27. & 1☗ est 4. Fiunt autem 108. ex 27. in 4. & ex 108. in 12☾ secnndam, id est, in 3. fiunt 324. ac tantundem fit ex 1☗. in 1☗☗. secundæ radicis, hoc est, ex 4. in 81. Quod autem ex 12☾A☗, in se quadrate fiat quoque 1☗A☗☗ sic perspicuum fiet. Numerus 12☾A☗. significat 12☾ primam, id est, 2. ductam in 1☗. secundæ radicis, id est, in 9. quæ multiplicatio facit 18. At ex 18. in 18. fit numerus 324. qui æquialet numero 1☗A☗☗. hoc est, numero producto ex 1☗. id est, ex 4. in 1☗☗. secundæ radicis, hoc est, in 81. Similiter ex 3A☗. in 4☾☾A. fiunt 12☾☾A☾☾. Nam 3☗. secundæ radicis sunt 27. & 4☾☾A. (id est, 4☾☾ ducti in 1A, vel in radicem secundam, hoc est, ex 32. in 3.) faciunt 96. Fiunt autem 2592. ex 27. in 96. Ac tantundem faciunt 12☾☾A☾☾. hoc est, 12☾☾ multiplicati in 1☾☾ secundæ radicis, nimirum ex 96. in 27.

IAM vero ex diuisione 8☾☾A☗. per 4A☗. produci Quotientem 2☾☾. eodem modo probabimus. Nam 8☾☾A☗. (id est, 8☾☾ multiplicati per 1A☗. hoc est, 64. per 9.) faciunt 576. qui numerus diuisus per 4☗ secundæ radicis, nimirum per 36. facit Quotientem 16. hoc est, 2☾☾. Item ex diuisione 8☾☾A☗. per 4☾☾. gigni Quotientem 2A☗. perspicuum etiam est. Nam 8☾☾A☗ (id est, 8☾☾. ducti in 1A☗. videlicet 64. in 9.) sunt 576. qui numerus diuisus per 4☾☾, id est, per 32. facit Quotientem 18. nimirum 2☗. secundæ radicis.

PARI ratione, numeri 25A☗. radicem quadratam esse 5A. manifestum quoque est. Nam 5A, sunt 15. at ex 15. in 15. fit numerus 225. cui æquales sunt 25☗ secundæ radicis. Non aliter ostendemus, 3A, esse radicem cubicam numeri 27A☾☾. Nam 3A, sunt 9. at ex 9. in se cubice fiunt 729. videlicet 27☾☾ secundæ radicis. Ita quoque numeri 16D☗☗. radix Zensizensica erit 2D. quia 2D, sunt 6. & ex 6. in se Zensizensice fiunt 1296. nimirum 16☗☗ secundæ radicis.

LIBVIT omnes has operationes secundarum radicum examinare per progressiones Geometricas, vt earum veritas omnibus constaret: quia de illis fortasse non nemo dubitare posset, cum earum ratio sit paulo obscurior, quam illa operationum numerorum Cossicorum. Vsus porro secundarum radicum explicabitur in ænigmatibus per regulam Algebræ dissoluendis.

DE NVMERIS IRRATIONALIBVS, siue surdis.

CAPVT XVI.

Irrationales numeri, siue surdi, qui.

NVMERI irrationales, siue surdi sunt radices numerorum, quæ exprimi non possunt numeris, ac proinde neque audiri, ob quam causam radices surdæ sunt appellatæ, signanturque hoc modo. ☗. ☾☾. ☗☗. ☗B. ☗☾☾. &c. vt ad finem cap. 3. declarauimus. Vt ☗10. hoc est, radix quadrati numeri 10. dicitur surda, vel irrationalis, quia nullus numerus dari potest, siue integer sit, siue integer cum fracto, qui in se quadrate multiplicatus producat 10. De integro manifestum est. Nam 3. in se ductus producit 9. numerum minorem quam 10. At 4. in se multiplicatus gignit 16. numerum maiorem, quam 10. atque idcirco neque 3. neque 4. ideoque neque vllus numerus minor quam 3. neque maior quam 4. radix quadrata esse potest numeri 10. De integro cum fracto res etiam clara est. Radix enim illa deberet esse inter 3. & 4. Sed quamuis inter 3. & 4. infiniti sint fracti, qui cum 3. constituant integrum cum fractis, vt $3\frac{1}{2}$. $3\frac{1}{3}$. $3\frac{1}{5}$. $3\frac{5}{7}$ $3\frac{9}{11}$. &c. nullus tamen eorum in se ductus quadrate producere potest 10. numerum integrum, vt in Lemmate ad finem defin. 8. lib. 5. Euclid. demonstrauimus. Sic etiam ☾☾ 10 irrationalis est. & ☗☾☾100. &c.

DE hisce numeris nunc agendum est, vt plurimæ quæstiones, in quibus numeri irrationales interuéniunt, queant explicari. Res quidem est non paucis difficultatibus inuoluta, sed quæ tamen plane intelligatur, si modo vehemens, ardensque studium adhibeatur. Quod si quis ad hanc rem perfecte intelligendam minus idoneus reperiatur, is ne desperet omnino: quippe cum sine hac cognitione innumerabiles pene quæstiones per Algebræ regulam enodari queant. Quocirca, omissa ad breue tempus tractatione hac numerorum irrationalium, quæ 13. capitibus continetur, conferre se poterit ad cap. 29. & 30. vbi innumerabilia pene ænigmata scitu iucundissima, sine cognitione numerorum irrationalium, enodata inueniet. Deinde postquam se aliquamdiu in Algebræ quæstionibus exercuerit, regredi poterit ad tractationem hanc numerorum irrationalium perdiscendam.

SOLET

Vtrum rationales dicendi sint numeri, nec ne.

SOLET ante omnia à nonnullis disputari, an numeri irrationales vere dicendi sint numeri, nec ne. Cum enim neque integri numeri sint, neque fracti, vt paulo ante diximus, neque certam proportionem, quæ numeris exprimi possit, habeant ad integros numeros, aut fractos, non videntur esse numeri dicendi, Quia tamen sub regulam cadunt, censendi erunt aliquo modo esse numeri. Nam ☗10. in se multiplicata gignit numerum 10. sicut radix quadrata numeri 9. producit 9. Item ☗3. in ☗12. procreat ☗36. hoc est, 6. quemadmodum idem numerus 6. fit ex 2. in 3. vt ex algorithmo numerorum irrationaliū, de quo mox agemus, constabit. Habent autem numeri irrationales cum numeris fractis quandam affinitatem. Quemadmodum enim inter quosuis duos numeros integros cadunt infiniti numeri fracti, vt hic apparet, vbi inter 2. & 3. cadunt omnes hi numeri fracti.

$2\frac{1}{2}$. $2\frac{1}{3}$. $2\frac{2}{3}$. $2\frac{1}{4}$. $2\frac{2}{4}$. $2\frac{3}{4}$. $2\frac{1}{5}$. $2\frac{2}{5}$. $2\frac{3}{5}$. $2\frac{4}{5}$. $2\frac{1}{6}$. $2\frac{5}{6}$. &c.

ita quoque inter quoslibet duos numeros integros cadunt infiniti numeri irrationales. Vt inter 2. & 3. cadunt omnes hi.

☗5. ☗6. ☗7. ☗8. ☾☾9. ☾☾10. ☾☾11. ☾☾12. ☾☾13. ☾☾14. ☾☾15. ☾☾16. ☾☾17. ☾☾18. ☾☾19. ☾☾20. ☾☾21. ☾☾22. ☾☾23. ☾☾24. ☾☾25. ☾☾26. ☗☗17. ☗☗18. ☗☗19. ☗☗20. ☗☗21. ☗☗22. ☗☗23. &c.

Tam enim singuli illi fracti, quam hi surdi singuli maiores sunt quam 2. minores autem quam 3. vt liquet.

Duo genera radicū surdarum, simplex, & composita.

AFFERVNTVR ab auctoribus duo genera radicum surdarum. Quædam enim sunt simplices, vt ☗. alicuius numeri non quadrati. ☾☾ alicuius numeri non cubi. ☗☗ numeri alicuius non zensizensi. ☗B alicuius numeri non surdesolidi, atque ita de alijs radicibus numerorū progressionis Geometricæ ab 1. incipientis, quorum radices numeris exprimi non possunt, atque has radices simplices vocant nonnulli numeros mediales, propterea quod per illos reperiuntur media proportionalia inter duos numeros, vt cap. 21. dicemus. Aliæ radices surdæ sunt compositæ per interposita signa +. & −. quarum duo item genera ab auctoribus describuntur. In primo continentur illæ, quas dicunt Ligatas, quando nimirum intelligimus summam ex pluribus radicibus; vel ex vna radice, pluribusue, atque ex numero aliquo, vel ex numero Cossico, aut pluribus collectā. Vt cum per hunc numerum ☗9+☗4. intelligimus 5. vnitates, summam videlicet ex 3. radice zensica numeri 9. & ex 2. radice zensica numeri 4. collectam, dicitur numerus ille radix Ligata, quæ æquialet numero 5. Sic etiam Ligata radix erit ☗7+☗4+3. quæ æquialebit huic ☗7+5. Significamus enim ad ☗7. additum esse numerum 5. Eodem modo radix Ligata erit, ☗3+2☾. Denotamus enim 2☾ esse additas ad ☗3. Denique Ligata radix erit ☗49−☾☾27. Item ☾☾100−☗9. In priori namque intelligimus ex ☗49. hoc est, ex 7. ablatam esse ☾☾27. id est, 3. atque ita pretium eius erit 4. In posteriori autem volumus ex ☾☾100. subtrahi ☗9. nimirum 3. Sed nos hasce radices Ligatas nominabimus deinceps numeros irrationales compositos, vel diminutos. Immo, vt breuitati consulamus, appellabimus deinceps etiam numeros diminutos, plerumque compositos. Alterum genus compositarum radicum complectitur radices surdas, quæ Vniuersales dicuntur: quando videlicet intelligitur radix alicuius radicis Ligatæ, vel numeri compositi, diminutiue. Vt huius numeri compositi, 22+☗9. radix Vniuersalis est 5. Est enim sensus, vt ad 22. addatur radix zensica 9. quæ est 3. & aggregati 25. radix sumatur, quæ est 5. Eodem pacto, si inuertantur particulæ numeri eiusdem, vt fiat numerus ☗9+22. erit eius radix Vniuersalis eadem, nimirum 5. Nos radices has Vniuersales vocabimus simpliciter radices numerorum irrationalium compositorum, aut diminutorum, ac propterea huiusmodi numeris præfigemus signum radicale ☗. vel ☾☾. atque vt significemus, illud ad totum numerum compositum referri, includemus numerum compositum inter duas parentheses, hoc modo. ☗(22+☗9.) vel sic, quod idem est, ☗(☗9+22.) Alia exempla huiusmodi radicum sume hæc. ☗(☗85+12☾.) Item ☗(48+12☾.) Item ☗(☗9+☗4)+☗(11+☗25.) Est enim sensus huius posterioris radicis, vt sumatur summa conflata ex ☗9 & ☗4. nimirum ex 3 & 2. quæ est 5. & ad hanc summam adiiciatur radix aggregati ex 11. & ☗25, hoc est, aggregati 16. quæ est 4. vt tota summa fiat 9. ciusque radix 3. Quod si inuertantur duo illi numeri compositi hoc modo. ☗(11+☗25.)+☗(☗9+☗4) variabitur sensus, quia signum radicale ☗. in principio positum videtur referendum esse ad totum illud, quod sequitur: ita vt 11. sumantur cum 5. radice 25. vt fiant 16. quibus addantur ☗9. & ☗4. nimirum 5. vt fiat tota summa 21. ciusque radix ☗21. quæ multum à priori, quæ erat 3. differt. Denique huius numeri ☗(7+☗48) radix erit 2+☗3. Nam hic numerus in se ductus producit 7+☗48. vt ex sequentibus patebit. Est & aliud genus radicis apud scriptores nonnullos, quam Distinctam dicunt, in qua videlicet particulæ seorsum accipiuntur, nō autem earū summa. Vt hæc radix, ☗16+☗9. quando particulæ per se sumuntur, vt 4. & 3. non autem coniunctim, vt 7. quia sic esset radix Ligata, quam nos simpliciter numerum irrationalem compositum nominauimus, dicitur radix Distincta: & multum differt à Ligata. Nam si accipiatur, tanquam Ligata, & in se ducatur, fiet numerus 49. At vt Distincta, fient numeri 16. & 9. qui simul efficiunt 25. duntaxat. Verum propriis in locis declarabimus, quisnam sensus sit harum radicum. Varie enim hac de re auctores loquuntur. Et de eisdem plura inuenies in cap. 24.

Numeri mediales qui.

Radix ligata qua.

Numerus irrationalis compositus, vel diminutus qui.

Radix Vniuersalis, qua.

Radix tocius numeri compositi, diminutiue, qua.

Radix Distincta, qua.

DE REDVCTIONE RADICVM SIMplicium ad eandem denominationem.

CAPVT XVII.

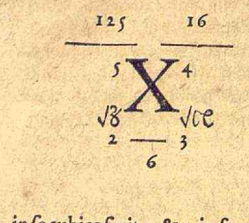
Qua ratione diuersæ radices ad eandē denominationem reuocentur.

VT radices surdæ simplices inter se possint multiplicari, ac diuidi, necesse est illas, si diuersæ sint denominationis, ad eandem denominationem reducere. quæ reductio eodem fere modo fit, quo minutiæ diuersorum denominatorum ad eundem denominatorem reuocantur. Positis enim signis radicalibus sub numeris, ad quos pertinent, multiplicandi sunt ipsi numeri in signa radicalia per cruçem, vt noui numeri procreentur: Deinde signa ipsa inter se addenda, hoc est,

eantur.

eorum exponentes inter se multiplicandi quoque, vt signum commune, vel exponens signi communis producatur. V.g. hæ duæ radices √3.& √cc4. ita ad idem signum radicale reuocabuntur. Positis numeris, ac signis vt dictum est, & figura indicat, multiplicandus est numerus 5. cubice, propter signum cc, vt fiat nouus numerus 125. At numerus 4. zensice propter signum z, vt gignatur nouus numerus 16. Deinde addendum signum z. ad cc, vt fiat signum zcc. cuius nimirum exponens est 6. procreatus ex ductu 2. exponentis z in 3. exponentem cc, vt cap. 2. docuimus. quod signum productum zcc, vtrique numero prius producto præfigendum est: ita vt √5.& √cc4. reducta sint ad √zcc125. & √zcc16. Quo facto, erit √zcc125. æqualis √5.& √zcc16. æqualis √cc4. Nam √5. est √zcc numeri 125. propterea quod √5. in se quadrate efficit 5. & 5. in se cubice facit 125. Eadem ratione √cc4. est √zcc numeri 16. propterea quod √cc4. in se cubice facit 4. & 4. in se quadrate facit 16. quod etiam inde patet. Quoniam √cc, multiplicans √3. & 5. produxit √zcc. & 125. [a] erit eadem proportio √zcc. ad 125. quæ √3. ad 5. Sic quoque, cum √3, multiplicans √cc. & 4. faciat √zcc, & 16. erit eadem proportio √zcc. ad 16. quæ √cc. ad 4. ac proinde √5. æqualis erit √zcc125 & √cc4. æqualis √zcc16.

[a] 17. sept.



Demõstratio reductionis.

VERVM prædicto modo recte reduci radices ad eandem denominationem, hoc est, in dato exemplo, √5. esse √zcc125. & √cc4. æquialere √zcc16. ita quoque Geometrice ostendemus.

C. 2. F. 3.

	A	B	G		D	E	H.
1.	√5.	5.	125	1.	√cc4.	4.	16.

K. 6.

Sit A, radix Zensica numeri B, cuius radicis exponens sit C. Item D, sit radix cubica numeri E, cuius exponens sit F. Ducatur B, quadratus huius numeri √3 5. in se cubice, propter exponentem F, vel signum cc. (ita enim fiet multiplicatio per crucem) vt fiat numerus 125. ita vt B, sit √cc. numeri producti 125. cuius exponens F. Item ducatur E, cubus huius numeri √cc4. in se quadrate, propter signum z, vel exponentem C, vt fiat numerus 16. ita vt E, sit √3 numeri producti 16. cuius exponens C. Postremo ducatur exponens C, in exponentem F, fiatque numerus K. Dico A, esse √zcc numeri G, nimirum à 6. denominatam. Et D, √zcc esse numeri H, ab eodem numero K, denominatam. Cum enim A, sit radix ipsius B, denominata à C, erunt inter B, & vnitatem tot proportiones æquales proportioni A, ad vnitatem, quot Vnitates sunt in C, nimirum duæ, vt cap. 2. explicatum est, & hic perspicuum est, 1. √5. 5. Item quia B, radix est ipsius G. denominata ab F, erunt eandem ob causam inter G, & vnitatem tot proportiones æquales proportioni B, ad vnitatem, quot sunt vnitates in F, nimirum tres, vt hic etiam patet. 1. 5. 25. 125. hoc est, inter G, & B, erunt duæ proportiones æquales proportioni B, ad vnitatem: quandoquidem inter G, & vnitatem sunt tres proportiones æquales proportioni B, ad vnitatem. Cum ergo inter B, & vnitatem sint duæ proportiones æquales proportioni A, ad vnitatem; erunt sex huiusmodi proportiones inter G, & vnitatem, quot videlicet vnitates sunt in K, qui numerus proportionum gignitur ex multiplicatione duarum proportionum inter B, & vnitatem, in tres proportiones inter G & vnitatem, hoc est, ex C, in F. ac proinde G, erit zensicubus, cuius exponens est 6. hoc est, A, erit √zcc. numeri G. Non aliter demonstrabimus, D, esse √zcc. numeri H. Eademque ratio est de alijs, vt in hoc altero exemplo numerorum rationalium.

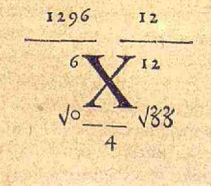
C. 3. F. 4.

	A	B	G		D	E	H
1.	2.	8.	4096	1	3.	81.	531441

K. 12.

A, est √cc. numeri B, denominata à C. At vero D, est √zz, numeri E, denominata ab F. Ex B, in se zensizense, propter exponentem F, fiat G, ita vt B. sit √zz. numeri 4096. Item ex E, in se cubice, propter exponentem C, fiat H, ita vt E, sit √cc. numeri H. Ac tandem ex C, in F, fiat K. Dico A, esse √zzcc. numeri G, denominatam à K, id est, à numero 12. Et D, esse √zzcc. numeri H, denominatam ab eodem numero 12. Cum enim A, sit radix ipsius B, denominata à C; erunt inter B, & vnitatem tot proportiones æquales proportioni A, ad vnitatem, quot vnitates sunt in C, nimirum tres, vt hic patet, 1. 2. 4 8. Item quia B, radix est ipsius G, denominata ab F; erunt tot proportiones inter G, & vnitatem, quarum quælibet æqualis est proportioni B, ad vnitatem, quot vnitates sunt in F, nimirum quatuor, vt hic patet, 1. 8. 64. 512. 4096. hoc est, inter G, & B, erunt tres proportiones æquales proportioni B, ad vnitatem: quandoquidem inter G, & vnitatem sunt quatuor proportiones æquales proportioni B, ad vnitatem. Cum ergo inter B, & vnitatem sint tres proportiones æquales proportioni A, ad vnitatem; erunt inter G, & vnitatem duodecim proportiones æquales proportioni A, ad vnitatem: quot videlicet sunt vnitates in numero K, nimirum 12. qui numerus proportionum gignitur ex multiplicatione trium proportionum inter B, & vnitatem, in quatuor proportiones inter G, & vnitatem, hoc est, ex C, in F: ac proinde G, erit √zzcc, cuius exponens est 12. id est, A, erit √zzcc. numeri G. Eademque ratione D, erit √zzcc numeri H.

Quo pacto numerus absolutus, & radix reducãtur ad eandem denominationem.



SINT rursus reuocandi duo numeri 6. id est, √06. (quod exponens numeri absoluti sit 0.) & √zz 12. Ducantur 6. in se zensizense, vt fiãt 1296. Sed 12. ducenda non sunt in √0. propter exponentem 0. neq; 4. exponens zz. in 0, eandem ob causam. Quare 6.& √zz 12. reducentur ad √zz 1296. & √zz12. Atque ita, quando proponitur numerus absolutus, & radix aliqua, multiplicandus est tantummodo numerus absolutus in se, prout exigit character radicis. Vt in proximo exemplo numerus absolutus 6. ductus est in se zensizense, factaque est reductio ad √zz 1296. & √zz12.

COM-

SOLET ante omnia à nonnullis disputari, an numeri irrationales vere dicendi sint numeri, nec ne. Cum enim neque integri numeri sint, neque fracti, vt paulo ante diximus, neque certam proportionem, quæ numeris exprimi possit, habeant ad integros numeros, aut fractos, non videntur esse numeri dicendi, Quia tamen sub regulam cadunt, censendi erunt aliquo modo esse numeri. Nam √10. in se multiplicata gignit numerum 10. sicut radix quadrata numeri 9. producit 9. Item √3. in √12. procreat √36. hoc est, 6. quemadmodum idem numerus 6. fit ex 2. in 3. vt ex algorithmo numerorum irrationaliũ, de quo mox agemus, constabit. Habent autem numeri irrationales cum numeris fractis quandam affinitatem. Quemadmodum enim inter quosuis duos numeros integros cadunt infiniti numeri fracti, vt hic apparet, vbi inter 2. & 3. cadunt omnes hi numeri fracti.

Vtrum radices surdæ sint numeri, nec ne.

$2\frac{1}{2}$. $2\frac{1}{3}$. $2\frac{2}{3}$. $2\frac{1}{4}$. $2\frac{2}{4}$. $2\frac{3}{4}$. $2\frac{1}{5}$. $2\frac{2}{5}$. $2\frac{3}{5}$. $2\frac{4}{5}$. $2\frac{1}{6}$. $2\frac{5}{6}$. &c.

ita quoque inter quoslibet duos numeros integros cadunt infiniti numeri irrationales. Vt inter 2. & 3. cadunt omnes hi.

√3. √6. √7. √8. √cc9. √cc10. √cc11. √cc12. √cc13. √cc14. √cc15. √cc16. √cc17. √cc18. √cc19. √cc20. √cc21. √cc22. √cc23. √cc24. √cc25. √cc26. √zz17. √zz18. √zz19. √zz20. √zz21. √zz22. √zz23. &c.

Tam enim singuli illi fracti, quam hi surdi singuli maiores sunt quam 2. minores autem quam 3. vt liquet.

AFFERVNTVR ab auctoribus duo genera radicum surdarum. Quædam enim sunt simplices, vt √3. alicuius numeri non quadrati. √cc alicuius numeri non cubi. √zz numeri alicuius non zensizensi. √ß alicuius numeri non surdesolidi, atque ita de alijs radicibus numerorũ progressionis Geometricæ ab 1. incipientis, quorum radices numeris exprimi non possunt, atque has radices simplices vocant nonnulli numeros mediales, propterea quod per illos reperiuntur media proportionalia inter duos numeros, vt cap. 21. dicemus. Aliæ radices surdæ sunt compositæ per interposita signa +. & −. quarum duo item genera ab auctoribus describuntur. In primo continentur illæ, quas dicunt Ligatas, quando nimirum intelligimus summam ex pluribus radicibus; vel ex vna radice, pluribusue, atque ex numero aliquo, vel ex numero Cossico, aut pluribus collectã. Vt cum per hunc numerum √3+√4. intelligimus 5 vnitates, summam videlicet ex 3. radice zensica numeri 9. & ex 2. radice zensica numeri 4. collectam, dicitur numerus ille radix Ligata, quæ æquiualet numero 5. Sic etiam Ligata radix erit √7+√4+3. quæ æquialebit huic √7+5. Significamus enim ad √7. additum esse numerum 5. Eodem modo radix Ligata erit, √3+2ce. Denotamus enim 2ce esse additas ad √3. Denique Ligata radix erit √49−√cc27. Item √cc100−√9. In priori namque intelligimus ex √49. hoc est, ex 7. ablatam esse √cc27. id est, 3. atque ità pretium eius erit 4. In posteriori autem volumus ex √cc100. subtrahi √9. nimirum 3. Sed nos hasce radices Ligatas nominabimus deinceps numeros irrationales compositos, vel diminutos. Immo, vt breuitati consulamus, appellabimus deinceps etiam numeros diminutos, plerumque compositos. Alterum genus compositarum radicum complectitur radices surdas, quæ Vniuersales dicuntur: quando videlicet intelligitur radix alicuius radicis Ligatæ, vel numeri compositi, diminutiue. Vt huius numeri compositi, 22+√9. radix Vniuersalis est 5. Est enim sensus, vt ad 22. addatur radix zensica 9. quæ est 3. & aggregati 25. radix sumatur, quæ est 5. Eodem pacto, si inuertantur particulæ numeri eiusdem, vt fiat numerus √9+22. erit eius radix Vniuersalis eadem, nimirum 5. Nos radices has Vniuersales vocabimus simpliciter radices numerorum irrationalium compositorum, aut diminutorum, ac propterea huiusmodi numeris præfigemus signum radicale √3. vel √cc atque vt significemus, illud ad totum numerum compositum referri, includemus numerum compositum inter duas parentheses, hoc modo. √3 (22+√9.) vel sic, quod idem est, √3 (√9+22.) Alia exempla huiusmodi radicum sume hæc. √3 (√5+12e.) Item √3 (43+12e.) Item √3 (√9+√4) +√3 (11+√25.) Est enim sensus huius posterioris radicis, vt sumatur summa conflata ex √9 & √4 nimirum ex 3 & 2 quæ est 5. & ad hanc summam adiiciatur radix aggregati ex 11. & √25, hoc est, aggregati 16. quæ est 4. vt tota summa fiat 9. eiusque radix 3. Quod si inuertantur duo illi numeri compositi hoc modo. √3 (11+√25.) +√3 (√9+√4) variabitur sensus, quia signum radicale √3. in principio positum videtur referendum esse ad totum illud, quod sequitur: ita vt 11. sumantur cum 5. radice 25. vt fiant 16. quibus addantur √9. & √4. nimirum 5. vt fiat tota summa 21. eiusque radix √3 21. quæ multum à priori, quæ erat 3. differt. Denique huius numeri √3 (7+√48) radix erit 2+√3. Nam hic numerus in se ductus producit 7+√48. vt ex sequentibus patebit. Est & aliud genus radicis apud scriptores nonnullos, quam Distinctam dicunt, in qua videlicet particulæ seorsum accipiuntur, nõ autem earũ summa. Vt hæc radix, √3 16+√3 9. quando particulæ per se sumuntur, vt 4. & 3. non autem coniunctim, vt 7. quia sic esset radix Ligata, quam nos simpliciter numerum irrationalem compositum nominauimus, dicitur radix Distincta: & multum differt à Ligata. Nam si accipiatur, tanquam Ligata, & in se ducatur, fiet numerus 49. At vt Distincta, fient numeri 16. & 9. qui simul efficiunt 25. duntaxat. Verum propriis in locis declarabimus, quisnam sensus sit harum radicum. Varie enim hac de re auctores loquuntur. Et de eisdem plura inuenies in cap. 24.

Duo genera radicũ surdarum, simplex, & composita.

Numeri mediales qui.

Radix ligata quæ.

Numerus irrationalis compositus, vel diminutus qui.

Radix Vniuersalis, quæ.

Radix totius numeri compositi, diminutiue, quæ.

Radix Distincta, quæ.

DE REDVCTIONE RADICVM SIMplicium ad eandem denominationem.

CAPVT XVII.

VT radices surdæ simplices inter se possint multiplicari, ac diuidi, necesse est illas, si diuersæ sint denominationis, ad eandem denominationem reducere. quæ reductio eodem fere modo fit, quo minutiæ diuersorum denominatorum ad eundem denominatorem reuocantur. Positis enim signis radicalibus sub numeris, ad quos pertinent, multiplicandi sunt ipsi numeri in signa radicalia per cruçem, vt noui numeri procreentur: Deinde signa ipsa inter se addenda, hoc est,

Qua ratione diuersæ radices ad eandẽ denominationem reducantur.

eorum exponentes inter se multiplicandi quoque, vt signum commune, vel exponens signi communis producatur. V.g. hæ duæ radices $\sqrt{3}5.$ & $\sqrt{cc}4.$ ita ad idem signum radicale reuocabuntur. Positis numeris, ac signis vt dictum est, & figura indicat, multiplicandus est numerus 5. cubice, propter signum cc, vt fiat nouus numerus 125. At numerus 4. zensice propter signum 3, vt signatur nouus numerus 16. Deinde addendum signum 3. ad cc, vt fiat signum $3cc$. cuius nimirum exponens est 6. procreatus ex ductu 2. exponentis 3 in 3. exponentem cc, vt cap. 2. docuimus. quod signum productum $3cc$, vtrique numero prius producto præfigendum est: ita vt $\sqrt{3}5.$ & $\sqrt{cc}4.$ reducta sint ad $\sqrt{3cc}125.$ & $\sqrt{3cc}16.$ Quo facto, erit $\sqrt{3cc}125.$ æqualis $\sqrt{3}5.$ & $\sqrt{3cc}16.$ æqualis $\sqrt{cc}4.$ Nam $\sqrt{3}5.$ est $\sqrt{3cc}$ numeri 125. propterea quod $\sqrt{3}5.$ in se quadrate efficit 5. & 5. in se cubice facit 125. Eadem ratione $\sqrt{cc}4.$ est $\sqrt{3cc}$ numeri 16. propterea quod $\sqrt{cc}4.$ in se cubice facit 4. & 4. in se quadrate facit 16. quod etiam inde patet. Quoniam $\sqrt{cc}$, multiplicans $\sqrt{3}.$ & 5. produxit $\sqrt{3cc}.$ & 125.[a] erit eadem proportio $\sqrt{3cc}$, ad 125. quæ $\sqrt{3}.$ ad 5. Sic quoque, cum $\sqrt{3}$, multiplicans $\sqrt{cc}.$ & 4. faciat $\sqrt{3cc}$, & 16. erit eadem proportio $\sqrt{3cc}$, ad 16. quæ $\sqrt{cc}.$ ad 4. ac proinde $\sqrt{3}5.$ æqualis erit $\sqrt{3cc}$ 125 & $\sqrt{cc}4.$ æqualis $\sqrt{3cc}16.$

[a] 17. sept.

Demõstratio reductionis.

VERVM prædicto modo recte reduci radices ad eandem denominationem, hoc est, in dato exemplo, $\sqrt{3}5.$ esse $\sqrt{3cc}$ 125. & $\sqrt{cc}4.$ æquialere $\sqrt{3cc}16.$ ita quoque Geometrice ostendemus.

C. 2.	A	B	G
1.	$\sqrt{3}5.$	5.	125

F. 3.	D	E	H.
1.	$\sqrt{cc}4.$	4.	16.

K. 6.

Sit A, radix Zensica numeri B, cuius radicis exponens sit C. Item D, sit radix cubica numeri E, cuius exponens sit F. Ducatur B, quadratus huius numeri $\sqrt{3}$ 5. in se cubice, propter exponentem F, vel signum cc. (ita enim fiet multiplicatio per crucem) vt fiat numerus 125. ita vt B, sit $\sqrt{cc}$, numeri producti 125. cuius exponens F. Item ducatur E, cubus huius numeri $\sqrt{cc}4.$ in se quadrate, propter signum 3, vel exponentem C, vt fiat numerus 16. ita vt E, sit $\sqrt{3}$ numeri producti 16. cuius exponens C. Postremo ducatur exponens C, in exponentem F, fiatque numerus K. Dico A, esse $\sqrt{3cc}$ numeri G, nimirum à 6. denominatam. Et D, $\sqrt{3cc}$ esse numeri H, ab eodem numero K, denominatam. Cum enim A, sit radix ipsius B, denominata à C, erunt inter B, & vnitatem tot proportiones æquales proportioni A, ad vnitatem, quot Vnitates sunt in C, nimirum duæ, vt cap. 2. explicatum est, & hic perspicuum est, 1. $\sqrt{3}5.$ 5. Item quia B, radix est ipsius G, denominata ab F, erunt eandem ob causam inter G, & vnitatem tot proportiones æquales proportioni B, ad vnitatem, quot sunt vnitates in F, nimirum tres, vt hic etiam patet. 1. 5. 25. 125. hoc est, inter G, & B, erunt duæ proportiones æquales proportioni B, ad vnitatem: quandoquidem inter G, & vnitatem sunt tres proportiones æquales proportioni B, ad vnitatem. Cum ergo inter B, & vnitatem sint duæ proportiones æquales proportioni A, ad vnitatem; erunt sex huiusmodi proportiones inter G, & vnitatem, quot videlicet vnitates sunt in K, qui numerus proportionum gignitur ex multiplicatione duarum proportionum inter B, & vnitatem, in tres proportiones inter G & vnitatem, hoc est, ex C, in F. ac proinde G, erit zensicubus, cuius exponens est 6. hoc est, A, erit $\sqrt{3cc}$. numeri G. Non aliter demonstrabimus, D, esse $\sqrt{3cc}$. numeri H. Eademque ratio est de alijs, vt in hoc altero exemplo numerorum rationalium.

C. 3.	A	B	G
1.	2.	8.	4096

F. 4.	D	E	H
1	3.	81.	531441

K. 12.

A, est $\sqrt{cc}$. numeri B, denominata à C. At vero D, est $\sqrt{33}$, numeri E, denominata ab F. Ex B, in se zensizensice, propter exponentem F, fiat G, ita vt B. sit $\sqrt{33}$. numeri 4096. Item ex E, in se cubice, propter exponentem C, fiat H, ita vt E, sit $\sqrt{cc}$. numeri H. Ac tandem ex C, in F, fiat K. Dico A, esse $\sqrt{33cc}$. numeri G, denominatam à K, id est, à numero 12. Et D, esse $\sqrt{33cc}$. numeri H, denominatam ab eodem numero 12. Cum enim A, sit radix ipsius B, denominata à C; erunt inter B, & vnitatem tot proportiones æquales proportioni A, ad vnitatem, quot vnitates sunt in C, nimirum tres, vt hic patet, 1. 2. 4 8. Item quia B, radix est ipsius G, denominata ab F; erunt tot proportiones inter G, & vnitatem, quarum quælibet æqualis est proportioni B, ad vnitatem, quot vnitates sunt in F, nimirum quatuor, vt hic patet, 1. 8. 64. 512. 4096. hoc est, inter G, & B, erunt tres proportiones æquales proportioni B, ad vnitatem: quandoquidem inter G, & vnitatem sunt quatuor proportiones æquales proportioni B, ad vnitatem. Cum ergo inter B, & vnitatem sint tres proportiones æquales proportioni A, ad vnitatem; erunt inter G, & vnitatem duodecim proportiones æquales proportioni A, ad vnitatem: quot videlicet sunt vnitates in numero K, nimirum 12. qui numerus proportionum gignitur ex multiplicatione trium proportionum inter B, & vnitatem, in quatuor proportiones inter G, & vnitatem, hoc est, ex C, in F: ac proinde G, erit $33cc$, cuius exponens est 12. id est, A, erit $\sqrt{33cc}$. numeri G. Eademque ratione D, erit $\sqrt{33cc}$ numeri H.

Quo pacto numerus absolutus, & radix reducãtur ad eandem denominationem.

SINT rursus reuocandi duo numeri 6. id est, $\sqrt{06}.$ (quod exponens numeri absoluti sit 0.) & $\sqrt{33}$ 12. Ducantur 6. in se zensizensice, vt fiat 1296. Sed 12. ducenda non sunt in $\sqrt{0}.$ propter exponentem 0. neq; 4. exponens 33. in 0, eandem ob causam. Quare 6. & $\sqrt{33}$ 12. reducentur ad $\sqrt{33}$ 1296. & $\sqrt{33}$12. Atque ita, quando proponitur numerus absolutus, & radix aliqua, multiplicandus est tantummodo numerus absolutus in se, prout exigit character radicis. Vt in proximo exemplo numerus absolutus 6. ductus est in se zensizensice, factaque est reductio ad $\sqrt{33}$ 1296, & $\sqrt{33}$12.

COM-

Compendium reductionis.

COMPENDIOSE interdum fieri possunt huiusmodi reductiones, per abiectionem signi radicalis, quando nimirum vterque numerus habet radicem, quam signum radicale indicat. Tunc enim extrahitur illa radix, signumque eius radicale deletur. Vt si duæ hæ radices, $\sqrt{cc}27.$ & $\sqrt{33}25.$ reuocandæ sint ad eandem denominationem, extraho ex 25. radicem zensicam 5. cui præpono reliquum signum 3, hoc modo. $\sqrt{3}5.$ Deinde ex 27. extraho radicem cubicam 3. quam multiplico zensice, vt fiat $\sqrt{3}9.$ Erunt ergo datæ duæ radices reductæ ad has $\sqrt{3}9.$ & $\sqrt{3}5.$ Si prius extrahetur radix cubica ex 27. nimirum 3. deleto signo $\sqrt{2}e$, remanet numerus absolutus 3. Extracta deinde radice zensica ex 25. quæ est 5. præpono ei reliquum signum 3. hoc modo. $\sqrt{3}5.$ Quia vero prius inuentus est numerus absolutus 3. ducendus est in se zensice, vt fiat $\sqrt{3}9.$ atque ita rursus facta est reductio ad $\sqrt{3}9.$ & $\sqrt{3}5.$ vt prius. Sine compendio reducerentur ad has duas, $\sqrt{33cc}$ 531441. & $\sqrt{33cc}$ 15625. quæ tandem reducentur ad $\sqrt{3}9.$ & $\sqrt{3}5.$ hoc modo. Extraho ex 531441. radicem cubicam 81. & ex hac radicem zensizensicam 3. cui nullum signum radicale præpono, quia numerus habuit $\sqrt{33cc}$. Deinde ex 15625. eruo radicem cubicam 25. & ex hac radicem zensicam 5. cui præfigo signum 3. quod reliquum est, hoc modo $\sqrt{3}$ 5. quia numerus 5. non habet $\sqrt{3}$. Quoniam vero prius inuentus est numerus absolutus 3. ducatur 3. in se zensice, vt fiat $\sqrt{3}9.$ atque ita reductio facta erit ad $\sqrt{3}9.$ & $\sqrt{3}5.$ vt prius. Sic etiam si reducendę sint $\sqrt{33}$ 1024. & $\sqrt{33cc}$ 216. Extraho ex 1024. radicem surdesolidam 4. deletoque charactere s. manet $\sqrt{34}.$ Extracta autem radice zensica ex 4. habebimus 2. Item ex 216. eruo radicem cubicam 6. cui præpono signum 3. Sed quia prius habuimus numerum absolutum 2. ducemus 2. in se zensice, vt fiat $\sqrt{34}.$ Erunt igitur dictę radices reductę ad $\sqrt{34}.$ & $\sqrt{36}.$ Atque hoc modo fit compendium per abiectionem alicuius signi radicalis.

531441	15625
27	25
$\sqrt{cc}$	$\sqrt{33}$

NONNVNQVAM fieri etiam potest compendium per assumptionem alicuius signi radicalis. Vt si reducendę sint $\sqrt{cc}2$ & $\sqrt{3cc}6.$ duco 2. in se zensice, propter signum 3. quod præter cc reperitur in altera radice, facioque 4. cui prępono 3. eritq; facta reductio ad $\sqrt{3cc}4.$ & $\sqrt{3cc}6.$ Sine compendio fieret reductio, vt hic vides, ad $\sqrt{3cccc}64.$ & $\sqrt{3cccc}$ 216. Et si ex his numeris eruantur radices cubicæ 4. & 6. deleanturque signa cc. singula ex singulis, facta erit reductio ad $\sqrt{3cc}4.$ & $\sqrt{3cc}6.$ vt prius. Sic etiam reducentur $\sqrt{cc}$ 2. & $\sqrt{3cc}$ 8. ad $\sqrt{3cc}4.$ & $\sqrt{3cc}8.$ si nimirum 2. ducatur in se zensice, & producto addatur idem signum radicale cc, præpositio insuper signo 3.

64	216
2	6
$\sqrt{cc}$	$\sqrt{3cc}$

Regula reductionis quarundã radicum facilis.

DENIQVE vt alia adhuc exempla ob oculos ponam, quotiescunque in vtraque radice idem character reperitur, reducentur illæ radices facile ad eandem denominationem, si numerus minoris denominationis multiplicetur in se secundum exigentiam alterius characteris, qui in maiore denominatione reperitur, & producto addatur character ille, secundum quem facta est multiplicatio. Vt $\sqrt{33}9.$ & $\sqrt{34}.$ reducentur ad $\sqrt{33}9.$ & $\sqrt{33}16.$ si nimirum numerus 4. minoris denominationis ducatur in se zensice, propter characterem 3. qui in maiore denominatione præter 3. reperitur.

ITEM $\sqrt{3cc}8.$ & $\sqrt{3}9.$ reducentur ad $\sqrt{3cc}8.$ & $\sqrt{3cc}729.$ si nimirum numerus 9. minoris denominationis ducatur in se cubice, propter characterem cc, qui præter 3. in maiore denominatione continetur.

SIC etiam $\sqrt{33cc}$ 20. & $\sqrt{3}$ 10. reducentur ad $\sqrt{33cc}$ 20. & $\sqrt{33cc}$ 1000000. si nimirum numerus 10. minoris denominationis ducatur in se zensicubice, propter characterem $\sqrt{cc}$. qui præter 3. reperitur in maiore denominatione: hoc est, vel prius in se zensice, & productus 100. in se cubice: vel prius in se cubice, & productus 1000. in se zensice. Vtroque enim modo producitur numerus 1000000.

ITA quoque $\sqrt{3cc}30.$ & $\sqrt{cc}15.$ reducentur ad $\sqrt{3cc}30.$ & $\sqrt{3cc}225.$ si videlicet numerus 15. minoris denominationis ducatur in se zensice, & producto 225. præter characterem cc. apponatur quoque character 3. & sic de alijs.

ITAQVE maior character semper manet intactus, & solum minor mutatur, assumendo alium characterem præter illum, quem habet; characterem inquam, secundum cuius exigentiam multiplicatus fuit numerus minoris denominationis, & qui in maiore denominatione reperitur vltra minoris denominationis characterem.

DE MVLTIPLICATIONE AC DIVISIONE radicum simplicium.

CAPVT XVIII.

Multiplicatio, ac diuisio radicum simplicium, quo pacto fiat.

VT doctrinę ordo seruetur, agendum erit de multiplicatione diuisioneque radicum simplicium ante additionem, subtractionemque, quia sine multiplicatione additio, subtractioq; radicum absolui non potest. Quando ergo duæ radices multiplicandæ, aut diuidendæ sunt eiusdem generis, multiplicantur earum numeri inter se, aut diuiduntur, & producto numero idem signum radicale præponitur.

Vt ex ductu $\sqrt{3}7.$ in $\sqrt{3}10.$ fit $\sqrt{3}70.$
Ex $\sqrt{3}3.$ in $\sqrt{3}12.$ fit $\sqrt{3}36.$ id est, 6.
Ex $\sqrt{3}24.$ in $\sqrt{3}8.$ fit $\sqrt{3}18.$
Ex $\sqrt{cc}24.$ in $\sqrt{cc}10.$ fit $\sqrt{cc}240.$
Ex $\sqrt{cc}4.$ in $\sqrt{cc}16.$ fit $\sqrt{cc}64.$ hoc est, 4.

Ex √ȣȣ 9. in √ȣȣ 8. fit √ȣȣ 72.
Ex √ȿ 4. in √ȿ 8. fit √ȿ 32. id eſt, 2.
Item ex diuiſione √ȣ 70. per √ȣ 7. fit √ȣ 10.
Ex √ȣ 36. per √ȣ 12. fit √ȣ 3.
Ex √ȣ 18. per √ȣ 8. fit √ȣ $2\frac{1}{4}$. hoc eſt, $\frac{3}{2}$.
Ex √ȼȼ 240. per √ȼȼ 24. fit √ȼȼ 10.
Ex √ȼȼ 64. per √ȼȼ 4. fit √ȼȼ 16.
Ex √ȣȣ 72. per √ȣȣ. 8. fit √ȣȣ 9.
Ex √ȿ 32. per √ȿ 8. fit √ȿ 4.

QVANDO autem propoſitæ duæ radices non ſunt eiuſdem naturæ, reducendæ ſunt ad eandem denominationem: deinde multiplicatio, aut diuiſio inſtituenda vt prius.

VT ex ductu √ȣ 8. in $1\frac{1}{2}$. fit √ȣ 18. Nam numerus $1\frac{1}{2}$. Zenſice in ſe ductus facit √ȣ $2\frac{1}{4}$. hoc eſt, √ȣ $\frac{9}{4}$. atque ita ex √ȣ 8. in √ȣ $\frac{9}{4}$. fit √ȣ $\frac{72}{4}$. hoc eſt, √ȣ 18.

EX √ȼȼ 2. in √ȣȼȼ 6. fit √ȣȼȼ 24. Duæ namque illæ radices reducuntur ad has duas √ȣȼȼ 4. & √ȣȼȼ 6.

EX √ȣ 5. in √ȼȼ 4. fit √ȣȼȼ 2000. Nam datæ duæ radices reuocantur ad has, √ȣȼȼ 125. & √ȣȼȼ 16.

ITEM ex diuiſione √ȣ 18. per $1\frac{1}{2}$. fit √ȣ 8. Numerus enim $1\frac{1}{2}$. ductus in ſe quadrate facit $2\frac{1}{4}$. cui præponendum eſt ſignum ȣ. vt fiat √ȣ $2\frac{1}{4}$. atque ita diuiſa √ȣ 18. per √ȣ $2\frac{1}{4}$. hoc eſt, per √ȣ $\frac{9}{4}$. fit Quotiens √ȣ 8.

EX √ȣȼȼ 24. per √ȼȼ 2. fit Quotiens √ȣȼȼ 6. Nam duæ illæ radices reducuntur ad has √ȣȼȼ 24. & √ȣȼȼ 4. ſi nimirum numerus 2. ducatur in ſe quadrate, & producto 4. præter ſignum ȼȼ, apponatur etiam ſignum ȣ, vt fiat √ȣȼȼ 4. atque ita diuiſa √ȣȼȼ 24. per √ȣȼȼ 4. fit Quotiens √ȣȼȼ 6.

EX √ȣȼȼ 2000. per √ȣ 5. fit Quotiens √ȼȼ 4. Duæ namq; illæ radices reducũtur ad √ȣȣȼȼ 4000000. & √ȣȣȼȼ 15625. Nam 2000. in ſe quadrate faciunt 4000000. & 5. in ſe Zenſicubice faciũt 15625. quibus productis præponitur commune ſignum ȣȣȼȼ. cuius exponens 12. gignitur ex 6. exponente ſigni ȣȼȼ. in 2. exponentem ſigni ȣ. atque ita ſi diuides √ȣȣȼȼ 4000000. per √ȣȣȼȼ 15625. facies Quotientem √ȣȣȼȼ 256. hoc eſt, √ȼȼ 4 Nam √ȣȣ. numeri 256. eſt 4 cuius √ȼȼ. eſt √ȼȼ 4.

EX √ȣ $\frac{1}{4}$ per √ȣ $\frac{7}{8}$. fit Quotiens √ȣ $\frac{2}{7}$. id eſt, √ȣ $\frac{8}{7}$. Nam ex ductu Quotientis √ȣ $\frac{8}{7}$. in diuiſorem √ȣ $\frac{7}{8}$. fit √ȣ $\frac{42}{56}$ hoc eſt, √ȣ $\frac{3}{4}$. numerus diuiſus.

Multiplicatio radicum in ſe quadrate, cubice, Zenſizenſice, &c.

QVANDO radix aliqua multiplicatur in ſe quadrate vel cubice, ſecundum exigentiam alterius ſigni radicalis, quod gerit, ſumendus eſt ipſemet numerus pro numero producto, delet⊙ ſigno radicali.

VT √ȣ 4. in ſe quadrate facit 4. Nam √ȣ 4. in √ȣ 4. facit √ȣ 16. hoc eſt, 4.

EX √ȣ 18. in ſe quadrate facit 18. id eſt, √ȣ 324. quæ eſt 18.

EX √ȼȼ 4. in ſe cubice facit 4. Nam √ȼȼ 4. in √ȼȼ 4 facit √ȼȼ 16. & ex √ȼȼ 4. in √ȼȼ 16. facit √ȼȼ 64. hoc eſt, 4. atque radix cubica huius producti eſt √ȼȼ 4.

SIC √ȣȣ 16. in ſe zenſizenſice facit 16. Nam ex √ȣȣ 16. in √ȣȣ 16. fit √ȣȣ 256. & ex √ȣȣ 256. in ſe fit √ȣȣ 65536. nimirum 16. quia radix quadrata numeri 65536. eſt 256. & huius radix quadrata eſt 16.

AT quando radix aliqua multiplicatur in ſe ſecundum exigentiam alterius ſigni radicalis, ducendus eſt numerus in ſe ſecundum exigentiam alterius huius ſigni radicalis, ac producto ſignum radicale numeri multiplicati præponendum.

VT ex √ȣ 6. in ſe cubice fit √ȣ 216. Vnde radix cubica huius producti erit √ȣ 6. Nam ex √ȣ 6. in ſe fit √ȣ 36. & ex √ȣ 6. in √ȣ 36. fit √ȣ 216.

EX √ȼȼ 8. in ſe quadrate fit √ȼȼ 64. id eſt, 4. Vnde radix quadrata numeri √ȼȼ 64. eſt √ȼȼ 8. hoc eſt, 2.

EX √ȼȼ 6. in ſe quadrate fit √ȼȼ 36. Atque ita radix quadrata numeri √ȼȼ 36. eſt √ȼȼ 6.

EX √ȣȼȼ 6. in ſe quadrate fit √ȣȼȼ 36. hoc eſt, √ȼȼ 6. Nam radix Zenſica numeri 36. eſt 6. & huius radix cubica eſt √ȼȼ 6. Vnde radix quadrata numeri √ȣȼȼ 36. vel √ȼȼ 6. eſt √ȣȼȼ 6.

EX √ȣȼȼ 6. in ſe cubice fit √ȣȼȼ 216. vel √ȣ 6. quia huius numeri 216. radix cubica eſt 6 & huius radix quadrata eſt √ȣ 6. Itaque radix cubica numeri √ȣȼȼ 216. vel √ȣ 6. eſt √ȣȼȼ 6.

Facilis inuentio quadrati radicis Zenſizenſicæ. Quo modo radix dupletur, vel tripletur, &c.

EX √ȣȣ 6. in ſe quadrate fit √ȣȣ 36. hoc eſt, √ȣ 6. quia radix quadrata numeri 36. eſt 6. & huius radix quadrata eſt √ȣ 6. Ex quo fit, radicem quadratam numeri √ȣȣ 36 vel √ȣ 6. eſſe √ȣȣ 6. Itaque vt habeatur quadratum alicuius radicis zenſizenſicæ, ſatis eſt, amouere vnum ſignũ ȣ. Vt in dato exemplo quadratum √ȣȣ 6. fuit √ȣ 6. Sic etiam quadratum √ȣȣ 8. eſt √ȣ 8. & ſic de cæteris.

ITAQVE ſi radix quadrata aliqua ſurda duplanda eſt, multiplicandus eſt eius numerus per 4. Producti namque √ȣ. eſt dupla radicis datæ. Vt duplum √ȣ 3. erit √ȣ 12. Nam vt √ȣ 3. ducatur in 2. reducendæ ſunt numeri √ȣ 3. & 2. ad eandem denominationem √ȣ 3. & √ȣ 4. &c.

SIC etiam ſi duplanda ſit √ȼȼ 10. multiplicanda erit per √ȼȼ 8. fietque eius duplum √ȼȼ 80. Duo namque numeri √ȼȼ 10. & 2. reuocandi ſunt ad eandem denominationem, √ȼȼ 10. & √ȼȼ 8.

Sũma quotuis radicũ æqualium.

NON aliter radix quæcunque multiplicabitur per 3. 4. 5. &c. ſi dicti numeri multiplicentur zenſice, vel cubice, vel zenſizenſice, ſecundum conditionem nimirum radicis multiplicandæ. Vt √ȿ 9. triplicabitur, ſi ducatur in √ȿ 243. vt gignatur √ȿ 2187. Quadruplicabitur autem, ſi multiplicetur per √ȿ 1024. vt fiat √ȿ 9216. quæ quadrupla eſt √ȿ 9. &c.

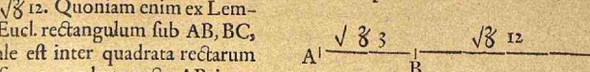
HINC facile cognoſcemus ſummam quotcunque radicum ſurdarum æqualium. Si enim vna illarum radicum multiplicetur per tot vnitates, quot ſunt radices propoſitæ, gignetur earum ſumma. Vt quinque √ȣ 7. faciunt √ȣ 175. Item quatuor √ȼȼ 8. faciunt √ȼȼ 512. hoc eſt, 8. Sic decem √ȣȼȼ 4. faciunt √ȣȼȼ 4000000. Nam redigere quotlibet numeros æquales in vnam ſummam, nihil eſt aliud, niſi vnum illorum numerorum ducere in ipſorum multitudinem. Vt ſumma trium horum numerorum æqualium 12. 12. 12. æqualis eſt numero producto ex 12. in 3. &c.

Demõſtratio multiplicationis

RECTE autem fieri multiplicationem radicis in radicẽ, vt diximus, ſic demonſtrabimus in radicibus quadratis. Sint duæ lineæ, AB, √ȣ 3. & BC, √ȣ 12. Dico √ȣ 36. hoc eſt, radicem quadratam numeri 36. qui fit

qui fit ex quadrato 3. lineæ AB, in quadratum 12. lineæ BC. eſſe numerum productum ex linea AB, id eſt, ex √ȣ 3. in lineam BC, hoc eſt, in √ȣ 12. Quoniam enim ex Lemmate propoſ. 54. lib. 10. Eucl. rectangulum ſub AB, BC, medio loco proportionale eſt inter quadrata rectarum AB, BC, [a] erit id, quod fit ex 3. quadrato rectæ AB, in 12. quadratum rectę BC, æquale ei, quod fit ex rectangulo ſub AB, BC, in ſe multiplicato: ideoque productum ex AB, in BC, radix quadrata erit producti ex 3. quadrato rectæ AB, in 12. quadratum rectæ BC, quod erat demonſtrandum.

radicum quadratarum.



[a] 20. ſept.

Demonſtratio generalis multiplicationis omnium radicum.

IN alijs autem omnibus radicibus, etiam non quadratis, idem hoc modo demonſtrabimus. Sit A, √ȣ. numeri B: & C, √ȣ numeri D: atque ex A, in B, fiat cubus E, vt A, ſit √ȼȼ numeri E: Et ex C, in D, fiat cubus F, vt C, ſit √ȼȼ numeri F. Item ex A, in E, fiat zenſizenſus G, vt A, ſit √ȣȣ numeri G: Et ex C, in F, fiat zenſizenſus H, vt C, ſit √ȣȣ, numeri H. Ac tandem ex A, in C, fiat I: Et ex quadrato B, in quadratum D, fiat quadratus K: Et ex cubo E, in cubum F, fiat cubus L: Et ex Zenſizenſo G, in Zenſizenſum H, fiat Zenſizenſus M. Dico numerum I, productum ex A, √ȣ B, in C, √ȣ D, eſſe √ȣ numeri K, producti ex ȣB, in ȣ D. Item eundem numerum I, productum ex A, √ȼȼ E, in C, √ȼȼ F; eſſe √ȼȼ numeri L, producti ex ȼȼ E, in ȼȼ F. Denique eundem numerum I, productum ex A, √ȣȣ G, in C, √ȣȣ H, eſſe √ȣȣ numeri M. producti ex ȣȣ G, in ȣȣ H. Atq; ita deinceps, ſi A, & C, in G, & H, ducantur, vt fiant Surdeſolidi; & deinde Zenſicubi, &c. Quoniam enim A, multiplicans A, & C, fecit B, & I; [b] erit B, ad I, vt A, ad C. Item quia C, multiplicans A, & C, fecit I, & D; [c] erit quoq; I, ad D, vt A, ad C, hoc eſt, vt B, ad I. ac proinde B, I, D, continue ſunt proportionales. [d] Igitur idem numerus fiet ex B, in D, qui ex I, in ſe. Fit autẽ K, ex B, in D, Igitur idem K, fiet ex I, in ſe; hoc eſt, I, erit √ȣ numeri K. [d] 20. ſept.

		M,	1296.		
G	16			H	81
		L,	216		
E	8			F	27
		K,	36		
B	4			D	9
		I,	6		
A	2			C	3

[b] 17. ſept.
[c] 17. ſept.

DEINDE quia B, multiplicans A, & D, fecit E, & K; [e] erit E, ad K, vt A, ad D. Item quia C, multiplicans A, & D, fecit I, & F; [f] erit quoque I, ad F, vt A, ad D, hoc eſt, vt E, ad K: ac proinde quatuor numeri E, K, I, F, proportionales ſunt. [g] Igitur idem numerus fiet ex E, primo in F, quartum, qui ex I, tertio in K, ſecundum. Factus eſt autem L, cubus ex E, in F. Idem igitur L, fiet ex I, in K, ſuum quadratũ: ac proinde I, erit √ȼȼ numeri L.

[e] 17. ſept.
[f] 17. ſept.
[g] 19. ſept.

RVRSVS quoniam E, multiplicans A, & F, fecit G, & L: [h] erit G, ad L, vt A, ad F. Item quia C, multiplicans A, & F, fecit I, & H; [i] erit quoque I, ad H, vt A, ad F, hoc eſt, vt G, ad L, ac proinde quatuor numeri G, I, L, I, H, proportionales ſunt. [k] Igitur idem numerus fiet ex G, primo in H, quartum, qui ex I, tertio in L, ſecundum. Factus eſt autem M, Zenſizenſus ex G, in H. Idem ergo M, fiet ex I, in L, ſuum cubum: ideoque I, erit √ȣȣ numeri M. & ſic de cæteris. quod erat demonſtrandum.

[h] 17. ſept.
[i] 17. ſept.
[k] 19. ſept.

QVAMVIS autem in exemplo poſiti ſint numeri rationales, idem tamen verum etiam eſt in numeris irrationalibus, vt Franciſcus Maurolycus in ſua Arithmetica ſpeculatiua docuit. quod & in hac formula cernitur in qua eadem demonſtratio locum habet. Nam quemadmodum propoſitiones lib. 7. Eucl. demonſtratæ ſunt in numeris fractis. ita eædem oſtendentur in numeris ſurdis. V. g. quia A, multiplicans A, & C, fecit B, & I; erit ex defin. 15. lib. 7. tam B, ad A, quam I, ad C, vt A, ad vnitatem. quamuis proportio hæc ſit irrationalis. Igitur erit B, ad A, vt I, ad C: Et permutando B, ad I, vt A, ad C; ac proinde A, multiplicans duos A, & C, fecit duos B, & I, qui eandem proportionem habent, quam multiplicati A, & C, vt vult propoſ. 17. lib. 7. Eademque ratio eſt de cæteris propoſitionibus lib. 7. Eucl.

	M, 225. vel √ȣ 50625		
G, 9. vel √ȣ 81		H, 25. vel √ȣ 625	
	L, √ȣ 3375		
E, √ȣ 27		F, √ȣ 125	
	K, 15. vel √ȣ 225		
B, 3. vel √ȣ 9		D, 5. vel √ȣ 25	
	I, √ȣ 15		
A, √ȣ 3		C, √ȣ 5	

RECTE etiam diuidi radicem per radicem, ſi præceptum traditum ſeruetur, demonſtratione non indiget: quippe cum Quotiens multiplicatus per diuiſorem producat numerum diuiſum. Vt quia √ȣ 15. diuiſa per √ȣ 3. Quotientem facit √ȣ 5. Et √ȣ 5. ducta in √ȣ 3. facit √ȣ 15. vt demonſtratum eſt, dubitandum non eſt, recte factam eſſe diuiſionem.

IMMO rite fieri multiplicationem, diuiſionemque radicum ſurdarum eo modo, quem præſcripſimus abunde nos docere poſſunt radices rationales: quippe quæ eo modo multiplicatæ, atque diuiſæ procreent veros numeros productos, ac Quotientes. Nam ex √ȣ 4. in √ȣ 49. fit √ȣ 196. hoc eſt 14. Et ex diuiſione √ȣ 196. per √ȣ 4. fit Quotiens √ȣ 49. id eſt, 7. Item ex √ȼȼ 8. in √ȼȼ 27. fit √ȼȼ 216. nimirum 6. Et ex diuiſione √ȼȼ 216. per √ȼȼ 8. fit Quotiens √ȼȼ 27. nimirum 3. &c.

LEMMA.

VTRVM duæ radices ſurdæ commenſurabiles ſint nec ne; & quam proportionem inter ſe habeant cognoſcere.

An duæ radices ſint commenſurabiles, & quam habeant proportionem: quo pacto cognoſcatur.

DIVIDATVR vna radix per alteram. Si enim Quotiens fuerit rationalis, ipſæ radices commenſurabiles erunt, proportionemq; habebunt inter ſe, quam Quotiens ad vnitatẽ. Vel ſi Quotiens eſt minutia, quam numerator minutiæ ad denominatorem. Vt quoniam ſi diuidatur √ȣ 12. per √ȣ 3. fit Quotiens √ȣ 4. hoc eſt, 2. erunt √ȣ & 12. √ȣ 3. commenſurabiles, habebuntque proportionem duplam, nimirum 2. ad 1.

SIC etiam diuisa $\sqrt{8}3.$ per $\sqrt{8}12.$ fit Quotiens $\sqrt{8}\frac{3}{144}.$ vel $\sqrt{8}\frac{1}{4}.$ hoc est, $\frac{1}{2}.$ Sunt ergo $\sqrt{8}3.$ & $\sqrt{8}12.$ commensurabiles, earumque proportio eadem est, quæ $\frac{1}{2}.$ ad 1. hoc est 1. ad 2. numeratoris ad denominatorem. Nam per propos. 2. Minutiarum ad finem lib. 9. Eucl. eadem est proportio numeratoris minutiæ cuiusuis ad eiusdem denominatorem, quæ ipsius minutiæ ad vnitatem.

ITEM $\sqrt{8}18.$ & $\sqrt{8}8.$ commensurabiles erunt, proportionemque habebunt, quam 3. ad 2. nimirum sesquialteram. quod maiore diuisa per minorem, Quotiens fit $\sqrt{8}2\frac{1}{4}.$ vel $\sqrt{8}\frac{9}{4}.$ hoc est, $\frac{3}{2}.$ Diuisa autem $\sqrt{8}8.$ per $\sqrt{8}18.$ fit quotiens $\sqrt{8}\frac{8}{9}.$ hoc est $\frac{2}{3}.$ Sunt ergo $\sqrt{8}8.$ & $\sqrt{8}.18.$ commensurabiles, proportionemque habent, quam 2. ad 3.

RVRSVS commensurabiles erunt $\sqrt{8}75.$ & $\sqrt{8}48.$ Nam diuisa illa per hanc, fit Quotiens $\sqrt{8}1\frac{9}{16}.$ vel $\sqrt{8}\frac{25}{16}.$ id est, $\frac{5}{4}.$ proportionem autem habebunt, quam 5. ad 4.

ITA quoque reperientur esse commensurabiles $\sqrt{8}9.$ & $\sqrt{8}4.$ proportionemque habere, quam 3. ad 2.

PRÆTEREA $\sqrt{cc}320.$ & $\sqrt{cc}135.$ commensurabiles sunt: quia illa per hanc diuisa, fit Quotiens $\sqrt{cc}2\frac{26}{27}.$ vel $\sqrt{cc}\frac{64}{27}.$ id est, $\frac{4}{3}.$ estque earum proportio sesquitertia, nimirum 4. ad 3.

EADEM ratione commensurabiles sunt $\sqrt{cc}162.$ & $\sqrt{cc}2058.$ habentque proportionem, quam 7. ad 3. nimirum duplam sesquitertiam, si maior cum minore conferatur. Diuisa namque maiore per minorem, fit Quotiens $\sqrt{cc}12\frac{19}{27}.$ vel $\sqrt{cc}\frac{343}{27}.$ hoc est, $\frac{7}{3}.$

COMMENSVRABILES quoq; sunt $\sqrt{cc}6000.$ & $\sqrt{cc}2058.$ habentque proportionem, quam 10. ad 7. Diuisa enim priore per posteriorem, fit Quotiens $\sqrt{cc}2\frac{3146}{7203}.$ vel $\sqrt{cc}.\frac{10000}{343}.$ hoc est, $\frac{10}{7}.$

NON secus commensurabiles erunt $\sqrt{8}\sqrt{8}3888.$ & $\sqrt{8}\sqrt{8}243.$ quia ex diuisione prioris per posteriorem fit Quotiens $\sqrt{8}\sqrt{8}16.$ hoc est 2. Habent ergo proportionem duplam.

EODEM modo commensurabiles erunt $\sqrt{8}\sqrt{8}19683.$ & $\sqrt{8}\sqrt{8}243.$ habebuntq; proportionem triplam. quia ex diuisione prioris per posteriorem prodit Quotiens $\sqrt{8}\sqrt{8}81.$ hoc est, 3.

DENIQVE commensurabiles etiam erunt $\sqrt{8}\sqrt{8}19683.$ & $\sqrt{8}\sqrt{8}3888.$ proportionemque habebunt sesquialteram. quia ex diuisione fit Quotiens $\sqrt{8}\sqrt{8}5\frac{1}{16}.$ vel $\sqrt{8}\sqrt{8}\frac{81}{16}.$ id est, $\frac{3}{2}.$

IAM vero si ex diuisione gignatur numerus surdus, vel irrationalis, radices incommensurabiles erunt, proportionemque habebunt irrationalem. Cuiusmodi sunt $\sqrt{8}48.$ & $\sqrt{8}8.$ quia ex diuisione oritur Quotiens $\sqrt{8}6.$ irrationalis, cum 6. non habeat radicem quadratam: habent tamen proportionem, quam $\sqrt{8}.6.$ ad 1.

INCOMMENSVRABILES quoque erunt $\sqrt{cc}32.$ & $\sqrt{cc}18.$ Nam ex diuisione gignitur Quotiens $\sqrt{cc}1\frac{7}{9}.$ vel $\sqrt{cc}\frac{16}{9}.$ qui licet habeat radicem quadratam $\frac{4}{3}.$ cubicam tamen non habet. Erit autem earum proportio eadem, quæ $\sqrt{cc}16.$ ad $\sqrt{cc}9.$ vel $\sqrt{cc}\frac{16}{9}.$ ad 1.

QVANDO radices sunt diuersorum generum, reducendæ prius sunt ad eandem denominationem. Vt si dentur $\sqrt{cc}64.$ & $\sqrt{cc}27.$ Reductis ad eandem denominationem, nimirum ad $\sqrt{cc}64.$ & $\sqrt{cc}729.$ si posterior per priorem diuidatur, fit Quotiens $\sqrt{cc}11\frac{25}{64}.$ hoc est, $\sqrt{cc}\frac{729}{64}.$ id est, $\frac{3}{2}.$ sunt ergo $\sqrt{cc}64.$ & $\sqrt{cc}27.$ commensurabiles, habetque posterior ad priorem proportionem, quam 3. ad 2.

EST Lemma hoc perneccessarium ad radicum additionem, subtractionemque, de qua in duabus propositionibus sequentibus.

DE ADDITIONE RADICVM simplicium.

CAPVT XIX.

Additio radicũ æqualium.

QVANDO addendæ sunt inter se duæ, vel plures radices æquales, multiplicanda est vna earum per 2. vel 3. aut 4. &c. prout radices fuerint 2. vel 3. aut 4. &c. Productus enim numerus erit summa illarum radicum, vt cap. præcedenti diximus. Vt summa ex $\sqrt{8}6.$ & $\sqrt{8}.6.$ collecta est $\sqrt{8}24.$ Nam $\sqrt{8}6.$ duplicata, hoc est, multiplicata per $\sqrt{8}4.$ facit $\sqrt{8}24.$ Item $\sqrt{cc}6.\sqrt{cc}6.\sqrt{cc}6.$ faciunt $\sqrt{cc}162.$ propterea quod $\sqrt{cc}6.$ triplicata, id est, multiplicata per $\sqrt{cc}27.$ facit $\sqrt{cc}162.$ & sic de alijs.

Additio radicum incommensurabilium.

QVANDO autem duæ radices inæquales eiusdem speciei addendæ inter se sunt, experiendũ prius est, per Lemma præcedens, an sint commensurabiles an vero incommensurabiles: idemq; faciendum est, si radices sint diuersarum denominationum, postquam ad eandem denominationem fuerint reuocatæ. Et si quidẽ deprehendentur esse incommensurabiles, non poterunt in vnam summam colligi, ita vt ex illis vna radix simplex conficiatur, sed addendæ sunt per interpositionẽ signi additorũ +. Vt ex $\sqrt{8}6.$ & $\sqrt{8}11.$ fit summa $\sqrt{8}6+\sqrt{8}11.$ Vel $\sqrt{8}11+\sqrt{8}6.$ Item ex 8. & $\sqrt{8}7.$ fit summa $8+\sqrt{8}7.$ vel $\sqrt{8}7.+8.$ Sic ex $\sqrt{cc}9$ & $\sqrt{cc}20.$ fit summa $\sqrt{cc}9+\sqrt{cc}20.$

Additio radicum quadratarum per propos. 4. lib. 2. Eu.

RADICES tamen quadratæ incommensurabiles addi inter se possunt, hoc etiam modo. Ad summam quadratorum addatur duplum eius, quod fit ex vna radice in aliam. Summæ enim huius collectæ radix quadrata erit summa propositarum duarum radicum. Sint addendæ $\sqrt{8}6.$ & $\sqrt{8}11.$ Quadrati numeri 6. & 11. faciunt 17. Et ex $\sqrt{8}6.$ in $\sqrt{8}11.$ fit $\sqrt{8}66.$ cuius duplum est $\sqrt{8}264.$ Summa ergo ex $\sqrt{8}6.$ & $\sqrt{8}11.$ collecta erit radix quadrata huius aggregati $17+\sqrt{8}264.$ nimirum $\sqrt{8}(17+\sqrt{8}264.)$ Ratio huius operationis ex propos. 4. lib. 2. Eucl. colligitur. Nam si linea aliqua recta diuisa sit in $\sqrt{8}6.$ & $\sqrt{8}11.$ erunt duo quadrata harum partium 6. & 11. quibus si addatur productum ex $\sqrt{8}6.$ in $\sqrt{8}11.$ bis, fiet totum quadratum totius lineæ binomium hoc, $17+\sqrt{8}264.$ Huius ergo radix quadrata, nimirum $\sqrt{8}(17+\sqrt{8}264)$ erit summa quæsita, ex $\sqrt{8}6.$ & $\sqrt{8}11.$ collecta. Quo pacto autem ex binomijs radix quadrata sit extrahenda quando res exigit, & ratio postulat, c. 27. dicemus:

dicemus: quæ tamẽ hic inuenietur esse $\sqrt{8}11+\sqrt{8}6.$ quæ non differt à summa radicum propositarum. si per signum + copulentur. Hæc autem ratio addendi in numeris rationalibus euidens quoque est. Sint enim addendæ $\sqrt{8}4.$ & $\sqrt{8}9.$ vbi manifestum est, summam collectam esse 5. Quadrati 4. & 9. faciunt 13 Et ex $\sqrt{8}4.$ in $\sqrt{8}9.$ fit $\sqrt{8}36.$ cuius duplum est $\sqrt{8}144.$ Summa ergo ex $\sqrt{8}4.$ & $\sqrt{8}9.$ collecta erit radix quadrata huius aggregati $13+\sqrt{8}144.$ nimirum $\sqrt{8}(13+\sqrt{8}144.)$ Constat autem, 13. cum $\sqrt{8}144.$ id est cum 12. conficere 25. cuius radix quadrata est 5.

IMMO hoc etiam artificio addi possunt radices quadratæ commensurabiles, sed semper producetur radix simplex in summa. Vt si addendæ sint $\sqrt{8}3.$ & $\sqrt{8}.12.$ Diuisa hac per illam, fit Quotiens $\sqrt{8}4.$ rationalis: ac proinde commensurabiles sunt. Ergo si earum quadrati 3. & 12. in vnam summam colligantur, fit numerus 15. Et si vna radix in alteram ducatur, fit numerus $\sqrt{8}36.$ cuius duplum $\sqrt{8}144.$ cum 15. facit $15+\sqrt{8}144.$ Huius igitur radix quadrata, nimirum $\sqrt{8}(15+\sqrt{8}144)$ hoc est, $\sqrt{8}.27.$ summa erit collecta ex $\sqrt{8}3.$ & $\sqrt{8}12.$

Additio radicum commensurabilium.

AT vero si radices cuiuscunque generis addendæ fuerint inuentæ commensurabiles, hoc est, si diuisa vna per alteram, Quotiens fuerit rationalis siue integer, siue fractus, aut integer cum fracto, & si quidem integer subscripta vnitate, vt fiat fractio: ita agemus. Quam proportionem multiplicem habet summa ex numeratore, ac denominatore collecta ad 1. eam quoque habebit summa propositarum radicum ad talem partem minoris radicis, qualis pars est 1. minoris numeri fractionis. Quare si talis pars sumatur ex minore radice, eaque multiplicetur per denominatorem proportionis illius multiplicis, procreabitur summa propositarum radicum. Item quam proportionem multiplicem habet summa ex numeratore, ac denominatore collecta ad 1. eam quoque habebit summa propositarum radicum ad talem partẽ maioris radicis, qualis pars est 1. maioris numeri fractionis Quare si talis pars ex maiore radice accipiatur, eaque ducatur in denominatorem proportionis illius multiplicis, producetur propositarum radicum summa.

Vt si addendæ sint $\sqrt{8}8.$ & $\sqrt{8}18.$ Ex diuisione maioris per minorem fit Quotiens rationalis $\sqrt{8}2\frac{1}{4}.$ siue $\sqrt{8}\frac{9}{4}.$ hoc est, $\frac{3}{2}.$ Quia igitur summa numerorũ fractionis $\frac{2}{3}.$ nimirum 5. ad 1. semissem minoris numeri fractionis. proportionem habet quintuplam, habebit quoque quintuplam proportionem summa datarum radicum ad semissem minoris radicis. Est autem $\sqrt{8}2.$ semissis minoris radicis $\sqrt{8}8.$ Diuisa namq; $\sqrt{8}8.$ per 2. hoc est, per $\sqrt{8}4.$ fit Quotiens $\sqrt{8}2.$ Quamobrem si $\sqrt{8}2.$ multiplicetur per 5. denominatorem proportionis quintuplæ, hoc est, per $\sqrt{8}25.$ gignetur $\sqrt{8}50.$ summa ex $\sqrt{8}8.$ & $\sqrt{8}18.$ collecta.

ITEM quia summa numerorum fractionis $\frac{2}{3}.$ id est, 5. ad 1. tertiam partẽ maioris numeri fractionis proportionem habet quintuplam, eandẽ habebit summa radicum propositarũ ad tertiam partẽ maioris radicis. Est autem $\sqrt{8}2.$ tertia pars maioris radicis $\sqrt{8}18.$ Diuisa namque $\sqrt{8}18.$ per 3. hoc est, per $\sqrt{8}9.$ fit Quotiens $\sqrt{8}2.$ Si igitur $\sqrt{8}2.$ ducatur in 5. denominatorem quintuplæ proportionis, id est, in $\sqrt{8}25.$ procreabitur eadem summa $\sqrt{8}50$

EADEM summa conflabitur, si minor radix, $\sqrt{8}8.$ diuidatur per maiorem $\sqrt{8}18.$ Fiet enim Quotiens $\sqrt{8}\frac{4}{9}.$ hoc est, $\frac{2}{3}.$ Ergo rursus quemadmodum 5. summa numerorum fractionis $\frac{2}{3}.$ ad 1. tertiam partem maioris numeri fractionis habet proportionem quintuplam, ita quoque eandem habebit summa radicum propositarum ad tertiam partem maioris radicis, $\sqrt{8}18.$ hoc est, ad $\sqrt{8}2.$ Item quemadmodum 5. summa numerorum fractionis $\frac{2}{3}.$ ad 1. semissem minoris numeri fractionis, proportionem habet quintuplam, ita quoque eandem habebit summa radicum $\sqrt{8}8.$ & $\sqrt{8}18.$ ad semissem minoris radicis, $\sqrt{8}8.$ nimirum ad $\sqrt{8}2.$ &c.

RVRSVS sint addendæ $\sqrt{8}3.$ & $\sqrt{8}12.$ Diuisa maiore per minorem, fit Quotiens $\sqrt{8}4.$ hoc est 2. Supposita ergo vnitate, vt fiat fractio $\frac{2}{3}.$ quoniam summa 3. numerorum huius fractionis ad 1. proportionem habet triplam, estque 1. æqualis minori numero fractionis 1. habebit quoque summa datarum radicum ad minorem radicem $\sqrt{8}3.$ proportionem triplam. Quare si $\sqrt{8}3.$ minor radix ducatur in 3. denominatorem proportionis triplæ, nimirum in $\sqrt{8}9.$ fiet summa $\sqrt{8}27.$

ITEM quia prædicta summa 3. numerorum fractionis $\frac{2}{3}.$ ad 1. proportionem habet triplam, estq; 1. semissis maioris numeri 2. fractionis, habebit quoque summa radicum propositarum ad semissem maioris radicis $\sqrt{8}12.$ hoc est, ad $\sqrt{8}3$ proportionem triplam. Si igitur $\sqrt{8}3.$ semissis videlicet maioris radicis, ducatur in 3. denominatorem proportionis triplæ, id est, in $\sqrt{8}9.$ producetur eadem summa $\sqrt{8}27.$

Demonstratio additionis radicũ commensurabilium.

DEMONSTRATIO huiusce rei est, quod datis quatuor numeris proportionalibus, ita se habeat summa priorum duorum ad maiorem vel minorem ipsorum, vt summa duorum posteriorum ad maiorem, vel minorem ipsorum. Item ita summa priorum duorum ad quamlibet partem maioris, vel minoris, vt summa duorum posteriorum ad similem partem maioris, vel minoris. Vt datis numeris 6 4. & 18. 12. proportionalibus: erit componendo, vt 10. ad 4. ita 30 ad 12. Et per conuersionem rationis, vt 10. ad 6. ita 30. ad 18. Quia vero est quoque vt 4. ad 1. quartam partem, ita 12. ad 3. quartam partem: erit ex æquo, vt 10. ad 1. ita 30. ad 3. Item quia est quoque, vt 6. ad 1. sextam partem, ita 18. ad 3. sextam partem: erit quoque ex æquo, vt 10. ad 1. ita 30. ad 3. Cum ergo ex diuisione vnius radicis per aliam g gnatur denominator proportionis vnius ad alteram, ita vt eadem proportio sit vnius ad alteram, quæ numeratoris fractionis ad denominatorem; (suppositâ 1. quando Quotiens est numerus integer) manifesta euadit ratio additionis radicum. Et sane admiratione dignum est, additionem fieri præcisam in ijs, quæ præcisam, & cognitam quantitatem non habent.

HINC fit, summam quoque ex duabus radicibus commensurabilibus colligi, si per denominatorem proportionis, quam habet summa numerorum fractionis $\frac{2}{3}.$ nimirum 5. ad maiorem fractionis numerum 3. vel ad minorem 2. hoc est, per $\frac{3}{2}.$ vel per $\frac{5}{3}.$ multiplicetur maior radix $\sqrt{8}18.$ vel minor, $\sqrt{8}8.$ Ita vides ex $\sqrt{8}18.$ in $\frac{5}{3}.$ hoc est, in $\sqrt{8}\frac{25}{9}.$ Vel ex $\sqrt{8}8.$ in $\frac{3}{2}.$ id est, in $\sqrt{8}\frac{225}{4}.$ gigni $\sqrt{8}50.$ vt prius.

SINT rursus addendæ $\sqrt{8}72.$ & $\sqrt{8}18.$ Diuisa illa per hanc, fit Quotiens $\sqrt{8}4.$ hoc est, 2. & supposita 1. fit $\frac{2}{1}.$ denominator proportionis duplæ. Sicut igitur summa 3. ad 1. habet proportionem triplam, ita quoq; summa duarum radicum ad minorem $\sqrt{8}18.$ tripla erit. Si ergo ducatur $\sqrt{8}18.$ in 3. id est, in $\sqrt{8}9.$ fiet $\sqrt{8}162.$ pro summa radicum $\sqrt{8}72.$ & $\sqrt{8}18.$ Item sicut eadem summa 3. numerorum fractionis $\frac{2}{3}.$ ad 2. habet proportionem sesquialteram, cuius denominator est $\frac{3}{2}.$ ita quoque summa quæsita erit ad maiorem radicem $\sqrt{8}72.$ sesquialtera. Si ergo $\sqrt{8}72.$ ducatur in $\frac{3}{2}.$ id est, in $\sqrt{8}\frac{9}{4}.$ producetur eadem summa $\sqrt{8}162.$

Pulchra ratio addendi radices cõmensurabiles.

POSSVNT eriam addi radices commensurabiles percommode per regulam aueam, & in idem res recidet. Cum enim in primo exemplo sit, vt 5. summa numerorum fractionis $\frac{3}{1}$. ad minorem numerum 2. vel ad maiorem 3 ita summa radicum ad radicem minorem, vel maiorem, vt ostendimus: erit conuertendo quoque, vt 2. vel 3. ad summam 5. ita minor radix, vel maior ad radicum summam. Si ergo fiat,

Vt 2. ad 5. ita $\sqrt{8}$ 8. ad aliud. Vel

Vt 3. ad 5. ita $\sqrt{8}$ 18. ad aliud: procreabitur summa $\sqrt{8}$ 50. vt prius.

In postremo autem exemplo, in quo denominator proportionis fuit $\frac{2}{1}$. si fiat,

Vt 1. ad 3. ita $\sqrt{8}$ 18. ad aliud. Vel

Vt 2. ad 3. ita $\sqrt{8}$ 72. ad aliud: gignetur summa $\sqrt{8}$ 162. quæ prius.

SINT rursus addendæ $\sqrt{8}$ 2. & $\sqrt{8}$ 8. Ex diuisione $\sqrt{8}$ 8. per $\sqrt{8}$ 2. fit Quotiens rationalis $\sqrt{8}$ 4. id est, 2. & suppositа 1 fit $\frac{2}{1}$. Si ergo fiat.

Vt 1. ad 3. ita $\sqrt{8}$ 2. ad aliud. Vel

Vt 2. ad 3. ita $\sqrt{8}$ 8. ad aliud: colligetur summa $\sqrt{8}$ 18.

Sint quoque addendæ $\sqrt{cc}$ 162. & $\sqrt{cc}$ 2058. Diuisa maiore radice per minorem, fit Quotiens rationalis $\sqrt{cc}$ $12\frac{29}{217}$. vel $\sqrt{cc}$ $\frac{3483}{217}$. hoc est $\frac{7}{1}$. Si igitur fiat.

Vt 3. ad 10. ita $\sqrt{cc}$ 162. ad aliud. Vel

Vt 7. ad 10. ita $\sqrt{cc}$ 2058. ad aliud. reperietur summa $\sqrt{cc}$ 6000.

ITEM addendæ sint $\sqrt{cc}$ 8. & $\sqrt{cc}$ 27. qui numeri rationales sunt. Ex diuisione $\sqrt{cc}$ 27. per $\sqrt{cc}$ 8. fit Quotiens rationalis $\sqrt{cc}$ $3\frac{3}{8}$. vel $\sqrt{cc}$ $\frac{27}{8}$. hoc est, $\frac{3}{2}$. Si ergo fiat,

Vt 2 ad 5. ita $\sqrt{cc}$ 8. ad aliud. Vel

Vt 3. ad 5. ita $\sqrt{cc}$ 27. ad aliud: prodibit summa $\sqrt{cc}$ 125. hoc est 5.

RVRSVS addendæ sint $\sqrt{8}$ 243. & $\sqrt{8}$ 3888. Proportio est $\frac{3}{1}$. Si ergo fiat,

Vt 1. ad 3. ita $\sqrt{8}$ 243. ad aliud. Vel

Vt 2. ad 3. ita $\sqrt{8}$ 3888. ad aliud: exurget summa $\sqrt{8}$ 19683.

POSTREMO sint addendæ $\sqrt{8}$ 4. & $\sqrt{cc}$ 27. qui numeri sunt rationales. Reductis hisce radicibus ad eandem denominationem, vt ad $\sqrt{8cc}$ 64. & $\sqrt{8cc}$ 729. Ex diuisione maioris per minorem fit Quotiens rationalis $\sqrt{8cc}$ $\frac{729}{64}$. hoc est, $\frac{3}{2}$. Si igitur fiat,

Vt 2. ad 5. ita $\sqrt{8cc}$ 64. ad aliud. Vel

Vt 3. ad 5. ita $\sqrt{8cc}$ 729. ad aliud: procreabitur summa $\sqrt{8cc}$ 15625. hoc est 5.

Alia ratio pulchra addendi radices commẽsurabiles.

ADDI quoque possunt radices commensurabiles hoc modo. Diuisa maiore radice per minorem adhibeatur Quotienti rationali vnitas. Si namque numerus conflatus ducatur in maiorem radicem, procreabitur summa quæsita. Nam si Quotiens ducatur in minorem radicem, id est, in diuisorem, producetur maior radix, quæ diuisa fuit: Et si vnitas ducatur in eundem diuisorem, id est, in minorem radicem producetur minor radix: atque adeo duo producti summam duarum radicum conficient. Cum ergo, per theor. 1. ad propos. 14. lib. 9. Eucl. quod respondet propos. 1. lib. 2. idem numerus fiat ex minore radice in summam ex Quotiente, & vnitate collectam, qui ex eadem radice minore in Quotientem, & vnitatem fiunt seorsum; producetur quoque summa duarum radicum datarum ex minore radice in summam ex Quotiente, & vnitate collectam.

SINT enim addendæ $\sqrt{8}$ 8. & $\sqrt{8}$ 18. Diuisa maiore per minorem, fit Quotiens rationalis $\sqrt{8}$ $2\frac{1}{4}$. id est, $\frac{3}{2}$. & addita 1 fit $\frac{5}{2}$. Et quoniam ex $\frac{1}{1}$. in $\sqrt{8}$ 8. fit $\sqrt{8}$ 50. erit $\sqrt{8}$ 50. summa duarum radicum $\sqrt{8}$ 8 & $\sqrt{8}$ 18.

ITEM sint addendæ $\sqrt{cc}$ 162. & $\sqrt{cc}$ 2058. Ex diuisione nascetur Quotiens rationalis $\frac{7}{1}$. & addita 1. fit numerus $\frac{1+7}{1}$. qui ductus in $\sqrt{cc}$ 162. gignit $\sqrt{cc}$ 6000. summam duarum radicum propositarum.

Addere plures radices habentes communẽ mensuram vnam radicem eiusdem generis.

QVANDO duæ radices, vel plures, per vnam aliquam eiusdem generis radicem diuidi possunt, ita vt Quotientes sint rationales, coniungentur in vnam summam, si summa Quotientum ducatur in communem illam radicem diuidentem. Productus enim numerus erit summa quæsita. Nam cum, per theorema proxime citatum, numerus qui fit ex radice diuidente in Quotientum summam, æqualis sit ijs, qui ex eadem diuidente radice fiunt in singulos Quotientes, hoc est, omnibus simul radicibus propositis; liquido constat, ex radice diuidente in summam Quotientum gigni summam radicum propositarum.

Vt si addendæ sint $\sqrt{8}$ 8. & $\sqrt{8}$ 18. Si vtraque diuidatur per $\sqrt{8}$ 2. producentur Quotientes rationales $\sqrt{8}$ 4. & $\sqrt{8}$ 9. hoc est 2. & 3. quorum summa 5. si ducatur in communem diuisorem, id est, in $\sqrt{8}$ 2. procreabitur summa $\sqrt{8}$ 50.

ITEM sint addendæ $\sqrt{8}$ 8. $\sqrt{8}$ 50. & $\sqrt{8}$ 72. si diuidantur singulæ per $\sqrt{8}$ 2. fient Quotientes rationales, $\sqrt{8}$ 4. $\sqrt{8}$ 25 & $\sqrt{8}$ 36. hoc est, 2. 5. & 6. quorum summa 13. ducta in $\sqrt{8}$ 2. communem diuisorem, producet summam $\sqrt{8}$ 338.

SINT tandem addendæ $\sqrt{8}$ 8. $\sqrt{8}$ 32. & $\sqrt{8}$ 48. Diuidantur singulæ per $\sqrt{8}$ 2. fiunt Quotientes $\sqrt{8}$ 4. $\sqrt{8}$ 16. & $\sqrt{8}$ 24. quorum priores duo sunt rationales, nimirum 2. & 4. at posterior irrationalis, Non ergo hoc modo in vnam colligi summam poterunt, sed solum duæ priores facient summam $\sqrt{8}$ 72. atque ita ex omnibus tribus fiet summa $\sqrt{8}$ 72 + $\sqrt{8}$ 48.

DE

dicemus: quæ tamẽ hic inuenietur esse $\sqrt{8}$ 11 + $\sqrt{8}$ 6. quæ non differt à summa radicum propositarum. si per signum + copulentur. Hæc autem ratio addendi in numeris rationalibus euidens quoque est. Sint enim addendæ $\sqrt{8}$ 4. & $\sqrt{8}$ 9. vbi manifestum est, summam collectam esse 5. Quadrati 4. & 9. faciunt 13 Et ex $\sqrt{8}$ 4. in $\sqrt{8}$ 9. fit $\sqrt{8}$ 36. cuius duplum est $\sqrt{8}$ 144. Summa ergo ex $\sqrt{8}$ 4. & $\sqrt{8}$ 9. collecta erit radix quadrata huius aggregati 13 + $\sqrt{8}$ 144. nimirum $\sqrt{8}$ (13 + $\sqrt{8}$ 144.) Constat autem, 13. cum $\sqrt{8}$ 144. id est cum 12. conficere 25. cuius radix quadrata est 5.

IMMO hoc etiam artificio addi possunt radices quadratæ commensurabiles, sed semper producetur radix simplex in summa. Vt si addendæ sint $\sqrt{8}$ 3. & $\sqrt{8}$ 12. Diuisa hac per illam, fit Quotiens $\sqrt{8}$ 4. rationalis: ac proinde commensurabiles sunt. Ergo si earum quadrati 3. & 12. in vnam summam colligantur, fit numerus 15. Et si vna radix in alteram ducatur, fit numerus $\sqrt{8}$ 36. cuius duplum $\sqrt{8}$ 144. cum 15. facit 15 + $\sqrt{8}$ 144. Huius igitur radix quadrata, nimirum $\sqrt{8}$ (15 + $\sqrt{8}$ 144) hoc est, $\sqrt{8}$ 27. summa erit collecta ex $\sqrt{8}$ 3. & $\sqrt{8}$ 12.

Additio radicum commensurabilium.

AT vero si radices cuiuscunque generis addendæ fuerint inuentæ commensurabiles, hoc est, si diuisa vna per alteram, Quotiens fuerit rationalis siue integer, siue fractus, aut integer cum fracto, & si quidem integer subscripta vnitate, vt fiat fractio: ita agemus. Quam proportionem multiplicem habet summa ex numeratore, ac denominatore collecta ad 1. eam quoque habebit summa propositarum radicum ad talem partem minoris radicis, qualis pars est 1. minoris numeri fractionis. Quare si talis pars sumatur ex minore radice, eaque multiplicetur per denominatorem proportionis illius multiplicis, procreabitur summa propositarum radicum. Item quam proportionem multiplicem habet summa ex numeratore, ac denominatore collecta ad 1. eam quoque habebit summa propositarum radicum ad talem partẽ maioris radicis, qualis pars est 1. maioris numeri fractionis. Quare si talis pars ex maiore radice accipiatur, eaque ducatur in denominatorem proportionis illius multiplicis, producetur propositarum radicum summa.

Vt si addendæ sint $\sqrt{8}$ 8. & $\sqrt{8}$ 18. Ex diuisione maioris per minorem fit Quotiens rationalis $\sqrt{8}$ $2\frac{1}{4}$. siue $\sqrt{8}$ $\frac{9}{4}$. hoc est, $\frac{3}{2}$. Quia igitur summa numerorũ fractionis $\frac{2}{1}$. nimirum 5. ad 1. semissem minoris numeri fractionis, proportionem habet quintuplam, habebit quoque quintuplam proportionem summa datarum radicum ad semissem minoris radicis. Est autem $\sqrt{8}$ 2. semissis minoris radicis $\sqrt{8}$ 8. Diuisa namq; $\sqrt{8}$ 8. per 2. hoc est, per $\sqrt{8}$ 4. fit Quotiens $\sqrt{8}$ 2. Quamobrem si $\sqrt{8}$ 2. multiplicetur per 5. denominatorem proportionis quintuplæ, hoc est, per $\sqrt{8}$ 25. gignetur $\sqrt{8}$ 50. summa ex $\sqrt{8}$ 8. & $\sqrt{8}$ 18. collecta.

ITEM quia summa numerorum fractionis $\frac{3}{1}$ id est, 5. ad 1. tertiam partẽ maioris numeri fractionis proportionem habet quintuplam, eandẽ habebit summa radicum propositarũ ad tertiam partẽ, maioris radicis. Est autem $\sqrt{8}$ 2. tertia pars maioris radicis $\sqrt{8}$ 18. Diuisa namque $\sqrt{8}$ 18. per 3. hoc est, per $\sqrt{8}$ 9. fit Quotiens $\sqrt{8}$ 2. Si igitur $\sqrt{8}$ 2. ducatur in 5. denominatorem quintuplæ proportionis, id est, in $\sqrt{8}$ 25. procreabitur eadem summa $\sqrt{8}$ 50.

EADEM summa conflabitur, si minor radix, $\sqrt{8}$ 8. diuidatur per maiorem $\sqrt{8}$ 18. Fiet enim Quotiens $\sqrt{8}$ $\frac{2}{9}$. hoc est, $\frac{2}{3}$. Ergo rursus quemadmodum 5. summa numerorum fractionis $\frac{2}{1}$. ad 1. tertiam partem maioris numeri fractionis habet proportionem quintuplam, ita quoque eandem habebit summa radicum propositarum ad tertiam partem maioris radicis, $\sqrt{8}$ 18. hoc est, ad $\sqrt{8}$ 2. Item quemadmodum 5. summa numerorum fractionis $\frac{2}{1}$. ad 1. semissem minoris numeri fractionis, proportionem habet quintuplam, ita quoque eandem habebit summa radicum $\sqrt{8}$ 8. & $\sqrt{8}$ 18. ad semissem minoris radicis, $\sqrt{8}$ 8. nimirum ad $\sqrt{8}$ 2. &c.

RVRSVS sint addendæ $\sqrt{8}$ 3. & $\sqrt{8}$ 12. Diuisa maiore per minorem, fit Quotiens $\sqrt{8}$ 4. hoc est 2. Supposita ergo vnitate, vt fiat fractio $\frac{2}{1}$. quoniam summa 3. numerorum huius fractionis ad 1. proportionem habet triplam, estque 1. æqualis minori numero fractionis 1. habebit quoque summa datarum radicum ad minorem radicem $\sqrt{8}$ 3. proportionem triplam. Quare si $\sqrt{8}$ 3. minor radix ducatur in 3. denominatorem proportionis triplæ, nimirum in $\sqrt{8}$ 9. fiet summa $\sqrt{8}$ 27.

ITEM quia prædicta summa 3. numerorum fractionis $\frac{2}{1}$. ad 1. proportionem habet triplam, est q; 1. semissis maioris numeri 2. fractionis, habebit quoque summa radicum propositarum ad semissem maioris radicis $\sqrt{8}$ 12. hoc est, ad $\sqrt{8}$ 3 proportionem triplam. Si igitur $\sqrt{8}$ 3. semissis videlicet maioris radicis, ducatur in 3. denominatorem proportionis triplæ, id est, in $\sqrt{8}$ 9. producetur eadem summa $\sqrt{8}$ 27.

Demonstratio additionis radicũ commensurabilium.

DEMONSTRATIO huiusce rei est, quod datis quatuor numeris proportionalibus, ita se habeat summa priorum duorum ad maiorem vel minorem ipsorum, vt summa duorum posteriorum ad maiorem, vel minorem ipsorum. Item ita summa priorum duorum ad quamlibet partem maioris, vel minoris, vt summa duorum posteriorum ad similem partem maioris, vel minoris. Vt datis numeris 6. 4. & 18. 12. proportionalibus: erit componendo, vt 10. ad 4. ita 30 ad 12. Et per conuersionem rationis, vt 10. ad 6. ita 30. ad 18. Quia vero est quoque vt 4. ad 1. quartam partem, ita 12. ad 3. quartam partem: erit ex æquo, vt 10. ad 1. ita 30. ad 3. Item quia est quoque, vt 6. ad 1. sextam partem, ita 18. ad 3. sextam partem: erit quoque ex æquo, vt 10. ad 1. ita 30. ad 3. Cum ergo ex diuisione vnius radicis per aliam gignatur denominator proportionis vnius ad alteram, ita vt eadem proportio sit vnius ad alteram, quæ numeratoris fractionis ad denominatorem; (supposita 1. quando Quotiens est numerus integer) manifesta euadit ratio additionis radicum. Et sane admiratione dignum est, additionem fieri præcisam in ijs, quæ præcisam, & cognitam quantitatem non habent.

HINC fit, summam quoque ex duabus radicibus commensurabilibus colligi, si per denominatorem proportionis, quam habet summa numerorum fractionis $\frac{5}{1}$. nimirum 5. ad maiorem fractionis numerum 3. vel ad minorem 2. hoc est, per $\frac{5}{3}$. vel per $\frac{5}{2}$. multiplicetur maior radix $\sqrt{8}$ 18. vel minor, $\sqrt{8}$ 8. Ita vides ex $\sqrt{8}$ 18. in $\frac{5}{3}$. hoc est, in $\sqrt{8}$ $\frac{25}{9}$. Vel ex $\sqrt{8}$ 8. in $\frac{5}{2}$. id est, in $\sqrt{8}$ $\frac{25}{4}$. gigni $\sqrt{8}$ 50. vt prius.

SINT rursus addendæ $\sqrt{8}$ 72. & $\sqrt{8}$ 18. Diuisa illa per hanc, fit Quotiens $\sqrt{8}$ 4. hoc est, 2. & supposita 1. fit $\frac{2}{1}$. denominator proportionis duplæ. Sicut igitur summa 3. ad 1. habet proportionem triplam, ita quoq; summa duarum radicum ad minorem $\sqrt{8}$ 18. tripla erit. Si ergo ducatur $\sqrt{8}$ 18. in 3. id est, in $\sqrt{8}$ 9. fiet $\sqrt{8}$ 162. pro summa radicum $\sqrt{8}$ 72. & $\sqrt{8}$ 18. Item sicut eadem summa 3. numerorum fractionis $\frac{3}{1}$. ad 2. habet proportionem sesquialteram, cuius denominator est $\frac{3}{2}$. ita quoque summa quæsita erit ad maiorem radicem $\sqrt{8}$ 72. sesquialtera. Si ergo $\sqrt{8}$ 72. ducatur in $\frac{3}{2}$. id est, in $\sqrt{8}$ $\frac{9}{4}$. producetur eadem summa $\sqrt{8}$ 162.

POSSVNT

Pulchra ratio addendi radices cõmensurabiles.

POSSVNT etiam addi radices commensurabiles percommode per regulam aurcam, & in idem res recidet. Cum enim in primo exemplo sit, vt 5. summa numerorum fractionis $\frac{3}{2}$. ad minorem numerum 2. vel ad maiorem 3 ita summa radicum ad radicem minorem, vel maiorem, vt ostendimus: erit conuertendo quoque, vt 2. vel 3. ad summam 5. ita minor radix, vel maior ad radicum summam. Si ergo fiat,

Vt 2. ad 5. ita $\sqrt{8}$ 8. ad aliud. Vel

Vt 3. ad 5. ita $\sqrt{8}$ 18. ad aliud: procreabitur summa $\sqrt{8}$ 50. vt prius.

In postremo autem exemplo, in quo denominator proportionis fuit $\frac{2}{1}$. si fiat,

Vt 1. ad 3. ita $\sqrt{8}$ 18. ad aliud. Vel

Vt 2. ad 3. ita $\sqrt{8}$ 72. ad aliud: gignetur summa $\sqrt{8}$ 162. quæ prius.

SINT rursus addendæ $\sqrt{8}$ 2. & $\sqrt{8}$ 8. Ex diuisione $\sqrt{8}$ 8. per $\sqrt{8}$ 2. fit Quotiens rationalis $\sqrt{8}$ 4. id est, 2. & supposita 1 fit $\frac{2}{1}$. Si ergo fiat.

Vt 1. ad 3. ita $\sqrt{8}$ 2. ad aliud. Vel

Vt 2. ad 3. ita $\sqrt{8}$ 8. ad aliud: colligetur summa $\sqrt{8}$ 18.

Sint quoque addendæ $\sqrt{\text{CC}}$ 162. & $\sqrt{\text{CC}}$ 2058. Diuisa maiore radice per minorem, fit Quotiens rationalis $\sqrt{\text{CC}}$ $12\frac{1\,9}{2\,7}$. vel $\sqrt{\text{CC}}\frac{3\,4\,3}{2\,7}$. hoc est $\frac{7}{3}$. Si igitur fiat.

Vt 3. ad 10. ita $\sqrt{\text{CC}}$ 162. ad aliud. Vel

Vt 7. ad 10. ita $\sqrt{\text{CC}}$ 2058. ad aliud. reperietur summa $\sqrt{\text{CC}}$ 6000.

ITEM addendæ sint $\sqrt{\text{CC}}$ 8. & $\sqrt{\text{CC}}$ 27. qui numeri rationales sunt. Ex diuisione $\sqrt{\text{CC}}$ 27. per $\sqrt{\text{CC}}$ 8. fit Quotiens rationalis $\sqrt{\text{CC}}$ $3\frac{3}{8}$. vel $\sqrt{\text{CC}}\frac{2\,7}{8}$. hoc est, $\frac{3}{2}$. Si ergo fiat,

Vt 2 ad 5. ita $\sqrt{\text{CC}}$ 8. ad aliud. Vel

Vt 3. ad 5. ita $\sqrt{\text{CC}}$ 27. ad aliud: prodibit summa $\sqrt{\text{CC}}$ 125. hoc est 5.

RVRSVS addendæ sint $\sqrt{\text{CCC}}$ 243. & $\sqrt{\text{CCC}}$ 3888. Proportio est $\frac{2}{1}$. Si ergo fiat,

Vt 1. ad 3. ita $\sqrt{\text{CCC}}$ 243. ad aliud. Vel

Vt 2. ad 3. ita $\sqrt{\text{CCC}}$ 3888. ad aliud: exurget summa $\sqrt{\text{CCC}}$ 19683.

POSTREMO sint addendæ $\sqrt{8}$ 4. & $\sqrt{\text{CC}}$ 27. qui numeri sunt rationales. Reductis hisce radicibus ad eandem denominationem, vt ad $\sqrt{8\text{CC}}$ 64. & $\sqrt{8\text{CC}}$ 729. Ex diuisione maioris per minorem fit Quotiens rationalis $\sqrt{8\text{CC}}\frac{7\,2\,9}{6\,4}$. hoc est, $\frac{3}{2}$. Si igitur fiat,

Vt 2. ad 5. ita $\sqrt{8\text{CC}}$ 64. ad aliud. Vel

Vt 3. ad 5. ita $\sqrt{8\text{CC}}$ 729. ad aliud: procreabitur summa $\sqrt{8\text{CC}}$ 15625. hoc est, 5.

Alia ratio pulchra addendi radices commẽsurabiles.

ADDI quoque possunt radices commensurabiles hoc modo. Diuisa maiore radice per minorem adde datur Quotienti rationali vnitas. Si namque numerus conflatus ducatur in maiorem radicem, procreabitur summa quæsita. Nam si Quotiens ducatur in minorem radicem, id est, in diuisorem, producetur maior radix, quæ diuisa fuit: Et si vnitas ducatur in eundem diuisorem, id est, in minorem radicem producetur minor radix: atque adeo duo producti summam duarum radicum conficient. Cum ergo, per theor. 1. ad propos. 14. lib. 9. Eucl. quod respondet propos. 1. lib. 2. idem numerus fiat ex minore radice in summam ex Quotiente, & vnitate collectam, qui ex eadem radice minore in Quotientem, & vnitatem fiunt seorsum; producetur quoque summa duarum radicum datarum ex minore radice in summam ex Quotiente, & vnitate collectam.

SINT enim addendæ $\sqrt{8}$ 8. & $\sqrt{8}$ 18. Diuisa maiore per minorem, fit Quotiens rationalis $\sqrt{8}$ $2\frac{1}{4}$. id est, $\frac{3}{2}$. & addita 1 fit $\frac{5}{2}$. Et quoniam ex $\frac{5}{2}$. in $\sqrt{8}$ 8. fit $\sqrt{8}$ 50. erit $\sqrt{8}$ 50. summa duarum radicum $\sqrt{8}$ 8 & $\sqrt{8}$ 18.

ITEM sint addendæ $\sqrt{\text{CC}}$ 162. & $\sqrt{\text{CC}}$ 2058. Ex diuisione nascetur Quotiens rationalis $\frac{7}{3}$. & addita 1. fit numerus $\frac{1\,0}{3}$. qui ductus in $\sqrt{\text{CC}}$ 162. gignit $\sqrt{\text{CC}}$ 6000. summam duarum radicum propositarum.

Addere plures radices habentes communẽ mensuram vnam radicem eiusdem generis.

QVANDO duæ radices, vel plures, per vnam aliquam eiusdem generis radicem diuidi possunt, ita vt Quotientes sint rationales, coniungentur in vnam summam, si summa Quotientum ducatur in communem illam radicem diuidentem. Productus enim numerus erit summa quæsita. Nam cum, per theorema proxime citatum, numerus, qui fit ex radice diuidente in Quotientum summam, æqualis sit ijs, qui ex eadem diuidente radice fiunt in singulos Quotientes, hoc est, omnibus simul radicibus propositis; liquido constat, ex radice diuidente in summam Quotientum gigni summam radicum propositarum.

Vt si addendæ sint $\sqrt{8}$ 8. & $\sqrt{8}$ 18. Si vtraque diuidatur per $\sqrt{8}$ 2. producentur Quotientes rationales $\sqrt{8}$ 4. & $\sqrt{8}$ 9. hoc est 2. & 3. quorum summa 5. si ducatur in communem diuisorem, id est, in $\sqrt{8}$ 2. procreabitur summa $\sqrt{8}$ 50.

ITEM sint addendæ $\sqrt{8}$ 8. $\sqrt{8}$ 50. & $\sqrt{8}$ 72. si diuidantur singulæ per $\sqrt{8}$ 2. fient Quotientes rationales, $\sqrt{8}$ 4. $\sqrt{8}$ 25 & $\sqrt{8}$ 36. hoc est, 2. 5. & 6. quorum summa 13. ducta in $\sqrt{8}$ 2. communem diuisorem, producet summam $\sqrt{8}$ 338.

SINT tandem addendæ $\sqrt{8}$ 8. $\sqrt{8}$ 32. & $\sqrt{8}$ 48. Diuidantur singulæ per $\sqrt{8}$ 2. fiunt Quotientes $\sqrt{8}$ 4. $\sqrt{8}$ 16. & $\sqrt{8}$ 24. quorum priores duo sunt rationales, nimirum 2. & 4. at posterior irrationalis, Non ergo hoc modo in vnam colligi summam poterunt, sed solum duæ priores facient summam $\sqrt{8}$ 72. atque ita ex omnibus tribus fiet summa $\sqrt{8}$ 72 + $\sqrt{8}$ 48.

DE

DE SVBTRACTIONE RADICVM *simplicium.*

CAPVT XX.

Subtractio radicis ab æquali radice.

QVANDO radix aliqua à radice æquali subtrahitur, nihil relinquitur. Vt $\sqrt{8}$ 12. à $\sqrt{8}$ 12. Item $\sqrt{\text{CC}}$ 100. à $\sqrt{\text{CC}}$ 100. subtracta relinquit $\sqrt{8}$ 0. vel $\sqrt{\text{CC}}$ 0.

Subtractio radicum in æqualium.

QVOD si radices fuerint incommensurabiles, (quando nimirum, diuisa maiore per minorem, Quotiens est irrationalis) non poterit fieri subtractio, nisi per signum subtractorum —. Vt $\sqrt{8}$ 3. ex $\sqrt{8}$ 10. relinquit $\sqrt{8}$ 10 — $\sqrt{8}$ 3. Item $\sqrt{\text{CC}}$ 20. ex $\sqrt{\text{CC}}$ 50. relinquit $\sqrt{\text{CC}}$ 50 — $\sqrt{\text{CC}}$ 20.

Subtractio radicũ quadratorum per propos. 7. lib. 2. Eucl.

QVANDO tamen radices sunt quadratæ, & incommensurabiles, poterit minor à maiore subtrahi hoc etiam modo. A summa quadratorum subducatur, quod ex vna radice in aliam bis fit. Radix enim quadrata eius, quod relinquitur, erit residuum subtractionis. Sit subtrahenda $\sqrt{8}$ 12. à $\sqrt{8}$ 20. Quadrati numeri 12. & 20. faciunt 32. Et ex $\sqrt{8}$ 12. in $\sqrt{8}$ 20. fit $\sqrt{8}$ 240. cuius duplum $\sqrt{8}$ 960. detractum ex summa quadratorũ relinquit 32 — $\sqrt{8}$ 960. Radix ergo quadrata huius relicti nimirum $\sqrt{8}$ (32 — $\sqrt{8}$ 960) erit id, quod relinquitur, detracta $\sqrt{8}$ 12. ex $\sqrt{8}$ 20. Huius operationis ratio ex propos. 7. lib. 2 Eucl. colligitur. Nam si tota aliqua linea sit $\sqrt{8}$ 20. quæ secetur ita, vt vna pars sit $\sqrt{8}$ 12. erunt duo quadrati numeri 20. & 12. nimirum 32. æquales numero $\sqrt{8}$ 960. qui fit bis ex $\sqrt{8}$ 12. in $\sqrt{8}$ 20. vna cum quadrato reliquæ partis lineæ. Si ergo numerus, qui fit bis ex $\sqrt{8}$ 12. in $\sqrt{8}$ 20. demetur ex 32. summa quadratorum, reliquum fiet quadratum reliquæ partis lineæ. Igitur quadratum huius partis erit 32 — $\sqrt{8}$ 960. Ac proinde residuum, quod relinquitur post subtractionem $\sqrt{8}$ 12. ex $\sqrt{8}$ 20. erit $\sqrt{8}$ (32 — $\sqrt{8}$ 960.) Quo pacto autem radix quadrata, quando res exigit, ex Apotomis, siue Residuis sit extrahenda, dicemus cap. 27. quæ tamen hic erit $\sqrt{8}$ 20 — $\sqrt{8}$ 12. non differens à residuo, si $\sqrt{8}$ 12. à $\sqrt{8}$ 20. subtrahatur per interpositionem signi —. Verum hæc ratio subtrahendi perspicua quoque est in numeris rationalibus. Sit enim auferenda $\sqrt{8}$ 4. à $\sqrt{8}$ 49. vbi liquido constat, residuum esse 5. Quadrati 4. & 49. efficiunt 53. Et ex $\sqrt{8}$ 4. in $\sqrt{8}$ 49. fit $\sqrt{8}$ 196. cuius duplum $\sqrt{8}$ 784. ablatum ex 53. summa quadratorum relinquit 53 — $\sqrt{8}$ 784. ac proinde residuum quæsitum, erit $\sqrt{8}$ (53 — $\sqrt{8}$ 784.) Constat autem, 53 — $\sqrt{8}$ 784. hoc est, 53 — 28 esse 25. cuius radix quadrata est 5.

IMMO hoc eodem artificio subtrahi poterit radix quadrata à radice quadrata, si fuerint commensurabiles: sed tunc residuum erit radix simplex. Vt si subducenda sit $\sqrt{8}$ 3. à $\sqrt{8}$ 27. Diuisa hac per illam, fit Quotiens $\sqrt{8}$ 9. rationalis, ac proinde commensurabiles sunt. Summa quadratorum 3. & 27. est 30 à qua si demetur $\sqrt{8}$ 324 nimirum duplum eius, quod fit ex $\sqrt{8}$ 3. in $\sqrt{8}$ 27. remanebunt 30 — $\sqrt{8}$ 324. Igitur $\sqrt{8}$ (30 — $\sqrt{8}$ 324.) hoc est, $\sqrt{8}$ 12. erit residuum subtractionis.

Subtractio radicum commensurabilium.

SI autem radices cuiuscunque generis propositæ fuerint commensurabiles, hoc est, si diuisa maiore per minorem, Quotiens fuerit rationalis, ita tamẽ, vt si fuerit numerus integer, ei supponatur vnitas, vt fiat fractio, ita agemus. Quam proportionem habet numerus, qui relinquitur, detracto denominatore fractionis ex numeratore, hoc est, quam habet differentia numerorum fractionis ad 1. eam quoque habebit residuum post detractionem minoris radicis ex maiore ad talem partem minoris, qualis pars est 1. denominatoris fractionis: vel eam quoq; proportionem habebit dictum residuum ad talem partẽ maioris radicis, qualis pars est 1. numeratoris fractionis. Quocirca si talis pars capiatur ex minore radice, vel maiore, eaque per denominatorem proportionis illius multiplicetur, producetur residuum, quod quæritur.

SIT subtrahenda $\sqrt{8}$ 8. ex $\sqrt{8}$ 50. Ex diuisione maioris per minorem, fit Quotiens rationalis $\sqrt{8}$ $\frac{2\,5}{4}$. hoc est, $\frac{5}{2}$. Quia ergo differentia numerorũ fractionis $\frac{5}{2}$. est 3. quod detracto denominatore 2. ex numeratore 5. remaneant 3. quę differentia ad 1. semissem minoris numeri fractionis, vel quintam partem maioris numeri fractionis, proportionem habet triplam: habebit quoque residuum, quod relinquitur, dempta $\sqrt{8}$ 8. ex $\sqrt{8}$ 50. ad semissem minoris radicis, nimirum ad $\sqrt{8}$ 2. vel ad quintam partem maioris radicis, videlicet ad $\sqrt{8}$ 2. proportionem triplam. Si igitur $\sqrt{8}$ 2. ducatur in 3. hoc est, in $\sqrt{8}$ 9. producetur residuum $\sqrt{8}$ 18. quod desideratur.

IDEM residuum habebitur, si minor radix $\sqrt{8}$ 8. diuidatur per maiorem $\sqrt{8}$ 50. Fiet enim Quotiens $\sqrt{8}$ $\frac{4}{2\,5}$. hoc est, $\frac{2}{5}$. Rursus ergo, quemadmodum 3. differentia numerorum fractionis ad 1. semissem minoris numeri fractionis, vel ad quintam partem maioris numeri fractionis proportionem habet triplam: ita quoque differentia duarum radicum propositarum triplam habebit proportionem ad semissem minoris radicis, vel ad quintam partem maioris, videlicet ad $\sqrt{8}$ 2. Quare triplum $\sqrt{8}$ 2. nimirum $\sqrt{8}$ 18. erit differentia datarum radicum, id est, residuum post detractionem $\sqrt{8}$ 8. ex $\sqrt{8}$ 50. Demonstratio eadem est, quæ supra in additione adducta est.

Pulchra ratio subtrahendi radices commensurabiles.

HINC fit, residuum quoque produci, si per denominatorẽ proportionis, quam habet differentia numerorum fractionis, hoc est, reliquus numerus, dempto minore fractionis numero ex maiore, ad maiorem numerum fractionis, vel ad minorem, nimirum in proposito exemplo per $\frac{3}{2}$. vel $\frac{3}{5}$. (nam $\frac{3}{5}$. est denominator proportionis, quam habet differentia numerorum fractionis, ad 5. maiorem numerum fractionis: At $\frac{3}{2}$. denominator est proportionis, quam eadem differentia 3. habet ad minorem numerũ fractionis) multiplicetur maior radix, vel minor. Ita vides ex ductu $\sqrt{8}$ 50. in $\frac{3}{5}$. vel ex ductu $\sqrt{8}$ 8. in $\frac{3}{2}$. gigni residuum $\sqrt{8}$ 18. idem quod prius.

SVBTRACTIO quoq; radicum commensurabilium commodissime fieri potest per regulam auream. Cum enim sit, vt differentia numerorum fractionis ad maiorem, vel minorẽ eiusdem fractionis numerum, ita residuum, quod quæritur, ad radicem maiorem, vel minorem: Et conuertendo, vt maior numerus fractionis, vel minor, ad differentiam numerorum fractionis, ita maior radix, vel minor ad residuum subtractionis; Si in dato exemplo fiat:

Vt 5.

Vt 5.ad 3.ita √3 50.ad aliud, Vel
Vt 2.ad 3.ita √3 8.ad aliud, producetur residuum quæsitum √3 18.

SIC etiam si subtrahenda sit √cc 162. ex √cc 6000. Diuisa hac per illam, fit Quotiens rationalis √cc $\frac{1000}{27}$. id est, $\frac{10}{3}$. vbi differentia numerorum fractionis est 7. Si ergo fiat,
Vt 10.ad 7. ita √cc 6000. ad aliud. Vel
Vt 3.ad 7. ita √cc 162. ad aliud, gignetur residuum desideratum √cc 2058.

Alia ratio pulchra subtrahēdi radices commensurabiles.

SVBTRAHI etiam potest radix à radice, si sint commensurabiles, hac ratione. Diuisa maiore per minorem, demat̃ vnitas ex Quotiente rationali. Si namque reliquus numerus in minorem radicem ducatur, prodibit residuum quæsitum. Nam si totus Quotiens in minorem radicem, id est, in diuisorem ducatur, producetur maior radix, quæ diuisa fuit. Cum ergo vnitas in minorem radicem faciat minorem radicem; liquido constat, si Quotiens, dempta prius vnitate, ducatur in minorem radicem, gigni eandem maiorem radicem, minus minore radice, hoc est differentiam radicum propositarum.

SIT subtrahēda √3 3888. à √3 19683. Ex diuisione fit Quotiens rationalis √3 $\frac{19683}{3888}$. hoc est, $\frac{5}{2}$. Dempta 1. remanet $\frac{3}{2}$ quæ (reuocata prius ad √3 $\frac{3888}{8}$.) ducta in √3 3888. facit √3 243. differētiam radicū propositarū.

Alia subtrahēdi ratio quando radices pro posita habent aliam radicem eiusdem generis communē mensuram.

DENIQVE fieri potest subtractio hoc alio modo. Diuidatur vtraque radix per communem aliquam radicem eiusdem generis, ita vt Quotientes sint rationales, si fieri potest. Nam subtracto vno Quotiente ex alio, si reliquus numerus ducatur in communem illum diuisorem, procreabitur radix residua. Vt si demenda sit √3 27. à √3 375. Diuisa vtraque per √3 3. fiunt Quotientes rationales √3 9. & √3 25. hoc est, 3. & 5. Quorum differentia 2. ducta in communem diuisorem √3 3. facit √3 12. pro residuo subtractionis. Ratio huius operationis hæc est. Sint duo numeri 10. & 30. quorū differentia 20. diuidanturque per communem diuisorem 5. Habebunt ergo Quotientes 6. & 2. eandem proportionem, quam 30. & 10. Ac proinde per conuersionem rationis, erit 30. ad 20. excessum, quo antecedens 30. superat consequentem 10. vt 6. ad 4. excessum, quo antecedens 6. superat consequentem 2. Et permutando erit 30. ad 6. vt 20. ad 4. Habet autem 30. ad 6. proportionem quintuplam, denominatam videlicet à communi diuisore 5. Igitur & 20. ad 4. proportionem habebit quintuplam: ideoque 20. diuisus per 5. faciet Quotientem 4. Ex quo constat si 4. differentia Quotientum 2. & 6. ducatur in diuisorem communem 5. produci 20. differentiam numerorum 10. & 30.

	20	
10		30
	5	
2		6
	4	

INTER DATOS DVOS NVMEROS QVOTlibet medios proportionales constituere.

CAPVT XXI.

Quotuis medios proportionales inter duos numeros collocare.

AGENDVM iam esset de Algorithmo numerorum irrationalium compositorum; sed libet prius exponere vsum quendam præclarum radicum simplicium in constituendis quotlibet medijs proportionalibus inter datos duos numeros, qui est eiusmodi. Si constituendus sit vnus medius proportionalis, assumendum erit signum radicale hoc, √3. quod inter quadratum, & vnitatem cadat vnus medius proportionalis in qualibet progressione Geometrica, quę ab 1. incipiat. Si duo medij, accipiendum est signum radicale √cc: si tres signum √3 3: si quatuor, signum √5. si quinque signum √3 cc. & sic deinceps. quod facile nos docebit progressio Geometrica in cap. 2. posita.

DEINDE diuiso maiore numero per minorem, instituenda est progressio Geometrica ab 1. incipiens, & per Quotientem progrediens tot terminorum, duobus amplius, quot medij proportionales desiderantur.

Tertio cuilibet termino huius progressionis præfigendum signum radicale, quod assumendum esse docuimus, pro ratione numeri mediorum.

Quarto, extractis radicibus, quas signum radicale indicat, quando extrahi possunt, delenda sunt signa radicalia, quorum radices extractæ sunt.

Quinto ac vltimo pro extremis progressionis vltimæ ponendi sunt numeri dati, ac per minorem singuli termini medij multiplicandi.

V. g. si inter 5. & 20. statuendus sit vnus numerus medius, asciscendum est signum hoc radicale √3.

DEINDE diuiso maiore numero 20. per minorem 5. constituenda progressio hæc trium terminorum 1. 4. 16. per Quotientem 4. progrediens.

Tertio cuilibet termino præfigendum signum √3 hoc modo, √3 1. √3 4. √3 16. eruntque hi termini continuè quoque proportionales, cum sint radices quadratæ numerorum 1. 4. 16. continuè proportionalium.

Quarto extractis radicibus quadratis, sic stabit progressio. 1. 2. 4.

Quinto, huius progressionis termini singuli per numerum minorem 5. multiplicandi sunt. Vnde sic stabit prgressio 5. 10. 20. inuentusque erit medius terminus proportionalis 10. [a] quia 5. 10. 20. eaſdem habent proportiones, quas 1. 2. 4. cum hos numeros idem numerus 5. multiplicans illos produxerit.

[a] *Schol. 18. Septimi.*

SINT rursus inter 6. & 18. inueniendi quinq; medij proportionales. Hic asciscendū est signum √3 cc.

DEINDE diuiso maiore numero 18. per minorem 6. instituenda est progressio septem terminorum per Quotientem 3. progrediens, hoc modo.

1. 3. 9. 27. 81. 243. 729.

Tertio cuilibet termino præponendum signum √3 cc. vt hic.

√3 cc 1. √3 cc 3. √3 cc 9. √3 cc 27. √3 cc 81. √3 cc 243. √3 cc 729.

eruntque hi termini continue quoque proportionales, cum sint radices Zensicubicæ numerorum 1. 3. 9. &c. continue proportionalium.

Quarto extractis radicibus, quæ extrahi possunt, & deletis signis, quorum radices extractæ sunt, sic stabit progressio.

1. √3 cc 3. √cc 3. √3 3. √cc 9. √3 cc 243. 3.

Quinto, ac vltimo, multiplicatis singulis huius progressionis terminis per 6. minorem numerum ex duobus propositis, constitues sequentem progressionem cum quinque medijs terminis proportionalibus.

6. √3 cc 139968. √cc 648. √3 108. √cc 1944. √3 cc 11337408. 18.

eruntque [a] hi termini continue proportionales, cum sint producti ex eodem numero 6. in numeros 1. √3 cc 3. √cc 3. &c. continue proportionales.

[a] *Schol. 18. Septimi.*

QVOD autem hi termini sint continue proportionales, probari experiendo etiam potest. Nam sumptis quibuslibet tribus proximis, tantum fit ex primo in tertium, quantum ex medio in se, vt vult propos. 20. lib. 7. Eucl. Vt sumptis hisce tribus √cc 648. √3 108. √cc 1944. tam ex primo in tertium, quam ex medio in se, gignitur numerus 108. Nam ex √3 108. in se fit numerus 108. & ex √cc 648. in √cc 1944. fit √cc 12597 12. hoc est, 108. Item acceptis tribus hisce, 6. √3 cc 139968. √cc 648. Ex medio in se quadrate fit √3 cc 19591041024. hoc est extracta radice quadrata 139968. productus numerus est √cc 139968. (quia 139968. radicem cubicam non habet.) qui etiam producitur ex 6. in √cc 648. vt liquet.

SCHOLIVM.

SOLET sæpenumero contingere, vt ex numero aliquo extrahenda sit radix quadrata, vel cubica, qui eam non habet. Ne ergo fruſtra tempus insumatur, traduntur à nonnullis, præsertim à Raphaele Bombello, regulæ quædam, quibus facile cognoſcuntur numeri non quadrati, & non cubi.

Primum omnes numeri, qui vltimam figuram ad dexteram habent 2. vel 3. vel 7. vel 8. non sunt quadrati: quia in numeris quadratis vltima figura necessario debet esse vna ex his. 1. 4. 5. 6. 9. 0.

Qui numeri non sint quadrati.

Deinde nullus numerus, ex quo reiectis 9. vt in probatione nouenaria fieri consueuit, non supereſt aliqua harum figurarum. 1 4 7. 0. quadratus est.

Tertio, numerus vltimam figuram habens 5. nisi eam præcedat figura 2. eum alia figura pari, vel cum 0. quadratus esse nequit. Vt hi numeri 125. 325. 67525. 89725. 100925. quadrati non sunt.

Quarto, numeri vltimam figuram habentes 1. vel 9. nisi eam antecedat figura par, aut 0. quadrati non sunt. Vt hi numeri 4371. 4379. 67899. 75351. quadrati non sunt.

Quinto, numeri habentes vltimam figuram 4. nisi eam præcedat alia figura par, vel 0. quadrati non sunt. Vt hi numeri 6934. 70014. quadrati esse nequeunt.

Sexto, numeri habentes figuram vltimam 6. nisi eam antecedat figura impar, quadrati non sunt. Vt numeri 5746. 7086. 34526. quadrati non sunt.

Septimo ac vltimo, numerus habens in fine plures figuras 0. sub numero impari, quadratus esse non potest. Vt numeri 460678000. 91010. quadrati non sunt.

QVOD vero ad cubos attinet, nullus numerus erit cubus, si reiectis 9. non remanet 1. vel 8. vel 0. Itaque 12000. non erit cubus, cum reiectis 9. remaneant 3.

Qui numeri non sint cubi.

Deinde numerus, cuius vltima figura est 2. nisi proxime antecedens figura sit impar. item cuius vltima figura est 4. vel 8. si proxime antecedens figura non sit par, vel 0. non potest esse cubus. Vt numeri 34562. 456174. 1100038. non sunt cubi.

Tertio nullus numerus habens in fine 0. vel 00. potest esse cubus. Vt hi numeri 1230. 100. 34600. cubi non sunt.

Quarto & vltimo, numerus habens vltimam figuram 5. nisi proxime antecedens figura sit 2. vel 7. cubus esse non poterit. Vt hi numeri. 361035. 67895. 1120015. cubi non sunt.

Itaque antequam ad extractionem radicis quadratæ, vel cubicæ aggrediaris, operæpretium feceris, si priùs per conditiones prædictas experiaris, an propositus numerus possit esse quadratus, aut cubus.

DE ADDITIONE AC SVBTRActione numerorum irrationalium compositorum.

CAPVT XXII.

CONFICITVR Algorithmus numerorum irrationalium compositorum ex radicum simplicium Algorithmo, dummodo pro additione, & subtractione, in memoriam reducantur regulæ illæ duæ, quæ de signis + & − traditæ sunt cap. 4. videlicet.

I

Duæ regulæ obseruandæ in additione, & subtractione.

Eadem signa idem signum ponunt, nisi in subtractione, quando numeri præpostere ponuntur. Tunc enim subtrahitur superior ab inferiore, & ex + fit − & ex − fit +.

2

Diuersa signa mutant speciem operationis. Et in additione ponitur signum maioris numeri: In subtractione vero superioris, siue maioris sit, siue minor, aut æqualis.

Quæ quidem duæ regulæ cap. 4. prædicto expositæ sunt, & ex subiectis exemplis intelligi facile possunt.

Exempla Additionis.

$6 + \sqrt{8}\ 18$
$4 + \sqrt{8}\ 8$
$10 + \sqrt{8}\ 50$

$\sqrt{8}\ 27 + \sqrt{8}\ 8$
$\sqrt{8}\ 12 + \sqrt{8}\ 2$
$\sqrt{8}\ 75 + \sqrt{8}\ 18$

$\sqrt{8}\ 162 - 2$
$\sqrt{8}\ 200 - 3$
$\sqrt{8}\ 722 - 5$

$\sqrt{88}\ 243 - \sqrt{88}\ 162$
$\sqrt{88}\ 48 - \sqrt{88}\ 32$
$\sqrt{88}\ 1875 - \sqrt{88}\ 1250$

Exempla Subtractionis.

$\sqrt{88}\ 1875 + \sqrt{88}\ 1250$
$\sqrt{88}\ 243 + \sqrt{88}\ 162$
$\sqrt{88}\ 48 + \sqrt{88}\ 32$

$\sqrt{8}\ 50 - 5$
$\sqrt{8}\ 8 - 2$
$\sqrt{8}\ 18 - 3$

Exempla exceptionis in subtractione pro prima regula.

$\sqrt{8}\ 50 + 2$
$\sqrt{8}\ 18 + 4$
$\sqrt{8}\ 8 - 2$

$\sqrt{8}\ 50 - 2$
$\sqrt{8}\ 18 - 4$
$\sqrt{8}\ 8 + 2$

$\sqrt{8}\ 50 + 6$
$\sqrt{8}\ 72 + 2$
$4 - \sqrt{8}\ 2$

$\sqrt{8}\ 72 + 2$
$6 + \sqrt{8}\ 18$
$\sqrt{8}\ 18 - 4$

Exempla exceptionis in additione pro regula secunda.

$\sqrt{8}\ 50 + 3$
$\sqrt{8}\ 32 - 5$
$\sqrt{8}\ 162 - 2$

$\sqrt{8}\ 50 - 3$
$\sqrt{8}\ 32 + 5$
$\sqrt{8}\ 162 + 2$

Exempla exceptionis in subtractione pro regula secunda.

$\sqrt{8}\ 162 + 2$
$\sqrt{8}\ 50 - 3$
$\sqrt{8}\ 32 + 5$

$\sqrt{8}\ 162 - 2$
$\sqrt{8}\ 50 + 3$
$\sqrt{8}\ 32 - 5$

Alia exempla additionis.

$8 - \sqrt{8}\ 50$
$\sqrt{8}\ 242 - 12$
$\sqrt{8}\ 72 - 4$

$\sqrt{8}\ 50 + 6$
$24 - \sqrt{8}\ 242$
$30 - \sqrt{8}\ 72$

Alia exempla subtractionis.

$\sqrt{8}\ 72 - 4$
$8 - \sqrt{8}\ 50$
$\sqrt{8}\ 242 - 12$

$30 - \sqrt{8}\ 72$
$\sqrt{8}\ 50 + 6$
$24 - \sqrt{8}\ 242$

Alia Exempla subtractionis.

$\sqrt{8}\ 0 + 16$
$\sqrt{8}\ 320 - 8$
$24 - \sqrt{8}\ 320$

$\sqrt{8}\ 180 + 0$
$\sqrt{8}\ 320 - 8$
$8 - \sqrt{8}\ 20$

Obseruanda in nonnullis subtractionibus.

Hic in priori exemplo quoniam numerus $\sqrt{8}$ 320. non habet respondentem in superiori numero, positus est numerus $\sqrt{8}$ 0. cum signo +. Item quia in posteriori exemplo numerus 8. in superiori numero non habet respondentem, positus quoque est numerus 0. cum signo +. quod semper in subtractione obseruandum est, vt superiores duæ regulæ locum habeant.

VERVM

VERVM in huiusmodi exemplis fiet hoc etiam modo subtractio. Post numerum, à quo debet fieri subtractio, ponatur numerus subtrahendus, commutatis tamen singulis signis eius in signa contraria, ponendo — pro +. & contra. Deinde fiat reductio per additionem. Vt si subtractio fieri debeat $\sqrt{8}320 - 8$. à numero 16. sic stabit exemplum.

$16 - \sqrt{8}\ 320 + 8$

Si ergo addantur 16 ad 8. fiunt 24. & dempta $\sqrt{8}320$. erit residuum $24 - \sqrt{8}320$.

Item si fiat subtractio $\sqrt{8}320 - 8$. à $\sqrt{8}180$. sic stabit exemplum. $\sqrt{8}180 - \sqrt{8}320 + 8$. Si ergo addantur $\sqrt{8}180$. & $-\sqrt{8}320$ hoc est, mutata specie operationis, propter diuersa signa + & −. detracta $\sqrt{8}180$. de $\sqrt{8}320$. erit residuum $8 - \sqrt{8}20$.

Rursus sit facienda subtractio $\sqrt{8}180 - 8$. de $\sqrt{8}320$. sic stabit exemplum. $\sqrt{8}320 - \sqrt{8}180 + 8$. Si ergo addantur simul $\sqrt{8}320 - \sqrt{8}180$. hoc est, mutata specie operationis, propter diuersa signa + & − dempta $\sqrt{8}180$ de $\sqrt{8}320$. erit residuum $8 + \sqrt{8}20$.

Sit præterea facienda subtractio $8 - \sqrt{8}12$. de $\sqrt{8}72 - 4$. Sic stabit exemplum. $\sqrt{8}72 - 4 - 8 + \sqrt{8}12$. Si ergo addantur inter se $\sqrt{8}72$. $\sqrt{8}12$. & $-4 - 8$. erit residuum $\sqrt{8}72 + \sqrt{8}12 - 12$. quia radices illę sunt incommensurabiles. Quod si addantur per propos. 4. lib. 2. Eucl. facient $\sqrt{8}(84 + \sqrt{8}3456.)$ atque adeo residuum totum erit $\sqrt{8}(84 + \sqrt{8}3456) - 12$.

Hoc autem modo recte fieri subtractionem, liquido constat in numeris rationalibus. Sit enim facienda subtractio $\sqrt{8}49 - 3$. de $8 + \sqrt{8}9$. hoc est, 4. de 11. vbi residuum est 7. Secundum præceptum traditum sic stabit exemplum. $8 + \sqrt{8}9 - \sqrt{8}49 + 3$. Iam ex 8. & 3. fiunt 11. & ex $\sqrt{8}9$. & $-\sqrt{8}49$. fit numerus -4. Ergo residuum est $11 - 4$. hoc est, 7. vt ratio postulat.

SED vt totum hoc negotium additionis, subtractionisque planius intelligatur, subiungemus alia nonnulla exempla. Sint ergo addenda $7 + \sqrt{8}5$. ad $4 + \sqrt{8}3$. Ex 7. & 4. fiunt 11. & ex $\sqrt{8}5$. ac $\sqrt{8}3$. per propos. 4. lib. 2. Euclid. fit $\sqrt{8}(8 + \sqrt{8}60.)$ Igitur summa est $11 + \sqrt{8}(8 + \sqrt{8}60.)$

Alia exempla additionis, & subtractionis.

$7 + \sqrt{8}\ 5$
$4 + \sqrt{8}\ 3$
$11 + \sqrt{8}(8 + \sqrt{8}\ 60)$

RVRSVS sint addenda $\sqrt{8}5 + 3$. ad $\sqrt{8}20 - 4$. Ex $\sqrt{8}5$. & $\sqrt{8}20$. quia commensurabiles sunt, fit $\sqrt{8}45$. & ex $+3$. ac -4. fit -1. Tota ergo summa est $\sqrt{8}45 - 1$. Eadem summa conflabitur, si $\sqrt{8}5$. ad $\sqrt{8}20$. addantur per propos. 4. lib. 2. Eucl. vt ad initium cap. 19. docuimus. Fiet enim $\sqrt{8}(25 + \sqrt{8}400.)$ hoc est, $\sqrt{8}45$. atque ita rursus erit tota summa $\sqrt{8}45 - 1$.

$\sqrt{8}\ 5 + 3$
$\sqrt{8}\ 20 - 4$
$\sqrt{8}\ 45 - 1$

PRÆTEREA sint addenda $\sqrt{8}5 + 7$. ad $\sqrt{8}6 - 7$. Ex $\sqrt{8}5$. & $\sqrt{8}6$. fit $\sqrt{8}(11 + \sqrt{8}120$. & ex $+7$. & -7. fit 0. Summa ergo collecta erit $\sqrt{8}(11 + \sqrt{8}120.)$

$\sqrt{8}\ 5 + 7$
$\sqrt{8}\ 6 - 7$
$\sqrt{8}(11 + \sqrt{8}\ 120)$

AMPLIVS sint addenda $\sqrt{8}7 + 3$. ad $\sqrt{8}20 - 4$. Ex $\sqrt{8}7$. & $\sqrt{8}20$. fit $\sqrt{8}(27 + \sqrt{8}560)$ & ex $+3$. & -4. fit -1. Tota ergo summa erit $\sqrt{8}(27 + \sqrt{8}560) - 1$.

$\sqrt{8}\ 7 + 3$
$\sqrt{8}\ 20 - 4$
$\sqrt{8}(27 + \sqrt{8}\ 560)$

SINT quoque addenda $\sqrt{8}5 + 7$. ad $\sqrt{8}6 - 2$. Ex $\sqrt{8}5$. & $\sqrt{8}6$. fit $\sqrt{8}(11 + \sqrt{8}120.)$ at ex $+7$. & -2. fit $+5$. Tota ergo summa erit $\sqrt{8}(11 + \sqrt{8}120) + 5$. Vel $5 + \sqrt{8}(11 + \sqrt{8}120.)$

$\sqrt{8}\ 5 + 7$
$\sqrt{8}\ 6 - 2$
$\sqrt{8}(11 + \sqrt{7}\ 120) + 5$

ITEM sint addenda $7 + \sqrt{8}5$. ad $4 - \sqrt{8}3$. Summa erit $11 + \sqrt{8}5 - \sqrt{8}3$. Vel secundum regulam 2. subtrahemus per propos. 7. lib. 2. Eucl. $\sqrt{8}3$. à $\sqrt{8}5$. propter diuersa signa + & −. hoc modo. Quadrati numeri 5. & 3. faciunt 8. & ex $+\sqrt{8}5$. in $-\sqrt{8}3$. fit $-\sqrt{8}15$. cuius duplum $-\sqrt{8}60$. ex aggregato quadratorum 8. auferatur, remanebuntque $8 - \sqrt{8}60$. Radix ergo huius relicti est id, quod relinquitur post detractionem $\sqrt{8}3$. ex $\sqrt{8}5$. cui radici præfigendum est signum +, maioris numeri. Tota ergo summa est $11 + \sqrt{8}(8 - \sqrt{8}60.)$

$7 + \sqrt{8}\ 5$
$4 - \sqrt{8}\ 3$
$11 + \sqrt{8}\ 5 - \sqrt{8}\ 3$

ITEM sint addenda $8 - \sqrt{8}7$. ad $10 - \sqrt{8}7$. Ex 8. & 10. fiunt 18. at ex $-\sqrt{8}7$. & $-\sqrt{8}7$. fit $-\sqrt{8}28$. Tota ergo summa erit $18 - \sqrt{8}28$.

$8 - \sqrt{8}\ 7$
$10 - \sqrt{8}\ 7$
$18 - \sqrt{8}\ 28$

ITEM sint addenda $10 + \sqrt{8}49$. ad $7 - \sqrt{8}4$. Vbi manifestum est summam esse 22. ex 10. & 7. fiunt 17. Et subtracta $\sqrt{8}4$. à $\sqrt{8}49$. per propos. 7. lib. 2. Eucl. propter signa + & − diuersa, remanent $\sqrt{8}(53 - \sqrt{8}784.)$ cui præponendum est signum + maioris numeri. Tota ergo summa est $17 + \sqrt{8}(53 - \sqrt{8}784.)$ Cum ergo radix quadrata huius numeri $53 - \sqrt{8}784$. sit 5. (Nam 28. radix numeri 784. dempta ex 53. relinquit 25. cuius radix quadrata est 5.) erit tota summa $17 + 5$. hoc est, 22.

$10 + \sqrt{8}\ 49$
$7 - \sqrt{8}\ 4$
$17 + \sqrt{8}(53 - \sqrt{8}784)$

$$\begin{array}{r} 10 - \sqrt{8}\ 49 \\ 7 + \sqrt{8}\ 4 \\ \hline 17 - \sqrt{8}(53 - \sqrt{8}\ 784) \end{array}$$

ITEM sint addenda $10 - \sqrt{8}49$. ad $7 + \sqrt{8}4$. vbi etiam liquet, summam esse 12. Ex 10. & 7. fiunt 17. Et subtracta $\sqrt{8}4$. à $\sqrt{8}49$. propos. 7. lib. 2. Euclid. propter diuersa signa —— & +. remanet $\sqrt{8}.(53 - 784)$ cui præfigendum est signum —— maioris numeri. Tota ergo summa collecta est $17 - \sqrt{8}(53 - \sqrt{8}784.)$ Cum ergo radix quadrata huius numeri $53 - \sqrt{8}784.$ sit 5. erit tota summa $17 - 5.$ hoc est, 12.

ITEM sint addenda 6. ad $\sqrt{8}24. + 3.$ Fiet summa $\sqrt{8}24 + 9$ Vel $9 + \sqrt{8}24.$

$$\begin{array}{r} \sqrt{8}\ 24 + 3 \\ \sqrt{8}\ 0 + 6 \\ \hline \sqrt{8}\ 24 + 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{8}\ 24 - 3 \\ \sqrt{8}\ 0 + 6 \\ \hline \sqrt{8}\ 24 + 3 \end{array}$$

ITEM sint addenda 6. ad $\sqrt{8}24 - 3$ Fiet summa $\sqrt{8}24 + 3.$

ITEM sit addenda $\sqrt{8}6.$ ad $\sqrt{8}24 + 3.$ Ex radicibus, quia commensurabiles sunt, fit $\sqrt{8}54.$ At ex -3 & $+0.$ fit $-3.$ Summa igitur est $\sqrt{8}54 - 3.$

$$\begin{array}{r} \sqrt{8}\ 24 - 3 \\ \sqrt{8}\ 6 + 0 \\ \hline \sqrt{8}\ 54 - 3 \end{array}$$

ITEM sit addenda $\sqrt{8}8.$ ad $\sqrt{8}32 + \sqrt{8}18.$ Ex $\sqrt{8}8.$ & $\sqrt{8}32.$ quia commensurabiles sunt, fit $\sqrt{8}72.$ Fit ergo summa $\sqrt{8}72 + \sqrt{8}18.$ Atque ex his duabus radicibus, cum commensurabiles sint, fit $\sqrt{8}162.$ summa quæsita. Vel quia commensurabiles etiam sunt $\sqrt{8}8.$ & $\sqrt{8}18.$ fiet ex illis $\sqrt{8}50.$ ita vt tota summa sit $\sqrt{8}50 + \sqrt{8}32.$ Atque ex his duabus radicibus, cum sint commensurabiles, fit $\sqrt{8}162.$ summa quæsita, vt prius. Itaque hi numeri $\sqrt{8}72 + \sqrt{8}18.$ & $\sqrt{8}50 + \sqrt{8}32.$ æquales sunt, cum vterque æqualis sit $\sqrt{8}162.$ vt patuit.

$$\begin{array}{r} \sqrt{8}\ 8 + \sqrt{8}\ 0 \\ \sqrt{8}\ 32 + \sqrt{8}\ 18 \\ \hline \sqrt{8}\ 72 + \sqrt{8}\ 18 \end{array}$$

ITEM sit addenda $\sqrt{cc}216 - \sqrt{88}405.$ ad $\sqrt{cc}64 - \sqrt{88}80.$ Ex $\sqrt{cc}216.$ & $\sqrt{cc}64.$ quia commensurabiles sunt, fit $\sqrt{cc}1000.$ hoc est, 10. At ex $\sqrt{88}405.$ & $\sqrt{88}80.$ quia commensurabiles quoque sunt, fit $\sqrt{88}3125.$ Tota ergo summa est $10 - \sqrt{88}3125.$

$$\begin{array}{r} \sqrt{cc}\ 216 - \sqrt{88}\ 405 \\ \sqrt{cc}\ 64 - \sqrt{88}\ 80 \\ \hline 10 - \sqrt{88}\ 3125 \end{array}$$

ITEM sit addenda $\sqrt{88}256 - \sqrt{cc}27$ ad $\sqrt{88}81 + \sqrt{cc}8.$ Ex $\sqrt{88}256.$ & $\sqrt{88}81.$ fit $\sqrt{88}2401.$ hoc est, 7. at ex $-\sqrt{cc}27.$ & $+\sqrt{cc}8.$ fit $-\sqrt{cc}1.$ hoc est, $-1.$ Summa ergo tota est $7 - 1.$ hoc est 6. Quod ita esse, liquet. Nam $\sqrt{88}256.$ est 4. à qua si tollatur $\sqrt{cc}27.$ hoc est, 3. remanet 1. cui si addatur $\sqrt{88}81.$ id est 3. & insuper $\sqrt{cc}8.$ id est 2. fiet summa 6. vt prius.

$$\begin{array}{r} \sqrt{88}\ 256 - \sqrt{cc}\ 27 \\ \sqrt{88}\ 81 + \sqrt{cc}\ 8 \\ \hline 7 \text{ —— } 1 \end{array}$$

SINT denique addendæ $\sqrt{8}(5 + \sqrt{8}6.)$ & $\sqrt{8}(10 - \sqrt{8}11.)$ Huiusmodi radices, quas supra appellauimus radices numerorum irrationalium compositorum, diminutorumue, & quas alij radices Vniuersales dicunt, non possunt commodius in vnam summam redigi, quam per signum +, hoc modo $\sqrt{8}(5 + \sqrt{8}6.) + \sqrt{8}(10 - \sqrt{8}11.)$ Sic etiam, si prior à posteriori sit subtrahenda, erit residuum $\sqrt{8}(10 - \sqrt{8}11) - \sqrt{8}(5 + \sqrt{8}6.)$ Sed de huiusmodi radicibus plura cap. 24. dicemus.

SIT subtrahenda $\sqrt{88}256 - \sqrt{cc}27.$ à $\sqrt{88}2401 - \sqrt{cc}1.$ Vbi manifestum est, residuum esse 5. Quoniam $\sqrt{88}2401.$ & $\sqrt{88}256.$ commensurabiles sunt, si hæc ab illa demantur, relinquetur $\sqrt{88}81.$ hoc est, 3. Et si $-\sqrt{cc}27.$ à $-\sqrt{cc}1.$ subtrahatur, cum sint etiam commensurabiles, remanebit $+\sqrt{cc}8.$ hoc est, 2. Liquet autem 3. & 2. efficere 5. vt ratio postulat.

$$\begin{array}{r} \sqrt{88}\ 2401 - \sqrt{cc}\ 1 \\ \sqrt{88}\ 256 - \sqrt{cc}\ 27 \\ \hline \sqrt{88}\ 81 + \sqrt{cc}\ 8 \end{array}$$

ITEM sint subtrahenda $9 - \sqrt{8}50.$ à $\sqrt{8}72 - 3.$ Quoniam $+\sqrt{8}72.$ & $-\sqrt{8}50.$ habent dissimilia signa, mutabitur species operationis, hoc est, inter se addendæ sunt, fietque earum summa $\sqrt{8}242.$ Item quia $-3.$ & $+9.$ habent signa diuersa, fiet etiam additio, & summa 12. recipiet signum — superioris numeri. Residuum ergo quod quæritur, erit $\sqrt{8}242 - 12.$

$$\begin{array}{r} \sqrt{8}\ 72 - 3 \\ 9 - \sqrt{8}\ 50 \\ \hline \sqrt{8}\ 242 - 12 \end{array}$$

ITEM sit subtrahendus à $\sqrt{cc}\ 1000 + \sqrt{88}3125.$ numerus hic $\sqrt{cc}216 - \sqrt{88}405.$ Quia $\sqrt{cc}1000.$ & $\sqrt{cc}216.$ commensurabiles sunt, detracta hac ex illa, remanet $\sqrt{cc}64.$ hoc est, 4. At ex $\sqrt{88}3125.$ & $\sqrt{88}405.$ quæ etiam commensurabiles sunt, fit summa $\sqrt{88}20480.$ Hæ inter se addendæ sunt, iuxta 2. regulam, propter signa dissimilia: eique summæ prefigendum signum + superioris numeri.

$$\begin{array}{r} \sqrt{cc}\ 1000 + \sqrt{88}\ 3125 \\ \sqrt{cc}\ 216 - \sqrt{88}\ 405 \\ \hline 4 + \sqrt{88}\ 20480 \end{array}$$

DENI-

DENIQVE sit subtrahenda $\sqrt{cc}216 - \sqrt{88}405.$ à $\sqrt{cc}\ 1000 - \sqrt{88}\ 3125.$ Residuum erit id, quod in hac formula descriptum est. Nam $\sqrt{cc}216.$ detracta ex $\sqrt{cc}\ 1000.$ reliquam facit $\sqrt{cc}64.$ hoc est, 4. &c.

$$\begin{array}{r} \sqrt{cc}\ 1000 - \sqrt{88}\ 3125 \\ \sqrt{cc}\ 216 - \sqrt{88}\ 405 \\ \hline 4 - \sqrt{88}\ 80 \end{array}$$

CÆTERVM quando duæ particulæ numeri compositi sunt omnino æquales duabus particulis numeri diminuti, breuissime vnus numerus ad alterum additur, vel diminutus à composito demitur, hac ratione: *Compendiosa additio, subtractioque compositorum & diminutorum numerorum similium.*

Additio peracta erit, si prior particula alterutrius numeri duplicetur. Vt ex additione $15 + \sqrt{8}8.$ ad $15 - \sqrt{8}8.$ fit summa 30. Item ex additione $\sqrt{8}20 + 6.$ ad $\sqrt{8}20 - \sqrt{8}6.$ fit summa $\sqrt{8}80.$ Sic etiam ex $\sqrt{8}20 + \sqrt{8}6.$ ad $\sqrt{8}20 - \sqrt{8}6.$ fit summa $\sqrt{8}80.$ Ratio est, quod posteriores particulæ se mutuo interimant, propter signa + & —.

Subtractio vero absoluta erit, si posterior particula alterutrius numeri duplicetur. Vt $10 - \sqrt{8}4.$ ex $10 + \sqrt{8}4.$ relinquunt $\sqrt{8}16.$ id est 4. Item $\sqrt{8}12 - 5.$ ex $\sqrt{8}12 + 5.$ relinquunt 10. Item $\sqrt{8}12 - \sqrt{8}5.$ ex $\sqrt{8}12 + \sqrt{8}5.$ relinquunt $\sqrt{8}20.$ Ratio est, quod priores particulæ ex subtractione nil relinquant, & posteriores addendæ sunt, quemadmodum regula 2. præcipit, propter diuersa signa —— & +.

DE MVLTIPLICATIONE, AC DIVISIONE numerorum irrationalium Compositorum, & Diminutorum.

CAPVT XXIII.

HIC etiam in memoriam reuocanda est regula illa, quam cap. 5. de signis + & —— præscripsimus. Videlicet.

EADEM signa ponunt signum Additorum: Diuersa vero signa ponunt signum Subtractorum. *Regula in multiplicatione, ac diuisione obseruanda.*

Siue igitur plus in plus, siue minus in minus multiplicetur, semper producitur plus. Et siue plus in minus, siue minus in plus ducatur, semper procreatur minus. Posito igitur ex duobus numeris vno sub altero, fit multiplicatio, vt in numeris absolutis, dummodo obserues ea, quæ cap. 18. de multiplicatione radicum simplicium, & cap. 19. de earundem radicum additione, subtractioneq; tradita sunt. id quod exempla infrascripta docebunt. In sequenti exemplo, ex $-\sqrt{8}45.$ in $-\sqrt{8}20.$ fit $+\sqrt{8}900.$ hoc est $+30.$ Et ex $-\sqrt{8}45.$ in $+6.$ id est, in $+\sqrt{8}36.$ fit $-\sqrt{8}1620.$ Et ex $-\sqrt{8}20.$ in $+8.$ hoc est, in $+\sqrt{8}64.$ fit $-\sqrt{8}1280.$ Ac denique ex $+8.$ in $+6.$ fit $+48.$ Eritque totus numerus productus $48 - \sqrt{8}1280 - \sqrt{8}1620 + 30.$ qui, si fiat reductio per additionem, & subtractionem, erit $78 - \sqrt{8}5780.$ Nam ex $+48.$ & $+30.$ fiunt $+78.$ Et ex $-\sqrt{8}1280.$ & $-\sqrt{8}1620.$ quia commensurabiles sunt, fit $-\sqrt{8}5780.$

$$\begin{array}{r} 6 - \sqrt{8}\ 20 \\ 8 - \sqrt{8}\ 45 \\ \hline 48 - \sqrt{8}\ 1280 - \sqrt{8}\ 1620 + 30 \\ \text{Per reductionem erit, } 78 - \sqrt{8}\ 5780 \end{array}$$

IN hoc altero exemplo, ex $-\sqrt{88}162.$ in $-\sqrt{88}648.$ fit $+\sqrt{88}104976.$ hoc est, $+18.$ Et ex $-\sqrt{88}162.$ in $+\sqrt{88}288.$ fit $-\sqrt{88}46656.$ hoc est, $\sqrt{8}216.$ Et ex $-\sqrt{88}648.$ in $+\sqrt{88}128.$ fit $-\sqrt{88}82944.$ id est, $-\sqrt{8}288.$ ac tandem ex $+\sqrt{88}128.$ in $+\sqrt{88}288.$ fit $+\sqrt{88}36864$ id est, $\sqrt{8}192.$ Eritque totus numerus productus $\sqrt{8}192 - \sqrt{8}288 - \sqrt{8}216 + 18.$ Vel, vt maiores semper numeri præcedant. $18 + \sqrt{8}192 - \sqrt{8}288 - \sqrt{8}216.$ vt in formula vides.

$$\begin{array}{r} \sqrt{88}\ 288 - \sqrt{88}\ 648 \\ \sqrt{88}\ 128 - \sqrt{88}\ 162 \\ \hline \text{Productus. } \sqrt{8}\ 192 - \sqrt{8}\ 288 - \sqrt{8}\ 216 + 18 \\ \text{Vel } 18 + \sqrt{8}\ 192 - \sqrt{8}\ 288 - \sqrt{8}\ 216 \end{array}$$

Alia exempla multiplicationis.

$$\begin{array}{r} \sqrt{cc}\ 7 + \sqrt{s}\ 6 \\ \sqrt{8}\ 3 \\ \hline \sqrt{8}\sqrt{cc}\ 1323 + \sqrt{8}\sqrt{s}\ 8748 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{8}\ 7 + \sqrt{cc}\ 3 \\ \sqrt{8}\ 2 \\ \hline \sqrt{8}\ 14 + \sqrt{8}\sqrt{cc}\ 72 \end{array}$$

IN priori exemplo reduximus $\sqrt{s}\ 6.$ & $\sqrt{8}3.$ ad eandem denominationem, videlicet ad $\sqrt{8}\sqrt{s}\ 36.$ & $\sqrt{8}\sqrt{s}\ 243.$ atque ita ex multiplicatione facta est $\sqrt{8}\sqrt{s}\ 8748.$ Deinde $\sqrt{8}3.$ & $\sqrt{cc}7.$ reductæ sunt ad $\sqrt{8}\sqrt{cc}.27.$ & $\sqrt{8}\sqrt{cc}\ 49.$ eiusdem denominationis, procreataque est ex multiplicatione $\sqrt{8}\sqrt{cc}\ 1323.$

IN exemplo posteriori reductæ sunt √ 2. & √ cc 3. ad √ cc 8. & √ cc 9. & ex multiplicatione facta est √ cc 72. atque ex √ 2. in √ 7. facta est √ 14.

Aliud exemplum in numeris rationalibus.

√ 9 + √ cc 27
√ 4

√ 36 + √ cc 46656
hoc est, 6 + 6

IN hoc exemplo reducuntur √ cc 27. & √ 4. ad √ cc 729. & √ cc 64. quarum multiplicatio facit √ cc 46656. hoc est, 6. Deinde ex √ 4. in √ 9. fit √ 36. id est, 6. ita vt totus numerus productus sit 6 + 6. hoc est, 12.

Alia duo exempla.

7 + √ 5
7 + √ 5
49 + √ 245 + √ 245 + 5

7 − √ 5
7 − √ 5
49 − √ 245 − √ 245 + 5

IN priori exemplo ex numero compositio in se fit productus 49 + √ 245 + √ 245 + 5. hoc est, 54 + √ 980 quod ex 49. & + 5. fiant 54. & ex √ 245. & √ 245. hoc est, ex duplo √ 245. fiat √ 980. In posteriori ex numero diminuto in se fit productus 49 − √ 245 − √ 245 + 5. hoc est, 54 − √ 980.

Compendiosa multiplicatio numeri cõpositi, vel diminuti in se.

IMMO vt ducatur numerus compositus in seipsum, vel in alium æqualem, satis est, vt quadrata particularum simul addantur, & huic summæ adijciatur duplum eius, quod fit ex vna particula in aliam, vt in duobus proximis exemplis patet. Nam quadrata particularum conficiunt 54. Et ex vna particula in aliam fit in priori exemplo √ 245. in posteriori autem − √ 245. cuius duplum est √ 980. vel − √ 980. Igitur in exemplo priori producetur numerus 54 + √ 980. In posteriori vero hic, 54 − √ 980. veluti prius.

Alia duo exempla in numeris rationalibus.

5 + √ 4
5 + √ 4
25 + √ 100 + √ 100 + 4

5 − √ 4
5 − √ 4
25 − √ 100 − √ 100 + 4

IN Priori ducuntur 7. in se, fitque productus 49. In posteriori vero ducuntur 3. in se, fitque productus 9. vt liquet. Quæ multiplicationes per compendium proxime traditum ita fient. Quadrata particularum conficiunt 29. Et ex vna particula in aliam, fit, in priori quidem exemplo, √ 100. in posteriori vero − √ 100. cuius duplum est √ 400. vel − √ 400. In priori ergo exemplo productus numerus erit 29 + √ 400. hoc est, 49. In posteriori vero 29 − √ 400. id est, 9.

Alia duo exempla.

6 + √ 8
6 − √ 8
36 + √ 288 − √ 288 − 8

√ 10 + √ 2
√ 10 − √ 2
10 + √ 20 − √ 20 − 2

Compendiosa multiplicatio numeri compositi quadratarum radicum per similem numerum diminutum.

IN his duobus exemplis radicum quadratarum, ac similibus, in quibus ducitur numerus compositus in similem diminutum, aut contra, perficietur breuissime multiplicatio, si in alterutro numerorum ex quadrato particulæ prioris demat quadratum posterioris particulæ, siue posterior particula minor sit priore, siue maior. Vt in priori exemplo, si 8. quadratus numerus posterioris particulæ √ 8. dematur ex 36. numero quadrato prioris particulæ 6. reliquus fiet productus numerus 28. In posteriori autem exemplo, si 2. quadratus numerus posterioris particulæ √ 2. detrahatur à 10. quadrato numero prioris particulæ √ 10. relinquetur productus numerus 8.

ATQVE ita quotiescunque numerus compositus, ac diminutus radicum quadratarum irrationalis, si similes sint, inter se multiplicantur, producitur semper vnicus numerus, & is rationalis. quod quidem Eucl. lib. 10. propos. 115. demonstrauit. quia huiusmodi numeri sunt Binomium, ac Residuum, vt ex cap. 27. constabit.

2 + √ 16
2 − √ 16
4 − 16

QVANDO posterior particula maior est, producitur numerus diminutus, vt in hoc appositio exemplo apparet. Nam si 16. quadratus numerus posterioris particulæ dematur ex 4. quadrato numero particulæ prioris, remanent 4 − 16.

Atque

Atque hoc ita esse, docet hæc altera formula multiplicationis. Et quoniam 2 + √ 16. faciunt 6. & 2 − √ 16. faciunt 2 − 4. si 2 − 4. ducantur in 6. fit productus numerus 12 − 24. Necesse igitur est, hosce duos numeros 4 − 16. & 12 − 24. esse æquales, vt vere sunt, cum vnus ab altero detractus relinquat 0. vt subscriptæ duæ formulæ subtractionum demonstrant: quia 8 − 8. æquiualent nihilo. quod etiam ex eo patet, quod tam ex 4. ad − 16. quam ex 12. ad − 24. semper summa fiat − 12. iuxta regulam 2. additionis.

2 + √ 16
2 − √ 16
− √ 64 − 16
4 + √ 64
4 − 16

2 − 4
6
12 − 24

PORRO de multiplicatione radicum numerorum compositorum, vel diminutorum, quas Vniuersales dicunt, agemus cap. 24. quod sequitur.

4 − 16
12 − 24
− 8 + 8

12 − 24
4 − 16
8 − 8

Exempla Diuisionis.

Diuisio numeri compositi diminutiue per radicem simplicem.

√ cc 28 + √ cc 20 (√ cc 7 + √ cc 5
per √ cc 4 √ cc 4

6

√ cc 28 + √ cc 20 (√ cc 4 + √ cc 2 1/5
per √ cc 7 √ cc 7

Alia Exempla Diuisionis.

√ 8 20 − √ cc 10 (√ 8 2 2/9 − √ cc 10 1/9
per 3

√ 88 8 + √ 8 3 (√ 88 2 + √ 8 3/32
per √ 8 2

IN priori exemplo, diuisa √ 8 20. per 3. id est, per √ 8 9. fit Quotiens √ 8 2 2/9. Diuisa vero − √ cc 10. per + 3. id est, per + √ cc 27. fit Quotiens − √ cc 1 1/9. In posteriori autem exemplo, reducendæ sunt √ 88 8. & √ 8 2. ad √ 888 64. & √ 888 16. eiusdem denominationis, diuisaque illa per hanc, fit Quotiens √ 888 4. hoc est, √ 8 2. Eodem modo √ 8 3. & √ 8 2. reducendæ sunt ad √ 8 9. & √ 8 32. diuisaque illa per hanc, fit Quotiens √ 8 3/32. Quoniam autem multiplicatio probat diuisionem, si posterior Quotiens multiplicetur per √ 8 2. diuisorem, producetur numerus diuisus √ 88 8 + √ 8 3. Nam √ 8 3/32. & √ 8 2. reducuntur ad √ 88 8 1/1024. & √ 88 1024. quæ inter se multiplicatæ gignunt √ 88 8 288/1024. hoc est, √ 88 8 81. siue √ 8 3. Item √ 88 2. & √ 8 2. reducuntur ad √ 888 4. & √ 888 16. quæ inter se multiplicatæ faciunt √ 888 64. hoc est, √ 88 8. Item si sit diuidendus numerus √ 88 23328 − √ 88 10368. per 6. hoc est, per √ 88 1296. fit Quotiens √ 88 18 − √ 88 8. hoc est 18 − 9. nimirum 9.

Diuisio per numerum radicum quadratarum, vel sensizensicarum compositi, aut diminuti.

QVANDO diuisor est numerus radicum quadratarum, vel sensizensicarum compositus, aut diminutus, oportet illum multiplicare per numerum similem, mutato signo + in −, & signo − in +. vt gignatur numerus vnicus rationalis, vt paulo ante dictum est, pro diuisore. Deinde per eundem hunc numerum ita transmutatum multiplicandus est numerus diuidendus, vt producatur nouus numerus per diuisorem inuentum diuidendus. [a] Nam hic numerus diuidendus nouus ad diuisorem nouum inuentum habet eandem proportionem, quam propositus numerus diuidendus ad diuisorem propositum: propterea quod idem numerus ille transmutatus multiplicans vtrumque horum illos produxit: ac proinde idem Quotiens fiet, siue diuidendus propositus per propositum diuisorem, siue nouus diuidendus inuentus per nouum diuisorem diuidatur. Quemadmodum quia ita se habent 12. ad 3. vt 48. ad 12. semper Quotiens 4. procreatur; siue 12. per 3. siue 48. per 12. diuidantur.

[a] 17 sept.

SINT diuidenda 42. per √ 8 25 + √ 8 4. hoc est, per 7. vbi Quotiens est 6. si multiplicetur diuisor per √ 8 25 − √ 8 4. gignetur nouus diuisor 21. qui nimirum remanet, si 4. quadratum posterioris particulæ ex 25. quadrato prioris particulæ dematur, vt paulo ante dictum est. Et si diuidendus numerus 42. hoc est, √ 8 1764. per eundem numerum √ 8 25 − √ 8 4. multiplicetur, producetur nouus numerus diuidendus √ 8 44100 − − √ 8 7056. quo diuiso per inuentum diuisorem 21. hoc est, per √ 8 441. fit Quotiens 6. Nam √ 8 100. nimirum 10 − √ 8 16. id est, − 4. facit 6. vt manifestum est.

23
364
√ 8 44100 − √ 8 7056 (√ 8 100 − √ 8 16
√ 8 441 √ 8 441
44

SINT rursus diuidenda 54. per 2 + √ 8 16. hoc est, per 6. vbi Quotiens est 9. Si diuisor ducatur in 2 − √ 8 16. producetur numerus diminutus 4 − 16. quia posterior particula priore maior est. Quare inuertendæ sunt particulæ diuisoris hoc modo √ 8 16 + 2, vt ex ductu √ 8 16 − 2. fiat numerus simplex 12. pro diuisore. Quod si diuidendus numerus 54. ducatur in eundem numerum √ 8 16 − 2. fiet nouus diuidendus √ 8 46656 − 108. quo diuiso per 12. nimirum √ 8 46656. per √ 8 144. & − 108. per 12. fit Quotiens √ 8 324 − 9. hoc est, 18 − 9. nimirum 9.

ITEM sint diuidenda 6. per $\sqrt{8}12+\sqrt{8}6$. Ducto vtroque numero in $\sqrt{8}12-\sqrt{8}6$. fiunt $\sqrt{8}432-\sqrt{8}216$. & 6. Ex diuisione autem $\sqrt{8}432-\sqrt{8}216$. per 6. hoc est, per $\sqrt{8}36$. fit Quotiens $\sqrt{8}12-\sqrt{8}6$. Probatur. Nam ex Quotiente $\sqrt{8}12-\sqrt{8}6$. in diuisorem $\sqrt{8}12+\sqrt{8}6$. fit numerus diuisus 6.

ITEM diuidendus sit numerus $66-\sqrt{8}2000$. per $8-\sqrt{8}45$. Si vterque numerus ducatur in $8+\sqrt{8}45$. fit nouus diuidendus $528-\sqrt{8}128000+\sqrt{8}196020-\sqrt{8}90000$. hoc est, $228+\sqrt{8}7220$. (Nam detracta $\sqrt{8}90000$. id est, 300. ex 528. reliquus fit numerus 228. & $\sqrt{8}128000$. detracta ex $\sqrt{8}196020$. cum hi numeri sint commensurabiles, relinquit $\sqrt{8}7220$.) atq; nouus diuisor 19. Fit autem ex diuisione Quotiens $12+\sqrt{8}20$. Nam ex hoc Quotiente in diuisorem $8-\sqrt{8}45$. fit numerus $96+\sqrt{8}1280-\sqrt{8}6480$ $-\sqrt{8}900$. qui æqualis est numero diuiso $66-\sqrt{8}2000$. quia $\sqrt{8}900$. hoc est, 30. ex 96. relinquit 66. & $-\sqrt{8}6480$. ex $+\sqrt{8}1280$. hoc est, ex additione vnius ad alterum propter signa diuersa, cum sint commensurabiles, fit numerus $-\sqrt{8}2000$.

SINT quoque diuidenda 20. per $\sqrt{88}16+\sqrt{88}81$. hoc est, per 5. vbi Quotiens est 4. Inuertatur diuisor sic, $\sqrt{88}81+\sqrt{88}16$. vt posterior particula minor sit priore, multiplicetur que tam diuidendus 20. quam diuisor $\sqrt{88}81+\sqrt{88}16$. per $\sqrt{88}81-\sqrt{88}16$. fietque nouus diuidendus $\sqrt{88}12960000-\sqrt{88}2560000$. & nouus diuisor $\sqrt{88}6561-\sqrt{88}256$. hoc est $9-4$. videlicet 5. Diuiso ergo illo diuidendo per 5. hoc est, per $\sqrt{88}625$. fit Quotiens $\sqrt{88}20736-\sqrt{88}4096$. hoc est, $12-8$. nimirum 4. vt par est. Adduxi hoc exemplum in numeris rationalibus, vt intelligeres, eandem esse rationem in radicibus zensizensicis, quæ est in radicibus zensicis.

SINT rursus diuidenda 10. per $\sqrt{88}5+\sqrt{88}3$. Multiplicetur vterque numerus per $\sqrt{88}5-\sqrt{88}3$. fietque nouus diuidendus $\sqrt{88}50000-\sqrt{88}30000$. & nouus diuisor $\sqrt{88}25-\sqrt{88}9$. hoc est, $\sqrt{8}5-\sqrt{8}3$. Et quoniam hic diuisor non est numerus vnicus rationalis, multiplicabimus tam nouum diuidendum inuentum, quam nouum diuisorem, per $\sqrt{8}5+\sqrt{8}3$. fietq; alius nouus diuidendus $\sqrt{88}1250000+\sqrt{88}750000+\sqrt{88}450000-\sqrt{88}270000$. & alius diuisor nouus $5-3$. hoc est, 2. Si ergo illum diuidendum per hunc diuisorem diuidemus, id est, per $\sqrt{88}16$. faciemus Quotientem $\sqrt{88}78125-\sqrt{88}46875+\sqrt{88}28125-\sqrt{88}16875$. Quod probatur. Si namque hic Quotiens ducatur in diuisorem propositum, nimirum in $\sqrt{88}5+\sqrt{88}3$. producetur numerus diuisus 10. vt hic patet.

$$\begin{array}{r}\sqrt{88}78125-\sqrt{88}46875+\sqrt{88}28125-\sqrt{88}16875\\ \hline \sqrt{88}5+\sqrt{88}3\\ \hline +\sqrt{88}234375-\sqrt{88}140625+\sqrt{88}84375-\sqrt{88}50625\\ \sqrt{88}390625-\sqrt{88}234375+\sqrt{88}140625-\sqrt{88}84375\end{array}$$

Quoniam enim numeri intermedij, quorum bini æquales sunt, & diuersorum signorum, se mutuo tollunt, relinquetur productus $\sqrt{88}390625-\sqrt{88}50625$. hoc est, $25-15$. videlicet 10.

Diuisio per numerum radicum quadratarum compositū triū particularum vel plurium.

PRÆTEREA sint diuidenda 100. per $\sqrt{8}3+\sqrt{8}5+\sqrt{8}6$. Hic quia diuisor habet tres particulas affectas signo +. vt inueniatur diuisor simplex, multiplicandus est diuisor in similem numerum, mutata vltima particula +. in —. vt hic vides. Producetur enim numerus duarum particularum $\sqrt{8}60+2$ pro nouo diuisore, qui etiam habebitur hoc modo. Priores duæ particulæ inter se multiplicentur. Nam si productus numerus $\sqrt{8}15$. duplicetur, proueniet $\sqrt{8}60$. pro priore particula. Et si vltimæ particulæ numerus 6. demat ur ex 8. summa numerorum 3. & 5. priorum duarum particularum, remanebit numerus + 2. pro particula posteriore. Quod si numerus diuidendus 100. per eundem numerum $\sqrt{8}3+\sqrt{8}5-\sqrt{8}6$. multiplicetur, gignetur nouus numerus diuidendus $\sqrt{8}30000+\sqrt{8}50000-\sqrt{8}60000$.[a] qui ad nouum diuisorem inuentum eandem proportionem habebit, quam numerus diuidendus propositus 100. ad propositum diuisorem $\sqrt{8}3+\sqrt{8}5+\sqrt{8}6$.

$$\begin{array}{r}\sqrt{8}3+\sqrt{8}5+\sqrt{8}6\\ \sqrt{8}3+\sqrt{8}5-\sqrt{8}6\\ \hline -\sqrt{8}18-\sqrt{8}30-6\\ +\sqrt{8}15+5+\sqrt{8}30\\ +3+\sqrt{8}15+\sqrt{8}18\\ \hline \sqrt{8}60+2\end{array}$$

[a] 17. sept.

Sed quoniam inuentus nouus diuisor nondum est simplex, ducemus eum in diminutum similem, nimirum in $\sqrt{8}60-2$. efficiemusq; $60-4$. hoc est, 56. pro nouo diuisore. Et si nouus diuidendus $\sqrt{8}30000+\sqrt{8}50000-\sqrt{8}60000$. ducatur in eundem numerum $\sqrt{8}60-2$. procreabitur nouus numerus diuidendus $\sqrt{8}1800000+\sqrt{8}3000000+\sqrt{8}240000-\sqrt{8}120000-\sqrt{8}200000-\sqrt{8}3600000$ quo diuiso per diuisorem inuentum 56. prodibit idem Quotiens, qui proueniret, si datus numerus 100. per datum diuisorem $\sqrt{8}3+\sqrt{8}5+\sqrt{8}6$. diuideretur.

QVOD si diuisorem datum $\sqrt{8}3+\sqrt{8}5+\sqrt{8}6$. & numerum diuidendum 100. multiplicaremus per $\sqrt{8}3-\sqrt{8}5+\sqrt{8}6$. (Nam quando omnes tres particulæ habent signum +. poterit quælibet earum mutari in —) produceremus nouum diuisorem $\sqrt{88}72+4$. & nouum diuidendum $\sqrt{8}30000-\sqrt{8}50000+\sqrt{8}60000$. Et si tam hic diuidendus, quam ille diuisor $\sqrt{8}72+4$. ducatur in $\sqrt{8}72-4$. producetur nouus alius diuidendus, & nouus diuisor simplex 56.[b] ad quem diuidendus nouus eandem proportionem habebit, quam datus numerus diuidendus 100 ad datum diuisorem $\sqrt{8}3+\sqrt{8}5+\sqrt{8}6$.

[b] 17. sept.

SI vero diuisor habuerit vnam particulam cum signo —. vertendum erit signum — in +. vt fiat multiplicatio.

ATQVE hoc eodem modo, si diuisor habuerit plures particulas radicum quadratarum, quam tres, mutabis semper vnam ex +, in —, vel contra. Nam ex prima multiplicatione gignetur numerus totidem particularum, minus vna, & in secunda totidem quoque, minus duabus, & sic deinceps procedendum erit, donec fiat numerus simplex pro diuisore nouo. Diuidendus quoque numerus ducendus est in primum numerum multiplicantem: Deinde productus numerus in secundum, &c. ita vt tot fiant multiplicationes, quot factæ sunt, vt diuisor simplex inueniretur.

QVAN-

Diuisio per numerum radicum cubicarum compositū.

QVANDO diuisor habet duas particulas radicum cubicarum, inueniendus etiam est diuisor simplex. quod ita fiet. Sint V.g diuidenda 10. per $\sqrt{cc}5+\sqrt{cc}3$. Per doctrinam propos. 2. lib. 8. Eucl. reperiantur tres numeri continue proportionales (propter 3. exponentem cubi) in proportione particularum diuisoris, nimirum $\sqrt{cc}5$. ad $\sqrt{cc}3$. hac methodo. Primum ducatur $\sqrt{cc}5$. in se, fietque primus numerus $\sqrt{cc}25$. Deinde ducatur $\sqrt{cc}5$. in $\sqrt{cc}3$. gigneturque secundus numerus $\sqrt{cc}15$. Tertio ducatur quoque $\sqrt{cc}3$. in se, proueniet que tertius numerus $\sqrt{cc}9$. atque ita hi tres numeri producti. $\sqrt{cc}25$. & $\sqrt{cc}15$. & $\sqrt{cc}9$. erunt continue proportionales in proportione $\sqrt{cc}5$. ad $\sqrt{cc}3$. vt in dicta propos. 2. lib. 8. ab Euclide demonstratum fuit. Quod etiam experiri licebit per multiplicationem. Nam positis tribus numeris $\sqrt{cc}25$. $\sqrt{cc}15$. $\sqrt{cc}9$. tantum fit ex primo in tertium, quantum ex medio in se. Item positis quatuor numeris $\sqrt{cc}5$. $\sqrt{cc}3$. $\sqrt{cc}25$. $\sqrt{cc}15$. tantum fit ex primo in quartum, quantum ex secundo in tertium. quod etiam in his quatuor $\sqrt{cc}5$. $\sqrt{cc}3$. $\sqrt{cc}15$. $\sqrt{cc}9$. cernitur. Extremi duo numeri afficiantur signo +, & medius signo —. hoc modo $\sqrt{cc}25-\sqrt{cc}15+\sqrt{cc}9$. Per hunc communem numerum multiplicantem si multiplicetur tam numerus 10. diuidendus, quam diuisor $\sqrt{cc}5+\sqrt{cc}3$. fiet nouus diuidendus $\sqrt{cc}25000-\sqrt{cc}15000+\sqrt{cc}9000$. & nouus diuisor $\sqrt{cc}125+\sqrt{cc}27$. id est, 8. vt in subiecta formula liquet. qui diuisor simplex habetur, (vt auctores docent, & quod est obseruatione dignum) si numeri particularum diuisoris 5. & 3. simul addatur, etiam si nulla fiat multiplicatio.

$$\begin{array}{r}\sqrt{cc}25-\sqrt{cc}15+\sqrt{cc}9\\ \sqrt{cc}5+\sqrt{cc}3\\ \hline +\sqrt{cc}75-\sqrt{cc}45+\sqrt{cc}27\\ +\sqrt{cc}125-\sqrt{cc}75+\sqrt{cc}45\\ \hline \text{Summa. } \sqrt{cc}125+\sqrt{cc}27\end{array}$$

Diuisio per numerum radicum zensizensicarum, surdesolidarum, &c. compositū.

EADEM via tenēda est in diuisore compositō duarum radicum zensizensicarum, surdesolidarum, zensicubicarum, &c. dummodo tot numeri continue proportionales, secundum doctrinam propos. 2. lib. 8. Eucl. reperiantur in proportione particularum diuisoris, quot vnitates sunt in exponente $\beta\beta.\beta.\beta cc.$ &c. nimirum quatuor in diuisore radicum zensizensicarum, & quinque pro diuisore radicum surdesolidarum, & sex pro zensicubicis, &c. Quibus inuentis, tribuatur primo numero signum +. secundo signum —. tertio iterum signum +. & quarto iterum signum —. atque ita alternatim procedendo, vt numeri in locis imparibus gerant signum +, & in locis paribus signū —. Exemplum ponam in diuisione 10. per $\sqrt{88}5+\sqrt{88}3$. quam supra alio modo expediuimus. Quoniam exponens $\beta\beta$. est 4. inuenientur hi quatuor numeri proportionales $\sqrt{88}125.\sqrt{88}75.\sqrt{88}45.\sqrt{88}27$. iuxta doctrinam propos. 2. lib. 8. Euclid. vt hic cernis: vbi apposuimus signum + numeris locorum imparium, numeris autem locorum parium signum — vt diximus faciendum esse. Iam si per hunc numerum quatuor particularum multiplicetur tam numerus 10. diuidendus, quam diuisor $\sqrt{88}5+\sqrt{88}3$. reperietur nouus numerus diuidendus $\sqrt{88}1250000-\sqrt{88}750000+\sqrt{88}450000-\sqrt{88}270000$. & nouus diuisor $\sqrt{88}625-\sqrt{88}81$. hoc est, 2. iidem omnino, qui supra ante diuisionem per numerum radicum quadratarū compositum trium particularum. Atq; hic diuisor, sine multiplicatione, habetur, vt auctores docent, si minoris particulæ numerus in diuisore demat ur ex numero particulæ maioris, videlicet 3. ex 5. vt hæ formulæ indicant.

$$\begin{array}{r}\sqrt{88}5+\sqrt{88}3.\\ \sqrt{88}25.\ \sqrt{88}15.\ \sqrt{88}9\\ \hline \sqrt{88}125-\sqrt{88}75+\sqrt{88}45-\sqrt{88}27\end{array}$$

Inuentio numeri diuidendi.

10. hoc est, $\sqrt{88}10000$

$$\begin{array}{r}\sqrt{88}125-\sqrt{88}75+\sqrt{88}45-\sqrt{88}27\\ \hline \sqrt{88}1250000-\sqrt{88}750000+\sqrt{88}450000-\sqrt{88}270000\end{array}$$

Inuentio diuisoris.

$$\begin{array}{r}\sqrt{88}125-\sqrt{88}75+\sqrt{88}45-\sqrt{88}27\\ \sqrt{88}5+\sqrt{88}3\\ \hline +\sqrt{88}375-\sqrt{88}225+\sqrt{88}135-\sqrt{88}81\\ +\sqrt{88}625-\sqrt{88}375+\sqrt{88}225-\sqrt{88}135\\ \hline \sqrt{88}625-\sqrt{88}81\end{array}$$

EADEM ratio est de cæteris. Sed quando numerus exponens radicum est par, vt $\sqrt{8}.\sqrt{88}.$ &c. diuisor simplex habetur, si (vt auctores docent) numerus particulæ minoris in dato diuisore ex numero maioris particulæ subducatur: at vero, quando exponens numerus est impar, vt $\sqrt{cc}.\sqrt{\beta}.$ &c. simplex diuisor habetur, si numeri particularum diuisoris dati in vnam colligantur summam. id quod in superioribus obseruatum esse vides.

Diuisio per numerum compositū diuersarū radicum.

SED neque hoc omittendum est, quando diuisor est duarum radicum diuersarum, eas ad eandem denominationem esse reducendas, antequam operationem auspiceris.

DENIQVE quando diuisor est plurium particularum, ac diuersarum radicum, ita vt non facile reduci possit ad simplicem diuisorem, constituenda erit fractio, cuius numerator sit numerus diuidendus, & denominator ipsemet diuisor: non secus ac in numeris absolutis fieri solet, quando minor numerus per maiorem diuidendus proponitur, vt 3 per 4. Fit enim fractio $\frac{3}{4}$. Verbi gratia, si numerus $\sqrt{8}48+\sqrt{cc}3$. diuidendus sit per $\sqrt{8}15+\sqrt{cc}6-\sqrt{8}3$. fiet hæc fractio.

$$\frac{\text{Numerator. } \sqrt{8}48+\sqrt{cc}3}{\text{Denominator. } \sqrt{8}15+\sqrt{cc}6-\sqrt{8}3}$$

SCHO-

SCHOLIVM.

Vter ducrũ numerorũ compositorum maior sit.

ACCIDIT *non raro, vt inter duos numeros irrationales compositos ambigatur, vter eorum maior sit. quæ ambiguitas ita tolletur. Sint propositi duo numeri,* $4+\sqrt{\beta}7$. *&* $20-\sqrt{\beta}180$. *Auferatur vtrobique numerus 4. remanetas ita tolletur. Sint propositi duo numeri,* $4+\sqrt{\beta}7$. *&* $20-\sqrt{\beta}180$. *Auferatur vtrobique numerus 4. remanebitque ex vna parte,* $\sqrt{\beta}7$. *& ex altera,* $16-\sqrt{\beta}180$. *Certum autem est, si duo numeri dati sint æquales, residua etiam æqualia esse: Et si inæquales, residua eodem modo esse inæqualia. Quadretur vtrumque residuum, eritque prioris residui quadratum 7. posterioris vero, 436 —* $\sqrt{\beta}184320$. *Certum quoque est, si residua sint æqualia, eorum quadrata quoque æqualia esse: Et si illa sint inæqualia, hæc etiam esse inæqualia. Addatur vtrique quadrato diminutum hoc —* $\sqrt{\beta}184320$. *fientque numeri* $7+\sqrt{\beta}184320$. *& 436. Auferantur vtrinque 7. eruntque reliqui numeri* $\sqrt{\beta}184320$. *& 429. qui quadrentur, vt fiant 184320. & 184041. Et quia illud quadratum maius est, quam hoc, pronunciabis numerum* $4-\sqrt{\beta}7$. *maiorem esse numero 20 —* $\sqrt{\beta}180$. *Eodem pacto cum alijs numeris procedes. Hoc etiam per extractiones radicum constat. Nam radix propinqua numeri 7 est* $2\frac{3}{5}$. *quæ cum 4. facit* $6\frac{3}{5}$. *At radix propinqua numeri 180. est* $13\frac{11}{27}$. *quæ dempta ex 20. relinquit* $\frac{46}{27}$. *Constat autem* $\frac{3}{5}$. *esse numerum maiorem, quam* $\frac{11}{27}$. *Atque ita habes aliam rationem tollendi ambiguitatem. Sed prior ratio est magis accurata.*

DE RADICIBVS NVMERORVM IRRATIONALIVM COMPOSITORVM, VEL DIMINVTORVM: QVAS ALIJ VNIVERSALES DICVNT: & DE EARVNDEM ALGORITHMO.

CAPVT XXIV.

Varia radices numerorũ compositorum.

LÆ radices oriuntur plerunque ex additione, ac subtractione radicum irrationalium simplicium incommensurabilium, vt in cap. 19. ac 20. patuit: quas hoc loco paulo diligentius explicare proponimus. quod exequemur, expositis varijs radicibus numerorum compositorum, vna cum earum Algorithmo. Si igitur ex hoc numero composito, $10+\sqrt{\beta}7$. extrahenda sit radix quadrata, erit ea $\sqrt{\beta}(10+\sqrt{\beta}7.)$ cuius sensus est, vt radice quadrata numeri 7. si haberi posset, addita ad 10. totius numeri radix quadrata sumatur. In hac vero altera radice. $\sqrt{\text{ce}}(10+\sqrt{\beta}7.)$ intelligimus radicem cubicam numeri ex 10. & $\sqrt{\beta}7$. compositi. Et vt res planius percipiatur, proferemus exempla in numeris rationalibus. Vt $\sqrt{\beta}(10+\sqrt{\beta}16+3+\sqrt{\beta}64)$ nihil aliud significat, quam 5. Nam $\sqrt{\beta}16$. est 4. quæ addita ad 3. facit 7. & 7. cum $\sqrt{\beta}64$. id est, cum 8. faciunt 15. quibus si addantur 10. fiunt 25. pretium totius numeri compositi, cuius radix quadrata est 5. Item $\sqrt{\text{ce}}(\sqrt{\beta}25+\sqrt{\beta}9)$ erit 2. Est enim sensus, vt sumptis radicibus quadratis numerorũ 25. & 9. quæ sunt 5. & 3. efficientes 8: extrahatur ex hac summa radix cubica, quæ est 2. Hæc vero radix, $\sqrt{\beta}(10+\sqrt{\beta}36)+\sqrt{\beta}(70+\sqrt{\beta}121.)$ valebit 13. Significatur enim radicem quadratam compositi $10+\sqrt{\beta}36$. quod est 16. nimirum $\sqrt{\beta}16$. quæ est 4. addi ad 9. radicem quadratam compositi $70+\sqrt{\beta}121$. quod est 81.

Quadratæ & cubi radicum numerorum compositorum.

QVEMADMODVM autem quadratum radicis quadrati cuiusuis surdæ simplicis est ipse numerus, deleto signo radicali $\sqrt{\beta}$. Et cubus radicis cubicæ simplicis, ipse numerus, deleto signo radicali $\sqrt{\text{ce}}$. Vt quadratum $\sqrt{\beta}5$. est 5. & quadratum $\sqrt{\beta}25$. est 25. Cubus vero $\sqrt{\text{ce}}12$. est 12. & cubus $\sqrt{\text{ce}}27$. est 27. propterea quod radix quælibet quadrata ducta in se quadrate producit eius radicis quadratum, ducta vero in se cubice gignit cubum eiusdem radicis: Ita quoque quadratum radicis quadratæ numeri cuiuslibet compositi est ipsemet numerus compositus, deleto signo $\sqrt{\beta}$. Et cubus radicis cubicæ numeri compositi cuiusuis est ipsemet numerus, deleto signo $\sqrt{\text{ce}}$. Vt quadratum $\sqrt{\beta}(11+\sqrt{\beta}9+\sqrt{\beta}4.)$ est $11+\sqrt{\beta}9+\sqrt{\beta}4$. hoc est, 16. ita vt illa radix valeat 4.

Quadratum $\sqrt{\beta}(\sqrt{\beta}49+\sqrt{\beta}36-\sqrt{\beta}16)$ est $\sqrt{\beta}49+\sqrt{\beta}36-\sqrt{\beta}16$. hoc est, 9. ita vt radix illa valeat 3.

Quadratum $\sqrt{\beta}(\sqrt{\beta}64+\sqrt{\beta}49+\sqrt{\beta}36-5)$ est $\sqrt{\beta}64+\sqrt{\beta}49+\sqrt{\beta}36-5$. hoc est, 16. ita vt valor illius radicis sit 4.

Quadratum $\sqrt{\beta}(\sqrt{\text{ce}}216+\sqrt{\text{ce}}27)$ est $\sqrt{\text{ce}}216+\sqrt{\text{ce}}27$. hoc est, 9. pretiumque eius radicis est 3.

Quadratum $\sqrt{\beta}(\sqrt{\text{ce}}216-\sqrt{\text{ce}}27.)$ est $\sqrt{\text{ce}}216-\sqrt{\text{ce}}27$. hoc est, 3. valorque eius radicis est $\sqrt{\beta}3$.

Cubus $\sqrt{\text{ce}}(\sqrt{\beta}25+\sqrt{\beta}9)$ est $\sqrt{\beta}25+\sqrt{\beta}9$. hoc est, 8. ita vt radix illa valeat 2.

Cubus $\sqrt{\text{ce}}(\sqrt{\beta}25-\sqrt{\beta}9)$ est $\sqrt{\beta}25-\sqrt{\beta}9$. id est, 2. pretiumque radicis illius est $\sqrt{\text{ce}}2$.

Cubus $\sqrt{\text{ce}}(\sqrt{\text{ce}}64+\sqrt{\text{ce}}27.)$ est $\sqrt{\text{ce}}64+\sqrt{\text{ce}}27$. id est, 7. ita vt radix illa sit $\sqrt{\text{ce}}7$. Idemque iudicium facies de zensizensis, ac surdesolidis, &c. radicum zensizensicarum, & surdesolidarum numerorum compositorum. Proposui autem exempla in numeris rationalibus, vt res fieret clarior. Atque hoc modo multiplicatur radix cuiuslibet numeri compositi in se; hoc est, producitur eius quadratum, vel cubus, &c.

Multiplicatio radicis numeri cõpositi in se. Multiplicatio radicũ numerorũ compositorum.

AT vero radix numeri compositi in radicem simplicem, vel in numerũ compositum, vel in numerum absolutum, vel denique in aliam radicem numeri compositi, multiplicabitur hac ratione. Vterq; numerus tam multiplicandus, quam multiplicans, reducatur ad quadratum, vel cubum. Deinde fiat multiplicatio, vt supra traditum est. Nam radix totius producti erit numerus procreatus ex multiplicatione, quemadmodum ex $\sqrt{\beta}5$. in $\sqrt{\beta}12$. fit $\sqrt{\beta}60$. radix nimirum zensica numeri 60. ex multiplicatione quadratorum 5. & 12. producti. Item sicut ex $\sqrt{\text{ce}}9$. in $\sqrt{\text{ce}}10$. fit $\sqrt{\text{ce}}90$. videlicet radix cubica numeri 90. qui ex multiplicatione cubi 9. in cubum 10. gignitur, vt cap. præcedenti traditum est. Hoc autem clarius ex sequentibus exemplis discès. Sit enim multiplicanda $\sqrt{\beta}(7+\sqrt{\beta}3.)$ per 2. Quadrata sunt $7+\sqrt{\beta}3$. & 4. Si ergo ducantur 4. in 7. fiunt 28. Et si ducatur $\sqrt{\beta}3$. in 4. hoc est, in $\sqrt{\beta}16$. fit $\sqrt{\beta}48$. Totus ergo numerus productus est $\sqrt{\beta}(28+\sqrt{\beta}48.)$ Rite autem hoc modo fieri multiplicationẽ, discès ex hoc altero exemplo numerorum rationalium. Sit ducenda, $\sqrt{\beta}(7+\sqrt{\beta}4.)$ hoc est, 3. (nam 7. cum $\sqrt{\beta}4$. faciunt 9. cuius $\sqrt{\beta}$ est 3.) per 2. Vbi manifestum est, numerum genitum fore 6. Quadrata sunt $7+\sqrt{\beta}4$. Si igitur ducãtur 4. in 7. fiunt 28. Et si $\sqrt{\beta}4$. ducatur in 4. hoc est, in $\sqrt{\beta}16$. fit $\sqrt{\beta}64$. eritq; totus numerus productus $\sqrt{\beta}(28+\sqrt{\beta}64.)$ hoc est, $\sqrt{\beta}36$. nimirum 6. vt conuenit.

Sit rursus multiplicanda $\sqrt{\beta}(7+\sqrt{\beta}4)$ per 3. hoc est 3. per 3. vbi productus numerus est 9. Quadrata sunt $7+\sqrt{\beta}4$. & 9. Ex 9. in 7. fiunt 63. & ex $\sqrt{\beta}4$. in 9. hoc est, in $\sqrt{\beta}81$. fit $\sqrt{\beta}324$. Productus ergo numerus erit $\sqrt{\beta}(63+\sqrt{\beta}324)$ hoc est, $\sqrt{\beta}81$. nimirum 9.

ITEM sit multiplicnda $\sqrt{\beta}(\sqrt{\beta}25+\sqrt{\beta}16)$ hoc est, $\sqrt{\beta}9$. siue 3. per 3. vbi etiam constat, productum numerum fore 9. Quadrata sunt $\sqrt{\beta}25+\sqrt{\beta}16$. & 9. Ex $\sqrt{\beta}25$. in 9. hoc est, in $\sqrt{\beta}81$. fit $\sqrt{\beta}2025$. Et ex $\sqrt{\beta}16$. in 9. id est, in $\sqrt{\beta}81$. fit $\sqrt{\beta}1296$. Procreatus ergo numerus erit $\sqrt{\beta}(\sqrt{\beta}2025+\sqrt{\beta}1296.)$ hoc est, $\sqrt{\beta}(45+36)$ siue $\sqrt{\beta}81$. hoc est, 9.

SIT multiplicanda $\sqrt{\text{ce}}(\sqrt{\text{ce}}64+\sqrt{\text{ce}}27.)$ hoc est, $\sqrt{\text{ce}}7$. per 2. vbi productus erit $\sqrt{\text{ce}}56$. Cubi numerorum sunt $\sqrt{\text{ce}}64+\sqrt{\text{ce}}27$. & 8. Ex $\sqrt{\text{ce}}64$. in 8. hoc est, in $\sqrt{\text{ce}}512$ fit $\sqrt{\text{ce}}32768$. & ex $\sqrt{\text{ce}}27$. in 8. hoc est, in $\sqrt{\text{ce}}512$. fit $\sqrt{\text{ce}}13824$. Cũ ergo $\sqrt{\text{ce}}32768$. sit 32. Et $\sqrt{\text{ce}}13824$. fit 24. erit productus numerus $\sqrt{\text{ce}}(32+24)$ id est, $\sqrt{\text{ce}}56$.

SIT multiplicanda $\sqrt{\text{ce}}(64+\sqrt{\text{ce}}27.)$ per 2. Cubi numerorum sunt $64+\sqrt{\text{ce}}27$. & 8. Ex 64. in 8. fiunt 512. Et ex $\sqrt{\text{ce}}27$. in 8. id est, in $\sqrt{\text{ce}}512$. fit $\sqrt{\text{ce}}13824$. quæ est 24. additaque ad 512. facit 536. Est ergo productus numerus $\sqrt{\text{ce}}536$. atque ita est. Nam $\sqrt{\text{ce}}(64+\sqrt{\text{ce}}27)$ hoc est, $\sqrt{\text{ce}}67$. ducta in 2. hoc est, in $\sqrt{\text{ce}}8$. facit $\sqrt{\text{ce}}536$.

SIT ducenda $\sqrt{\text{ce}}(\sqrt{\text{ce}}64+\sqrt{\beta}36+3.)$ in 5. Cubi numerorũ sunt $\sqrt{\text{ce}}64+\sqrt{\beta}36+3$. & 125. Ex $\sqrt{\text{ce}}64$. in 125. id est, in $\sqrt{\text{ce}}1953125$. fit $\sqrt{\text{ce}}125000000$. At ex $\sqrt{\beta}36$. in 125. id est, in $\sqrt{\beta}15625$. fit $\sqrt{\beta}562500$. Et ex 3. in 125 fiunt 375. Cum ergo $\sqrt{\text{ce}}125000000$. sit 500. & $\sqrt{\beta}562500$. sit 750. erit procreatus numerus $\sqrt{\text{ce}}1625$. vt ratio postulat. Nam $\sqrt{\text{ce}}(\sqrt{\text{ce}}64+\sqrt{\beta}36+3)$ hoc est, $\sqrt{\text{ce}}13$. ducta in 5. hoc est, in $\sqrt{\text{ce}}125$. facit $\sqrt{\text{ce}}1625$.

SI numerus per 5 multiplicandus, fuisset $\sqrt{\text{ce}}(\sqrt{\text{ce}}64+\sqrt{\beta}36-3.)$ productus fuisset numerus $\sqrt{\text{ce}}(\sqrt{\text{ce}}125000000+\sqrt{\beta}562500-375.)$ hoc est, $\sqrt{\text{ce}}(500+750-375.)$ hoc est, $\sqrt{\text{ce}}875$. quod verum est. Nam $\sqrt{\text{ce}}(\sqrt{\text{ce}}64+\sqrt{\beta}36-3.)$ est $\sqrt{\text{ce}}7$. quæ ducta in 5. hoc est, in $\sqrt{\text{ce}}125$. facit $\sqrt{\text{ce}}875$.

SIT multiplicanda $\sqrt{\beta}(12+\sqrt{\beta}6)$ per 6. Quadrata numerorum sunt $12+\sqrt{\beta}6$. & 36. Ex 12. in 36. fiunt 432. Et ex $\sqrt{\beta}6$. in 36. hoc est, in $\sqrt{\beta}1296$. fit $\sqrt{\beta}7776$. Productus igitur ex multiplicatione numerus est $\sqrt{\beta}(432+\sqrt{\beta}7776.)$

SIT ducenda $\sqrt{\beta}(13+\sqrt{\beta}144)$ hoc est, $\sqrt{\beta}25$. id est, 5. per 6. vbi certum est, gigni 30. Quadrata numerorum sunt $13+\sqrt{\beta}144$. & 36. Ex 13. in 36. fiunt 468. Et ex $\sqrt{\beta}144$. in 36. id est, in $\sqrt{\beta}1296$. fit $\sqrt{\beta}186624$. Numerus ergo productus est $\sqrt{\beta}(468+\sqrt{\beta}186624)$ hoc est, $\sqrt{\beta}900$. id est, 30.

SIT multiplicãda $\sqrt{\beta}(13+\sqrt{\beta}9)$ per $\sqrt{\beta}(5+\sqrt{\beta}16)$ hoc est, $\sqrt{\beta}16$. id est, 4. per $\sqrt{\beta}9$. id est, per 3. vbi constat produci 12. Quadrata numerorũ sunt $13+\sqrt{\beta}9$. & $5+\sqrt{\beta}16$. Ex $\sqrt{\beta}9$. in $\sqrt{\beta}16$. fit $\sqrt{\beta}144$. Et ex $\sqrt{\beta}16$. in 13. id est, in $\sqrt{\beta}169$. fit $\sqrt{\beta}2704$. Deinde ex $\sqrt{\beta}9$. in 5. hoc est in $\sqrt{\beta}225$. fit 5825. Et ex 5. in 13. fiunt 65. Iam $\sqrt{\beta}144$. id est, 12. cum 65. facit 77. quibus si addantur $\sqrt{\beta}2704$. & $\sqrt{\beta}225$. nimirum 52. & 15 fiunt 144. Igitur $\sqrt{\beta}144$. id est, 12. est numerus productus, vt dictum est.

SIT rursus multiplicãda $\sqrt{\beta}(\sqrt{\beta}1800+30)-\sqrt{\beta}(\sqrt{\beta}450+15)$ per $\sqrt{\beta}(\sqrt{\beta}450+15.)$ Scribantur numeri, vt hic vides. Ex $\sqrt{\beta}(\sqrt{\beta}450+15)$ in $\sqrt{\beta}(\sqrt{\beta}450+15)$ fit eius quadratus $\sqrt{\beta}450+15$. præposito signo —. cũ + in — ducatur. Ex $\sqrt{\beta}(\sqrt{\beta}1800+30)$ in $\sqrt{\beta}(\sqrt{\beta}450+15)$ fit $\sqrt{\beta}810000+\sqrt{\beta}16200000+450$. si nimirũ quadrata

$$\begin{array}{r} 7 + \sqrt{\beta}\ 3 \\ \hline 4 \\ \hline 28 + \sqrt{\beta}\ 48 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 + \sqrt{\beta}\ 4 \\ \hline 4 \\ \hline 28 + \sqrt{\beta}\ 64 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 + \sqrt{\beta}\ 4 \\ \hline 9 \\ \hline 63 + \sqrt{\beta}\ 324 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{\beta}\ 25 + \sqrt{\beta}\ 16 \\ \hline 9 \\ \hline \sqrt{\beta}\ 2025 + \sqrt{\beta}\ 1296 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 64 + \sqrt{\text{ce}}\ 27 \\ \hline 8 \\ \hline 512 + \sqrt{\text{ce}}\ 13824 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{\text{ce}}\ 64 + \sqrt{\beta}\ 36 + 3 \\ \hline 125 \\ \hline \sqrt{\text{ce}}\ 125000000 + \sqrt{\beta}\ 562500 + 375 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 + \sqrt{\beta}\ 6 \\ \hline 36 \\ \hline 432 + \sqrt{\beta}\ 7776 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 + \sqrt{\beta}\ 144 \\ \hline 36 \\ \hline 468 + \sqrt{\beta}\ 186624 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 + \sqrt{\beta}\ 9 \\ 5 + \sqrt{\beta}\ 16 \\ \hline \sqrt{\beta}\ 2704 + \sqrt{\beta}\ 144 \\ 65 + \sqrt{\beta}\ 225 \\ \hline \sqrt{\beta}\ 2704 + \sqrt{\beta}\ 225 + 77 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{\beta}(\sqrt{\beta}1800+30)-\sqrt{\beta}(\sqrt{\beta}450+15) \\ \sqrt{\beta}(\sqrt{\beta}450+15)\quad \sqrt{\beta}(\sqrt{\beta}450+15) \\ \hline +\sqrt{\beta}4050000+450-\sqrt{\beta}450+15 \\ \sqrt{\beta}810000+\sqrt{\beta}4050000 \\ \hline \sqrt{\beta}810000+\sqrt{\beta}16200000+450 \end{array}$$

numerorum inter se multiplicentur: hoc est, $1350+\sqrt{8}1620000$. quia $\sqrt{8}810000$. æquiualet 900. qui numerus additus ad 450. facit 1350. & præposito signo $\sqrt{8}$. erit productus numerus $\sqrt{8}(1350+\sqrt{8}1620000.)$ Est autem radix huius Binomij $1350+\sqrt{8}1620000$. numerus $\sqrt{8}900+\sqrt{8}450$. vt ex cap. 28. constabit: hoc est, $30+\sqrt{8}450$. ex qua si demptum prior productus $-\sqrt{8}450+15$. factus ex $\sqrt{8}(\sqrt{8}450+15)$ in se, relinquetur numerus 15. vt in hac formula cernis. qui quidem gignitur ex multiplicatione $\sqrt{8}(\sqrt{8}1800+30)-\sqrt{8}(\sqrt{8}450+15)$ in $\sqrt{8}(\sqrt{8}450+15)$

$$\begin{array}{r} 30+\sqrt{8}450 \\ 15-\sqrt{8}450 \\ \hline 15 \end{array}$$

HAC ratione rite fieri multiplicationem, perspicuum fiet, hoc altero exemplo proposito. vbi fit multiplicatio 1. in 3. productusque numerus est 3. Nam ex $\sqrt{8}(\sqrt{8}9+6)$ in $\sqrt{8}(\sqrt{8}9+6)$ fit eius quadratus $\sqrt{8}9+6$. præposito signo $-$. cum $+$ in $-$ ducatur. Deinde ex $\sqrt{8}(\sqrt{8}4+14)$ in $\sqrt{8}(\sqrt{8}9+6)$ fit numerus $\sqrt{8}144$. id est. 12. vt in præcedenti formula vides. Nam $\sqrt{8}36$. est 6. & $\sqrt{8}144$. est 12. & $\sqrt{8}1764$. est 42. quæ omnes cum 84. faciunt 144. & præposito signo $\sqrt{8}$. fit productus $\sqrt{8}144$. nimirum 12. à quo si detrahatur alter productus $\sqrt{8}9+6$. nimirum 9, supererunt 3. pro toto numero producto.

$$\begin{array}{r} \sqrt{8}(\sqrt{8}4+14)-\sqrt{8}(\sqrt{8}9+6) \\ \sqrt{8}(\sqrt{8}9+6)\quad \sqrt{8}(\sqrt{8}9+6) \\ \hline +\sqrt{8}144+84-\sqrt{8}9+6 \\ \sqrt{8}36+\sqrt{8}1764 \\ \hline \sqrt{8}144-9 \end{array}$$

SIT quoque multiplicanda $\sqrt{8}(6+\sqrt{8}9)$ per numerum compositum $\sqrt{8}4+\sqrt{8}16$. Quadratum prioris numeri est $6+\sqrt{8}9$. posterioris autem $20+\sqrt{8}256$. vt patet, si $\sqrt{8}4+\sqrt{8}16$. ducatur in $\sqrt{8}4+\sqrt{8}16$. Multiplicatione igitur facta, vt hic vides, erit numerus productus $\sqrt{8}(\sqrt{8}9216+\sqrt{8}3600+\sqrt{8}2304+120)$ hoc est, $\sqrt{8}324$. nimirum 18.

$$\begin{array}{r} 6+\sqrt{8}9 \\ 20+\sqrt{8}256 \\ \hline \sqrt{8}9216+\sqrt{8}2304 \\ 120+\sqrt{8}3600 \\ \hline \sqrt{8}9216+\sqrt{8}3600+\sqrt{8}2304+120 \end{array}$$

MVLTIPLICETVR $\sqrt{8}(7+\sqrt{8}4)$ hoc est $\sqrt{8}9$. nimirum 3. per $\sqrt{8}9$. hoc est, per 3. vbi perspicuum est, numerum gigni 9. Quadrata numerorum sunt $7+\sqrt{8}4$. & 9. Ex $\sqrt{8}4$. in 9. id est, in $\sqrt{8}81$. fit $\sqrt{8}324$. Et ex 7. in 9. fiunt 63. Igitur productus numerus erit $\sqrt{8}(63+\sqrt{8}324.)$ hoc est, $\sqrt{8}81$. siue 9. vt diximus.

$$\begin{array}{r} 7+\sqrt{8}4 \\ 9 \\ \hline 63+\sqrt{8}324 \end{array}$$

MVLTIPLICETVR $\sqrt{8}(12+\sqrt{8}6)$ per $\sqrt{8}12+\sqrt{8}6$. Quadrata numerorū sunt $12+\sqrt{8}6$. & $18+\sqrt{8}288$. vt constat, si $\sqrt{8}12+\sqrt{8}6$. ducatur in se. (Producitur enim numerus iste $12+\sqrt{8}288+6$. constat autem 12. & 6. facere 18.) Ex $\sqrt{8}288$. in $\sqrt{8}6$. fit $\sqrt{8}1728$. Et ex $\sqrt{8}288$. in 12. hoc est, in $\sqrt{8}144$. fit $\sqrt{8}41472$. Et ex $\sqrt{8}6$. in 18. id est, in $\sqrt{8}324$. fit $\sqrt{8}1944$, Ac tandem ex 12. in 18. fiunt 216. Itaque totus numerus productus erit $\sqrt{8}(216+\sqrt{8}1944+\sqrt{8}41472+\sqrt{8}1728.)$

$$\begin{array}{r} 12+\sqrt{8}6 \\ 18+\sqrt{8}288 \\ \hline \sqrt{8}41472+\sqrt{8}1728 \\ 216\ \sqrt{8}1944 \\ \hline 216+\sqrt{8}1944+\sqrt{8}41472+\sqrt{8}1728 \end{array}$$

Multiplicatio radicis numeri compositi, vnà cũ radice numeri diminuti similis, in seipsam.

CÆTERVM quando radix zensica numeri compositi, vna cum radice zensica numeri diminuti similis in seipsam multiplicanda proponitur: quod non raro in Binomijs, ac residuis (de quibus in cap. 27. & 28.) accidit, ita agemus. Sit in se multiplicanda $\sqrt{8}(12+\sqrt{8}6)+\sqrt{8}(12-\sqrt{8}6)$ Scribatur numerus bis, vt in multiplicatione fieri solet. Et quoniam ex propos. 4. lib. 2. Eucl. quadrata partium $\sqrt{8}(12+\sqrt{8}6)$ & $\sqrt{8}(12-\sqrt{8}6)$ vna cum eo, quod ex vna parte $\sqrt{8}(12-\sqrt{8}6)$ bis fit in alteram partem $\sqrt{8}(12+\sqrt{8}6)$ æqualia sunt ei, qui fit ex numero in se: Sunt autem quadrata partium $12+\sqrt{8}6$. & $12-\sqrt{8}6$. quæ simul faciunt 24. (Nã $+\sqrt{8}6$. & $-\sqrt{8}6$. se mutuo tollunt) Et ex vna parte in alterã fit $\sqrt{8}138$ (quia 6. quadratum $\sqrt{8}6$. demptum ex 144. quadrato numeri 12. relinquit 138. cui numero præfigendum est signum $\sqrt{8}$) cuius duplum est $\sqrt{8}552$. Productus ergo numerus est $24+\sqrt{8}552$. Atque radix huius producti est etiam summa duarum radicum $\sqrt{8}(12+\sqrt{8}6)$ & $\sqrt{8}(12-\sqrt{8}6)$ in vnam summam collectarum. Nam quando summa duorum numerorum in se ducitur, radix quadrata producti numeri est eorundem duorum numerorum summa. Ac proinde cum duæ hæ radices propositæ simul in se ductæ faciant $24+\sqrt{8}552$. erit huius producti radix, nimirum $\sqrt{8}(24+\sqrt{8}552)$ illarum duarum radicum summa.

$$\begin{array}{r} \sqrt{8}(12+\sqrt{8}6)+\sqrt{8}(12-\sqrt{8}6) \\ \sqrt{8}(12+\sqrt{8}6)+\sqrt{8}(12-\sqrt{8}6) \\ \hline 12+\sqrt{8}6\ +\ 12-\sqrt{8}6 \\ \sqrt{8}138 \\ \sqrt{8}138 \\ \hline \sqrt{8}552 \\ 24+\sqrt{8}552 \end{array}$$

Summa ex radice numeri compositi, & radice numeri diminuti similis collecta.

ALIVD exemplum in numeris rationalibus. Sit in se multiplicanda $\sqrt{8}(10+\sqrt{8}36)+\sqrt{8}(10-\sqrt{8}36)$ hoc est, 6. in se: vbi numerus procreatur 36. Quadrata partium sunt $10+\sqrt{8}36$. & $10-\sqrt{8}36$. quæ simul additæ faciunt 20. Et ex vna parte in alteram fit $\sqrt{8}64$. quæ bis sumpta facit $\sqrt{8}256$. id est, 16. atque adeo productus numerus est $20+16$. hoc est, 36. vt par est. Atque radix huius numeri, nimirum 6. est summa quoq; ex duabus illis radicibus collecta, vt manifestum est.

$$\begin{array}{r} \sqrt{8}(10+\sqrt{8}36)+\sqrt{8}(10-\sqrt{8}36) \\ \sqrt{8}(10+\sqrt{8}36)+\sqrt{8}(10-\sqrt{8}36) \\ \hline 10+\sqrt{8}36\ +\ 10-\sqrt{8}36 \\ \sqrt{8}64 \\ \sqrt{8}64 \\ \hline \sqrt{8}256 \end{array}$$

Productus $20+\sqrt{8}256$. hoc est, 36.

PRÆTEREA quando multiplicandus est numerus compositus ex radice simplici, & radice compositi numeri, hoc est, ex radice simplici, & radice Vniuersali, per numerum diminutum similem: locum etiam habet compendium cap. 23. traditum ante exempla diuisionis, ad finem nimirum exemplorum multiplicationis. Vt si

Vt si ducendus sit numerus $\sqrt{8}20+\sqrt{8}(20-\sqrt{8}5)$ in numerum $\sqrt{8}20-\sqrt{8}5$) scribatur vnus numerus sub alio, vt hic vides. Nam si $20-\sqrt{8}5$ quadratum posterioris particulæ numeri compositi, vel diminuti, detrahatur ex 20. quadrato particulæ prioris, reliquus erit numerus $0+\sqrt{8}5$. vt in hac altera formula cernitur. quia 20. ex 20. nil relinquunt: at $-\sqrt{8}5$. ex $+\sqrt{8}0$. (quoniam diuersa signa mutant speciem, sitque additio) remanet $+\sqrt{8}5$. vt in Subtractione radicum simplicium diximus. atque ita ex $\sqrt{8}20+\sqrt{8}(20-\sqrt{8}5.)$ in $\sqrt{8}(20-\sqrt{8}0+\sqrt{8}5)$ producitur $\sqrt{8}5$.

$$\begin{array}{r} \sqrt{8}20+\sqrt{8}(20-\sqrt{8}5) \\ \sqrt{8}20-\sqrt{8}(20-\sqrt{8}5) \\ \hline \sqrt{8}5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20+\sqrt{8}0 \\ 20-\sqrt{8}5 \\ \hline 0+\sqrt{8}5 \end{array}$$

IMMO hoc compendio vti etiam licebit, quando multiplicandus est numerus compositus ex numero Cossico, & radice numeri Cossici compositi vel diminuti, per numerum diminutum similem. Vt si ducendus sit numerus $\frac{1}{2}\mathfrak{8}+\sqrt{8}(\frac{1}{4}\mathfrak{88}+1\mathfrak{8})$ in $\frac{1}{2}\mathfrak{8}-\sqrt{8}(\frac{1}{4}\mathfrak{88}+1\mathfrak{8}.)$ Scripto vno numero sub alio, vt hic cernis, detrahitur quadratum $\frac{1}{4}\mathfrak{88}+1\mathfrak{8}$ posterioris particulæ ex $\frac{1}{4}\mathfrak{88}$. quadrato particulæ prioris, vt hæc altera formula ostendit. Nam reliquus numerus $0-1\mathfrak{8}$. erit is, qui producitur ex vno numero in alium.

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}\mathfrak{8}+\sqrt{8}(\frac{1}{4}\mathfrak{88}+1\mathfrak{8}) \\ \frac{1}{2}\mathfrak{8}-\sqrt{8}(\frac{1}{4}\mathfrak{88}+1\mathfrak{8}) \\ \hline -1\mathfrak{8} \\ \frac{1}{4}\mathfrak{88}+0\mathfrak{8} \\ \frac{1}{4}\mathfrak{88}+1\mathfrak{8} \\ \hline 0-1\mathfrak{8} \end{array}$$

SIC etiam ex $\frac{1}{2}\mathfrak{8}+\sqrt{8}(\frac{1}{4}\mathfrak{88}-1\mathfrak{8})$ in $\frac{1}{2}\mathfrak{8}-\sqrt{8}(\frac{1}{4}\mathfrak{88}-1\mathfrak{8})$ gignetur numerus $1\mathfrak{8}$. vt aliæ duæ hæ appositæ formulæ docent.

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}\mathfrak{8}+\sqrt{8}(\frac{1}{4}\mathfrak{88}-1\mathfrak{8}) \\ \frac{1}{2}\mathfrak{8}-\sqrt{8}(\frac{1}{4}\mathfrak{88}-1\mathfrak{8}) \\ \hline 1\mathfrak{8} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{4}\mathfrak{88}+0\mathfrak{8} \\ \frac{1}{4}\mathfrak{88}-1\mathfrak{8} \\ \hline 0+1\mathfrak{8} \end{array}$$

DIVISIO radicum huiusmodi fit hoc modo. Tam numerus diuidendus, quam diuidens reducatur ad quadratum: Deinde diuisio fiat, vt supra explicatum est. Radix enim producti numeri erit Quotiens. vt exempla probabunt. quemadmodum, vt in cap. præcedenti diximus, ex diuisione $\sqrt{8}12$. per $\sqrt{8}3$. exit $\sqrt{8}4$. radix nimirum zensica numeri 4. qui fit ex diuisione quadrati 12. per quadratum 3. Item sicut ex diuisione $\sqrt{8}30$. per $\sqrt{8}5$. fit Quotiens $\sqrt{8}6$. radix videlicet surdesolida numeri 6. ex diuisione surdesolidi 30. per surdesolidum 5. procreati. *Diuisio radicum numerorum compositorum.*

SIT diuidenda $\sqrt{8}(13+\sqrt{8}7)$ per $\sqrt{8}5$. Quadrata numerorum sunt $13+\sqrt{8}7$. & 5. Ex diuisione 13. per 5. exeunt $2\frac{3}{5}$. Et ex $\sqrt{8}7$. per 5. id est, per $\sqrt{8}25$. exeunt $\sqrt{8}\frac{7}{25}$. Totus ergo Quotiens est $\sqrt{8}(2\frac{3}{5}+\sqrt{8}\frac{7}{25}.)$

$$\begin{array}{lll} 13+\sqrt{8}7 & (2\tfrac{3}{5}+\sqrt{8}\tfrac{7}{25} \\ 5 & \sqrt{8}25 \end{array}$$

SIT diuidenda $\sqrt{8}(432+\sqrt{8}7776)$ per 6. Quadrata numerorum sunt $432+\sqrt{8}7776$. & 36. Diuisis 432. per 36. exeunt 12. & diuisa $\sqrt{8}7776$. per 36. id est, per $\sqrt{8}1296$. exit $\sqrt{8}6$. Quotiens ergo totus erit $\sqrt{8}(12+\sqrt{8}6.)$

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{x} & & \\ 1\mathfrak{7} & 1\mathfrak{53} & \\ 432+\sqrt{8}7776 & (12+\sqrt{8}6. \\ 36\mathfrak{6} & 12\mathfrak{96} & \\ 3 & & \end{array}$$

SIT diuidenda $\sqrt{8}(\sqrt{8}5588+\sqrt{8}34848)$ per $\sqrt{8}(12+\sqrt{8}8)$ Quadrata numerorum sunt $5588+\sqrt{8}34848$. & $12+\sqrt{8}8$. Quoniam diuisor est numerus compositus, multiplicandus erit per $12-\sqrt{8}8$. mutato signo $+$ in $-$. vt supra cap. 23. dictum est: vt fiat nouus diuisor $\sqrt{8}136$. Quod si per eundem numerum 12 $-\sqrt{8}8$. multiplicetur diuidendus numerus, fiet nouus diuidendus $\sqrt{8}(6528+\sqrt{8}3332928)$. Fit enim numerus productus $\sqrt{8}(7065+\sqrt{8}5018112-\sqrt{8}2765952-\sqrt{8}278784)$ qui reducitur ad $\sqrt{8}(6528+\sqrt{8}3332928)$ quia radix numeri 278784. est 528. quæ detracta ex 7056. relinquit 6528. Et detracta $\sqrt{8}2765952$. ex $\sqrt{8}5018112$. cũ sint commẽsurabiles in proportione $\frac{6\,6}{3\,9}$. relinquit $\sqrt{8}3332928$. cui apponendum est signum $+$ maioris numeri. Itaq; si diuidatur nouus diuidendus $\sqrt{8}(6528+\sqrt{8}3332928)$ per nouum diuisorem 136. fiet Quotiens $\sqrt{8}(48+\sqrt{8}18.)$ Diuisis namq; 6528. per 136. exeunt 48. Et diuisa $\sqrt{8}3332928$. per 136. hoc est, per $\sqrt{8}18496$. exit $\sqrt{8}18$. atq; adeò $\sqrt{8}[48+\sqrt{8}18)$ Quotiẽs erit diuisionis propositę.

HOC exemplum quia pulchrum est, & subobscurum, libet examinare per multiplicationem. Igitur necesse est, numerum diuisum $(\sqrt{8}5588+\sqrt{8}34848)$ redire, si Quotiens inuentus $\sqrt{8}(48+\sqrt{8}18)$ in diuisorem $\sqrt{8}(12+\sqrt{8}8)$ ducatur. Fit autem ex hac multiplicatione numerus $(\sqrt{8}576+\sqrt{8}2592+\sqrt{8}18432+\sqrt{8}144)$ Quod si $\sqrt{8}144$. addatur ad 576. fiet summa 588. Et si simul addantur $\sqrt{8}2592$. & $\sqrt{8}18432$. quæ commensurabiles sunt in proportione $\frac{8}{7}$. fiet $\sqrt{8}34848$.

DIVIDATVR item $\sqrt{8}15$. per $\sqrt{8}(3+\sqrt{8}5)$ Vt simplex diuisor reperiatur, ducemus $\sqrt{8}(3+\sqrt{8}5)$ in $\sqrt{8}(3-\sqrt{8}5.)$ fietq; diuisor $\sqrt{8}4$. nouus. Quod si diuidendus numerus $\sqrt{8}15$. ducatur quoque in $\sqrt{8}(3-\sqrt{8}5.)$ gignemus nouum diuidendum $\sqrt{8}(45-\sqrt{8}1125)$ Quadratum huius numeri diuidendi est $45-\sqrt{8}1125$. Noui vero diuisoris Quadratũ est 4. Si ergo partiamur 45. per 4. fit Quotiens $11\frac{1}{4}$. Et si diuidamus $-\sqrt{8}1125$. per 4. hoc est, per $\sqrt{8}16$. fit Quotiens $-\sqrt{8}70\frac{5}{16}$. Totus igitur Quotiens est $\sqrt{8}(11\frac{1}{4}-\sqrt{8}70\frac{5}{16}.)$

DIVIDAMVS 20.per $\sqrt{}(10-\sqrt{5})$ Multiplicetur vterque numerus per $\sqrt{}(10+\sqrt{5})$ vt fiat nouus diuidendus $\sqrt{}(4000+\sqrt{}800000)$ nouus autem diuisor $\sqrt{}95$. Quadrata horum numerorum sunt $4000+\sqrt{}800000$.& 95. Si igitur partiamur 4000. per 95. exibunt $42\frac{2}{19}$. At ex diuisione $\sqrt{}800000$. per 95.id est,per $\sqrt{}9025$. prodit $\sqrt{}88\frac{2}{3}\frac{3}{6}\frac{2}{1}$. Quotiens ergo propositæ diuisionis est $\sqrt{}(42\frac{2}{19}+\sqrt{}88\frac{2}{3}\frac{3}{6}\frac{2}{1})$

DIVIDAMVS $\sqrt{}(4+\sqrt{}25)$ per $\sqrt{}(1+\sqrt{}9)$ hoc est, $\sqrt{}9$.per $\sqrt{}4$. siue 3.per 2.vbi Quotiens est $1\frac{1}{2}$. Multiplicetur tam diuidendus, quam diuisor, per $\sqrt{}(1-\sqrt{}9)$ vt fiat nouus diuidendus $\sqrt{}(4+\sqrt{}25-\sqrt{}144-\sqrt{}225.)$ & nouus diuisor $\sqrt{}-8$. Quadrata horum numerorum sunt $4+\sqrt{}25-\sqrt{}144-\sqrt{}225$.& -8. Ex diuisione 4.per -8.fit Quotiens $-\frac{1}{2}$. Et ex diuisione $\sqrt{}25$.per -8.id est,per $\sqrt{}-64$. fit Quotiens $\sqrt{}-\frac{2}{6}\frac{5}{4}$. vel (quod idem est) $-\sqrt{}\frac{2}{6}\frac{5}{4}$. Et ex diuisione $-\sqrt{}144$. per -8. id est, per $-\sqrt{}64$.exit $\sqrt{}+2\frac{1}{6}\frac{6}{4}$. vel (quod idem est) $+\sqrt{}2\frac{1}{6}\frac{6}{4}$. Et ex diuisione $-\sqrt{}225$. per -8 hoc est,per $-\sqrt{}64$.fit Quotiens $+\sqrt{}3\frac{3}{6}\frac{3}{4}$. Quibus Quotientibus in ordinem redactis,erit totus Quotiens $\sqrt{}(\sqrt{}3\frac{3}{6}\frac{3}{4}+\sqrt{}2\frac{1}{6}\frac{6}{4}-\sqrt{}\frac{2}{6}\frac{5}{4}-\frac{1}{2}.)$ qui æquialet $\sqrt{}2\frac{1}{2}$. hoc est, $1\frac{1}{2}$. vt diximus. Nam $\sqrt{}3\frac{3}{6}\frac{3}{4}$. hoc est, $\sqrt{}\frac{2}{6}\frac{2}{4}\frac{5}{4}$. est $\frac{2}{8}\frac{5}{8}$.& $\sqrt{}2\frac{1}{6}\frac{6}{4}$, siue $\sqrt{}\frac{1}{6}\frac{4}{4}\frac{4}{4}$. est $\frac{1}{8}\frac{2}{8}$ quæ cum priori $\frac{1}{8}\frac{5}{8}$ facit $\frac{2}{8}\frac{7}{8}$. Deinde $\sqrt{}\frac{2}{6}\frac{5}{4}$. est $\frac{1}{2}$. quæ cum $\frac{1}{2}$. hoc est, cum $\frac{4}{8}$ facit $\frac{9}{8}$. atque $\frac{9}{8}$. ex $\frac{2}{8}\frac{7}{8}$ relinquunt $\frac{1}{8}\frac{8}{8}$. siue $2\frac{1}{4}$ atque radix huius numeri est Quotiens supra inuentus, nimirum $1\frac{1}{2}$.

IMMO ex diuisione $\sqrt{}(4+\sqrt{}25-\sqrt{}144-\sqrt{}225)$ per $\sqrt{}-8$.prouenire $1\frac{1}{2}$. ita quoque fiet manifestum. Ex 4.& $\sqrt{}25$.fiunt 9. Et ex $-\sqrt{}144-\sqrt{}225$ fiunt -27. Faciunt autem -27.cum $+9$.numerum -18.igitur numerus diuidendus est $\sqrt{}-18$.& diuisor $\sqrt{}-8$.vbi Quotiens fit $\sqrt{}2\frac{1}{4}$.hoc est,$1\frac{1}{2}$.

HOC exemplum ita quoque proponi potest, vt dicamus, diuidendam esse $\sqrt{}(4+\sqrt{}25)$ per $\sqrt{}(\sqrt{}9+1)$vbi iterum diuiduntur 3.per 2. Et si tam diuidendus,quam diuisor multiplicetur per $\sqrt{}(\sqrt{}9-1)$ fiet nouus diuidendus numerus $\sqrt{}(\sqrt{}144+\sqrt{}225-4-\sqrt{}25.)$& nouus diuisor $\sqrt{}8$. Quadrata horum numerorum sunt $\sqrt{}144+\sqrt{}225-4-\sqrt{}25$.& 8. Ex diuisione autem $\sqrt{}144$.per 8.id est,per $\sqrt{}64$.fit Quotiens $\sqrt{}2\frac{1}{6}\frac{6}{4}$. Et ex diuisione $\sqrt{}225$. per 8.id est,per $\sqrt{}64$. fit Quotiens $\sqrt{}3\frac{3}{6}\frac{3}{4}$. Et ex diuisione -4.per 8. fit Quotiens $-\frac{1}{2}$. Et ex diuisione $-\sqrt{}25$.per 8.id est,per $\sqrt{}64$.fit Quotiens $-\sqrt{}\frac{2}{6}\frac{5}{4}$.ita vt totus Quotiens sit idem omnino,qui prius,nimirū $\sqrt{}(\sqrt{}3\frac{3}{6}\frac{3}{4}+\sqrt{}2\frac{1}{6}\frac{6}{4}-\sqrt{}\frac{2}{6}\frac{5}{4}-\frac{1}{2}.)$ De industria autem interdum longior sum in exemplis expediendis, vt ex ijs difficultates, quæ in radicibus numerorum compositorum occurrere solent,discas superare.

DIVIDAMVS quoque $\sqrt{}(\sqrt{}32768+\sqrt{}13824)$ per 2. Cubi numerorum sunt $\sqrt{}32768+\sqrt{}13824$.& 8.Ex diuisione $\sqrt{}32768$. per 8. hoc est,per $\sqrt{}512$. fit Quotiens $\sqrt{}64$. Et ex diuisione $\sqrt{}13824$.per 8.id est,per $\sqrt{}512$.fit Quotiēs $\sqrt{}27$. Totusq; Quotiēs erit $\sqrt{}(\sqrt{}64+\sqrt{}27)$hoc est,$\sqrt{}27$.

Additio radicum numerorum compositorum.

DENIQVE sit diuidenda $\sqrt{}(33+\sqrt{}9)$ per $\sqrt{}(3+\sqrt{}1)$ hoc est,6.per 2.vbi Quotiens est 3. Multiplicetur vterq; numerus per $\sqrt{}(3-\sqrt{}1)$ vt fiat nouus diuidendus $\sqrt{}(99+\sqrt{}81-\sqrt{}1089-\sqrt{}9)$ & nouus diuisor $\sqrt{}(9-1.)$ hoc est,$\sqrt{}8$. Quadrata horum numerorum sunt $99+\sqrt{}81-\sqrt{}1089-\sqrt{}9$.& 8. Ex diuisione 99.per 8.fit Quotiens $12\frac{3}{4}$. Ex diuisione $\sqrt{}81$.per 8.id est,per $\sqrt{}64$.fit Quotiens $\sqrt{}1\frac{7}{6}\frac{7}{4}$. Ex diuisione $-\sqrt{}1089$.per 8.id est,per $\sqrt{}64$.fit Quotiens $-\sqrt{}17\frac{1}{6}\frac{7}{4}$. Ac tandem ex diuisione $-\sqrt{}9$.per 8.hoc est,per $\sqrt{}64$. fit Quotiens $-\sqrt{}\frac{9}{6}\frac{9}{4}$. Eritque totus Quotiens $\sqrt{}(12\frac{3}{4}+\sqrt{}1\frac{7}{6}\frac{7}{4}-\sqrt{}17\frac{1}{6}\frac{1}{4}-\sqrt{}\frac{9}{6}\frac{9}{4}.)$ hoc est, 3. Nam si ad $12\frac{3}{4}$. addatur $\sqrt{}1\frac{1}{6}\frac{7}{4}$. hoc est, $\frac{9}{8}$. fient $12\frac{2}{8}\frac{7}{8}$. ex quibus si tollantur $\sqrt{}17\frac{1}{6}\frac{7}{4}$.& $\sqrt{}\frac{9}{6}\frac{9}{4}$. hoc est, $\frac{8}{8}\frac{3}{8}$.& $\frac{3}{8}$. relinquentur 9. Est ergo Quotiens $\sqrt{}9$. id est,3.

ADDITIO, & subtractio radicum numerorum compositorum commode plerunque addi non possunt,vel vna ab altera subtrahi, nisi per interpositionem signi $+$ vel $-$. vt cap. 22. annotauimus. Quando tamen addenda est huiusmodi radicum aliqua ad similem, mutato signo $+$ in $-$, vel $-$ in $+$. commodissime inter se addentur,si illæ radices per signum $+$ connectantur,& totum illud aggregatum in se ducatur, vt paulo ante monstratum est. Nam $\sqrt{}$ huius producti erit summa duarum radicum propositarum. Vt si addendæ sint hæ duæ radices,$\sqrt{}(12+\sqrt{}6)$ & $\sqrt{}(12-\sqrt{}6)$ ducemus hoc compositum $\sqrt{}(12+\sqrt{}6)+\sqrt{}(12-\sqrt{}6)$ in seipsum, producetur que numerus $24+\sqrt{}552$. vt supra diximus. Huius ergo radix quadrata,nimirum $\sqrt{}(24+\sqrt{}552.)$ erit summa duarum radicum propositarum.

EODEM modo supra,harum radicum,$\sqrt{}(10+\sqrt{}36)$ & $\sqrt{}(10-\sqrt{}36)$ summa inuenta fuit, $\sqrt{}(20+\sqrt{}256)$ hoc est,$\sqrt{}36$.id est,6.

$$\begin{array}{l}\sqrt{}(8+\sqrt{}32)+\sqrt{}(8-\sqrt{}32)\\ \sqrt{}(8+\sqrt{}32)+\sqrt{}(8-\sqrt{}32)\\ \hline 8+\sqrt{}32+\quad 8-\sqrt{}32\\ \sqrt{}32\\ \sqrt{}32\\ \hline \sqrt{}128\\ \text{Productus.}\quad 16+\sqrt{}128\end{array}$$

ITEM sint addendæ $\sqrt{}(8+\sqrt{}32)$ & $\sqrt{}(8-\sqrt{}32.)$ Sic stabit exemplum ad multiplicationem. Si ergo producto numero præfiges signum $\sqrt{}$. erit summa duarum radicum dictarum, $\sqrt{}(16+\sqrt{}128.)$

ITEM sit addenda $\sqrt{}(2+\sqrt{}3)$ ad $\sqrt{}(2-\sqrt{}3.)$ Sic instituetur multiplicatio. fietque productus, $4+\sqrt{}4$. hoc est 6. Igitur summa duarum radicum quæsita erit $\sqrt{}6$.

$$\begin{array}{l}\sqrt{}(2+\sqrt{}3)+\sqrt{}(2-\sqrt{}3)\\ \sqrt{}(2+\sqrt{}3)+\sqrt{}(2-\sqrt{}3)\\ \hline 2+\sqrt{}3+\quad 2-\sqrt{}3\\ \sqrt{}1\\ \sqrt{}1\\ \hline \sqrt{}4\\ \text{Productus.}\quad 4+\sqrt{}4.\text{ hoc est, }6.\end{array}$$

Huiusmodi radicum additio commode etiam sic fiet. Multiplicetur quadratum vnius radicis in quadratum alterius. quod breuissime fiet, si in alterutra radice, quadratū posterioris particulæ dematur ex quadrato particulæ prioris, & residui radix adiiciatur ad priorem particulam,summaq; hæc duplicetur,id est,per 2.multiplicetur. Radix enim huius producti dabit summā quæsitā. Vt in

Vt in primo exemplo,summa $\sqrt{}(12+\sqrt{}36)$ & $\sqrt{}(12-\sqrt{}36)$ ita fiet. Dempto quadrato 6.posterioris particulæ ex 144.quadrato particulæ prioris, supersunt 138. Si igitur addatur $\sqrt{}138$.ad 12. priorem particulam, fiet summa $12+\sqrt{}138$.quæ ducta in 2.faciet summam quæsitam $\sqrt{}(24+\sqrt{}552)$ vt prius.

IN secundo autem exemplo,summa $7\sqrt{}(10+\sqrt{}36)$ & $\sqrt{}(10-\sqrt{}36)$ ita nota fiet. Dempto quadrato 36. posterioris particulæ ex 100. quadrato prioris particulæ,remanent 64. Si ergo $\sqrt{}64$. addes ad priorem particulam 10.facies $10+\sqrt{}64$. quæ summa ducta in 2.faciet summam desideratam $\sqrt{}(20+\sqrt{}256)$ hoc est,$\sqrt{}36$.hoc est,6. veluti prius.

IN tertio denique exemplo, summam radicum $\sqrt{}(2+\sqrt{}3)$ & $\sqrt{}(2-\sqrt{}3)$ sic cognoscemus. Dempto quadrato 3.posterioris particulæ ex 4.quadrato particulæ prioris, reliqua fit 1. Si ergo addemus $\sqrt{}1$ ad 2 priorem particulam,faciemus $2+\sqrt{}1$.hoc est,3. Duplum est 6. Ergo $\sqrt{}6$. est summa optata, eadem quæ prius.

QVANDO addendæ sunt duæ radices numerorum compositorum dissimilium, quorum videlicet numeri particularum non omnes æquales sunt: addi poterunt nonnunquam per propos.4.lib.2.Eucl.tum scilicet,cum numerus ex vna radice in alteram bis multiplicata productus reduci potest ad simplicem numerum, vel ad numerum compositum duarum particularum. hoc scilicet modo. Sit addenda $\sqrt{}(10+\sqrt{}36)$ ad $\sqrt{}(11+\sqrt{}25)$ hoc est,4.ad 4. vbi summa est 8. Quadrata, duarum radicum per signum $+$ connexa faciunt $10+\sqrt{}36+11+\sqrt{}25$. Productus numerus ex vna radice in alteram,(hoc est,si quadratum vnius in quadratum alterius ducatur,& producto præfigatur signum $\sqrt{}$. vt in multiplicatione radicum simplicium quadratarum fieri solet) est $\sqrt{}(110+\sqrt{}4356+\sqrt{}2500+\sqrt{}900)$ vt in subiecta formula apparet. cuius duplum (si nimirum per 2. multiplicetur) $\sqrt{}(440+\sqrt{}69696+\sqrt{}40000+\sqrt{}14400)$ reducitur ad $\sqrt{}1024$.hoc est,ad 32. Si igitur addantur 32. ad duo superiora quadrata,erit tota summa $\sqrt{}(10+\sqrt{}36+\sqrt{}11+\sqrt{}25+32.)$ hoc est,$\sqrt{}64$.siue 8. vt ratio postulat.

$$\begin{array}{l}\sqrt{}(10+\sqrt{}36)\\ \sqrt{}(11+\sqrt{}25)\\ \hline \sqrt{}2500+\sqrt{}900\\ 110+\sqrt{}4356\\ \hline \sqrt{}(110+\sqrt{}4356+\sqrt{}2500+\sqrt{}900.)\end{array}$$

SIT rursum addenda $\sqrt{}(12+\sqrt{}108)$ ad $\sqrt{}(2+\sqrt{}3)$ Summa quadratorum est $12+\sqrt{}108+2+\sqrt{}3$. Productus numerus ex vna radice in alterā est $\sqrt{}(42+\sqrt{}1728)$ quæ radix est $\sqrt{}824+\sqrt{}18$. (vt ex cap.27.patebit.) cuius duplum,nimirum $\sqrt{}96+\sqrt{}72$.additum ad prædicta duo quadrata $12+\sqrt{}108+2+\sqrt{}3$.hoc est,ad $14+\sqrt{}108+\sqrt{}3$. hoc est,ad $14+\sqrt{}147$.(nam $\sqrt{}108$.& $\sqrt{}3$. sunt commensurabiles, conficiuntque $\sqrt{}147$) fiet tota summa $\sqrt{}(14+\sqrt{}147+\sqrt{}96+\sqrt{}72.)$

SIT quoque addenda $\sqrt{}(\sqrt{}2+1)$ ad $\sqrt{}(\sqrt{}162+9.)$ Summa quadratorum est $\sqrt{}2+1+\sqrt{}162+9$. Ex vna radice in alteram fit $\sqrt{}(27+\sqrt{}648)$ quæ radix valet $3+\sqrt{}18$. (quo pacto autem ex hoc quadrato $27+\sqrt{}648$.erui debeat radix,cap.27.docebimus) cuius duplum $6+\sqrt{}72$.additum ad prædictam quadratorum summam facit $\sqrt{}2+1+\sqrt{}162+9+6+\sqrt{}72$ hoc est $\sqrt{}512+16$. Nam $\sqrt{}162$.& $\sqrt{}2$.commensurabiles sunt,faciuntque $\sqrt{}200$. Item $\sqrt{}200$.& $\sqrt{}72$.commensurabiles quoque sunt, faciuntque $\sqrt{}512$. Summa ergo quæsita erit $\sqrt{}(\sqrt{}512+16.)$

SED quando productus numerus ex vna radice in alteram non potest reduci ad numerum compositum,quando videlicet radicem, quæ sit vel radix simplex, vel numerus compositus, non habet,fieret hoc modo summa magis perplexa,& obscura. Quare commodius fiet tunc additio per signum $+$ interpositum. V.g. si addenda sit $\sqrt{}(2+\sqrt{}3)$ ad $\sqrt{}(\sqrt{}12+2)$ fit ex vna in alteram $\sqrt{}(\sqrt{}48+\sqrt{}36+4+\sqrt{}12)$ hoc est,$\sqrt{}(\sqrt{}108+10)$ propterea quod $\sqrt{}48$.& $\sqrt{}12$. commensurabiles sunt, conficiuntque $\sqrt{}108$.ac $\sqrt{}36$.& 4. efficiunt 10. Sed quia numerus quadratus $\sqrt{}108+10$. radicem habet $\sqrt{}(\sqrt{}27+\sqrt{}2)+\sqrt{}(\sqrt{}27-\sqrt{}2.)$ vt ex cap. 27. constabit. quæ quidem composita est ex duabus radicibus duorum numerorū compositorum. Efficiunt autem hæ duæ radices summam $\sqrt{}(\sqrt{}27+\sqrt{}2+\sqrt{}27-\sqrt{}2+10$. vt in hac formula apparet. Atq; hæc summa reducitur ad hanc, $\sqrt{}(\sqrt{}108+10)$ erit hæc summa radix huius numeri $\sqrt{}108+10$.quod patet, quia $\sqrt{}(\sqrt{}108+10)$ in se ducta facit $\sqrt{}108+10$. Hæc autem radix $\sqrt{}(\sqrt{}108+10)$ duplicata, quod fiet, si eius quadratum $\sqrt{}108+10$. ducatur in 4. quadratum binarij; Hæc, inquam, radix duplicata facit $\sqrt{}(\sqrt{}1728+40)$ quæ cum duobus quadratis radicum propositarum,nimirum cum $2+\sqrt{}3$.& $\sqrt{}12+2$.faciet radicum summam $\sqrt{}(\sqrt{}1728+40)+2+\sqrt{}3+\sqrt{}12+2$) sed quia $2+\sqrt{}3+\sqrt{}12+2$. faciunt $4+\sqrt{}27$.erit summa $\sqrt{}(\sqrt{}1728+40)+\sqrt{}27+14)$ quæ magis intricata est,quam si summa dicatur esse $\sqrt{}(2+\sqrt{}3)+\sqrt{}(\sqrt{}12+2.)$ Eadem illa summa intricata facilius reperietur, sine inuentione radicis numeri $\sqrt{}108+10$. cuius radix, nimirum $\sqrt{}(\sqrt{}108+10.)$ producta fuit ex vna radice proposita in alteram. Nam duplum huius numeri,$\sqrt{}(\sqrt{}1728+40)$ cum duobus quadratis radicum propositarum,conficiet ex propos.4.lib.2.Eucl. duarum radicum summam eandem $\sqrt{}(\sqrt{}1728+40)+\sqrt{}27+14.)$

$$\begin{array}{l}\sqrt{}(\sqrt{}27+\sqrt{}2)+\sqrt{}(\sqrt{}27-\sqrt{}2)\\ \sqrt{}(\sqrt{}27+\sqrt{}2)+\sqrt{}(\sqrt{}27-\sqrt{}2)\\ \hline \sqrt{}27+\sqrt{}2+\sqrt{}27-\sqrt{}2\\ \sqrt{}25.\text{ hoc est, }5\\ \sqrt{}25.\text{ hoc est, }5\\ \hline \sqrt{}100.\text{ id est, }10\\ \hline \sqrt{}(\sqrt{}27+\sqrt{}2+\sqrt{}27-\sqrt{}2+10.\end{array}$$

QVANDO duę huiusmodi radices sunt commensurabiles,poterunt inter se addi per regulam trium, veluti radices simplices. Vt si addenda proponatur $\sqrt{}(2+\sqrt{}3)$ ad $\sqrt{}(8+\sqrt{}48.)$ Diuisa hac per illam, (inuento videlicet nouo diuisore $\sqrt{}1$.& nouo diuidendo $\sqrt{}4$.) fit Quotiens $\sqrt{}4$.hoc est, 2. siue $\frac{1}{2}$. Habent ergo illæ radices proportionem duplam: ac proinde si fiat, Vt 1.ad 3.ita $\sqrt{}(2+\sqrt{}3)$ ad aliud, inuenietur summa $\sqrt{}(18+\sqrt{}243.)$

ITEM sit addenda $\sqrt{}(4+\sqrt{}6)$ ad $\sqrt{}(8+\sqrt{}24.)$ Diuisa hac per illam (inuento diuisore nouo $\sqrt{}10$.& nouo diuidendo $\sqrt{}20$.) fit Quotiens $\sqrt{}2$. qui licet irrationalis sit, ac proinde radices propositæ sint incommensurabiles,conabimur tamen eius beneficio illas simul addere,more radicum commensurabilium. Est

ergo proportio vnius radicis ad alteram, quæ √3.ad 1.ita vt denominator proportionis sit $\frac{\sqrt{3}\ 2}{1}$. Et denominator 1.huius fractionis additus ad √3. denominatorem, facit √3+1. Quare si fiat, Vt 1.ad √3+1.ita √3 (4+√6) ad aliud, fit √3 (12+√3128+√354+√348) pro summa duarum radicum propositarum. Nam vt in regula trium multiplicetur √3+1.in √3 (4+√6) reducenda est √3+1. ad quadratum 3+√8. hoc est, ducenda in se, atque hoc ducendum in 4+√6. quadratum radicis √3 (4+√6.) Productoque 12+√3 128+√354+√348. præfigendum signum √3.

SIT præterea addenda √3 (√3 6 − √3 2) ad √3 (√3 96 − √3 32.) Diuisa hac per illam, (inuento scilicet nouo diuisore √3 4.& nouo diuidendo √3 16.) fit Quotiens √3 4. hoc est, 2. estque proportio vnius radicis ad alteram dupla, cuius denominator est $\frac{2}{1}$. Si igitur fiat, Vt 1.ad 3. ita √3 (√3 6 − √3 2) ad aliud: reperietur summa quæsita √3 (√3 486 − √3 162.)

Subtractio radicũ numerorum compositorum.

IAM vero si à radice numeri compositi detrahenda sit alia radix similis numeri diminuti, (quod sæpe contingit in Binomiis, ac Residuis, eorumque radicibus) fiet id hoc modo. Sit subtrahenda V.g. √3 (12 − √3 6) à √3 (12 + √3 6) Certum est, residuum esse √3 (12+√3 6) − √3 (12 √3 6.) Scribatur ergo hoc residuum bis, & in se multiplicetur, hoc est, iuxta propos. 4. lib. 2. Euclid. ad quadrata partium 12 + √3 6. & 12 − √3 6. addatur duplum numeri − √3 138 qui fit ex vna parte in alteram, videlicet − √3 552. fietque quadratum 24. − √3 552. quia duo quadrata efficiunt 24. Radix igitur huius quadrati, nimirum √3 (24 − √3 552) erit id, quod relinquitur ex detractione √3 (12 − √3 6) à √3 (12 + √3 6.) Detracto enim numero ex alio numero, si reliquus numerus ducatur in se, erit radix quadrata numeri producti, numerus ille reliquus. Ac proinde cũ in dato exemplo numerus reliquus, √3 (12+√3 6) − √3 (12 − √3 6) in se ductus faciat 24 − √3 552. erit √3 (24 − √3 552) numerus, qui relinquitur ex detractione √3 (12 − √3 6) à √3 (12+√3 6.]

√3 (12+√3 6) − √3 (12 − √3 6)
√3 (12+√3 6) − √3 (12 − √3 6)

12+√3 6 + 12 − √3 6
− √3 138
− √3 138

24 − √3 552

ALIVD exemplum in numeris rationalibus. Sit subtrahenda √3 (10 − √3 36) ex √3 (10+√3 36) nimirum 2. ex 4. vbi perspicuum est, reliquum numerum esse 2. Scripto numero √3 (10+36.) − √3 (10 − √3 36) qui nimirum relinquitur post detractionem √3 (10 − √3 36) ex √3 (10+√3 36) atque eodem ducto in se, iuxta præscriptum propos. 4 lib. 2. Euclid. fiet productus numerus 20 − √3 256. Ergo residuum quæsitum erit √3 (20 − √3 256) hoc est, √3 4. siue 2. quod est propositum.

√3 (10+√3 36) − √3 (10 − √3 36)
√3 (10+√3 36) − √3 (10 − √3 36)

10+√3 36. & 10 − √3 36
− √3 64
− √3 64

20 − √3 256

QVANDO propositæ radices huiusmodi sunt diuersæ, poterit minor à maiore subtrahi, ex præscripto propos. 7. lib. 2. Eucl. quando videlicet numerus productus ex vna radice in aliam multiplicata bis reduci potest ad numerum simplicem, vel compositum duarum particularum, hac scilicet ratione. Sit subtrahenda √3 (8 − √3 32) ex √3 (8+√3 32.) Quadrata duarum particularum sunt 8 − √3 32. & 8+√3 32. quæ connexa per signum +, faciunt 8 − √3 32 + 8 + √3 32. hoc est, 16. Ex vna radice in alteram fit √3 32. cuius duplum √3 128. ablatum ex 16. summa quadratorum, relinquit 16 − √3 128. Huius ergo numeri radix quadrata nimirum √3 (16 − √3 128) est residuum desideratum.

√3 (8 + √3 32)
√3 (8 − √3 32)

√3 32

SIT rursus auferenda √3 (2+√3 3) ex √3 (12+√3 108.) Summa quadratorum est 2+√3 3+12 +√3 108. hoc est, 14+√3 147. Nam √3 108. & √3 3. commensurabiles sunt, efficiuntque √3 147. Ex vna radice in alteram fit √3 (42+√3 1728) quæ radix, vt ex cap. 28. constabit, est √3 24+√3 18. cuius duplum √3 96+√3 72. demptum ex prædicta quadratorum summa 14+√3 147. relinquit 14+√3 147 − √3 96. & − √3 72. & ppposito signo √3. erit residuũ subtractionis √3 (14+√3 147 − √3 96. & − √3 72.) quod idẽ est, ac 14+√3 147 − √3 96 +√3 72. quia sensus est, ex 14+√3 147. detrahi aggregatum ex √3 96. & √3 72. vt recte dictum fit, residuum esse 14+√3 147 − √3 96. & − √3 72. Est enim sensus, non solum subtrahi √3 96. sed insuper √3 72. subduci. Hoc autem perspicue cernitur, si numerus rationalis detrahendus sit, vt √3 100+√3 4. ex 14+√3 147. vbi certum est, subtrahi 10+2. hoc est, 12. residuum que esse 2+√3 147. quod æquialet huic, 14+√3 147 − √3 100+√3 4. siue huic, 14+√3 147 − √3 100. & − √3 4. vt perspicuum est.

12 + √3 108
2 + √3 3

+ √ 432 + √3 324
24 + √ 432

√3 (42 + √3 1728)

QVOD si productus numerus ex vna radice in alteram non habeat radicem, numerum compositum duarum particularum, facienda est subtractio per signum −. Vt si subtrahenda sit √3 (2+√3 3.) ex √3 (√3 12+2.) Ex ductu vnius radicis in alteram fit √3 (√3 108+10) quæ, vt ex cap. 28. patebit, æquialet huic, √3 (√3 27+√3 2) + √3 (√3 27 − √3 2.) Quare commodius dicetur residuum subtractionis esse √3 (√3 12+2) − √3 (2 − √3 3.)

QVANDO denique huiusmodi radices sunt commensurabiles, subtrahetur vna ab altera per regulam trium, vt de radicibus simplicibus diximus. Sit enim subtrahenda √3 (2+√3 3.) ex √3 (8+√3 48.) Diuisa hac per illam, (inuento nimirum nouo diuisore √3 1. & nouo diuidendo √3 4.) fit Quotiens √3 4. hoc est 2. ita vt proportio earũ sit dupla, cuius denominator $\frac{2}{1}$. Si ergo fiat, vt 1 ad 1. ita √3 (2+√3 3) ad aliud, producetur √3 (2+√3 3) pro residuo subtractionis.

ITEM sit auferenda √3 (4+√3 6) ex √3 (8+√3 24.) Diuisa hac per illam, (inuento scilicet nouo diuisore √3 10. & nouo diuidẽdo √3 20.) fit Quotiẽs √3 2. ita vt denominator proportionis maioris ad minorem sit $\frac{\sqrt{3}\ 2}{1}$. Si ergo fiat, vt 1. ad √3 2 − 1. ita √3 (4+√3 6) ad aliud, prodibit residuum Subtractionis √3 (12 +√3 54 − √3 128 − √3 48.) Nam vt in regula trium multiplicetur √3 (4+√3 6) per √3 2 − 1. reducendus est prius hic numerus ad quadratum 3 − √3 8 &c.

Postremo sit subducenda √3 (√3 6 − √3 2) à √3 (√3 486 − √3 162) Diuisa hac per illam, (inuento scilicet diuisore nouo √3 4. nouoque diuidendo √3 36) fit Quotiens √3 9. hoc est, 3. ita vt radices propositæ habeant proportionem triplam, cuius denominator $\frac{3}{1}$. Si igitur fiat, vt 1.ad 2. ita √3 (√3 6 − √3 2) ad aliud, prodibit residuum quæsitum √3 (√3 96 − √3 32.) Vt enim in regula trium secundus numerus in tertium multiplicetur, reducendi sunt ambo ad quadrata 4. & √3 6 − √3 2. & vnum in alterum ducendum, vt hic factũ esse vides, & producto præfigendum signum √3. vt residuum fiat √3 (√3 96 − √3 32.) Item residuum reperietur, si fiat, vt 3. ad 2. ita √3 (√3 486 − √3 162) ad aliud. Nam reuocato secundo numero regulæ trium 2. & tertio √3 (√3 486 − √3 162) ad quadrata 4. & √3 486 − √3 162. si inter se multiplicentur, gignetur numerus √3 7776 − √3 2592. qui vt per 3. primum numerum regulæ trium diuidatur, reducendus erit ad quadratum 9. Si ergo √3 7776. diuidatur per 9. id est, per √3 81. fiet Quotiens √3 96. Et si − √3 2592. diuidatur per 9. hoc est, per √3 81. fiet Quotiens − √3 32. &c.

√3 6 − √3 2
4
√3 96 − √3 32

√3 486 − √3 162
4
√3 7776 − √3 2592

DE MINVTIIS NVMERORVM IRRATIONALIVM, ac de earundem Algorithmo.

CAPVT XXV.

Numeratio minutiarũ irrationalium.

NVMERATIO harum minutiarum facilis est. Quando enim signum radicale ponitur ante medium minutiæ, refertur signum illud ad vtrumque terminum, tam scilicet ad numeratorem, quam ad denominatorem. Vt hæc minutia √3 $\frac{9}{16}$. significat √3 9. diuisam esse per √3 16. æquialetque $\frac{3}{4}$. Sic √cc $\frac{8}{27}$. significat √cc 8. diuisam esse per √cc 27. æquialetque $\frac{2}{3}$. Ita quoque √3 $\frac{6}{4}$ denotat, √3 6. esse diuisam per √3 8.

QVANDO signum radicale ponitur ante numerum integrum cum fractione, reducendus est totus numerus ad vnicam fractionem, vt eius valor exprimi possit. Vt √cc 1 $\frac{67}{125}$. reducitur ad √cc $\frac{192}{125}$. significatque √cc 192. diuisam esse per √cc 125. hoc est, per 5. potestque ita repræsentari $\frac{\sqrt{cc}\ 192}{5}$. ita vt significet √cc 192. esse diuisam per 5. Quod si termini huius minutiæ √cc $\frac{192}{125}$. multiplicentur per eundem aliquem numerum, nimirum per √cc 192. producetur minutia √cc $\frac{36864}{24000}$. æquialens minutiæ √cc $\frac{192}{125}$. Et si rursus termini productæ minutiæ ducantur in eandem √cc 192. fiet minutia æquialens √cc $\frac{7077888}{4608000}$. hoc est $\frac{\sqrt{cc}\ 192}{\sqrt{cc}\ 4608000}$. significatque cubum 192. (qui videlicet producitur ex √cc 192. ducta in se cubice) diuisum esse per √cc 4608000. quia radix cubica numeratoris 7077888. est 192. Rursus minutia √3 $\frac{16}{64}$. significat √3 16. nimirum 4. diuisam esse per √3 64. nimirum per 8. æquialetque minutiæ $\frac{1}{2}$. At minutia $\frac{\sqrt{3}\ 16}{64}$. significat √3 16. id est, 4 diuisam esse per 64. æquialetque minutiæ $\frac{4}{64}$. vel $\frac{1}{16}$. Sic minutia $\frac{16}{\sqrt{3}\ 64}$. significat numerum 16 diuisum esse per √3 64. id est, per 8. æquialetque numero 2.

Abbreuiatio minutiarum irrationalium.

QVANDO eadem est proportio numeratorum ad denominatores, minutiæ æquales sunt, quemadmodum in minutijs vulgaribus. Itaque omnes hæ minutiæ $\frac{\sqrt{3}\ 64}{3}$. √3 $\frac{64}{4}$. $\frac{64}{\sqrt{cc}\ 256}$. eiusdem sunt valoris: quia in omnibus numerator ad denominatorem proportionem seruat quadruplam, vt constat, si numeratores singuli per singulos denominatores diuidantur.

MINVTIÆ irrationales reducuntur ad minimos terminos, quando reduci possunt, vt reduci solent minutiæ vulgares. Vt hæc minutia √cc $\frac{4}{9}$ reducitur ad hãc √cc $\frac{1}{2}$. & √3 $\frac{144}{36}$. ad √3 $\frac{4}{1}$. Possunt quoque nonnunquam reduci ad minora signa radicalia. Vt √cc $\frac{4}{8}$. reducitur ad $\frac{\sqrt{cc}\ 2}{\sqrt{3}\ 2}$. quia numerator 4. habet radicem quadratam 2. sed hæc non habet cubicam: At denominator 8. habet radicem cubicam 2. sed hæc quadratam non habet. Esse autem has minutias √cc $\frac{4}{8}$. & $\frac{\sqrt{cc}\ 2}{\sqrt{3}\ 2}$. æquales probari potest ex multiplicatione in crucem.

Minutiarum irrationalium.

ADDITIO, atque subtractio sit in hunc modum. Si denominator est idem, adduntur denominatores, vt supra traditum est, vel vnus ab altero subtrahitur, & summæ, vel residuo communis denominator supponitur. Vt ex additione $\frac{\sqrt{3}\ 4}{7}$. ad $\frac{\sqrt{3}\ 9}{7}$. fit summa $\frac{\sqrt{3}\ 25}{7}$. hoc est, $\frac{5}{7}$. At subtracta $\frac{\sqrt{3}\ 4}{7}$. ex $\frac{\sqrt{3}\ 9}{7}$. relinquitur $\frac{\sqrt{3}\ 1}{7}$ id est $\frac{1}{7}$.

Additio & subtractio minutiarũ irrationalium.

Additio.

$\frac{\sqrt{3}\ 4}{7}$ $\frac{\sqrt{3}\ 9}{7}$

$\frac{\sqrt{3}\ 25}{7}$. vel $\frac{5}{7}$.

Subtractio.

$\frac{\sqrt{3}\ 4}{7}$ $\frac{\sqrt{3}\ 9}{7}$.

$\frac{\sqrt{3}\ 1}{7}$. vel $\frac{1}{7}$.

QVANDO autẽ denominatores sunt diuersi, fit reductio ad eundẽ denominatorem per multiplicationem in crucem, quemadmodũ in minutijs vulgaribus fieri consueuit. Deinde eodem modo numeratores adduntur inter se, vel vnus ab altero subtrahitur, & summæ, vel reliquo numero idem denominator communis subscribitur. Vt si addi debent √3 $\frac{16}{49}$. ad √3 $\frac{4}{9}$. vel illa ex hac auferenda, reducentur, vt formula apposita

Reductio.

$\frac{\sqrt{3}\ 144}{\sqrt{3}\ 16}$. $\frac{\sqrt{3}\ 196}{\sqrt{3}\ 9}$.

$\frac{\sqrt{3}\ 49}{\sqrt{3}\ 9}$

√3 441

Additio.

$\frac{\sqrt{3}\ 144}{\sqrt{3}\ 441}$ $\frac{\sqrt{3}\ 196}{\sqrt{3}\ 441}$

$\frac{36}{21}$

monstrat, ad $\frac{\sqrt{3}\ 144}{\sqrt{3}\ 441}$. & $\frac{\sqrt{3}\ 196}{\sqrt{3}\ 441}$. fit autem ex additione summa $\frac{36}{21}$. hoc est, $1\frac{5}{21}$. Nam numeratores commen-

surabiles sunt: in proportione $\frac{7}{6}$. efficiuntque summam √ℨ676. cui supponitur denominator communis √ℨ441. vt fiat summa $\frac{√ℨ676}{√ℨ441}$. hoc est, $\frac{26}{21}$. id est, 1$\frac{5}{21}$. At subtracta $\frac{√ℨ16}{√ℨ49}$. ex $\frac{√ℨ4}{√ℨ9}$. remanent $\frac{2}{21}$. Nam numerator √ℨ144. subtractus à numeratore √ℨ196. relinquit $\frac{√ℨ4}{√ℨ441}$. hoc est, $\frac{2}{21}$.

EODEM modo, si addendæ sunt $\frac{√ℨ50+√ce24}{5}$. & $\frac{√ce24+√ℨ8}{2}$. reduco eas prius ad eandem denominationem, videlicet ad $\frac{√ℨ200+√ce192}{10}$. & $\frac{√ce3000+√ℨ200}{10}$. Additis deinde numeratoribus, ac supposito eodem denominatore 10. fit summa $\frac{√ℨ800+√ce8232}{10}$. At vero ex subtractione minoris minutiæ ex maiore relinquitur $\frac{√ce648}{10}$. quia √ℨ200. ex √ℨ200. nihil relinquit.

ITEM si addendæ sunt $\frac{√ℨ4}{9}$. & $\frac{√ℨ49}{9}$. vel illa minutia ex hac detrahenda, non est opus reductione ad eandem denominationem. Fit autem ex numeratoribus summa √ℨ81. & supposito denominatore 9. fit summa ex duabus propositis minutijs $\frac{√ℨ81}{9}$. hoc est, 1. At detracto numeratore √ℨ4. ex numeratore √ℨ49. relinquitur √ℨ25. Est ergo residuum $\frac{√ℨ25}{9}$. hoc est, $\frac{5}{9}$.

QVANDO numeratores sunt incommensurabiles, additio eorum fit per interpositionem signi +, subtractio autem per interiectionem signi —. Vt summa ex √ℨ$\frac{7}{8}$. & √ℨ$\frac{5}{8}$. fit summa √ℨ$\frac{7}{8}$ + √ℨ$\frac{5}{8}$. Et √ℨ$\frac{5}{8}$. dempta ex √ℨ$\frac{7}{8}$. reliquam facit √ℨ$\frac{7}{8}$ — √ℨ$\frac{5}{8}$.

Multiplicatio ac diuisio minutiarum irrationaliũ.

IN multiplicatione, ac diuisione minutiarum irrationalium solum opus est reductione ad eadem signa radicalia. Reliqua enim perficiuntur, vt in minutijs vulgaribus traditum est. Vt si ducenda sit $\frac{√ℨ3}{4}$ per $\frac{√ℨ6}{7}$. fit $\frac{√ℨ18}{28}$. At si prior per posteriorem diuidenda sit, inuersis terminis diuisoris, stabit exemplum, vt vides. Fit autem Quotiens $\frac{√ℨ147}{√ℨ96}$. hoc est √ℨ1$\frac{51}{96}$. Nam ex √ℨ3. in 7.

Multiplicatio	Diuisio
$\frac{√ℨ3}{4}$. per $\frac{√ℨ6}{7}$.	$\frac{√ℨ3}{4}$. per $\frac{7}{√ℨ6}$.

fit √ℨ147. & ex 4. in √ℨ6. fit √ℨ96. In diuisione tamen fieri potest reductio ad eandem denominationem, sed tunc, relicto denominatore, facienda est diuisio numeratoris per numeratorem. Vt in dato exemplo, minutiæ $\frac{√ℨ3}{4}$. & $\frac{√ℨ6}{7}$. reducentur ad $\frac{√ℨ147}{28}$. & $\frac{√ℨ96}{28}$. Diuiso autem numeratore √ℨ147. per numeratorem √ℨ96. fit Quotiens √ℨ1$\frac{51}{96}$. vt prius.

SINT quoque multiplicanda inter se $\frac{√ℨ800+√ce5184}{10}$. & $\frac{√ce1536}{10}$. Primũ reducenda sunt ad eadem signa radicalia, retento eodem denominatore communi 10. Numeratores ergo √ℨ800. & √ce5184. reducentur ad √ℨce512000000. & √ℨce26873856. Deinde si numerator √ce1536. multiplicetur zensice, reducetur ad √ℨce2359296. Itaque sic stabunt minutiæ reductæ. Ex √ℨce2359296. in √ℨce512000000. hoc est,

$$\frac{√ℨce512000000+√ℨce26873856}{10}. \qquad \frac{√ℨce2359296}{10}.$$

in √ℨce512. (Nam √ℨce512. & $\frac{√ℨce512000000}{10}$. idem prorsus sunt, cum idem numerus fiat ex √ℨce512. in 10. hoc est, in √ℨce1000000 qui ex 1. in √ℨce512000000) producitur √ℨce1207959552. Et ex √ℨce2359296. in √ℨce26873856. fit √ℨce63403380965376, hoc est, √ce7962624. cum hic numerus sit illius producti radix zensica. Et quoniam denominatores multiplicati faciunt 100. erit productus numerus

$$\frac{√ℨce1207959552}{10}+\frac{√ce7962624}{100}.$$

AD extremum sit diuidenda $\frac{√ℨce512000000+√ℨce26873856}{10}$. per $\frac{√ℨce2359296}{10}$. Quoniam eundem habent denominatorem, satis est, diuidere numeratores. Ex diuisione √ℨce512000000, per √ℨce2359296. fit Quotiens √ℨce217$\frac{1}{72}$. nimirum √ℨce$\frac{15625}{72}$. hoc est, $\frac{5}{√ℨce72}$. propterea quod numerator √ℨce15625. æquiualet numero 5. cum numeri 15625. radix Zensica sit 125. & huius radix cubica 5. Vel (quod idem est) quod numeri 15625. radix cubica sit 25. & huius radix Zensica 5. At ex diuisione √ℨce26873856. per √ℨce2359296. fit Quotiens √ℨce11$\frac{921600}{2359296}$. siue √ℨce11$\frac{25}{64}$. vel √ℨce$\frac{729}{64}$. hoc est, $\frac{3}{2}$. siue 1$\frac{1}{2}$. Ex diuisione ergo proposita fit Quotiens √ℨce217$\frac{1}{72}$ + 1$\frac{1}{2}$. Vel $\frac{5}{√ℨce72}$ + 1$\frac{1}{2}$.

DE NVMERIS IRRATIONALIBVS COSSICIS, siue denominatis, vna cum eorum Algorithmo.

CAPVT XXVI.

Numeri Cossici irrationales, qui.

NVMERI Cossici, siue denominati fiunt irrationales, quando illis præfigitur signum aliquod radicale. Vt 20℞. fit irrationalis √ℨ20℞. Item √ce20℞. √ℨℨ20℞. &c. Sensus autem est, vt sumatur radix zensica, vel cubica, vel zensizensica 20. radicum, quæ mille modis variari potest, pro varietate valoris vnius radicis, potestque aliquando esse rationalis, & aliquando, vt plurimum, irrationalis. Nam si 1℞. est 5. erunt 20℞. numerus 100. cuius √ℨ. est 10. atq; ita √ℨ20℞. est numerus rationalis, æquiualens 10. At √ce20℞. erit irrationalis, cum 100. non habeant radicem cubicam. Sic etiam √ℨℨ20℞. erit irrationalis, quod 100. non habeant radicem Zensizensicam: æquiualet tamen √ℨ10. quippe cum radix zensica 100. sit 10. & radix zensica 10. sit √ℨ10. Quod si 1℞. sit 50. erit valor 20℞. 1000. quæ habent radicem cubicam 10. Erit igitur √ce20℞. rationalis, æquiualens 10. At √ℨ20℞. erit irrationalis, sicut & √ℨℨ20℞. cum 1000. neque habeant radicem zensicam, neque zensizensicam. Vides ergo, non posse iudicari, an huiusmodi numeri sint rationales, vel irrationales, nisi prius constet æstimatio vnius radicis. Immo fieri potest, vt numerus aliquis Cossicus, sine signo radicali, inueniatur interdum esse irrationalis. Vt si æquatio reperiatur inter 1ℨ. & 20℞. & vnius zensi pretium sit 18. necessario numerus 20℞. erit irrationalis, æquiualens √ℨ7200. Nam quadrati 18. radix est √ℨ18. atque adeo 20℞. erunt √ℨ7200. qui numerus irrationalis est, cum 7200. careant radice quadrata,

Additio, & Subtractio numerorum Cossicorum irrationaliũ.

ALGORITHMVS horum numerorum ex triplici Algorithmo conficitur, signorum radicalium, numerorum absolutorum, & signorum Cossicorum; neque admodum difficilis est, cum ipsa signa satis nos instruant, quid agere debeamus. Additio enim vt plurimum fit per interpositionem signi +. Subtractio vero per signum —. Vt ex additione √ℨ36℞. ad √ℨ12ℨ. fit summa √ℨ36℞ + √ℨ12ℨ. Vel √ℨ12ℨ + √ℨ36℞. At demptis 36. ex √ℨ36℞. fit reliquus numerus √ℨ36℞ — 36. & sic de alijs.

QVANDO signa Cossica sunt eadem, & numeri irrationales, semotis signis Cossicis, sunt commensurabiles, tunc signa Cossica operationem non impediunt, sed numeri irrationales adduntur, ac subtrahuntur, quemadmodum radices surdæ, vt cap. 19. & 20. monstratum est, ac post operationẽ idem signũ Cossicum apponitur. Vt ex √ℨ8℞. ad √ℨ18℞. fit summa √ℨ50℞. quia √ℨ8. & √ℨ18. commensurabiles sunt, efficiuntque √ℨ50. quod constat ita esse, si 1℞ statuatur 2. Erunt enim 8℞ 16. cuius numeri radix est 4. Et 18℞. facient 36. cuius numeri radix est 6. Fiunt autem 10. ex 4. & 6. Liquet autem √ℨ50℞. facere etiam 10. cum 50℞ faciant 100. cuius numeri radix est 10.

SIC ex √ℨ8℞. ad √ℨ32℞. fit √ℨ72℞. quod per resolutionem probari potest, posita 1℞. 2. Nam √ℨ8℞ erit 4. & √ℨ32℞. erit 8. fit autem ex 4. & 8. summa 12. Vide iam, an summa collecta √ℨ72℞. faciat etiam 12. Certum autem est, 72℞. facere 144. cuius radix est 12.

ITEM ex √ℨ8ℨ. ad √ℨ32ℨ. fit summa √ℨ72ℨ. Et ex √ℨ16ℨ. ad √ℨ4ℨ. fit √ℨ36ℨ. Nam si 1℞. statuatur 2. vt 1ℨ sit 4. erunt 16ℨ 64. cuius numeri radix est 8. At 4ℨ. erunt 16. cuius numeri radix est 4. Fiunt autẽ 12. ex 8. & 4. quantum nimirum valet √ℨ36ℨ. quippe cum 36ℨ. sint 144. cuius numeri radix est 12.

PRÆTEREA ex √ℨ8ℨ. ad √ℨ18ℨ. fit √ℨ50ℨ. quod etiam perbelle examini quadrat, posita 1℞ 2. vt 1ℨ. sit 4. Erunt enim 8ℨ. 32. cuius numeri radix est √ℨ32. Et 18ℨ. sunt 72. cuius radix est √ℨ72. Fit autem ex √ℨ32. & √ℨ72. summa √ℨ200. Ac tantundẽ facit √ℨ50ℨ. quippe cum 50ℨ. sint 200. cuius numeri radix est √ℨ200.

EADEM ratione, dempta √ℨ8℞. ex √ℨ18℞. superest √ℨ2℞. Atque subtracta √ℨ8ℨ. à √ℨ18ℨ. reliqua fit √ℨ2ℨ. Vtrumque exemplum per radicem 2. sic examinabimus. 8℞. faciunt 16. cuius numeri radix est 4. Et 18℞ faciunt 36. cuius numeri radix est 6. Demptis autem 4. ex 6. remanent 2. Ac tantundem facit √ℨ2℞, cum 2℞ faciant 4. cuius numeri radix est 2. Rursus 8ℨ. faciunt 32. cuius numeri radix est √ℨ32. Et 18ℨ. faciunt 72. cuius numeri radix est √ℨ72. Subtracta vero √ℨ32. ex √ℨ72. remanet √ℨ8. quantum nimirum facit √ℨ2ℨ. propterea quod 2ℨ. faciunt 8. cuius numeri radix est √ℨ8.

Reductio signorum radicalium in numeris Cossicis irrationalibus.

VT autem numeri Cossici irrationales inter se multiplicentur, aut diuidantur, reducenda prius sunt signa radicalia ad idem signum, vt cap. 18. docuimus: si nimirum multiplicatio fiat in crucem. Vt √ce4℞. & √ℨ8℞. reducuntur ad √ℨce16ℨ. & √ℨce512ce. vt ex subiecta formula patet. Nã 4℞ ductæ in se zensice, faciunt 16ℨ. & 8℞ multiplicatæ in se cubice faciunt 512ce. Exponentes vero signorum radicalium inter se multiplicati faciunt 6. exponentem signi √ℨce. Reductionem autem esse rite peractam, hoc est, √ℨce16ℨ. æqualem esse √ce4℞. & √ℨce512ce. æquiualere √ℨ8℞. perspicuum est.

√ℨce 16ℨ	√ℨce 512 ce
4 ℞	8 ℞
√ce	√ℨ
3	2
6	

Nam posita 1℞2. erunt 4℞8. cuius numeri radix cubica est 2. Ac tantundem facit √ℨce16ℨ. ad quam reducta est √ce4℞. Nam 16ℨ. faciunt 64. cuius numeri radix zensicubica est 2. Item 8℞. erunt 16. cuius numeri radix zensica est 4. Atque tantundem quoque facit √ℨce512ce. ad quam √ℨ8℞. reuocata est. Nam 512ce. faciunt 4096. cuius numeri radix zensicubica est 4.

Eodẽ modo √ℨ8℞. & √ce16ℨ. reducẽtur ad √ℨce512ce & √ℨce256ℨℨ. vt hæc altera formula docet. Esse autem √ℨce512ce. æqualem √ℨ8℞ & √ℨce256ℨℨ. æquiualere √ℨ℞16ℨ. facile probabimus. Nimirum √ℨ8℞. hoc est, √ℨ16. est 4. quantum videlicet facit √ℨce512ce. quippe cum 512ce faciant 4096 cuius numeri √ℨce est 4. Item √ce16ℨ. est quoque 4. quantum nimirũ facit √ℨce256ℨℨ. cum 256ℨℨ. faciant 4096. qui numerus radicem zensicubicam habet 4. Ex quo constat, tam √ℨ8℞. & √ce16ℨ. inter se, quam √ℨce512ce. & √ℨce256ℨℨ. inter se esse æquales.

√ℨce 512 ce	√ℨce 256 ℨℨ
8 ℞	16 ℨ
√ℨ	√ce
2	3
6	

Multiplicatio ac diuisio numerorum Cossicorum irrationalium.

FACTA reductione, vt præcepimus, institui potest & multiplicatio, & diuisio. In priori ergo exemplo ex multiplicatione √ℨce512ce. in √ℨce16ℨ. fit √ℨce8192ß. quod ita probatur. √ℨce512ce. facit 4. Et √ℨce16ℨ. facit 2. Atq; ex in 4. in 2. fiunt 8. quantũ nimirũ facit √ℨce8192ß. Quoniã videlicet 8192ß. faciunt 262144 cuius √ℨce est 8. Item ante reductionem √ce4℞. est 2. & √ℨ8℞. est 4. vbi rursum vides, ex 2. in 4. gigni 8.

Item ex diuisione √ℨce512ce per √ℨce16ℨ. fit Quotiens √ℨce32℞. hoc est, 2. cum 32℞ faciant 64. cuius numeri √ℨce est 2. quod probatur. Nam √ℨce512ce. est 4. & √ℨce16ℨ. est 2. vbi cernis, ex diuisione 4. per 2. Quotientem fieri 2. quod etiam ante reductionem manifestum est: quippe cum √ℨ8℞. sit 4. & √ce4℞. sit 2. vbi iterum ex diuisione 4. per 2. fit Quotiens 2.

IN posteriori vero exemplo, ex multiplicatione √ℨce512ce. in √ℨce256ℨℨ. fit √ℨce131072 Bß. hoc est 16. propterea quod 131072 Bß. faciunt 16777216. qui numerus radicem zensicubicam habet 16. Atque hoc ita esse, liquet. Nam tam √ℨce512ce. quam √ℨce256ℨℨ. est 4. Manifestum autem est, ex 4. in 4. fieri 16. quod etiam patet ante reductionem, cum tam √ℨ8℞. quam √ce16ℨ. sit 4. posita 1℞ 2. &c.

Item ex diuisione √ℨce256ℨℨ. per √ℨce512ce fit Quotiens √ℨce$\frac{1}{2}$℞. hoc est, √ℨce1. cum $\frac{1}{2}$℞ sit 1. posita 1℞ 2. ac proinde cũ √ℨce1. sit 1. erit Quotiens 1. vt ratio postulat. Cum enim √ℨce256ℨℨ. & √ℨce512ce. æquales sint, quod quælibet earum sit 4. vt dictum est, fiet ex diuisione vnius per alteram Quotiens 1. Pari ratione ex diuisione √ℨce131072 Bß. per √ℨce512ce. fit Quotiens √ℨce256ℨℨ. vt probare potes.

SIC etiam, vt 1℞ ducatur in √ℨ4. quadranda erit 1℞ & quadrato 1ℨ, præponendum signum radicale √ℨ. vt fiat √ℨ1ℨ atque ita ex √ℨ1ℨ in √ℨ4. fit numerus √ℨ4ℨ. quod probatur, si 1℞. sit 2. Nam ex 2. in √ℨ4. id est, in 2. fiunt 4. radix nimirum 4ℨ. id est, numeri 16.

Ita quoq; vt 3 ☉ ducantur in √ 16 quadrandus erit numerus 32 ☉ vt fiant 9 ☽. Deinde √ 9 ☽ ducenda in √ 16 gigneturque numerus √ 144 ☽. quod eodem modo probabitur, sumpto binario pro 1. radice. Nam 32 ☉ facient 6. & √ 16. facit 4. Fiunt autem 24. ex 6. in 4. Ac radix ☽ 144 ☽. facit similiter 24. cum 144 ☽ faciant 576. cuius numeri radix est 24. &c.

Hi porro numeri producti √ 48 ☽. & √ 144 ☽. dicuntur numeri radicum, vt in ænigmate 12. & 28. cap. 32. constabit: quia videlicet prior productus est ex 12 ☉. in √ 4. posterior autem ex 32 ☉. in √ 16. quemadmodum numerus 4. productus ex 1. aureo in 4. Item numerus 48. productus ex 3. aureis in 16. dicitur numerus aureorum. Id quod diligenter obseruandum est.

Atque hoc perinde est, ac si ducatur 1. in √ 4. vel 3. in √ 16. Producti enim numeri √ 4. & √ 144. sunt numeri vnitatum, quæ multiplicatæ sunt. Itaque ex 12 ☉ in √ 4. fit numerus radicum √ 48 ☽. nimirum √ 4. zensorum. Et ex 32 ☉ in √ 16. fit numerus radicum √ 144 ☽. id est, √ 144. zensorum, atque ita de cæteris. quandoquidem in huiusmodi multiplicationibus seruata est regula multiplicationis radicum surdarum, quæ in cap. 18. tradita est. Verum hoc melius percipietur ex solutione ænigmatis 12. & 28. cap. 32.

Quãdo post reductionẽ signa Cossica abbreuiari possint, & quãdo non.

OBSERVANDVM autem hic est, rem non succedere, si signa Cossica, vt cap. 7. docui, abbreuientur. Nam in priori exemplo, in quo √ ☾ 4 ☉. & √ 8 ☉ reductæ sunt ad √ ☾ 16 ☽. & √ ☾ ☾ 512 ☾. vbi ex multiplicatione procreatus est numerus 8. si signa Cossica abbreuientur, stabit reductio in his terminis √ ☾ 16. & √ ☾ ☾ ☾ 512 ☉. Sed ex multiplicatione vnius in alteram fit √ ☾ ☾ 8192 ☉. quæ valet √ ☾ ☾ 128. propterea quod 8192 ☉. faciunt 16384. cuius numeri √ ☽. est 128. & huius √ ☾ ☾. est √ ☾ ☾ 128. quæ æqualis non est priori numero producto 8. Solum quando huiusmodi numeri reducti æquales sunt, abbreuiari poterunt signa Cossica. Tunc enim manet adhuc æqualitas, vt cap. 12. diximus. Vt quia √ ☾ ☾ 512 ☾. & √ ☾ ☾ 256 ☽. æquales sunt cum quælibet valeat 4. si abbreuientur signa Cossica, cernetur adhuc æqualitas inter √ ☽ ☾ ☾ 512. & √ ☽ ☾ ☾ 256 ☉. quippe cum 256 ☉ faciant 512. Constat autem √ ☾ ☾ 512. & √ ☽ ☾ ☾ 512. æquales esse. Hoc te monere volui, ne signa Cossica abbreuies, etiam post reductionem factam, nisi constet numerorum æqualitas.

DE minutijs porro horum numerorum non attinet quidquam dicere, cum suorum integrorum præcepta sequantur in omnibus.

Æquatio inter numerum Cossicum Irrationalem, & numerum absolutum.

CÆTERVM si occurrat æquatio inter numerum Cossicum Irrationalem, & numerum absolutum, reducetur ea æquatio hoc modo. quod quidem prope finem cap. 10. polliciti sumus, nos hoc loco docturos. Sit, Verbi gratia, æquatio inter √ ☽ 242 ☉. & 12. Quo posito, erit quoque æquatio inter eorum quadrata 242 ☉. & 144. Diuisis ergo 144. per 24. prodibit in Quotiente vnius radicis pretium 6. quod patet. quia 24 ☉ facient 144. cuius numeri radix quadrata est 12.

Item si fit æquatio inter √ ☽ 10 ☽. & 20. erit etiam æquatio inter eorum quadrata 10 ☽. & 400. Diuisis igitur 400. per 10. reperietur 1 ☽. valere 40. atque idcirco 1 ☉. valebit √ 40. Nam 10 ☽. erunt 400. cuius numeri radix quadrata est 20.

Denique si æquatio inueniatur inter √ ☾ ☾ 12 ☽. & 30. erit etiam æquatio inter eorum cubos 12 ☽. & 27000. Diuisis ergo 27000. per 12. prodibit pretium 1 ☽. 2250. ac propterea 12 ☽. facient 27000. cuius numeri radix cubica est 30.

Quãdo huiusmodi æquatio impossibilis sit

Quod si quis proponat æquationem inter √ ☾ ☾ 8. & 3. erit etiam æquatio inter eorum cubos 8. & 27. quod est impossibile. Itaque in hisce æquationibus necesse est, numerum absolutum esse radicem numeri, qui gerit signum radicale. qualis est æquatio inter √ ☾ ☾ 8. & 2. Item inter √ ☾ ☾ 64. & 4. Item inter √ ☽ 81. & 9. &c. Alioquin impossibilis erit æquatio.

DE BINOMIIS ATQVE APOTOMIS, Residuisve.

CAPVT XXVII.

Binomium & Residuũ: item Trinomiũ, Quatrinomium apud scriptores quid

SCRIPTORES Algebræ ferme omnes, duos numeros quosuis copulatos per signum +, Binomium appellare solent, vt √ 12 + √ 3. & √ 18 + √ 8. & 6 + √ 9. Copulatos vero per signũ −, Residuum, vel Apotomen, vt √ 12 − √ 3. & √ 18 − √ 8. & 6 − √ 9. Plures autem numeros ita copulatos, dicere consueuerunt, trinomium, quatrinomium, &c. vt √ 17 + √ 10 + √ 3. vel √ 17 − √ 10 + √ 3. dicunt Trinomium: At √ 17 + √ 10 + √ 3 + √ 2. Vel √ 17 − √ 10 + √ 3 − √ 2. Quatrinomium, &c. Euclides aũt in lib. 10. propos. 37. & 74. tunc solum numeros binos copulatos per signum + vel −, vocat Binomia, vel Residua, quando duo illi numeri copulati sunt Rationales solum potentia commensurabiles, quamuis alter eorum sit radix surda, vel vterque. Vt 6 + √ 20. Item √ 18 + 4. Item √ 24 + √ 18. vocat Binomia: At 6 − √ 20. Et √ 18 − 4. Et √ 24 − √ 18. appellat Residua, vel Apotomas. Nam quilibet duo numeri copulati sunt Rationales potentia tantum commensurabiles; cum eorum quadrata commensurabilia sint quadrato cuiusuis numeri Rationalis. Itaque neque √ ☽ 10 + √ ☽ 8. Binomium erit, neque √ ☽ 10 − √ ☽ 8. Residuum. quia eorum particulæ sunt numeri Irrationales: quippe cum eorum quadrata √ 10. & √ 8. sint incommensurabilia habentia proportionem, quam √ ½. ad 1. vt ex Lemmate cap. 18. patet. Eadem ratione neque 6 + √ 9. neque 20 + 6. Binomia erunt, neque 6 − √ 9. neque 20 − 6. Residua: propterea quod bini quilibet numeri efficiunt vnum solum numerum rationalem, non autem duos. Nam 6 + √ 9. æquiualent 9. & 20 + 6. æquiualent 26. Item 6 − √ 9. æquiualent 3. Et 20

Binomium & Residuũ secundum Euclidem, quid.

Et 20 − 6. æquiualent 14. Ratio autem est, quod bini quilibet sunt Rationales longitudine commensurabiles, & non potentia tantum: quippe cum proportio inter quoslibet duos sit rationalis; Proportio enim 6. ad √ ☽ 9. dupla est: si namque per √ ☽ 9. diuidantur 6. hoc est, √ ☽ 36. exibit in Quotiente √ 4 hoc est, 2. denominator proportionis. Si vero diuidantur 20. per 6. fiet Quotiens 3 ⅓. ita vt 20. ad 6. habeant proportionem triplam sesquitertiam. Eadem ratione neque √ ☽ 12 + √ ☽ 3. Binomium erit, neque √ ☽ 12 − √ ☽ 3. Residuum, licet vterque numerus sit radix surda. quia numeri proportionem habent duplam, & priores duo efficiunt summam √ ☽ 27. videlicet vnicum numerum: posteriores vero duo æquiualent √ ☽ 3. vnico etiam numero. Eandemque ob causam neque √ ☽ 18 + √ ☽ 8. Binomium erit censendum, neque √ ☽ 18 − √ ☽ 8. Residuum, quamuis vterque numerus radix surda sit. quia numeri proportionem habent sesquialteram, cuius denominator est 1 ½. ac priores duo conficiunt summam √ ☽ 50. vnicum numerum: posteriores vero duo huic vnico numero √ ☽ 8. æquiualent. Denique propositis duobus numeris rationalibus, hoc est, quorum quadrata commensurabilia sunt quadrato cuiusuis numeri rationalis, ita tamen, vt diuiso vno per alterum, Quotiens fiat rationalis, id est, numerus, qui radicem habeat, non constituetur ex illis Binomium, aut Residuum: quia eiusmodi numeri nõ sunt potentia tantũ commensurabiles, sed etiam longitudine, ac proinde ex ipsis non fit numerus irrationalis, sed rationalis. licet nonnunquam efficiatur radix surda. Vt ex 3. & √ ☽ 16 fit summa √ ☽ 49. hoc est, 7. numerus rationalis, qui surdus non est: At ex √ ☽ 8. & √ ☽ 18. fit summa √ ☽ 50. numerus rationalis surdus. Atque in hoc decipiuntur non pauci, putantes omnem numerum, qui gerit signum √ ☽. & radicem non habet, esse irrationalem quod verum non est, atque Euclidi manifeste repugnat. Solum quando numerus gerens signum √ ☽. refert superficiem aliquam, vel quadratum, numerus ille irrationalis est [a] qualis est superficies rectangula producta ex multiplicatione mutua duorum numerorum rationalium potentia tantum commensurabilium. Vt si √ ☽ 3. ducatur in √ ☽ 10. producitur superficies √ ☽ 30. irrationalis, quæ Media dicitur. Radix autem eius quadrata est √ ☽ ☽ 30. quæ vocatur linea Media. cum hæc in se quadrate ducta faciat √ ☽ ☽ 900. hoc est, √ ☽ 30. propterea quod radix zensica numeri 900. est 30. & huius radix zensica est √ ☽ 30. Itaque quando in superioribus numeros habentes præfixum signum √ ☽. vocauimus irrationales, id improprie dictum accipiendum est, quando numeri illi rationales sunt.

Nõ omnem numerum, qui gerit signũ √ ☽. esse irrationalem.

[a] 22. deci. *Superficies, & linea Media.*

Potest quidem omnis numerus gerens signum √ ☽. dici numerus irrationalis, si sumatur pro superficie Media, producta ex √ ☽ 1. in ipsum numerum. Vt √ ☽ 3. erit superficies Media, & irrationalis, si capiatur pro producto ex √ ☽ 1. in √ ☽ 3. eiusque radix quadrata erit √ ☽ ☽ 3. Nam hæc ducta in se zensice facit √ ☽ ☽ 9. hoc est √ ☽ 3. quippe cum radix zensica numeri 9. sit 3. & huius radix zensica √ ☽ 3. & sic de alijs.

Sex Binomia, ac Residua.

CONSTITVIT Euclides sex genera Binomiorum, totidemque Residuorum. Aut enim maius nomen plus potest, quam minus, quadrato, cuius radix maiori nomini est commensurabilis longitudine, vel incommensurabilis. Item vel maius nomen cõmensurabile est longitudine numero rationali expositio, vel minus, vel *vtrum*que neutrum. Vtrumque enim nomen expositio numero rationali longitudine cõmensurabile esse nequit. [b] quia & ipsa nomina essent numeri rationales longitudine commensurabiles. quod est absurdum, cum ponantur potentia tantum commensurabiles. Quibus positis, fient sex genera Binomiorum. quæ sic definiuntur.

[b] 12. deci.

Binomium primum.

Binomium primum est, cuius maius nomen plus potest, quam minus, quadrato, cuius radix maiori nomini est longitudine commensurabilis, ipsumq; maius nomen expositio numero rationali est commensurabile longitudine. Vt 6 + √ ☽ 27. quia quadratum maioris nominis 6. nimirum 36. superat 27. quadratum minoris nominis, quadrato 9. cuius radix 3. longitudine commensurabilis est maiori nomini 6. atque ipsum quoq; maius nomen 6. commensurabile est longitudine expositio cuiuis numero rationali.

Binomium secundum.

Binomium secundum est, cuius maius nomen plus potest, quam minus, quadrato, cuius radix maiori nomini est longitudine commensurabilis, ipsumque minus nomen expositio numero rationali est longitudine commensurabile. Vt √ ☽ 48 + 6. quia quadratum maioris nominis, nimirum 48. superat 36. quadratum minoris nominis, quadrato 12. cuius radix, videlicet √ ☽ 12. commensurabilis est longitudine maiori nomini, cum √ ☽ 48. ad √ ☽ 12. habeat proportionem duplam; propterea quod illa per hanc diuisa, fiat Quotiens √ ☽ 4. hoc est, 2. Item minus nomen expositio cuilibet numero rationali commensurabile est longitudine.

Binomium tertium.

Binomium tertium est, cuius maius nomen plus potest, quam minus, quadrato, cuius radix maiori nomini est longitudine commensurabilis, sed neutrum nomen expositio numero rationali longitudine commensurabile existit. Vt √ ☽ 24 + √ ☽ 18. quia maioris nominis quadratum 24. superat 18. quadratum minoris nominis, quadrato 6. cuius radix nimirum √ ☽ 6. commensurabilis est longitudine maiori nomini: cum √ ☽ 24. ad √ ☽ 6. proportionem habeat duplam: quippe cum illa diuisa per hanc, Quotiens fiat √ ☽ 4. hoc est, 2. At neutrum nomen longitudine commensurabile est expositio numero rationali.

Binomium quartum.

Binomium quartum est, cuius maius nomen plus potest, quam minus, quadrato, cuius radix maiori nomini est longitudine incommensurabilis, ipsum vero maius nomẽ expositio numero rationali commensurabile est longitudine. Vt 4 + √ ☽ 10. quia maioris nominis quadratum 16. superat 10. quadratum minoris nominis, quadrato 6. cuius radix, nimirum √ ☽ 6. longitudine incommensurabilis est maiori nomini 4. quippe cũ maioris nominis quadratum 16. ad 6. quadratum √ ☽ 6. proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum: [c] ac propterea eorum latera longitudine sint incommensurabilia. At maius nomen 4. longitudine commensurabile est numero expositio rationali.

[c] 9. decim.

Binomium quintum.

Binomium quintum est, cuius maius nomen plus potest, quam minus, quadrato, cuius radix maiori nomini incommensurabilis est longitudine, nomen vero minus expositio numero rationali longitudine est commensurabile. Vt √ ☽ 5 + 2. quia quadratum 5. maioris nominis superat 4 quadratum minoris nominis, quadrato 1. cuius radix, nimirum √ ☽ 1. longitudine incommensurabilis est maiori nomini: quippe cum maioris nominis quadratum ad 1. quadratum √ ☽ 1. proportionem non habeat, quam quadratus numerus ad numerum quadratum: [d] ac propterea latera eorum sint longitudine incommensurabilia. Est tamen minus nomen 2. longitudine commensurabile expositio numero rationali cuicunque.

[d] 9. decim.

Binomium sextum.

Binomium deniq; sextum est, cuius maius nomen plus potest, quam minus, quadrato cuius radix maiori nomini incommensurabilis est longitudine, sed neutrum nomen expositio numero rationali commensurabile

longi-

longitudine. Vt $\sqrt{80}+\sqrt{50}$. quia quadratum 80. maioris nominis superat 50. quadratum minoris nominis, quadrato 30. cuius radix, nimirum $\sqrt{30}$. longitudine incommensurabilis est maiori nomini. quippe cum quadratum 80. maioris nominis, & quadratum 30. proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad numerum quadratum; [a] ideoque eorum latera longitudine sint incommensurabilia longitudine. Neutrum quoque nomen longitudine commensurabile est exposito numero rationali. [a] 9. decim.

SEX autem residua, vel Apotome eodem modo se habent; cum ex quolibet Binomio oriatur Apotome respondens, interposito signo —— pro signo +. Nam ex Euclide Apotome nil aliud est, quam id, quod relinquitur, si duobus numeris rationalibus potentia tantum commensurabilibus positis, minor de maiore detrahatur. quod quidem fit per interpositionem signi —.

Sex genera Apotomarum.

Itaque ex primo Binomio $6+\sqrt{27}$. fit prima Apotome $6-\sqrt{27}$.
Ex secundo Binomio $\sqrt{48}+6$. fit Apotome secunda $\sqrt{48}-6$.
Ex tertio Binomio $\sqrt{24}+\sqrt{18}$. fit Apotome tertia $\sqrt{24}-\sqrt{18}$.
Ex quarto Binomio $4+\sqrt{10}$. fit quarta Apotome $4-\sqrt{10}$.
Ex quinto Binomio $\sqrt{5}+2$. fit quinta Apotome $\sqrt{5}-2$.
Ex sexto denique Binomio $\sqrt{80}+\sqrt{50}$. fit sexta Apotome $\sqrt{80}-\sqrt{50}$. quæ omnia perspicua sunt ex definitionibus Apotomarum ab Euclide traditis.

QVONIAM vero intelligentia decimi libri potissimum in cognitione Binomiorum, ac Residuorum consistit, libet paulo diutius in eorum tractatione immorari. Primo autem loco docebimus, qua ratione quodvis Binomium optatum, ac proinde & Residuum (cum hoc solum signo — ab illo differat) reperiatur: Deinde, qua arte ex quouis Binomio, aut Residuo radix quadrata eliciatur, & quamnam lineam Irrationalem, vel numerum cõpositum, diminutumve radix illa constituat: insistentes semper ijs, quę ab Euclide demonstrata sunt.

Binomij primi, & Apotomæ primæ inuentio.

SIT ergo inueniendum primum Binomium, primumque Residuum Quadratus quilibet numerus AB, nimirum 9. diuidatur in BC, quadratum numerum 4. & in AC, numerum non quadratum 5. assumaturque numerus rationalis quicunque 6. pro primo nomine. Et fiat, vt numerus 9. AB, ad numerum 5. AC, ita 36. quadratus numerus assumpti numeri 6. ad aliud: inuenieturque quadratus 20. Ergo $6+\sqrt{20}$. erit primum Binomium. Et $6-\sqrt{20}$. erit prima Apotome, vt constat ex propos. 49. & 86. lib. 10. Eucl.

5 4
A.....C....B

$6+\sqrt{20}$
$6-\sqrt{20}$

Binomij secundi, & secundæ Apotomæ inuentio.

Binomium vero secundum, atque Apotome secunda hoc modo reperietur. Diuiso quocunque numero quadrato AB, nimirum 9. in BC, quadratum 4. & in AC, nõ quadratum 5. assumatur ad libitum numerus rationalis 5. pro secundo nomine. Fiat vt numerus 5. AC, ad quadratum numerum 9. AB, ita 25. quadratus numerus numeri assumpti 5. ad aliud; inuenieturque quadratus 45. Ergo Binomium secundum est $\sqrt{45}+5$. Et $\sqrt{45}-5$. Apotome secunda, vt manifestum est ex propos. 50 & 87. lib. 10. Eucl.

5 4
A.....C....B

$\sqrt{45}+5$
$\sqrt{45}-5$

Binomij tertij, & tertiæ Apotomæ inuentio.

Binomium tertium, & Apotomam tertiam inueniemus sic. Diuiso quolibet numero quadrato AB, videlicet 9. in BC, quadratum 4. & in AC, non quadratum 5. sumatur alius numerus D, nimirum 6. non quadratus proxime maior, quam AC, 5. differetque D, ab AC, vel sola vnitate, vel binario. Vnitate quidem, quando AC, numerus talis fuerit, vt ei vnitas addita non faciat quadratum: binario vero, quando vnitas addita ad AC, facit quadratum. Vt si AC, sit 8. erit proxime maior non quadratus differens ab 8. binario, quia vnitas addita ad 8. efficit quadratum 9. At si AC, sit 5. vt in nostro exemplo, erit non quadratus proxime maior 6. differens à 5. vnitate, quia vnitas addita ad 5. non conficit quadratum. Sumpto deinde quocunque numero rationali 12. Fiat vt numerus D 6. ad quadratum numerum AB, 9. ita 144. quadratus numerus assumpti numeri rationalis 12. ad aliud, inuenieturque quadratus 216. cuius radix, videlicet $\sqrt{216}$. erit maius nomen. Quod si rursus fiat; vt 9. quadratus AB, ad numerum AC, 5. ita quadratus 216. inuentus ad aliud, reperietur quadratus 120. cuius radix, nimirum $\sqrt{120}$. erit minus nomen. Binomium ergo tertium inuentum est $\sqrt{216}+\sqrt{120}$. Et Apotome tertia $\sqrt{216}-\sqrt{120}$. vt ex propos. 51. & 88. lib. 10. Eucl. liquet.

5 4
A..... C....B
D.....
12
$\sqrt{216}+\sqrt{120}$
$\sqrt{216}\ \sqrt{}-120$

Binomij quarti, & quartæ Apotomæ inuentio.

Binomium quartum, & Apotomam quartam inueniemus in hunc modum. Diuiso quocunque quadrato numero AB, nimirum 9. in duos nõ quadratos AC, CB, vtpote in 6. & 3. sumptoque numero quolibet rationali 6. pro maiori nomine: Fiat, vt quadratus numerus AB, videlicet 9. ad AC, 6. non quadratum, ita 36. quadratus numerus assumpti numeri rationalis 6. ad aliud; reperieturque quadratus 24. cuius radix, nimirum $\sqrt{24}$. erit minus nomen. Est ergo quartum Binomium $6+\sqrt{24}$. Et quarta Apotome $6-\sqrt{24}$. vt ex propos. 52. & 89. lib. 10. Eucl. colligitur.

6 3
A.....C...B

$6+\sqrt{24}$
$6-\sqrt{24}$

Binomij quinti, & Apotomæ quintæ inuentio.

Binomium quintum, & Apotomam quintam ita explorabimus. Diuiso quolibet numero quadrato AB, nimirum 9, in duos AC, CB, non quadratos, vt in 6. & 3. sumptoque numero quouis rationali 2. pro minori nomine: Fiat, vt AC, numerus 6. ad quadratum AB, nimirum ad 9. ita 4. quadratus assumpti numeri rationalis 2. ad aliud. inuenieturque quadratus 6. cuius radix, nimirum $\sqrt{6}$. erit maius nomen. Erit ergo binomium quintum $\sqrt{6}+2$. & & Apotome quinta $\sqrt{6}-2$. vt Euclides propos. 53. & 90. lib. 10. concludit.

6 3
A..... C...B

$\sqrt{6}+2$
$\sqrt{6}-2$

Bino-

Binomij sexti, & Apotomæ sextæ inuētio.

Binomium denique sextum, & Apotomam sextam indagabimus hac arte. Diuiso quolibet numero 12. non quadrato AB, in duos non quadratos AC, CB, vt in 7. & 5. sumatur alius quadratus D, quicunque, nimirum 9. & insuper quilibet numerus rationalis 12. Deinde fiat, vt numerus quadratus D, nimirum 9. ad numerum 12. non quadratum AB, ita 144. quadratus numerus assumpti numeri rationalis 12. ad aliud. Reperietur enim quadratus 192. cuius radix, nimirũ $\sqrt{192}$. erit maius nomẽ Binomij.

7 5
A.....C.....B
D.....
12
$\sqrt{192}+\sqrt{112}$
$\sqrt{192}-\sqrt{112}$

Et si rursus fiat, vt numerus 12. AB, non quadratus ad 7. numerum AC, ita quadratus proxime inuentus 192. ad aliud, reperietur quadratus numerus 112. cuius radix, nimirum $\sqrt{112}$. erit minus nomen: ita vt Binomium sextum sit $\sqrt{192}+\sqrt{112}$. Apotome autem sexta $\sqrt{192}-\sqrt{112}$. vt ex propos. 54. & 91. lib. 10. Eucl. constat.

Inuētio Binomij, vel Apotomæ cuiuslibet speciei, ex dato Binomio vel Apotomæ eiusdē specie.

IAM vero, dato quouis Binomio, vel Apotoma, inueniemus ex eo, sine magno labore, quotuis alia Binomia, & Apotomas eiusdem speciei. Nam pro primo, ac quarto Binomio, si fiat, vt maius nomen ad minus, ita quiuis numerus rationalis assumptus pro maiori nomine noui Binomij ad aliud producetur minus nomẽ noui Binomij primi vel quarti. Pro secundo vero, ac quinto, si fiat, vt minus nomen ad maius, ita quiuis numerus rationalis pro minori nomine noui Binomij assumptus ad aliud, procreabitur maius nomẽ noui Binomij secundi vel quinti. Pro tertio denique ac sexto, si fiat, vt maius nomen ad minus, (quorum vtrumq; numerus surdus est,) ita quiuis numerus surdus pro maiori nomine noui Binomij assumptus ad aliud, proueniet minus nomen noui Binomij tertij, vel sexti. Rationem huius rei, si quis desideret, sciat petendam esse ex propos. 15. lib. 10. Eucl. Cum enim per constructionem eadem sit proportio inter nomina dati Binomij, quæ inter nomina producti Binomij: si maius nomen dati Binomij plus potest, quam minus, quadrato radicis sibi commensurabilis longitudine; [a] poterit quoque maius nomen noui Binomij plus, quam minus, quadrato radicis longitudine sibi commensurabilis. Et si maius nomen illius plus potest, quam minus, quadrato radicis sibi longitudine incommensurabilis; poterit quoq; maius nomen huius plus, quam minus, quadrato radicis sibi incommensurabilis longitudine. Nam nomina Binomiorum sunt instar linearum. Atque idcirco duo illa Binomia erunt eiusdem generis, nimirum vtrumque erit vel primum, vel secundum, vel tertium, &c. quippe cum vel maius nomen in vtroque, vel minus numerus sit rationalis, vel surdus. [a] 15. decim.

Inuento porro Binomio nouo, iam nosti, fieri ex eo Residuũ, vel Apotomã, si signum + in — cõmutetur.

Exempli causa, ex Binomio primo $6+\sqrt{27}$. fiet simile Binomium, cuius maius nomẽ sit 400. si fiat, vt 6. ad $\sqrt{27}$. ita 400. ad aliud. hoc est, si multiplicetur $\sqrt{27}$. in 400. id est, in $\sqrt{160000}$. & productus numerus $\sqrt{4320000}$. per 6. id est, per $\sqrt{36}$. diuidatur. Producetur enim $\sqrt{120000}$. Erit que nouum Binomium primum $400+\sqrt{120000}$. Et noua Apotome prima $400-\sqrt{120000}$. Quadratum enim 160000. maioris nominis superat quadratum 120000. minoris nominis quadrato 40000. cuius radix 200. longitudine commensurabilis est maiori nomini, &c. Eademque ratio est de cæteris.

RVRSVS si vtrumque nomen dati Binomij per eundem quemuis numerum multiplicetur, aut diuidatur, producentur [b] eadem de causa duo nomina alterius Binomij eiusdem speciei: quę etiam nomina erunt alterius Apotomæ eiusdem speciei: [c] propterea quod duo numeri procreati eandem inter se proportionem habent, quam duo nomina propositi Binomij. V. g. Dato Binomio secundo $\sqrt{48}+6$. si vtrumque nomen per 3. multiplicetur, fiet alterum Binomium secundum $\sqrt{432}+18$. & alia Apotome $\sqrt{432}-18$. Et si vtrumque nomen eiusdem dati Binomij secundi $\sqrt{48}+6$. diuidatur per numerum quemuis eundem 3. fiet iterum aliud Binomium secundum $\sqrt{5\frac{1}{3}}+2$. & alia Apotome secunda $\sqrt{5\frac{1}{3}}-2$. Quod si diuisio fiat per 2. gignetur nouum Binomium secundum $\sqrt{12}+3$. & noua Apotome secunda $\sqrt{12}-3$. & sic de alijs. [b] 15. decim. [c] 17. septi.

Binomium vti Residuum proposĕ tum quodnam sit ex 6. speciebus iudicare.

QVOD si quando iudicandum sit de aliquo Binomio, vel residuo proposito, quondam sit ex prædictis sex speciebus, non erit id magni laboris. Nam si maius nomen fuerit numerus rationalis absolutus, erit Binomium vel primum, vel quartum. Et si quidem, diuiso quadrato maioris nominis per excessum, quo illud quadratum superat quadratum nominis minoris, Quotiens fiat numerus quadratus, Binomium erit primum: Si vero Quotiens sit numerus non quadratus, Binomium erit quartum.

Si autem minus nomen fuerit absolutus numerus rationalis, erit Binomium vel secundum, vel quintum. Et si quidem, diuiso quadrato maioris nominis per excessum, quo illud quadratum superat quadratum minoris nominis, Quotiens gignatur numerus quadratus, Binomium erit secundum: Si vero Quotiens fiat numerus non quadratus, Binomium erit quintum.

Si denique neutrum nominum fuerit absolutus numerus rationalis, sed surdus, erit Binomium vel tertium, vel sextum; Tertium quidem, quando diuiso maioris nominis quadrato per excessum, quo illud quadratum superat quadratum minoris nominis, Quotiens proueniat numerus quadratus: si vero Quotiens gignatur numerus non quadratus, Binomium erit sextum. Idemque dices de Apotoma quacunque.

Quæ ratione in circulo omnia 6. Binomia, & Apotomæ reperiantur.

POSTREMO est etiam scitu non iniucundũ, vt Michael Stifelius aduertit, omnia sex Binomia, ac proinde & Residua, vel Apotomas, reperiri in paucis lineis certo quodam artificio inter circulũ quemlibet describptis. Sit enim circulus ABCD, cuius diameter BD, in tot æquales partes distribuatur, vt earum numerus tertiam & quartam partem habeat, nimirum in 12. Ex quarta parte diametri E, comprehendente scilicet BE, tres duodecimas diametri; atq; ex tertia parte diametri F, cõplectente videlicet BF, quatuor duodecimas diametri, erigãtur ad diametrum perpendiculares EA, FC, in diuersas partes; iunganturque rectæ AB, BC, CD, DA. Harum omnium rectarum quantitates hoc modo cognoscentur. [d] Quoniam AE, inter DE, EB, media est proportionalis; & CF, inter DF, FB: [e] erit tam quadratum ex AE, rectangulo sub DE, EB, quam quadratum ex CF, rectangulo sub DF, FB, æquale. Est autem rectangulum sub DE, EB, hoc est, ex 9. in 3. productum 27. Igitur & quadratum ex AE, erit 27. ideoq; recta AE, $\sqrt{27}$. Rectangulum autem sub DF, FB, id est, ex 8. in 4. procreatum est 32. Igitur & quadratum ex CF, erit 32. & recta CF, $\sqrt{32}$. [d] coroll. 13. [e] 17. sexti.

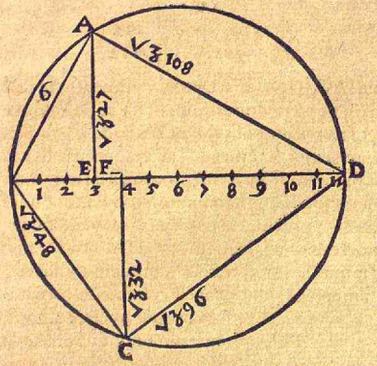
Deinde quia quadrata ex BE, EA, nimirum 9. & 27. conficiunt 36. [f] quibus æquale est quadratum ex AB; erit quadratum ex AB, 36. & recta ipsa AB, $\sqrt{36}$. hoc est, 6. [f] 47. primi

Rursus

[a] 47.primi Rursus quia quadrata ex BF, FC. nimirum 16. & 32. efficiunt 48. [a] quibus æquale est quadratum ex BC: erit hoc quadratum 48. & recta ipsa BC $\sqrt{\ }48$.

[b] 47.primi Item quadrata ex DF, FC, nimirum 64. & 32. conficiunt 96. [b] quibus quadratum ex CD, æquale est: erit hoc quadratum 96. & recta ipsa CD, $\sqrt{\ }96$.

[c] 47.primi



Denique quia quadrata ex DE, EA, nimirum 81. & 27. efficiunt 108. [c] quibus quadratum ex DA, æquale est; erit hoc quadratum 108. & recta ipsa DA, $\sqrt{\ }108$.

IAM rectæ AB, AE, constituunt Binomium primum $6+\sqrt{\ }27$. & Apotomam primam $6-\sqrt{\ }27$.

Rectæ AD, DE, constituunt Binomium secundum $\sqrt{\ }108+9$. & secundam Apotomam $\sqrt{\ }108-9$.

Rectæ AD, DC, constituunt Binomium tertium $\sqrt{\ }108+\sqrt{\ }96$. & Apotomam tertiam $\sqrt{\ }108-\sqrt{\ }96$.

Rectæ BD, DC, constituunt Binomium quartum $12+\sqrt{\ }96$. & quartam Apotomam $12-\sqrt{\ }96$.

Rectæ DC, DF, constituunt Binomium quintum $\sqrt{\ }96+8$. & quintam Apotomam $\sqrt{\ }96-8$.

Rectæ denique BC, CF, constituunt sextum Binomium $\sqrt{\ }48+\sqrt{\ }32$. & Apotomam sextam $\sqrt{\ }48-\sqrt{\ }32$.

ESSE autem hæc 6. Binomia, ac Residua illa, quæ ab Euclide definita sunt, examinare poteris per earum definitiones. Nam in prioribus tribus, si maiora nomina diuidantur per excessus, quibus eorum quadrata superant quadrata minorum nominum, fiunt Quotientes numeri quadrati, ac proinde maiora nomina plus possunt, quam minora, quadratis, quorum radices maioribus nominibus longitudine sunt commensurabiles. Si vero in posterioribus tribus maiora nomina diuidantur per excessus, quibus eorum quadrata superant quadrata minorum nominum, fiunt Quotientes numeri non quadrati: ac proinde maiora nomina plus possunt, quam minora, quadratis, quorum radices maioribus nominibus longitudine sunt incommensurabiles. Cætera ex se manifesta sunt.

QVOD si diametrum BD, diuiseris in alias partes, quarum numerus habeat partem tertiam, & quartam, vt in 24. vel 36. vel 48. vel 60. vel 204. vel 360. vel 480. vel 600. &c. inuenies eodem ordine alia 6. Binomia, & Apotomas.

DE EXTRACTIONE RADICVM EX BINOMIIS, & Apotomis. Vbi obiter de alijs lineis Irrationalibus, de quibus Euclides in lib. 10. disputat.

CAPVT XXVIII.

Cur nonnulli dicãt, non omnia Binomia habere radices.

SVNT nonnulli, qui affirmant, ex solis prioribus tribus Binomijs, atque Apotomis radices quadratas elici posse. quod verum non est, & Euclidi omnino repugnat, vt mox ostendemus: neque scio, quo modo excusari possint, nisi dicatur, propterea eos posteriora tria Binomia, atque Apotomas radicibus quadratis priuare, quod horum radices sint valde perplexę & obscuriores, quam ipsamet Binomia, atque Apotomæ: quippe cum sint radices numerorum compositorum, quas Vniuersales vocant, vt in exemplis patebit. Habere aut omnia Binomia atque Apotomas radices quadratas, quæ in se ductæ ipsa Binomia, atque Apotomas producant, euidenter ex propos. 55. 56. 57. 58. 59. & 60. Item ex propos. 92. 93. 94. 95. 96. & 97. lib. 10. Eucl. colligitur. In prioribus enim 6. propositionibus demonstrat Euclides, quinam numeri in se multiplicati producant Binomia: (vocamus lineas Irrationales, numeros Irrationales.) in posterioribus autem 6. propositionibus ostendit, quinam numeri in se ducti Apotomas procreent. quod ita manifestum fiet. In propos. 55. ait, Si spacium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima: Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur. Quis autem nescit, si Rationalis illa sit vnitas, spatium illud comprehensum, esse Binomium primum; quippe cum vnitas multiplicans Binomium primum, producat ipsummet Binomium primũ? Numerus ergo potens Binomium primũ, hoc est, radix Binomij primi, est Binomium, ex sententia Eucl. Eadẽ ratione ex sequentibus quinque propos. infertur, radicem Binomij secundi esse lineam Irrationalem, quæ ex binis Medijs prima appellatur. Radicem autem Binomij tertij esse lineam Irrationalem, quæ ex binis Medijs secunda dicitur. Et radicem quarti Binomij lineam Irrationalem esse, quæ vocatur Maior. Ac radicem quinti Binomij esse lineam Irrationalem quæ Rationale & Medium potens appellatur. Radicem denique sexti Binomij esse irrationalem lineam, quę bina Media potens nominatur. Non aliter ex propos. 92. & sequentibus quinque colligemus, radicem primæ Apotomæ esse Apotomen. Radicem vero Apotomæ secundæ esse Mediæ Apotomen primam. Radicem deinde tertiæ Apotomæ esse Mediæ Apotomen secundam. Et radicem Apotomæ quartæ esse lineam Irrationalem, quæ appellatur Minor. Radicem autem Apotomæ quintæ esse lineam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Denique radicem sextæ Apotomæ lineam esse Irrationalem, quæ cum Medio Medium totum efficit. Non est igitur dubitandum, ex Euclidis sententia omnia Binomia, omnesque Apotomas habere radices: cum tam perspicue doceat, quo pacto cuiusque Binomij, atque Apotomæ radix appelletur. Quod vt planius fiat, explicandæ sunt obiter illæ lineæ Irrationales, quas demonstrat radices esse Binomiorum, atque Apotomarum. Hactenus enim solum Binomium eiusque sex species, solamque Apotomen, eiusque sex genera. Item lineam Mediam, superiori cap. expoſuimus.

Omnia Binomia secundum Eucl. habere radices.

Radices 6. Binomiorũ quales lineæ, vel numeri Irrationales sint,

Radices 6. Apotomarum, quales lineæ Irrationales, vel numeri sint.

QVEMAD-

QVEMADMODVM ergo [a] Binomium apud Eucl. est linea Irrationalis ex duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus composita: [b] ita si duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, quæ rationale contineant, (Has lineas docuit inuenire propos. 27.) erit tota linea Irrationalis, quæ ex binis Medijs prima vocatur. Hanc nobis exhibebit radix Binomij secundi.

[a] 37. deci. [b] 38. deci. *Ex binis Medijs prima.*

Et [c] si duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, quæ Medium contineant; (quæ quo pacto reperiantur, docuit propos. 29.) erit tota linea Irrationalis, quæ ex binis Medijs secunda dicitur. Eamque nobis præbebit radix tertij Binomij.

[c] 39. deci. *Ex binis Medijs secunda.*

Et [d] si duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium: (quas inuenire docet propositione 34.) tota recta linea Irrationalis erit, quæ Maior vocatur. quam nobis offeret radix Binomij quarti.

[d] 40. deci. *Linea Maior.*

Et [e] si duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale; (quæ inueniuntur propos. 35.) tota recta linea Irrationalis erit, quæ Rationale ac Medium potens nominatur. Hanc nobis demonstrabit radix Binomij quinti.

[e] 41. deci. *Rationale, ac Medium potens.*

Si [f] denique duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum, (qua ratione huiusmodi lineæ reperiantur, docuit propos. 36.) tota recta linea Irrationalis erit, quæ vocatur bina Media potens. Eamque nobis indicabit radix Binomij sexti.

[f] 42. deci. *Bina Media potens.*

ITEM quemadmodum [g] Apotome apud Eucl. est linea Irrationalis, quæ reliqua est, si à Rationali auferatur Rationalis potentia tantum commensurabilis existens toti [h] Ita si à Media auferatur Media, potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; (quas quidem lineas propos. 28. reperit.) Reliqua linea Irrationails est, quæ Mediæ Apotome prima vocatur. Quam quidem profert radix Apotomæ secundæ.

[g] 74. deci. [h] 75. deci. *Mediæ Apotome prima.*

Et [i] si à Media auferatur Media, potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Medium contineat; (quæ lineæ propos. 29. inueniuntur.) Reliqua linea Irrationalis est, quę Mediæ Apotome secunda appellatur. Hæc autem apparebit in radice Apotomæ tertiæ.

[i] 76. deci. *Mediæ Apotome secunda.*

Et [k] si à recta linea, auferatur recta potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium; (quas lineas propos. 34. reperit.) Recta linea reliqua irrationalis est, quæ Minor nominatur. Quæ quidem radix est Apotomæ quartæ.

[k] 77. deci. *Linea Minor.*

Et [l] si à recta linea auferatur recta, potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale; (quas lineas inuenit propos. 35.) Reliqua linea irrationalis est, quæ cum Rationali Medium totum efficiens dicitur. Qualis est radix Apotomæ quintæ.

[l] 78. deci. *Reliqua cũ Rationali Medium totum efficiens.*

Et [m] si tandem à recta detrahatur recta, potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis; (quæ lineæ propos. 36. inueniuntur.) Reliqua linea Irrationalis est, quæ cum Medio Medium totum efficiens appellatur. Quam nobis exhibet radix sextæ Apotomæ.

[m] 79. deci. *Reliqua cũ Medio Medium totũ efficiens.*

HAS porro lineas Irrationales, vel potius numeros Irrationales (quas enim Euclides lineas nominat, nos numeros dicimus) plenius, perfectiusque declarabimus in radicibus Binomiorum, & Apotomarum.

Habes igitur ex Euclide tredecim numero lineas Irrationales inter se differentes, de quibus potissimum in lib. 10. agitur. Sunt autem hæ.

1. *Media.*
2. *Ex binis nominibus, cuius sex sunt species inuentæ.*
3. *Ex binis Medijs prima.*
4. *Ex binis Medijs secunda.*
5. *Maior.*
6. *Rationale ac Medium potens.*
7. *Bina Media potens.*
8. *Apotome, cuius etiam species sex sunt inuentæ.*
9. *Mediæ Apotome prima.*
10. *Mediæ Apotome secunda.*
11. *Minor.*
12. *Cum Rationali Medium totum efficiens.*
13. *Cum Medio Medium totum efficiens.*

QVOD si pro linea ex binis nominibus, sex Binomia; & pro Apotoma sex Apotomas accipias; habebis in vniuersum 23. lineas Irrationales apud Euclidem.

SED iam artem præscribamus, qua ex Binomijs, & Apotomis radices quadratæ eruantur: in quibus quidem naturæ prædictarum linearum Irrationalium planius percipientur.

PROPOSITO ergo Binomio, vel Residuo, cape differentiam quadratorum vtriusque nominis. Deinde radicem quadratam huius differentiæ tum maiori nomini adijce, tum ab eodem aufer. Tertio radicem quadratam semissis illius summæ connecte cum radice quadrata semissis illius relicti, per signum +. si propositum est Binomium, vel per signum −, si Residuum. Ita enim procreata erit radix Binomij, aut Residui.

ALII regulam hanc ita proponunt. Sume differentiam quadratorum semissium vtriusque nominis. Huius differentiæ radicem quadratam tum semissi maioris nominis adijce, tum ab eadem semisse subtrahe. Nam radix quadrata illius summæ connexa per signum +. vel − cum radice quadrata illius relicti, dabit radicem Binomij, vel Residui quæsitam.

ALII denique eandem ita proponunt. Ex quarta parte differentiæ quadratorum vtriusque nominis erue radicem quadratam. Hanc etim si semissi maioris nominis adijcies, & ex summa radicem erues, procreabis priorem particulam quæsitæ radicis. Et si eandem hanc summam ex maiori nomine detrahes, dabit relicti

radix quadrata posteriorem radicis quæsitæ particulam. Vtrisque igitur particulis per signum +, aut — copulatis totam radicem desideratam habebis.

Radix Binomij primi est Binomium, & radix Residui primi est Residuum.

Atque ita habes triplicem regulam pro eruenda radice ex dato Binomio, aut Residuo. quæ varijs iam exemplis elucidanda erit.

Sit Binomium primum $23+\sqrt{8}448$. ex quo per primam regulam radicem eliciemus hoc modo. Differentia quadratorum 529. & 448. vtriusque nominis est 81. cuius radicem 9. si maiori nomini 23. adijciemus, & ab eodem subtrahemus; faciemus summam 32. & reliquum numerum 14. Semisses summæ, & relicti numeri sunt 16. & 7. è quibus erutæ radices 4. & $\sqrt{8}7$. copulatæ per signum +. dabunt radicem $4+\sqrt{8}7$. propositi Binomij primi: ac proinde $4-\sqrt{8}7$. radix erit Residui primi $23-\sqrt{8}448$. quarum illa est Binomium, hæc autem Residuum, vt Euclides lib. 10. propos. 55. & 92. demonstrauit. Esse porro $4+\sqrt{8}7$. veram radicem Binomij primi $23+\sqrt{8}448$. & $4-\sqrt{8}7$. veram radicem Residui primi $23-\sqrt{8}448$. probari potest ex vtriusque radicis multiplicatione in se, vt hic patet.

$$\begin{array}{r} 4+\sqrt{8}7 \\ 4+\sqrt{8}7 \\ \hline +\sqrt{8}112+7 \\ +16+\sqrt{8}112 \\ \hline \text{Summa } 23+\sqrt{8}448 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4-\sqrt{8}7 \\ 4-\sqrt{8}7 \\ \hline -\sqrt{8}112+7 \\ +16-\sqrt{8}112 \\ \hline \text{Summa } 23-\sqrt{8}448 \end{array}$$

Radix Binomij secundi est linea ex binis Medijs prima: Et radix Residui secundi est Media Apotome prima.

Sit Binomium secundum $\sqrt{8}448+14$. ex quo per secundam regulam radix sic eruetur. Semisses nominum sunt $\sqrt{8}112$ & 7. quarum quadrata 112. 49. differentiam habent 63. cuius radix $\sqrt{8}63$. addita semissi $\sqrt{8}112$. maioris nominis, facit $\sqrt{8}343$. Detracta autem ab eadē semisse $\sqrt{8}112$. relinquit $\sqrt{8}7$. Ergo $\sqrt{88}343+\sqrt{88}7$. erit radix Binomij secundi propositi. Et $\sqrt{88}343-\sqrt{88}7$. radix erit Residui secundi $\sqrt{8}448-14$. Illa ex propos. 56. lib. 10. linea est Irrationalis ex binis Medijs prima. Hæc autem ex propos. 93. lib. 10. Irrationalis linea est, quæ Mediæ Apotome prima dicitur. Itaque $\sqrt{88}343$. & $\sqrt{88}7$. sunt duæ lineæ Mediæ, Rationale continentes, vt volunt propos. 38. & 75. lib. 10. Nam Irrationales sunt, quæ Mediæ dicuntur. Multiplicatæ vero inter se producunt $\sqrt{88}2401$. cuius radix zensizensica est 7. numerus Rationalis.

Examen radicis inuentæ.

$$\begin{array}{r} \sqrt{88}343+\sqrt{88}7 \\ \sqrt{88}343+\sqrt{88}7 \\ \hline +\sqrt{88}2401+\sqrt{8}7 \\ +\sqrt{8}343+\sqrt{88}2401 \\ \hline \text{Summa } \sqrt{8}448+14 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \sqrt{88}343-\sqrt{88}7 \\ \sqrt{88}343-\sqrt{88}7 \\ \hline -\sqrt{88}2401+\sqrt{87} \\ +\sqrt{8}343-\sqrt{88}2401 \\ \hline \text{Summa } \sqrt{88}448-14 \end{array}$$

Radix Binomij tertij est linea ex binis Medijs secunda: Et radix Residui tertij est Mediæ Apotome secunda.

Sit Binomium tertium $\sqrt{8}448+\sqrt{8}336$. ex quo per regulam tertiam radix elicietur, hoc modo. Quarta pars differentiæ quadratorum 448. 336. est 28. cuius radix quadrata $\sqrt{8}28$ addita ad $\sqrt{8}112$. semissem maioris nominis facit $\sqrt{8}252$. ideoque prior particula radicis quæsitę erit $\sqrt{88}252$. Et si eadem summa $\sqrt{8}252$. dematur ex $\sqrt{8}448$. maiore nomine, reliqua fit $\sqrt{8}28$. ac proinde posterior particula quæsitæ radicis erit $\sqrt{88}28$. totaque radix Binomij tertij erit $\sqrt{88}252+\sqrt{88}28$. & radix tertij Residui $\sqrt{8}448-\sqrt{8}336$. erit $\sqrt{88}252-\sqrt{88}28$. Illa ex propos. 57. lib. 10. est linaa Irrationalis. quæ ex binis Medijs secunda dicitur. Hæc autem ex propos. 94. lib. 10. Irrationalis est linea, quæ Mediæ Apotome secunda dicitur. Itaque iuxta doctrinam propos. 39. & 76. lib. 10. Eucl. $\sqrt{88}252$. & $\sqrt{88}28$. duæ lineæ sunt Mediæ Medium continentes. Nam Irrationales quidem sunt, quę Mediæ dicuntur; inter se vero multiplicatæ producunt superficiem Mediam $\sqrt{88}7056$. hoc est $\sqrt{8}84$.

Examen radicis inuentæ

$$\begin{array}{r} \sqrt{88}252+\sqrt{88}28 \\ \sqrt{88}252+\sqrt{88}28 \\ \hline +\sqrt{88}7056+\sqrt{8}28 \\ +\sqrt{8}252+\sqrt{88}7056 \\ \hline \text{Summa } \sqrt{8}448+\sqrt{8}336 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \sqrt{88}252-\sqrt{88}28 \\ \sqrt{88}252-\sqrt{88}28 \\ \hline -\sqrt{88}7056+\sqrt{8}28 \\ +\sqrt{8}252-\sqrt{88}7056 \\ \hline \text{Summa } \sqrt{8}448-\sqrt{8}336 \end{array}$$

Radix Binomij quarti est Linea Maior: Et radix Residui quarti est Linea Minor.

Sit Binomium quartum $24+\sqrt{8}448$. ex quo radix extrahetur per primam regulam, hoc pacto. Differentia quadratorum 576. & 448. est 128. cuius radicem, nimirum $\sqrt{8}128$. maiori nomini 24. adijcio, facioque $24+\sqrt{8}128$. Eandem $\sqrt{8}128$. ab eodem maiore nomine 24. detraho, relinquoque $24-\sqrt{8}128$. Semissis illius summæ $24+\sqrt{8}128$. est $12+\sqrt{8}32$. semissis vero illius numeri relicti $24-\sqrt{8}128$. est $12-\sqrt{8}32$. Radix ergo Binomij quarti propositi est $\sqrt{8}(12+\sqrt{8}32)+\sqrt{8}(12-\sqrt{8}32)$. Radix vero quarti huius Residui $24-\sqrt{8}448$. est $\sqrt{8}(12+\sqrt{8}32)-\sqrt{8}(12-\sqrt{8}32)$. Illa iuxta propos. 58. lib. 10. linea Irrationalis est, quæ Maior dicitur. Hæc vero ex propos. 95. lib. 10. Irrationalis linea est, quæ appellatur Minor. Itaq; ex præcepto propos. 40. & 77. lib. 10. $\sqrt{8}.(12+\sqrt{8}32)$ & $\sqrt{8}(12-\sqrt{8}32)$ sunt duæ lineæ potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale: quod autem sub ipsis continetur, Medium. Esse enim potentia incommensurabiles, perspicuum est, cum earum quadrata $12+\sqrt{8}32$ & $12-\sqrt{8}32$. incommensurabilia sint. Quod etiam compositum ex hisce quadratis sit Rationale, patet cum conficiant simul sumpta numerum 24. Rationalem. Denique quod sub ipsis continetur,

netur, esse Medium, liquet, cum ex mutua earum multiplicatione gignatur superficies $\sqrt{8}112$. Media: cuius radix est $\sqrt{88}112$. linea media. Vbi obseruatu dignum est, duo incommensurabilia, qualia sunt quadrata $12+\sqrt{8}32$. & $12-\sqrt{8}32$. simul addita efficere summam 24. Rationalem.

Duo incommensurabilia facere possunt summam Rationalem.

Examen radicis inuentæ pro Binomio quarto.

$$\begin{array}{r} \sqrt{8}(12+\sqrt{8}32)+\sqrt{8}(12-\sqrt{8}32) \\ \sqrt{8}(12+\sqrt{8}32)+\sqrt{8}(12-\sqrt{8}32) \\ \hline 12+\sqrt{8}32+\quad 12-\sqrt{8}32 \\ \sqrt{8}112 \\ \sqrt{8}112 \\ \hline \sqrt{8}448 \\ \hline \text{Tota summa } 24+\sqrt{8}448. \text{ Binomium propositum.} \end{array}$$

Radix Binomij quintiest linea Rationale ac Medium potens. Et radix residui quinti est linea cū Rationali Medium tū efficies.

Sit Binomium quintum $\sqrt{8}448+12$. Ex quo per 2. regulam extrahetur radix hac ratione. Semisses nominum sunt $\sqrt{8}112$. & 6. quarum quadrata 112. & 36. quorum differentia 76. cuius radix, $\sqrt{8}76$. semissi $\sqrt{8}112$. maioris nominis addita facit $\sqrt{8}112+\sqrt{8}76$. Ab eadem autem semisse detracta relinquit $\sqrt{8}112-\sqrt{8}76$. Radix ergo propositi Binomij quinti est $\sqrt{8}(\sqrt{8}112+\sqrt{8}76)+\sqrt{8}(\sqrt{8}112-\sqrt{8}76)$ Residui vero respondentis radix erit $\sqrt{8}(\sqrt{8}112+\sqrt{8}76)-\sqrt{8}(\sqrt{8}112-\sqrt{8}76)$ Illa per propos. 59. lib. 10. linea Irrationalis est, quæ Rationale, & Medium potens appellatur. Hæc vero ex doctrina propos. 96. lib. 10. linea Irrationalis est, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Itaq; ex doctrina propos. 41. & 78. lib. 10. $\sqrt{8}(\sqrt{8}112+\sqrt{8}76)$ & $\sqrt{8}(\sqrt{8}112-\sqrt{8}76.)$ duæ lineæ sunt potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale. Esse enim potentia incommensurabiles, constat, cum earum quadrata incommensurabilia sint. Quod autem compositum ex ipsarum quadratis faciat Medium, perspicuum etiam est, cum earum quadrata $\sqrt{8}112+\sqrt{8}76$. & $\sqrt{8}112-\sqrt{8}76$. simul sumpta faciant $\sqrt{8}448$. superficiem Mediam, cuius radix est $\sqrt{88}448$. linea Media. Denique ex ipsarum multiplicatione inter se gigni Rationale, manifestum est, cum gignatur $\sqrt{8}36$. nimirum 6. Vbi quoque vides, duo incommensurabilia, videlicet $\sqrt{8}(\sqrt{8}112+\sqrt{8}76.)$ & $\sqrt{8}(\sqrt{8}112-\sqrt{8}76)$ inter se multiplicata producere numerum Rationalem, nimirum $\sqrt{8}36$. hoc est, 6.

Duo incommensurabilia inter se multiplicata facere possunt numerum Rationalem.

Examen radicis inuentæ pro Residuo quinto.

$$\begin{array}{r} \sqrt{8}(\sqrt{8}112+\sqrt{8}76)-\sqrt{8}(\sqrt{8}112-\sqrt{8}76) \\ \sqrt{8}(\sqrt{8}112+\sqrt{8}76)-\sqrt{8}(\sqrt{8}112-\sqrt{8}76) \\ \hline \sqrt{8}112+\sqrt{8}76\quad -\quad \sqrt{8}112-\sqrt{8}76 \\ -\sqrt{8}36. \text{ id est, } -6 \\ -\sqrt{8}36. \text{ id est, } -6 \\ \hline -12 \\ \hline \text{Tota summa, } \sqrt{8}448-12. \text{ Residuum quintum.} \end{array}$$

Radix Binomij sexti est linea bina Media potens: Et radix Residui sexti est linea cum Medio Medium totū efficiens.

Sit denique Binomium sextum $\sqrt{8}448+\sqrt{8}352$. ex quo per 3. regulam radix eruetur hoc modo. Quadratorum differentia est 96. cuius pars quarta 24. Huius radix, videlicet $\sqrt{8}24$. addita ad semissem maioris nominis, nimirū ad $\sqrt{8}112$. facit summam $\sqrt{8}112+\sqrt{8}24$. Ergo prior portio radicis quęsitæ est $\sqrt{8}(\sqrt{8}112+\sqrt{8}24.)$ Et si eandē summam $\sqrt{8}112+\sqrt{8}24$. detrahas ex toto maiore nomine $\sqrt{8}448$. relinquetur $\sqrt{8}112-\sqrt{8}24$. Nam $\sqrt{8}112$. dempta ex $\sqrt{8}448$. relinquit $\sqrt{8}112$. ex quo relicto si tollatur $\sqrt{8}24$. relinquetur $\sqrt{8}112-\sqrt{8}24$. ideoque posterior portio radicis quæsitæ est $\sqrt{8}(\sqrt{8}112-\sqrt{8}24.)$ totaque radix Binomij sexti propositi, erit $\sqrt{8}(\sqrt{8}112+\sqrt{8}24)+\sqrt{8}(\sqrt{8}112-\sqrt{8}24.)$ Residui vero sexti respondentis radix erit $\sqrt{8}(\sqrt{8}112+\sqrt{8}24)-\sqrt{8}(\sqrt{8}112-\sqrt{8}24.)$ Illa concludente propos. 60. lib. 10. Irrationalis linea est, quæ bina Media potens nominatur. Hæc vero vt demostrat propos. 97. lib. 10. linea irrationalis est, quæ cum Medio Medium totum efficit. Itaque ex demonstratione propos. 42. & 79. lib. 10. duæ lineæ $\sqrt{8}(\sqrt{8}112+\sqrt{8}24)$ & $\sqrt{8}(\sqrt{8}112-\sqrt{8}24)$ potentia incommensurabiles sunt, quæ faciunt & compositum ex ipsarum quadratis Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium; incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum. Quod enim potentia incommensurabiles sint, docent earum quadrata, quæ incommensurabilia sunt. Quadrata autem simul facere Medium, constat, cum simul faciant $\sqrt{8}448$. superficiem Mediam, cuius radix est $\sqrt{88}448$. Denique ex ductu vnius in alteram procreari etiam Medium, liquido constat, cum producant $\sqrt{8}88$. superficiem Mediam, cuius radix est $\sqrt{88}88$.

Examen radicis inuentæ pro Binomio sexto proposito.

$$\begin{array}{r} \sqrt{8}(\sqrt{8}112+\sqrt{8}24)+\sqrt{8}(\sqrt{8}112-\sqrt{8}24) \\ \sqrt{8}(\sqrt{8}112+\sqrt{8}24)+\sqrt{8}(\sqrt{8}112-\sqrt{8}24) \\ \hline \sqrt{8}112+\sqrt{8}24+\sqrt{8}\quad 112-\sqrt{8}24 \\ \sqrt{8}88 \\ \sqrt{8}88 \\ \hline 352 \\ \hline \text{Tota summa. } \sqrt{}448+\sqrt{8}\ 352 \text{ Binomium propositum.} \end{array}$$

Differentia quadratorum nominum radicis cuiuslibet Binomij & Residui, qua.

IN quolibet autem Binomio, aut Residuo animaduertes, radicem differentiæ quadratorum vti iusque nominis, esse differentiam inter quadrata nominum radicis ipsius Binomij, vel residui. quod mirum cuipiam videri possit quod in proximis 6. Binomijs experiri licet.

In primo Binomio $23+\sqrt{448}$. cuius radix inuenta est $4+\sqrt{7}$. Quadratum numeri 23. nimirum 529. superat quadratum 448. numero 81. cuius radix est 9. differentia videlicet inter quadrata nominum radicis, hoc est, inter 16. & 7.

In Binomio secundo $\sqrt{448}+14$. cuius radix inuenta fuit $\sqrt{343}+\sqrt{7}$. Quadratum 448. superat 196 quadratum numeri 14. numero 252. cuius radix, nimirum $\sqrt{252}$. est differentia inter quadrata nominum radicis. Nam ea quadrata sunt $\sqrt{343}$. & $\sqrt{7}$. vt patet ex multiplicatione nominum $\sqrt{343}$. & $\sqrt{7}$. in se quadratè. Et si $\sqrt{7}$. detur ex $\sqrt{343}$. reliqua fit $\sqrt{252}$.

In tertio Binomio $\sqrt{448}+\sqrt{336}$. cuius radix inuenta fuit $\sqrt{252}+\sqrt{28}$. Quadratum 448. superat quadratum 336. numero 112. cuius radix, videlicet $\sqrt{112}$. differentia est inter quadrata nominum radicis, quæ sunt $\sqrt{252}$. & $\sqrt{28}$. Constat autem $\sqrt{28}$. demptam ex $\sqrt{252}$. relinquere $\sqrt{112}$.

In quarto Binomio $24+\sqrt{448}$. cuius radix inuenta fuit $\sqrt{(12+\sqrt{32})}+\sqrt{(12-\sqrt{32})}$. Quadratum 576. numeri 24. superat quadratum 448. numero 128. cuius radix, nimirum $\sqrt{128}$. differentia est inter quadrata nominum radicis, hoc est, inter $12+\sqrt{32}$. & $12-\sqrt{32}$. vt in hac formula subtractionis apparet. Nam $12.\text{ex } 12.$ nihil relinquunt: sed $-\sqrt{32}.\text{ex}+\sqrt{32}$. (cum diuersa signa mutent speciem) relinquit $\sqrt{128}$. duplum scilicet $\sqrt{32}$. cum signo $+$ superioris numeri.

$$\begin{array}{r} 12+\sqrt{32} \\ 12-\sqrt{32} \\ \hline 0+\sqrt{128} \end{array}$$

In Binomio quinto $\sqrt{448}+12$. cuius radix inuenta fuit $\sqrt{(\sqrt{112}+\sqrt{76})}+\sqrt{(\sqrt{112}-\sqrt{76})}$. Quadratum 448. superat 144. quadratum numeri 12. numero 304. cuius radix, nimirum $\sqrt{304}$. differentia est inter quadrata nominum radicis, hoc est, inter $\sqrt{112}+\sqrt{76}$. & $\sqrt{112}-\sqrt{76}$. vt in hac apposita formula subtractionis apparet. Nam $\sqrt{112}.\text{ex } \sqrt{112}.$ nil relinquit. At $-\sqrt{76}.\text{ex}+\sqrt{76}$. (cum diuersa signa mutent speciem) relinquit $\sqrt{304}$. duplum videlicet $\sqrt{76}$. cum signo $+$ superioris numeri.

$$\begin{array}{r} \sqrt{112}+\sqrt{76} \\ \sqrt{112}-\sqrt{76} \\ \hline 0+\sqrt{304} \end{array}$$

In Binomio denique sexto $\sqrt{448}+\sqrt{352}$. cuius radix inuenta fuit $\sqrt{(\sqrt{112}+\sqrt{24})}+\sqrt{(\sqrt{112}-\sqrt{24})}$. Quadratum 448. superat quadratum 352. numero 96. cuius radix, nimirum $\sqrt{96}$. differentia est inter quadrata nominū radicis, hoc est, inter $\sqrt{112}+\sqrt{24}$. & $\sqrt{112}-\sqrt{24}$. vt in apposita formula subtractionis manifestum est. Nam $\sqrt{112}.\text{ex } \sqrt{112}.$ nil relinquit. At $-\sqrt{24}.\text{ex}+\sqrt{24}$. (cum diuersa signa mutent speciem) relinquit $\sqrt{96}$. duplum videlicet $\sqrt{24}$. cum signo $+$ numeri superioris.

$$\begin{array}{r} \sqrt{112}+\sqrt{24} \\ \sqrt{112}-\sqrt{24} \\ \hline 0+\sqrt{96} \end{array}$$

Idem experieris in quouis alio Binomio, vel residuo, & eius radice.

Pulchra ratio multiplicãdi Binomij, vel Residui in se.

EX hoc colligitur facilis ratio multiplicandi quodcunque Binomium, aut Residuum in se quadrate, quæ talis est. Proposito Binomio, vel Residuo, accipiatur summa quadratorum duarum particularum Binomij, vel Residui, pro prima portione numeri producti. Deinde à quadrato dictæ summa detrahatur quadratum differentiæ quadratorum earundem particularum Binomij, vel Residui. Radix enim reliqui huius numeri erit altera portio producti numeri. Vt Binomium $\sqrt{50}+6$. ductũ in se, facit $86+\sqrt{7200}$. Nã duo quadrata 50. & 36. faciunt 86. priorẽ particulam numeri producti. Et quadratum 7396. numeri inuenti 86. superat 196. quadratum numeri 14. nimirum differentiæ inter quadrata 50. & 36. numero 7200. cuius radix, nimirum $\sqrt{7200}$. dabit posteriorem particulam numeri producti: adeo vt quadratum Binomij $\sqrt{50}+6$. sit $86+\sqrt{7200}$. quandoquidẽ quadratum 7396. prioris portionis 86. superat 7200. quadratũ posterioris portionis, numero 196. cuius radix 14. est differẽtia inter quadrata 50. & 36.

$$\begin{array}{r} \sqrt{50}+6 \\ \hline 86+\sqrt{7200} \end{array}$$

Eadem ratione quadratum. Residui $\sqrt{50}-6$ erit $86-\sqrt{7200}$.

Ita quoque Binomium $\sqrt{50}+\sqrt{36}$. ductũ in se faciet $56+\sqrt{1200}$. quia quadratum 3136. prioris portionis 56. superat 1200. quadratũ $\sqrt{1200}$. portionis posterioris numero 1936. cuius radix 44. differentia est quadratorum 50. & 6. Atq; ita de cæteris.

$$\begin{array}{r} \sqrt{50}+\sqrt{6} \\ \hline 56+\sqrt{1200} \end{array}$$

TRADITVR ab auctoribus nonnullis alia ratio facilis eruendæ radicis ex proposito Binomio, vel Residuo, quam visum est hoc loco explicare, si tamen prius Lemma sequens ostendero.

LEMMA.

Lemma.

DATVM numerum in duas partes secare, vt numerus, qui ex mutua earum multiplicatione producitur, æqualis sit dato numero, qui maior non sit quadrato semissis dati numeri, qui diuidendus est, vel (quod idem est) quarta parte quadrati totius numeri diuidendi.

SIT V.g. numerus 20. in duas partes secandus, quæ inter se multiplicatæ producant numerum 75. qui minor est quadrato 100. semissis numeri 20. propositi vel minor, quam 100. quadrata pars quadrati 400. dati numeri 20. Ex 100. quadrato semissis numeri diuidendi auferatur datus numerus producendus 75. Et reliqui numeri 25. radix quadrata 5. tum addatur ad semissem numeri propositi, nimirum ad 10. tum ab eadem semisse detrahatur. Nam summa confecta 15. & numerus reliquus 5. erunt quæsitæ partes numeri propositi 20. quæ inter se multiplicatæ præcreant datum numerum 75. Huius praxis hæc est demonstratio. Sit numerus 20. AB, propositus diuisus in partes AD, DB, sua multiplicatione producentes datum numerum

A.....C.....D.....B

numerum 75. quæ partes ita fient cognitæ. Diuiso numero AB, bifariam in C; [a] *erit productus ex AB, in DB, vna cum quadrato ex CD, æqualis quadrato 100. semissis CB. Igitur si datus numerus 75. factus ex AD, in DB, detur ex quadrato 100. semissis* [a] *5. secundi CB, reliquus erit quadratus ex CD, 25. cuius radix 5. dabit rectam CD, quæ addita semissi AC, conficiet maiorem partem AD, 15. Et detracta ex semisse CB, reliquam faciet partem minorem DB, 5.*

Sit rursus numerus $\sqrt{80}$. diuidendus in duas partes, ita vt inter se multiplicatæ faciant 1. Semissis dati numeri est $\sqrt{20}$. A quadrato cuius, nimirum à 20. detrahatur numerus 1. producendus. Ac reliqui numeri 19. radix, nimirum $\sqrt{19}$. addatur, & demptur ex semisse $\sqrt{20}$. propositi numeri: fientque partes quæsitæ $\sqrt{20}+\sqrt{19}$. & $\sqrt{20}-\sqrt{19}$. quæ inter se multiplicatæ gignunt 1. vt præcedens formula docet detrahendo videlicet quadratum 19. ex quadrato 20. vt cap. 23. ante exempla Diuisionis docuimus.

$$\begin{array}{r} \sqrt{20}+\sqrt{19} \\ \sqrt{20}-\sqrt{19} \\ \hline 1 \end{array}$$

Item sit numerus $\sqrt{80}$. diuidendus in duas partes, quæ inter se multiplicatæ faciant $\sqrt{5}$. Semissis numeri $\sqrt{80}$. est $\sqrt{20}$. à cuius quadrato 20. si subtrahatur $\sqrt{5}$. remanebunt $20-\sqrt{5}$. cuius radix, nimirum $\sqrt{(20-\sqrt{5})}$. addita ad semissem $\sqrt{20}$. dati numeri $\sqrt{80}$. faciet maiorem partem $\sqrt{20}+\sqrt{(20-\sqrt{5})}$. dempta vero ex eadem semisse $\sqrt{20}$ relinquet minorem partem $\sqrt{20}-\sqrt{(20-\sqrt{5})}$. quæ partes inter se multiplicatæ faciunt $\sqrt{5}$. vt in hac formula apparet. Nam vt ex cap. 23. patet, multiplicatio fiet, si quadratum $20-\sqrt{5}$. posterioris partis ex 20. quadrato prioris partis auferatur. Auferetur autem iuxta hanc alteram formulam. quia 20. ex 20. nihil relinquunt, & vt $-\sqrt{5}$. tollatur ex $+\sqrt{0}$ mutatur species, fitque additio cum signo $+$. superioris numeri $\sqrt{0}$.

$$\begin{array}{r} \sqrt{20}+\sqrt{(20-\sqrt{5})} \\ \sqrt{20}-\sqrt{(20-\sqrt{5})} \\ \hline \sqrt{5} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 20+\sqrt{0} \\ 20-\sqrt{5} \\ \hline 0+\sqrt{5} \end{array}$$

Postremo sit $1\frac{1}{2}$. diuidẽdus in duas partes, quæ inter se multiplicatæ faciant $1\frac{1}{2}$. hoc est, (& in idẽ recidit,) ita vt $1\frac{1}{2}$ sit medio loco proportionalis inter illas duas partes. Semissis $1\frac{1}{2}$. est $\frac{3}{4}$. cuius quadratũ est $\frac{9}{16}$. ex quo tollemus $1\frac{1}{2}$. qui produci debet, remanebit $\frac{9}{16}-1\frac{1}{2}$. cuius radix, nimirũ $\sqrt{(\frac{9}{16}-1\frac{1}{2})}$. addita ad semissem $1\frac{1}{2}$. id est, ad $\frac{3}{4}$. faciet vnam partẽ quæsitam $\frac{3}{4}+\sqrt{(\frac{9}{16}-1\frac{1}{2})}$. Et ablata ex eadẽ semisse, reliquam faciet alteram partẽ $\frac{3}{4}-\sqrt{(\frac{9}{16}-1\frac{1}{2})}$. quæ partes inter se multiplicatæ faciunt $1\frac{1}{2}$. vt in hac formula apparet. Nam multiplicatio fiet, vt ex superioribus patet, si $\frac{9}{16}-1\frac{1}{2}$. quadratum posterioris portionis detrahatur ex $\frac{9}{16}$. quadrato portionis prioris. Detrahetur autem iuxta hanc alteram formulam. quia $\frac{9}{16}$ ex $\frac{9}{16}$. nil relinquit. Et vt $-1\frac{1}{2}$. subtrahatur ex $+0\frac{1}{2}$. mutatur species operationis, fitq. additio, cum signo $+$ superioris numeri $0\frac{1}{2}$. Hoc Lemma absoluemus etiam per Algebram ænigmate 23. capitis 30.

$$\begin{array}{r} \frac{3}{4}+\sqrt{(\frac{9}{16}-1\frac{1}{2})} \\ \frac{3}{4}-\sqrt{(\frac{9}{16}-1\frac{1}{2})} \\ \hline 1\frac{1}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \frac{9}{16}+0\frac{1}{2} \\ \frac{9}{16}-1\frac{1}{2} \\ \hline 0+1\frac{1}{2} \end{array}$$

DEMONSTRATO, & exemplis illustrato hoc Lemmate, eruemus, radicem ex quolibet Binomio, Residuoue, hac facili via. Diuidatur per Lemma antecedens maius nomen in duas partes, quæ inter se multiplicatæ procreent numerum æqualem quartæ parti quadrati nominis minoris. Radices namque harum partium copulatæ per signum $+$ pro Binomio, vel per signum $-$ pro Residuo, radicem quæsitam exhibebunt.

Alia via extrahendæ radicis ex dato Binomio, vel Residuo.

Sit enim Binomium primum $20+\sqrt{300}$. Secetur maius nomen 20. in duas partes, quæ inter se multiplicatæ faciant 75. qui numerus quarta pars est quadrati 300. minoris nominis. Erit vna pars 15. & altera 5. Igitur $\sqrt{15}+\sqrt{5}$. radix est dati Binomij, quæ in se ducta (quod facile fiet ea ratione, quam ante Lemma præcedens explicauimus) producet Binomium datum $20+\sqrt{300}$.

Sit rursus Binomium primum $38+\sqrt{288}$. Maius nomen 38. secabitur in duas partes sua multiplicatione producentes 72. quartam partem quadrati 288. minoris nominis: hoc modo. Semissis maioris nominis est 19. à cuius quadrato 361. si detrahatur dicta quarta pars 72. reliquus fit numerus 289. cuius radix 17. addita semissi prædictæ 19. & ab eadem subtracta facit partes quæsitas 36. & 2. Ergo $\sqrt{36}$. hoc est, $6+\sqrt{2}$. radix est Binomij propositi. quod ex eius ductu in se examinari potest. Quadrata enim 36. & 2. nominum faciunt 38. maius nomen. Et si ex eius quadrato 1444. demptur 1156. quadratum differentiæ quadratorum 36. & 2. nimirum quadratum numeri 34. remanebit numerus 288. Ergo $\sqrt{288}$. erit nomen minus, ita vt Binomium sit $38+\sqrt{288}$.

SIT præterea Residuum secundum $\sqrt{18}-4$. Maius nomen $\sqrt{18}$. secetur in duas partes, quarum vna in alteram faciat 4. quartam Partem quadrati minoris nominis -4. hoc modo. Semissis maioris nominis est $\frac{18}{4}+\frac{8}{4}$. à cuius quadrato $\frac{18}{4}$. si detrahatur dicta quarta pars 4. remanebit $\frac{1}{4}$. cuius radix, hoc est, $\sqrt{\frac{1}{4}}$. addita ad $\sqrt{\frac{18}{4}+\frac{8}{4}}$. facit $\sqrt{8}$. pro priori parte: ablata vero ex eadem semisse, relinquit $\sqrt{2}$. pro posteriore parte. Est ergo $\sqrt{8}\sqrt{8}-\sqrt{8}\sqrt{2}$. radix Residui propositi. vt hic probatum esse vides, per multiplicationem radicis in se quadrate. Nam in partialibus productis, $\sqrt{8}$. & $\sqrt{2}$. faciunt $\sqrt{18}$. Deinde $-\sqrt{8}\sqrt{16}$. id est, -2. duplicata facit -4.

$$\begin{array}{r} \sqrt{8}\sqrt{8}-\sqrt{8}\sqrt{2} \\ \sqrt{8}\sqrt{8}-\sqrt{8}\sqrt{2} \\ \hline -\sqrt{8}\sqrt{16}+\sqrt{8}\sqrt{2} \\ +\sqrt{8}\sqrt{8}-\sqrt{8}\sqrt{16} \\ \hline \sqrt{18}-4 \end{array}$$

Detur quoque Binomium tertium $\sqrt[3]{32}+\sqrt[3]{24}$. Maius nomen $\sqrt[3]{32}$. secabitur in duas partes producentes 6. quartam partem quadrati 24. minoris nominis hoc modo. Semissis maioris nominis est $\sqrt[3]{8}$. à cuius quadrato 8. detracta dicta quadrata pars 6. relinquit 2. cuius radix, nimirum $\sqrt[3]{2}$. addita, & subtracta à semisse prædicta $\sqrt[3]{8}$. facit partes $\sqrt[3]{18}$. & $\sqrt[3]{2}$. Ergo radix Binomij est $\sqrt[3]{3}18+\sqrt[3]{3}2$. Hæc enim in se ducta quadrate, vt hic patet, producit Binomium $\sqrt[3]{32}+\sqrt[3]{24}$. Nam in partialibus productis $\sqrt[3]{18}$. & $\sqrt[3]{2}$. faciunt $\sqrt[3]{32}$. & $\sqrt[3]{6}$. duplicata facit $\sqrt[3]{24}$.

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{3}\ 18 + \sqrt[3]{3}\ 2 \\ \sqrt[3]{3}\ 18 + \sqrt[3]{3}\ 2 \\ \hline + \sqrt[3]{}\ 6 + \sqrt[3]{}\ 2 \\ \sqrt[3]{}\ 18 + \sqrt[3]{}\ 6 \\ \hline \sqrt[3]{}\ 32 + \sqrt[3]{}\ 24 \end{array}$$

Sit rursus Binomium primum $72+\sqrt[3]{2880}$. Maius nomen 72. secabitur in duas partes producentes 720. quartam partem quadrati 3880. minoris nominis, hac ratione. Semissis maioris nominis 72. est 36. à cuius quadrato 1296. detracta quarta pars prædicta 720. relinquit 576. cuius radix 24. addita ad semissem nominatam 36. & detracta ab eadem, facit partes quæsitas 60. & 12. Ergo radix Binomij est $\sqrt[3]{60}+\sqrt[3]{12}$. quod hic probatum est per multiplicationem radicis in se quadratè.

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{}\ 60 + \sqrt[3]{}\ 12 \\ \sqrt[3]{}\ 60 + \sqrt[3]{}\ 12 \\ \hline +\sqrt[3]{}\ 720 + 12 \\ 60 + \sqrt[3]{}\ 720 \\ \hline 72 + \sqrt[3]{}\ 2880 \end{array}$$

Sit quoque elicienda radix ex hoc residuo sexto $\sqrt[3]{60}-\sqrt[3]{12}$. Maius nomen $\sqrt[3]{60}$. distribuetur in duas partes producentes 3. quartam partem quadrati 12. minoris nominis, hoc pacto. Semissis maioris nominis, $\sqrt[3]{60}$. est $\sqrt[3]{15}$. à cuius quadrato 15. detracta nominata pars quarta 3. relinquit 12. cuius radix $\sqrt[3]{12}$. addita ad semissem $\sqrt[3]{15}$. prædictam, & ab eadem sublata facit partes $\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{12}$. & $\sqrt[3]{15}-\sqrt[3]{12}$. Ergo radix dicti Residui sexti est $\sqrt[3]{(\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{12})}-\sqrt[3]{(\sqrt[3]{15}-\sqrt[3]{12})}$ quod hic probatum est.

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{(\sqrt[3]{}\ 15 + \sqrt[3]{}\ 12)} - \sqrt[3]{(\sqrt[3]{}\ 15 - \sqrt[3]{}\ 12)} \\ \sqrt[3]{(\sqrt[3]{}\ 15 + \sqrt[3]{}\ 12)} - \sqrt[3]{(\sqrt[3]{}\ 15 - \sqrt[3]{}\ 12)} \\ \hline \text{Quadrata partium. } \sqrt[3]{}\ 15 + \sqrt[3]{}\ 12 \text{ \& } \sqrt[3]{}\ 15 - \sqrt[3]{}\ 12 \\ - \sqrt[3]{}\ 3 \\ - \sqrt[3]{}\ 3 \\ \hline \text{Summa. } \sqrt[3]{}\ 60 - \sqrt[3]{}\ 12 \end{array}$$

Nam quadrata partium faciunt $\sqrt[3]{60}$. nimirum duplum $\sqrt[3]{15}$. Et ex vna parte $\sqrt[3]{(\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{12})}$ in alteram $-\sqrt[3]{(\sqrt[3]{15}-\sqrt[3]{12})}$ fit $-\sqrt[3]{3}$. quippe cum quadratum 12 ex quadrato 15. subductum relinquat 3. cui præponendum est signum $\sqrt[3]{}$. cum signo $-$. propter Residuum. Duplum autem $-\sqrt[3]{3}$. facit $-\sqrt[3]{12}$.

SCHOLIVM.

EMERSIMVS tandem ex numerorum Cossicorum, & Irrationalium multiplici difficultate, & ingens eorum tractationis pelagus, si minus commoda, felici tamen (nisi mea me fallit opinio) velificatione vecti superauimus; & aliquando portum per tot difficultatum æstus ac turbines, per tam multarum rerum maria prolapsi tenemus; quodque ad diuinam opem est referendum, integri atque incolumes tenemus. Iuuat nunc, veluti in otio & quiete, eorum meminisse, quæ paulo ante ferre pigebat. Alia enim nobis vndarum spatia sant enauiganda, quorum tamen laborem, si quis erit, præteritorum iucunda commemoratio leuabit, vt spero maxime. Iuuat, inquam, paululum in eorum numerorum, qui hactenus explicati sunt, Algorithmi iucundissimo æque, atque vberrimo fructu tantisper immorari. Quota enim eius pars, quota præteriti laboris veluti merces periret, nisi in ipsius Algorithmi fructu exigendo operæ aliquid, ac temporis poneremus? Primo igitur ænigmata quædam, cap. nimirum 29. quod proxime sequitur, & 30. erunt soluenda, siue mauis, problemata quædam numerorum, quos vocant abstractos, eorum nimirum, qui ad res materiales, qualia sunt commercia, & mercatorum negotiationes, vel ad alias rerum aliarum quæstiones non contrahuntur. Quod & Alexandrinus Diophantus (egregius in primis scriptor, & de tota Algebræ scientia, quam qui optime, meritus) & alij grauissimi scriptores iam ante præstiterunt. Hæc enim siue ænigmata, siue problemata placet appellare, ad speculatiuam Arithmeticam spectant: quæ quidem scientia quantum dignitate præstet inter reliquas, concors omnium vox non obscure testatur. Nam & theorematum, & problematum numerorum abstractorum, quæ in ea demonstrantur, varietate tam multiplex, multitudine tam copiosa est, vt huiusmodi ænigmatum tractatio maximam addat & dignitatem, & vero perficiat etiam quodammodo eam scientiam, quæ de numeris est. Quam multa enim ea problemata sunt, quæ ei suppeditat quorum nulla esset cognitio penes nos, neque extrahi è tenebris vnquam possent, nisi Algebræ institutio, veluti lumen, accederet? At enim otiosa sunt, neque vllam habet huiusce modi problemata vtilitatem. Quid quod non vtilitatem solum, sed & iucunditatem spectare aliquando, sapientis esse putamus, neque ab honestate alienum. Ista enim si ratio placet, cedo quid est, cur decem Iordani libros de numeris admittamus? Quid, cur theoremata quam plurima, & problemata numerorum ab Euclide lib. 7. 8. & 9. demonstrata probemus, in ijs legendis insistamus, delectemur, eadem summa cum admiratione persequamur? Quis in illis tantus vsus est, quæ tanta, tam spectata vtilitas, quæ non tota insit & nostris? Quantum ista vox non de harum modo splendore ac dignitate, sed de omnium scientiarum honestiate, si admittatur, detractura est? Inest enim profecto hoc disciplinis ijs omnibus, quæ quoniam nunquam in vsum exeunt, tot æque in veritatis contemplatione occupantur, speculatiuæ dicuntur, vt mentem suâ honestate exornent, principem animi facultatẽ, nempe intelligendi vim, augeant, atq; perficiant, delectent ipsæ per sese, totumque, vt iam dicã, hominem mira quadam sui iucunditate perfundant. Verum enimuero ne illud quidẽ dissimulandum est, quod suis locis fiet apertius, existere etiam horum problematũ maximos fructus, & vtilitates, non in Geometricis modo, sed in alijs quoque facultatibus, artibusque permultis,

Qui ordo seruetur in ænigmatibus per Algebram soluendis.

quanquam non tantam vtilitatis ducendam rationem putamus, vt si hæc desit, nulla continuo sit cuiusque facultatis dignitas, & honestas. Hæc ideo te quam paucis monitum volui, amice Lector, vt remota omni suspicionum caligine, expeditos animos afferas ad ea, quæ duobus sequentibus cap. ænigmata proponentur, excussoque procul metu omni, ac mœrore abiecto, faciliorem te, & hilariorem his euoluendis nobis præstes. Post duorum capitum ænigmata, exempla varia cap. 31. subiiciemus, in ijs tamen numeris, qui ad materiam contracti sunt, vbi etiã quæstiones nonnullas, quæ ad secundas radices spectant, accipies. Capite demum 32. multiplices de rebus Geometricis quæstiones in medium afferemus. Facile autem ænigmatum multitudinem sustinebit is, cui, quam tandem ob causam producantur, constabit. Neque enim illud solum laboramus, vt propositæ à nobis quæstiones dissoluantur, sed illud præterea curandum nobis esse duximus, vt alias quoque illis similes ab alijs quocunque tempore dissoluendi modus intelligatur: quem certe modum ex horum ænigmatum solutione quiuis vel nullo negotio colliget. Quare neque illud omisimus, vt ita ænigmata omnia, omnes quæstiones solutas daremus, vt studiosus Lector peculiare in ijs enodandis Algebræ artificium facile dignosceret. Singulas enim operationes quasi oculis subiecimus, ne hæsitandum foret in singulis, aut superiora præcepta singulis interuallis repetenda. Quæ ratio est, quare Algebram ita obscuram, & tenebricosam plerique autument, vt ad paucos, aut etiam ad fere neminem eius intelligendæ vim pertinere confirment. Id enim in plerisque eius scriptoribus desideratum animaduerti, quod mihi maxime curandum fuit, vt quam aptissime omnia proferrentur: Neque, vt monuit olim Lyricus Poeta, laboro breuis esse, dummodo obscurus ne sim: Et volens libensque verbosioris notam subire me patiar, cæteris vt apertissima per me omnia fiant. Maior tamen ex ænigmatũ sequentiũ explicatione voluptas vt deriuetur, præstabit ea, veluti sese exercendi causa, ad quæstionũ normam examinare perinde ac nulla eorũ explicatio hactenus fuisset allata; interdum etiam numeros & exempla alia, quam ea, quæ ibi subiiciuntur, eorum loco subrogando. Atque vt plurima ænigmata adscripsimus, quæ omnino, nisi per Algebram nequeunt explicari, ita etiam non pauca de industria inseruisse volumus, quæ etiam sine Algebra solui posse non inficiamur. Placuit tamen ea cæteris apponere, non vt alijs artibus sublata vellemus, sed vt expeditiorem, celeriorem, iucundioremque ea indagandi Algebræ methodum agnosceremus. Etenim, quod in alijs sit, vt totidem ferme leges, totidemque præcepta tradantur, quot sunt ænigmata cognoscenda, singulisque ænigmatibus, non nisi singulæ ac suæ leges aptentur, & vna lex vni tantum ænigmati expediendo respondeat; id longe facilius, aduocata Algebra dabit effectum. Vna enim eademque lege, via, at methodo vniuersa fere semper soluta præstabit, eamque nobis molestiam eximet, quam multiplex illa regularum varietas nõ afferre non potest: Vt vel hac vna laude, si cæteræ (quæ nec paucæ sunt, nec leues) desint, aliis omnibus Arithmeticæ regulis Algebra antecellat. Vix enim quæstione oblata, ipsa etiam ratio eam explicandi in Algebra sese dat in conspectum; & pæne ipsa quæstio viam indicat, qua ipsam, veluti diu insecuti, tandem assequamur. Quod quidem, si regulam falsi demas, nullius omnino est aliarum. Habet hoc igitur Algebra præ cæteris singulare, quod multas ipsa sola quæstiones suis legibus soluat, de quibus aliæ vel non laborant, vel si laborent, nihil efficiunt: Et quod eas quæ ab alijs quoque aliquando longis ambagibus, & veluti in tenebris deprehenduntur, ipsa quasi per compendia, & luce clara perficiat. Cæterum illud te non celabo, studiose Lector, permulta à nobis afferri ænigmata, quibus si alij, atque alij subinde numeri supponantur, eorum haberi solutio non possit. Non tamen in longum abibis, quin sentias, solui quæ possint, quæque non possint. Id te ipsa eadem docebit operatio, quam ad aperiendam quæstionem adhibere oportebit. Vbi enim æquatio inter duos inæquales omnino inter se numeros incidet, eius quæstionis solutio nulla esse poterit. Quam nos esse rationem diximus, quare Algebræ regula tantopere vniuersis alijs Arithmeticæ præceptionibus præstet. Frequentissimum quippe est, vt huiusmodi aliqua quæstio, quæ inextricabiles omnino nodos habeat, Algebræ imperito obiiciatur, quam ille per summum laborem, summamque & animi, & corporis contentionem, soluere ne quicquam connitetur: & repetito iterum, iterumque studio, tempus æque atque operam omnem suam pessum ire imprudens patietur. A quo certe procul abest Algebræ studiosus, cui ipsa operatio, quæ possint, quæ vero non possint solui, quæstiones indicabit. Quantum igitur hoc est, quo Algebræ studiosus gloriari iure potest, vt obstirmato animo, constantique sententia, proposita quæstio solui queat, nec ne, nihil hæsitans, nec dubia voce pronunciet?

ÆNIGMATA VARIA NVMERORVM abstractorum per Algebram enucleanda, in quibus æquatio inter duos tantum numeros occurrit: quæ quidem simplex æquatio dicitur.

CAPVT XXIX.

IN hoc cap. afferemus ænigmata, in quibus occurrunt simplices æquationes. In sequenti vero ænigmata proponemus, in quibus compositæ æquationes reperiuntur. Quid porro sit æquatio simplex, quid composita, ad finem cap. 13. declarauimus. Hinc igitur exordiamur.

1 Datum numerum quemcunque diuidere in duas partes se mutuo superantes in dato excessu quocunque. I.

Sit numerus 100. diuidendus in duas partes, quarum excessus, vel differentia sit 40. Ponatur minor pars $1\mathcal{Q}$. ac proinde maior $100-1\mathcal{Q}$. Detracta $1\mathcal{Q}$ ex $100-1\mathcal{Q}$ remanent $100-2\mathcal{Q}$. vt hic vides. Eritque inuenta æquatio inter $100-2\mathcal{Q}$. & 40. quippe cum dempta minore parte ex maiore, relinqui debeant 40. Additis vtrinque $2\mathcal{Q}$. erit æquatio inter 100. & $40+2\mathcal{Q}$. Et vtrinque ablatis 40. æquatio erit inter 60. & $2\mathcal{Q}$. Si ergo ex præscripto regulæ Algebræ diuidantur 60. per 2. inuenietur $1\mathcal{Q}$. esse 30. atque hæc est minor pars. Ergo maior erit 70. nimirum $100-30$. quæ maior pars etiam habebitur, si ad mi-

$$\begin{array}{r} 100 - 1\mathcal{Q} \\ + 1\mathcal{Q} \\ \hline 100 - 2\mathcal{Q} \end{array}$$

norem 30. adiiciatur differentia proposita 40. Vides ergo maiorem partem 70. superare minorem 30. numero 40. vt propositum est.

QVOD si statuamus, maiorem partem esse 1 2ℰ. & minorem 100 — 1 2ℰ. subtrahemus 100 — 1 2ℰ. ex 0 + 1 2ℰ, vt hic vides. remanebuntque — 100 + 2 2ℰ. hoc est, 2 2ℰ - 100. Nam subtracta + 0. ex + 100. remanent — 100. quod præpostere positi sint numeri, ideoque ex + fiat —. &c. Hic ergo numerus reliquus 2 2ℰ — 100. æqualis esse debet dato excessui 40. Additis igitur 100. vtrinque, erit æquatio inter 2 2ℰ. & 140. Et diuisis 140. (vt præcipit regula Algebræ) per 2. fiet 1 2ℰ 70. quæ maior pars erit, ac propterea minor 30. nimirum 100 — 70.

```
  0 + 1 2ℰ
100 — 1 2ℰ
---------
— 100 + 2 2ℰ
```

SOLVETVR idem hoc ænigma hac alia ratione. Ponatur minor pars 1 2ℰ. ideoque maior 1 2ℰ + 40. superans nimirum minorem numero 40. Ambæ partes simul efficiunt 2 2ℰ + 40. qui numerus æqualis debet esse dato numero 100. Demptis vtrinque 40. erit æquatio inter 2 2ℰ. & 60. Diuisis ergo 60. per 2. erit 1 2ℰ 30. minor scilicet pars, ideoque maior 70. vt prius.

QVOD si maior pars ponatur 1 2ℰ. ideoque minor 1 2ℰ — 40. vt illa hanc excedat numero 40. Ambæ partes simul efficient 2 2ℰ — 40. quæ summa æqualis est dato numero 100. Additis 40. vtrinque, erit æqualitas inter 2 2ℰ. & 140. Diuisisq; 140. per 2. fiet 1 2ℰ 70. pro maiore parte, ideoque minor erit 30. vt supra.

SCHOLIVM.

Diuisio numeri Cossici in duas partes dati excessus.

VSV interdum venit, vt numerus aliquis Cossicus, nimirum 1 2ℰ. vel 10 2ℰ. vel 1 ℛ. vel 6 ℛ. &c. in duas partes diuidendus sit, quæ se dato numero excedant: vt ænigmate 61. manifestum erit. Quæres sine Algebra (nam per Algebram vix fieri potest) hunc in modum perficietur. Ex dato numero Cossico detrahatur datus numerus per signum ——. Semissis namque huius numeri diminuti erit minor pars, cui si per regulam additionis cap. 4. traditam addatur idem numerus datus, habebitur maior pars.

SIT enim 1 2ℰ diuidenda in duas partes, quarum maior minorem superet 20. vnitatibus. Deme 20. ex 1 2ℰ. & ad ½ 2ℰ — 10. semissem residui 1 2ℰ — 20. adde 20. faciesque ½ 2ℰ + 10. vt in formula apposita vides. Partes sunt ½ 2ℰ — 10. & ½ 2ℰ + 10. quarum hæc illam superat numero 20. & ambæ conficiunt 1 2ℰ.

```
½ 2ℰ — 10
     + 20
---------
½ 2ℰ + 10
```

SIT rursum numerus 10 2ℰ. diuidendus in duas partes, quarum differentia 20. Deme 20. ex 10 2ℰ. Nam residui 10 2ℰ — 20. semissis 5 2ℰ — 10. erit minor pars: ad quam si addes 20. facies 5 2ℰ + 10. maiorem partem, quarum hæc illam superat 20. vnitatibus, & ambæ efficiunt 10 2ℰ.

SIT quoque 1 ℛ. diuidendus in duas partes, quarum differentia 150. Deme 150. & residui 1 ℛ — 150. semissis ½ ℛ — 75. erit minor pars, ad quam si adicies 150. facies maiorem partem ½ + 75. quæ simul faciunt 1 ℛ. & maior minorem superat numero 150.

SIT denique numerus 6 ℛ. diuidendus in duas partes, quarum maior minorem superat 8. vnitatibus. Deme 8. ex 6 ℛ. Nam residui 6 ℛ — 8. semissis 3 ℛ — 4. erit prima pars: ad quam si addes 8. fiet maior pars 3 ℛ + 4. Atque ita de cæteris.

Diuisio numeri absoluti in duas partes dati excessus, sine Algebra.

IMMO hac eadem arte diuidemus propositum numerum absolutum in duas partes dati excessus, sine Algebra: Nam si excessum datum ex proposito numero detrahemus, erit reliqui numeri semissis minor pars, ad quam si eundē excessum adiicimus, conficiemus partem maiorem. Vt si numerus 100. distribuendus sit in duos, quorum differentia 40. Deme 40. ex 100. Reliqui enim numeri 60. semissis 30. erit minor pars: ad quam si addes 40. conflabis maiorem partem 70.

QVOD si Cossicus numerus diuidendus ità sit per Algebram, non inuenientur quidem partes numeri Cossici, sed pretium radicis reperietur, vel zensi, cuius partes respondebunt partibus per Algebram positis, quæstionique satisfacient. Vt si numerus 2 ℛ. secandus sit in duas partes, quarum maior superet minorem numero 40. Ponatur minor pars ½ ℛ. (minor scilicet numerus, quam semissis dati numeri 2 ℛ) erit ½ maior pars ½ ℛ + 40. superans illam numero 40. quæ simul efficiunt 1 ℛ + 40. qui numerus æqualis debet esse dato numero 2 ℛ. Dempto 1 ℛ. vtrinque. erit æquatio inter 40. & 1 ℛ. Diuisisque 40. per 1. fiet 1 ℛ. 40. & 2 ℛ. propositi 80. qui numerus diuidendus proponitur. Quoniam igitur minor pars posita est ½ ℛ. erit minor pars 20. semissis videlicet vnius zensi, cuius pretium inuenimus 40. ideoque maior pars erit 60. nimirum ½ ℛ + 40. Vbi vides, 20. & 60. efficere 80. & maiorem partem superare minorem dato numero 40. Sic etiam si 2 2ℰ distribuendæ sint in duas partes, quarum differentia 40. inuenietur eodem modo 1 2ℰ 40. ideoque 2 2ℰ 80. Eritque ½ 2ℰ 20 & ½ 2ℰ + 40. erit 60. &c.

II. 2 *Duos numeros inuenire, quorum excessus sit datus quiuis numerus, & eorum summa conficiat quemlibet datum numerum.*

Sit datus excessus 40. & summa 100. Hoc ænigma à superiori non differt. Nam summa 100. distribuenda est in duas partes, quarum excessus sit 40.

III. 3 *Datum numerum quemlibet in duas partes diuidere, quæ inter se multiplicatæ gignant numerum, qui ad quadratum minoris partis habeat datam proportionem quamcunque.*

Sit datus numerus 100. diuidendus in duas partes, vt numerus ex vna in alteram genitus ad quadratum minoris partis proportionem habeat decuplam. Ponatur minor pars 1 2ℰ. ideoque maior 100 — 1 2ℰ. Ex vna in alteram procreatur numerus 100 2ℰ — 1 ℛ. qui decuplus esse debet ad quadratum partis minoris, nimirum ad

rum ad 1 ℛ. hoc est, æqualis 10 ℛ. Est ergo æqualitas inter 100 2ℰ — 1 ℛ. & 10 ℛ. Et addito 1 ℛ. vtrinque, inter 100 2ℰ. & 11 ℛ. Diuisis ergo 100. per 11. iuxta tenorem regulæ, prodibit 1 2ℰ. 9 1/11. pro minore parte: (quia numeri Cossici sunt collaterales.) qua ablata ex 100. reliqua erit maior pars 90 10/11. Hæ partes, nimirum 100/11 & 1000/11. inter se multiplicatæ faciunt 100000/121. hoc est, 826 54/121. qui numerus decuplus est ad quadratum minoris partis, videlicet ad 10000/121. hoc est, ad 82 72/121. vt perspicuum est.

```
100 — 1 2ℰ
  + 1 2ℰ
---------
100 2ℰ — 1 ℛ
```

SCHOLIVM.

SCIENDVM autem est, duas partes numeri dati inuentas, eandem habere proportionem, quam productus numerus ex earum multiplicatione habet ad quadratum minoris partis. Ita vides partes inuentas 9 1/11 & 90 10/11. vel 100/11. & 1000/11. habere proportionē decuplam, quemadmodū productus numerus 826 54/121. ad 82 72/121. quadratum minoris partis, siue 100000/121 ad 10000/121. Cuius rei ratio est, quod eadem pars minor multiplicet & seipsam, vt suum quadratum efficiat, & maiorem partem, vt productum numerum gignat. [2] *Hinc enim fit, vt producti eandem proportionem habeant, quam numeri* [2] 17. *septi. multiplicati.*

Itaque ænigma hoc ita proponi posset.

Datum numerum in duos partiri in data proportione, qui inter se multiplicati gignant numerum, qui ad quadratum minoris numeri proportionem habeat eandem datam.

Sit enim datus numerus 100. diuidendus in duos habentes quadruplam proportionem, ita vt numerus ex eorum multiplicatione procreatus habeat quoque ad quadratum minoris proportionem quadruplam. Ponatur minor numerus 1 2ℰ. & maior 4 2ℰ. vt nimirum habeant proportionem quadruplam. Et quia duo hi numeri faciunt 5 2ℰ. erit æquatio inter 5 2ℰ. & 100. Diuisis ergo 100. per 5. fiet 1 2ℰ. 20. minor scilicet numerus. Maior ergo erit 80. cum positus sit 4 2ℰ. Vides ergo numerum 1600. productum ex 20. in 80. quadruplum esse quadrati 400. ex minore 20. descripti. Item maiorem 80. ad minorem 20. quadruplam quoque habere proportionem.

4 *Duos numeros inuenire, qui inter se multiplicati producant numerum, qui ad quadratum minoris numeri proportionem habeat datam: simul vero additi conficiant summam propositam quamcunque.* IIII.

SIT summa proposita 100 & numerus ex vno numero inuento in alterum procreatus sit decuplus ad quadratum minoris numeri. Hoc etiam ænigma à superiori non differt. Nam summa 100. diuidenda est in duas partes, quæ inter se multiplicatæ producant numerum in proportione decupla ad quadratum numeri minoris.

5 *Duos numeros inuenire in data proportione, quorum maior si subtrahatur à dato numero, & minor à minore alio dato numero, reliqui duo fiant duo numeri æquales: quando id fieri potest.* V.

Sint inueniendi duo numeri in proportione tripla, quorum maiore detracto ex 30. & minore ex 16. reliqui fiant duo numeri æquales. Debent autem duo propositi numeri habere proportionem minorem proportione data. Vt in nostro exemplo minor est proportio 30. ad 16. quam tripla.

Ponatur minor 1 2ℰ ideoque maior 3 2ℰ. triplo maior. Si 3 2ℰ. demantur ex 30. remanent 30 — 3 2ℰ. Et si 1 2ℰ dematur ex 16. remanent 16 — 1 2ℰ. Est ergo inuenta æquatio inter 30 — 3 2ℰ. & 16 — 1 2ℰ. Addantur vtrinque 3 2ℰ. eritque æquatio inter 30. & 16 + 2 2ℰ. propterea quod + 3 2ℰ. additæ ad — 1 2ℰ. faciant + 2 2ℰ. Et ablatis 16. vtrinque, erit æqualitas inter 14. & 2 2ℰ. Diuisisque 14. per 2. prodibit 1 2ℰ. 7. pro minore numero. Maior ergo erit 21. triplo maior. Perspicuum autem est, si 21. ex 30. & 7. ex 16. detrahantur, vtrobique relinqui 9.

```
  + 3 2ℰ
  — 1 2ℰ
---------
  + 2 2ℰ
```

6 *Duos numeros in proportione data inuenire, ita vt maiore addito ad datum numerum, & minore ad alium datum minorem, vel ad eundem, efficiantur duo numeri in proportione quacunque data, quando id fieri potest.* VI.

Sint inueniendi duo numeri in proportione quintupla, quorum maiore addito ad 6. & minore ad 4. efficiantur duo numeri in proportione tripla. Ponatur minor numerus 1 2ℰ. & maior 5 2ℰ. quintuplo maior. Ex 5 2ℰ. & 6. fiunt 5 2ℰ + 6. Et ex 1 2ℰ. & 4. fiunt 1 2ℰ + 4. Eruntq; 5 2ℰ + 6. in tripla proportione ad 1 2ℰ + 4. hoc est, si triplicentur 1 2ℰ + 4. æquatio fiet inter 5 2ℰ + 6. & 3 2ℰ + 12. Et ablatis 3 2ℰ. vtrinque, inter 2 2ℰ + 6. & 12. Et rursum ablatis vtrinq; 6. inter 2 2ℰ & 6. Diuisis ergo 6. per 2. proueniet 1 2ℰ. 3. pro minore numero, & 15. pro maiore, quintuplus illius. Iam si addantur 15. ad 6. & 3. ad 4. fiunt 21. & 7. in tripla proportione.

Si compositus numerus 5 2ℰ + 6. ad 1 2ℰ + 4. debeat habere proportionem quadruplam, erit æqualitas inter

inter $5\mathcal{Q}+6$. & $4\mathcal{Q}+16$. Et ablatis $4\mathcal{Q}$. vtrinque, inter $1\mathcal{Q}+6$. & 16. Et rursum ablatis 6. vtrinque, inter $1\mathcal{Q}$. & 10. Diuisisque 10. per 1. fiet $1\mathcal{Q}$. 10. minor scilicet numerus, ideoque maior 50. illius videlicet quintuplus. Quod si 50. addantur ad 6. & 10. ad 4 fient numeri 56. & 14. in proportione quadrupla.

Et si compositus numerus $5\mathcal{Q}+6$. ad $1\mathcal{Q}+4$. habere debeat proportionem duplam, erit æquatio inter $5\mathcal{Q}+6$. & $2\mathcal{Q}+8$. Et ablatis $2\mathcal{Q}$. vtrinque, inter $3\mathcal{Q}+6$. & 8. Et ablatis 6. vtrinque, inter $3\mathcal{Q}$. & 2. Diuisis autem 2. per 3. fiet $1\mathcal{Q}$. $\frac{2}{3}$. minor scilicet numerus, & maior $\frac{10}{3}$. illius quintuplus. Et si $\frac{20}{3}$. addantur ad 6. id est, ad $\frac{18}{3}$. & $\frac{2}{3}$. ad 4. id est, ad $\frac{12}{3}$. fient duo numeri $\frac{28}{3}$. & $\frac{14}{3}$. habentes proportionem duplam.

SED tam maior $5\mathcal{Q}$. quam minor $1\mathcal{Q}$. additus ad 6. efficere debeant duos numeros in proportione tripla. Inuenietur æquatio inter $5\mathcal{Q}+6$. & $3\mathcal{Q}+18$. & ablatis $3\mathcal{Q}$. vtrinque, inter $2\mathcal{Q}+6$. & 18. Et rursum ablatis 6. vtrobique, inter $2\mathcal{Q}$. & 12. Diuisis ergo 12. per 2. fiet $1\mathcal{Q}$. 6. minor numerus: maior autem erit 30. Si igitur vterque addatur ad 6. fient numeri 12. & 36 habentes proportionem triplam.

QVOD si quis velit, compositum numerum $5\mathcal{Q}+6$. ad $1\mathcal{Q}+4$. habere proportionem etiam quintuplam, vel maiorem, aut sesquialteram, euadet ænigma inexplicabile, seu impossibile: quia incidemus in æquationem impossibilem. Vt si proportio inter $5\mathcal{Q}+6$. & $1\mathcal{Q}+4$. debeat esse quintupla, vel sextupla, erit æquatio inter $5\mathcal{Q}+6$. & $5\mathcal{Q}+20$. Vel inter $5\mathcal{Q}+6$. & $6\mathcal{Q}+24$. quarum vtraque impossibilis est.

At si proportio inter $5\mathcal{Q}+6$. & $1\mathcal{Q}+4$. debeat esse sesquialtera, erit æquatio inter $5\mathcal{Q}+6$. & $1\frac{1}{2}\mathcal{Q}+6$. quæ etiam impossibilis est. Vbi clare perspicis, ex ipsa regula Algebræ cognosci posse, num ænigma propositum solui possit, necne. id quod cap. 14. pluribus verbis docuimus.

VII. 7 *Numerum inuenire, qui additus ad quosuis duos numeros datos, faciat duos numeros in quacunque proportione, quæ minor sit proportione duorum numerorum propositorum.*

Sit inueniendus numerus, qui additus ad 100. & 20. faciat duos numeros in proportione tripla. Ponatur numerus quæsitus $1\mathcal{Q}$. Fient ergo numeri $1\mathcal{Q}+100$. & $1\mathcal{Q}+20$. qui debent habere proportionem triplam. Igitur æquatio erit inter $1\mathcal{Q}+100$. & $3\mathcal{Q}+60$. Ablata $1\mathcal{Q}$. vtrinque, remanebit æquatio inter 100. & $2\mathcal{Q}+60$. Et rursum demptis 60. vtrinque, inter 40. & $2\mathcal{Q}$. Diuisis autem 40. per 2. fiet $1\mathcal{Q}$. 20. numerus quæsitus. Numeri ergo compositi erunt 120. & 40. in proportione tripla.

DEBET autem proportio nominata minor esse proportione inter datos duos numeros, vt in nostro exemplo, minor, quam quintupla. Alias occurret nobis æquatio impossibilis. Ratio huiusce rei est, quod addito vno eodemque numero ad duos inæquales, compositi minorem habeant proportionem, quam duo illi inæquales.

SINT namque duo numeri inæquales AB, maior, & CD, minor; quibus addatur idem numerus, vel duo æquales BE, DF. Dico minorem esse proportionem AE, ad CF, quam AB, ad CD. Quoniam enim (vt ad defin. 20. lib. 7. Euclid. declarauimus) maior est proportio maioris numeri AE, ad BE, quam minoris CF, ad eundem BE, vel ad DF: [a] erit per conuersionem rationis, minor proportio AE, ad AB, quam CF, ad CD: Et permutando, minor AE, ad CF, quam AB, ad CD. quod est propositum.

A..... B.... E
C..... D.... F

[a] *schol. 22. septimi.*

Iisdem positis sit, data proportio superbipartiens quintas. Numeri compositi sunt $1\mathcal{Q}+100$. & $1\mathcal{Q}+20$. qui debent habere proportionem superbipartientem quintas. Si ergo $1\mathcal{Q}+20$. multiplicetur per $1\frac{2}{5}$. denominatorē proportionis superbipartientis quintas, id est, per $\frac{7}{5}$. fiet numerus $\frac{7\mathcal{Q}+140}{5}$. qui æqualis erit numero $1\mathcal{Q}+100$. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem, vt hic vides, reducitur ad æquationem inter $7\mathcal{Q}+140$. & $5\mathcal{Q}+500$. Et ablatis 140. vtrinque, erit æquatio inter $7\mathcal{Q}$. & $5\mathcal{Q}+360$. Et rursus ablatis $5\mathcal{Q}$. vtrinque inter $2\mathcal{Q}$. & 360. Diuisis ergo 360. per 2. fiet $1\mathcal{Q}$. 180. numerus quæsitus. Hic enim cum 100. & 20. faciet numeros 280. & 200. qui habent proportionem superbipartientem quintas. Appositi hoc alterum exemplum, vt videas, quo pacto æquationes inter minutias sint reducendę. quod ad finem cap. 10. docui.

$7\mathcal{Q}+140$ | $5\mathcal{Q}+500$
$7\mathcal{Q}+140$ | $1\mathcal{Q}+100$
5 | 1

VIII. 8 *Numerum inuenire, qui ablatus ex quibuslibet duobus numeris datis relinquat duos numeros in quacunque proportione, quæ maior sit proportione duorum numerorum propositorum.*

SIT inueniendus numerus, qui ablatus est ex 100. & 50. relinquat duos numeros in proportione septupla. Ponatur quęsitus numerus $1\mathcal{Q}$. Erunt ergo duo numeri reliqui $100-1\mathcal{Q}$. & $50-1\mathcal{Q}$. eritque proportio illius ad hunc septupla. Quare æquatio erit inter $100-1\mathcal{Q}$. & $350-7\mathcal{Q}$. Additaque $1\mathcal{Q}$. vtrinque, erit æquatio inter 100. & $350-6\mathcal{Q}$. propterea quod $+1\mathcal{Q}$. & $-7\mathcal{Q}$. faciunt $-6\mathcal{Q}$. vt hic cernis. Et rursum additis vtrinque $6\mathcal{Q}$. erit æqualitas inter $100+6\mathcal{Q}$. & 350. Et ablatis vtrinque 100. inter $6\mathcal{Q}$. & 250. Diuisis ergo 250. per 6. erit $1\mathcal{Q}$. $41\frac{2}{3}$. numerus quęsitus. Reliqui ergo numeri erunt $58\frac{1}{3}$. & $8\frac{1}{3}$. qui proportionem habent septuplam.

$+1\mathcal{Q}$
$-7\mathcal{Q}$
$-6\mathcal{Q}$

DEBET autem proportio data esse maior proportione, quam dati duo numeri habent, vt in proposito exemplo maior, quam dupla. Alias incidemus in æquationem impossibilem. Cuius rei ratio est, quod ablato vno eodemque numero ex duobus inæqualibus, reliqui numeri habeant proportionem maiorem, quam duo illi inæquales.

Sint

Sint enim inæquales duo numeri AB, maior, & CD, minor, à quibus auferatur idem numerus, vel duo æquales EB, FD. Dico maiorem esse proportionem AE, ad CF, quam AB, ad CD. Quoniam enim (vt ex definit. 20. lib. 7. Euclid. deduximus) maior est proportio maioris numeri AB, ad EB, quam minoris CD, ad eundem EB, vel ad FD; [a] erit quoque permutando maior proportio AB, ad CD, quam EB, ad FD: nimirum totius ad totum, quam ablati ad ablatum. erit quoque maior proportio reliqui AE, ad reliquum CF, quam totius AB, ad totum CD. quod est propositum.

A..... E....B
C..... F....D

[a] *schol. 22. septi.*

9. *Propositum numerum in duos numeros habentes datam proportionem distribuere.* IX.

Sit numerus 100. diuidendus in duos in proportione decupla. Ponatur minor pars $1\mathcal{Q}$. Eritque maior $10\mathcal{Q}$. decuplo videlicet maior. Ergo summa harum partium $11\mathcal{Q}$. æqualis erit 100. Diuisis igitur 100. per 11. fit $1\mathcal{Q}$ $9\frac{1}{11}$. minor numerus, quo ablato ex 100. remanet maior numerus $90\frac{10}{11}$. qui illius decuplus est.

Aliter. Posita $1\mathcal{Q}$. pro minore parte, erit maior pars $100-1\mathcal{Q}$. quæ illius decupla esse debet. Igitur $10\mathcal{Q}$. æquales erunt $100-1\mathcal{Q}$. Additaque $1\mathcal{Q}$ vtrinque, erit æquatio inter $11\mathcal{Q}$. & 100. vt supra. Quod si statuas maiorem partem esse $1\mathcal{Q}$. erit minor $100-1\mathcal{Q}$. qua decuplata, erit æqualitas inter $1\mathcal{Q}$. & $1000-10\mathcal{Q}$. Additisque $10\mathcal{Q}$ vtrinque, æquatio erit inter $11\mathcal{Q}$. & 1000. Diuisis ergo 1000. per 11. fiet $1\mathcal{Q}$ $90\frac{10}{11}$. pro maiore parte. qua ablata ex 100. erit minor pars $9\frac{1}{11}$. vt prius.

10 *Propositum numerum in duas partes secare, vt maior ad minorem habeat datam proportionem, & insuper contineat datum quemcunque numerum.* X.

Sit numerus 100. secandus in duas partes, quarum maior minoris sit tripla, & insuper contineat 20. vnitates. Ponatur $1\mathcal{Q}$. pro minore parte. Maior ergo erit $3\mathcal{Q}+20$. Summaque $4\mathcal{Q}+20$. æqualis esse debet 100. Ablatis 20. vtrinque, erit æqualitas inter $4\mathcal{Q}$. & 80. Diuisisque 80. per 4. fiet $1\mathcal{Q}$. 20. pro minore parte. qua dempta ex 100. reliqua erit maior pars 80. quæ triplum numeri 20. çontinet, nimirum 60. & insuper 20.

Aliter. Posita $1\mathcal{Q}$. pro minore parte, erit maior $100-1\mathcal{Q}$. à qua si detrahantur 20. debet reliquus numerus $80-1\mathcal{Q}$. triplus esse minoris $1\mathcal{Q}$ hoc est, æquatio debet esse inter $3\mathcal{Q}$ & $80-1\mathcal{Q}$. Additaque $1\mathcal{Q}$. vtrinque, æqualitas erit inter $4\mathcal{Q}$. & 80. Igitur vt supra, erit $1\mathcal{Q}$. 20. minor pars, & maior 80.

11 *Duos numeros inuenire, quorum excessus datus sit, & proportio data.* XI.

Sit datus excessus 20. & data proportio quintupla. Ponatur minor numerus $1\mathcal{Q}$. Erit maior $5\mathcal{Q}$. nimirum illius quintuplus. Excessus eorum est $4\mathcal{Q}$. Est ergo æquatio inter $4\mathcal{Q}$. & 20. Diuisisque 20. per 4. fiet $1\mathcal{Q}$. 5. pro minore numero. Maior autem erit 25. qui ipsius 5. quintuplus est, eundemque excedit numero 20.

SINT rursus inueniendi duo numeri in proportione supertripartiente septimas, quorum excessus sit 21. Ponantur duo numeri $7\mathcal{Q}$. & $10\mathcal{Q}$ in proportione supertripartiente septimas. Horum differentia $3\mathcal{Q}$ æqualis esse debet numero 21. Diuisis ergo 21. per 3. fiet $1\mathcal{Q}$ 7. Igitur $7\mathcal{Q}$ erunt 49. & $10\mathcal{Q}$ facient 70. Est autem differentia inter 70. & 49. datus numerus 21. habentque proportionem supertripartientem septimas.

12 *Datum numerum in duos numeros partiri, ita vt pars aliquota vnius data cum parte alia aliquota alterius data faciat datum quemuis numerum, qui positus sit inter partes nominatas dati numeri diuidendi.* XII.

Sit numerus 100. diuidendus in duos, ita vt $\frac{1}{3}$. prioris cum $\frac{1}{5}$. posterioris efficiat 30. qui numerus positus est inter $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{5}$. dati numeri 100. nimirum inter $33\frac{1}{3}$. & 20. hoc est, minor est, quam $33\frac{1}{3}$. & maior, quam 20. Ponatur primus numerus $1\mathcal{Q}$. ideoque secundus $100-1\mathcal{Q}$. Tertia pars primi est $\frac{1}{3}\mathcal{Q}$. & quinta secundi $20-\frac{1}{5}\mathcal{Q}$: quæ partes simul conficiunt $20-\frac{2}{15}\mathcal{Q}$. quia vt addatur $\frac{1}{3}\mathcal{Q}$ ad $-\frac{1}{5}\mathcal{Q}$. fit subtractio, propter diuersa signa. Eritque æquatio inter $20+\frac{2}{15}\mathcal{Q}$. & 30. Ablatisque 20. vtrinque, inter $\frac{2}{15}\mathcal{Q}$. & 10. Diuisis autem 10. per $\frac{2}{15}$. prouenit $1\mathcal{Q}$. 75. pro primo numero: atque idcirco secundus erit 25. nimirum $100-1\mathcal{Q}$. Constat autem, tertiam partem prioris, nimirum 25. cum quinta parte posterioris, hoc est, cum 5. efficere 30.

Aliter, vt vitentur fractiones. Ponatur tertia pars primi, $1\mathcal{Q}$. ideoque totus primus $3\mathcal{Q}$. Igitur $\frac{1}{5}$. secundi erit $30-1\mathcal{Q}$. vt cum $\frac{1}{5}$. primi, id est, cum $1\mathcal{Q}$. conficere possit 30. ideoque totus secundus erit $150-5\mathcal{Q}$. qui cum primo, hoc est, cum $3\mathcal{Q}$. facere debet 100. Fit autem ex ipsis $150-2\mathcal{Q}$. Igitur æquatio erit inter $150-2\mathcal{Q}$. & 100. Additisque vtrinque $2\mathcal{Q}$. inter 150. & $100+2\mathcal{Q}$. Ablatisque 100. vtrinque inter 50. & $2\mathcal{Q}$. Diuisis ergo 50. per 2. fiet $1\mathcal{Q}$ 25. Et quia primus positus fuit $3\mathcal{Q}$. erit primus 75. atque idcirco secundus 25. quemadmodum prius.

QVOD si quis posceret numerum $33\frac{1}{3}$. vel maiorem, aut 20. vel minorem, quem partes nominatæ efficere debeant, occurreret æquatio impossibilis, vt experiri poteris.

XIII. *13 Datum numerum in duos partiri, ita vt prioris pars aliquota data excedat aliam partem aliquotam posterioris datam numero quouis, qui minor sit parte aliquota totius numeri propositi, eiusdem nominis cum parte aliquota prioris numeri.*

SIT diuidendus numerus 100. in duos, ita vt prioris pars quinta excedat quartam partem posterioris, numero 11. qui minor est, quinta parte diuidendi numeri 100. Ponatur prior numerus $1\mathcal{Q}$. ideoque posterior $100-1\mathcal{Q}$. Pars quinta prioris $\frac{1}{5}2\mathcal{Q}$. excedere debet quartam partem posterioris, nimirum $25-\frac{1}{4}2\mathcal{Q}$. numero 11. hoc est, æquatio esse debet inter $\frac{1}{5}2\mathcal{Q}$. & $25-\frac{1}{4}2\mathcal{Q}+11$. Addita $\frac{1}{4}2\mathcal{Q}$ vtrinque, erit æqualitas inter $\frac{9}{20}2\mathcal{Q}$. & $25+11$. siue 36. Diuisis ergo 36. per $\frac{9}{20}$. inuenietur $1\mathcal{Q}$. 80. pro priore numero. Ergo posterior erit 20. Et $\frac{1}{5}$. prioris, nimirum 16. superat quartam partem posterioris, videlicet 5. numero 11.

Aliter sine fractionibus. Ponatur $\frac{1}{5}$. prioris numeri $1\mathcal{Q}$, ideoque totus prior $5\mathcal{Q}$. Posterioris ergo $\frac{1}{4}$. erit $1\mathcal{Q}-11$. vt $1\mathcal{Q}$ superet $1\mathcal{Q}-11$. numero 11. totusque posterior numerus erit $4\mathcal{Q}-44$. Erit igitur æqualitas inter $9\mathcal{Q}-44$. & 100. quod ambo numeri $5\mathcal{Q}$. & $4\mathcal{Q}-44$. efficere debeat 100. Additis ergo 44. vtrinque, fiet æquatio inter $9\mathcal{Q}$. & 144. Diuisisque 144. per 9. reperietur $1\mathcal{Q}$. 16. Et quia prior numerus positus fuit $5\mathcal{Q}$. erit numerus prior 80. ac proinde posterior 20. Et quinta pars prioris, nimirum 16. superat 5. quartam partem posterioris numero 11.

QVOD si excessus quintæ partis prioris numeri supra quartam posterioris proponeretur 20. nimirum $\frac{1}{5}$. numeri 100. diuidendi, vel maior, quam 20. res non succederet, quia incideremus in absurdum aliquod. Nam si excessus debeat esse 20. reperies numerum priorem esse 100. ideoque posteriorem 0. quod absurdum est, &c.

XIV. *14 Numerum inuenire, à quo si auferantur duo dati numeri; residuum minoris ad maioris residuum datam habeat proportionem.*

Sint à quæsito numero auferendi numeri 100. & 30. ita vt residuum minoris ad residuum maioris proportionem habeat triplam. Ponatur numerus quæsitus $1\mathcal{Q}$. Eruntque residui $1\mathcal{Q}-100$. & $1\mathcal{Q}-30$. Debet ergo proportio esse tripla $1\mathcal{Q}-30$. ad $1\mathcal{Q}-100$. hoc est, æquatio debet esse inter $1\mathcal{Q}-30$. & $3\mathcal{Q}-300$. Additis 30. vtrinque, erit æquatio inter $1\mathcal{Q}$. & $3\mathcal{Q}-270$. Et rursum additis 270 vtrinque, inter $1\mathcal{Q}+270$. & $3\mathcal{Q}$. & ablata $1\mathcal{Q}$ vtrinque, inter 270. & $2\mathcal{Q}$. Diuisis ergo 270. per 2. emerget $1\mathcal{Q}$. 135. numerus quæsitus. Nam si subtrahantur 100. & 30. reliqui fiunt 35. & 105. Ac 105. ad 35. triplam proportionem habent.

XV. *15 Datis duobus numeris, alium inuenire, quo addito ad minorem, & detracto à maiore; summa ad residuum, vel residuum ad summam habeat proportionem datam minorem ea, quam numeri dati habent. Item quo addito ad maiorem, & detracto ex minore; summa ad residuum proportionem habeat datam maiorem ea, quæ inter datos numeros inuenitur.*

Sint dati duo numeri 20. & 100. inueniendusque sit primo numerus, quo addito ad 20. & subtracto à 100. summa ad residuum habeat proportionem quadruplam, quæ minor est, quam quintupla, quam habent 100. ad 20. Ponatur ille numerus $1\mathcal{Q}$. eritque summa $1\mathcal{Q}+20$. & residuum $100-1\mathcal{Q}$. Vt igitur summa illa huius residui sit quadrupla; erit æquatio inter $1\mathcal{Q}+20$. & $400-4\mathcal{Q}$. Et additis $4\mathcal{Q}$. vtrinque, inter $5\mathcal{Q}+20$. & 400. Et ablatis 20. vtrinque, inter $5\mathcal{Q}$. & 380. Diuisis igitur 380. per 5. fiet $1\mathcal{Q}$. 76. numerus quæsitus. qui additus ad 20. facit 96. & detractus ex 100. relinquit 24. Perspicuum autem est, quadruplam proportionem esse 96. ad 24.

Sit deinde inueniendus numerus, quo addito ad 20. & subtracto à 100. residuum ad summam habeat proportionem quadruplam. Ponatur numerus ille $1\mathcal{Q}$. eritque vt prius, summa $1\mathcal{Q}+20$. & residuum $100-1\mathcal{Q}$. Vt igitur residuum istud illius summæ sit quadruplum; erit æquatio inter $4\mathcal{Q}+80$. & $100-1\mathcal{Q}$. & addita $1\mathcal{Q}$ vtrinque inter $5\mathcal{Q}+80$. & 100. Et ablatis 80. vtrinq; inter $5\mathcal{Q}$. & 20. Diuisis ergo 20. per 5. fiet $1\mathcal{Q}4$. numerus quæsit⁹. Hic n. additus ad 20. facit 24. Et ablatus ex 100. relinquit 96. qui numerus numeri 24. quadruplus est.

Sit denique inueniendus numerus, quo addito ad 100. & dempto ex 20. summa illa ad hoc residuum proportionem habeat septuplam, quæ maior est, quam quintupla inter 100. & 20. Ponatur ille numerus $1\mathcal{Q}$. Fietque summa $1\mathcal{Q}+100$. & residuum $20-1\mathcal{Q}$. Vt igitur summa illa sit septupla huius residui; erit æqualitas inter $1\mathcal{Q}+100$. & $140-7\mathcal{Q}$. Et additis $7\mathcal{Q}$. vtrinque, inter $8\mathcal{Q}+100$. & 140. Et ablatis 100. vtrinque, inter $8\mathcal{Q}$. & 40. Diuisis igitur 40. per 8. fiet $1\mathcal{Q}$. 5. numerus quæsitus. Hic enim additus ad 100. facit 105. detractus autem ex 20. relinquit 15. Habentque. 105. ad 15. proportionem septuplam.

Si proportio data in vltimo exemplo esset quadrupla, minor videlicet proportione inter 100. & 20. incideremus in æquationem impossibilem. quod experiri licebit.

XVI. *16 Datis duobus numeris, alium inuenire, ad quem si adiicietur alter datorum, & ab eodem alter detrahatur; summa ad residuum proportionem habeat datam.*

Dati numeri sint 100. & 20. inueniendusque primo sit numerus, ad quem si addantur 100. & ab eodem tollantur 20. summa illa sit residui huius tripla. Ponatur numerus ille $1\mathcal{Q}$. Fietque summa $1\mathcal{Q}+100$. & residuum $1\mathcal{Q}-20$. Vt igitur summa illa sit huius residui tripla; erit æquatio inter $1\mathcal{Q}+100$. & $3\mathcal{Q}-60$. Et additis vtrinq; 60. inter $1\mathcal{Q}+160$. & $3\mathcal{Q}$. Et ablata $1\mathcal{Q}$ vtrinque, inter 160. & $2\mathcal{Q}$. Diuisis ergo 160. per 2. reperietur $1\mathcal{Q}$. 80.

$1\mathcal{Q}$. 80. numerus quæsitus. Nam si ei addes 100. facies 180. & si demas 20. remanent 60. Estque tripla proportio 180. ad 60.

Sit deinde inueniendus numerus, ad quem si addantur 20. & ab eodem deducantur 100. summa illa residui huius sit tripla. Ponatur ille numerus $1\mathcal{Q}$. Fiet summa $1\mathcal{Q}+20$. & residuum $1\mathcal{Q}-100$. Vt ergo illa huius sit tripla; erit æquatio inter $1\mathcal{Q}+20$. & $3\mathcal{Q}-300$. Et additis 300. vtrinque, inter $1\mathcal{Q}+320$. & $3\mathcal{Q}$. Et ablata $1\mathcal{Q}$ vtrinque, inter 320. & $2\mathcal{Q}$. Diuisis igitur 320. per 2. fiet $1\mathcal{Q}$. 160. numerus quæsitus. Nam si ei addes 20. conficies 180. & si demes 100. relinques 60. Estque inter 180. & 60. proportio tripla.

XVII. *17 Propositum numerum in duos diuidere bis, ita vt maior numerus primæ diuisionis ad minorem secundæ diuisionis habeat datam proportionem: Item maior secundæ diuisionis ad minorem primæ diuisionis, datam quoque habeat proportionem quamcunque.*

Propositus numerus 100. diuidendus sit bis in duos numeros, ita vt maior primæ diuisionis ad minorem secundæ diuisionis habeat proportionem triplam; maior vero secundæ diuisionis ad minorem primæ diuisionis proportionem decuplam. Ponatur maior pars primæ diuisionis $32\mathcal{Q}$. ideoque minor $100-32\mathcal{Q}$. Erit ergo minor pars secundæ diuisionis $1\mathcal{Q}$. Est enim tripla proportio $32\mathcal{Q}$. ad $1\mathcal{Q}$. ideoque maior pars secundæ diuisionis erit $100-1\mathcal{Q}$. Vt autem $100-1\mathcal{Q}$. habeant ad $100-32\mathcal{Q}$. proportionem decuplam, necesse est, æquationem esse inter $100-1\mathcal{Q}$. & $1000-30\mathcal{Q}$. Igitur additis $30\mathcal{Q}$ vtrinque, erit æquatio inter $100+29\mathcal{Q}$. & 1000. Ablatisque 100. vtrinque, erit æqualitas inter $29\mathcal{Q}$. & 900. Diuisis igitur 900. per 29. deprehenditur $1\mathcal{Q}$. $31\frac{1}{29}$. Et quia maior pars primæ diuisionis posita fuit $32\mathcal{Q}$. erit ipsa pars maior $93\frac{3}{29}$. ac proinde minor $6\frac{26}{29}$. Rursus quia minor pars secundæ diuisionis posita fuit $1\mathcal{Q}$. erit ipsa pars minor $31\frac{1}{29}$. ideoque maior $68\frac{28}{29}$. Estque numerus $93\frac{3}{29}$. ad $31\frac{1}{29}$. triplus: Et $68\frac{28}{29}$. ad $6\frac{26}{29}$. decuplus.

	$93\frac{3}{29}$	$31\frac{1}{29}$
		$6\frac{26}{29}$	$68\frac{28}{29}$

XVIII. *18 Datum numerum in duos diuidere ter, ita vt maior pars primæ diuisionis ad minorem secundæ datam habeat proportionem: Item maior secundæ diuisionis ad minorem tertiæ: Ac denique maior tertiæ diuisionis ad minorem primæ.*

Datus numerus 100. sit ter diuidendus in duos, ita vt maior primæ diuisionis ad minorem secundæ proportionem habeat triplam: Maior autem secundæ diuisionis ad minorem tertiæ, proportionem duplam: Ac denique maior tertiæ diuisionis ad minorem primæ, proportionem quadruplam. Ponatur maior pars primæ diuisionis $32\mathcal{Q}$. ideoque minor $100-32\mathcal{Q}$. Erit ergo minor pars secundæ diuisionis $1\mathcal{Q}$. quippe cum tripla sit proportio $32\mathcal{Q}$. ad $1\mathcal{Q}$. ideoque maior pars secundæ diuisionis erit $100-1\mathcal{Q}$. quæ vt dupla sit minoris partis diuisionis tertiæ, erit minor pars tertiæ diuisionis $50-\frac{1}{2}2\mathcal{Q}$. atque idcirco maior $50+\frac{1}{2}2\mathcal{Q}$. Vt autem $50+\frac{1}{2}2\mathcal{Q}$. ad $100-32\mathcal{Q}$. minorem partem primæ diuisionis proportionem habeat quadruplam, erit æquatio inter $50+\frac{1}{2}2\mathcal{Q}$. & $400-12\mathcal{Q}$. Additisque $12\mathcal{Q}$. vtrinque, æqualitas erit inter $50+12\frac{1}{2}2\mathcal{Q}$. & 400. Et ablatis vtrinque 50. inter $12\frac{1}{2}2\mathcal{Q}$. & 350. Diuisis igitur 350. per $12\frac{1}{2}$. fiet $1\mathcal{Q}$. 28. Maior ergo pars primæ diuisionis, quæ fuit posita $32\mathcal{Q}$. erit 84. & minor 16. At minor pars secundæ diuisionis, quam posuimus $1\mathcal{Q}$. erit 28. ac maior 72. Denique minor pars tertiæ diuisionis, quæ posita est $50-\frac{1}{2}2\mathcal{Q}$. erit 36. & maior 64. qui numeri satisfaciunt ænigmati proposito. quod experiri poteris.

$32\mathcal{Q}$	$1\mathcal{Q}$	$50+\frac{1}{2}2\mathcal{Q}$	
$100-32\mathcal{Q}$	$100-1\mathcal{Q}$	$50-\frac{1}{2}2\mathcal{Q}$	
84	28	64	
16	72	36	

XIX. *19 Duos numeros inuenire, qui inter se multiplicati procreent numerum in data proportione ad eorum summam.*

Sit productus ex multiplicatione ad summam triplus. Ponatur vnus numerus $1\mathcal{Q}$. alter vero quicunque numerus maior denominatore proportionis, V. g. 20. maior quam 3. Alias res non succedet. Ex $1\mathcal{Q}$. in 20. fiunt $20\mathcal{Q}$. Et summa ex $1\mathcal{Q}$. & 20. collecta est $1\mathcal{Q}+20$. Vt ergo ille productus ad hanc summam habeat proportionem triplam, erit æquatio inter $20\mathcal{Q}$. & $3\mathcal{Q}+60$. Et ablatis $3\mathcal{Q}$. vtrinque, inter $17\mathcal{Q}$. & 60. Diuisis ergo 60. per 17. fiet $1\mathcal{Q}$. $3\frac{9}{17}$. Sunt ergo duo numeri quæsiti $3\frac{9}{17}$. & 20. Ex ductu vnius in alium fit numerus $70\frac{10}{17}$. qui triplus est ad $23\frac{9}{17}$. eorum summam.

SI vnus numerus ponatur $1\mathcal{Q}$. & alter 4. maior videlicet, quam 3. denominator proportionis triplæ, inuenientur duo numeri 12. & 4. Nam ex $1\mathcal{Q}$. in 4. fit numerus $4\mathcal{Q}$ triplus summæ $1\mathcal{Q}+4$. Ergo æquatio erit inter $4\mathcal{Q}$. & $3\mathcal{Q}+12$. Ablatisque $3\mathcal{Q}$ vtrinque, inter $1\mathcal{Q}$. & 12. ac proinde $1\mathcal{Q}$ erit 12. vnus numerus, alter autem erit 4. vt posuimus.

XX. *20 Dato numero quolibet, inuenire alium, ita vt ex hoc in illum procreetur numerus in data proportione ad eorum summam: ita tamen, vt denominator proportionis dato numero minor sit.*

Dato numero 20. inueniendus sit alius, qui in illum ductus producat numerum triplum ad summam ex

ipsis collectam: cuius proportionis denominator 3. minor est dato numero 20. Alias res non succedet. Non differt hoc ænigma à præcedenti. Nam si numerus quæsitus ponatur 1 2 ♎. & alter numerus, 20. qui datus est, inuenietur numerus, vt ibi, qui in 20. ductus producat numerum triplum ad summam, &c.

XXI. 21 *Inuenire duos numeros in data proportione, qui inter se multiplicati faciant numerum in data proportione ad eorum summam.*

HOC ænigma à 19. non differt, nisi quod hic datur proportio, quam inuenti numeri habere debent.

Sint ergo inueniendi duo numeri in proportione sesquialtera, vt inter se multiplicati faciant numerum duodecuplum summæ eorum. Ponantur duo numeri 4 2 ♎. & 6 2 ♎. in proportione sesquialtera. Ex vno in alterum fiunt 24 ♋. eorumque summa est 10 2 ♎. Vt ergo 24 ♋. ad 10 2 ♎. proportionẽ habeant duodecuplam: erit æquatio inter 24 ♋. & 120 ♎. Diuisis ergo 120. per 24. proueniet 12 ♌. quia denominationes Cossicæ ♋. & 2 ♎. collaterales sunt. Cum ergo primus numerus positus sit 4 2 ♎. & secundus 6 2 ♎. erit primus 20. & secundus 30. qui multiplicati inter se faciunt 600. qui numerus duodecuplus est eorum summæ 50.

Si proportio inter numerum ex multiplicatione factum ad summam debeat esse sesquiquinta. Positis numeris 4 2 ♎ & 6 2 ♎. in proportione sesquialtera. Vt numerus 24 ♋. ex multiplicatione factus ad summam 10 2 ♎ proportionem habeat sesquiquintam: erit æquatio inter 24 ♋. & 12 2 ♎. quia 12 2 ♎ ad 10 2 ♎ habent etiam proportionem sesquiquintam: qui quidem numerus 12 procreatus est ex 1 $\frac{1}{1}$. denominatore proportionis sesquiquintæ in 10. Diuisis igitur 12. per 24. fiet 1 2 ♎ $\frac{1}{2}$. atque adeo cum numeri positi sint 4 2 ♎ & 6 2 ♎. erunt duo numeri quæsiti 2. & 3. qui multiplicati inter se faciunt 6. numerum ad eorum summam 5. sesquiquintam.

XXII. 22 *Inuenire duos numeros, quorum summa sit datus quilibet numerus, & posteriore diuiso per priorem, Quotiens sit datus etiam numerus quiuis.*

VEL

Datum numerum in duos partiri, vt posteriore diuiso per priorem, Quotiens sit quilibet numerus datus.

Sit summa quæsitorum numerorum 100 & Quotiens 10. Sit primum prior numerus 1 2 ♎, atque idcirco posterior 100 —— 1 2 ♎. Hoc diuiso per 1 2 ♎. fit Quotiens $\frac{100-1 2}{1 2}$. æqualis 10. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 100 —— 1 2 ♎ & 10 2 ♎. Addita 1 2 ♎ vtrinque, erit æquatio inter 100. & 11 2 ♎. Diuisis autem 100. per 11. fit 1 2 ♎ $\frac{100}{11}$. hoc est, 9 $\frac{1}{11}$ prior numerus. Ergo posterior erit 90 $\frac{10}{11}$ siue $\frac{1000}{11}$. Constat autem si 90 $\frac{10}{11}$ per 9 $\frac{1}{11}$ siue $\frac{1000}{11}$ per $\frac{100}{11}$ diuidantur, Quotientem gigni 10.

Sit deinde posterior numerus 1 2 ♎. ideoque prior 100 —— 1 2 ♎. Illo per hunc diuiso, fit Quotiens $\frac{12}{100-12}$. æqualis 10. Quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 1 2 ♎. & 1000 —— 10 2 ♎. Et additis 10 2 ♎ vtrinque, erit æqualitas inter 11 2 ♎. & 1000. Diuisis ergo 1000. per 11. fiet Quotiens $\frac{1000}{11}$. siue 90 $\frac{10}{11}$. posterior numerus, priorque erit 9 $\frac{1}{11}$. siue $\frac{100}{11}$. vt prius.

IAM si numerus datus 100. secundus sit in duos, vt posteriore per priorem diuiso, Quotiens sit 10. soluetur quæstio eodem modo ponendo 1 2 ♎. pro priore, vel posteriore, & pro altero 100 — 1 2 ♎. vt liquet.

DENIQVE sit diuidendus numerus 100. in duas partes, vt posteriore per priorem diuisa, Quotiens sit $\frac{1}{3}$. Ponatur prior pars 1 2 ♎ & posterior 100 —— 1 2 ♎. Hac diuisa per 1 2 ♎, fit Quotiens $\frac{100-12}{12}$. æqualis $\frac{1}{3}$. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 1 2 ♎. & 200 —— 2 2 ♎. Additisque 2 2 ♎ vtrobique, erit æqualitas inter 3 2 ♎, & 200. Diuisis ergo 200. per 3 fiet 1 2 ♎ $\frac{200}{3}$. siue 66 $\frac{2}{3}$. pro priore parte. Posterior autem erit 33 $\frac{1}{3}$. siue $\frac{100}{3}$. Diuisis autem $\frac{100}{3}$. per $\frac{200}{3}$. fit Quotiens $\frac{1}{2}$. vt constat.

XXIII. 23 *Datum numerum in quinque partes secare, vt secunda primam contineat quotiescunque libuerit, & præterea quotlibet vnitates: Tertia secundam quotiescunque etiam libuerit, ac præterea quotuis vnitates: Quarta tertiæ sit multiplex data, minus quotuis vnitatibus: Ac tandem quinta à multiplici data quartæ deficiat quotlibet etiam vnitatibus; quando id fieri potest.*

DATVS numerus sit 100. secundus in quinque partes, ita vt secunda primam contineat bis, & præterea 2. Tertia secundam ter, ac præterea 3. Quarta tertiæ sit dupla minus 4. Ac tandem quinta à dupla quartæ deficiat 13. vnitatibus. Ponatur prima pars 1 2 ♎. Eritq; secunda 2 2 ♎ + 2. Tertia 6 2 ♎ + 9. Quarta 12 2 ♎ + 14. Et quinta 24 2 ♎ + 15. Summa omnium partium est 45 2 ♎ + 40. quæ æqualis debet esse dato numero 100. Ablatis 40. vtrinque: erit æquatio inter 45 2 ♎ & 60. Diuisisque 60. per 45. fiet 1 2 ♎ 1 $\frac{1}{3}$. prima pars. Ergo omnes quinque erunt 1 $\frac{1}{3}$. 4 $\frac{2}{3}$. 17. 30. 47.

Si numerus 100. secundus esset in quinque partes, vt secunda primam contineret ter, & præterea 4. Tertia secundam bis, & præterea 3. Quarta esset quintupla tertiæ, minus 6. Quinta denique esset quadrupla quartæ, minus 5. quæstio foret impossibilis. Nam posita prima parte 1 2 ♎ esset secunda 3 2 ♎ + 4. Tertia 6 2 ♎ + 11. Quarta 30 2 ♎ + 49. & quinta 120 2 ♎ + 191. quæ omnes partes faciunt 160 2 ♎ + 255. quæ summa æqualis deberet esse dato numero 100. totum parti, quod est absurdum. Propterea diximus in ænigmate [quando id fieri potest.]

24 *Datis*

24 *Datis duobus numeris, alium inuenire, qui cum minore numerum faciat æqualem ei, quem pars aliquota quæcunque inuenti numeri cum maiore efficit.* XXIV.

Sint dati duo numeri 20. & 30. inueniendusque sit alius, qui cum 20. summam faciat æqualem summæ ex 30. & sexta parte inuenti numeri collectæ. Ponatur numerus quæsitus 6 2 ♎. (Pono hunc numerum, vt habeat nominatam partem sine fractione. quod tamen opus non est.) Ergo 6 2 ♎ + 20. æquales sunt 1 2 ♎ + 30. Ablata 1 2 ♎ vtrinque, erit æquatio inter 5 2 ♎ + 20. & 30. Ablatisque rursum 20. vtrinque, inter 5 2 ♎ & 10. Diuisis ergo 10. per 5 fiet 1 2 ♎. Igitur 6 2 ♎ facient 12. numerum quæsitum. Hic enim cum 20. facit 32. & eius $\frac{1}{6}$ nimirum 2. cum 30. facit etiam 32.

25 *Inuenire duos numeros in data proportione, vt tantum fiat, minore detracto ex maiore, quantum maiore diuiso per minorem.* XXV.

Sint inueniendi duo numeri in proportione decupla. Ponantur 1 2 ♎. & 10 2 ♎. Detracto minore 1 2 ♎. ex maiore 10 2 ♎. supersunt 9 2 ♎. Et diuiso maiore 10 2 ♎. per minorem 1 2 ♎. fit Quotiens 10. Est ergo æquatio inter 9 2 ♎ & 10. Et diuisis 10. per 9. fit 1 2 ♎. 1 $\frac{1}{9}$. siue $\frac{10}{9}$. primus numerus. Alter ergo erit $\frac{100}{9}$. siue 11 $\frac{1}{9}$. Nam si demantur 1 $\frac{1}{9}$. ex 11 $\frac{1}{9}$. remanent 10. Et diuisis 11 $\frac{1}{9}$. per 1 $\frac{1}{9}$. hoc est, $\frac{100}{9}$. per $\frac{10}{9}$. fit Quotiens etiam 10.

26 *Inuenire duos numeros in data proportione, quorum summa æqualis sit numero ex eorum multiplicatione inter se producto.* XXVI.

Sint inueniendi duo numeri in proportione decupla. Ponantur 1 2 ♎. & 10 2 ♎. Summa eorum est 11 2 ♎. Et ex vno in alterum fit numerus 10 ♋. Eritque æqualitas inter 11 2 ♎. & 10 ♋. Diuisis ergo 11. per 10. fit 1 2 ♎. 1 $\frac{1}{10}$. primus numerus: propterea quod numeri Cossici collaterales sunt. Alter ergo erit 11. Tam enim summa eorum, quam numerus ex vno in alterum productus est 12 $\frac{1}{10}$.

27 *Duos numeros inuenire in dato excessu, ita vt eorum quadrati datum etiam habeant excessum, qui tamen maior sit quadrato dati excessus numerorum.* XXVII.

Sint inueniendi duo numeri, quorum excessus 4. quadratorum vero excessus 144. qui maior est, quam 16. quadratus excessus 4. numerorũ dati. Ponatur minor numerus 1 2 ♎. ideoq; maior 1 2 ♎ + 4. quorum excessus 4. Quadrati sunt 1 ♋. & 1 ♋ + 8 2 ♎ + 16. Excessus eorum 8 2 ♎ + 16 qui æqualis debet esse numero 144. Ablatis 16. vtrinque, erit æquatio inter 8 2 ♎ & 128. Diuisis ergo 128. per 8. erit 1 2 ♎. 16. minor numerus. Maior ergo erit 20. vt excessus sit 4. Quadrati sunt 256. & 400. quorum excessus 144.

Si datus excessus numerorum sit 1. & quadratorum 31. inuenientur numeri 15. & 16. nimirum duo numeri proximi conficientes datum excessum quadratorum. Atque ita quotiescunque excessus numerorum datur 1. & quadratorum numerus quiuis impar, erunt duo numeri quæsiti, duo proximi conficienres datum excessum quadratorum.

Quando excessus numerorum est 5. & quadratorum 30. reperies numeros $\frac{1}{2}$. & 5 $\frac{1}{2}$.

Si numerorum excessus sit 10. & quadratorum 200. inuenies numeros 5. & 15.

Si excessus detur 2. inter numeros, & inter quadratos 22. erunt numeri quæsiti 4 $\frac{1}{2}$. & 6 $\frac{1}{2}$.

SCHOLIVM.

HOC *problema sine Algebra solui etiam potest (quod quidem percommodum interdum erit in numeris Cossicis) hoc modo. Excessus datus quadratorum diuidatur per duplum excessus dati numerorum. Nam si ex Quotiente dematur semissis dati excessus numerorum, reliquus fiet minor numerus, qui ad datum excessum numerorum adiectus faciet numerum maiorem.*

Sint enim inueniendi duo numeri, quorum excessus 6. & quadratorum excessus 12 ♎. Diuidatur 12 ♎ per 12. duplum scilicet numerum excessus 6. dati numerorum. Et ex Quotiente $\frac{1}{12}$ 2 ♎. dematur numerus 3. semissis eiusdem excessus 6. numerorum. Nam reliquus numerus $\frac{1}{12}$ 2 ♎ — 3. erit minor numerus quæsitus: ad quem si adicies datum excessum 6. facies $\frac{1}{12}$ 2 ♎ + 3. maiorem numerum. Excessus enim horum duorum numerorum est 6. Et quadrati eorundem sunt $\frac{1}{144}$ ♋ —— $\frac{1}{12}$ 2 ♎ + 9. & $\frac{1}{144}$ ♋ + $\frac{1}{12}$ 2 ♎ + 9. quorum excessus est 12 ♎.

28 *Datis duobus numeris, alios duos in data proportione inuenire, quorum maior ad minorem datorum additus, tantum faciat, quantum minor ad maiorem adiectus.* XXVIII.

Sint dati numeri 9, & 30. inueniendique duo numeri in proportione quadrupla, &c. Ponatur minor 1 2 ♎. ideoque maior 4 2 ♎. Erit igitur æquatio inter 4 2 ♎ + 9. & 1 2 ♎ + 30. Ablata 1 2 ♎ vtrinque, erit æquatio inter 3 2 ♎ + 9. & 30. Et ablatis 9 vtrinque, inter 3 2 ♎ & 21. Diuisis ergo 21. per 3. fiet 1 2 ♎ 7. minor numerus. Maior ergo erit 28. Et tam ex 28. & 9. quam ex 7. & 30. fiunt 37.

XXIX. 29 *Dato numero, alium inuenire, qui in datum ductus tantum faciat, quantum ad eundem additus*

Datus numerus sit 30. Pone quæsitum esse 1ℓ. qui ductus in 30. facit 30ℓ. additus vero ad 30. facit 1ℓ+30. Eritque æquatio inter 30ℓ. & 1ℓ+30. Ablata vtrinque 1ℓ. erit æquatio inter 29ℓ. & 30. Diuisis autem 30. per 29. erit 1ℓ. $\frac{30}{29}$. siue $1\frac{1}{29}$. Additis enim $1\frac{1}{29}$. ad 30. fiunt $31\frac{1}{29}$. quantum nimirum sit ex $1\frac{1}{29}$. in 30.

XXX. 30 *Dato numero, alium inuenire, vt eius pars aliquota data in datum numerum ducta tantum faciat, quantum totus numerus inuentus ad eundem datum numerum additus.*

Sit datus numerus 60. & data pars aliquota numeri inueniendi $\frac{1}{3}$. Ponatur $\frac{1}{3}$. numeri inueniendi 1ℓ. ac proinde totus numerus 3ℓ. Ex 1ℓ. id est, ex $\frac{1}{3}$. numeri quæsiti in 60. fit numerus 60ℓ. At ex 3ℓ. toto scilicet numero quæsito, & 60. fit numerus 3ℓ+60. Eritque æquatio inter 60ℓ. & 3ℓ+60. Ablatisque 3ℓ. vtrinque, inter 57ℓ. & 60. Diuisis ergo 60. per 57. fiet 1ℓ. $1\frac{3}{19}$. tertia pars numeri quæsiti, ac proinde numerus quæsitus $3\frac{3}{19}$. Nam ex $1\frac{3}{19}$. id est, ex $\frac{1}{3}$. numeri inuenti, in 60. fit numerus $63\frac{3}{19}$. æqualis summæ ex $3\frac{3}{19}$. & 60. collectæ.

XXXI. 31 *Datum numerum in duos partiri, ita vt minor sit maioris pars aliquota data, vel partes aliquotæ datæ, & contineat insuper datum alium numerum, si placet.*

Sit datus numerus 40. distribuendus primum in duos, vt minor sit $\frac{1}{7}$. maioris. Ponatur minor 1ℓ. erit quæ maior 7ℓ. qui æquales esse debent numero dato 40. Est igitur æquatio inter 8ℓ. & 40. Diuisisque 40. per 8. prodibit 1ℓ 5. minor numerus. maior ergo erit 35. nimirum 7ℓ. Et manifestum est, 5. esse septimam partem numeri 35.

Sit deinde idem numerus 40. secandus in duos, vt minor constituat 37. maioris. Ponatur minor 3ℓ. ideoque maior 7ℓ. vt ille huius $\frac{1}{7}$. contineat. Summa amborum est 10ℓ. æqualis dato numero 40. Diuisis ergo 40. per 10. reperietur 1ℓ. 4 ac proinde cum minor numerus positus sit 3ℓ. & maior 7ℓ. erit minor 12. & maior 28. continetque ille $\frac{3}{7}$. huius.

SI datus numerus 84. secandus sit in duos, vt minor maioris contineat $\frac{1}{4}$. & præterea 7. vnitates. ponemus maiorem esse 4ℓ. vt continere possit $\frac{1}{4}$. sine fractione. Eritque minor 3ℓ+7. Amborum summa est 7ℓ+7. æqualis dato numero 84. Ablatis 7. vtrinque, erit æquatio inter 7ℓ. & 77. Diuisisque 77. per 7. exibit 1ℓ. 11. Cum igitur maiorem posuerimus 4ℓ. & minorem 3ℓ+7. erit maior 44. & minor 40. continetque hic $\frac{1}{4}$. illius, nimirum 33. ac præterea 7.

XXXII. 32 *Duos numeros inuenire, ita vt si numerus productus ex eorum multiplicatione diuidatur per eorundem differentiam, Quotiens fiat datus quicunque numerus.*

Inueniendi sint duo numeri, ita vt numerus ex eorum multiplicatione productus si diuidatur per eorum differentiam, Quotientem faciat 30. Ponatur pro minore quilibet numerus minor dato Quotiente 30. nimirum 20. & maior ponatur 20+1ℓ. vt differentia eorum sit 1ℓ. Ex 20. in 20+1ℓ. fit numerus 400+20ℓ. quo diuiso per 1ℓ. eorum differentiam, fit Quotiens $\frac{400+20\ell}{1\ell}$. æqualis proposito numero 30. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad æqualitatem inter 30ℓ. & 400+20ℓ. Ablatis ergo 20. ℓ vtrobique, æquatio erit inter 10ℓ. & 400. Diuisisque 400. per 10. fiet 1ℓ. 40. pro differentia numerorum, qui quæruntur. Cum ergo minor sit 20. erit maior 60. nimirum 20+1ℓ. Iam vero ex 20. in 60. fit numerus 1200. quo diuiso per 40. differentiam numerorum, fit Quotiens 30.

XXXIII. 33 *Numerum inuenire, cuius duarum partium datarum quadrati summam conficiant, quæ ad aliam partem datam eiusdem numeri inueniendi proportionem habeat datam quamcunque.*

Sit inueniendus numerus, cuius $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{3}$. quadratos efficiant, quorum summa partis $\frac{1}{4}$. eiusdem numeri tripla sit. Ponatur numerus quæsitus 1ℓ. Partes datæ sunt $\frac{1}{2}\ell$. & $\frac{1}{3}\ell$. quarum quadrati $\frac{1}{4}\mathcal{Z}$. & $\frac{1}{9}\mathcal{Z}$. summam conficiunt $\frac{13}{36}\mathcal{Z}$. triplam ad $\frac{1}{4}\ell$. hoc est, æqualem $\frac{3}{4}\ell$. Diuisis ergo $\frac{3}{4}$. per $\frac{13}{36}$. fiet 1ℓ $\frac{108}{468}$. id est, $\frac{27}{117}$. numerus quæsitus (propterea quod numeri Cossici collaterales sunt.) Huius enim $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ sunt $\frac{27}{54}$. & $\frac{27}{81}$. quarum quadrati $\frac{729}{4356}$. & $\frac{729}{13068}$. faciunt summam $\frac{729}{3000}$. quæ tripla est ad $\frac{27}{117}$. hoc est, ad $\frac{1}{4}$. inuenti numeri $\frac{27}{117}$.

XXXIV. 34 *Numerum inuenire, qui in se ductus, & productus numerus in datum quemuis numerum faciat numerum in data proportione ad cubum ex inuento numero procreatum.*

Sit datus numerus 20. inueniendusque sit alius, qui primum in se, deinde productus numerus in datum 20. gignat numerum quintuplum cubi ex inuento numero procreati. Ponatur numerus quæsitus 1ℓ. Ex 1ℓ in se fit 1⧻. Et ex 1⧻. in 20. fit numerus 20⧻. Cubus autem 1ℓ. est 1℃. ad quem 20⧻. habere debent quintuplam proportionem. Igitur æquatio est inter 20⧻. & 5℃. Diuisis ergo 20. per 5. fiet 1ℓ 4. numerus quæsitus: quia

quia numeri Cossici sunt collaterales. Hic enim numerus 4. ductus in se facit 16. Et ex 16. in 20. fit numerus 320. qui quintuplus est numeri 64. nimirum cubi ex inuento numero 4. procreati.

35 *Datum numerum in duos diuidere, vt alteruter eorum ductus in alium datum numerum excedat dato numero quolibet numerum productum ex altero numero in quemuis alium datum numerum.* XXXV.

Datus numerus 10. secandus sit primum in duos, vt productus numerus ex primo in 4. superet numerum productum ex secundo in 6. vnitate. Ponatur prima pars 1ℓ. ideoque secunda 10 — 1ℓ. Ex 1ℓ. in 4. fiunt 4ℓ. Et ex 10 — 1ℓ in 6. fiunt 60 — 6ℓ. Debetque hunc productum numerus 4ℓ. excedere Vnitate. Ac propterea æquatio erit inter 4ℓ. & 61 — 6ℓ. Additisque 6ℓ vtrinque, inter 10ℓ. & 61. Diuisis igitur 61. per 10. fiet 1ℓ. $\frac{1}{10}$. primus numerus. Secundus ergo erit $3\frac{9}{10}$. Ex primo in 4. fiunt $24\frac{4}{10}$. Et ex secundo in 6. fiunt $18\frac{54}{10}$. hoc est, $23\frac{4}{10}$. qui numerus vnitate superatur à $24\frac{4}{10}$.

Sit deinde idem numerus datus 10. secandus in duas partes, vt secunda pars ducta in 4. procreet numerum, qui vnitate superet productũ ex prima parte in 6. Ponatur rursum prima pars 1ℓ. & secunda 10 — 1ℓ. Ex 10 — 1ℓ. in 4. fit numerus 40 — 4ℓ. Et ex 1ℓ in 6. fiunt 6ℓ. Hunc numerum ille productus superare debet Vnitate. Igitur æquatio erit inter 40 — 4ℓ. & 6ℓ+1. Ablataque Vnitate vtrinque, inter 39 — 4ℓ. & 6ℓ. Additisque 4ℓ vtrinque, inter 39. & 10ℓ. Diuisis ergo 39. per 10. fiet 1ℓ. $3\frac{9}{10}$. primus numerus. Secundus igitur erit $6\frac{1}{10}$. Ex $6\frac{1}{10}$. in 4. fit numerus $24\frac{4}{10}$. Et ex $3\frac{9}{10}$. in 6. fiunt $18\frac{54}{10}$. siue $23\frac{4}{10}$. Manifestum autem est, numerum $24\frac{4}{10}$. vnitate superare numerum $23\frac{4}{10}$.

QVOD si excessus debeat esse 20. inter productos numeros: Ponatur primus numerus 1ℓ. & secundus 10 — 1ℓ. Ex 1ℓ in 4. fit numerus 4ℓ. & ex 10 — 1ℓ in 6. fit numerus 60 — 6ℓ. quem primum ille superare debeat numero 20. Erit igitur æquatio inter 4ℓ. & 80 — 6ℓ. Additisque 6ℓ vtrinque, inter 10ℓ. & 80. Diuisis ergo 80. per 10. fiet 1ℓ. 8. primus numerus. Secundus ergo erit 2. Perspicuum autem est, numerum 32. qui fit ex primo 8. in 4. superare numerum 12. qui fit ex secundo 2. in 6. numero 20.

SED iam numerus 40 — 4ℓ. factus ex secundo 10 — 1ℓ. in 4. superare debeat numero 20. numerum 6ℓ. factum ex primo 1ℓ. in 6. Erit ergo æquatio inter 40 — 4ℓ. & 6ℓ+20. Additisque 4ℓ. vtrinque, inter 40. & 10ℓ+20. Ablatisque vtrinque 20. inter 20. & 10ℓ. Diuisis igitur 20. per 10. fiet 1ℓ 2. primus numerus. Secundus ergo erit 8. Et certum est, numerum 32. ex secundo 8. in 4. factum, superare numerum 12. factum ex primo 2. in 6. numero 20.

36 *Datum numerum partiri in duas partes, quæ cum ipso progressionem Arithmeticam constituant.* XXXVI.

Datus numerus 20. diuidendus sit in duos, qui cum eodem numero 20. constituant tres numeros Arithmetice proportionales. Sit minor pars 1ℓ. & maior 20 — 1ℓ. Vt igitur 1ℓ. 20 — 1ℓ. 20. sint Arithmetice proportionales, erit idem excessus inter 1ℓ. & 20 — 1ℓ. qui inter 20 — 1ℓ. & 20. Sunt autem excessus 20 — 2ℓ. & 1ℓ. vt in hisce formulis subtractionum patet. Ergo æquatio erit inter 20 — 2ℓ. & 1ℓ. Et additis 2ℓ vtrinque, inter 20. & 3ℓ. Diuisis ergo 20. per 3. fiet 1ℓ. $6\frac{2}{3}$. prima pars. Altera ergo erit $13\frac{1}{3}$. Constituuntque $6\frac{2}{3}$. $13\frac{1}{3}$. & 20. progressionem Arithmeticam, cum eundem excessum habeant $6\frac{2}{3}$.

20 — 1ℓ	20 + 0
+ 1ℓ	20 — 1ℓ
20 — 2ℓ	0 + 1ℓ

Aliter. Si 1ℓ. 20 — 1ℓ. 20. sunt Arithmetice proportionales; erit (vt lib. 5. Eucl. in 4. proprietate trium numerorum Arithmetice proportionalium diximus) summa primi & tertij, nimirum 1ℓ+20. æqualis duplo medij, nimirum 40 — 2ℓ. Additis ergo 2ℓ vtrinque, existet æquatio inter 3ℓ+20. & 40. Ablatisque 20. vtrinque, inter 3ℓ. & 20. Ergo rursus 1ℓ erit $6\frac{2}{3}$. vt prius.

37 *Inuenire duos numeros, qui inter se multiplicati faciant numerum, qui ad minorem habeat datam proportionem, & ad maiorem quoque proportionem datam, sed illa minorem.* XXXVII

Proportio producti ad minorem sit decupla, & ad maiorem sesquialtera. Ponatur productus 30ℓ. (Numerus enim 30ℓ ad 3ℓ. habet proportionem decuplam, & ad 20ℓ. sesquialteram.) Erit minor numerus 3ℓ. & maior 20ℓ. qui inter se multiplicati debent facere 30ℓ. Faciunt autem 60⧻. Est ergo æquatio inter 30ℓ. & 60⧻. Diuisisque 30. per 60. exibit 1ℓ. $\frac{1}{2}$. quod numeri Cossici sint collaterales. Ergo minor numerus, quem posuimus 3ℓ. erit $1\frac{1}{2}$. Maior autem, qui positus est 20ℓ. erit 10. Atque ex $1\frac{1}{2}$. hoc est, ex 3. in 10. fit numerus $\frac{30}{2}$. siue 15. qui ad $1\frac{1}{2}$. vel ad $\frac{3}{2}$. habet proportionem decuplam, & ad 10. sesquialteram.

SCHOLIVM.

Hoc ænigma sine Algebra soluatur, si pro numeris quæsitis accipiantur denominatores proportionum datarum. vt si inueniendi sint duo numeri, qui inter se multiplicati producant numerum, qui ad minorem habeat proportionem septuplam, & ad maiorem sextuplam: erunt duo numeri 7. & 6. Hi enim inter se multiplicati faciunt 42. numerum, qui ad 6. proportionem habet septuplam, & ad 7. sextuplam, vt patet.

XXXVIII 38 *Datum numerum in quotuis partes Arithmetice proportionales diuidere, quarum differentia data sit: quando id fieri potest.*

Datus numerus 120. diuidendus sit in sex partes, quæ ordine sese excedant binario. Ponatur prima pars 1℞. Erit secunda 1℞+2. Tertia 1℞+4. Quarta 1℞+6. Quinta 1℞+8. & sexta 1℞+10. quæ omnes simul faciunt summam 6℞+30. æqualem dato numero 120. Ablatis ergo 30. vtrinque, erit æquatio inter 6℞ & 90. Diuisisque 90. per 6. fiet 1℞. 15. prima pars. Sunt ergo sex partes, 15. 17. 19. 21. 23. 25. quæ binario se excedunt, & summam faciunt 120.

DEBET autem datus numerus maior esse summa terminorum totidem Arithmeticæ progressionis, vno minus, in quot partes datus numerus iubetur distribui; quæ quidem à dato excessu incipiat. Vt in dato exemplo, maior quam summa 30. quinque terminorum 2. 4. 6. 8. 10. Alias res non succedet, quia incideremus in æquationem inter duos numeros omnino inæquales. Atque idcirco diximus in ænigmate, [quando id fieri potest.]

XXXIX. 39 *Datum numerum in quotuis partes Arithmetice proportionales partiri, quarum prima data sit: quando id fieri potest.*

Sit datus numerus 60. diuidendus in 11. partes Arithmeticam progressionem constituentes, cuius primus terminus sit 5. Pone differentiam progressionis 1℞. Erunt ergo 11. termini hi. 5. 5+1℞. 5+2℞. 5+3℞. 5+4℞. 5+5℞. 5+6℞. 5+7℞. 5+8℞. 5+9℞. 5+10℞. quorum summa 55℞+55. æqualis esse debet dato numero 60. Ablatis ergo vtrinque 55. erit æquatio inter 55℞ & 5. Diuisisque 5. per 55. fiet 1℞. $\frac{1}{11}$. differentia progressionis. Erunt ergo 11. partes quæsitæ hæ. 5. 5$\frac{1}{11}$. 5$\frac{2}{11}$. 5$\frac{3}{11}$. 5$\frac{4}{11}$. 5$\frac{5}{11}$. 5$\frac{6}{11}$. 5$\frac{7}{11}$. 5$\frac{8}{11}$. 5$\frac{9}{11}$. 5$\frac{10}{11}$. quæ omnes simul faciunt 60.

DEBET autem datus numerus maior esse numero, qui fit ex numero terminorum in primum terminum datum. Vt in dato exemplo maior, quam 55. qui numerus fit ex numero terminorum, videlicet ex 11. in primum terminum 5. Hanc ob causam dictum est in ænigmate [quando id fieri potest.]

XL. 40 *Datis duobus numeris, inuenire alios duos in data proportione, vt productus ex maiore horum in maiorem illorum faciat numerum, qui dato quolibet numero superet productum ex minore in minorem.*

DATI numeri sint 5. & 9. oporteatque inuenire duos alios in proportione tripla, quorum maior ductus in 9. faciat numerum, qui superet productum ex minore in 5. numero 110. Ponatur minor 1℞. ideoque maior 3℞. Ex 3℞. in 9 fiunt 27℞. & ex 1℞. in 5. fiunt 5℞. Superat autem numerus 27℞. numerum 5℞. numero 22℞. qui æqualis debet esse numero 110. Diuisis ergo 110. per 22. fiet 1℞ 5. primus numerus: ideoque maior erit 15. Ex 15. in 9. fit numerus 135. qui superat 25. numerum ex 5. in 5. factum numero 110.

XLI. 41 *Datis duobus numeris, inuenire alios duos in data proportione: vt productus ex maiore horum in minorem illorum superet dato numero eum, qui ex minore in maiorem fit. Vel certe hic productus illum dato numero excedat.*

Sint dati numeri 5. & 9. oporteatque duos alios inuenire in dupla proportione, quorum maior ductus in 5. producat numerum, qui 10. vnitatibus superet productum ex minore in 9. Ponatur minor 1℞. ac propterea maior 2℞. (Debet autem hic maior in minorē datum producere numerum maiorem eo, qui ex minore in datum maiorem fit, vt nimirum ille hunc superare possit. Vnde si dati numeri forent 2. & 9. quæstio esset impossibilis; quippe cum ex 2℞. in 2. fiat numerus 4℞. minor numero 9℞. qui fit ex 1℞. in 9.) Ex 2℞ in 5. fit numerus 10℞. Et ex 1℞. in 9. fit numerus 9℞. quem ille superat 1℞. Est igitur æquatio inter 1℞. & 10. Diuisisque 10. per 1. fit 1℞. 10. minor numerus, ac proinde maior erit 20. Vides ergo numerum 100. factum ex 20. in 5. superare 90. numerum ex 10. in 9. factum 10. vnitatibus.

XLII. 42 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt summa quadratorum ex ipsis descriptorum ad eorum summam habeat datam proportionem.*

Sint inueniendi duo numeri in quintupla proportione, ita vt summa quadratorũ ex ipsis descriptorum, ad inuentorum numerorum summam habeat proportionem decuplam. Ponatur minor numerus 1℞. ideoq; maior 5℞. quadrati sunt 1ȝ. & 25ȝ. eorumq; summa 26ȝ. decupla summæ eorum, quæ est 6℞. Erit ergo æquatio inter 26ȝ. & 60℞. Diuisis autem 60. per 26. fiet 1℞. 2$\frac{4}{13}$. siue $\frac{30}{13}$. minor numerus, (quod numeri Cossici collaterales sint.) atque adeo maior $\frac{150}{13}$. siue 11$\frac{7}{13}$. Quadrati sunt $\frac{900}{169}$. & $\frac{22500}{169}$. quorum summa $\frac{23400}{169}$. decupla est ad $\frac{180}{13}$. summam inuentorum numerorum.

IISDEM positis, si proportio inuenienda sit æqualitatis. erit æquatio inter 26ȝ. & 6℞. Diuisis ergo 6. per 26. fiet 1℞. $\frac{3}{13}$. minor numerus. (quia Cossici numeri sunt collaterales.) Maior autem erit $\frac{15}{13}$. Quadrati sunt $\frac{9}{169}$. & $\frac{225}{169}$. eorumque summa $\frac{234}{169}$. æqualis summæ $\frac{18}{13}$. ex inuentis numeris collectæ.

Et si proportio inuenienda sit minoris inæqualitatis, vt subdupla, erit numerus 26ȝ. subduplus numeri 6℞, hoc est, hic illius erit duplus. Igitur erit æquatio inter 52ȝ. & 6℞. Vel inter 26ȝ. & 3℞. Diuisisque 6. per 52. vel 3. per 26. fiet 1℞. $\frac{3}{26}$. minor numerus. Maior ergo erit $\frac{15}{26}$. Quadrati sunt $\frac{9}{676}$. & $\frac{225}{676}$. eorumque summa $\frac{234}{676}$. subdupla summæ $\frac{18}{26}$. ex inuentis numeris collectæ: quippe cum hæc illius sit dupla.

43 Datis

43 *Datis duobus numeris, inuenire alios duos in data proportione, vt maior horum ad maiorem datorum additus faciat numerum in data quacunque proportione ad summam ex minoribus collectam. dummodo hæc secunda proportio data sit inter proportionem datorum numerorum, & proportionem alteram datam.* XLIII.

Sint dati numeri 10. & 12. oporteatque inuenire alios duos in proportione quintupla, vt summa ex maiore, & 12. tripla sit ad summam ex minore, & 10. Est autem proportio tripla inter proportionem 12. ad 10. & proportionem quintuplam, hoc est, maior quam illa, & minor, quam hæc. Ponatur minor numerus 1℞. ideoq; maior 5℞. Ex 5℞. & 12. fit numerus 5℞+12. Et ex 1℞. & 10. numerus 1℞+10. cuius ille triplus esse debet. Ergo æquatio erit inter 5℞+12. & 3℞+30. Ablatisque vtrinque 12. inter 5℞. & 3℞+18. Et rursum ablatis 3℞. vtrinque, inter 2℞. & 18. Diuisis igitur 18. per 2. fiet 1℞. 9. minor numerus, ideoq; maior 45. Ex 45. & 12. fit numerus 57. qui triplus est ad numerum ex 9. & 10. collectum, nimirum ad 19.

44 *Datis duobus numeris, inuenire alios duos in data proportione, vt subtracto minore horum ex datorum maiore, reliquus numerus ad eum, qui relinquitur, detracto maiore ex minore, proportionem habeat datam quamcunque.* XLIIII.

Sint dati duo numeri 60. & 100. oporteatque alios duos inuenire in proportione quintupla, vt minore ex 100. subtracto, reliquus numerus ad eum, qui relinquitur, detracto maiore ex 60. proportionem habeat vigecuplam. Ponantur duo numeri in proportione quintupla, 1℞. 5℞. Dempta 1℞. ex 100. reliquus numerus est 100−1℞. Demptis autem 5℞ ex 60. remanent 60−5℞. eritque numerus 100−1℞. ad 60−5℞. vigecuplus: h. e. æquatio erit inter 100−1℞ & 1200−100℞. Additis 100℞. vtrinq;, erit æqualitas inter 100+99℞, & 1200. Ablatisq; 100. vtrinq; inter 99℞ & 1100. Diuisis ergo 1100. per 99. fiet 1℞. 11$\frac{11}{99}$. vel $\frac{1100}{99}$. minor numerus, ac proinde maior $\frac{5500}{99}$. vel 55$\frac{55}{99}$. Prior ex 100. detractus relinquit 88$\frac{88}{99}$. posterior vero ex 60. subtractus relinquit 4$\frac{44}{99}$. Habentque 88$\frac{88}{99}$. hoc est $\frac{8800}{99}$, ad 4$\frac{44}{99}$. siue ad $\frac{440}{99}$. proportionem eandem quam 20. ad 1.

45 *Datis duobus numeris, alios duos in data proportione inuenire, vt maiore ex maiore detracto, & minore ex minore, numeri remaneant æquales: debet autem proportio data esse maior proportione datorum numerorum.* XLV.

Sint dati duo numeri 100. & 60. oporteatque inuenire alios duos in septupla proportione, vt maiore detracto ex 100. & minore ex 60. numeri reliqui sint æquales. Ponantur numeri in proportione septupla, 1℞. 7℞. eruntq; reliqui numeri 100−7℞. & 60−1℞. æquales, Additis ergo vtrinq; 7℞ erit æquatio inter 100. & 60+6℞. Et ablatis 60. vtrinque, inter 40 & 6℞. Diuisis autem 40. per 6. erit 1℞. 6$\frac{2}{3}$. minor numerus, maior autem huius septuplus, 46$\frac{2}{3}$. Ablato illo ex 60. & hoc ex 100. reliqui fiunt numeri æquales 53$\frac{1}{3}$.

46 *Tres numeros in data proportione Geometrica continua inuenire, vt productus ex multiplicatione, quorumcunque duorum inter se, æqualis sit reliquo, vel ad ipsum habeat quamlibet proportionem datam.* XLVI.

Sint inueniendi tres numeri in proportione tripla, sitque primum productus ex minimo in medium, maximo æqualis. Ponantur tres numeri tripli, 1℞. 3℞. 9℞. Ex 1℞. in 3℞. fit numerus 3ȝ. æqualis 9℞. Diuisis ergo 9. per 3: fiet 1℞. 3. quia numeri Cossici collaterales sunt. Tres ergo numeri quæsiti sunt 3. 9. 27. Atque ex 3. in 9. fit numerus 27. maximo 27. æqualis.

Sit deinde productus ad maximum quadruplus, ita vt productus 3ȝ. ad 9℞. proportionem habeat quadruplam, hoc est, æquatio sit inter 3ȝ. & 36℞. Diuisis ergo 36. per 3. fiet 1℞. 12. eruntque tres numeri tripli, 12. 36. 108. Et ex 12. in 36. fit numerus 432. ad 108. quadruplus.

Sit rursum productus ad maximum subduplus, ita vt productus 3ȝ. ad 9℞. proportionem habeat subduplam: hoc est, æquatio fiat inter 6ȝ. & 9℞. Diuisis ergo 9. per 6. fiet 1℞ $\frac{3}{2}$. sunt ergo tres numeri tripli $\frac{3}{2}$. $\frac{9}{2}$. $\frac{27}{2}$. Et ex $\frac{3}{2}$. in $\frac{9}{2}$. fit numerus $\frac{27}{4}$. subduplus ad $\frac{27}{2}$.

IAM vero ex secundo 3℞. in tertium 9℞. fiat numerus 27ȝ. qui æqualis debeat esse primo nimirum 1℞. Diuisa 1. per 27. fit 1℞. $\frac{1}{27}$. Tres ergo numeri tripli sunt $\frac{1}{27}$. $\frac{3}{27}$. $\frac{9}{27}$. Et ex $\frac{3}{27}$. in $\frac{9}{27}$. fit numerus $\frac{27}{729}$. æqualis primo $\frac{1}{27}$.

At si productus 27ȝ. ex secundo in tertium debeat ad primum 1℞. habere proportionem triplam, erit æqualitas inter 27ȝ & 3℞. Diuisis ergo 3. per 27. fiet 1℞ $\frac{1}{9}$. eruntque tres numeri tripli $\frac{1}{9}$. $\frac{3}{9}$. $\frac{9}{9}$. Et ex $\frac{3}{9}$ in $\frac{9}{9}$. hoc est, ex $\frac{1}{3}$ in 1. fit $\frac{1}{3}$. qui numerus triplus est primi $\frac{1}{9}$.

POSREMO ex primo 1℞. in tertium 9℞ produci debeat numerus æqualis secundo 3℞. hoc est, æquatio esse debeat inter 9ȝ. qui numerus fit ex primo in tertium, & 3℞ Diuisis ergo 3. per 9. fiet 1℞ $\frac{1}{3}$. Eruntque tres numeri tripli $\frac{1}{3}$. 1. 3. Et ex primo $\frac{1}{3}$. in tertium 3. fit 1. æqualis secundo 1.

Si vero productus ex primo 1℞. in tertium 9℞. id est, 9ȝ. debeat habere ad secundum 3℞. proportionem sextuplam, erit æquatio inter 9ȝ & 18℞. Diuisis ergo 18. per 9. fiet 1℞. 2. Eruntque tres numeri tripli, 2. 6. 18. Atque ex 2. in 18. fit numerus 36. sextuplus secundi numeri 6.

47 *Datum numerum partiri in duas partes: vt maiore diuisa per minorem, Quotiens sit datus idem numerus.* XKVII.

Sit datus numerus 40. & datus Quotiens itẽ 40. Ponatur minor pars 1℞. & maior 40.−1℞ Hac per illã

diuisa

diuisa, fit quotiens $\frac{40-1\mathcal{2}}{1\mathcal{2}}$. æqualis 40. quę æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter $40-1\mathcal{2}$. & $40\,\mathcal{2}$. Additaque $1.\mathcal{2}$ vtrinque, erit æquatio inter 40. & $41\mathcal{2}$. Diuisis ergo 40. per 41. fiet $1\mathcal{2}.\frac{40}{41}$. minor pars. Maior proinde erit $39\frac{1}{41}$. Qua per illam diuisa, fit Quotiens 40.

Si maior pars ponatur $1\mathcal{2}$. & minor $40-1\mathcal{2}$. Diuisa illa per hanc, fit Quotiens $\frac{1\mathcal{2}}{40-1\mathcal{2}}$. æqualis 40. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter $1\mathcal{2}$. & $1600-402\mathcal{2}$. Additisque $40\,\mathcal{2}$ vtrinque, inter $41\mathcal{2}$. & 1600. Diuisis igitur 1600. per 41. fit maior pars $39\frac{1}{41}$. ac proinde minor $\frac{40}{41}$. vt prius.

XLVII. 48 *Duos numeros inuenire, vt primus cum quolibet multiplici secundi faciat numerum æqualem ei, qui conflatur ex secundo & quouis multiplici primi. Vel vt primus cum data parte secundi tantum faciat, quantum secundus cum data parte primi. Vel denique, vt si primus sumat multiplicem quemcunque secundi, & secundus quemlibet multiplicem primi: Aut si primus accipiat partem datam secundi, & secundus datam partem primi; fiant duo numeri in data quauis proportione.*

Debeat primus cum triplo secundi facere tantum; quantum secundus cum quintuplo primi. Ponatur primus $1\mathcal{2}$. & secundus quiuis numerus, videlicet 50. Ergo $1\mathcal{2}+150$. & $50+5\mathcal{2}$. æquales sunt. Ablataq; $1\mathcal{2}$ vtrinque, erit æquatio inter 150. & $50+4\mathcal{2}$. Et rursum ablatis 50. vtrinq;, inter 100. & $4\mathcal{2}$. Diuisis igitur 100. per 4. fiet $1\,\mathcal{2}.25$. Numeri ergo quæsiti sunt 25. & 50. Nam primus 25. cum triplo secundi, hoc est, cum 150. facit 175. quantum secundus 50. cum quintuplo primi, id est, cum 125.

DEBEAT deinde primus cum $\frac{1}{7}$. secundi, & secundus cum $\frac{1}{3}$. primi facere vnum eundemque numerum. Ponatur primus $3\mathcal{2}$. vt habeat $\frac{1}{7}$. sine fractione. Secundus autem quilibet numerus habens $\frac{1}{7}$. sine fractione, nimirum 21. Primus igitur cum $\frac{1}{7}$. secundi faciet $3\mathcal{2}+3$. Secundus vero cum $\frac{1}{3}$. primi faciet $21+1\mathcal{2}$. Est ergo æquatio inter $3\mathcal{2}+3$. & $21+1\mathcal{2}$. Ablataque $1\mathcal{2}$ vtrinque, inter $2\mathcal{2}+3$. & 21. Ablatisque rursum 3. vtrinque inter $2\mathcal{2}$. & 18. Diuisis ergo 18. per 2. fiet $1\mathcal{2}.9$. Primus igitur positus $3\mathcal{2}$. erit 27. & secundus 21. vt posuimus. Nam & 27. cum $\frac{1}{7}$. numeri 21. & 21. cum $\frac{1}{3}$. numeri 27. facit 30.

SED iam primus cum quadruplo secundi, & secundus cum triplo primi facere debeant duos numeros in proportione dupla. Ponatur primus $1\mathcal{2}$. & secundus quiuis numerus, videlicet 6. Primus igitur cum quadruplo secundi faciet $1\mathcal{2}+24$. Secundus vero cum triplo primi faciet $6+3\mathcal{2}$. Si ergo statues $1\mathcal{2}+24$. maiorem, qui duplus debet esse ad $6+3\mathcal{2}$. erit æquatio inter $1\mathcal{2}+24$. & $12+6\mathcal{2}$. Ablataque $1\mathcal{2}$ vtrinque, inter 24. & $12+5\mathcal{2}$. Ablatisque rursum 12. vtrinque inter 12. & $5\mathcal{2}$. Diuisis igitur 12. per 5. fiet $1\mathcal{2}.\frac{2}{5}$. id est, $2\frac{2}{5}$. primus numerus: secundus vero erit 6. vt positum fuit. Iam primus cum quadruplo secundi facit $2\frac{2}{5}$. secundus autem cum triplo primi facit $\frac{6}{5}$. id est, $13\frac{1}{5}$. habebitque numerus $2\frac{2}{5}$. ad $13\frac{1}{5}$. proportionem duplam.

Si vero statues $6+3\mathcal{2}$ maiorem, qui ad $1\mathcal{2}+24$. duplus debet esse, erit æquatio inter $6+3\,2\mathcal{2}$. & $22\mathcal{2}+48$. Et ablatis $22\mathcal{2}$ vtrinque, inter $6+12\mathcal{2}$ & 48. ablatisq; rursum 6. vtrinque, inter $1\mathcal{2}$. & 42. fietque $1\mathcal{2}$ 42. primus numerus, secundus autem erit 6. vt posuimus. Primus cum quadruplo secundi facit 66. at vero secundus cum triplo primi facit 132. qui numerus ad 66. proportionem habet duplam.

DENIQVE primus cum $\frac{1}{7}$. secundi, & secundus cum $\frac{1}{3}$. primi facere debeant duos numeros in sextupla proportione. Ponatur primus $3\mathcal{2}$. vt habeat $\frac{1}{7}$. sine fractione, & secundus quilibet numerus habens $\frac{1}{7}$. sine fractione, nimirum 7. Primus ergo cum $\frac{1}{7}$. secundi faciet $3\mathcal{2}+1$. Secundus vero cum $\frac{1}{3}$. primi faciet $7+12\mathcal{2}$. Et quia hi duo numeri debent habere proportionem sextuplam, erit necessario $7+12\mathcal{2}$ maior. Nam si ducatur in 6. vt fiat æqualis numero $3\mathcal{2}+1$. producetur numerus $42+62\mathcal{2}$. qui numero $3\mathcal{2}+1$. æqualis esse nequit. Igitur æquatio erit inter $18\mathcal{2}+6$. & $7+12\mathcal{2}$. Ablataq; $12\mathcal{2}$ vtrinque, inter $17.2\mathcal{2}+6$. & 7. Ablatisq; rursum 6. vtrinq, inter $17\mathcal{2}$. & 1. Diuisa igitur 1. per 17. fiet $1\mathcal{2}.\frac{1}{17}$. Et quia primus numerus positus fuit $3\mathcal{2}$. erit primus numerus $\frac{3}{17}$. & secundus 7. vt positus fuit. Primus cum $\frac{1}{7}$ secundi facit $1\frac{1}{17}$. id est, $\frac{20}{17}$. Secundus cum $\frac{1}{3}$ primi facit $7\frac{1}{17}$. hoc est, $\frac{120}{17}$. qui numerus ad $\frac{20}{17}$. proportionem habet sextuplam.

XLIX. 49 *Datum numerum distribuere in quotuis partes in data proportione Geometrica continua.*

Sit datus numerus 4665. secandus in 5. numeros continue sextuplos. Pone 5. numeros in sextupla proportione. $1\mathcal{2}.6\mathcal{2}.36\mathcal{2}.216\mathcal{2}.1296\mathcal{2}$. Horum summa $1555\mathcal{2}$. æqualis esse debet dato numero 4665. diuisis ergo 4665. per 1555. fiet $1\mathcal{2}$ 3. eruntque quinque numeri in proportione sextupla continua. 3. 18. 108. 648. 3888. qui simul additi faciunt 4665.

Si secandus sit numerus 20. in tales quinque partes, inuenies $1555\mathcal{2}$. æquales 20. Diuisisque 20. per 1555. fiet $1\mathcal{2}.\frac{4}{311}$. Eruntque quinque partes in proportione sextupla. $\frac{4}{311}.\frac{24}{311}.\frac{144}{311}.\frac{864}{311}.\frac{5184}{311}$. facientes summam 20.

L. 50 *Inuenire quotuis numeros in data proportione Geometrica continua, quorum summa dato cuicunque numero sit æqualis.*

Sint inueniendi 5. numeri in proportione continua sextupla, facientes 4665. vel 20. Hoc ænigma à proxime præcedenti non differt. Nam si summa data secetur in 5. numeros in sextupla proportione continua, factum erit, quod iubetur.

51 *Datum*

LI. 51 *Datum numerum in tres numeros partiri, vt minores duo datam habeant differentiam: Item duo maiores aliam differentiam.*

Sit datus numerus 445. & minorum differentia 10. & maiorum 20. Ponatur minimus numerus $1\mathcal{2}$. eritque medius $1\mathcal{2}+10$, ac maximus $1\mathcal{2}+30$. Horum summa $3\mathcal{2}+40$. æqualis esse debet dato numero 445. Ablatis vtrinque 40. erit æquatio inter $3\mathcal{2}$. & 405. Diuisis igitur 405. per 3. inuenietur $1\mathcal{2}$. 135. minimus numerus, atque idcirco medius erit 145. & maximus 165. qui ænigmati satisfaciunt, quod summam conficiant 445.

Si datus numerus sit 200. erunt $3\mathcal{2}+40$. æquales 200. & ablatis vtrinque 40. erit æquatio inter $3\mathcal{2}$. & 160. Diuisisque 160. per 3. erit $1\mathcal{2}.53\frac{1}{3}$. primus numerus, secundus erit $63.\frac{1}{3}$. & tertius $83\frac{1}{3}$. qui habent datos excessus, & conficiunt 200.

Aliter. Ponatur medius $1\mathcal{2}$. eritque minimus $1\mathcal{2}-10$. & maximus $1\mathcal{2}+20$. quorum summa $3\mathcal{2}+10$. æqualis esse debet dato numero 445. vel 200. Ablatis 10. vtrinque, erit æquatio inter $3\mathcal{2}$. & 435. vel 190. Facta diuisione, erit $1\mathcal{2}.145$. vel $63\frac{1}{3}$. primus numerus. Ergo in primo exemplo erunt tres numeri 135. 145. 165. In secundo autem, $53\frac{1}{3}.63\frac{1}{3}.83\frac{1}{3}$. vt prius.

LII. 52 *Tres numeros inuenire, vt minorum differentia sit data: Item maiorum differentia alia data: Et omnes tres datum numerum conficiant.*

Sit minorum differentia 10. & maiorum 20. eorumque summa 445. vel 200. Hoc etiam problema non differt à proxime antecedenti. Si namque data summa distribuatur in tres partes datorum excessuum, factum erit, quod præcipitur.

LIII. 53 *Datum numerum partiri in tres, vt vteruis extremorum cum medio ad alterum extremum proportionem habeat datam.*

Sit primum diuidendus datus numerus 100. in tres, vt primus cum medio ad tertium habeat proportionem triplam: tertius vero cum medio ad primum quadruplam. Ponatur primus $1\mathcal{2}$. Eruntque alij duo simul $42\mathcal{2}$. vt ad primum possint habere proportionem quadruplam. Horum ergo summa $52\mathcal{2}$. æqualis esse debet dato numero 100. Diuisis igitur 100. per 5. fiet $1\mathcal{2}.20$. primus numerus, ideoque alij duo simul, 80. Ponatur deinde tertius $12\mathcal{2}$. ideoq, medius $80-12\mathcal{2}$. Igitur primus 20. cum medio $80-12\mathcal{2}$. hoc est, $100-12\mathcal{2}$. ad tertium $12\mathcal{2}$. triplus est, atque idcirco æquatio erit inter $100-12\mathcal{2}$. & $32\mathcal{2}$. Additaque vtrinque $12\mathcal{2}$. inter 100. & $4\,2\mathcal{2}$. Diuisisque 100. per 4. fiet $12\mathcal{2}.25$. tertius numerus. Medius ergo erit 55. qui relinquitur, detracto tertio 25. ex 80. Tres propterea numeri erunt 20. 55. 25. qui simul efficiunt 100. & primus cum medio efficit 75. numerum triplum ad tertium 25. At tertius cum medio facit 80. numerum quadruplum ad primum 20.

Si datus sit numerus 60. secandus in tres, vt primus cum medio ad tertium habeat proportionem noncuplam, sed tertius cum medio ad primum, quadruplam, procedemus eodem modo. Nam si primus ponatur $12\mathcal{2}$. erunt alij duo simul, $48\mathcal{2}$. atque idcirco $52\mathcal{2}$ æquales 60. dato numero. Diuisis ergo 60. per 5. fiet $1\mathcal{2}.12$. primus numerus; ideoque alij duo facient 48. Rursum si tertius ponatur $12\mathcal{2}$. facient alij duo simul $92\mathcal{2}$. vt ad tertium habere possint proportionem noncuplam. Igitur $102\mathcal{2}$ æquales erunt dato numero 60. Diuisisque 60. per 10. fiet $12\mathcal{2}.6$. tertius numerus. Medius autem erit 42. qui relinquitur, si tertius 6. ex 48. demptur. Quocirca tres numeri quæsiti erunt 12. 42. 6. qui simul conficiunt 60. Et primus cum medio facit numerum 54. qui ad tertium 6. noncuplus est. Tertius vero cum secundo facit 48. qui numerus ad primum 12. quadruplus est.

Sit deinde idem numerus 100. distribuendus in tres, vt tam primus cum secundo ad tertium, quam tertius cum secundo ad primum habeat proportionem triplam. Ponatur primus $1\mathcal{2}$. & secundus, ac tertius $32\mathcal{2}$. vt ad primum habeant proportionem triplam. Horum summa $42\mathcal{2}$ æqualis est 100. Diuisis igitur 100. per 4. fiet $12\mathcal{2}.25$. primus numerus; ideoque secundus, ac tertius facient 75. Ponatur deinde tertius $12\mathcal{2}$, ideoque secundus $75-12\mathcal{2}$. Igitur primus cum secundo faciet summam $100-12\mathcal{2}$. triplam ad tertium, id est, ad $12\mathcal{2}$. siue æqualem $32\mathcal{2}$. Addita $12\mathcal{2}$. vtrobique, erit æqualitas inter 100. & $42\mathcal{2}$. Diuisis igitur 100. per 4. fiet $12\mathcal{2}.25$. tertius numerus, ac proinde secundus erit 50. nimirum $75-12\mathcal{2}$. Itaque tres numeri erunt 25. 50. 25. Et tam summa primi, & secundi ad tertium, quam summa tertij ac secundi ad primum, proportionem habet triplam.

Si vtraque proportio deberet esse quadrupla, reperirentur tres numeri 20. 60. 20.

LIIII. 54 *Inuenire tres numeros, ita vt primus cum secundo proportionem ad tertium habeat datam. Item tertius cum secundo ad primum datam proportionem habeat: Omnesque tres conficiant summam datam.*

HOC ænigma à præcedenti diuersum non est. Nam si data summa diuidatur in tres numeros, vt iubetur, expeditum erit ænigma, non aliter, ac præcedens.

LV. 55 *Numerum inuenire, ita vt quadratus ex parte eius aliquota data descriptus, & quadratus alterius cuiusuis partis eius aliquotæ, conficiant ipsum numerum, vel alium qui ad inuentum numerum proportionem habeat datam.*

INVENIENDVS sit numerus, ita vt quadratus ex eius semisse descriptus, & quadratus ex eiusdem parte sexta descriptus, efficiant ipsum numerum, vel alium, qui ad inuentum proportionem habeat octuplam supertripartientem quartas. Ponatur numerus esse $6\,2\mathcal{2}$.

vt sine

vt sine fractione habeat partes expressas. Eius semissis est $3\frac{1}{2}$ & sexta pars $1\frac{1}{2}$. Harum partium quadrati sunt $9\frac{3}{4}$ & $1\frac{1}{4}$. qui faciunt $10\frac{1}{2}$. numerum æqualem $6\frac{1}{2}$. Diuisis ergo 6. per 10. fiet $1\frac{1}{2}\frac{1}{5}$. (quod numeri Cossici collaterales sint,) ac proinde $6\frac{1}{2}$. erunt $\frac{1}{5}\frac{8}{5}$. numerus quæsitus. Semissis eius $\frac{9}{5}$. facit quadratum $\frac{8}{2}\frac{1}{5}$. Et eius sexta pars $\frac{3}{5}$ facit quadratum $\frac{9}{2}\frac{1}{5}$. qui cum $\frac{8}{2}\frac{1}{5}$. facit $\frac{9}{2}\frac{0}{5}$. id est, $\frac{1}{5}\frac{8}{5}$. numerum quæsitum.

SED iam duo quadrati facere debeant numerum, qui ad inuentum numerum habeat proportionem octuplam supertripartientē quartas. Ponatur numerus esse $1\frac{1}{2}$. Eius semissis est $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{2}$ & sexta pars $\frac{1}{6}\frac{1}{2}$. Quadrati harum partium sunt $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{3}\frac{1}{6}$. qui simul faciunt $\frac{1}{3}\frac{0}{6}$. qui numerus ad $1\frac{1}{2}$. habere debet proportionem octuplam supertripartientem quartas, cuius videlicet denominator est $8\frac{3}{4}$. Hic autem ductus in $1\frac{1}{2}$. facit $8\frac{3}{4}\frac{1}{2}$. cui numero æqualis esse debet numerus $\frac{1}{3}\frac{0}{6}$. Diuisis ergo $8\frac{3}{4}$. per $\frac{1}{3}\frac{0}{6}$. fiet $1\frac{1}{2}$. $3\frac{1}{7}$. siue $\frac{6}{3}\frac{3}{2}$. numerus inuentus (quod numeri Cossici collaterales sint.) eius enim semissis $\frac{3}{4}\frac{3}{2}$. facit quadratum $\frac{3}{3}\frac{9}{6}\frac{6}{9}$. Et eiusdem sexta pars $\frac{6}{2}\frac{3}{1}$. facit quadratum $\frac{3}{1}\frac{9}{4}\frac{6}{4}\frac{9}{4}$. qui cum priori quadrato $\frac{3}{4}\frac{9}{0}\frac{6}{6}$. id est, cum $\frac{3}{1}\frac{5}{4}\frac{7}{4}\frac{2}{4}\frac{1}{4}$. facit numerum $\frac{3}{1}\frac{9}{4}\frac{6}{4}\frac{9}{0}$. qui ad inuentum $\frac{6}{2}\frac{3}{1}$ proportionem habet octuplam supertripartientem quartas. quippe cum ille per hunc diuisus Quotientem faciat $8\frac{3}{4}$.

LVI. *56 Datum numerum partiri in duos, vt data pars primi cum secundo tantum faciat, quantum secundi pars alia data cum primo efficit.*

Numerus datus 44. secandus sit in duos, vt $\frac{1}{5}$. primi cum secundo, & $\frac{1}{3}$. secundi cum primo, faciant duos numeros æquales. Ponatur primus $1\mathcal{Q}$. ideoque secundus $44-1\mathcal{Q}$. Quinta pars primi, nimirum $\frac{1}{5}\mathcal{Q}$. cum secundo facit $44-\frac{4}{5}\mathcal{Q}$. Et tertia pars secundi. nimirum $\frac{44-1\mathcal{Q}}{3}$ cum primo facit $1\mathcal{Q}+\frac{44-1\mathcal{Q}}{3}$. Est ergo æquatio inter $44-\frac{4}{5}\mathcal{Q}$. & $1\mathcal{Q}+\frac{44-1\mathcal{Q}}{3}$. Ablata $1\mathcal{Q}$. vtrinque, erit æquatio inter $44-\frac{9}{5}\mathcal{Q}$ & $\frac{44-1\mathcal{Q}}{3}$. quæ æquatio per multiplicationem in crucem (suppositā 1. priori numero; vt fiat hæc fractio $\frac{44-\frac{9}{5}\mathcal{Q}}{1}$ reducetur ad æqualitatē inter $132-\frac{27}{5}\mathcal{Q}$ & $44-1\mathcal{Q}$. Et additis $\frac{27}{5}\mathcal{Q}$. vtrinq; inter 132. & $44+\frac{22}{5}\mathcal{Q}$. Ablatisq; 44. vtrinque inter 88 & $\frac{22}{5}\mathcal{Q}$. Diuisis igitur 88. per $\frac{22}{5}$. fiet $1\mathcal{Q}$. 20. primus numerus. Secundus vero erit 24. Vbi vides quintam partem primi, nimirum 4. cum secundo facere 28. quantum scilicet facit tertia pars secundi, nimirum 8. cum primo.

LVII. *57 Duos numeros inuenire, ita vt primus, accepto quolibet numero à secundo, faciat numerum, qui ad reliquum secundi proportionem habeat datam. Item secundus, accepto quolibet etiam numero à primo, faciat numerum, qui ad reliquum primi proportionem etiam habeat datam.*

SINT inueniendi duo numeri, vt primus accipiens 40. à secundo faciat numerum reliqui secundi quadruplum. At secundus accipiens 30. à primo faciat numerum residui primi noncuplum. Ponatur primus $1\mathcal{Q}$. Si igitur accipiat 40. à secundo, habebit $1\mathcal{Q}+40$. ac proinde secundo remanent $\frac{1}{4}\mathcal{Q}+10$. vt nimirum ille ad hunc proportionem habeat quadruplam. Ergo antequam secundus daret primo 40. habuit $\frac{1}{4}\mathcal{Q}+50$. Ac proinde si accipiat 30. à primo habebit $\frac{1}{4}\mathcal{Q}+80$. qui numerus ad reliquum primi, videlicet ad $1\mathcal{Q}-30$. debet habere proportionem noncuplam. Erit ergo æquatio inter $\frac{1}{4}\mathcal{Q}+80$ & $9\mathcal{Q}-270$. Additisque 270. vtrinque, inter $\frac{1}{4}\mathcal{Q}+350$. & $9\mathcal{Q}$. Ablataque $\frac{1}{4}\mathcal{Q}$. vtrinque. inter 350. & $8\frac{3}{4}\mathcal{Q}$. Diuisis igitur 350. per $8\frac{3}{4}$ fiet $1\mathcal{Q}$. 40. primus numerus. Secundus autem erit 60. nimirum $\frac{1}{4}\mathcal{Q}+50$. Primus igitur 40. accipiens 40. à secundo, habebit 80. qui numerus quadruplus est numeri 20 qui secundo remanet. Secundus autem 60. accipiens 30. à primo habebit 90. qui numerus noncuplus est numeri 10. qui primo relinquitur, postquam 30. dederit secundo.

Si inueniendi sint duo numeri, vt primus accipiens 10. à secundo habeat numerum quintuplum reliqui secundi, at secundus accipiens 5. à primo, habeat numerum duplum reliqui primi; inuenies duos numeros 15. & 15. Nam posito primo $1\mathcal{Q}$ si accipiat 10. à secundo, habebit $1\mathcal{Q}+10$. qui numerus quintuplus est numeri $\frac{1}{5}\mathcal{Q}+2$. atque hic secundo supereſt, postquam primo dederit 10. ergo prius habuit $\frac{1}{5}\mathcal{Q}+12$. Si igitur accipiat 5. à primo, habebit $\frac{1}{5}\mathcal{Q}+17$. qui numerus duplus esse debet numeri $1\mathcal{Q}-5$. qui primo supereſt, postquam dederit 5. secundo. hoc est, æqualitas erit inter $\frac{1}{5}\mathcal{Q}+17$. & $2\mathcal{Q}-10$. Additisque 10. vtrobique, inter $\frac{1}{5}\mathcal{Q}+27$. & $2\mathcal{Q}$. Et si auferatur $\frac{1}{5}\mathcal{Q}$. vtrobique, inter 27. & $1\frac{4}{5}\mathcal{Q}$. Diuisis igitur 27. per $1\frac{4}{5}$. hoc est, per $\frac{9}{5}$. fiet $1\mathcal{Q}$. 15 pro primo numero. Et quia secundus habebat $\frac{1}{5}\mathcal{Q}+12$. erit quoque secundus numerus 15. Atque duo hi numeri 15. & 15. quæstioni satisfaciunt. Nam si primus accipiat 10. à secundo, habebit 25. qui numerus quintuplus est reliqui, qui secundo supereſt, nimirum numeri 5. Secundus vero accipiens 5. à primo, habebit 20. numerum videlicet duplum numeri 10. qui primo supereſt.

LVIII. *58 Tres numeros inuenire, vt bini quique faciant tres numeros propositos, dummodo semissis summæ propositorum numerorum maior sit singulis propositis numeris.*

DEBEAT primus cum secundo efficere 20. secundus cum tertio 30. ac tertius cum primo 40. qui omnes simul faciunt numerum 90. cuius semissis 45. maior est quam 20. & quam 30. & quam 40. Quod si tertius numerus effectus deberet esse 50. vel maior, res non succederet, quia omnes tres efficerent 100. vel maiorem numerum, cuius semissis esset vel æqualis vni eorum, nimirum 50. vel minor. Vt si tertius esset 51. vel 60. essent omnes tres 101. vel 110. cuius semissis $50\frac{1}{2}$. vel 55. minor esset tertio 51. vel 60. Sed operatio ipsa probe te docebit an quæstio possibilis sit, nec ne. Ponatur ergo summa trium numerorum quæsitorum esse $1\mathcal{Q}$. Et quia primus ac secundus conficiunt 20. erit tertius $1\mathcal{Q}-20$. Item quia secundus ac tertius faciunt 30. erit primus $1\mathcal{Q}-30$. Denique quia tertius ac primus faciunt 40. erit secundus $1\mathcal{Q}-40$. Hi omnes tres simul conficiunt $3\mathcal{Q}-90$. quę summa æqualis debet esse summæ omnium, quę posita est $1\mathcal{Q}$. Est ergo æquatio inter $1\mathcal{Q}$. & $3\mathcal{Q}-90$. Additisque 90. vtrinque, inter $1\mathcal{Q}+90$. & $3\mathcal{Q}$. Ablataque $1\mathcal{Q}$. vtrinque, inter 90. & $2\mathcal{Q}$. Diuisis igitur 90 per 2. fiet $1\mathcal{Q}$.

fiet $1\mathcal{Q}$. 45. summa omnium trium quæsitorum numerorum. Et quoniam primus inuentus fuit $1\mathcal{Q}-30$. erit ipse primus 15. Secundus autem erit 5. nimirum $1\mathcal{Q}-40$. Ac tertius 25. videlicet $1\mathcal{Q}-20$. Itaque tres numeri ordine inuenti sunt 15. 5. 25. manifestumque est, primum ac secundum efficere 20. secundum ac tertium 30. tertium denique ac primum 40.

Aliter. Ponatur primus $1\mathcal{Q}$. eritq; propterea secundus $20-1\mathcal{Q}$ vt cum primo, nimirum cum $1\mathcal{Q}$. facere possit 20. qui secundus numerus habebitur, si primus $1\mathcal{Q}$. ex 20. detur. Tertius autem erit $10+1\mathcal{Q}$. vt cum secundo, id est, cum $10-1\mathcal{Q}$. facere possit 30. habebiturque hic tertius, si secundus $20-1\mathcal{Q}$. detur ex 30. Iam tertius $10+1\mathcal{Q}$. cum primo $1\mathcal{Q}$. facit $2\mathcal{Q}+10$. qui numerus æqualis debet esse 40. Demptis igitur 10. vtrinque, erit æquatio inter $2\mathcal{Q}$. & 30. Diuisisque 30. per 2. fiet $1\mathcal{Q}$. 15. pro primo numero. Secundus ergo $20-1\mathcal{Q}$. erit 5. Et tertius $10+1\mathcal{Q}$. erit 25. vt prius.

LIX. *59 Quatuor numeros inuenire, ita vt terni quique efficiant quatuor numeros propositos; dummodo tertia pars summæ propositorum numerorum maior sit singulis propositis numeris.*

DEBEAT primus, secundus, ac tertius facere 20. Secundus, tertius, & quartus 22. Tertius, quartus, ac primus 24. Quartus denique, primus, & secundus 27. qui omnes quatuor faciunt 93. cuius numeri pars tertia 31. maior est quam 20. & quam 22. & quam 24. & quam 27. Quod si quartus deberet esse 40. res non succederet, quia omnes quatuor efficerent 106. cuius tertia pars $35\frac{1}{3}$. non maior est, quam 40. sed minor. Impossibilitatem porro quæstionis ipsamet operatio indicabit. Ponatur summa omniū quatuor esse $1\mathcal{Q}$. Et quia primus secūdus & tertius faciunt 20. erit quartus $1\mathcal{Q}-20$. Eadem ratione erit primus $1\mathcal{Q}-22$. Et secundus $1\mathcal{Q}-24$. Ac tertius denique $1\mathcal{Q}-27$. Hi omnes quatuor faciunt $4\mathcal{Q}-93$. quæ summa æqualis debet esse summæ omnium quam posuimus $1\mathcal{Q}$. Est igitur æquatio inter $1\mathcal{Q}$. & $4\mathcal{Q}-93$. Additisque 93. vtrinque, inter $1\mathcal{Q}+93$. & $4\mathcal{Q}$. Ablataque $1\mathcal{Q}$ vtrinque, inter 93. & $3\mathcal{Q}$. Diuisis igitur 93. per 3. fiet $1\mathcal{Q}$. 31. Et quoniam primus fuit inuentus $1\mathcal{Q}-22$. erit ipse primus 9. Eademque de causa secundus 7. Tertius 4. & quartus 11. qui quatuor numeri problema efficiunt.

Hoc ænigma alio modo soluemus in quinque numeris in ænigmate 127.

SCHOLIVM.

EADEM arte inuenientur quinque numeri, vt quaterni quique efficiant quinque numeros propositos; dummodo quarta pars summæ propositorum numerorū singulis numeris propositis maior sit. Item sex numeri, si tamen quinta pars maior sit, &c. Et sic deinceps quotcunque numeri, si modo pars summæ determinata à numero propositorum numerorum, vno minus, maior sit singulis numeris propositis.

LX. *60 Tres numeros inuenire, vt bini quique simul sumpti excedant reliquum dato numero.*

STATVATVR primum & secundum superare tertium 20. vnitatibus: Excessum secundi ac tertij simul supra primum esse 30. vnitatum: Et denique excessum inter tertium ac primum simul, & secundum esse 40. vnitatum. Ponantur omnes tres esse $1\mathcal{Q}$. Et quoniam primus & secundus superant tertium 20. vnitatibus; addito communi tertio, [a] superabunt quoque primus, secundus & tertius simul, tertium duplicatum eisdem 20. vnitatibus: ideoque omnes tres æquales erunt tertio duplicato, vna cum 20. quia numerus compositus ex tertio duplicato, & 20. superat quoque tertium duplicatum 20. vnitatibus. Si igitur à summa omnium trium, quam posuimus $1\mathcal{Q}$. auferamus 20. remanebit tertius duplicatus $1\mathcal{Q}-20$. atque idcirco tertius simplex erit $\frac{1}{2}\mathcal{Q}-10$. Eadem ratione primus erit $\frac{1}{2}\mathcal{Q}-15$. & secundus $\frac{1}{2}\mathcal{Q}-20$. Summa ergo omnium trium $\frac{1}{2}\mathcal{Q}-45$. æqualis erit summæ omnium trium numerorum quæsitorum, quam posuimus esse $1\mathcal{Q}$; ita vt æquatio sit inter $1\mathcal{Q}$. & $\frac{1}{2}\mathcal{Q}-45$. Additisque 45. vtrinque, inter $1\mathcal{Q}+45$. & $\frac{1}{2}\mathcal{Q}$. Ablataque $1\mathcal{Q}$. vtrinque, inter 45. & $\frac{1}{2}\mathcal{Q}$. Diuisis igitur 45. per $\frac{1}{2}$. fiet $1\mathcal{Q}$. 90. Cum ergo primus inuentus sit $\frac{1}{2}\mathcal{Q}-15$. erit ipse primus 30. Eandemq; ob causam erit secundus 25. & tertius 35. qui tres numeri problema conficiunt.

[a] 16. primi

Aliter. Ponatur tertius $1\mathcal{Q}$. Et quoniam primus ac secundus superant tertium 20. vnitatibus; erunt primus & secundus simul $1\mathcal{Q}+20$. cum hic numerus excedat quoque $1\mathcal{Q}$. 20. vnitatibus. Ponatur deinde secundus 25. semissis videlicet summæ 50. ex 20. & 30. collectæ. Cum ergo primus & secundus simul inuenti sint esse $1\mathcal{Q}+20$. si detur secundus 25. relinquetur primus $1\mathcal{Q}-5$. Quia vero tertius cum primo superare debet secundum 40. vnitatibus: Faciunt autem tertius $1\mathcal{Q}$. & primus $1\mathcal{Q}-5$. numerum $2\mathcal{Q}-5$. qui æqualis erit numero 65. cum hic secundum 25. superet 40. vnitatibus. atque ita æquatio erit inter $2.\mathcal{Q}-5$ & 65. Additisq; 5. vtrinque, inter $2\mathcal{Q}$. & 70. Diuisis igitur 70. per 2. fiet $1\mathcal{Q}$. 35. tertius numerus. Primus erit 30. nimirum $1\mathcal{Q}-5$. Et secundus 25. vt supra.

Aliter. Ponatur primus & secundus simul $1\mathcal{Q}$, eritque propterea tertius $1\mathcal{Q}-20$. vt nimirum primus & secundus simul, id est, $1\mathcal{Q}$. superet tertium 20. vnitatibus: qui tertius habebitur, si ex primo & secundo $1\mathcal{Q}$. demantur 20. Ergo omnes tres erunt $2\mathcal{Q}-20$. Et quia secundus ac tertius superare debent primum numero 30. addito communi primo, superabunt omnes tres primum duplicatum eodem numero 30. Demptis igitur 30. ex omnibus tribus, id est, ex $2\mathcal{Q}-20$. remanebit primus duplicatus $2\mathcal{Q}-50$. ideoque simplex primus $1\mathcal{Q}-25$. Primus ergo $1\mathcal{Q}-25$. & tertius $1\mathcal{Q}-20$. faciunt summam $2\mathcal{Q}-45$. quæ ex omnibus tribus, id est, ex $2\mathcal{Q}-20$. subtracta relinquet secundum 25. Et quoniam primus ac tertius faciunt, vt dictum est proxime, summam $2\mathcal{Q}-45$. quæ debent secundum 25. superare numero 40. Si secundus 25. subtrahatur à prædicta summa, relinquetur numerus $2\mathcal{Q}-70$. æqualis dicto excessui 40. Additis igitur 70. vtrinque, erit æquatio inter $2\mathcal{Q}$. & 110. Diuisisq; 110. per 2. fiet $1\mathcal{Q}$. 55. Primus ergo numerus $1\mathcal{Q}-25$. erit 30. Secundus vero est 25. & tertius $1\mathcal{Q}-20$. erit 35. vt prius.

SCHO-

SCHOLIVM.

SI primus ac ſecundus tertium ſuperare debent 3.vnitatibus: ſecundus vero ac tertius primum 20.vnitatibus: Denique primus ac tertius ſecundum 1.vnitate, reperietur tertius numerus 10½. ſecundus 11½. & primus 2.

LXI. 61 *Quatuor numeros inuenire, vt terni quique ſimul ſumpti excedant reliquum dato numero: dummodo ſemiſſis ſummæ ex quatuor numeris poſtulatis collectæ maior ſit ſingulis numeris datis.*

POSTVLETVR, vt primus, ſecundus, ac tertius ſimul excedant quartum 20.vnitatibus: Et ſecundus, tertius, ac quartus primum 30.vnitatibus: Et tertius, quartus, ac primus ſecundum 40.vnitatibus: Ac denique quartus, primus ac ſecundus tertium 50.vnitatibus. Vbi vides, quatuor numeros datos facere 140. cuius numeri ſemiſſis 70. maior eſt ſingulis datis. Nam ſi conditio hæc non adſit, erit quæſtio impoſſibilis. Vt ſi vltimus exceſſus detur 90. facient omnes exceſſus numerum 180. cuius ſemiſſis 90. maior non eſt dato exceſſu 90. quæſtio erit inexplicabilis. Ponantur ergo omnes quatuor numeri 12ℓ. Et quoniam primus, ſecundus, ac tertius excedunt quartum 20.vnitatibus; addito communi quarto, [a] ſuperabunt quoque primus, ſecundus, tertius ac quartus quartum duplicatum ijſdem 20.vnitatibus: ideoque omnes quatuor æquales erunt quarto duplicato, vna cum 20. quia numerus compoſitus ex quarto duplicato, & 20. ſuperat quoque quartum duplicatum 20. vnitatibus. Si igitur à ſumma omnium quatuor, quam poſuimus 12ℓ. auferantur 20. remanebit quartus duplicatus 12ℓ—20. atq; adeo quartus ſimplex erit ¼ 2ℓ—10. Eadē ratione erit primus ¼ 2ℓ—15. Et ſecundus ¼—20. Et tertius ¼ 2ℓ—25. Summa ergo omnium quatuor 22ℓ—70. æqualis erit priori ſummæ omnium quatuor, quam poſuimus 12ℓ. ita vt æquatio ſit inter 12ℓ. & 22ℓ—70. Additiſque 70. vtrinque, inter 12ℓ.+70. & 22ℓ. Ablataq; 12ℓ. vtrinque, inter 70. & 12ℓ. Erit igitur 1 2ℓ 70. Cum ergo primus inuentus ſit ¼ 2ℓ—15. erit ipſe primus 20. Eandemque ob cauſam ſecundus erit 15. Tertius 10. & quartus 25. qui omnes quæſtionem expediunt.

[a] *16. pronūc. primi*

Aliter. Ponatur quartus 12ℓ. Et quoniam primus, ſecundus, ac tertius excedunt quartum 20. vnitatibus: Erunt illi tres ſimul 12ℓ + 20. cum hic numerus ſuperet 12ℓ. ſimiliter 20. vnitatibus. Rurſus quia ſecundus, tertius, & quartus excedunt primū 30. vnitatibus; ponatur ſumma ſecūdi ac tertij 25. ſemiſſis videlicet primorū duorum exceſſuum 20. & 30. ſimul. Quia igitur primus, ſecundus, ac tertius faciunt, vt diximus, 12ℓ+20. ſi auferatur ſecundus, ac tertius ſimul, nimirum 25. reliquus erit primus 12ℓ—5. excedit queſumma 12ℓ+25. ex ſecundo, tertio, & quarto collecta, primum 12ℓ—5. numero 30. vt patet, ſi primus 12ℓ—5. auferatur ex 12ℓ+25 ſumma ſecundi, tertij, & quarti. Rurſus, quia primus inuentus eſt 12ℓ—5. Secundus vero ac tertius faciunt 25. quartus denique poſitus eſt 12ℓ. erunt omnes quatuor 22ℓ+20. Cum ergo tertius, quartus, ac primus excedant ſecundum numero 40. Addito communi ſecundo, [b] excedent omnes quatuor ſecundum duplicatum eodem numero 40. Ablatis igitur 40. ex ſumma 22ℓ+20. omnium quatuor, relinquetur ſecundus duplicatus 22ℓ—20. ipſeque ſecundus ſemel ſumptus erit 12ℓ—10. qui ſubtractus ex 25. ſumma ſecundi ac tertij, reliquum faciet tertium 35—12ℓ. Quoniam vero quartus, primus, & ſecūdus faciunt 32ℓ—15. debentq; ſuperare tertium numero 50. ſuperant autem tertium 35 ——12ℓ. numero 42ℓ —— 50. vt conſtat, ſi tertius 35 —— 12ℓ. detrahatur ex prædicta ſumma 32ℓ —— 15. Eſt ergo æquatio inter 42ℓ —— 50. & 50. Additiſque 50. vtrinq;, inter 42ℓ. & 100. Diuiſis ergo 100. per 4. fiet 12ℓ. 25. Primus ergo 12ℓ —— 5. erit 20. Secundus 12ℓ —— 10. erit 15. Tertius 35 ——12ℓ. erit 10. Et quartus 12ℓ. erit 25. quemadmodum prius.

[b] *16. pronūc. primi*

Aliter. Ponatur ſumma omnium 12ℓ. Et quia priores tres excedere debent quartum numero 20. diuidenda erit 12ℓ. in duas partes, quarum maior minorem ſuperet numero 20. Maior enim pars erit ſumma priorum trium, & minor pars erit quartus numerus. Diuiſio autem hæc ita fiet, vt in ſcholio ænigmatis 1. tradidimus. Dematur numerus 20. ex 12ℓ. vt reliquus ſit numerus 12ℓ —— 20. Huius enim ſemiſſis ½ 2ℓ —— 10. erit minor pars. Et ſi ad hanc addatur idem numerus 20. fiet maior pars ½ 2ℓ+10. Erit ergo quartus numerus ½. 2ℓ —— 10. & priores quatuor ½ 2ℓ+10. pari ratione, quia ſecundus tertius, & quartus debent excedere primum numero 30. demantur 30. ex 12ℓ. Reliqui enim numeri 12ℓ —— 30. ſemiſſis ½ 2ℓ —— 15. erit primus numerus. Item quia tertius, quartus, & primus ſuperare debent ſecundum numero 40. ſi demantur 40. ex 12ℓ. erit reliqui numeri 12ℓ ——40. ſemiſſis ½ 2ℓ —— 20. ſecundus numerus. Denique quia quartus, primus & ſecundus ſuperare debent tertium numero 50. ſi tollantur 50. ex 12ℓ. erit reliqui numeri 12ℓ —— 50. ſemiſſis ½ 2ℓ —— 25. tertius numerus. Omnes 4. innenti ½ 2ℓ —— 15. ½ 2ℓ —— 20. ½ 2ℓ —— 25. & ½ 2ℓ —— 10. faciunt ſummam 22ℓ —— 70. quę æqualis eſſe debet ſummæ omnium, quam poſuimus 12ℓ. Eſt ergo æquatio inter 12ℓ. & 22ℓ —— 70. Additiſq; 70. vtrinque, inter 12ℓ+70. & 22ℓ. Ablataque 12ℓ. vtrinque, inter 70. & 12ℓ. erit q; 12ℓ 70. & ½ 2ℓ 35. Primus ergo ½ 2ℓ —— 15. erit 20. Secundus ½ 2ℓ —— 20. erit 15. Tertius ½ 2ℓ —— 25. erit 10. Et quartus ½ 2ℓ —— 10. erit 25. veluti prius.

SCHOLIVM.

EODEM *modo reperientur quinque numeri, vt quaterni quique ſuperent reliquum dato numero; dummodo tertia pars ſummæ ex quinque poſtulatis exceſſibus maior ſit ſingulis numeris. Pari ratione inuenientur ſex, ſi tamen quarta pars maior ſit, &c. Atque ita deinceps quotcunque numeri, ſi modo pars ſummæ denominata à numero datorum exceſſuum, minus duobus, maior ſit ſingulis exceſſibus datis.*

LXII. 62 *Tres numeros inuenire, quorum maximus medium ſuperet data parte minimi: Medius quoque minimum ſuperet data parte maximi: Minimus denique datam medij partem excedat numero dato.*

SVPERET maximus medium tertia parte minimi: Medius minimum tertia parte maximi: Minimus denique tertiam item partem medij excedat 10.vnitatibus. Ponatur minimus 12ℓ+10. & medius 32ℓ Ita enim minimus

minimus tertiam medij partem ſuperabit numero 10. Et quoniam medius minimum ſuperare debet tertia parte maximi. Superat autem medius 32ℓ. minimum 12ℓ+10 numero 22ℓ—10. vt patet, ſi ſubtractio fiat 12ℓ +10. ex 32ℓ. Igitur tertia pars maximi erit 22ℓ—10. atq; idcirco maximus erit 62ℓ—30. Rurſus quoniam maximus medium ſuperare debet tertia parte minimi: Superat aũt maximus 62ℓ—30. medium 32ℓ. numero 32ℓ—30. qui æqualis erit tertiæ parti minimi: ideoq, minimus erit 92ℓ—90. Fuit aũt minim⁹ poſitus 12ℓ+10. Eſt ergo æquatio inter 92ℓ 90 & 12ℓ+10. Additiſq; 90. vtrinq;, inter 92ℓ & 12ℓ+100. Ablataq; 12ℓ. vtrinq; inter 82ℓ. & 100. Diuiſis ergo 100. per 8. fiet 12ℓ. 12½. Igitur minim⁹ 12ℓ+10. erit 22½. Medius 32ℓ. erit 37½. Maximus denique 62ℓ —— 30. erit 45. Nam maximus 45. ſuperat medium 37½. numero 7½. qui tertia pars eſt minimi 22½. Medius vero 37½. ſuperat minimum 22½. numero 15. qui tertia pars eſt maximi 45. Minimus deniq; 22½. ſuperat 12½. tertiam partem medij 37½. numero 10. vt propoſitum eſt.

QVOD ſi maximus medium ſuperare debeat ſemiſſe minimi: medius minimum quarta parte maximi: Et minimus tertiam partem medij numero 8. Ponatur minimus 12ℓ+8. Et medius 32ℓ. vt ille tertiam huius partem excedat octonario. Et quia medius minimum ſuperare ponitur quarta parte maximi: Superat autem medius 32ℓ minimum 12ℓ+8. numero 22ℓ —— 8. Igitur quarta pars maximi erit 22ℓ —— 8. ac proinde maximus erit 82ℓ —— 32. Rurſus quia maximus medium ſuperare debet ſemiſſe minimi; Superat autem maximus 82ℓ —— 32. medium 32ℓ. numero 52ℓ —— 32. qui æqualis erit ſemiſſi minimi; propterea que minimus erit 10 2ℓ —— 64. Fuit autem idem poſitus 12ℓ+8. Eſt ergo æquatio inter 10 2ℓ —— 64. & 12ℓ+8. Additiſque 64. vtrinque, inter 10 2ℓ. & 12ℓ+72. Ablataque 12ℓ. vtrinque, inter 92ℓ. & 72. Diuiſis ergo 72. per 9. fiet 12ℓ. 8. Ac proinde minimus 12ℓ+8. erit 16. Medius vero 32ℓ. erit 24. Maximus denique 82ℓ —— 32. erit 32.

SI quis proponeret, maximum debere ſuperare medium ſemiſſe minimi: Medium quoque minimum ſemiſſe maximi: Minimum denique ſemiſſem medij binario; quæſtio eſſet impoſſibilis, vt ipſa operatio per Algebram abunde doçebit. Ponatur enim minimus 12ℓ+2. Et quia debet ſuperare ſemiſſem medij binario, erit medius 22ℓ. Quia vero minimum medius ſuperare debet ſemiſſe maximi. Superat autem medius 22ℓ. minimum numero 12ℓ—2. qui ſemiſſis debet eſſe maximi. Maximus ergo erit 22ℓ—4. quod eſt abſurdum, cum medius inuentus ſit 22ℓ. maior quam 22ℓ—4.

63 *Tres numeros inuenire, ita vt ſi quiſque proxime ſequenti det datam ſui partem, inter eos, qui dederunt, & acceperunt, reperiatur æqualitas.* LXIII.

DET primus ſecundo tertiam ſui partem: Secundus tertio quartam ſui partem: Et tertius primo quintam ſui partem: Et cum ſibi mutuo dictas partes dederint, & ab alijs acceperint, fiant tres numeri æquales. Ponatur primus 32ℓ. vt tertiam partem habeat ſine fractione. Secundus autem, 4. vnitatum, vt quartam partem ſine fractione habeat. Si ergo hic ſecundus 4. accipiat ¼. primi 32ℓ. nimirum 12ℓ. atque det ¼. nimirum 1. tertio, habebit ipſe ſecundus 3+12ℓ. Ac tantundem habere debet primus, vbi dederit, acceperitque, quæ iubentur. At primus 32ℓ. ſi tertiam partem dederit 12ℓ. & acceperit 3—12ℓ. tum demum habebit 12ℓ+3. vel 3+12ℓ. vt patet, ſi addantur 3—12ℓ. ad 12ℓ. quod hæc formula docet. Inuenies autem 3—12ℓ. ſi reliquum primi, nimirum 22ℓ. dempſeris ex 3+12ℓ. Ergo 3—12ℓ. erit quinta pars tertij: quandoquidem eam dans reliquo primi, nimirum 22ℓ. facit 3+12ℓ. Igitur tertius erit 15 ——52ℓ. qui ſi dederit primo quintam ſui partem, hoc eſt, 3—12ℓ remanebunt illi 12—42ℓ. Et ſi à ſecundo 4. acceperit quartam partem, nimirum 1. habebit 13—42ℓ. qui numerus æqualis eſſe debet 3+12ℓ. quantum ſcilicet tam primus, quam ſecundus habet, vt dictum eſt. Eſt ergo æquatio inter 13—42ℓ. & 3+12ℓ. Additiſque 42ℓ. vtrinque, inter 13. & 3+52ℓ. Ablatiſque 3. vtrinque, inter 10. & 52ℓ. Diuiſiſque 10. per 5 fiet 12ℓ 2. Ac propterea primus numerus 32ℓ. erit 6. Secundus 4. vt poſuimus, & tertius 15—52ℓ. erit 5. Si namque primus 6. dederit tertiam ſui partem 2. acceperitque quintam partem tertij, videlicet 1. habebit 5. Ac tantundem habebit ſecundus 4. ſi dederit quartam ſui partem 1. tertio, acceperitque tertiam partem primi. Item tantum quoque habebit tertius 5. ſi dederit primo quintam partem, id eſt, 1. acceperitque à ſecundo 4. quartam partem, videlicet 1. quod eſt propoſitum.

2	2ℓ + 0
—	1 2ℓ + 3
+	1 2ℓ + 3

QVOD ſi primus ſecundo debeat dare ½. Secundus tertio ¼. & tertius primo ⅓. Ponatur primus 2 2ℓ. vt habeat ½. ſine fractione; Secundus autem 4. vt habeat ¼. ſine fractione. Secundus igitur poſtquam dederit ¼. tertio, ſumpſeritque ¼. à primo, habebit 12ℓ +3. Ac tantundem habere debet primus, poſtquam dederit ½. ſecundo, acceperitque ½. à tertio. At primus poſtquam dederit ½. ſecundo, habebit 1. 2ℓ. reliquam, quæ cum 3. facit 1. 2ℓ+3. Eſt ergo 3. tertia pars tertij, ideoque tertius erit 9. Reliquum eſt, vt tertius 9. poſtquam dederit ⅓. primo, ſumpſeritque ¼. à ſecundo, habeat quoque 12ℓ+3. Habebit autem, ſi imperata fecerit, 7. Ergo æqualitas eſt inter 7. & 12ℓ+3. Ablatiſque 3. vtrinque, inter 4. & 12ℓ. Igitur 12ℓ. erit 4. ideoque primus, quem poſuimus 2 2ℓ. erit 8. Secūdus 4. & tertius 9. Nam primus 8. ſi det ½. accipiatque ⅓. tertij, habebit 7. quemadmodum ſecundus, ſi det ¼. & accipiat ½. primi. Necnon tertius, ſi det ⅓. ſumatque ¼. ſecundi. Omneſque tres numeri faciunt 21. triplum videlicet numeri 7. quem quiſque facit. quemadmodum etiam in primo exemplo omnes tres numeri 6. 4. 5. faciunt 15. triplum ſcilicet numeri 5. quem quiſque facit. In ſecundo porro exemplo huius ænigmatis vides, non eſſe neceſſarium, vt partes datæ habeant denominatores, qui ſemper creſcant ordine, vt in primo exemplo contigit.

64. *Quatuor numeros inuenire ea lege, vt cum quiuis eorum proxime inſequenti datam ſui partem dederit, inter eos qui dederunt, & acceperunt, reperiatur æqualitas.* LXIIII.

DET primus ſecundo tertiam ſui partem: Secundus tertio quartam: Tertius quarto quintam: Et quartus primo ſextam. Ac tandem, poſtquam dederint, acceperintq; dictas partes, fiant 4. numeri æquales. Ponatur

primus 3 2ℰ. vt tertiam partem ſine fractione habeat. Secundus autem 4. vnitatum, vt quartam partem habeat ſine fractione. Si ergo hic ſecundus accipiat $\frac{1}{3}$. primi 3 2ℰ. nimirum 1 2ℰ. atque det $\frac{1}{4}$. videlicet 1. tertio, habebit ipſe 1 2ℰ + 3. Ac tantundem oportet habere primum, poſtquam ſecundo dederit $\frac{1}{4}$. nimirum 1 2ℰ. acceperitq; à quarto partem ſextam. Sed ſi det $\frac{1}{3}$. videlicet 1 2ℰ. ſuperſunt illi 2 2ℰ. quæ cum 3 —— 1 2ℰ. conſtituunt 1 2ℰ + 3. vt ex hac formula colligitur. Inuenies autem 3 —— 1 2ℰ. ſi 2 2ℰ. tolles ex 1 2ℰ + 3. Ergo ſexta pars quarti erit 3 —— 1 2ℰ. Et ipſe quartus erit 18 —— 6 2ℰ. Hic quartus ſi det $\frac{1}{6}$. remanebunt illi 15 —— 5 2ℰ. & ſi accipiat $\frac{1}{3}$. tertij, debet habere 1 2ℰ + 3. ſicut tam primus, quam ſecundus. Sed ſi addantur 6 2ℰ —— 12. ad 15 — 5 2ℰ. fit 1 2ℰ + 3. vt in hac formula apparet, Inuenies autem 6 2ℰ — 12. ſi 15 —— 5 2ℰ. demantur ex 1 2ℰ + 3. Igitur $\frac{1}{3}$. tertij erit 6 2ℰ —— 12. ipſe que tertius erit 30 2ℰ —— 60. Reliquum eſt iam, tertium hunc habere quoque 1 2ℰ + 3. poſtquam quarto dederit $\frac{1}{5}$. videlicet 6 2ℰ —— 12. acceperitque 14. ſecundi 4. At ſi det $\frac{1}{5}$. ſuperſunt illi 1 2 4 2ℰ —— 48. Et ſi acceperit $\frac{1}{4}$. à ſecundo, nimirum 1. habebit 2 4 2ℰ —— 47. qui numerus æqualis debet eſſe 1 2ℰ + 3. Additis igitur 47. vtrinque, erit æqualitas inter 2 4 2ℰ. & 1 2ℰ + 50. Ablataque 1 2ℰ. vtrinque, inter 2 3 2ℰ. & 50 Diuiſis ergo 50. per 23. fiet 1 2ℰ $\frac{50}{23}$. Quocirca primus numerus 3 2ℰ erit $\frac{150}{23}$. Et ſecundus 4. ſiue $\frac{92}{23}$. Ac tertius 30 2ℰ —— 60. erit $\frac{120}{23}$. Quartus denique 18 —— 6 2ℰ erit $\frac{114}{23}$. qui ænigma conficiunt. Et ſi abſtuleris denominatores, erunt quatuor numeri quæſiti integri 150. 92. 120. 114. propterea quod numeratores eandem proportionem habent, quam ipſæ minutiæ, propter eundem denominatorem, vt ad finem lib. 9. Eucl. demonſtrauimus. [a] Et partes in quæſtione expreſſæ ita ſe habent ad numeros integros, vt ad dictas minutias. quia ita ſe habet V. g. $\frac{1}{3}$. numeri 12. ad 12. vt $\frac{1}{3}$. numeri 90. ad 90. &c. Itaq; ſi primus 150. det $\frac{1}{3}$. nimirum 50. ſupererunt 100. & ſi accipiat $\frac{1}{6}$. quarti 114. nimirum 19. habebit 119. Item ſi ſecundus 92. det $\frac{1}{4}$. ſui numeri nimirum 23. remanebunt 69. & ſi accipiat $\frac{1}{3}$. primi 150. nimirum 50. habebit ſimiliter 119. Sic quoque ſi tertius 120. det $\frac{1}{3}$. ſui numeri, hoc eſt, 24. remanebunt 96. & ſi accipiat $\frac{1}{4}$. ſecundi 92. nimirum 23. habebit 119. Denique eodem modo, ſi quartus 114. det $\frac{1}{6}$. ſui numeri, videlicet 19. ſupererunt 95. & ſi accipiat $\frac{1}{3}$. tertij 120. nimirum 24. habebit 119.

HIC etiam omnes 4. numeri inuenti 150. 92. 120. 114. efficiunt 476. quadruplum videlicet numeri 119. quem vnuſquiſque facit.

[a] 15. quinti

SCHOLIVM.

EODEM modo inuenientur 5. numeri, vel plures, ita vt, poſtquam vnuſquiſque ſequenti partem datam dederit, tandem fiant 5. numeri æquales, vel plures. Omneſque ſimul facient ſemper ſummam, quæ toties numerum, quem ſinguli faciunt, continebit, quot ſunt ipſi numeri.

Sint enim inueniendi 5. numeri, vt cum primus dederit $\frac{1}{3}$. ſecundo, acceperitque $\frac{1}{5}$. à quinto: Secundus vero dederit $\frac{1}{3}$. tertio, acceperitque $\frac{1}{3}$. à primo: Item tertius dederit $\frac{1}{3}$. quarto, acceperitque $\frac{1}{3}$. à ſecundo: Quartus autem dederit $\frac{1}{6}$. quinto, acceperitque $\frac{1}{3}$. à tertio. Quintus denique dederit $\frac{1}{3}$. primo, acceperitque $\frac{1}{6}$. à quarto; fiant tandem 5. numeri æquales. Ponatur primus 3 2ℰ. vt habeat $\frac{1}{3}$. ſine fractione. Secundus vero 2. vt habeat $\frac{1}{3}$. ſine fractione. Si ergo ſecundus det $\frac{1}{3}$. tertio, id eſt, 1. remanebit illi 1. Et ſi accipiat $\frac{1}{3}$. a primo, nimirum 1 2ℰ. habebit 1 2ℰ + 1. quem numerum vnuſquiſque tandem habere debet. Primo autem ſi det $\frac{1}{3}$. ſecundo, ſupererunt 2 2ℰ. quæ cum $\frac{1}{3}$. quinti facere debent 1 2ℰ + 1. At 2 2ℰ. cum 1 — 1 2ℰ. faciunt 1 2ℰ + 1. vt conſtat, ſi 2 2ℰ. detrahantur ex 1 2ℰ + 1. Igitur quinta pars quinti erit 1 — 1 2ℰ. & totus quintus 5 — 5 2ℰ. Huic quinto, ſi det $\frac{1}{5}$. remanebunt 4 — 4 2ℰ. quæ cum $\frac{1}{6}$. quarti facere debent 1 2ℰ + 1. Faciunt autem 4 — 4 2ℰ. cum 5 2ℰ — 3. numerum 1 2ℰ + 1. vt patet, ſi 4 — 4 2ℰ. detrahantur ex 1 2ℰ + 1. Igitur $\frac{1}{6}$. quarti numeri erit 5 2ℰ — 3. totusque quartus erit 30 2ℰ — 18. Huic quarto ſi det $\frac{1}{3}$. quinto, ſupererunt 25 2ℰ — 15. quæ cum $\frac{1}{3}$. tertij facere debent 1 2ℰ + 1. Faciunt autem 25 2ℰ — 15. cum 16 — 24 2ℰ. numerum 1 2ℰ + 1. vt patet, ſi 25 2ℰ — 15. demantur ex 1 2ℰ + 1. Igitur 16 — 24 2ℰ. erunt $\frac{1}{3}$. tertij numeri, totusque tertius erit 112 — 168 2ℰ. Huic tertio, ſi det $\frac{1}{3}$. quarto, remanent 96 — 144 2ℰ. quæ cum $\frac{1}{2}$. ſecundi, id eſt, cum 1. facit 97 — 144 2ℰ. quæ æqualia debent eſſe 1 2ℰ + 1. Additis 144 2ℰ. vtrinque, erit æquatio inter 97. & 145 2ℰ + 1. Ablataque 1. vtrinque, inter 96. & 145 2ℰ. Diuiſis igitur 96. per 145. fiet 1 2ℰ $\frac{96}{145}$. Ergo primus numerus poſitus 3 2ℰ. erit $\frac{288}{145}$. Secundus autem poſitus 2. erit $\frac{290}{145}$. Tertius deinde inuentus 112 — 168 2ℰ. erit $\frac{112}{145}$. Quartus deinde qui inuentus fuit 30 2ℰ — 18. erit $\frac{270}{145}$. Quintus denique inuentus 5 — 5 2ℰ. erit $\frac{245}{145}$. Et deletis denominatoribus, erunt quinque numeri inuenti integri. 288. 290. 112. 270. 245. qui problemati ſatisfaciunt. Nam ſi datas partes dent, & recipiant, vnuſquiſque habebit 241. qui numerus quintuplicatus facit 1205. ſummam omnium quinq; numerorum inuentorum.

LXV. 65 *Datum numerum in duas partes diuidere, ita vt poſterior pars cum data parte aliquota prioris faciat datum quemlibet numerum.*

SIT numerus 60. diſtribuendus in duos, ita vt poſterior cum $\frac{1}{3}$. prioris efficiat 28. Ponatur prior pars 5. 2ℰ. vt dare poſſit $\frac{1}{3}$. ſine fractione: eritque poſterior pars 60 — 5 2ℰ. quæ ſi acceperit $\frac{1}{3}$. prioris, nimirum 1 2ℰ. habebit 60 — 4 2ℰ. qui numerus æqualis debet eſſe dato numero 28. Additis igitur 4. 2ℰ. vtrinque, erit æquatio inter 60. & 4 2ℰ + 28. Ablatisque 28. vtrinque, inter 32. & 4. 2ℰ. Diuiſis ergo 32. per 4. fiet 1 2ℰ. 8. Ac propterea prior pars 5 2ℰ. erit 40. poſterior vero 20. quæ ſi acceperit $\frac{1}{3}$. prioris, nimirum 8. habebit 28.

SCHOLIVM.

Hoc idē ſine Algebra efficiēt hoc modo. Dēpto numero dato, g. effici debet, à num. dato, g. diſtribuendº eſt, diuidat reliquus num. p denominatorem partis datæ, minus vno. Quotiens namque per denominatorem partis multiplicatus, exhibebit priorem numerum, &c. Vt in dato exemplo, ſi datus numerus 28. dematur ex diuidendo numero 60. & reliquus numerus 32. diuidatur per 4. (numerum videlicet vnitate minorem denominatore quintæ partis) fiet Quotiens 8. quo ducto in 5. denominatorem partis quintæ, producetur prior numerus 40. Poſterior ergo erit 20.

Si idem numerus 60. ſecandus ſit in duos, ita vt poſterior cum $\frac{1}{5}$. prioris efficiat 59. Dempto numero 59. ex 60. & reliquo numero 1. diuiſo per 4 fit Quotiens $\frac{1}{4}$. qui ductus in 5. faciet $\frac{5}{4}$. priorem numerum. Poſterior ergo erit 58$\frac{3}{4}$. Nam ſi huic addatur $\frac{1}{5}$. prioris, nimirum $\frac{1}{4}$. conflabitur datus numerus 59.

66 *Duos numeros inuenire, quorum ſumma æqualis ſit dato numero, & poſterior cum data parte prioris efficiat datum quoque alium numerum.* LXVI.

HOC ænigma cum præcedenti coincidit. Nam ſi ſumma data ſecetur in duas partes, vt ibi imperatur, inuenti erunt duo numeri quæſiti. Vt ſi inueniendi ſint duo numeri, quorum ſumma 60. & poſterior numerus cum $\frac{1}{3}$. prioris faciat 28. diuidendus erit numerus 60. vt dictum eſt, eruntque quæſiti numeri 40. & 20.

Si vero inueniendi ſint duo numeri, quorum ſumma 60. & poſterior cum $\frac{1}{3}$. prioris faciat 59. erit prior numerus 1$\frac{1}{4}$. poſterior autem 58$\frac{3}{4}$. vt in ſcholio præcedenti patuit.

67 *Tres numeros inuenire, ita vt, cum vnuſquiſque à ſumma reliquorum duorum datam partem acceperit, fiant tres numeri æquales.* LXVII.

FAC, vt ſi primus ſumat à ſumma reliquorum duorum $\frac{1}{3}$. Secundus à ſumma reliquorum duorum $\frac{1}{4}$. Et tertius à ſumma duorum reliquorū $\frac{1}{5}$. fiant tres numeri æquales. Ponatur primus 1 2ℰ. ſumma vero reliquorum duorum ponatur numerus 3. vt habeat $\frac{1}{3}$. ſine fractione. Si igitur primus à duobus reliquis accipiat $\frac{1}{3}$. habebit 1 2ℰ + 1. Et quia ſecundus à ſumma reliquorum duorum accipiens $\frac{1}{4}$. debet etiam facere 1 2ℰ + 1. diuidenda erit ſumma omnium trium, nimirum 1 2ℰ + 3. in duas partes, quarum poſterior cum $\frac{1}{4}$. prioris faciat 1 2ℰ + 1. Poſterior enim pars erit ſecundus numerus, & pars prior ſumma primi ac tertij. Diuiſio autem hæc fiet, vt in ſcholio ænigmatis 65. docui, hoc modo. Dempto numero 1 2ℰ + 1. qui effici debet, ex ſumma 1 2ℰ + 3. omniū trium, diuidatur reliquus numerus 2. per denominatorem partis quartæ, vno minus, nimirum per 3. & quotiens $\frac{2}{3}$. per denominatorem 4. multiplicetur. Procreatus enim numerus $\frac{2}{3}$. erit prior pars, quæ ablata ex ſumma 1 2ℰ + 3. omnium trium, relinquet partem poſteriorē 1 2ℰ + $\frac{1}{3}$. pro ſecundo numero. Huic enim ſi addatur $\frac{1}{4}$. prioris partis $\frac{8}{3}$. (quæ eſt ſumma primi ac tertij) nimirum $\frac{4}{3}$. fiet numerus 1 2ℰ + 1.

Rurſus quia tertius ſumens $\frac{1}{5}$. à ſumma primi & ſecundi debet etiam facere 1 2ℰ + 1. diuidenda erit ſumma 1 2ℰ + 3. omnium trium eodem modo in duas partes, quarum poſterior cum $\frac{1}{5}$. prioris faciat 1 2ℰ + 1. quod ita fiet. Dempto numero 1 2ℰ + 1. qui effici debet, ex ſumma 1 2ℰ + 3. omnium trium, diuidatur reliquus numerus 2. per denominatorem partis quintæ, vno minus, hoc eſt, per 4. Et quotiens $\frac{2}{4}$. vel $\frac{1}{2}$. in denominatorem 5. ducatur. Productus enim numerus $\frac{5}{2}$. erit prior pars, ſumma videlicet primi ac ſecundi. quæ pars ablata ex ſumma 1 2ℰ + 3. omnium trium, reliquam faciet partem poſteriorem 1 2ℰ + $\frac{1}{2}$. Hæc enim accipiens $\frac{1}{3}$. ſummæ primi ac ſecundi, quæ fuit $\frac{5}{2}$. hoc eſt, $\frac{1}{2}$. faciet quoque 1 2ℰ + 1. Reliquum iam eſt, vt omnes tres numeri inuenti 1 2ℰ + $\frac{1}{3}$. 1 2ℰ + $\frac{1}{2}$. conficiant ſummam 1 2ℰ + 3. omnium trium. Faciunt autem 3 2ℰ + $\frac{5}{6}$. Eſt ergo æquatio inter 1 2ℰ + 3. & 3 2ℰ + $\frac{5}{6}$. Et ablata 1 2ℰ. vtrinque, inter 3. & 2. 2ℰ + $\frac{5}{6}$. Ablatisque $\frac{5}{6}$. vtrinque, inter 2$\frac{5}{6}$. & 2 2ℰ. Diuiſis igitur 2$\frac{1}{6}$. per 2. fiet 1 2ℰ $\frac{13}{12}$. pro primo numero quæſito. qui poſitus fuit 1 2ℰ. Secundus qui inuentus fuit 1 2ℰ + $\frac{1}{3}$. erit $\frac{8}{12}$. ſiue $\frac{7}{12}$. Tertius denique, quem inuenimus eſſe 1 2ℰ + $\frac{1}{2}$. erit $\frac{19}{24}$. hoc eſt, $\frac{19}{12}$. Et ſi neglexeris denominatores, erunt tres numeri quæſiti integri 13. 17. 19. problema propoſitum abſoluentes. Nam & primus 13. cum $\frac{1}{3}$. ſecundi & tertij, id eſt, cum 12. & ſecundus 17. cum $\frac{1}{4}$. primi & tertij, hoc eſt, cum 8. & tertius 19. cum $\frac{1}{5}$. primi & ſecundi, nimirum cum 6. facit 25.

Hic autem ſumma trium numerorum inuentorum 49. non eſt tripla numeri 25. quem vnuſquiſque facit: quemadmodum in ænigmate 63. fiebat.

68 *Quatuor numeros inuenire ea conditione, vt cum vnuſquiſque à ſumma reliquorum trium datam partem acceperit, fiant quatuor numeri æquales.* LXVIII.

STATVAMVS, vt ſi primus ſumat $\frac{1}{3}$. ſummæ aliorum trium: Secundus $\frac{1}{4}$. ſummæ aliorum trium: Tertius $\frac{1}{5}$. ſummæ trium reliquorum: Quartus denique $\frac{1}{6}$. ſummæ aliorum trium; quatuor numeri fiant æquales. Ponatur primus 1 2ℰ. & ſumma aliorum trium numerus 3. habens $\frac{1}{3}$. ſine fractione. Primus igitur ſumens $\frac{1}{3}$. huius ſummæ, videlicet 1. faciet 1 2ℰ + 1. Et quia ſecundus cum $\frac{1}{4}$. ſummæ reliquorum trium debet etiam facere 1 2ℰ + 1. diuidenda erit ſumma 1 2ℰ + 3 omnium quatuor in duas partes, quarum poſterior cum $\frac{1}{4}$. prioris faciat 1 2ℰ + 1. ſicut in præcedenti problemate. Poſterior enim pars erit ſecundus numerus, & prior ſumma primi, tertij, & quarti. Inuenta autem fuit in accedenti problemate pars poſterior 1 2ℰ + $\frac{1}{3}$. pro ſecundo numero.

DEINDE quia tertius ſumens $\frac{1}{5}$. ſummæ primi, ſecundi, & quarti debet ſimiliter conficere 1 2ℰ + 1. diuidenda rurſum erit ſumma 1 2ℰ + 3. omnium quatuor in duas partes, quarum poſterior cum $\frac{1}{5}$. prioris faciat 1 2ℰ + 1. Inuenta fuit in præcedenti problemate poſterior pars 1 2ℰ + $\frac{1}{3}$. pro tertio numero.

POSTREMO quia quartus accipiens $\frac{1}{6}$. ſummæ reliquorum trium debet etiam facere 1 2ℰ + 1. diuidemus ſummam 1 2ℰ + 3. omnium quatuor in duas partes, quarū poſterior cum $\frac{1}{6}$. prioris faciat 1 2ℰ + 1. quod per ſcholium ænigmatis 65. ita fiet. Dempto numero 1 2ℰ + 1. qui effici debet, ex ſumma 1 2ℰ + 3. omnium, quatuor, diuidatur reliquus numerus 2. per denominatorem partis $\frac{1}{6}$. vno minus, nimirum per 5. & quotiens, $\frac{2}{5}$. in ipſum denominatorem 6. ducatur. Productus enim numerus $\frac{12}{5}$. erit prior pars, ſumma ſcilicet primi

ſecundi ac tertij. quæ pars ſubtracta ex ſumma 1ℛ+3. omnium quatuor, reliquam faciet partem poſteriorẽ 1ℛ+$\frac{3}{5}$. Hæc enim cum $\frac{1}{6}$. prioris, hoc eſt, cum $\frac{2}{5}$ faciet 1ℛ+1. Reliquum iam eſt, vt omnes 4. numeri inuenti 1ℛ. 1ℛ+$\frac{1}{3}$. 1ℛ+$\frac{1}{2}$. 1ℛ+$\frac{3}{5}$. integrent ſummam 1ℛ+3. omnium quatuor. Faciunt autem 4ℛ+$\frac{43}{30}$. Eſt igitur æqualitas inter 1ℛ+3. & 4ℛ+$\frac{43}{30}$. Ablataq; 1ℛ vtrinque, inter 3 & 3ℛ+$\frac{43}{30}$. Ablatiſq; $\frac{43}{30}$. vtrinque, inter 1$\frac{17}{30}$. & 3ℛ Diuiſis ergo 1$\frac{17}{30}$. ſiue $\frac{47}{30}$. per 3. fiet 1ℛ $\frac{47}{90}$. pro primo numero quæſito, quem poſuimus eſſe 1ℛ. Secundus inuentus 1ℛ+$\frac{1}{3}$. erit $\frac{231}{270}$ hoc eſt, $\frac{77}{90}$. Tertius aũt inuentus 1.ℛ+$\frac{1}{2}$. erit $\frac{184}{180}$. id eſt $\frac{92}{90}$. Quartus deniq; inuẽtus 1ℛ+$\frac{3}{5}$. erit $\frac{505}{450}$. ſiue $\frac{101}{90}$. Et ſi abieceris denominatores, inuẽti erunt quatuor numeri integri 47. 77. 92. 101. qui quæſtioni ſatisfaciunt. Nam & primus 47. cum $\frac{1}{3}$. ſecundi, tertij, & quarti, id eſt, cum 90. & ſecundus 77. cum $\frac{1}{4}$. primi, tertij, & quarti, hoc eſt, cum 60. & tertius 92. cum $\frac{1}{5}$. primi, ſecundi, ac quarti, id eſt, cum 45. & quartus 101. cum $\frac{1}{6}$. primi, ſecundi, & tertij, videlicet cum 36. facit 137.

Hic etiam ſumma quatuor numerorum inuentorum 317. quadrupla non eſt numeri 137. quem vnuſquiſque facit, quemadmodum in ænigmate 64. fiebat.

SCHOLIVM.

LXIX. *NON aliter inuenientur 5. numeri, vel 6. vel plures ita vt ſi vnuſquiſque à ſumma reliquorum acceperit datam partem, fiant totidem numeri æquales.*

69 *Tres numeros inuenire ea lege, vt ſi vnuſquiſque proxime inſequenti det imperatam ſui partem, poſtquam mutuo dederunt, & acceperunt, ſinguli habeant eundem numerum datum.*

SINT inueniendi tres numeri, vt ſi primus det $\frac{1}{3}$. ſecundo; ſecundus $\frac{1}{4}$. tertio; & tertius $\frac{1}{5}$. primo, fiant tres numeri 30. 30. 30. In ænigmate 63. inuenimus tres numeros eadem conditione, niſi quod tres numeros æquales, qui fieri debent, non determinauimus ad certum numerum, vt hic. Ergo inuentis, per ænigma 63. tribus numeris 6. 4. 5. qui illi ænigmati ſatisfaciunt; vt inueniantur alij tres implentes conditiones huius ænigmatis: ponantur pro tribus numeris tot radices, quot vnitates ſunt in tribus numeris inuentis, nimirum 6ℛ. 4ℛ. 5ℛ. Si ergo primus 6ℛ det $\frac{1}{3}$ ſupererunt 4ℛ. & ſi à tertio 5ℛ. accipiat $\frac{1}{5}$. habebit 5ℛ. qui numerus æqualis debet eſſe imperato numero 30. Quocirca diuiſis 30. per 5. fiet 1ℛ. 6. ac proinde primus 6ℛ. erit 36. ſecundus 4ℛ. erit 24. & tertius 5ℛ erit 30. Nam primus 36. amittens $\frac{1}{3}$. habebit 24. & accipiens $\frac{1}{5}$. tertij, nimirum 6. habebit 30. Ita quoque ſecundus 24. dans $\frac{1}{4}$ habebit 18. & recipiens $\frac{1}{3}$. primi, nimirum 12 habebit 30. Ac tandem tertius 30. abijciens $\frac{1}{5}$. habebit 24. & reſumens $\frac{1}{4}$. à ſecundo, nimirum 6. habebit quoque 30. vt alij.

Aliter. Quoniam ſinguli conficere debent 30. erunt omnes tres numeri quæſiti 90. At tres numeri poſiti 6ℛ. 4ℛ. 5ℛ. faciunt 15ℛ. qui numerus æqualis eſſe debet numero 90. Diuiſis ergo 90. per 15. fiet 1. ℛ. 6. veluti prius.

SCHOLIVM.

AD eundem modum in ægnimate 64. 67. & 68, determinari poterit numerus, quem ſinguli conficere debent. Vt ſi in præcedenti problemate 68. quilibet quatuor numerorum debeat efficere 100. Quoniam 4. numeri inuenti fuerunt 47. 77. 92. 101. Ponemus 4. numeros eſſe 47ℛ. 77ℛ. 92ℛ. 101ℛ. facietque primus cum $\frac{1}{3}$. reliquorum trium, nimirum cum 90ℛ. numerorum 137ℛ. qui æqualis eſſe debet imperato numero 100. Diuiſis ergo 100. per 137. fiet 1ℛ. $\frac{100}{137}$. Igitur primus numerus 47ℛ. erit $\frac{4700}{137}$. Secundus $\frac{7700}{137}$. Tertius $\frac{9200}{137}$. & quartus $\frac{10100}{137}$. qui conditionem problematis implent, dummodo denominatores non abijciantur. Nam primus $\frac{4700}{137}$. cum $\frac{1}{3}$. reliquorum trium, id eſt, cum $\frac{9000}{137}$. facit $\frac{13700}{137}$. videlicet 100. Sic etiam ſecundus $\frac{7700}{137}$. cum $\frac{1}{4}$. reliquorum trium, id eſt, cum $\frac{6000}{137}$. facit $\frac{13700}{137}$. hoc eſt, 100. Eundem numerum 100. facit tam tertius cum $\frac{1}{5}$. reliquorum trium quam quartus cum $\frac{1}{6}$. trium reliquorum.

PORRO in ænigmate 68. & 67. ſi vnuſquiſque numerorum facere debeat certum quendam numerum determinatum, locum non habebit ſecunda ſolutio præſentis ænigmatis 69. quia ſumma trium numerorum in 67. ænigmate, vel 4. numerorum in 68. ænigmate inuentorum, non eſt tripla, vel quadrupla numeri, quem quiſque conficit, poſtquam imperata impleuerit, vt ibi diximus. Solum ergo adhiberi poterit in ænigmate 63. vt in hoc ænigmate 69. factum eſt: nec non in ænigmate 64. vt iam iam videbis.

Sint enim inueniendi 5. numeri, vt ſi primus dederit $\frac{1}{3}$. ſecundo, acceperitque $\frac{1}{5}$ à quinto: Secundus vero dederit $\frac{1}{2}$. tertio, acceperitque $\frac{1}{3}$. à primo: Tertius vero dederit $\frac{1}{7}$. quarto, ſumpſeritque $\frac{1}{2}$. à ſecundo: Quartus autem dederit $\frac{1}{6}$. quinto acceperitque $\frac{1}{7}$. à tertio: Quintus denique dederit $\frac{1}{5}$. primo, acceperitque $\frac{1}{6}$. à quarto; fiant tandem quinque numeri æquales, quorum quiſque 1205 vnitates contineat. In ſcholio ænigmatis 64. inuenti ſunt 5. numeri ea conditione, quam hic expreſſimus, 288. 290. 112. 270. 245. quorum vnuſquiſque, ſi imperata impleuerit, habet 241. Debet autem, vt hic iubetur, quilibet habere 1205. Ponantur ergo quinque numeri, 288ℛ. 290ℛ. 112ℛ. 270ℛ. 245ℛ. Si hi numeri imperata executi fuerint, habebit vnuſquiſque 241ℛ vt dictum eſt, qui numerus æqualis eſſe debet dato numero 1205. Diuiſis igitur 1205. per 241. fiet 1ℛ. 5. Igitur primus numerus poſitus 288ℛ. erit 1440. Secundus poſitus 290ℛ. erit 1450. Tertius poſitus 112ℛ. erit 560. Quartus poſitus 270ℛ. erit 1350. Quintus denique poſitus 245ℛ. erit 1225. Nam ſi imperata fecerint hi 5. numeri, deprehendes, vnumquemque habere 1205.

Aliter. Quoniam vnuſquiſque facere debet 1205. erit ſumma omnium quinque, 6025. Sed quinque numeri poſiti 288ℛ. 290ℛ. 112ℛ. 270ℛ. 245ℛ. faciunt ſummam 1205ℛ. Diuiſis igitur 6025 per 1205. fiet 1. ℛ. 5. veluti prius.

70 *Datum numerum in tres, quatuor, vel plures partiri ea conditione, vt ſi quiſque proxime ſequenti* LXX.
det imperatam ſui partem, poſtquam mutuo dederint, & acceperint, fiant tres numeri, vel quatuor, vel plures æquales.

HOC ænigma à præcedenti non differt. Nam ſi datus numerus in tot partes æquales diſtribuatur, quot in ænigmate exprimuntur; inueniendi erunt per ænigma præcedens, eiuſque ſcholium, (adhibito tamen ænigmate 63. & 64. eiuſque ſcholio) totidem numeri, qui propoſitam conditionem ſeruantes faciant totidem numeros æquales vni parti numeri dati, qui in totidem partes fuit diſtributus. In hos enim numeros inuentos datus numerus diuidendus eſt, quippe cum omnes ſimul faciant ſummam triplam, vel quadruplam numeri, quem vnuſquiſque inuentorum facere debet, vt dictum eſt.

V.g. Si numerus 90. diſtribendus ſit in tres, vt cum primus dederit $\frac{1}{3}$. ſecundo; ſecundus $\frac{1}{4}$. tertio; & tertius $\frac{1}{5}$. primo fiant tres numeri æquales: diſtribuatur datus numerus 90. in tres partes æquales 30. 30. 30. ac per ænigma 69. reperiantur tres numeri, vt ſeruata conditione præſcripta, vnuſquiſque faciat 30. Inuenti numeri erunt 36. 24. 30. atque in hos diſtribuendus eſt datus numerus 90. Nam ſi præſcriptam legem obſeruent, faciet vnuſquiſque 30.

PARI ratione, ſi numerus 6025. diſtribuendus ſit in quinque partes, vt cum prima dederit $\frac{1}{3}$ ſecundæ; ſecunda $\frac{1}{2}$. tertiæ; tertia $\frac{1}{7}$. quartæ; quarta $\frac{1}{6}$. quintæ: & quinta $\frac{1}{5}$. primæ, ſinguli habeant eundem numerum: diſtribuendus erit datus numerus in quinque æquales partes 1205. 1205. 1205. 1205. 1205. & per ſcholium præcedentis ænigmatis (adiuuante ſcholio ænigmatis 64.) inueniendi quinque numeri, vt ſeruata lege præſcripta, vnuſquiſque faciat 1205. qui quidem ſunt, vt in proximo ſcholio patuit, 1440. 1450. 560. 1350. 1225. Atque in hos diſtribuendus eſt datus numerus 6025.

71 *Datis duobus numeris, alium quendam inuenire, qui vtrumque datum multiplicans faciat maio-* LXXI.
rem quidem quadratum, minorem vero latus eius quadrati.

SINT dati duo numeri 200. & 5. ſitque numerus, quem quærimus, 1ℛ. Ex 1ℛ. in 200. fit numerus 200ℛ. Et ex 1ℛ in 5. fit numerus 5ℛ. qui debet latus eſſe illius: atque adeo in ſe ductus faciet numerum æqualem 200ℛ. Facit autem numerus 5ℛ. in ſe 25ȝ. Eſt ergo æquatio inter 200ℛ. & 25ȝ. Diuiſis igitur 200. per 25. fiet 1ℛ. 8. numerus quæſitus (quod numeri Coſſici ſint collaterales.) Hic enim multiplicans 200. facit quadratum 1600. cuius latus eſt numerus 40. ex 8. in 5. productus.

Si numeri dati ſint 20. & 15. reperietur numerus $\frac{4}{45}$. Nã ſi ponatur numerus quæſitus 1ℛ. fiunt ex 1ℛ in 20. & 15. numeri 20ℛ. & 15ℛ. Et ex 15ℛ in ſe fit numerus 225ȝ. qui æqualis debet eſſe quadrato 20ℛ. Diuiſis igitur 20. per 225. fit 1ℛ. $\frac{20}{225}$. ſiue $\frac{4}{45}$ numerus quæſitus. Hic enim multiplicans 20. & 15. facit $\frac{80}{45}$. ſiue $\frac{16}{9}$. quadratum, cuius latus eſt numerus $\frac{60}{45}$. ſiue $\frac{4}{3}$ productus ex $\frac{4}{45}$. in 15.

72 *Duos numeros inuenire, ita vt ſumma ex ipſis confecta, & exceſſus quadratorum, qui ex ipſis fiunt* LXXII.
datos numeros efficiant: dummodo datus quadratorum exceſſus minor ſit, quam datæ ſummæ quadratus.

SIT eorum ſumma data 20. & exceſſus quadratorum datus 80. qui exceſſus minor eſt quadrato 400. datæ ſummæ 20.

Ponatur primus numerus 1ℛ. ideoque ſecundus 20 — 1ℛ. vt eorum ſumma ſit 20. Quadrati eorum 1ȝ. & 400 — 40ℛ + 1ȝ. cum ex ductu 20 — 1ℛ. in 20 — 1ℛ. fiat numerus 400 — 40ℛ + 1ȝ. vt in hac formula apparet.

```
        20 — 1ℛ
        20 — 1ℛ
  ----------------
     — 20ℛ + 1ȝ
  400 — 20ℛ
  ----------------
  400 — 40ℛ + 1ȝ
```

Detracto illo quadrato ex hoc, remanet exceſſus 400 — 40ℛ. æqualis 80. Additis 40ℛ. vtrinque, erit æquatio inter 400. & 80 + 40ℛ. Ablatiſque 80. vtrinque, inter 320. & 40ℛ. Diuiſis ergo 320. per 40. fiet 1ℛ. 8, primus numerus, ſecundus vero poſitus 20 — 1ℛ. erit 12. Summa numerorum 8. & 12. eſt 20. & quadratorum 64. & 144. exceſſus 80.

QVOD ſi detur eadem ſumma numerorum 20. & exceſſus quadratorum 400. qui minor non eſt quadrato 400. qui ex ſumma fit: erit quæſtio impoſſibilis. Nam poſito primo numero 1ℛ. & ſecundo 20 — 1ℛ. erunt rurſus eorum quadrati 1ȝ. & 400 — 40ℛ + 1ȝ. quorum exceſſus 400 — 40ℛ. æqualis debet eſſe numero 400. quod fieri non poteſt.

DETVR rurſus numerorum 20. & exceſſus quadratorum item 20. Poſito primo numero 1ℛ. & ſecundo 20 — 1ℛ. erit eorum ſumma 20. & exceſſus quadratorum 400 — 40ℛ. æqualis 20. Additis ergo vtrinque 40ℛ. erit æquatio inter 20 + 40ℛ. & 400. Ablatiſque 20. vtrinque, inter 380. & 40. ℛ Diuiſis ergo 380. per 40. fiet 1ℛ. 9$\frac{1}{2}$. primus numerus. Secundus ergo erit 10$\frac{1}{2}$. quorum ſumma 20. & exceſſus quadratorum $\frac{441}{4}$. $\frac{361}{4}$. numerus $\frac{80}{4}$. hoc eſt, 20.

73 *Datum numerum in duos diuidere, vt exceſſus quadratorum, qui ex ipſis fiunt, ſit quilibet nume-* LXXIII.
rus minor quadrato dati numeri.

SIT datus numerus 20. diuidendus in duos, vt exceſſus quadratorum ex ipſis factorum ſit 80. Hoc ænigma à præcedenti diuerſum non eſt. Nam ſi reperiantur duo numeri, quorum ſumma datus numerus 20. & exceſſus quadratorum ex ipſis factorum 80. erit ſumma data 20. in illos duos numeros diſtribuenda, &c.

LXXIIII. 74 *Duos numeros inuenire in data proportione, ita vt summa quadratorum, qui ex ipsis fiunt, ad excessum numerorum inuentorum proportionem habeat datam.*

SINT inueniendi duo numeri in proportione tripla, & summa quadratorum ex ipsis procreatorum ad summam inuentorum numerorum proportionem habeat decuplam. Ponatur minor numerus 1☉. maior 3☉. ad illum triplus. Excessus est 2☉. Et quadratorum 1▢. 9▢. summa 10▢. decupla ad 2☉. Ergo æquatio est inter 10▢. & 20☉. Diuisis igitur 20. per 10. fiet 1☉. 2. minor numerus, (quia numeri Cossici collaterales sunt) maiorque erit 6. Excessus eorum est 4. & summa quadratorum 4, 36. est 40. qui numerus excessus 4. decuplus est.

LXXV. 75 *Duos numeros in data proportione reperire, ita vt excessus quadratorum ipsorum ad excessum inuentorum numerorum proportionem habeat datam.*

NVMERI quæsiti habeant proportionem triplam, & ad eorum excessum habeat excessus quadratorum proportionem duodecuplam. Ponatur minor numerus 1☉. maior 3☉. illius triplus. Excessus eorum est 2☉. Quadratorum 1▢. & 9▢. est 8▢. duodecuplam habens proportionem ad 2☉. Igitur æquatio erit inter 8▢. & 24☉. Diuisis ergo 24. per 8. fiet 1☉. 3. minor numerus (quod collaterales sint numeri Cossici) maiorque erit 9. Excessus eorum est 6. Et quadratorum 9. & 81. excessus 72. ad 6. proportionem habet duodecuplam.

LXXVI. 76 *Duos numeros interuenire in data proportione, ita vt numerus ex vno in alterum procreatus ad eorum summam datam habeat proportionem.*

HABEANT quæsiti numeri proportionem quadruplam, & numerus ex vno in alterum genitus ad eorum summam, proportionem sesquiplam. Ponatur minor 1☉. maior 4☉. illius quadruplus. Summa eorum est 5☉. Et ex 1☉. in 4☉. fit numerus 4▢. qui septuplam proportionem habere debet ad 5☉. Ergo æquatio erit inter 4▢. & 35☉. Diuisisque 35. per 4. fiet 1☉. $\frac{35}{4}$. minor numerus quod numeri Cossici sint collaterales. Maior ergo erit $\frac{140}{4}$. Summa eorum est $\frac{175}{4}$. Ex $\frac{35}{4}$. in $\frac{140}{4}$. fit numerus $\frac{4900}{16}$. qui ad $\frac{175}{4}$ proportionem habet septuplam.

LXXVII. 77 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt numerus ex vno in alterum procreatus ad eorum excessum datam habeat proportionem.*

HABEANT quæsiti numeri proportionem quadruplam, & numerus ex vno in alterum productus ad eorum excessum proportionem septuplam. Ponatur minor 1☉. & maior 4☉. illius quadruplus. Excessus eorum est 3☉. Et productus ex 1☉. in 4☉. est 4▢. qui septuplam habere debet proportionem ad 3☉. Ergo æquatio erit inter 4▢. & 21☉. Diuisisque 21. per 4. fiet 1☉. $\frac{21}{4}$. minor numerus. quod numeri Cossici collaterales sint. Maior ergo erit $\frac{84}{4}$. Excessus eorum est $\frac{63}{4}$. Ex $\frac{21}{4}$. in $\frac{84}{4}$. fit numerus $\frac{1764}{16}$. quæ ad $\frac{63}{4}$. proportionem habet septuplam.

LXXVIII. 78 *Duos numeros inuenire in data proportione, ita vt quadratus minoris ad maiorem numerum proportionem habeat datam.*

HABEANT numeri quæsiti proportionem triplam, & quadratus minoris ad maiorem, sextuplam. Ponatur minor 1☉. & maior 3☉. illius triplus. Quadratus minoris est 1▢. qui sextuplus esse debet maioris numeri 3☉. Ergo æquatio est inter 1▢. & 18☉. Diuisisque 18. per 1. fiet 1☉. 18. minor numerus, quod numeri Cossici sint collaterales. Maior ergo erit 54. Quadratus minoris, nimirum 324. ad maiorem 54. proportionem habet sexcuplam.

LXXIX. 79 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt quadratus minoris ad Quotientem, si maior per minorem diuidatur, proportionem habeat quamcunque datam.*

HABEANT numeri quæsiti proportionem quadruplam, at quadratus minoris ad Quotientem, diuiso maiore per minorem, duplam. Ponantur quæsiti numeri 1☉. 4☉. Diuiso maiore per minorem, fit Quotiens 4. ad quem 1▢. quadratus minoris proportionem debet habere duplam: ita vt æquatio sit inter 1▢. & 8. Diuisis 8. per 1. fit 1▢. 8. & 1☉. √8. minor numerus. Maior ergo erit √128. ad √8. quadruplus. Diuiso maiore per minorem, fit Quotiens √16. id est, 4. ad quem 8. quadratus minoris proportionem habet duplam.

LXXX. 80 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt quadratus minoris ad eorum summam habeat proportionem datam quamlibet.*

HABEANT quæsiti numeri proportionem triplam, & quadratus minoris sexcuplam ad eorum summam. Ponatur minor 1☉. & maior 3☉. illius triplus. Quadratus minoris est 1▢. qui sexcuplam proportionem habere debet ad 4☉. summam videlicet amborum. Ergo æquatio erit inter 1▢. & 24☉. Diuisisque 24. per 1. fiet 1☉. 24. quod numeri Cossici sint collaterales. Numeri ergo quæsiti sunt 24. 72. in proportione tripla. Et quadratus minoris 576. sexcuplam proportionem habet ad 96. summam ex ambobus collectam.

81 Duos

81 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt quadratus minoris ad eorum excessum habeat datam proportionem.* LXXXI.

HABEANT quæsiti numeri proportionem triplam, & quadratus minoris sexcuplam ad eorum excessum. Ponatur minor 1☉. & maior 3☉. illius triplus. Excessus illorum est 2☉. ad quem quadratus 1▢. minoris labere debet sexcuplam proportionem. Ita vt æquatio sit inter 1. ▢. & 12☉. Diuisis ergo 12. per 1. fiet 12☉. 12. propterea quod numeri Cossici collaterales sunt. Numeri igitur sunt quæsiti 12. 36. triplam habentes proportionem. Et quadratus minoris, videlicet 144. ad 24. excessum eorum sexcuplus est.

82 *Duos numeros in data proportione inuenire. ita vt quadratus maioris ad minorem habeat proportionem datam.* LXXXII.

HABEANT quæsiti numeri proportionem triplam, & quadratus maioris ad minorem, sexcuplam. Ponatur minor 1☉. & maior 3☉. illius triplus. Quadratus maioris 9▢. ad minorem 1☉. proportionem habere debet sexcuplam. Erit ergo æquatio inter 9▢. & 6☉. Diuisisque 6. per 9. fiet 1☉. $\frac{6}{9}$ siue $\frac{2}{3}$. quod numeri Cossici sint collaterales. Numeri ergo quæsiti sunt $\frac{2}{3}$. $\frac{6}{3}$. proportionem habentes triplam. Et quadratus maioris, nimirum $\frac{36}{9}$. proportionem sexcuplam habet ad minorem $\frac{2}{3}$. siue ad $\frac{6}{9}$.

83 *Duos numeros in data proportione inuenire, vt quadratus maioris ad Quotientem, diuiso maiore per minorem, proportionem habeat datam quamcunque.* LXXXIII

HABEANT quæsiti numeri proportionem quadruplam, at quadratus maioris ad Quotientem, diuiso maiore per minorem, duplam. Ponantur numeri quæsiti 1☉. 4☉. Diuiso hoc per illum, fit Quotiens 4. ad quem 16▢. quadratus maioris proportionem debet habere duplam: ita vt æquatio sit inter 16▢. & 8. Diuisis 8. per 16. fit $\frac{1}{2}$▢. & 1☉. √$\frac{1}{2}$. minor numerus. Maior ergo erit √8. illius quadruplus. Diuiso maiore per minorem, fit Quotiens √16. id est, 4. ad quem 8. quadratus maioris proportionem habet duplam.

84 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt quadratus maioris ad eorum summam habeat datam proportionem.* LXXXIV

HABEANT numeri quæsiti proportionem triplam, & quadratus maioris sexcuplam ad eorum summam. Ponatur minor 1☉. & maior 3☉. illius triplus. Quadratus maioris 9▢. sexcuplus esse debet ad eorum summam 4☉. Est igitur æquatio inter 9▢. & 24☉. Diuisisque 24. per 9. fiet 1☉. $\frac{24}{9}$. vel $\frac{8}{3}$. quod numeri Cossici sint collaterales. Ac proinde numeri quæsiti triplam habentes proportionem erunt $\frac{8}{3}$. $\frac{24}{3}$. Et quadratus maioris $\frac{576}{9}$. sexcuplus est ad $\frac{32}{9}$. eorum summam: hoc est, ad $\frac{46}{9}$.

85 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt quadratus maioris ad eorum excessum habeat proportionem datam.* LXXXV.

HABEANT numeri quæsiti proportionem triplam, & quadratus maioris ad eorum excessum, decuplam. Ponatur minor 1☉. & maior 3☉. illius triplus. Excessus eorum est 2☉. ad quem quadratus maioris 9▢. decuplus esse debet. Est igitur æquatio inter 9▢. & 20☉. Diuisisque 20. per 9. fiet 1☉. $\frac{20}{9}$. propterea quod numeri Cossici collaterales sunt. Numeri ergo quæsiti sunt $\frac{20}{9}$. $\frac{60}{9}$. in proportione tripla. Excessus eorum est $\frac{40}{9}$. ad quem decuplus est quadratus maioris $\frac{3600}{81}$. siue $\frac{400}{9}$.

86 *Datis duobus numeris, alium tertium inuenire, ita vt omnium trium duo quicunque simul additi, & in reliquum multiplicati, tres numeros constituant in excessu æquali, hoc est, Arithmeticæ proportionales.* LXXXVI

DATI duo numeri sint 3. & 5. ponaturque tertius inuentus 1☉. Hic cum 3. facit 1☉. + 3. quæ summa ducta in reliquum 5. facit 5☉. + 15. vnum numerum. Deinde 1☉. cum 5. facit 1☉. + 5. quæ summa ducta in reliquum 3. facit 3☉. + 15. alterum numerum. Denique ex 3. & 5. fit numerus 8. qui ductus in tertium 1☉. facit 8☉. tertium numerum. Opus est iam, hos tres numeros 5☉. + 15. 3☉. + 15. & 8☉. esse Arithmetice proportionales. quod tribus modis fieri potest. Aut enim maximus est 5☉. + 15. & medius 3☉. + 15. & minimus 8☉. Aut maximus erit 5☉. + 15. medius 8☉. & minimus 3 + 15☉. Aut denique maximus erit 8☉. medius 5☉. + 15. & minimus 3☉. + 15. neque enim maximus esse potest 3☉. + 15. cum minor sit, quam 5☉. + 15.

SINT primum 5☉. + 15. 3☉. + 15. 8☉. Arithmetice proportionales. Igitur (vt lib. 5. Eucl. in 4. proprietate trium numerorum Arithmetice proportionalium diximus) summa extremorum 13☉. + 15. æqualis erit duplo medij, hoc est, numero 6☉. + 30. Ablatisq; 6☉. vtrinque, æquatio erit inter 7☉. + 15. & 30. Ablatisque rursum 15. vtrinque, inter 7☉. & 15. Diuisis ergo 15. per 7. fiet 1☉. $\frac{15}{7}$. numerus quæsitus. Vel si dicti tres numeri sunt Arithmetice proportionales, habebunt eundem excessum. Sed 5☉. + 15. excedit 3☉. + 15. numero 2☉. Et 3☉. + 15. excedit 8☉. numero 15 − 5☉. vt ex regula subtractionis patet. Est ergo æqualitas inter 2☉. & 15 − 5☉. Additisque 5☉. vtrinque, inter 7☉. & 15. fietque rursus 1☉. $\frac{15}{7}$. Iam $\frac{15}{7}$. cum 3. faciunt 3 $\frac{15}{7}$. hoc est, $\frac{36}{7}$. qui numerus ductus in reliquum 5 facit $\frac{180}{7}$. primum numerum. Deinde ex $\frac{15}{7}$. & 5 fit summa 5 $\frac{15}{7}$. hoc est, $\frac{50}{7}$; quæ ducta in 3. reliquum numerum facit $\frac{150}{7}$. numerum medium. Denique ex 3.

& 5. fit summa 8. quæ ducta in reliquum numerum $\frac{15}{7}$. facit $\frac{120}{7}$. tertium numerum. Habentque hi tres numeri $\frac{180}{7}$. $\frac{150}{7}$. $\frac{120}{7}$. eundem excessum $\frac{30}{7}$. siue $4\frac{2}{7}$.

SINT deinde $5\mathcal{Q}+15$. $8\mathcal{Q}$. $3\mathcal{Q}+15$. Arithmetice proportionales. Igitur summa extremorum $8\mathcal{Q}+30$. æqualis erit duplo medij, numero videlicet $16\mathcal{Q}$. Ablatisque $8\mathcal{Q}$ vtrinque, æquatio erit inter 0. & $8\mathcal{Q}$. Diuisisque 30 per 8. fiet $12\mathcal{Q}$. $\frac{30}{8}$ hoc est $\frac{15}{4}$. Vel dicti tres numeri habebunt eundem excessum. Est autem inter $5\mathcal{Q}+15$ & $8\mathcal{Q}$. excessus $15-3\mathcal{Q}$. At inter $8\mathcal{Q}$. & $3\mathcal{Q}+15$. excessus est $5\mathcal{Q}-15$. Est ergo æquatio inter $15-3\mathcal{Q}$. & $5\mathcal{Q}-15$. Additisque 15. vtrinque, inter 30 — $3\mathcal{Q}$ & $5\mathcal{Q}$. Additisque rursum $3\mathcal{Q}$ vtrinque, inter 30 & $8\mathcal{Q}$. fietque rursum $12\mathcal{Q}$. $\frac{30}{8}$. siue $\frac{15}{4}$. Iam ex $\frac{15}{4}$ & 3. fit summa $3\frac{15}{4}$. siue $\frac{27}{4}$. quæ ducta in reliquum numerum 5 facit $\frac{135}{4}$. primum numerum. Deinde ex $\frac{15}{4}$ & 5. fit summa $5\frac{15}{4}$. siue $\frac{35}{4}$ quæ ducta in reliquum numerum 3 facit $\frac{105}{4}$. numerum tertium. Denique ex 3 & 5 fit summa 8. quæ ducta in reliquum numerum $\frac{15}{4}$. facit $\frac{120}{4}$. medium numerum: Habentque hi tres numeri, $\frac{135}{4}$. $\frac{120}{4}$. $\frac{105}{4}$. eundem excessum $\frac{15}{4}$. siue $3\frac{3}{4}$.

POSTREMO sint $8\mathcal{Q}$. $5\mathcal{Q}+15$. $3\mathcal{Q}+15$. Arithmetice proportionales. Igitur summa extremorum $11\mathcal{Q}+15$. æqualis erit duplo medij, hoc est, numero $10\mathcal{Q}+30$. Ablatisque $10\mathcal{Q}$. vtrinque, æquatio erit inter $1\mathcal{Q}+15$. & 30. Ablatisque rursum 15 vtrinque, inter $1\mathcal{Q}$. & 15. fietque $1\mathcal{Q}$. 15. numerus quæsitus. Vel dicti tres numeri habebunt eundem excessum. Est autem inter $8\mathcal{Q}$. & $5\mathcal{Q}+15$. excessus $3\mathcal{Q}-15$. At inter $5\mathcal{Q}+15$. & $3\mathcal{Q}+15$ excessus est $2\mathcal{Q}$. Est ergo æqualitas inter $3\mathcal{Q}$ — 15. & $2\mathcal{Q}$. Additisque 15. vtrinque, inter $3\mathcal{Q}$. & $2\mathcal{Q}+15$. Ablatisq; $2\mathcal{Q}$. vtrinq; inter $1\mathcal{Q}$. & 15. fietq; rursus $1\mathcal{Q}$. 15. numerus quæsitus. Iam ex 15. & 3. fit summa 18. quæ ducta in reliquum numerum 5. facit 90. numerum medium. Deinde ex 15. & 5. fit summa 20. quæ ducta in reliquum numerum 3. facit 60. tertium numerum. Denique ex 3. & 5. fit summa 8. quæ ducta in reliquum numerum 15. facit 120. primum numerum: Habentque tres hi numeri 120. 90. 60. eundem excessum 30.

HOC quæsitum soluemus etiam in ænigmate 131. vbi dabuntur duo numeri, ita vt tres numeri producti non possint tribus modis esse proportionales Arithmetice, vt hic, sed duobus tantum modis.

LXXXVII *87 Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt excessus quadratorum, qui ex ipsis fiunt, ad eorum summam habeat prportionem datam.*

HABEANT quæsiti numeri proportionem triplam, & excessus quadratorum ad summam eorum, octuplam. Ponatur minor $1\mathcal{Q}$. & maior $3\mathcal{Q}$ illius triplus. Summa eorum est $4\mathcal{Q}$. & excessus quadratorum $1\mathcal{Q}$. $9\mathcal{Q}$. est $8\mathcal{Q}$. qui ad $4\mathcal{Q}$ proportionem habere debet octuplam. Erit ergo æquatio inter $8\mathcal{Q}$. & $32\mathcal{Q}$. Diuisisque 32. per 8. fiet $1\mathcal{Q}$ 4. minor numerus: propterea quod numeri Cossici sunt collaterales. Maior autem erit 12. Excessus quadratorum 16. 144. est 128. qui ad 16. amborum summam proportionem habet octuplam.

LXXXVIII *88 Duos numeros in dato excessu inuenire, ita vt excessus quadratorum, qui ex ipsis fiunt, superet datum excessum quouis numero dato: dummodo quadratus excessus numerorum quæsitorum dati minor sit summa ex eodem excessu, & postulato numero collecta.*

SIT excessus numerorum quæsitorum 7. Excessus autem quadratorum, qui ex quæsitis numeris fiunt, maior sit, quam 7. postulato numero 100. Ponatur minor numerus $1\mathcal{Q}$ maior $1\mathcal{Q}+7$. vt nimirum illum superet numero 7. Quadrati horum numerorum $1\mathcal{Q}$. & $1\mathcal{Q}+14\mathcal{Q}+49$. se mutuo excedunt numero $14\mathcal{Q}+49$. qui superare debet 7. numero 100. hoc est, æqualitas esse debet inter $14\mathcal{Q}+49$. & 107. Ablatisque 49. vtrinque, inter $14\mathcal{Q}$. & 58. Diuisis ergo 58 per 14. fiet $1\mathcal{Q}$. $4\frac{1}{7}$. minor numerus: maior ergo erit $11\frac{1}{7}$. Vt minorem superet numero 7. Quadrati numerorum $\frac{9481}{49}$. $\frac{6084}{49}$. se mutuo excedunt numero $\frac{52443}{49}$. qui datum numerorum excessum 7. superat numero 100. hoc est, æqualis est numero 107. cum 107. faciant $\frac{52443}{49}$.

HÆC quæstio solui potuit, quia quadratus dati excessus 7. nimirum numerus 49. minor est summa 107. ex dato excessu 7. & numero postulato 100. collecta. Quod si proponantur inueniendi duo numeri in dato excessu 7. ita vt excessus quadratorum ipsorum maior sit, quam 7. numero 10. quæstio erit impossibilis. quod optime ex ipsa operatione discES. Posito enim minore numero $1\mathcal{Q}$. & maiore $1\mathcal{Q}+7$. vt se mutuo superent septenario. Quadrati horum numerorum rursum se excedunt numero $14\mathcal{Q}+49$. qui superare debet 7. numero 10. quod est absurdum, cum illum superet numero $14\mathcal{Q}+42$. qui maior est, quam 7. Causa est, quia quadratus 49. excessus 7. minor non est summa 17.

LXXXIX *89 Duos numeros in dato excessu inuenire, ita vt excessus quadratorum, qui ex ipsis fiunt, ad excessum datum datam habeat proportionem, & insuper contineat datum numerum, dummodo quadratus dati excessus minor sit summa, quæ ex numero, qui ex ductu denominatoris datæ proportionis in ipsum excessum fit, & ex dato numero colligitur.*

DATVS excessus sit 4. & excessus quadratorum, qui ex quæsitis numeris fiunt, ad 4. habeat proportionem quincuplam, & insuper contineat 20. vnitates. Ponatur minor numerus $1\mathcal{Q}$. & maior $1\mathcal{Q}+4$. vt illum quaternario superet. Quadratorum $1\mathcal{Q}$. & $1\mathcal{Q}+8\mathcal{Q}+16$. est $8\mathcal{Q}+16$. qui quinquies continere debet datum excessum 4. & præterea 20. Quintuplum autem excessus 4. cum 20. facit 40. cui numero æqualis esse debet excessus quadratorum $8\mathcal{Q}+16$. Ablatis igitur 16. vtrinque, erit æqualitas inter 24. & $8\mathcal{Q}$. Diuisisque 24. per 8. fiet $1\mathcal{Q}$. 3. minor numerus. maior ergo erit 7. Eorum excessus 4. Quadratorum 9. 49. excessus 40. continet excessum 4. quinquies, ac præterea 20. vnitates.

HÆC etiam quæstio solui potuit, quia quadratus 16. dati excessus 4. minor est summa ex quincuplo excessus 4. & numero 20. collecta. Quod si excessus detur 4. & proportio tripla, & insuper tres vnitates. quæstio fiet

stio fiet impossibilis. quod facile ex ipsa operatione cognoscetur. Posito enim minore numero $1\mathcal{Q}$. & maiore $1\mathcal{Q}+4$. erit excessus quadratorum $8\mathcal{Q}+16$. qui æqualis debet esse summæ ex triplo excessus 4. & numero 3. collecta, hoc est, numero 15. quod est absurdum. Causa est, quia quadratus 16. excessus 4. non est minor numero 15.

90 Datum numerum quadratum in duos numeros quadratos distribuere. XC.

HOC ænigma sine Algebra soluimus lib. 8. nostræ Geometriæ practicæ, propos. 9. vbi propositum quadratum numerum non in duos solum, sed in quotuis numeros quadratos partiti sumus. Per Algebram autem idem hoc modo expediemus. Sit quadratus numerus 16. diuidendus in duos quadratos. Ponatur primus quadratus $1\mathcal{Q}$. ac proinde secundus $16-1\mathcal{Q}$. Finge huius latus esse quotcunque radices, minus tot vnitatibus, quot sunt in latere dati quadrati, nimirum $2\mathcal{Q}-4$. Huius quadratum $4\mathcal{Q}+16-16\mathcal{Q}$. æquale debet esse quadrato $16-1\mathcal{Q}$. Addito $1\mathcal{Q}$. vtrinque, erit æquatio inter $5\mathcal{Q}+16-16\mathcal{Q}$. & 16. Additisque rursum $16\mathcal{Q}$. inter $5\mathcal{Q}+16$. & $16\mathcal{Q}+16$. Ablatisque 16. vtrinque inter $5\mathcal{Q}$ & $16\mathcal{Q}$. Diuisis igitur 16. per 5. fiet $12\mathcal{Q}$. $\frac{16}{5}$. quia numeri Cossici collaterales sunt. Huius radicis quadratus $\frac{256}{25}$ erit primus, quem posuimus $1\mathcal{Q}$. Secundus autem $16-1\mathcal{Q}$. erit $\frac{144}{25}$. cuius radix $\frac{12}{5}$. & ambo quadrati conficiunt $\frac{400}{25}$. nimirum 16.

Aliter. Ponatur latus primi quadrati esse $1\mathcal{Q}$. Latus vero secundi quadrati esse quotuis radices, minus latere dati quadrati, nimirum $5\mathcal{Q}-4$. Quadrati numeri horum laterum $1\mathcal{Q}$. & $25\mathcal{Q}+16-40\mathcal{Q}$. simul æquales debent esse dato quadrato 16. Additis $40\mathcal{Q}$ vtrinque, erit æquatio inter $26\mathcal{Q}+16$. & $40\mathcal{Q}+16$. Ablatisq; 16. vtrinque, inter $26\mathcal{Q}$. & $40\mathcal{Q}$. Diuisis ergo 40. per 26. fiet $1\mathcal{Q}\frac{20}{13}$. (quod numeri Cossici sint collaterales) cuius quadratum $\frac{400}{169}$. erit primus numerus quadratus. Secundus autem erit $\frac{2704}{169}$. qui relinquitur, si ille ex 16. detrahatur. Eius latus est $\frac{48}{13}$. & ambo quadrati conficiunt $\frac{2704}{169}$. hoc est, 16.

SCHOLIVM.

QVOD si minorem numerum quadratum iterum partiemur in duos quadratos, diuisus erit datus quadratus in tres. Et si minimus rursum secetur in duos, sectus erit datus in quatuor. Atque ita deinceps in infinitum. Vides ergo propositum quadratum diuidi posse per Algebram in duos quadratos variis modis: ita vt semper fiant diuersi duo quadrati.

HOC problema solui etiam potest sine Algebra, hoc modo. Proposito quadrato, ducatur eius latus in quemcunq; numerum, & duplum producti numeri diuidatur per eiusdem illius numeri quadratum auctum vnitate. Quotientis enim quadratus erit vnus quadratus quæsitus, quo ablato ex proposito quadrato, relinquetur alter quadratus.

Vt si propositus sit quadratus 36. ducatur eius latus 6. per 3. vt fiant 18. Et huius duplum 36. diuidatur per quadratum eiusdem numeri 3. auctum vnitate, nimirum per 10. Quotientis enim $\frac{36}{10}$ siue $\frac{18}{5}$. quadratus $\frac{324}{25}$. id est, $12\frac{24}{25}$. erit vnus quadratus, quo ablato ex 36. erit alter $23\frac{1}{25}$. cuius latus $\frac{24}{5}$ sine $4\frac{4}{5}$. & ambo quadrati $12\frac{24}{25}$. & $23\frac{1}{25}$. faciunt 36

Nota tamen, latus propositi quadrati non esse ducendum per 1. quia duo quadrati essent propositus quadratus, & quod est ineptum. Vt si 6. latus propositi quadrati 36. duceretur in 1. vt fiant 6. & huius producti numeri duplum 12. diuideretur per 2 nimirum per quadratū vnitatis auctum vnitate, fieret Quotiens 6. cuius quadratum est 36. numerus propositus, &c.

91 Datum numerum ex duobus quadratis compositum in alios duos quadratos diuidere. XCI.

SIT numerus 34. siue quadratus, siue non quadratus, compositus ex duobus quadratis 9. & 25. diuidendus in alios duos quadratos. Sint latera quadratorum 3. & 5. ponaturque latus primi quadrati quæsiti $12\mathcal{Q}+3$. nimirum vna radix, plus latere primi quadrati dati. Latus vero secundi quadrati quæsiti, quotcunque radices minus latere secundi quadrati dati, nimirum $2\mathcal{Q}-5$. Quadrati horum laterum $1\mathcal{Q}+62\mathcal{Q}+9$. & $4\mathcal{Q}-20\mathcal{Q}+25$. faciunt summam $5\mathcal{Q}+34-14\mathcal{Q}$. æqualem dato numero 34. Additis ergo $14\mathcal{Q}$ vtrinque, erit æquatio inter $5\mathcal{Q}+34$. & $14\mathcal{Q}+34$. Ablatisque 34. vtrinque, inter $5\mathcal{Q}$. & $14.2\mathcal{Q}$. Diuisis igitur 14. per 5. fiet $12\mathcal{Q}$ $\frac{14}{5}$. propterea quod numeri Cossici sunt collaterales. Ergo latus primi quadrati quæsiti, quod posuimus $12\mathcal{Q}+3$. erit $\frac{29}{5}$. Secundi vero quadrati latus, quod posuimus $2\mathcal{Q}-5$. erit $\frac{28}{5}-5$. hoc est, $\frac{3}{5}$. Quadrati horum laterum inuentorum $\frac{841}{25}$. $\frac{9}{25}$. faciunt $\frac{850}{25}$. hoc est, numerum 34. datum.

92 Duos numeros quadratos in dato excessu inuenire. XCII.

DETVR excessus 70. Ponatur latus vnius quadrati $12\mathcal{Q}$. alterius vero latus $12\mathcal{Q}$. plus quotlibet vnitatibus, dummodo quadratus numerus ex ipsis descriptus minor sit dato excessu, nimirum $12\mathcal{Q}+8$. Quadrati horum laterum $1\mathcal{Q}$ & $1\mathcal{Q}+16\mathcal{Q}+64$. excessum habent $16\mathcal{Q}+64$. qui æqualis esse debet dato excessui 70. Ablatis vtrobique 64. erit æquatio inter $16\mathcal{Q}$. & 6. Diuisis ergo 6. per 16. fiet $12\mathcal{Q}\frac{1}{8}$. latus vnius quadrati. Latus alterius positum $12\mathcal{Q}+8$. erit $8\frac{1}{8}$. siue $\frac{65}{8}$. Quadrati horum laterum inuentorum sunt $\frac{9}{64}$. & $\frac{4489}{64}$. quorum excessus $\frac{4480}{64}$. hoc est, 70.

MANIFESTVM autem est, alios atque alios duos numeros quadratos posse reperiri in dato eodem excessu, prout numerus absolutus in secundi quadrati radice alius atque alius assumetur. Vt dato eodem excessu 70. si latus primi quadrati ponatur $12\mathcal{Q}$. & secundi $12\mathcal{Q}+1$. erunt quadrati $1\mathcal{Q}$. & $1\mathcal{Q}+24\mathcal{Q}+1$. & eorum excessus $24\mathcal{Q}+1$. qui æqualis debet esse dato excessui 70. Ablata 1. vtrinque, erit æqualitas inter $24\mathcal{Q}$. & 69. Diuisis igitur 69. per 2. fiet $12\mathcal{Q}$. $34\frac{1}{2}$. siue $\frac{69}{2}$. cuius quadratus est $\frac{4761}{4}$. siue $1190\frac{1}{4}$. Latus autem secundi quadrati, quod posuimus $12\mathcal{Q}+1$. erit $35\frac{1}{2}$. siue $\frac{71}{2}$. cuius quadratus est $\frac{5041}{4}$. siue $1260\frac{1}{4}$. qui priorem $1190\frac{1}{4}$. superat numero 70.

SI excessus detur 100. ponaturque latus primi quadrati $12\mathcal{Q}$. & latus secundi $12\mathcal{Q}+10$. vbi quadratus numeri 10. non est minor excessu dato 100. sed æqualis, erit quæstio impossibilis. Nam quadrati $1\mathcal{Q}$. & $1\mathcal{Q}+$

1ʒ + 20℞ + 100. excessum habent 20℞ + 100. qui æqualis debet esse dato excessui 100. quod absurdum est; cum sit maior.

XCIII. 93 *Duos numeros inuenire, quorum quadrati se excedant dato numero.*

HOC ænigma soluitur, vt præcedens. Positis enim duobus lateribus, vt in præcedenti, inuenientur duo latera, quorum quadrati datum excessum habebunt.

XCIIII. 94 *Duos numeros quadratos inuenire, quorum summa quadratus sit numerus.*

ASSVMATVR quilibet quadratus pro vno quæsitorum, nimirum 16. Et per problema 92. inueniantur duo numeri quadrati, quorū excessus 16. quadratus assumptus. Nam minor quadratus inuentus cum assumpto 16. faciet alterum quadratum inuentum maiorem. Ponatur ergo vt in dicto problemate factum est, latus vnius quadrati 1℞. & alterius 1℞ + 3. (vt nimirum quadratus nu. 3. minor sit dato excessu 16.) Quadrati horum laterum 1ʒ. & 1ʒ + 6℞ + 9. excessum habent 6℞ + 9. qui æqualis esse debet dato excessui 16. Ablatis 9. vtrobique, erit æquatio inter 6℞. & 7. Diuisis ergo 7. per 6. fiet 1℞ $\frac{7}{6}$. latus minoris quadrati quæsiti. Latus maioris, quod posuimus 1℞ + 3. erit $3\frac{7}{6}$. id est, $\frac{25}{6}$. Quadrati laterum $\frac{7}{6}$. & $\frac{25}{6}$. sunt $\frac{49}{36}$. & $\frac{625}{36}$. quorum excessus $\frac{576}{36}$. hoc est, 16. Duo ergo quadrati quæsiti sunt 16. siue $\frac{576}{36}$. & $\frac{49}{36}$. quorum summa $\frac{625}{36}$. quadratus numerus est, latus habens $\frac{25}{6}$.

Abiectis denominatoribus, erunt inuenti duo quadrati integri 576. & 49. facientes quadratum 625. cuius latus 25.

XCV. 95 *Duos numeros quadratos inuenire, quorum excessus quadratus sit.*

HOC ænigma non aliter soluetur, ac problema 92. Si namque inueniantur per illud duo quadrati, quorum excessus datus sit numerus quadratus, factum erit, quod hic iubetur.

XCVI. 96 *Tres numeros quadratos inuenire, quorum summa sit numerus quadratus.*

PER problema 94. inueniantur primum duo quadrati, quorum summa sit quadratus numerus, sintq; V.g. hi 576. 49. facientes quadratum 625. Deinde per problema 95. inueniantur alij duo quadrati, quorum excessus sit quadratus effectus 625. Nam minor inuentus cum quadrato 625. hoc est, cum duobus quadratis 576. 49. faciet maiorem quadratum. V.g. Dato excessu quadrato 625. inuenientur duo quadrati in illo excessu, hoc modo. Ponatur latus vnius 1℞ & alterius 1℞ + 10. (vt nimirum quadratus 10. vnitatum minor sit dato excessu 625.) Quadrati horum laterum 1ʒ & 1ʒ + 20℞ + 100. excessum habent 20℞ + 100. qui æqualis esse debet dato excessui 625. Ablatis ergo 100. vtrobique, erit æquatio inter 20℞. & 525. Diuisisque 525. per 20. fiet 1℞ $26\frac{1}{4}$. Latus minoris quadrati. Maioris vero latus, quod positum fuit 1℞ + 10. erit $36\frac{1}{4}$. Horum laterum quadrati $\frac{11025}{16}$. $\frac{21025}{16}$. excessum habent $\frac{10000}{16}$. hoc est, 625. quadratum. Hic igitur excessus, nimirum $\frac{10000}{16}$. ex duobus quadratis 576. 49. conflatus cum minore quadrato $\frac{11025}{16}$. componet maiorem quadratum $\frac{21025}{16}$. Atque ita tres quadrati quæsiti sunt 576. 49. $\frac{11025}{16}$. siue $\frac{9216}{16}$. $\frac{784}{16}$. $\frac{11025}{16}$. qui simul efficiunt quadratum $\frac{21025}{16}$. cuius latus est $\frac{145}{4}$.

Si abiiciantur denominatores, erunt inuenti tres quadrati integri 9216. 784. 11025. quorum summa quadratus numerus est 21025. cuius latus 145.

SCHOLIVM.

ATQVE eadem arte inuenientur 4 quadrati efficientes numerum quadratum, si prius per hoc problema inueniantur tres. Deinde per problema 95. duo habentes excessum, illum quadratum ex tribus quadratis confectum. Pari ratione inuenientur 5. 6. 7. & quotquot quis voluerit, si videlicet prius inueniantur 4. vel 5. vel 6. &c.

XCVII. 97 *Duos numeros inuenire, quorum tam summa, quam excessus sit numerus quadratus.*

PONATVR latus quadrati ex duobus numeris quæsitis conflati, vna radix, plus quotcunque vnitatibus, nimirum 1℞ + 4. cuius quadratum 1ʒ + 8℞ + 16. æquale debet esse duobus numeris quæsitis. Si ergo vnus numerorum ponatur $\frac{1}{2}$ʒ. erit alter $\frac{1}{2}$ʒ + 8℞ + 16. qui duo simul faciunt dictum quadratum 1ʒ + 8℞ + 16. Reliquum est, vt $\frac{1}{2}$ʒ. subtractus ex $\frac{1}{2}$ʒ + 2℞ + 16. relinquat etiam numerum quadratum. Ergo reliquus numerus 8℞ + 16. æqualis erit alicui quadrato, qui V.g. sit 36. maior, quam 16. numerus absolutus. Ablatis igitur 16. vtrobique, erit æqualitas inter 8℞. & 20. Diuisisque 20. per 8. fit 1℞. $\frac{20}{8}$. siue $\frac{5}{2}$. cuius quadratus est $\frac{25}{4}$. Cum ergo vnus numerorum, qui quæruntur, positus sit $\frac{1}{2}$ʒ. erit is $\frac{25}{8}$ primus numerus quæsitus. Secundus numerus, qui positus fuit $\frac{1}{2}$ʒ + 8℞ + 16. erit $\frac{25}{8}$. plus $\frac{40}{2}$. siue 20. & insuper 16. hoc est, $\frac{25}{8}$. & 36 siue $\frac{288}{8}$. qui duo numeri $\frac{25}{8}$. & $\frac{288}{8}$. faciunt $\frac{313}{8}$. Ad hunc enim si adiiciatur primus $\frac{25}{8}$. fit summa $\frac{338}{8}$. id est, $\frac{169}{4}$. numerus quadratus, cuius latus $\frac{13}{2}$. Et si ab eodem secundo $\frac{313}{8}$. dematur primus $\frac{25}{8}$. remanet numerus $\frac{288}{8}$ siue $\frac{144}{4}$. quadratus etiam, cuius latus $\frac{12}{2}$. siue 6.

XCVIII. 98 *Duobus numeris datis, inuenire alium, qui vtrique seorsum additus faciat quadratum.*

SINT dati duo numeri 4. & 7. Ponatur, qui quæritur, 1℞. qui cum datis facit duos 1℞ + 4. & 1℞ + 7.

qu

qui quadrati debent esse. Detrahatur vnus ex altero, vt habeatur eorum excessus 3. quæranturque duo numeri, qui inter se multiplicati producant hunc eundem excessum 3. ita tamen, vt quadratū semissis excessus ipsorum maius sit minore numero dato 4. atque adeo æqualis esse possit minori numero composito 1℞ + 4 & quadratum semissis summæ eorundem maius sit maiore numero dato 7. atque adeo æqualis esse possit maiori numero composito 1℞ + 7. quod cur fieri debeat, operatio docebit. Hi numeri erunt $\frac{1}{2}$. & 6. Nam inter se multiplicati producunt 3. Et excessus eorum est $5\frac{1}{2}$. hoc est, $\frac{11}{2}$. cuius semissis $\frac{11}{4}$. quadratum $\frac{121}{16}$. hoc est, $7\frac{9}{16}$. maius est, quam 4. Summa vero eorundem est $6\frac{1}{2}$. hoc est, $\frac{13}{2}$. cuius semissis $\frac{13}{4}$. quadratum $\frac{169}{16}$. hoc est, $10\frac{9}{16}$. maius est, quam 7. Inuenti autem sunt hi duo numeri $\frac{1}{2}$. & 6. sumpta ad libitum fractione $\frac{1}{2}$. cuius numerator vnitas vnus numerorum. Nam si eius denominator 2. ducatur in numerum 3. qui produci debet, fiet alter numerus 6. Quod si dati numeri forent 20. 23. habentes eundem excessum 3. non satisfacerent numeri $\frac{1}{2}$. & 6. Quare sumenda esset alia fractio, nimirum $\frac{1}{10}$. pro vno numero. Nam ex 10. denominatore in 3. fiet alter numerus 30. Et ex $\frac{1}{10}$. in 30. fit numerus 3. Et excessus eorum est $29\frac{9}{10}$. hoc est, $\frac{299}{10}$. cuius semissis $\frac{299}{20}$. quadratum $\frac{89401}{400}$. siue $223\frac{201}{400}$. maius est, quam 20. Item summa eorundem numerorum est $30\frac{1}{10}$. hoc est, $\frac{301}{10}$. cuius semissis $\frac{301}{20}$. quadratum $\frac{90601}{400}$. siue $226\frac{201}{400}$. maius est, quam 23. Atque ita, si hi numeri $\frac{1}{10}$. & 30. non satisfacerent, accipienda esset alia fractio maioris denominationis, &c. Ac toties iteranda operatio, donec duo numeri reperiantur proposito satisfacientes.

NOS rem exequamur cum numeris $\frac{1}{2}$. & 6. in proposito exemplo. quorum excessus $5\frac{1}{2}$. vel $\frac{11}{2}$. & huius semissis $\frac{11}{4}$. quadratum $\frac{121}{16}$. siue $7\frac{9}{16}$. æquale erit minori numero composito 1℞ + 4. Ablatis ergo 4. vtrobique, erit æquatio inter $3\frac{9}{16}$. & 1℞. atque idcirco 1℞ erit $3\frac{9}{16}$. quæ radix etiam inuenietur hoc modo. Summa numerorum $\frac{1}{2}$. & 6. est $6\frac{1}{2}$. siue $\frac{13}{2}$. & huius semissis $\frac{13}{4}$. quadratum $\frac{169}{16}$. siue $10\frac{9}{16}$. æquale erit maiori numero composito 1℞ + 7. Ablatis ergo 7. vtrobique, fiet æquatio inter $3\frac{9}{16}$. & 1℞. vt prius. Numerus igitur quæsitus est $3\frac{9}{16}$. Hic enim additus ad 4. & 7. faciet quadratos $7\frac{9}{16}$. & $10\frac{9}{16}$. siue $\frac{121}{16}$. & $\frac{169}{16}$. quorum latera $\frac{11}{4}$. & $\frac{13}{4}$.

QVOD si sumatur fractio $\frac{1}{3}$. & denominator 3. ducatur in excessum 3. producetur numerus 9. atque hi duo numeri $\frac{1}{3}$. & 9. multiplicati inter se facient 3. Eorum excessus est $8\frac{2}{3}$. siue $\frac{26}{3}$. & huius semissis $\frac{13}{3}$. quadratum $\frac{169}{9}$. siue $18\frac{7}{9}$. æquale erit minori numero composito 1℞ + 4. Ablatis ergo 4. vtrobique, æquatio erit inter 1℞. & $14\frac{7}{9}$. ideoque 1℞. erit $14\frac{7}{9}$. quæ etiam inuenietur hoc modo. Summa numerorum $\frac{1}{3}$. & 9. est $9\frac{1}{3}$. siue $\frac{28}{3}$. Huius semissis $\frac{14}{3}$. quadratū $\frac{196}{9}$. siue $21\frac{7}{9}$. æquale erit maiori numero composito 1℞ + 7. Ablatis igitur 7. vtrinq;, erit æquatio inter $14\frac{7}{9}$. & 1℞. vt prius. Numerus igitur quæsitus est $14\frac{7}{9}$. Hic enim additus ad 4. & 7. facit quadratos $18\frac{7}{9}$. & $21\frac{7}{9}$. siue $\frac{169}{9}$. $\frac{196}{9}$. quorum latera $\frac{13}{3}$. & $\frac{14}{3}$.

EX ipsa operatione intelligis, cur eligi debeant tales duo numeri producentes excessum datorum numerorum, quales diximus. Nam nisi quadratum semissis eorum excessus maius esset minore numero 4. non fieret æquatio inter ipsum, & minorem numerum compositum, vt patet, &c. Item constat, varios numeros inueniri posse, quorum quilibet additus ad datos duos numeros faciat duos quadratos, prout videlicet varij duo numeri accipientur, qui dictum excessum 3. producant. Ita vides, in dato exemplo inuentos esse duos numeros $3\frac{9}{16}$. & $14\frac{7}{9}$.

SED experiamur idem in datis numeris 20. & 23. Addita 1℞. vtrique, fient quadrati 1℞ + 20. & 1℞ + 23. fietq; æquatio (electis duobus numeris $\frac{1}{10}$. & 30. qui excessum 3. producant) inter $223\frac{201}{400}$. & 1℞ + 20. Item inter $226\frac{201}{400}$. & 1℞ + 23. Inuenieturque per vtramque æquationem 1℞. esse $203\frac{201}{400}$. qui numerus additus ad 20. & 23. facit quadratos $223\frac{201}{400}$. & $226\frac{201}{400}$. siue $\frac{89401}{400}$. & $\frac{90601}{400}$. quorum latera $\frac{299}{20}$. & $\frac{301}{20}$.

Aliter. Sint rursus dati duo numeri 4. & 7. Ponatur numerus quæsitus 1ʒ — 4. Huic enim si addantur 4. fit 1ʒ. quadratus. Et si eidem numero 1ʒ — 4. addantur 7. fit alius quadratus 1ʒ + 3. cuius latus statuatur 1℞. minus quotlibet vnitatibus, quæ superent 4. nimirum 1℞ — 5. cuius quadratum 1ʒ — 10℞ + 25. æquale esse debet quadrato 1ʒ + 3. Additis 10℞ vtrobique, erit æqualitas inter 1ʒ + 25. & 1ʒ + 10℞ + 3. Et si auferatur 1ʒ. vtrobique, inter 25. & 10℞ + 3. Ablatisque 3. vtrobique, inter 22. & 10℞. Diuisis igitur 22. per 10. fiet 1℞. $\frac{22}{10}$. siue $\frac{11}{5}$. à cuius quadrato $\frac{121}{25}$. si auferantur 4. (quia numerus quæsitus fuit positus 1ʒ — 4.) hoc est $\frac{100}{25}$. reliquus erit numerus quæsitus $\frac{21}{25}$. Hic enim additus ad 4. & 7. facit quadratos $4\frac{21}{25}$. & $7\frac{21}{25}$. siue $\frac{121}{25}$. & $\frac{196}{25}$. quorum latera $\frac{11}{5}$. & $\frac{14}{5}$.

SI numeri dati sint 20. & 23. ponendus erit numerus quæsitus 1ʒ — 20. vt additus ad 20. faciat quadratum 1ʒ. Et si eidem numero 1ʒ — 20. addantur 23. fiet alius quadratus 1ʒ + 3. cuius latus statuatur 1℞. minus quotlibet vnitatibus, quæ superent 20. nimirum 1℞ — 21. cuius quadratum 1ʒ — 42℞ + 441. æquale debet esse quadrato 1ʒ + 3. Additis 42℞ vtrobique, erit æqualitas inter 1ʒ + 441. & 1ʒ + 42℞ + 3. & si dematur 1ʒ. vtrobique, inter 441. & 42℞ + 3. Ablatisque 3. vtrobique, inter 438. & 42℞. Diuisis ergo 438. per 42. fiet 1℞. $10\frac{3}{7}$. siue $\frac{73}{7}$. à cuius quadrato $\frac{5329}{49}$. si auferantur 20. (quia numerus quæsitus positus fuit 1ʒ — 20.) hoc est. $\frac{980}{49}$. reliquus fiet numerus quæsitus $\frac{4349}{49}$. siue $88\frac{37}{49}$. qui additus ad 20. & 23. faciet quadratos $108\frac{37}{49}$. & $111\frac{37}{49}$. hoc est $\frac{5329}{49}$. & $\frac{5476}{49}$. quorum latera $\frac{73}{7}$. & $\frac{74}{7}$.

99 *Duobus numeris datis, alium inuenire, qui ab vtroque seorsum subtractus, relinquat quadratum.* XCIX.

SINT dati duo numeri 9. & 21. Ponatur numerus quæsitus 9 — 1ʒ. Hic namque ex 9. subtractus relinquit quadratum 1ʒ. vt in hac formula apparet. Idem autem numerus 9 — 1ʒ. detractus ex 21. relinquit 12 + 1ʒ. vt in hac altera formula liquet, qui numerus debet etiā esse quadratus. Statuatur eius latus 1℞. minus quotuis vnitatibus, ita tamen, vt earū quadratus superet 12. nimirum 1℞ — 4. Huius quadratū 1ʒ — 8℞ + 16. æquale debet esse

9	+	0ʒ
9	—	1ʒ
	+	1ʒ

21	+	0ʒ
9	—	1ʒ
12	+	1ʒ

qua-

quadrato 12+1☖. Additis 8☗. vtrinque, erit æquatio inter 1☖+16. & 1☖+8☗+12. Et si vtrobique auferatur 1☖. inter 16. & 8☗+12. Ablatisque 12. vtrinque, inter 4. & 8☗. Diuisis ergo 4. per 8. fiet 1☗. $\frac{4}{8}$. siue $\frac{1}{2}$. cuius quadratum $\frac{1}{4}$. si ex 9. auferatur, (propterea quod numerus positus fuit 9−1☖.) hoc est ex $\frac{36}{4}$. reliquus erit numerus quæsitus 8 $\frac{3}{4}$. siue $\frac{35}{4}$. qui videlicet detractus ex 9. & 21. relinquit quadratos $\frac{1}{4}$. & 12 $\frac{1}{4}$. siue $\frac{1}{4}$. & $\frac{49}{4}$. quorum latera $\frac{1}{2}$. & $\frac{7}{2}$.

C. *100 Datis duobus numeris, alium inuenire, à quo vterque datorum detractus, quadratum relinquat.*

SINT dati duo numeri 20. & 30. Ponatur numerus quæsitus 1☖+20. vt detractis 20. remaneat quadratus 1☖. Reliquum est, vt 1☖−10. (qui numerus relinquitur, subductis 30. ex 1☖+20. vt in formula apposita manifestum est,) fit etiam quadratus. Statuatur latus numeri 1☖−10. vna radix, minus quotcunque vnitatibus, nimirum 1☗−2. Huius quadratum 1☖−42☗+4 æquale debet esse quadrato 1☖−10. Additis 42☗. vtrinque, erit æquatio inter 1☖+4. & 1☖−10+42☗. Et rursum additis 10. vtrinque, inter 1☖+14. & 1☖+42☗. Et si auferatur 1☖. vtrobiq;, inter 14. & 42☗. Diuisis ergo 14. per 4. fiet 12☗. $\frac{14}{4}$. siue $\frac{7}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{49}{4}$. si addantur 20. (quia numerus positus fuit 1☖+20) hoc est, $\frac{80}{4}$. fiet numerus quæsitus $\frac{129}{4}$. hoc est, 32 $\frac{1}{4}$. à quo si demantur dati numeri 20. & 30. reliqui erunt quadrati 12 $\frac{1}{4}$. & 2 $\frac{1}{4}$. siue $\frac{49}{4}$. & $\frac{9}{4}$. quorum latera $\frac{7}{2}$. & $\frac{3}{2}$.

1☖	+ 20
	+ 30
1☖	−10

CI. *101 Datum numerum in duos partiri, & insuper quadratum numerum inuenire, qui cum vtraque parte seorsum quadratum efficiat.*

SIT numerus datus 40. Cape duos numeros, quorũ quadrati simul minorẽ numerum efficiant, quã 40. nimirum 2. & 4. Vnicuiq; addita 12☗ fiũt numeri 12☗+2. & 12☗+4. quorũ quadrata sunt 1☖+42☗+4. & 1☖+82☗+16. Et si ab vtroq; dematur 1☖. remanebunt 42☗+4. & 82☗+16. partes numeri 40. diuidẽdi: quippe cum quilibet horum numerorum cum 1☖. faciat quadratum. Reliquum ergo est, vt duæ istæ partes efficiant 40. Efficiunt autem 12☗+20. qui numerus æqualis esse debet numero 40. Ablatis igitur 20. vtrobique, erit æquatio inter 12☗. & 20. Diuisisq; 20. per 12. fiet 1☗. $\frac{8}{12}$. siue $\frac{2}{3}$. cuius quadratus $\frac{25}{9}$. siue 2 $\frac{7}{9}$. erit is, qui quæritur. Partes autem numeri 40. videlicet 42☗+4. & 82☗+16. erunt 10 $\frac{2}{3}$. & 29 $\frac{1}{3}$. quæ simul efficiunt 40. Et vterque cum quadrato inuento 2 $\frac{7}{9}$. quadratum numerum efficit. Nam 2 $\frac{7}{9}$. cum 10 $\frac{2}{3}$. siue cum 10 $\frac{6}{9}$. facit 13 $\frac{5}{9}$. hoc est, $\frac{122}{9}$. quadratum, cuius latus $\frac{11}{3}$. Et idem quadratus 2 $\frac{7}{9}$. cum 29 $\frac{1}{3}$. siue cum 29 $\frac{3}{9}$. facit quadratum 32 $\frac{2}{9}$. siue $\frac{289}{9}$. cuius latus $\frac{17}{3}$.

CII. *102 Datum numerum in duos partiri, & insuper numerum quadratum inuenire, à quo vtraque pars seorsum subtracta quadratum relinquat.*

SIT idem datus numerus 40. Latus quadrati quæsiti ponatur 1☗. plus tot vnitatibus, vt earum quadratum minus sit numero 40. nimirum 1☗+5. cuius quadratus 1☖+10☗+25. à quo detractus numerus 10☗+25. relinquit quadratum 1☖. Vnus ergo numerorum, in quos diuidendus est 40. sit 10☗+25. quandoquidem detractus ex 1☖+10☗+25. relinquit quadratum 1☖.

SVMATVR deinde alterius cuiusdam quadrati latus 1☗+4. ita vt numerus eius absolutus 4 minor sit numero absoluto 5. prioris lateris. Quadratus huius secundi lateris est 1☖+8☗+16. qui detractus à priori quadrato 1☖+10☗+25. relinquit 2☗+9. alterum numerorum, in quos diuidendus est 40. Atque ita quadratus, quem quærimus, est 1☖+10☗+25. & partes numeri 40. sunt 10☗+25. & 2☗+9. Nam prior ex illo quadrato subductus relinquit quadratum 1☖. At posterior ex eodem quadrato sublatus relinquit 1☖+8☗+16. quandoquidem hic ex illo quadrato demptus relinquit 2☗+9. quod etiã hæc formula docet qui numerus 1☖+8☗+16. similiter quadratus est lateris 1☗+4. vt paulo ante patuit. Reliquum est, vt duæ hæ partes 10☗+25. & 2☗+9. efficiant datum numerum 40. Efficiunt autem 12☗+34. qui numerus æqualis debet esse numero 40. Ablatis ergo 34. vtrobique. erit æquatio inter 12☗. & 6. Diuisisque 6. per 12. fiet 1☗. $\frac{1}{2}$. Cum ergo latus quadrati quæsiti positum sit 1☗+5. erit ipsum latus 5 $\frac{1}{2}$. siue $\frac{11}{2}$. & quadratus quæsitus $\frac{121}{4}$. siue 30 $\frac{1}{4}$. Partes autem numeri 40. quas posuimus 10☗+25 & 2☗+9. erunt 30. & 10. quæ simul faciunt numerum datum 40. & detractæ ex quadrato inuento 30 $\frac{1}{4}$. relinquunt quadratos numeros $\frac{1}{4}$. & 20 $\frac{1}{4}$. siue $\frac{81}{4}$. quorum latera $\frac{1}{2}$. & $\frac{9}{2}$.

1☖	+ 10☗ + 25
0☖	+ 2☗ + 9
1☖	+ 8☗ + 16

CIII. *103 Tres numeros inuenire, ita vt primus cum quolibet alio dato habeat ad summam reliquorum proportionem quamcunque datam: Item secundus cum eodem dato numero ad summam reliquorum habeat quoque datam quamuis proportionem: Tertius denique cum eodem numero dato habeat ad reliquorum summam proporttonem quoque datam quamcunque.*

SIT datus numerus 73. inueniendique sint tres numeri, quorum primus cum 73. ad reliquorũ summam habeat proportionẽ duplam: Secundus cum 73. ad reliquorũ summam proportionem triplam: Tertius deniq; cum 73. ad summam reliquorum proportionem quadruplam. Ponatur summa omnium trium 1☗. Ergo primus erit $\frac{2}{3}$☗−73. vt cum 73. habeat $\frac{2}{3}$☗. numerum videlicet duplum ad $\frac{1}{3}$☗. summam reliquorum. Secundus autem erit $\frac{3}{4}$☗−73. vt cum 73. habeat $\frac{3}{4}$☗. numerum videlicet triplum ad $\frac{1}{4}$☗. summam reliquorum.

rum. Tertius denique erit $\frac{4}{5}$☗−73. vt acceptis 73. habeat $\frac{4}{5}$☗. numerum scilicet quadruplum ad $\frac{1}{5}$☗. summam reliquorum. Quibus positis, cum primus acceptis 73. habeat $\frac{2}{3}$☗. qui duplus esse debet summæ reliquorum duorum. Facit autem secundus $\frac{3}{4}$☗−73. cum tertio $\frac{4}{5}$☗−73. summam $\frac{31}{20}$☗−146. ad quam duplus esse debet numerus $\frac{2}{3}$☗. quem primus cum 73. habet. ac proinde numerus $\frac{62}{60}$☗−292. duplus prædictæ summæ $\frac{31}{20}$☗−146. æqualis erit numero $\frac{2}{3}$☗. Additis igitur 292. vtrobique, æquatio erit inter $\frac{62}{60}$☗. & $\frac{2}{3}$☗+292. Ablatisque $\frac{40}{60}$☗. vtrobique, inter $\frac{14}{60}$☗. & 292. Diuisis igitur 292. per $\frac{14}{60}$. fiet 12☗120. Ergo primus numerus $\frac{2}{3}$☗−73. erit 7. propterea quod $\frac{2}{3}$. numeri 120. sunt 80. à quibus si auferantur 73. reliquus fit numerus 7. Secundus autem $\frac{3}{4}$☗−73. erit 17. quia $\frac{3}{4}$. numeri 120. sunt 90. à quibus si deducantur 73. reliquus fit numerus 17. Tertius denique $\frac{4}{5}$☗−73. erit 23. quippe cum $\frac{4}{5}$. numeri 120. sint 96. à quibus si tollantur 73. supersint 23. Atque hi tres numeri 7. 17. 23. problemati satisfaciunt. Nam 7. cum 73. faciunt 80. qui numerus duplus est summæ 40. ex 17. & 23. collectæ. At 17. cum 73. faciunt 90. qui numerus triplus est summæ 30. ex 7. & 23. collectæ. Denique 23. cum 73. faciunt 96. qui numerus quadruplus est summæ 24. ex 7. & 17. collectæ.

CIV. *104. Tres numeros inuenire, ita vt primus cum data parte summæ aliorum duorum faciat numerum datum? Item secundus cum alia data parte aliorum duorum faciat quoque quemcunque numerum datum? Tertius denique cum quauis data parte aliorum duorum faciat similiter quemlibet datum numerum.*

DEBEAT primus cum $\frac{1}{2}$. secundi ac tertij facere 42. Secundus cum $\frac{1}{4}$. primi ac tertij, 36. Tertius cum $\frac{1}{1\frac{1}{2}}$. primi ac secundi, 39. Ponatur primus 1☗. Erit ergo semissis aliorum duorum 42−1☗. Ita enim primus cum hac semisse faciet 42. Ac proinde duplum huius semissis, nimirum 84.−2☗. erit summa secundi ac tertij.

Et quia secundus cum $\frac{1}{4}$. primi & tertii facere debet 36. si auferemus quartam partem primi, nimirum $\frac{1}{4}$☗. ex 36. reliqua erit quarta pars tertii, vna cum secundo, numerus scilicet 36.−$\frac{1}{4}$☗. quem si detrahemus ex 84.−2☗. hoc est, ex summa secundi ac tertij, dabit reliquus numerus 48.−1 $\frac{1}{4}$☗. tres reliquas partes quartas tertij. ac proinde tertia pars huius numeri, nimirum 16.−$\frac{7}{12}$☗. erit quarta pars tertij, quæ cum tribus quartis prædictis, hoc est, cum 48−$\frac{7}{4}$☗. faciet totum tertium numerum 64.−$\frac{28}{12}$☗. siue 64.−2 $\frac{1}{3}$☗.

HVNC tertium si subducemus ex 84−2☗. summa secundi ac tertij, reliquus fiet secundus 20+$\frac{1}{12}$☗.

QVIA vero tertius cum $\frac{1}{12}$. primi ac secundi, id est, cum $\frac{1}{12}$☗. & 1 $\frac{1}{3}$+$\frac{1}{36}$☗. (quæ simul faciunt 1 $\frac{1}{3}$+$\frac{1}{9}$☗.) debet facere 39. Facit autem tertius 64−2 $\frac{1}{3}$☗. cum 1 $\frac{1}{3}$+$\frac{1}{9}$☗. numerum 65 $\frac{1}{3}$−2 $\frac{2}{9}$☗. Nam −2 $\frac{1}{3}$ cum +$\frac{1}{9}$. facit −2 $\frac{3}{9}$. vt in hac formula apparet. qui numerus 65 $\frac{2}{3}$−2 $\frac{2}{9}$☗. æqualis debet esse numero 39. Additis ergo 2 $\frac{2}{9}$☗. vtrobique, erit æqualitas inter 65 $\frac{2}{3}$ & 39+2 $\frac{2}{9}$☗. Ablatisque 39. vtrobique, inter 26 $\frac{2}{3}$. siue $\frac{80}{3}$. & $\frac{20}{9}$☗. Diuisis ergo $\frac{80}{3}$. per $\frac{20}{9}$. fiet 12☗. 12. primus numerus. Ac proinde secundus, qui inuentus est 20+$\frac{1}{3}$☗. erit 24. Tertius autem inuentus 64−2 $\frac{1}{3}$☗. erit 36. Atque tres hi numeri 12. 24. 36. problema absoluunt. Facienda autem semper est æquatio cum numero, quem tertius cum parte data aliorum facere debet, vt in nostro exemplo cum 39. factum est.

	−− 2 $\frac{1}{3}$
	+ $\frac{1}{9}$
	−− 2 $\frac{2}{9}$

CV. *105 Datum numerum partiri in duas partes, vt prior cum dato alio numero ad posteriorem cum quouis alio dato numero proportionem habeat datam quamcunque, si id fieri potest.*

DATVS numerus 100. secandus sit in duas partes, vt prior cum 10. faciat numerum triplum numeri, quem posterior pars cum 20. efficit. Ponatur prior pars 12☗. ac proinde posterior 100−12☗. Prior cum 10. facit 12☗+10. & posterior cum 20. facit 120−12☗. Vt ergo ille huius sit triplus, necessario erit æquatio inter 12☗+10. & 360−32☗. Additisque 32☗. vtrobique, inter 42☗+10. & 360. Ablatisque 10. vtrobique, inter 42☗. & 350. Diuisis igitur 350. per 4. fiet 12☗. 87 $\frac{1}{2}$. prior pars. Posterior autem 100−12☗. erit 12 $\frac{1}{2}$. Prior cum 10. facit 97 $\frac{1}{2}$. numerum triplum numeri 32 $\frac{1}{2}$. ex posteriori parte, & 20. conflati.

ADDITVM est in ænigmate, [si id fieri potest] quia sæpe erit quæstio impossibilis. quod optime æquatio monebit. V.g. si datus numerus 100. diuidendus sit in duos, vt prior cum 10. faciat numerum septuplum numeri ex posteriori, & 20. conflati; fieri id nullo modo poterit. Posita enim priori parte 12☗. & posteriori 100−12☗. prior cum 10. faciet 12☗+10. posterior autẽ cum 20 faciet 120−12☗. cuius ille non potest esse septuplus. Nam fieret æquatio inter 12☗+10 & 840−72☗. Et additis 72☗. vtrobique, inter 82☗+10. & 840. Ablatisque 10. vtrobique, inter 82☗. & 830. Diuisis autem 830. per 8. fieret 12☗. 103 $\frac{3}{4}$. prior pars. quod est absurdum, cum maior sit dato numero 100.

VIDES igitur, quam expedite operatio ipsa nos instruat, quando quæstio proposita solui possit, & quando non. id quod ad initium huius lib. monuimus.

CVI. *106 Numerum inuenire, à quo detractis quotuis partibus aliquotis, si reliquus numerus per datum numerum multiplicetur, fiat numerus æqualis ei, qui ex inuento numero, & dato conflatur.*

SIT inueniendus numerus, à quo detractis $\frac{4}{7}$. si reliquus numerus $\frac{3}{7}$. multiplicetur per 10. tantum fiat, quantum ex numero inuento, & dato numero 10. Ponatur numerus quæsitus 12☗. Detractis $\frac{4}{7}$. remanent $\frac{3}{7}$☗. quibus multiplicatis per 10. fit numerus $\frac{30}{7}$☗. id est, 4 $\frac{2}{7}$☗. Et si ad positum numerum 12☗. addantur 10. fit numerus 12☗+10. æqualis 4 $\frac{2}{7}$☗. Ablata ergo 12☗. vtrinque, erit æquatio inter 10. & 3 $\frac{2}{7}$☗. Diuisisque 10.

per $3\frac{2}{7}$. hoc est, per $\frac{23}{7}$. fiet $12\mathcal{Q}.\frac{7}{23}$. siue $3\frac{1}{23}$. numerus quæsitus. Subductis enim $\frac{4}{7}$. inuenti numeri $\frac{7}{23}$. nimirum $\frac{4}{23}$. si reliquus numerus $\frac{30}{23}$. nimirum $\frac{7}{23}$. eiusdem numeri inuenti, multiplicetur per 10. fiet numerus $\frac{300}{23}$ siue $13\frac{1}{23}$. Et si ad inuentum numerum $\frac{70}{23}$. addatur idem numerus datus 10. hoc est, $\frac{230}{23}$. fiet quoque numerus $\frac{300}{23}$. siue $13\frac{1}{23}$.

Hoc ænigma idem est, quod trigesimum, sed variata nonnihil pronunciatione.

CVII. *107 Duos numeros in data proportione inuenire, vt ex vno in alterum gignatur datus quiuis numerus.*

SINT inueniendi duo numeri in proportione sesquialtera, vt ex vno in alterum gignatur numerus 40. Ponantur numeri $2\mathcal{Q}.3\mathcal{Q}$. in proportione sesquialtera. Ex vno in alterum fit numerus $6\mathcal{G}$. æqualis 40. Diuisis ergo 40. per 6. fit $1\mathcal{G}.\frac{40}{6}$. Et $\sqrt{\mathcal{G}}\frac{40}{6}$ erit valor vnius radicis. Et quia primus numerus positus fuit $2\mathcal{Q}$. & secundus $3\mathcal{Q}$ erit primus numerus $\sqrt{\mathcal{G}}\frac{160}{6}$. & secundus $\sqrt{\mathcal{G}}\frac{360}{6}$. Ex vno in alterum fit numerus $\sqrt{\mathcal{G}}\frac{57600}{36}$. hoc est, $\frac{240}{6}$. siue 40.

SINT rursum inueniendi duo numeri in eadem proportione sesquialtera, vt ex vno in alterum fiat numerus 294. Positis rursum duobus numeris $2\mathcal{Q}.3\mathcal{Q}$. in proportione sesquialtera, gignetur ex vno in alterum numerus $6\mathcal{G}$. æqualis 294. Diuisisque 294. per 6. fit $1\mathcal{G}.49$. cuius radix est 7. Ergo primus numerus $2\mathcal{Q}$. erit 14. & secundus $3\mathcal{Q}$. erit 21. Atque ex 14. in 21. fit propositus numerus 294. Vides ergo aliquando numeros quæsitos esse surdos, vt in priori exemplo, & aliquando rationales, vt in posteriori.

CVIII. *108 Duos numeros in qualibet proportione datos æqualiter minuere, ita vt reliquus maioris ad reliquum minoris habeat datam quamcunque proportionem, quæ maior sit proportione datorum numerorum.*

HOC ænigma idem est, quod octauum, alijs tamen verbis propositum. Nam & hic quæritur numerus, qui ex datis duobus detractus relinquat duos numeros in data proportione. Libuit tamen id ipsum hoc tenore proponere, & aliter soluere, quam ænigma octauum solutum fuit, vt discas aliorum quoque ænigmatum solutiones variare. Sint ergo dati duo numeri 3. & 2. in proportione sesquialtera minuendi æqualiter, hoc est, ab ipsis vnus idemque numerus auferendus, vt reliqui proportionem habeant v.g. vigecuplam. Ponamus minorem imminutum decreuisse vsque ad $1\mathcal{Q}$ ac proinde maiorem vsque ad $20\mathcal{Q}$. vt hic reliquus ad illum reliquum habeat proportionem vigecuplam. Si igitur ex maiore 3. auferemus $20\mathcal{Q}$. remanebit numerus $3-20\mathcal{Q}$ qui auferendus est ex 3. vt relinquantur $20\mathcal{Q}$. vt in hac formula apparet. Item si ex minore 2. detrahemus $12\mathcal{Q}$. reliquus erit numerus $2-12\mathcal{Q}$. qui ex 2. auferendus est, vt relinquatur $12\mathcal{Q}$. Quia vero ambo numeri ponuntur æqualiter imminuti, hoc est, ex vtroque idem numerus ablatus ponitur, erit æquatio inter $3-20\mathcal{Q}$. & $2-12\mathcal{Q}$. Additisque $20\mathcal{Q}$. vtrobique, inter 3 & $2+192\mathcal{Q}$. Ablatisque 2. vtrinque, inter 1. & $192\mathcal{Q}$. Eritque $12\mathcal{Q}.\frac{1}{192}$. Cum igitur ex 3. auferenda sint $3-20\mathcal{Q}$ & $2-12\mathcal{Q}$. ex 2. auferendus erit ex vtroque numero numerus $1\frac{188}{192}$. eruntque reliqui numeri $\frac{20}{192}$. & $\frac{1}{192}$. qui habent proportionem vigecuplam propositam.

$$\begin{array}{r} 3 + 0\ 2\mathcal{Q} \\ 3 - 20\ 2\mathcal{Q} \\ \hline 0 + 20\ 2\mathcal{Q} \end{array}$$

CIX. *109 Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt qui fit ex vno in alterum cum summa quadratorum, qui ex ipsis fiunt, efficiat numerum datum.*

SINT inueniendi duo numeri in proportione sesquialtera, ita vt ex vno in alterum fiat numerus, qui cum quadratis ipsorum efficiat 100. Ponantur numeri quæsiti $3\mathcal{Q}.2\mathcal{Q}$. in proportione sesquialtera. Ex vno in alterum fit numerus $6\mathcal{G}$. & eorum quadrati sunt $9\mathcal{G}$. & $4\mathcal{G}$. qui cum $6\mathcal{G}$. faciunt $19\mathcal{G}$. æquales 100. Diuisis igitur 100. per 19. fit $1\mathcal{G}.\frac{100}{19}$. ergo $12\mathcal{Q}$ erit $\sqrt{\mathcal{G}}\frac{100}{19}$. & $3\mathcal{Q}$. erunt $\sqrt{\mathcal{G}}\frac{900}{19}$. pro primo numero, quem posuimus $3\mathcal{Q}$. & secundus numerus, qui positus fuit $2\mathcal{Q}$. erit $\sqrt{\mathcal{G}}\frac{400}{19}$. ad quem $\sqrt{\mathcal{G}}\frac{900}{19}$. proportionem habet sesquialteram. Ex vno in alterum fit numerus $\sqrt{\mathcal{G}}\frac{360000}{361}$. hoc est, $\frac{600}{19}$. & summa quadratorum $\frac{900}{19}$. & $\frac{400}{19}$. est $\frac{1300}{19}$. quæ cum $\frac{600}{19}$. facit $\frac{1900}{19}$. hoc est, 100.

SINT rursus inueniendi duo numeri in proportione sesquialtera, ita vt numerus, qui ex vno in alterum fit, cum summa quadratorum, qui ex ipsis fiunt, faciat summam 2736. Repetita eadem operatione, erunt $19\mathcal{G}$. æquales 2736. Diuisis ergo 2736. per 19. fiet $1\mathcal{G}.144$. & $12\mathcal{Q}$. 12. Igitur primus numerus positus $3\mathcal{Q}$. erit 36. & secundus, quem posuimus $2\mathcal{Q}$. erit 24. Ex 36. in 24. fiunt 864. quæ cum quadratis 576. 1296. faciunt 2736. ipsique numeri inuenti 36. & 24. proportionem habent sesquialteram.

CX. *110 Inuenire numerum, qui in se ductus, & productus in datum quemuis numerum, faciat numerum, qui habeat ad inuenti numeri cubum proportionem quamcunque datam.*

INVENIENDVS sit numerus, qui in se ductus, & hic productus in 10. faciat numerum in proportione quintupla ad inuenti numeri cubum, hoc est, qui quinquies eius cubum contineat. Ponatur quæsitus numerus $1\mathcal{Q}$. Hic in se ductus facit $1\mathcal{G}$. & $1\mathcal{G}$. in 10. facit $10\mathcal{G}$. qui numerus debet esse quintuplus cubi ex $1\mathcal{Q}$. procreati. Est autem cubus numeri $1\mathcal{Q}.1\mathcal{C}$. qui quinquies sumptus facit $5\mathcal{C}$. æquales $10\mathcal{G}$. Diuisis ergo 10. per 5. fiet $1\mathcal{Q}$. 2. numerus quæsitus. propterea quod numeri Cossici sunt collaterales. Nam ex 2. in 2. fit 4. & ex 4. in 10. fit numerus 40. quintuplus cubi 8. ex 2. procreati.

SI numerus ductus in se, & productus in 10. debet habere proportionem sesquialteram ad cubum, erit æquatio inter $10\mathcal{G}$. & $1\frac{1}{2}\mathcal{C}$. Diuisis igitur 10. per $1\frac{1}{2}$. siue per $\frac{3}{2}$. fiet $12\mathcal{Q}\frac{2}{3}$. qui numerus in se ductus facit $\frac{400}{9}$.

& hic in 10. facit $\frac{4000}{9}$. Cubus autem numeri $\frac{20}{3}$. est $\frac{8000}{27}$. ad quem numerus $\frac{4000}{9}$. hoc est $\frac{120000}{27}$. proportionem habet sesquialteram.

SIC si numerus ductus in se, & productus in 10. debet ad cubum habere proportionem subduplam; Posito numero $12\mathcal{Q}$. fiet ex $12\mathcal{Q}$ in se numerus $1\mathcal{G}$. & ex $1\mathcal{G}$. in 10. numerus $10\mathcal{G}$. qui subduplus esse debet $1\mathcal{C}\mathcal{C}$. qui fit ex $12\mathcal{Q}$ in se cubice. Igitur æquatio erit inter $20\mathcal{G}$. & $1\mathcal{C}\mathcal{C}$. eritque $12\mathcal{Q}.20$. Nam ex 20. in se, fit 400. & ex 400. in 10. fit 4000. qui subduplus est cubi 8000. qui fit ex 20. in se cubice.

111 Datum numerum in duas partes secare, vt prior multiplicata per quemuis numerum producat numerum, qui superet numerum productum ex parte posteriore in quemlibet alium numerum, numero dato, quando id fieri potest. CXI.

SIT numerus 30. diuidendus in duas partes, vt prior ducta in 10. procreet numerum, qui numero 20. superet numerum, quem posterior pars in 40. multiplicata producit. Ponatur prior pars $12\mathcal{Q}$. ideoque posterior $30-12\mathcal{Q}$. Ex $12\mathcal{Q}$. in 10. fit numerus $120\mathcal{Q}$. & ex $30-12\mathcal{Q}$. in 40. fit numerus $1200-480\mathcal{Q}$. quem prior productus superare debet numero 20. Ergo si posteriori addentur 20. fiet æqualitas inter $120\mathcal{Q}$. & $1220-480\mathcal{Q}$. Additisque $480\mathcal{Q}$. vtrinque, inter $500\mathcal{Q}$. & 1220. Diuisis ergo 1220. per 50. fiet $12\mathcal{Q}.24\frac{1}{5}$. prior pars, ideoque posterior erit $5\frac{1}{5}$. Prior in 10. ducta facit 244. posterior in 40. facit 224. qui ab illo superatur numero 20.

DIXIMVS in ænigmate, [quando id fieri potest] quia non semper quæstio solui potest. vt si prior productus superare debeat posteriorem productum, numero 300. reperietur æqualitas inter $1500-480\mathcal{Q}$. & $120\mathcal{Q}$. Additisque $480\mathcal{Q}$. vtrinque, inter 1500. & $500\mathcal{Q}$. Diuisisque 1500. per 50. fiet $12\mathcal{Q}.30$. vna pars dati numeri 30. quod est ineptum. Vbi etiam vides, ex ipsa operatione per regulam Algebræ cognosci posse, num quæstio solui possit, nec ne.

112 Datum numerum in duas partes secare, vt prior in quemlibet numerum ducta faciat numerum in data proportione ad numerum factum ex posteriori parte in quemuis alium numerum multiplicata. CXII.

SIT numerus 40. secandus in duas partes, vt ex priore in 10. fiat numerus in proportione subdupla ad numerum factum ex parte posteriore in 30. Ponatur prior pars $1\mathcal{Q}$. ideoque posterior $40-1\mathcal{Q}$. Ex $1\mathcal{Q}$. in 10. fit numerus $10\mathcal{Q}$. qui subduplus esse debet numeri $1200-30\mathcal{Q}$. producti ex $40-1\mathcal{Q}$. in 30. hoc est, æquatio fiet inter $20\mathcal{Q}$. & $1200-30\mathcal{Q}$. Additisque $30\mathcal{Q}$. vtrobique, inter $50\mathcal{Q}$. & 1200. Diuisis ergo 1200. per 50. fiet $1\mathcal{Q}.24$. prior pars, ac proinde posterior erit 16. Ex 24. in 10. fit 240. qui numerus subduplus est numeri 480. facti ex 16. in 30.

113 Datum numerum in duos distribuere, vt prior diuisus per datum quemuis numerum faciat Quotientem in data proportione ad Quotientem, qui fit ex posteriori numero per quemlibet numerum diuiso. CXIII.

SIT numerus 100. tribuendus in duos, vt prior diuisus per 10. faciat Quotientem in proportione sextupla ad Quotientem, quem facit posterior numerus diuisus per 20. Ponatur prior $1\mathcal{Q}$, ac proinde posterior $100-1\mathcal{Q}$. Diuiso priore per 10. fit Quotiens $\frac{1}{10}\mathcal{Q}$. Diuiso autem posteriore per 20. fit Quotiens $5-\frac{1}{20}\mathcal{Q}$. Et quia ille Quotiens ad hunc debet habere proportionem sextuplam; erit æquatio inter $\frac{1}{10}\mathcal{Q}.\&\ 30-\frac{6}{20}\mathcal{Q}$. Et additis $\frac{6}{20}\mathcal{Q}$. vel $\frac{3}{10}\mathcal{Q}$. vtrobique, inter $\frac{4}{10}\mathcal{Q}.\&\ 30$. Diuisis ergo 30 per $\frac{4}{10}$. fiet $12\mathcal{Q}.75$. prior numerus. Posterior ergo erit 25. Diuisis 75. per 10. fit Quotiens $7\frac{5}{10}$. Diuisis vero 25. per 20. fit Quotiens $2\frac{5}{20}$. ad quem ille Quotiens $\frac{75}{10}$. vel $\frac{150}{20}$. proportionem habet sextuplam.

114 Tres numeros in continua proportione data inuenire, vt numerus ex minore in medium productus habeat ad maiorem quamcunque proportionem datam. CXIV.

INVENIENDI sint tres numeri in continua proportione sesquitertia, vt ex minore in medium fiat numerus ad maiorem in proportione quintupla. Ponantur quæsiti tres numeri $9\mathcal{Q}.12\mathcal{Q}.16\mathcal{Q}$. in proportione sesquitertia. Ex $9\mathcal{Q}$. in $12\mathcal{Q}$. fit numerus $108\mathcal{G}$. qui debet esse quintuplus tertij $16\mathcal{Q}$. Ergo æquatio erit inter $108\mathcal{G}.\&\ 80\mathcal{Q}$. Diuisisque 80. per 108. fiet $12\mathcal{Q}.\frac{80}{108}$. siue $\frac{20}{27}$. propterea quod numeri Cossici collaterales sunt. Primus ergo numerus positus $9\mathcal{Q}$. erit $\frac{180}{27}$. Secundus positus $12\mathcal{Q}$. erit $\frac{240}{27}$. & tertius positus $16\mathcal{Q}$. erit $\frac{320}{27}$. Ex primo in secundum fit numerus $\frac{43200}{729}$. qui quintuplus est ad $\frac{3240}{27}$. siue ad $\frac{8640}{724}$.

SI productus numerus ex primo in secundum debet esse æqualis tertio, erit æquatio inter $108\mathcal{G}.\&\ 16\mathcal{Q}$. Diuisis ergo 16. per 108. fiet $12\mathcal{Q}.\frac{4}{27}$. ac proinde tres numeri quæsiti erunt $\frac{36}{27}.\frac{48}{27}.\frac{64}{27}$. siue $1\frac{9}{27}.1\frac{7}{9}.2\frac{10}{27}$.

SI productus ex primo in secundum debet esse semissis tertij, erit æquatio inter $216\mathcal{G}.\&\ 16\mathcal{Q}$. Diuisis igitur 16. per 216. fiet $12\mathcal{Q}.\frac{16}{216}$. siue $\frac{2}{27}$. ac proinde tres numeri quæsiti erunt $\frac{18}{27}.\frac{24}{27}.\frac{32}{27}$. hoc est $\frac{2}{3}.\frac{8}{9}.1\frac{5}{27}$. Atque ex $\frac{2}{3}$. in $\frac{8}{9}$. fit numerus $\frac{16}{27}$. qui semissis est tertij $1\frac{5}{27}$.

115 Datum numerum in tres partiri, vt singuli in tres singulos numeros datos, vel in vnum eundemque numerum datum multiplicati, producant tres numeros in data proportione continua. CXV.

SIT numerus datus 80. diuidendus in tres, vt primo ducto in 4. & secundo in 3. & tertio in 7. producan-

tur tres numeri in continua proportione quadrupla. Ponatur prima pars 1☐. quæ ducta in 4. facit 4☐. Et quia ſecunda pars ducta in 3. debet gignere numerũ 16☐. quadruplum videlicet numeri 4☐. quærendus erit numerus, qui in 3. ductus producat 16☐. Is erit Quotiens, ſi 16☐. diuidantur per 3. nimirum $\frac{16}{3}$☐. eritq; ſecunda pars $\frac{16}{3}$☐. Rurſus quia tertia pars ducta in 7. debet procreare numerũ 64☐. quadruplum videlicet numeri 16☐. quærendus erit numerus, qui in 7. ductus faciat 64☐. Is erit $\frac{64}{7}$☐. Quotiens videlicet, ſi 64☐. per 7. diuidantur. Atque ita tres partes quæſitæ ſunt 1☐. $\frac{16}{3}$☐. $\frac{64}{7}$☐. quæ ordine in 4. 3. & 7. ductæ procreant 4☐. 16☐. & 64☐. in data proportione quadrupla continua. Reliquum iam eſt, vt prædictæ tres partes in vnam ſummam collectæ faciant 80. numerum datum. Faciunt autem $1\frac{304}{21}$☐. ſiue $\frac{325}{21}$☐. Eſt ergo æquatio inter $\frac{325}{21}$☐ & 80. Diuiſis ergo 80. per $\frac{325}{21}$. fiet 1☐. $\frac{1680}{325}$. prima pars, quæ poſita fuit 1☐. Quoniam autem ſecunda pars inuenta fuit $\frac{16}{3}$☐. ſi $\frac{1680}{325}$. valor vnius radicis ducatur in $\frac{16}{3}$☐. producetur ſecunda pars $\frac{26880}{975}$. Eadem ratione, cum tertia pars inuenta ſit $\frac{64}{7}$☐. ſi vnius radicis valor $\frac{1680}{325}$. ducatur in $\frac{64}{7}$☐. producetur tertia pars $\frac{107520}{2275}$. Atque hæ tres partes $\frac{1680}{325}$. $\frac{26880}{975}$. $\frac{107520}{2275}$. hoc eſt, $5\frac{155}{65}$. $27\frac{111}{195}$. $47\frac{215}{455}$. in vnum collectæ faciunt 80. numerum datum. & multiplicatæ ordinatim per 4. 3. 7. procreant tres numeros $\frac{6720}{325}$. $\frac{26640}{975}$. $\frac{753640}{2275}$. in continua proportione quadrupla.

QVANDO datus numerus 80. tribuendus eſt in tres, vt ſingulis partibus per eundem numerum quemcunque, vt per 5. multiplicatis, gignantur tres numeri in continua proportione quadrupla. fiet id facili negotio. Nam ſi per ænigma 49. diuidatur numerus datus 80. in tres partes continue quadruplas, videlicet in $\frac{80}{21}$. $\frac{320}{21}$. $\frac{1280}{21}$. & ſingulæ per propoſitum numerũ 5. multiplicentur, [a] producentur tres numeri in eadem proportione quadrupla, $\frac{400}{21}$. $\frac{1600}{21}$. $\frac{6400}{21}$. id eſt, $19\frac{1}{21}$. $76\frac{4}{21}$. $304\frac{16}{21}$.

[a] *ſchol. 18. ſept.*

CXVI. *116 Datum numerum in tres partes diuidere, vt ſingulæ per tres ſingulos numeros datos multiplicatæ producant eundem numerum: Vel vt tam priores duæ per duos datos numeros ductæ producant vnum eundemque numerum, quam poſteriores duæ per alios duos numeros datos multiplicatæ producant vnum quoque & eundem numerum.*

SIT datus numerus 100. diuidendus in tres, vt primo ducto in 5. ſecundo in 2. & tertio in 6. fiant tres numeri æquales. Ponatur primus 1☐. quo ducto in 5. fiunt 5☐. Et quia tantundem debet facere ſecundus ductus in 2. diuidemus 5☐. per 2. Nam Quotiens $\frac{5}{2}$☐. erit ſecundus numerus, cum in 2. ductus faciat 5☐. Et quoniam tantũdem facere debet tertius in 6. ductus, diuidemus 5☐. per 6. Quotiens enim $\frac{5}{6}$☐. erit tertius numerus, cum in 6. ductus faciat 5☐. Reliquum iam eſt, vt omnes tres partes 1☐. $2\frac{1}{2}$☐. $\frac{5}{6}$☐. faciant datum numerum 100. Faciunt autem $4\frac{1}{3}$☐. Eſt ergo æquatio inter $4\frac{1}{3}$☐. & 100. diuiſisque 100. per $4\frac{1}{3}$. hoc eſt, per $\frac{13}{3}$. fiet 1☐. $23\frac{7}{13}$. quæ dat primum numerum, quem poſuimus 1☐. Secundus ergo inuentus $2\frac{1}{2}$☐. erit $57\frac{9}{13}$. Et tertius inuentus $\frac{5}{6}$☐. erit $19\frac{3}{13}$. Atque hi tres numeri $23\frac{7}{13}$. $57\frac{9}{13}$. $19\frac{3}{13}$. faciunt datum numerum 100. Et ductæ in 5. 2. & 6. producunt tres numeros æquales $115\frac{5}{13}$. $115\frac{5}{13}$. $115\frac{5}{13}$.

SED iam tam priores duo numeri multiplicati per 6. & 3. debeant producere duos numeros æquales, quam poſteriores duo ducti in 5. & 8. Ponatur rurſum primus 1☐. Ex 1☐. in 6. fiunt 6☐. Et quia tantundem facere debet ſecundus ductus in 3. diuidemus 6☐. per 3. Quotiens enim 2☐. dabit ſecundum numerum, cum ductus in 3. faciat 6☐. Deinde ex ſecundo hoc 2☐. in 5 fiunt 10☐. Et quoniam tantundem debet facere tertius ductus in 8. diuidemus 10☐. per 8. Nam Quotiens $1\frac{1}{4}$☐. erit tertius numerus, cum ductus in 8. gignat 10☐. Reliquum nunc eſt, vt tres hi numeri 1☐. 2☐. $1\frac{1}{4}$☐. faciant numerum datum 100. Faciunt autem $4\frac{1}{4}$☐. qui numerus æqualis eſſe debet 100. Diuiſis ergo 100. per $4\frac{1}{4}$. id eſt, per $\frac{17}{4}$. fiet 1☐. $23\frac{9}{17}$. primus numerus, qui poſitus fuit 1☐. Secundus igitur inuẽtus 2☐. erit $47\frac{1}{17}$. Et tertius inuentus $1\frac{1}{4}$☐. erit $29\frac{7}{17}$. Atq; hi tres numeri $23\frac{9}{17}$. $47\frac{1}{17}$. $29\frac{7}{17}$. faciunt ſimul 100. Et priores duo ducti in 6 & 3. generant eundem numerum $141\frac{3}{17}$. Poſteriores vero duo ducti in 5. & 8. procreant eundem numerum $235\frac{1}{17}$.

CXVII. *117 Datum numerum in tres partes diſtribuere, vt prima parte diuiſa per quemuis numerum. Et ſecunda multiplicata per alium datum numerum. Ac tertia diuiſa per quemcunque etiam numerum, proueniant tres numeri æquales.*

SIT datus numerus 178. diuidendus in tres partes, vt tantum fiat ex diuiſione primæ partis per 5. quantum ex multiplicatione ſecundæ per 8. & quantum ex diuiſione tertiæ per 6. Ponatur prima pars 1☐. qua diuiſa per 5. fit Quotiens $\frac{1}{5}$☐. Et quia tantundem fieri debet ex ſecunda ducta in 8. diuidemus $\frac{1}{5}$☐. per 8. Nam Quotiens $\frac{1}{40}$☐. erit ſecunda pars, quæ multiplicata per 8. facit $\frac{1}{5}$☐. Et quia tantundem facere debet tertia diuiſa per 6. multiplicabimus $\frac{1}{5}$☐. per 6. Productus enim numerus $\frac{6}{5}$☐. erit tertia pars, qua diuiſa per 6. Quotiens fit $\frac{1}{5}$☐. Reliquum iam eſt, vt tres partes 1☐. $\frac{1}{40}$☐. & $\frac{6}{5}$☐. faciant datum numerum 178. Faciunt autem $2\frac{9}{40}$☐. Igitur æquatio erit inter 178. & $2\frac{9}{40}$☐. Et ſi diuidantur 178 per $2\frac{9}{40}$. ſiue per $\frac{89}{40}$. fiet 1☐. 80. prima pars, quam poſuimus 1☐. Secunda autem erit 2. quæ habetur, ſi radix inuenta 80. multiplicetur per $\frac{1}{40}$. propterea quod ſecunda pars inuenta fuit $\frac{1}{40}$☐. Tertia denique erit 96. quæ quidem producetur, ſi eadem radix inuenta 80 multiplicetur per $\frac{6}{5}$. propterea quod tertia pars inuenta fuit $\frac{6}{5}$☐. Atque hæ tres partes 80. 2. 96. conficiunt 178. numerum datum. Et ſiue prima per 5 diuidatur, ſiue ſecunda ducatur in 8. ſiue denique tertia diuidatur per 6. producetur ſemper idem numerus 16.

CXVIII. *118 Datum numerum in tres partes ſecare, vt ſingulæ per ſingulos tres numeros datos diuiſæ, faciant vnum eundemque Quotientem.*

SIT datus numerus 240. tribuendus in tres partes, vt prima diuiſa per 5. Et ſecunda per 3. Et tertia per 7.

per 7. procreetur ſemper idem Quotiens. Ponatur prima pars 1☐. qua diuiſa per 5 fit Quotiens $\frac{1}{5}$☐. Et quia tantundem fieri debet ex ſecunda parte diuiſa per 3. multiplicabimus $\frac{1}{5}$☐. per 3. Productus enim numerus $\frac{1}{5}$☐. erit ſecunda pars, quæ diuiſa per 3. facit Quotientem $\frac{1}{15}$☐. Quoniam autem ex diuiſione tertiæ partis per 7. debet etiam produci $\frac{1}{15}$☐. multiplicabimus $\frac{1}{15}$☐. per 7. Numerus enim productus $\frac{7}{15}$☐. erit tertia pars, qua diuiſa per 7. Quotiens fit $\frac{1}{15}$☐. Reſtat, vt vt tres hæ partes 1☐. $\frac{1}{5}$☐. $\frac{2}{15}$☐. ſimul ſumptæ ſint 240. Faciunt autem 32☐. Igitur æquatio erit inter 32☐ & 240. Diuiſisque 240. per 3 fiet 1☐. 80. prima pars. Secunda erit 48. quæ habetur, ſi inuenta radix 80. ducatur in $\frac{3}{5}$. cum ſecunda pars inuenta ſit $\frac{3}{5}$☐. Tertia denique erit 112. quæ habetur, ſi eadem radix inuenta 80. ducatur in $\frac{7}{5}$. quandoquidẽ tertia pars inuenta fuit $\frac{7}{5}$☐. Atq; omnes hæ tres partes 80. 48. 112. faciunt 240. numerum propoſitum. Et tam prima diuiſa per 5. quam ſecunda per 3. & tertia per 7. fit idem ſemper Quotiens 16.

119 Duos numeros in data proportione inuenire, vt quælibet pars aliquota minoris in aliam datam partem maioris multiplicata gignat numerum quemcunque datum. CXIX.

SINT inueniendi duo numeri in proportione tripla, vt $\frac{1}{4}$. minoris in $\frac{1}{4}$. maioris ducta procreet numerum 90. Ponatur minor 1☐. & maior 3☐. vt habeant datam proportionem triplam. Ex quarta parte minoris, nimirum $\frac{1}{4}$☐. in ſemiſſem maioris, id eſt, in $\frac{3}{2}$☐ fit numerus $\frac{3}{8}$✠. æqualis 90. Diuiſis ergo 90. per $\frac{3}{8}$. fiet 1✠. 240. Et 1☐. erit $\sqrt{}$✠ 240. minor numerus. Maior erit huius triplus $\sqrt{}$✠ 2160. Iam $\frac{1}{4}$. minoris, videlicet $\sqrt{}$✠ 15. ducta in $\frac{1}{2}$. maioris, nimirum in $\sqrt{}$✠ 540. facit $\sqrt{}$✠ 8100. hoc eſt, numerum datum 90.

120 Numerum inuenire, quo per datum numerum multiplicato, & per productum diuiſo alio numero dato, Quotiens ad inuentum numerum datam habeat proportionem. CXX.

SIT inueniendus numerus, quo multiplicato per 5. & per productum diuiſo numero 60. Quotiens ad numerum inuentum proportionem habeat ſeſquialteram. Ponatur numerus quæſitus 1☐. Hoc ducto in 5. fiunt 5☐. Diuiſis autem 60. per 5☐. fit Quotiens $\frac{60}{5\text{☐}}$. qui ſeſquialteram proportionem habere debet ad 1☐. Habet autem & numerus $1\frac{1}{2}$☐. hoc eſt, $\frac{3\text{☐}}{2}$. (qui producitur ex 1☐. in $1\frac{1}{2}$. ſiue in $\frac{3}{2}$.) ad 1☐. proportionem ſeſquialteram. Eſt ergo æquatio inter $\frac{60}{5\text{☐}}$. & $\frac{3\text{☐}}{2}$. quæ per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 120. & 15✠. Diuiſis igitur 120. per 15. fiet 1✠. 8. Et 1☐. erit $\sqrt{}$✠ 8. numerus, quem quærimus. Nam ex $\sqrt{}$✠ 8 in 5 fit $\sqrt{}$✠ 200. per quem numerum ſi diuidantur 60. fit Quotiens $\sqrt{}$✠ 18. qui ad $\sqrt{}$✠ 8. ſeſquialteram proportionem habet: quippe cum $\sqrt{}$✠ 8. ducta in $1\frac{1}{2}$. faciat $\sqrt{}$✠ 18.

120		15✠
60	X	3☐
5☐		2

121 Tres numeros inuenire Arithmetice proportionales, ita vt eorum ſumma ſit data pars aliquota numeri, qui ex eorum multiplicatione inter ſe producitur. Vel (quod idem eſt) vt numerus ex ipſorum multiplicatione productus ad eorundem ſummam proportionem habeat datam. CXXI.

DEBEAT ſumma inuentorum numerorum eſſe $\frac{1}{5}$. numeri ex eorum multiplicatione producti, hoc eſt, numerus productus ad ſummam habere debeat proportionem quintuplam. Ponantur tres numeri quæſiti 1☐. 2☐. 3☐ qui æqualiter ſe excedunt numero 1☐. Eorũ ſumma eſt 6☐. At numerus ex multiplicatione productus 6☐. Nam ex 1☐. in 2☐ fit numerus 2✠. Et ex 2✠. in 3☐. fit numerus 6☐. Et quoniam ſumma 6☐ debet eſſe $\frac{1}{5}$. numeri 6☐. erit æquatio inter 30☐. & 6☐. Diuiſis igitur 30. per 6. fiet 1✠. 5. (propterea quod inter 2☐ & 6☐. vna denominatiæ, nimirum ✠, eſt interpoſita) ideoque 1☐. erit $\sqrt{}$✠ 5. & 2☐. erunt $\sqrt{}$✠ 20. & 3☐ eruut $\sqrt{}$✠ 45. Itaque tres numeri inuenti ſunt $\sqrt{}$✠ 5. $\sqrt{}$✠ 20. $\sqrt{}$✠ 45. qui ſe æqualiter excedunt numero $\sqrt{}$✠ 5. vt patet, ſi primus à ſecundo, & ſecundus à tertio ſubtrahatur. Summa eorum eſt $\sqrt{}$✠ 180. & numerus ex eorum multiplicatione productus $\sqrt{}$✠ 4500. Conſtat autem $\sqrt{}$✠ 180. eſſe $\frac{1}{5}$ numeri $\sqrt{}$✠ 4500. hoc eſt, $\sqrt{}$✠ 4500. ad $\sqrt{}$✠ 180. proportionem habere quintuplam; cum numerus $\sqrt{}$✠ 180. ductus in 5. faciat $\sqrt{}$✠ 4500.

DEBEAT deinde numerus productus ad ſummam habere proportionem, quam 24. ad 1. hoc eſt, ſumma debeat eſſe $\frac{1}{24}$. numeri producti. Ponantur numeri proportionales Arithmetice, 2☐. 3☐. 4☐. quorum ſumma 9☐ & numerus productus 24☐. Et quia 9☐. debent eſſe $\frac{1}{24}$. numeri 24☐. hoc eſt, hic numerus ad illum habere debet proportionem, quam 24. ad 1. ſi 9☐. multiplicentur per 24. fiet æqualitas inter 216☐ & 24☐. Diuiſis igitur 216. per 24. fiet 1✠. 9. & 1☐. 3. Erunt igitur tres numeri quæſiti 6. 9. 12. quod poſiti ſint 2☐. 3☐. 4☐. Summa eorum 27. eſt $\frac{3}{24}$. pars numeri 648. ex eorum multiplicatione producti: propterea quod ex 27. in 24. gignatur numerus 648.

122 Tres numeros inuenire in continua proportione data, vt ex eorum multiplicatione gignatur datus numerus. CXXII.

SINT tres numeri inueniendi continue quadrupli, vt inter ſe multiplicati procreent numerum 27. Ponantur quæſiti numeri 1☐. 4☐. 16☐. in continua proportione quadrupla. Ex 1☐ in 4☐. fit numerus 4✠. & ex 4✠. in 16☐. fit numerus 64☐. æqualis 27. Diuiſis ergo 27. per 64. fit 1☐. $\frac{27}{64}$ & 1☐. $\frac{3}{4}$. Sunt ergo tres numeri quæſiti $\frac{3}{4}$. 1. $\frac{4\frac{2}{3}}{4}$. hoc eſt, $\frac{3}{4}$. 3. 12. quadrupli, qui inter ſe multiplicati producunt 27.

SINT rurſum inueniendi tres numeri ſeſquialteri, qui inter ſe multiplicati faciant 12. Ponantur tres numeri ſeſquialteri 1☐. $1\frac{1}{2}$☐. $2\frac{1}{4}$☐ hoc eſt, 1☐. $\frac{3}{2}$☐. $\frac{9}{4}$☐. Ex 1☐ in $\frac{3}{2}$☐ fit numerus $\frac{3}{2}$✠. Et ex $\frac{3}{2}$✠ in $\frac{9}{4}$☐.

in $\frac{9}{4}$℞. fit numerus $\frac{27}{8}$ℭ. hoc est, $3\frac{3}{8}$ℭ. æqualis 12. Diuisis ergo 12. per $\frac{27}{8}$. fiet 1ℭ. $3\frac{5}{9}$. & 1℞. √ℭ $3\frac{5}{9}$. primus numerus, quem posuimus 1℞. Secundus ergo positus $1\frac{1}{2}$℞. erit √ℭ 12. Et tertius positus $2\frac{1}{4}$℞. erit √ℭ $40\frac{1}{2}$. propterea quod ex $1\frac{1}{2}$. in √ℭ $3\frac{5}{9}$. fit √ℭ 12. & ex $2\frac{1}{4}$. in √ℭ $3\frac{5}{9}$. fit √ℭ $40\frac{1}{2}$. Iam ex √ℭ $3\frac{5}{9}$. in √ℭ 12. fit numerus √ℭ $42\frac{2}{3}$. Et ex √ℭ $42\frac{2}{3}$. in √ℭ $40\frac{1}{2}$. fit numerus √ℭ 1728. hoc est, 12.

CXXIII. 123 *Numerum inuenire, qui ductus in suam radicem quadratam producat datum numerum.*

SIT inueniendus numerus, qui in suam radicem quadratam ductus faciat 4. Ponatur numerus quæsitus 1ȝ. Hic ductus in 1℞ suam radicem quadratam facit 1ℭ. æqualem 4. Diuisis ergo 4. per 1. fiet 1ℭ 4. eiusq; radix cubica √ℭ 4. cuius quadratum est √ℭ 16. numerus quæsitus; quem posuimus 1ȝ. Hic enim ductus in √ℭ 4 suam radicem quadratam facit √ℭ 64. hoc est, 4.

SIT deinde producendus numerus $15\frac{5}{8}$. inuenieturque æqualitas inter 1ℭ. & $15\frac{5}{8}$. Diuisis ergo $15\frac{5}{8}$. per 1. fiet 1ℭ. $15\frac{5}{8}$. hoc est, $\frac{125}{8}$. cuius radix cubica $\frac{5}{2}$. & huius quadratum $\frac{25}{4}$. numerus quæsitus, quem posuimus 1ȝ. Atque hic in suam radicem $\frac{5}{2}$. ductus facit $\frac{125}{8}$. hoc est, $15\frac{5}{8}$.

CXXIV. 124 *Numerum inuenire, cuius radix quadrata ad eiusdem radicem cubicam habeat datam proportionem.*

SIT inueniendus numerus, cuius radix quadrata ad eiusdem radicem cubicam habeat proportionem sesquialteram. Ponatur quæsitus numerus 1ȝℭ. vt nimirum habeat vtramq; radicem propositam. Radix eius quadrata est 1ℭ. & radix cubica 1ȝ. vt ex ijs constat, quæ ad initium cap. 12. docuimus. quia 1ℭ in se quadrate facit 1ȝℭ, & 1ȝ in se cubice similiter facit 1ȝℭ. Reliquum est, vt 1ℭ. ad 1ȝ proportionem habeat sesquialteram, hoc est, æquatio sit inter 1ℭ, & $1\frac{1}{2}$ȝ. quod $1\frac{1}{2}$ȝ ad 1ȝ, habeat quoque sesquialteram proportionem. Diuisis igitur $1\frac{1}{2}$. per 1, fiet 1℞ $1\frac{1}{2}$. (quia numeri Cossici sunt collaterales) cuius ȝℭ est $\frac{729}{64}$. siue $11\frac{25}{64}$. Huius radix quadrata est $\frac{27}{8}$. hoc est, $3\frac{3}{8}$. Radix autem cubica $\frac{9}{4}$. siue $2\frac{1}{4}$. Constat autem $3\frac{3}{8}$. ad $2\frac{1}{4}$. hoc est, $\frac{27}{8}$. ad $\frac{18}{8}$. habere proportionem sesquialteram.

SI proportio proponatur tripla, reperietur eodem discursu æquatio inter 1ℭ. & 3ȝ. Diuisisque 3. per 1. fiet 1℞ 3. cuius zensicubus est 729. atque huius radix quadrata 27. ad radicem cubicam 9. proportionem habet triplam.

CXXV. 125 *Duos numeros inuenire, vt ex vno in alterum gignatur numerus, qui ad duos inuentos habeat duas proportiones datas, maiorem tamen ad minorem, & minorem ad maiorem.*

SINT inueniendi duo numeri, vt ex vno in alterum fiat numerus, qui ad minorem habeat proportionem triplam sesquialteram, & ad maiorem, duplam. Ponatur numerus productus 1℞. Ergo minor numerus quæsitus erit $\frac{2}{7}$℞. & maior $\frac{1}{2}$℞. quippe cum 1℞ ad $\frac{2}{7}$℞ habeat proportionem triplam sesquialteram, & duplam ad $\frac{1}{2}$℞. Ex $\frac{2}{7}$℞ in $\frac{1}{2}$℞. fit numerus $\frac{2}{14}$ȝ. siue $\frac{1}{7}$ȝ. æqualis posito producto 1℞. Diuisa ergo 1 per $\frac{1}{7}$. fiet 1℞. 7. numerus scilicet qui produci debet: cum numeri Cossici sint collaterales. Quia vero minor inuentus fuit $\frac{2}{7}$℞. erit minor 2. & maior $3\frac{1}{2}$. qui inuentus fuit $\frac{1}{2}$℞. Manifestum autem est, 7. habere ad 2. proportionem triplam sesquialteram, & ad $3\frac{1}{2}$. duplam.

CXXVI. 126. *Duos numeros inuenire datam summam efficientes, ita vt vteruis cum data parte, vel partibus alterius faciat quemuis numerum datum: qui minor sit, quam data summa, & maior data parte, vel partibus datis eiusdem summæ datæ.*

SINT inueniendi duo numeri, quorum summa 60. ita vt prior numerus, cum $\frac{3}{7}$. posterioris faciat 50. Ponatur prior 1℞. ideoque posterior 60 — 1℞. Huius $\frac{3}{7}$. sunt $25\frac{5}{7}$ — $\frac{3}{7}$℞. quæ cum 1℞ faciunt $\frac{4}{7}$℞ + $25\frac{5}{7}$. numerum æqualem 50. quia vt — $\frac{3}{7}$℞ addantur ad 1℞. debent subtrahi $\frac{3}{7}$℞ ex 1℞. atque ita remanent $\frac{4}{7}$℞ cum signo + vt supra in subtractione dictum est. Ablatis $25\frac{5}{7}$. vtrobique, erit æquatio inter $\frac{4}{7}$℞. & $24\frac{2}{7}$. Diuisis ergo $24\frac{2}{7}$. per $\frac{4}{7}$. fiet 1℞. $42\frac{1}{2}$. prior numerus: posterior autem erit $17\frac{1}{2}$ cuius $\frac{3}{7}$. sunt $7\frac{1}{2}$. quæ cum priori parte faciunt 50.

SI prior numerus cum $\frac{3}{7}$. posterioris deberet facere 25. fieri id non posset, quia numerus 25. minor est, quam $\frac{3}{7}$ datæ summæ 60. vt experiri poteris. At si prior numerus cum $\frac{3}{7}$. posterioris debeat facere 26. fieri id poterit, eritque prior numerus $\frac{1}{2}$. & posterior $59\frac{1}{2}$. Huius $\frac{3}{7}$. sunt $25\frac{1}{2}$. quæ cum priori parte faciunt 26.

Eodem pacto soluetur ænigma, si posterior numerus cum $\frac{3}{7}$. prioris facere debeat datum numerum: si nimirum posterior numerus ponatur 1℞, &c.

CXXVII 127 *Quinque numeros inuenire, ita vt quatuor quomodolibet sumpti sine reliquo faciant quinque numeros datos: dummodo quarta pars summæ propositorum quinque numerorum maior sit singulis numeris postulatis.*

INVENIENDI sint quinque numeri, ita vt quatuor sine primo faciant 127. Et quatuor sine secundo, 119. Et quatuor sine tertio, 109. Et quatuor sine quarto, 104. Et quatuor sine quinto, 97. Vbi vides, quartam partem summæ 556. ex datis numeris 127.119.109.104.97. collectæ esse 139. numerũ singulis illis numeris maiorem. Quoniam ergo summa omniũ quatuor sine quinto est minima omnium, nimirum 97. erit necessario quintus numerus omniũ maximus, quandoquidẽ quintus cum quibuslibet alijs tribus facit maiorẽ summam, quam

quam 97. Ponatur ergo quintus numerus 1℞. ac proinde cum alij quatuor sine quinto faciant 97. erunt omnes quinque numeri simul 97 + 1℞. Et quia quatuor sine quarto faciunt 104. Si ex summa omnium 97 + 1℞. detrahãtur 104. reliquus erit quartus 1℞ — 7. Deinde quia quatuor sine tertio faciunt 109. si ex eadem summa 97 + 1℞. demantur 109. remanebit tertius 1℞ — 12. Rursus quoniam quatuor sine secundo faciunt 119. si 119. subducantur ex eadem summa 97 + 1℞ relinquetur secundus 1℞ — 22. Denique quia quatuor sine primo faciunt 127. si 127. ex eadẽ summa 97 + 1℞. auferatur, remanebit primus 1℞ — 30. Reliquum iam est, vt omnes hi quinque numeri inuenti faciant simul summam omnium 97 + 1℞. Faciunt autem 5℞ — 71. Igitur æquatio erit inter 97 + 1℞ & 5℞ — 71. Additisque 71. vtrobique, inter 168 + 1℞. & 5℞. Ablataque 1℞. vtrinq;, inter 168. & 4℞. Diuisis ergo 168. per 4. fiet 1℞. 42. quintus numerus, quem posuimus esse 1℞. Ergo quartus inuentus 1℞ — 7. erit 35. Et tertius inuentus 1℞ — 12. erit 30. Secundus autem inuentus 1℞ — 22. erit 20. Primus denique, qui inuentus fuit 1℞ — 30. erit 12. adeo vt quinque numeri quæsiti sint ordine 12.20.30.35.42. qui ænigma propositum expediunt.

Hoc ænigma aliter solutum fuit in quatuor numeris in ænigmate 59.

128 *Numerum inuenire, ita vt tres quadrati ex eius tribus partibus datis descripti, & in vnam summam collecti, efficiant ipsum numerum inuentum, vel alium quemcunque datum.* CXXVIII

SIT primum inueniendus numerus, ita vt tres quadrati ex eius $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{5}$. & $\frac{1}{2}$. descripti, & in vnam summam collecti, efficiant ipsum numerum inuentum. Ponatur ille numerus 1℞. cuius $\frac{2}{3}$. erunt $\frac{2}{3}$℞. & $\frac{3}{5}$. erunt $\frac{3}{5}$℞. & $\frac{1}{2}$. erit $\frac{1}{2}$℞. Quadratum harum partium $\frac{4}{9}$ȝ, $\frac{9}{25}$ȝ. $\frac{1}{4}$ȝ. simul efficiunt $\frac{949}{900}$ȝ. numerum æqualem numero posito 1℞. Diuisa igitur 1. per $\frac{949}{900}$. fiet 1℞. $\frac{900}{949}$. numerus quæsitus (quod numeri Cossici sint collaterales) Huius $\frac{2}{3}$. sunt $\frac{1800}{2847}$. & huius quadratus $\frac{3240000}{8105409}$. Et $\frac{3}{5}$. sunt $\frac{2700}{4745}$. cuius quadratus $\frac{7290000}{22515025}$. Et $\frac{1}{2}$. est $\frac{900}{1898}$. cuius quadratus $\frac{810000}{3602404}$. qui tres quadrati faciunt summam $\frac{6234707464935966900}{6574152649138036209}$. quæ æqualis est numero inuento $\frac{900}{949}$. Nam idem numerus producitur ex huius numeratore in illius denominatorem, & ex denominatore in numeratorem, nimirum numerus 5916737384224232588100.

SIT deinde numerus inueniendus, ita vt tres quadrati ex eius $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{5}$. & $\frac{1}{2}$. descripti faciant numerum 3796. Erunt, vt prius, tres quadrati in vnam summam collecti, $\frac{949}{900}$ȝ. qui numerus æqualis esse debet numero 3796. Diuisis ergo 3796. per $\frac{949}{900}$. fiet 1ȝ. 3600. & 1℞. 60. numerus quæsitus. Huius enim $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{5}$, & $\frac{1}{2}$. sunt 40. 36. & 30. & quadrati horum numerorum 1600. 1296. 900. faciunt summam 3796.

SIT denique inueniendus numerus, ita vt tres quadrati ex eius $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{9}$. descripti summam faciant 20. Ponatur numerus quæsitus 1℞. Eius partes datæ sunt $\frac{1}{2}$℞. & $\frac{1}{3}$℞. & $\frac{1}{9}$℞. quarum quadrati $\frac{1}{4}$ȝ. $\frac{1}{9}$ȝ. & $\frac{1}{81}$ȝ. faciunt summam $\frac{121}{324}$ȝ. æqualem numero 20. Diuisis ergo 20. per $\frac{121}{324}$. fiet 1ȝ. $\frac{6480}{121}$. & 1℞ √ȝ $\frac{6480}{121}$. numerus quæsitus. Huius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{9}$. sunt √ȝ. $\frac{6480}{484}$. √ȝ $\frac{6480}{1089}$. & √ȝ $\frac{6480}{9801}$. quarum partium quadrati $\frac{6480}{484}$. $\frac{6480}{1089}$. & $\frac{6480}{9801}$. efficiunt summam $\frac{103317437520}{5165871876}$. hoc est, 20.

129 *Datum numerum in quotlibet numeros partiri, ita vt quilibet sequens superet præcedentem dato numero.* CXXIX.

DATVS numerus 200. tribuendus sit in sex, vt secundus superet primum numero 5. tertius secundum numero 2. quartus tertium numero 10. quintus quartum vnitate. Et sextus quintum numero 15. Ponatur primus 1℞. Erit igitur secundus 1℞ + 5. Tertius 1℞ + 7. Quartus 1℞ + 17. Quintus 1℞ + 18. Et sextus 1℞ + 33. Hi omnes faciunt 6℞ + 80. quæ summa æqualis esse debet dato numero 200. Ablatis ergo 80. vtrinque erit æquatio inter 6℞. & 120. Diuisisque 120. per 6. fiet 1℞. 20. primus numerus. Secundus ergo erit 25. Tertius 27. Quartus 37. Quintus 38 & sextus 53. qui simul faciunt 200. & problema absoluunt.

DEBET autem datus numerus maior esse summa, quæ ex datis excessibus colligitur, si sequens quilibet excessus præcedenti addatur. Vt quia in dato exemplo, si primus numerus foret 5. secundus esset 7. tertius 17. quartus 18. & quintus 33. qui omnes faciunt 80. oportet datum numerum maiorem esse quam 80. nimirum 81. vel 82. vel 200. vel 300. &c. Id quod ipsa operatio docebit. Si enim datus numerus esset 79. fieret æquatio inter 6℞ + 80. & 79. quod fieri nequit.

130 *Duos numeros inuenire in proportione data, ita vt alteruter ductus in quadratum alterius faciat numerum quemcunque datum.* CXXX.

SINT inueniendi duo numeri in proportione tripla, ita vt alteruter ipsorum in quadratum alterius ductus faciat 192. Ponatur minor 1℞. ideoque maior 3℞. Ex maiore 3℞. in 1ȝ. quadratum minoris fit numerus 3ℭ æqualis 192. Diuisis igitur 192. per 3. fiet 1ℭ. 64. & 1℞. 4. minor numerus. Maior ergo erit 12. Nam ex 12, in 16. quadratum minoris numeri 4. fit datus numerus 192.

RVRSVS ex minore 1℞. in 9ȝ. quadratum maioris fit numerus 9ℭ. æqualis 192. Diuisis ergo 192. per 9. fiet 1ℭ. $21\frac{1}{3}$. siue $\frac{64}{3}$. & 1℞. √ℭ $\frac{64}{3}$. primus numerus; secundus vero huius triplus erit √ℭ $\frac{1728}{3}$. In huius quadratum √ℭ $\frac{2985984}{9}$. si ducatur primus √ℭ $\frac{64}{3}$. fiet numerus √ℭ $\frac{191102976}{27}$. siue √ℭ 7077888. hoc est 192.

131 *Duobus numeris datis, alium tertium inuenire, ita vt tres habeantur numeri, quorum bini simul sumpti, si in tertium ducantur, procreentur tres numeri Arithmetice proportionales.* CXXXI.

DATI sint numeri 10. & 30. inueniendusque sit tertius, ita vt bini simul sumpti, & in tertium multiplicati

KK 4 produ-

producant tres numeros Arithmetice proportuonales. Ponatur numerus quæsitus 12ℨ. Summa ex 12ℨ. & 10. est 12ℨ+10. quæ ducta in tertium 30. facit 302ℨ+300. Summa vero ex 12ℨ. & 30. est 12ℨ+30. quæ ducta in tertium 10. facit 10,2ℨ+300. Summa denique ex 10. & 30. est 40. quæ ducta in tertium 12ℨ. facit 402ℨ. ita vt tres numeri procreati sint 302ℨ+300. 102ℨ+30. & 402ℨ. qui eundē debent habere excessum. Sed quia nondum constat, quis eorum sit maximus, & quis medius: & quis minimus statuamus 302ℨ+300. esse maximum: 102ℨ+300. medium, & 402ℨ. minimum. Excessus priorum est 202ℨ. posteriorum 300—302ℨ. qui excessus æquales debent esse. Additis igitur 302ℨ, vtrinque, erit æquatio inter 502ℨ & 300. Diuisisque 300. per 50. fiet 12ℨ6. numerus quæsitus, ita vt tres numeri sint 6. 10. 30. Ex 6. & 10. fit summa 16. quæ ducta in 30. facit 480. Et ex 6. & 30. fit summa 36. quæ ducta in 10. facit 360. Denique ex 10. & 30. fit summa 40. quæ ducta in 6. facit 240. Sunt autem hi tres producti 480. 360. 240. Arithmetice proportionales, cum eorum excessus sit 120.

QVOD si statuemus maximum 30 2ℨ+300. medium 40,2ℨ. & minimum 102ℨ+300. erit priorum excessus 300—102ℨ. & posteriorum 302ℨ—300. qui illi æqualis esse debet. Additis ergo 300 vtrobique, erit æquatio inter 600—102ℨ. & 302ℨ. Additisq; rursum 102ℨ vtrinq;, inter 600. & 402ℨ. Diuisis igitur 600. per 40 fiet 12ℨ15. numerus quæsitus, eruntque tres numeri, 15. 10. 30. Nam ex 15. & 10. fit summa 25. quæ ducta in 30. facit 750. At ex 15. & 30. fit summa 45. quæ ducta in 10. facit 450. Denique ex 10. & 30. fit summa 40. quæ ducta in 15. facit 600. Atque hi tres numeri producti 750. 600. 450. habent eundem excessum 150.

NEQVE vero maximus esse potest 402ℨ. & medius 302ℨ+300 & minimus 102ℨ+300. Nam inter priores esset excessus 102ℨ—300. & inter posteriores 202ℨ. qui æqualis esse non potest priori excessui, cum sit maior. Est ergo maximus 302ℨ+300. cum etiam maior sit, quam 102ℨ+300. Et vterque aliorum potest esse medius, vel minimus, vt patuit.

Hoc problema solutum etiam fuit in ænigmate 86. vbi dati sunt duo numeri, ita vt tres numeri producti tribus motis possint esse proportionales Arithmetice.

CXXXII *132 Tres numeros inuenire, ita vt primus ac secundus cum data parte tertij. Item secundus & tertius cum parte data primi: Nec non tertius ac primus cum parte data secundi, efficiant vnum eundemque numerum datum.*

TIAM primus ac secundus cum $\frac{1}{4}$. tertij, quam secundus ac tertius cū $\frac{1}{2}$. primi, quā tertius ac primus cū $\frac{1}{3}$. secundi debeant facere 100. Ponatur tertius 12ℨ. cuius $\frac{1}{4}$2ℨ. cum primo & secundo debent facere 100. ac propterea hi duo, antequam acciperent $\frac{1}{4}$2ℨ. à tertio, habuerunt 100—$\frac{1}{4}$2ℨ. Et quia secundus ac tertius cum $\frac{1}{2}$. primi debent quoque facere 100. si ex 100. demamus tertium, nimirnm 12ℨ. erit reliquus numerus 100—12ℨ. solus secundus vna cum $\frac{1}{2}$. primi. Quoniam aūt secundus, ac totus primus fecerunt 100—$\frac{1}{4}$2ℨ. Et hi duo simul superant secundum, ac $\frac{1}{2}$ primi semisse eiusdem primi: si ex 100—$\frac{1}{4}$2ℨ. summa primi & secundi, auferemus 100—12ℨ. valorem solius secundi cum $\frac{1}{2}$. primi, erit reliquus numerus $\frac{1}{4}$2ℨ. semissis primi, ac proinde totus primus erit 1$\frac{1}{2}$2ℨ. hoc est $\frac{6}{4}$2ℨ. Deinde quia primus ac secundus simul cum $\frac{1}{4}$. tertij faciunt 100. Et solus primus facit 1$\frac{1}{2}$2ℨ. & $\frac{1}{4}$. tertij est $\frac{1}{4}$2ℨ. si $\frac{7}{4}$2ℨ. hoc est. 1$\frac{1}{2}$2ℨ summam ex 1$\frac{1}{2}$2ℨ. & $\frac{1}{4}$2ℨ. collectam detrahemus ex 100. erit reliquus numerus 100—1$\frac{1}{4}$2ℨ. solus secundus, cuius $\frac{1}{3}$ est 33$\frac{1}{3}$—$\frac{7}{12}$2ℨ. cū qua tertius ac primus, nimirum 12ℨ. & 1$\frac{1}{2}$2ℨ. hoc est. 2$\frac{1}{2}$2ℨ facere debent 100. Fit autem ex 33$\frac{1}{3}$—$\frac{7}{12}$2ℨ. & 2$\frac{1}{2}$2ℨ (hoc est, ex $\frac{2}{3}$. secundi, & summa tertij ac primi) numerus 33$\frac{1}{3}$+1$\frac{11}{12}$2ℨ. qui æqualis debet esse numero 100. Ablatis ergo vtrinque 33$\frac{1}{3}$. erit æqualitas inter 66$\frac{2}{3}$. & 1$\frac{11}{12}$2ℨ Diuisisque 66$\frac{2}{3}$. per 1$\frac{11}{12}$. fiet 12ℨ. 17$\frac{9}{23}$. siue $\frac{2400}{69}$. tertius videlicet numerus, qui positus fuit 12ℨ igitur secundus inuenus 100—1$\frac{1}{4}$2ℨ. erit $\frac{2700}{69}$. Et primus, quem inueniemus 1$\frac{1}{2}$2ℨ. erit $\frac{3600}{69}$. Atque hi tres ænigmati proposito satisfaciunt.

CXXX III. *133 Datum numerum partiri in tres partes continue proportinales, ita vt numerus ex prima in tertiam productus ad productum ex prima in secundam habeat datam proportionem.*

SIT datus numerus 30. tribuendus in tres partes continue proportionales, ita vt numerus ex prima in tertiam productus habeat ad productam ex prima in secundam proportionem quadruplam. Ponatur secunda pars, siue media 12ℨ. ac propterea summa primæ ac tertiæ 30—12ℨ. Et quia ex media 12ℨ in se fit 1ℵ. [a] fiet etiam 1ℵ. ex prima in tertiam. Cum ergo hic productus debeat habere quadruplam proportionem ad productum ex prima in secundam; producetur $\frac{1}{4}$ℵ. ex prima in secundam, nimirum in 12ℨ. Si igitur partiemur $\frac{1}{4}$ℵ. per 12ℨ, fiet Quotiens $\frac{1}{4}$2ℨ. qui ductus in 12ℨ. numerum diuidentem, facit $\frac{1}{4}$ℵ. numerum diuisum: ac proinde prima pars erit $\frac{1}{4}$2ℨ. quæ cum secunda faciet 1$\frac{1}{4}$2ℨ. quæ summa ablata ex numero dato 30. relinquet tertiam partē 30—1$\frac{1}{4}$2ℨ. Reliquum iam est, ex prima parte $\frac{1}{4}$2ℨ. in tertiam modo inuentam 30—1$\frac{1}{4}$2ℨ. gigni numerum 1ℵ. qui ex media parte 12ℨ. in se producitur. Fit autem ex $\frac{1}{4}$2ℨ. in 30—1$\frac{1}{4}$2ℨ. numerum 7$\frac{1}{2}$2ℨ—$\frac{5}{16}$ℵ. qui æqualis debet esse 1ℵ. Additis ergo $\frac{5}{16}$ℵ. vtrobique, erit æquatio inter 7$\frac{1}{2}$2ℨ. & 1$\frac{5}{16}$ℵ Diuisisque 7$\frac{1}{2}$. per 1$\frac{5}{16}$. hoc est, $\frac{15}{2}$. per $\frac{21}{16}$. fiet 12ℨ. $\frac{5}{7}$. media, vel secunda pars, nimirum $\frac{40}{7}$. Ergo prima pars, quam inuenimus esse $\frac{1}{4}$2ℨ. erit $\frac{10}{7}$. siue 1$\frac{3}{7}$. Et tertia, quæ fuit inuenta 30—1$\frac{1}{4}$2ℨ. erit $\frac{160}{7}$. siue 22$\frac{6}{7}$. Atque hæ tres partes 1$\frac{3}{7}$. 5$\frac{5}{7}$. 22$\frac{6}{7}$. faciunt datum numerum 30. Et ex 1$\frac{3}{7}$. in 22$\frac{6}{7}$. hoc est, ex prima parte in tertiam, fit numerus 32$\frac{32}{49}$. qui quadruplus est numeri 8$\frac{8}{49}$. facti ex prima parte 1$\frac{3}{7}$. in secundam 5$\frac{5}{7}$. Esse autem tres partes continue proportionales, liquet: quippe cum idem numerus gignatur ex prima in tertiam, qui ex media in se, nimirum 32$\frac{32}{49}$.

[a] 20. sept.

ALITER. instituti poterit æquatio, postquam inuentæ fuerint partes $\frac{1}{4}$2ℨ. 12ℨ. 30—1$\frac{1}{4}$2ℨ. hoc scilicet modo quoniam ex prima in tertiam fieri debet 1ℵ. numerus videlicet æqualis ei, qui fit ex media in se. si diuidemus 1ℵ. per primam, id est, per $\frac{1}{4}$2ℨ. fiet Quotiens 42ℨ. qui ductus in $\frac{1}{4}$2ℨ. producit 1ℵ. Ac proinde tertia pars erit 42ℨ. æqualis nimirum alteri parti tertiæ inuentæ 30—1$\frac{1}{4}$2ℨ. Additis ergo 1$\frac{1}{4}$2ℨ. vtrobique, erit æqualitas inter 5$\frac{1}{4}$2ℨ. & 30 Diuisisque 30. per 5$\frac{1}{4}$. fiet 12ℨ. 5$\frac{5}{7}$. vt prius.

Ænigma

Ænigma hoc soluemus quoque in ænigmate 171. sed alio exemplo proposito,

134 *Tres numeros inuenire, ita vt primus cum datis quotlibet vnitatibus secundi numerum faciet æqualem ei, qui secundo supereſt. Item secundus cum quotcunque vnitatibus tertij faciat alium numerum æqualem ei, qui tertio supereſt. Tertius denique, acceptis quotuis vnitatibus à primo, faciat numerum, qui ad reliquum primi habeat proportionem datam.* CXXXIII

SVMAT primus à secundo 40. vnitates: secundus à tertio 56. vnitates: tertius denique à primo 72. vnitates, ita vt primus faciat numerum æqualem reliquo secundi: secundus item æqualem ei, qui tertio remanet: tertius autem numerum faciat quintuplum eius, qui primo supereſt. Ponatur primus 12ℨ. Ergo acceptis 40. à secundo, habebit 12ℨ+40. Ac tantundem tunc supereſſe debet secundo. Secundus ergo antequam daret 40. primo, habuit 12ℨ+80. qui postquam acceperit 56. à tertio, habebit 12ℨ+136. Ac tantundem supereſſe tunc debet tertio, ideoque antequam daret 56. secundo, habuit 12ℨ+192. qui si à primo accipiat 72. habebit 12ℨ+264. qui numerus debet esse quintuplus numeri 12ℨ——72. qui primo, postquam dederit 72. supereſt. Ergo numerus huius quintuplus 52ℨ——360. æqualis erit numero 12ℨ+264. quem tertius confecit. Additis autem 360. vtrinque, erit æquatio inter 52ℨ. & 12ℨ+624. Et ablata 12ℨ. vtrobique, inter 42ℨ & 624. Diuisis ergo 624. per 4. fiet 12ℨ. 156. primus numerus. Ac proinde secundus, qui inuentus fuit 12ℨ+80. erit 236. Tertius vero, quem inuenimus esse 12ℨ+192. erit 348. Atque tres hi numeri problema efficiunt. vt probare potes.

SCHOLIVM.

In similibus quæſtionibus proponetur aliquando problema, quod diſſolui nequit. id quod æquatio inuenta præclare monebit. Vt ſi in propoſito problemate quis diceret, tertium acceptis 72. à primo, habere quoque numerum reliquo primi æqualem, fieret quæſtio impoſſibilis. Nam tertius tunc haberet, vt dictum eſt, 12ℨ+264. qui æqualis nullo modo eſſe poteſt numero 12ℨ—72. qui primo ſupereſt.

135 *Duos numeros in data proportione inuenire, vt vtroque per duos numeros datos multiplicato, producantur duo numeri facientes ſummam quamcunque datam.* CXXXV

INVENIENDI sint duo numeri in proportione quintupla, vt minore multiplicato per 8. & maiore per 5. procreentur duo numeri, quorum summa sit 100. Ponantur quæsiti numeri 12ℨ. & 52ℨ. in proportione quintupla. Ex 12ℨ. in 8. fiunt 82ℨ & ex 52ℨ. in 5. fiunt 252ℨ. Summa productorum est 332ℨ. æqualis 100. Diuisis igitur 100. per 33. fiet 12ℨ $\frac{100}{33}$. siue 3$\frac{1}{33}$. primus numerus. Secundus ergo erit $\frac{500}{33}$. siue 15$\frac{5}{33}$. Ex 3$\frac{1}{33}$. hoc est, ex $\frac{100}{33}$. in 8. fiunt $\frac{800}{33}$ siue 24$\frac{8}{33}$. Et ex 15$\frac{5}{33}$. id est, ex $\frac{505}{33}$. in 5. fiunt $\frac{2500}{33}$. siue 75$\frac{25}{33}$. Atque hi duo producti 24$\frac{8}{33}$. & 75$\frac{25}{33}$. faciunt summam datam 100.

136 *Duos numeros inuenire, quorum tam ſumma, quam exceſſus ſit numerus quadratus.* CXXXVI.

PONATVR summa duorum numerus quadratus, cuius latus sit vna radix, plus quotcunque vnitatibus; nimirum quadratus 1ℵ+10 2ℨ+25. procreatur ex latere assumpto quocunque 12ℨ+5. Nam si minor numerus quæsitus statuatur $\frac{1}{2}$ℵ. erit maior $\frac{1}{2}$ℵ+10 2ℨ+25. Horum enim summa 1ℵ+10 2ℨ+25. quadratus numerus est, ex hypothesi. Reliquum est, vt eorundem numerorum $\frac{1}{2}$ℵ. & $\frac{1}{2}$ℵ+10 2ℨ+25. excessus 10 2ℨ+25. sit etiam quadratus: hoc est, æqualis cuicunque quadrato maiori, quam 25. nimirum 100. Ablatis ergo 25. vtrobique, erit æquatio inter 10 2ℨ. & 75. Diuisisque 75. per 10. fiet 12ℨ. 7$\frac{1}{2}$. & 1ℵ. $\frac{225}{4}$. hoc est, 56$\frac{1}{4}$ Igitur minor numerus, qui fuit $\frac{1}{2}$ℵ. erit 28$\frac{1}{8}$. Maior autem, qui fuit $\frac{1}{2}$ℵ+10 2ℨ+25 erit 128$\frac{1}{8}$. Nam summa horū numerorum 156$\frac{1}{8}$. hoc est, $\frac{1250}{8}$. siue $\frac{625}{4}$. numerus quadratus est, cuius latus $\frac{25}{2}$. Item excessus eorundem 100. quadratus quoque est, cuius latus 10.

SI prædictum excessum 10 2ℨ+25. pones æqualem quadrato 36. vel alij cuicunque, qui non sit 100. inuenies aliam æstimationem vnius radicis, vt experiri potes.

137 *Dato quadrato, inuenire numerum, quo & ad datum quadratum adiecto, & ab eodem detracto, fiat numerus quadratus.* CXXXVII.

SIT datus quadratus 100. qui per ænigma 90. vel eius scholium diuidatur in duos quadratos, quod per dictum scholium ita fiet. Latus quadrati dati, nimirum 10. ducatur in quemlibet numerum, vt in 5. Duplum huius numeri producti 100. diuidatur per quadratū numeri 5. assumpti auctum vnitate, nimirum per 26. Quotientis enim $\frac{100}{26}$. quadratus $\frac{2500}{169}$ siue 14$\frac{134}{169}$. erit vnus quadratus. quo dempto ex 100. quadrato dato, reliquus fiet alter quadratus 85. $\frac{3025}{169}$ qui duo quadrati efficiunt 100. Latera autem eorum $\frac{50}{13}$. & $\frac{120}{13}$ inter se multiplicata faciunt $\frac{6000}{169}$. siue 35$\frac{85}{169}$. cuius producti numeri duplum $\frac{12000}{169}$. siue 71$\frac{1}{169}$. erit numerus, qui quæritur. Is cum adiectus ad 100. facit 171$\frac{1}{169}$. siue $\frac{28900}{169}$. quadratum, cuius latus —— $\frac{170}{13}$. siue 13$\frac{1}{13}$. Idem numerus 71$\frac{1}{169}$. demptus ex eodem quadrato dato 100. relinquit 28$\frac{168}{169}$. siue $\frac{4900}{169}$. numerum quoque quadratum, cuius latus $\frac{70}{13}$. siue 5$\frac{5}{13}$.

RATIO huius operationis hæc est. Quando quadratus datus 100. diuiditur in duos quadratos, latus dati quadrati, & duo latera inuentorū quadratorū, si ad lineas cōtrahantur, [a] constituunt triangulum rectangulum; quandoquidem duo quadrata inuenta, ex eorum lateribus descripta, æqualia sunt dato quadrato. Igitur, vt

[a] 48. primi

in Lem-

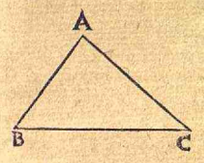
in Lemmate sequenti demonstrabimus, rectangulum bis comprehensum sub illis duobus lateribus, additum quadrato dato, efficit quadratum, cuius nimirum latus duobus illis lateribus æquale est: & ablatum ex eodem quadrato dato, reliquum facit quadratum, cuius videlicet latus est duorum illorum laterum differentia.

SI idem quadratus 100. distribuatur in duos quadratos 36. & 64. quorũ latera 6. & 8. inter se multiplicata faciunt 48. erit huius numeri duplum 96. is, quem quærimus. Hic enim adiectus ad 100. facit quadratum 196. cuius latus 14. & detractus ex 100. reliquum facit quadratum 4. cuius latus 2.

LEMMA.

Lemma. *IN omni triangulo rectangulo, rectangulum bis sub duobus lateribus circa angulum rectum comprehensum, vna cum quadrato lateris recto angulo oppositi, æquale est quadrato, cuius latus ex duobus lateribus componitur; Idem vero rectangulum bis sub lateribus prædictis comprehensum, si ex eodem quadrato lateris recto angulo oppositi detrahatur, reliquum fiet quadratum, cuius latus differentia est prædictorum duorum laterum.*

SIT triangulum rectangulum ABC. Dico rectangulum bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, æquale esse quadrato cuius latus æquale sit duobus lateribus AB, AC, simul. Et si idem rectangulum bis detrahatur ex quadrato rectæ BC, relinqui quadratum, cuius latus æquale sit differentiæ inter AB, AC. Quoniam enim si concipiatur linea vna ex AB, AC, composita, [a] *rectangulum sub AB, AC, bis comprehensum, vna cum quadratis ex AB, AC, æquale est quadrato rectæ ex AB, AC, compositæ:* [b] *Sunt autem quadrata ex AB, AC, quadrato ex BC, æqualia; erit quoque rectangulum bis comprehensum sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, æquale quadrato rectæ ex AB, AC, compositæ, quod est primum.*



[a] 4. *secũdi.*
[b] 47. *prim.*
[c] *Lemma 39. decimi.*

DEINDE [c] *quia duo quadrata ex AB, AC, (hoc est quadratum ex BC,) maiora sunt rectangulo bis sub AB, AC, comprehenso, quadrato eius lineæ, quæ differentia est inter AB, AC, manifestum est. si illud rectangulum bis sub AB, AC, comprehensum detmatur ex quadratis rectarum AB, AC, hoc est, ex quadrato rectæ BC, remanere quadratum, cuius latus æquale est differentiæ inter AB, AC, quod est secundum.*

CXXXVI. 138 *Numerum inuenire, qui in quemuis datum numerum ductus, faciat numerum, qui cum quouis alio dato numero numerum efficiat æqualem ei, qui fit ex quæsito numero in quemuis alium datum numerum, maiorem tamen priore dato, multiplicato.*

SIT inueniendus numerus, qui ductus in 7. faciat numerum, qui adiectus ad 60. faciat summam æqualem numero, qui fit ex inuento numero in 8. multiplicato. Ponatur numerus quæsitus 1ϱ. Ex 1ϱ. in 7. fit numerus 7ϱ. quo addito ad 60. fit numerus 7ϱ+60. æqualis numero 8ϱ. qui fit ex 1ϱ. in 8. Ablatis ergo 7ϱ. vtrinque, erit æquatio inter 60. & 1ϱ. Diuisisque 60. per 1. fiet 1ϱ. 60. numerus quæsitus. Hic enim ductus in 7. facit 420. additisque 60. fit numerus 480. quem nimirum facit numerus inuentus 60. in 8. ductus.

CXXXIX. 139 *Datum numerum in duas partes diuidere, & insuper quadratum inuenire, qui cum vtraque parte seorsum quadratum efficiat.*

SIT datus numerus 65. secandus in duas partes, & insuper quadratus inueniendus, cum quo quælibet illarum partium efficiat quadratũ. Ponãtur duo numeri quicunq;, quorũ quilibet compositus sit ex vna radice, & aliquot vnitatibus, nimirum 1ϱ+3. & 1ϱ+5. Quadrati horũ sunt 1ϛ+6ϱ+9. & 1ϛ+10ϱ+25. Igitur si numerus 6ϱ+9. addatur ad 1ϛ. qui numerus quadratus est sit quadratus 1ϛ+6ϱ+9, Et si numerus 10ϱ+25 addatur ad eundem 1ϛ. fit quadratus 1ϛ+10ϱ+25. Ergo si minor pars numeri dati ponatur 6ϱ+9 & maior 10ϱ+25. satisfactum erit problemati, si hæ partes conficiant datum numerum 65. Faciunt autem summam 16ϱ+34. quæ æqualis debet esse 65. Demptis 34. vtrobique, manebit æqualitas inter 16ϱ. & 31. Diuisis igitur 31. per 16, fiet $1\varrho\frac{15}{16}$. siue $\frac{15}{16}$. cuius quadratus $\frac{961}{256}$. siue $3\frac{193}{256}$. erit is, qui quæritur. Minor autem pars numeri dati, quam posuimus 6ϱ+9. erit $\frac{330}{16}$ siue $20\frac{5}{8}$. Maior vero, quæ posita fuit 10ϱ+25. erit $\frac{710}{16}$ siue $44\frac{3}{8}$. quæ duæ partes simul efficiunt datum numerum 65. Et prima addita ad quadratum inuentum $\frac{961}{256}$. facit quadratum $\frac{62401}{256}$. cuius latus $\frac{249}{16}$. Secunda autem cum eodem quadrato $\frac{962}{256}$. facit quadratum $\frac{123201}{256}$. cuius latus $\frac{351}{16}$.

SCHOLIVM.

HOC ænigma plures solutiones admittit, pro varietate numerorum in principio assumptorum. Nam si numeri ponantur 1ϱ+1. & 1ϱ+2. erunt eorũ quadrati 1ϛ+2ϱ+1. & 1ϛ+4ϱ+4. Atque si minor pars numeri dati 65. ponatur numerus 2ϱ+1. maior vero 4ϱ+4. satisfactum erit problemati, cũ vterque numerus cum 1ϛ. faciat quadratum. Faciunt ijdem duo numeri summam 6ϱ+5. quæ æqualis esse debet 65. Ablatis igitur 5. vtrobique, remanebit æqualitas inter 6ϱ. & 60. Diuisisque 60. per 6. fiet 10ϱ. 10. cuius quadratus 100. est is, quæritur, positusque fuit 1ϛ. Minor vero pars numeri dati 65. quam posuimus 2ϱ+1. erit 21. Maior autem posita 4ϱ+4. erit 44. quæ duæ partes faciunt 65. Et prima addita quadrato inuento 100. facit quadratum 121. cuius latus 11. Secunda aũt cum eodem quadrato 100. facit quadratum 144. cuius latus 12.

Atque in hunc modum diuidi poterit datus numerus in alias, atque alias partes, si alij atque alij numeri assumantur compositi ex 1ϱ. & aliquot vnitatibus.

140 *Datum*

140 *Datum numerum in duas partes distribuere, & insuper quadratum inuenire, à quo si duæ partes inuentæ subducantur, reliqui fiant duo quadrati.* CLX.

SIT diuidendus numerus 65. in duas partes, & inueniendus quadratus, à quo si inuentæ duæ partes demantur, reliqui fiant duo numeri quadrati. Ponantur duo numeri vtcunque, vnus compositus ex vna radice & quotlibet vnitatibus, alter vero ex vna radice minus totidem vnitatibus, nimirum 1ϱ+2. & 1ϱ—2. Quadrati horum erunt 1ϛ+4ϱ+4. & 1ϛ—4ϱ+4. Ponatur ergo quadratus, qui quæritur, 1ϛ+4ϱ+4. à quo si auferatur numerus 4ϱ+4. relinquetur quadratus 1ϛ. Quod si posterior quadratus à priore subducatur remanebunt 8ϱ. Ac vicissim si 8ϱ. detrahantur ex eodem priori quadrato 1ϛ+4ϱ+4. relinquetur posterior quadratus 1ϛ—4ϱ+4. Ergo si minor pars numeri diuidendi ponatur 4ϱ+4. Et maior 8ϱ. satisfactum erit ænigmati; quippe cum minor dempta ex quadrato 1ϛ+4ϱ+4. relinquat quadratum 1ϛ. Et maior ex eodem quadrato subducta relinquat quadratum 1ϛ—4ϱ+4. Reliquum iam est, vt hæ duæ partes 4ϱ+4. & 8ϱ. faciant numerum datum 65 faciunt autem summam 12ϱ+4. æqualem 65. Ablatis ergo 4. vtrinque, erit æquatio inter 12ϱ. & 61. Diuisisque 61. per 12. fiet $12\varrho.\frac{61}{12}$. Ac propterea quadratus quæsitus, quem posuimus 1ϛ+4ϱ+4. erit $\frac{7225}{144}$. cuius latus $\frac{85}{12}$. Minor autem pars numeri diuidendi posita 4ϱ+4. erit $\frac{293}{12}$. siue $\frac{3504}{144}$. Maior autem posita 8ϱ. erit $\frac{488}{12}$. vel $\frac{3856}{144}$. Prior enim ex inuento quadrato $\frac{7225}{144}$. subducta relinquit quadratum $\frac{3721}{144}$. cuius latus $\frac{61}{12}$. Posterior autem ex eodem quadrato $\frac{7225}{144}$. detracta reliquum facit quadratum $\frac{1369}{144}$. cuius latus $\frac{37}{12}$.

HOC etiam ænigma plures admittit solutiones, prout videlicet in principio alij atque alij numeri assumpti fuerint pro numeris 1ϱ+2. & 1ϱ—2. &c.

141 *Datum numerum in duas partes diuidere, ita vt earum cubi faciant summam datam quamcunque, quæ maior sit quarta parte cubi ex dato numero descripti.* CXLI.

DATVS numerus 10. diuidendus sit in duas partes, quarum cubi faciant 370. qui numerus maior est, quam 250. quarta pars cubi ex 10. generati. Ponatur prima pars numerus compositus ex 1ϱ. & semisse dati, numeri, nimirum 1ϱ+5. Secunda pars, semissis eiusdem numeri dati, minus 1ϱ nimirum 5— 1ϱ. Ita enim duæ hæ partes numerum datum 10. conficient. Cubi earum sunt 1ϲϱ+15ϛ+75ϱ+125. & 125—75ϱ+15ϛ—1ϲϱ. Summa eorũ 30ϛ+250. nam +1ϲϱ. & —1ϲϱ. Item +75ϱ. & —75ϱ. se mutuo interimunt: & ex 15ϛ. & 15ϛ. fiunt 30ϛ. atque 125. 125. faciunt 250. Hæc ergo summa 30ϛ+250. æqualis esse debet 370. Ablatis 250. vtrinque, remanebit æqualitas inter 30ϛ. & 120. Diuisis igitur 120. per 30. fiet 1ϛ. 4. & 1ϱ. 2. Prima igitur pars posita 1ϱ+5. erit 7. Secunda vero, quam posuimus 5—1ϱ. erit 3. Cubi harum partium 7 & 3 sunt 343. & 27 efficiuntq. 370.

SI eodem numero 10. dato, summa cuborum proponatur 400. inueniemus æquationem inter 30ϛ+250. & 400. Ablatisque 250. vtrinque, inter 30ϛ. & 150. Diuisis igitur 150. per 30. fiet 1ϛ. 5. & 1ϱ. √ϛ 5. Ergo prima pars posita 1ϱ+5. erit √ϛ 5+5. Secunda vero posita 5—1ϱ. erit 5—√ϛ 5. quæ simul faciunt 10. Cubi autem harum partium (reductis, quæ reducenda sunt) sunt 200+√ϛ 32000. & 200—√ϛ 32000. quorum summa est 400. cum +√ϛ 32000. & —√ϛ 32000. se mutuo interimant.

SCHOLIVM.

SINE Algebra idem ænigma soluetur hoc pacto. Datus numerus 20. secandus sit in duas partes, quarum cubi facere debeant summam 2960. quæ maior est, quam 2000. quarta pars cubi ex 20. generati. Dematur $\frac{1}{6}$. cubi ex dato numero 20. descripti, nimirum 2000. ex 2960. summa proposita. Et reliquus numerus 960. diuidatur per 60. triplum dati numeri 20. Quotientis namque 16. radix quadrata 4. addita, & ablata ex 10. semisse dati numeri 20. dabit partes quæsitas 14. & 6. quæ simul faciunt datum numerum 20. & earum cubi 2744. & 216. faciunt 2960.

HOC etiam ænigma in ænigmate 1. sequentis capitis soluemus per æquationem compositam, in qua scilicet tres numeri occurrunt, quorum vnus alijs duobus est æqualis.

142 *Datum numerum in duos cubos distribuere, quorum laterum summa data est: dummodo quarta pars cubi huius summæ minor sit dato numero.* CXLII.

HOC problema ab antecedenti non differt. Nihil enim aliud hic iubemur, nisi summam laterum datam distribuere in duas partes, quarum cubi datum efficiant numerum, qui maior sit quarta parte cubi ex summa laterum data procreati. Vt si datus numerus 2960. diuidendus sit in duos cubos, quorum latera faciant 20. Diuidendus erit numerus 20. in duas partes, quarum cubi faciant 2960. vt in præcedenti problemate factum est. Nam ita numerus 2960. diuisus erit in duos cubos 2744. & 216. quorum latera 14. & 6. datam summam 20. conficiunt.

SIC etiam si datus numerus 400. diuidendus sit in duos cubos, quorum latera faciant 10. inuenientur duo cubi, (reductis, quæ reducenda sunt) 200+√ϛ 32000. & 200—√ϛ 32000. quorum latera sunt √ϛ 5+5. & 5—√ϛ 5. si nimirum summa laterum 10. diuidatur in duas partes, vt in præcedenti ænigmate, vel scholio eiusdem factum est. ita vt earum cubi efficiant 400.

143 *Numerum inuenire, cuius quadratus, vel multiplex quadrati datus constituat datam partem, vel partes cubi ex eodem inuento numero procreati.* CXLIII.

SIT primũ inueniendus numerus, cuius quadratus cõstituat $\frac{1}{p}$. cubi ex inuento numero procreati. Ponatur

quæ-

quæsitus numerus 1℞.cuius quadratus eſt 1ʒ.& cubus 1ȼȼ. Vt ergo 1ʒ. conſtituat $\frac{1}{9}$.numeri 1ȼȼ. neceſſe eſt, æqualitatem eſſe inter 1ʒ.& $\frac{1}{9}$ȼȼ. Diuiſa igitur 1.per $\frac{1}{9}$.fiet 1℞.9. numerus quæſitus (quod numeri Coſſici ſint collaterales.)Huius enim quadratus 81.nonam partem conſtituit eiuſdem cubi 729.

SIT deinde inueniendus numerus, cuius quadratus conſtituat $\frac{5}{9}$.cubi.Iiſdem poſitis, erit æquatio inter $\frac{5}{9}$ȼȼ.& 1ʒ.Diuiſa ergo 1.per $\frac{5}{9}$.fiet 1℞.$\frac{9}{5}$.vel 1$\frac{4}{5}$.numerus quæſitus. Huius enim quadratus $\frac{81}{25}$.conſtituit $\frac{5}{9}$.cubi $\frac{729}{125}$.

RVRSVS ſit inueniendus numerus,cuius quadrati quincuplum conſtituat $\frac{1}{7}$cubi ipſius. Ponatur numerus quæſitus 1℞.cuius quadratus 1ʒ.& cubus 1ȼȼ. Ergo æqualitas erit inter 5ʒ.& $\frac{1}{7}$ȼȼ. Diuiſis ergo 5. per $\frac{1}{7}$.fiet 1℞.35. numerus quæſitus. Huius enim quadratus eſt 1225.& eius quincuplum 6125.conſtituit $\frac{1}{7}$. cubi 42875.ex 35.procreati.

POSTREMO inueniendus ſit numerus,cuius quadrati quincuplum conſtituat $\frac{9}{10}$.cubi ipſius.Poſitis iiſdem, erit æquatio inter 5ʒ.& $\frac{9}{10}$ȼȼ.Diuiſis igitur 5.per $\frac{9}{10}$. fiet 1℞.$\frac{50}{9}$. hoc eſt, 5$\frac{5}{9}$. numerus quæſitus. Eius enim quadratus eſt $\frac{2500}{81}$.cuius quintuplum $\frac{12500}{81}$.conſtituit $\frac{9}{10}$ cubi $\frac{125000}{729}$.

CXLIIII *144 Numerum inuenire, qui ſui cubi conſtituat datam partem, vel partes.*

SIT primum inueniendus numerus,qui conſtituat $\frac{1}{12}$.ſui cubi. Ponatur quæſitus numerus 1℞. cuius cubus 1ȼȼ.Eſt ergo æqualitas inter 1℞.& $\frac{1}{12}$ȼȼ.Diuiſaque 1.per $\frac{1}{12}$.fiet 1ʒ.12.(quod inter ȼȼ.& ℞.interiecta ſit denominatio ʒ.)& eius radix quadrata,nimirum √ʒ 12.erit pretium 1℞.Numerus ergo quæſitus eſt √ʒ 12. Hic enim conſtituit $\frac{1}{12}$.ſui cubi √ʒ 1728.

DEINDE inueniendus ſit numerus,qui conſtituat $\frac{4}{9}$.ſui cubi.Poſitis iiſdem, fiet æquatio inter 1℞.& $\frac{4}{9}$ȼȼ.Diuiſa igitur 1 per $\frac{4}{9}$ fiet 1ʒ.$\frac{9}{4}$.& 1℞.$\frac{3}{2}$.numerus quæſitus. Eius enim cubus eſt $\frac{27}{8}$. cuius quatuor nonas continet inuentus numerus $\frac{3}{2}$.

CXLV. *145 Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt minor in quadratum maioris ductus producat numerum datum.*

SINT inueniendi duo numeri in proportione ſeſquiquinta, ita vt minore in quadratum maioris ducto, gignatur numerus 4860.Ponantur numeri quæſiti 5℞.& 6℞.in proportione ſeſquiquinta.Minore 5℞. ducto in 36ʒ.quadratum maioris 6℞.fit numerus 180ȼȼ.æqualis 4860.Diuiſis ergo 4860.per 180.fiet 1ȼȼ. 27.cuius radix cubica eſt 3.quia inter characteres ȼȼ. & N.duo medij ſunt ʒ.& ℞. Ergo minor numerus poſitus 5℞.erit 15.& maior poſitus 6℞.erit 18. Atque. ex minore 15. in 324. quadratum maioris 18.fit numerus 4860.

SINT rurſus in eadem proportione ſexquiquinta inueniendi duo numeri,ita vt minor ductus in quadratum maioris producat 1. Poſitis iiſdem, inuenietur æqualitas inter 180ȼȼ. & 1. Diuiſa ergo 1.per 180.fiet 1ȼȼ.$\frac{1}{180}$.& radix cubica √ȼȼ $\frac{1}{180}$.Ergo minor numerus poſitus 5℞.faciet √ȼȼ $\frac{125}{180}$.hoc eſt,√ȼȼ $\frac{25}{36}$.Maior aũt poſitus 6℞.erit √ȼȼ $\frac{216}{180}$.ſiue √ȼȼ $\frac{6}{5}$.Atque ex minore √ȼȼ $\frac{25}{36}$.in √ȼȼ $\frac{36}{25}$. quadratũ maioris √ȼȼ $\frac{6}{5}$. producitur √ȼȼ $\frac{900}{900}$.hoc eſt,1. Quando enim numerator fractionis æqualis eſt denominatori, fractio illa vnitati æquiualet.

CXLVI. *146 Numerum inuenire, qui inter duos ſit medius, ſuperetque minorem numero dato, & ſuperetur à maiore numero alio dato quolibet, & duo extremi efficiant ſummam datam quamcunque.*

HOC ænigma ſimile eſt ænigmati 51.& 52.ſed aliter propoſitum,atque aliter diſſolutum.Inueniendus enim ſit numerus medius inter duos ſummam efficientes 100. ita vt minorem ſuperet numero 15. & à maiore ſuperetur numero 9. Quoniam maior ponitur ſuperare medium quæſitum, numero 9. Et hic medius minorem,numero 15.liquido conſtat maiorem ſuperare minorem numero 24.Si ergo data ſumma 100.diuidatur in duas partes,quarum exceſſus 24.& ad minorem addantur 15. fiet medius quæſitus. Ponatur ergo minor pars 1℞.& maior 100——1℞.quæ illam ſuperare debet numero 24. Detracta 1℞. ex 100——1℞. reliquus fit numerus 100——2℞.æqualis 24. Additis ergo 2℞.vtrinque,fiet æqualitas inter 100.& 24+2℞. Et ablatis 24.vtrobique, inter 76.& 2℞.Diuiſis igitur 76.per 2.fiet 1℞.38.minor pars,ideoque maior erit 62. Et additis 15.ad minorem 38. fiet medius quæſitus 53.Hic enim ſuperat minorem partem numero 15.& à maiore ſuperatur numero 9.

CXLVII *147 Datum numerum in quotlibet partes diſtribuere, ita vt vnaquæque ad ſequentem habeat datam proportionem.*

SIT datus numerus 10000. diuidendus in ſex partes, ita vt prima ad ſecundam habeat proportionem æqualitatis:ſecunda ad tertiam duplam:tertia ad quartam triplam:quarta ad quintam proportionem æqualitatis:& quinta ad ſextam proportionem quoq; æqualitatis. Ponatur prima pars 1℞. ſecunda 1℞ quoque. Tertia $\frac{1}{2}$℞.quarta, quinta, & ſexta $\frac{1}{6}$℞. quæ omnes faciunt 3℞. æquales 10000. Diuiſis igitur 10000. per 3. fiet 1℞. 3333$\frac{1}{3}$.ac propterea aliæ partes numeros facient, vt in appoſita formula vides. Omnes enim hæ partes in vnam ſummam collectæ faciunt 10000.

prima	1℞		3333 $\frac{1}{3}$
ſecunda	1℞		3333 $\frac{1}{3}$
tertia	$\frac{1}{2}$℞	id eſt	1666 $\frac{2}{3}$
quarta	$\frac{1}{6}$℞		555 $\frac{5}{9}$
quinta	$\frac{1}{6}$℞		555 $\frac{5}{9}$
ſexta	$\frac{1}{6}$℞		555 $\frac{5}{9}$

148 Numerum inuenire, cuius partes datæ æquales ſint parti aliquotæ datæ eiuſdem, auctæ numero dato. CXLVIII.

SIT inueniendus numerus,cuius $\frac{2}{3}$.æquales ſint eius ſemiſſi auctæ ſeptenario.Ponatur numerus quæſitus 1℞.Ergo $\frac{2}{3}$℞.æquales erunt $\frac{1}{2}$℞+7.Ablata $\frac{1}{2}$℞ vtrobique, remanebit æqualitas inter $\frac{1}{6}$℞. & 7. Diuiſis ergo 7.per $\frac{1}{6}$.fiet 1℞42.numerus quæſitus. Nam eius $\frac{2}{3}$.ſunt 28. qui numerus æqualis eſt ſemiſſi numeri 42.id eſt,numero 21.aucto ſeptenario.

149 Duos numeros inuenire, quorum ſumma data ſit, ita vt priore per datum numerum diuiſa, fiat Quotiens, qui cum data parte poſterioris, efficiat numerum datum. CXLIX.

SINT inueniendi duo numeri,quorum ſumma 40. ita vt priore diuiſo per 5.fiat Quotiens, qui cum $\frac{1}{8}$. poſterioris numeri faciat 6.Ponatur prior numerus 1℞.& poſterior 40——1℞.Diuiſa 1℞ per 5.fit Quotiens $\frac{1℞}{5}$.Et pars octaua numeri 40——1℞. eſt $\frac{40-1℞}{8}$. quæ cum illo Quotiente facit $\frac{8℞+200-5℞}{40}$.hoc eſt, $\frac{3℞+200}{40}$. qui numerus æqualis debet eſſe 6. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad æquationem inter 3℞+200.&240. Ablatiſque 200.vtrinque, erit æquatio inter 3℞. & 40. Diuiſiſque 40. per 3.fiet 1℞ 13$\frac{1}{3}$.prior numerus quæſitus.ideoque poſterior numerus poſitus 40——1℞.erit 26$\frac{2}{3}$. Nam diuiſo priore numero 13$\frac{1}{3}$. per 5.fit Quotiens 2$\frac{2}{3}$. qui cum octaua parte poſterioris numeri 26$\frac{2}{3}$. id eſt,cum 3$\frac{1}{3}$.facit 6.

IN hoc exemplo propoſito vides,priorem numerum inuentum eſſe minorem. In alio exemplo poterit eſſe maior. Vt ſi inueniendi ſint duo numeri, quorum ſumma 20. ita vt priore diuiſo per 3. Quotiens fiat,qui cum $\frac{1}{8}$. poſterioris numeri faciat 5. Ponatur prior numerus 1℞.& poſterior 20——1℞. Diuiſa 1℞ per 3. fit Quotiens $\frac{1℞}{3}$.& pars octaua numeri 20——1℞. eſt $\frac{20-1℞}{8}$. quæ cum illo Quotiente facit $\frac{8℞+60-3℞}{24}$. hoc eſt, $\frac{5℞+60}{24}$. qui numerus æqualis debet eſſe 5. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad æquationem inter 5℞.& 60. Diuiſiſq; 60.per 5.fiet 1℞. 12. prior numerus quæſitus, ideoque poſterior 20—1℞. erit 8. Diuiſo enim priore 12. per 3. fit Quotiens 4.qui cum 1.id eſt,cum parte octaua poſterioris numeri 8.facit 5. Eſtque prior numerus maior poſteriore.

SCHOLIVM.

ADVERTE tamen, in ſimili ænigmate proponi aliquando quæſtionem, quæ nulla ratione ſolui poſſit, niſi admittantur numeri Nihilo minores. Sint enim inueniendi duo numeri, quorum ſumma 40. ita vt priore diuiſo per 5. fiat Quotiens, qui cum $\frac{1}{10}$. poſterioris faciat 100. Ponatur prior numerus 1℞. & poſterior 40——1℞. Diuiſa 1℞.per 5. fit Quotiens $\frac{1℞}{5}$.& pars decima numeri 40—1℞. eſt $\frac{40-1℞}{10}$.quæ cum Quotiente illo facit $\frac{10℞+200-5℞}{50}$.hoc eſt, $\frac{5℞+200}{50}$. qui numerus æqualis eſſe debet 100. Atque hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad æquationem inter 5℞+200.& 5000: Ablatiſque 200.vtrinque, erit æquatio inter 5℞.& 4800. Diuiſiſque 4800 per 5. fiet 1℞.960. prior numerus quæſitus, qui maior eſt ſumma propoſita 40. quod eſt ineptum. Sed concedamus hoc abſurdum, & progrediamur vlterius. Secundus numerus poſitus 40——1℞.erit 40——960. Hic enim cum 960.facit 40.ſummam propoſitam. Numerus autem 40——960.æquiualet huic——920. Nam ſi demantur 960.ex 40.remanent——920.vt hæc formula demonſtrat: atque hic numerus—920. additus ad 960. priorem numerum conficit iterum ſummam propoſitam 40. vt in hac altera formula apparet. Iam ſi prior numerus 960. diuidatur per 5. fit Quotiens 192.qui cum $\frac{1}{10}$.numeri——920.id eſt,cum——92.facit 100.numerũ propoſitum, vt in tertia formula videre licet.

LIBVIT hoc exemplum pluribus verbis explicare, vt videas vim numerorum infra Nihil & Algorithmi ſignorum + & —, quamuis inuenta 1℞. numero 960. ſtatim dicere poſſes, quæſtionem eſſe impoſſibilem, quippe cum numerus 960. non poſſit eſſe pars ſummæ propoſitæ 40.

+	40
+	960
—	920

—	920
+	960
+	40

+	192
—	92
+	100

150 Numerum inuenire, qui cum data eius parte datum numerum quemcunque ſuperet tanto numero, quanto idem datus numerus, vel alius datus ipſummet numerum inuentum ſuperat. CL.

SIT primum inueniendus numerus,qui cum eius $\frac{1}{4}$.ſuperet 100.eodem numero, quo 100.ſuperant inuentum numerũ.Ponatur numerus quæſitus 1℞. qui cũ $\frac{1}{4}$ faciet 1$\frac{1}{4}$℞.quæ ſumma ſuperare debet 100.eodem numero,quo 100.ſuperãt 1℞ Ergo demptis 100.ex 1$\frac{1}{4}$℞.& 1℞,ex 100.remanebunt exceſſus æquales.hoc eſt, erit æquatio inter 1$\frac{1}{4}$℞——100.& 100——1℞.Et addita 1℞.vtrobique,inter 2$\frac{1}{4}$℞——100.& 100. Rurſumque additis 100.vtrinque, inter 2$\frac{1}{4}$℞.& 200.Diuiſis ergo 200.per 2$\frac{1}{4}$. fiet 1℞. 88$\frac{8}{9}$. numerus quæſitus. Nam ſi ad ipſum addatur eius $\frac{1}{4}$. nimirum numerus 22$\frac{2}{9}$. fiet ſumma 111$\frac{1}{9}$. quæ ſuperat 100.numero 11$\frac{1}{9}$.quo videlicet 100. inuentum numerum 88$\frac{8}{9}$. ſuperant.

SIT deinde numerus inueniendus, qui cum $\frac{2}{3}$. ſui ipſius ſuperet 100. eodem numero, quo 140. ipſum numerum inuentum ſuperant. Ponatur numerus quæſitus 1℞. Ergo æquatio erit inter 1$\frac{2}{3}$℞—100.& 140—1℞.Et addita 1℞.vtrinque,inter 2$\frac{2}{3}$℞——100.& 140.Additiſque rurſum 100.vtrobique,inter 2$\frac{2}{3}$℞. & 240. Diuiſis ergo 240.per 2$\frac{2}{3}$.fiet 1℞.90. numerus quæſitus. Nam ſi addantur eius $\frac{2}{3}$. nimirum 60.fiet ſumma 150. quæ ſuperant 100.numero 50.quo videlicet 140.numerum inuentum 90.ſuperant.

SIT denique inueniendus numerus, qui cum $\frac{1}{2}$. ipsius faciat summam, quæ eode m numero superet 40 quo numerus 10. inuentum numerum superat, Ponatur numerus quæsitus $1\mathcal{Q}$. Ergo æquatio erit inter $1\frac{1}{2}\mathcal{Q}$ —40. & 10 —$1\mathcal{Q}$. Additaque $1\mathcal{Q}$ vtrobique, inter $2\frac{1}{2}\mathcal{Q}$—40. & 10. Additisque rursum 40. vtrinque, inter $2\frac{1}{2}\mathcal{Q}$ & 50. Diuisis ergo 50. per $2\frac{1}{2}$. fiet $1\mathcal{Q}$. 20 quæsitus numerus, qui cum ipsius $\frac{1}{2}$. facit summam 30. quæ numerum 40. superat numero—10. vt patet in hac formula, vbi 40. subducta sunt à 30. Atque eodem numero—10. superat numerus 10. inueniendum numerum 20. vt constat, si 20. ex 10. subtrahantur, vt in hac altera formula cernis. Vbi rursum vides mirabilem vim Algorithmi signorum + & —. quamuis dici possit, hoc exemplum non posse expediri, propterea quod numerus 20. inuentus cum $\frac{1}{2}$. id est, cum 10. facit minorem summam, quam 40.

$$\begin{array}{r} +\ 30 \\ +\ 40 \\ \hline -\ 10 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +\ 10 \\ +\ 20 \\ \hline -\ 10 \end{array}$$

CLI. *151 Numerum inuenire, à quo si subtrahatur data pars, vel partes, relinquatur numerus tanto minor, quam datus numerus, quanto ipse inuentus numerus eundem datum numerum superat.*

SIT inueniendus numerus, ita vt subtracta $\frac{1}{5}$. ipsius, reliquus sit numerus tanto minor quam 100. quanto ipse numerus inuentus maior est, quam 100. Ponatur quæsitus numerus $1\mathcal{Q}$ à quo subtracta $\frac{1}{5}$. reliquæ fiunt $\frac{4}{5}\mathcal{Q}$. quæ detractæ ex 100. relinquunt $100-\frac{4}{5}\mathcal{Q}$. Et si ex $1\mathcal{Q}$. demantur 100. relinquuntur $1\mathcal{Q}$—100. Et quia excessus ponuntur æquales, erit æquatio inter $100-\frac{4}{5}\mathcal{Q}$. & $1\mathcal{Q}$—100. Additisque $\frac{4}{5}\mathcal{Q}$. vtrinque, inter 100. & $1\frac{4}{5}\mathcal{Q}$—100. Et rursus additis 100, vtrinque, inter 200. & $1\frac{4}{5}\mathcal{Q}$. Diuisis ergo 200. per $1\frac{4}{5}$. id est, per $\frac{9}{5}$. fiet $1\mathcal{Q}$ III $\frac{1}{9}$. numerus, qui petitur. Cuius $\frac{1}{5}$ facit $22\frac{2}{9}$. id est, $\frac{200}{9}$. qui numerus demptus ex $111\frac{1}{9}$. id est, ex $\frac{1000}{9}$. relinquit $\frac{800}{9}$. hoc est, $88\frac{8}{9}$. qui numerus superatur à 100. numero $11\frac{1}{9}$. quo videlicet inuentus numerus $111\frac{1}{9}$. numerum 100 superat.

SIT præterea inueniendus numerus, ita vt subtractis $\frac{2}{5}$. ipsius reliquus numerus tanto minor sit, quam 100. quanto ipse numerus inuentus maior est, quam 100. Ponatur quæsitus numerus $1\mathcal{Q}$. Demptis $\frac{2}{5}$. remanent $\frac{3}{5}\mathcal{Q}$ Eritque æquatio inter $100-\frac{3}{5}\mathcal{Q}$ & $1\mathcal{Q}$—100. Additisque $\frac{3}{5}\mathcal{Q}$. vtrobique, inter 100. & $1\frac{3}{5}\mathcal{Q}$—100. Et rursum additis 100. vtrinque, inter 200. & $1\frac{3}{5}\mathcal{Q}$. Diuisis igitur 200. per $1\frac{3}{5}$. fiet $1\mathcal{Q}$. 125. numerus quæsitus. Nam si ex eo tollantur $\frac{2}{5}$. ipsius, nimirum 50. remanent 75. qui à 100. superantur numero 25. quo videlicet inuentus numerus 125. superat 100.

CLII. *152 Numerum inuenire, qui in se multiplicatus, & productus in datum numerum, procreet numerum, à quo si alius datus numerus subtrahatur, reliquus fiat quicunque numerus datus.*

INVENIENDVS sit numerus, qui in se ductus, & productus in 10. faciat numerum, à quo si demantur 100. remaneat numerus 300. Ponatur quæsitus numerus $1\mathcal{Q}$ quo ducto in se, fit $1\mathcal{Z}$. & hoc ducto in 10. fit numerus $10\mathcal{Z}$. à quo si demantur 100. remanet numerus $10\mathcal{Z}-100$. qui æqualis debet esse numero 300. Additis 100. vtrobique, erit æquatio inter $10\mathcal{Z}$. & 400. Diuisisque 400. per 10. fiet $1\mathcal{Z}$. 40. Ergo $\sqrt{\mathcal{Z}}$ 40. est numerus, quem quærimus. Nam in se multiplicatus facit 40. Et ex 40. in 10. fit numerus 400. à quo si subtrahantur 100. remanent 300.

CLIII. *153 Progressionem Arithmeticam constituere, cuius primus, & vltimus terminus dati sint, & summa progressionis data, quando id fieri potest.*

SIT primus terminus 5 & vltimus 10. summa vero omnium terminorum 105. Hic duo oportet inuestigare, numerum videlicet terminorum, & differentiam progressionis. Ponatur numerus terminorum $1\mathcal{Q}$. Et quia summa ex primo, & vltimo termino collecta multiplicata per numerum terminorum producit duplum summæ progressionis, vt in Arithmetica practica, nimirum in prima regula progressionum Arithmeticarum docuimus: si summa ex primo, & vltimo termino collecta, nimirum 15. ducamus in numerum terminorum, id est, in $1\mathcal{Q}$. faciemus $15\mathcal{Q}$. cuius semissis $\frac{15}{2}\mathcal{Q}$. est summa progressionis, æqualis summæ datæ 105. Diuisis igitur 105. per $\frac{15}{2}$. fiet $1\mathcal{Q}$. 14. numerus terminorum, quem posuimus esse $1\mathcal{Q}$.

IAM intermedij 12. termini debent facere summam 90. nimirum 105. dempto primo termino 5. & vltimo 10. Ponatur differentia progressionis $1\mathcal{Q}$. eruntque 12. termini hi sequentes.

$5+1\mathcal{Q}$. $5+2\mathcal{Q}$. $5+3\mathcal{Q}$. $5+4\mathcal{Q}$. $5+5\mathcal{Q}$. $5+6\mathcal{Q}$. $5+7\mathcal{Q}$. $5+8\mathcal{Q}$. $5+9\mathcal{Q}$. $5+10\mathcal{Q}$. $5+11\mathcal{Q}$ $5+12\mathcal{Q}$.

qui omnes summam faciunt $60+78\mathcal{Q}$. æqualem numero 90. Demptis ergo 60. vtrinque, erit æqualitas inter $78\mathcal{Q}$. & 30. Diuisisque 30 per 78. fiet $1\mathcal{Q}$. $\frac{5}{13}$. differentia progressionis. Est ergo hæc progressio.

$5.5\frac{5}{13}.5\frac{10}{13}.6\frac{2}{13}.6\frac{7}{13}.6\frac{12}{13}.7\frac{4}{13}.7\frac{9}{13}.8\frac{1}{13}.8\frac{6}{13}.8\frac{11}{13}.9\frac{3}{13}.9\frac{8}{13}.10.$

quippe cum constituat 14. terminos, quorum summa est 105.

QVANDO in priori operatione reperitur numerus terminorū nō integer, quæstio erit impossibilis quia dari

dari non potest talis progressus, in qua primus. atque vltimus terminus sint illi, qui dati sunt, & summa progressionis illa, quæ proponitur. Vt si in eodem exemplo summa progressionis daretur 100. & primus terminus 5. atque vltimus 10. inueniremus æquationem inter $\frac{15}{2}\mathcal{Q}$. & 100. Diuisisque 100. per $\frac{15}{2}$. fieret $1\mathcal{Q}$. $13\frac{1}{3}$. numerus terminorum. quod fieri nequit. Nam nulla est progressio Arithmetica in rerum natura, cuius primus terminus sit 5. & vltimus 10. summaque progressionis 100.

ITAQVE ænigma propositum intelligendum est, quando vere talis est progressio, in qua dati numeri sint primus, & vltimus terminus, & summa progressionis. Neque vero parui æstimandum est, reperire huiusmodi progressionem per præcepta Algebræ. Nam si proponeretur hæc quæstio. Est progressio Arithmetica, in qua primus terminus est 5. & vltimus 32. summa vero progressionis 185. quis eam facile inueniet sine Algebra? quam tamen sine magno labore reperiemus, ea via, quam in ænigmate præscripsimus. Inuenietur enim numerus terminorum 10. & differentia progressionis 3. ita vt progressio quæsita sit hæc.

5. 8. 11. 14. 17. 20. 23. 26. 29. 32.

CLIIII. *154 Progressionem Geometricam in data proportione constituere, cuius vltimus terminus datus sit, vna cum summa progressionis.*

SIT constituenda progressio in proportione sesquialtera, cuius vltimus terminus 19683. & summa totius progressionis 55593. Ponatur primus termins $1\mathcal{Q}$. Et quia si primus terminus ab vltimo subtrahatur, & reliquus numerus per denominatorem proportionis, vno minus, diuidatur, atque ad Quotientem vltimus terminus adijciatur, fit totius progressionis summa, vt in Arithmetica practica in prima regula progressionum Geometricarum scripsimus: detrahatur $1\mathcal{Q}$ id est, primus terminus, ab vltimo 19683. & residuum 19683—$1\mathcal{Q}$. diuidatur per $\frac{1}{2}$. hoc est, per denominatorem proportionis $1\frac{1}{2}$. minus vno, & ad Quotientem $39366-2\mathcal{Q}$. adijciatur vltimus terminus 19683. fietque tota summa progressionis $59049-2\mathcal{Q}$. æqualis datæ summæ 55593. Additis ergo $2\mathcal{Q}$. vtrinque, erit æqualitas inter 59049. & $55593+2\mathcal{Q}$. Et ablatis vtrobique 55593. inter 3456. & $2\mathcal{Q}$. Diuisis igitur 3456. per 2. fiet $1\mathcal{Q}$. 1728. primus videlicet terminus progressionis in proportione sesquialtera. Quocirca constituetur hæc progressio septem terminorum, qui omnes faciunt datam summam 55593.

1728. 2592. 3888. 5832. 8748. 13122. 19683.

CLV. *155 Progressionem Geometricam in data proportione constituere, cuius primus terminus datus sit, vna cum progressionis summa.*

SIT datus primus terminus proportionis sesquialteræ 1728. & summa progressionis 55593. Ponatur vltimus terminus $1\mathcal{Q}$. à quo si primus dematur, remanet numerus $1\mathcal{Q}$—1728. quo diuiso per $\frac{1}{2}$. fit Quotiens $2\mathcal{Q}$—3456. Addito ergo vltimo termino $1\mathcal{Q}$. fit summa progressionis $3\mathcal{Q}$—3456. vt in Arithmetica practica diximus, æqualis datæ summæ 55593. Additisque 3456. vtrobique, erit æquatio inter $3\mathcal{Q}$ & 59049. Diuisis ergo 59049. per 3. fiet $1\mathcal{Q}$. 19683. vltimus terminus, totaque progressio erit hæc.

1728. 2592. 3888. 5832. 8748. 13122. 19683. &c.

HÆC etiam duo proxima ænigmata intelligenda sunt, si vere in rerum natura tales progressiones Geometricæ existant, in quibus vltimus terminus, vel primus sint illi, qui proponuntur, & summa progressionis sit quoque illa, quæ datur. Vnde si quæreretur progressio in proportione sesquialtera, cuius summa 1000. & vltimus terminus 500. foret quæstio inexplicabilis, cum nulla talis progressio existat. quod experiri poteris. Sed si quæratur progressio Geometrica in proportione sesquialtera, cuius vltimus terminus sit 68. $\frac{11}{32}$. & summa progressionis $197\frac{21}{32}$. quia talis progressio in rerum natura existit, ponemus primum terminum $1\mathcal{Q}$. qui demptus ex vltimo termino $68\frac{11}{32}$. relinquit $68\frac{11}{32}$.—$1\mathcal{Q}$. quo numero diuiso per $\frac{1}{2}$. id est, per denominatorem proportionis minus vno, fit Quotiens $\frac{4374}{32}$.—$2\mathcal{Q}$. & addito vltimo termino $68\frac{11}{32}$. siue $\frac{2187}{32}$. fit numerus $\frac{6561}{32}$ $-2\mathcal{Q}$. æqualis summæ progressionis $197\frac{21}{32}$. siue $\frac{6305}{32}$. Additis igitur $2\mathcal{Q}$. vtrobique, erit æquatio inter $2\mathcal{Q}+\frac{6305}{32}$. & $\frac{6561}{32}$. Ablatisque $\frac{6305}{32}$. vtrinque, inter $2\mathcal{Q}$ & $\frac{256}{32}$. Diuisis igitur $\frac{256}{32}$. per 2. fiet $1\mathcal{Q}$. 4. primus progressionis terminus. Vnde sic stabit progressio.

4. 6. 9. $13\frac{1}{2}$. $20\frac{1}{4}$. $30\frac{3}{8}$. $45\frac{9}{16}$. $68\frac{11}{32}$.

SIC etiam si detur primus terminus 4. & summa progressionis in proportione sesquialtera, inuenietur vltimus terminus $68\frac{11}{32}$. Atque ita, si à 4. continuetur proportio sesquialtera, consistendum erit in octauo termino $68\frac{11}{32}$. &c. Et sane præclarum est, ex vltimo termino inuenire primum, & ex primo vltimum, etiamsi intermedij nondum sint cogniti.

CLVI. *156 Datum numerum in duos partiri, vt primus aliquoties, vt libet, sumptus sit multiplex datus secundi aliquoties, vt libet, sumpti: Vel vt secundus aliquoties, vt libet, sumptus sit datus multiplex primi aliquoties, vt libet sumpti.*

SIT datus numerus 40. diuidendus primum in duos, vt primus ter sumptus faciat numerum duplum secundi quater sumpti. Ponatur primus $1\mathcal{Q}$. & secundus $40-1\mathcal{Q}$. Triplum primi $3\mathcal{Q}$. duplum esse debet quadrupli secundi, hoc est, numeri $160-4\mathcal{Q}$. Erit ergo æquatio inter $3\mathcal{Q}$ & $320-8\mathcal{Q}$. Additisq; $8\mathcal{Q}$. vtrinque,

inter 112ℚ. & 320. Diuisis ergo 320. per 11. fiet 12ℚ. 29. $\frac{3}{11}$. primus numerus. alter ergo erit 10. $\frac{8}{11}$. Triplum primi est 87 $\frac{3}{11}$. qui numerus duplus est, quadrupli secundi, id est, 43 $\frac{7}{11}$.

SIT deinde idem numerus 40. tribuendus in duos, vt secundus quater sumptus sit duplus primi ter sumpti. Ergo secundus quater sumptus, id est, numerus 160 —— 4ℚ duplus erit primi ter sumpti, id est, 3ℚ. hoc est, æqualis erit 62ℚ. Additis ergo 4ℚ. vtrobique, æquatio erit inter 160. & 102ℚ. Diuisisque 160. per 10. fiet 12ℚ. 16. primus numerus. alter ergo erit 24. Quadruplum huius, nimirum 96. duplum est tripli illius nimirum 48.

CLVII. *157 Tres numeros in Arithmetica progressione inuenire, vt numerus ex mutua eorum multiplicatione genitus ad eorundem summam habeat datam proportionem.*

SINT inueniendi tres numeri Arithmeticam constituentes progressionem, vt numerus ex mutua eorum multiplicatione productus, triplus sit summæ eorundem. Ponantur tres numeri quæsiti, 12ℚ. 2ℚ. 32ℚ. habentes eundem excessum 1ℚ. Ex multiplicatione eorum fit numerus 6ℚℚ. triplus summæ eorum 62ℚ. hoc est, æqualis 182ℚ. Diuisis ergo 18. per 6 fiet 1ℚ. 3. propterea quod inter ℚℚ. & 2ℚ. medius est character ℚ. ac propterea 12ℚ. erit √ℚ 3. & 2ℚ. erunt √ℚ 12. & 32ℚ. erunt √ℚ 27. ita vt tres numeri quæsiti sint √ℚ 3. √ℚ 12. √ℚ 27. habentes eundem excessum √ℚ 3. qui inter se multiplicati faciunt √ℚ 972. qui numerus triplus est summæ eorundem, numeri videlicet √ℚ 108.

QVANDO denominator proportionis, quam productus numerus ad summam habere debet, est numerus quadratus, explicabitur quæstio in numeris rationalibus. Vt ijsdem positis, si numerus productus debeat habere proportionem noncuplam, inuenietur æquatio inter 6ℚℚ. & 54ℚ. Diuisis igitur 54. per 6. fiet 1ℚ 9. & 1 2ℚ3. atque tres numeri quæsiti erunt 3. 6. 9. qui inter se multiplicati gignunt numerum 162. noncuplum eorum summæ 18.

CLVIII. *158 Tres numeros inuenire, vt primus acceptis quotlibet vnitatibus à secundo, faciat numerum multiplicem quemcunque eius, qui secundo remanet: Secundus vero, acceptis quotuis vnitatibus à tertio, faciat numerum etiam multiplicem quemcunque eius, qui tertio supereſt: Tertius denique acceptis quotlibet vnitatibus à primo, faciat numerum æqualem residuo primi, minus dato numero.*

CAPIAT primus à secundo 4. & secundus à tertio 3. & tertius à primo 10. ita vt primus faciat duplum eius, qui secundo supereſt: Secundus autem triplum eius, qui tertio supereſt: Tertius denique æqualem residuo primi, minus 14. Ponatur secundus 3ℚ + 6. vt dare possit 4. primo, & acceptis 3. à tertio, numerum conficiat triplum eius, qui tertio remanet, id est, numerum faciat, qui habeat $\frac{1}{3}$. sine fractione. Igitur si secundus primo det 4. remanebunt ei 3ℚ + 2. habebitque tunc primus 6ℚ + 4. eius duplum, ac proinde, antequam acciperet 4. habuit 6ℚ. Deinde secundus, acceptis 3. à tertio, habebit 3ℚ + 9. numerum triplum eius, qui tertio supereſt. Tertius ergo tunc habebit 12ℚ + 3. & antequam daret 3. habuit 12ℚ + 6. qui si accipiat 10. à primo, habebit 12ℚ + 16. qui numerus æqualis esse debet residuo primi, minus 14. hoc est, si accedant tertio vnitates 14. tum demum faciet 12ℚ + 30. numerum æqualem residuo primi 6ℚ —— 10. Additis ergo 10. vtrinque, fiet æquatio inter 12ℚ + 40. & 6ℚ. Ablataque 12ℚ vtrobique, inter 40. & 52ℚ. Diuisis ergo 40. per 5. fiet 12ℚ. 8. Primus ergo numerus, quem posuimus 6ℚ. erit 48. Secundus vero positus 3ℚ + 6. erit 30. Tertius denique positus 12ℚ + 6. erit 14. Nam primus, acceptis 4. à secundo, habebit 52. qui numerus duplus est 26. qui secundo supereſt. Secundus autem, sumptis 3. à tertio, habebit 33. numerum triplum 11. qui tertio supereſt. Tertius denique, acceptis 10. à primo, habebit 24. qui numerus æqualis est residuo primi 38. —— 14.

QVOD si tertius, acceptis 10. à primo, debeat habere numerum præcise æqualem residuo primi, inuenietur 12ℚ. 5 $\frac{1}{5}$. Et tres numeri erunt 31 $\frac{1}{5}$. 21 $\frac{3}{5}$. 11 $\frac{1}{5}$. Æquatio porro inuenta docebit, quando quæstio est impossibilis.

CLIX. *159 Duos numeros inuenire, ita vt primus, acceptis quotlibet vnitatibus à secundo, superet residuum secundi dato numero: At secundus acceptis quotuis vnitatibus à primo, faciat numerum multiplicem datum eius, qui primo remanet, ac præterea contineat datum numerum.*

CAPIAT primus à secundo 20. Secundus vero 3. à primo: faciatque primus numerum, qui residuum secundi superet numero 9. Secundus vero numerum faciat triplum residui primi, & insuper contineat 9. vnitates. Ponatur primus 12ℚ. qui acceptis 20. à secundo, habebit 12ℚ + 20. qui numerus residuum secundi superare debet numero 9. Ergo secundo remanent 12ℚ + 11. ac proinde antequam primo daret 20. habuit 12ℚ + 31. Hic acceptis 3. a primo, habebit 12ℚ + 34. qui numerus triplus esse debet residui primi, & insuper continere 9. Ablatis ergo 9. erit reliquus numerus 12ℚ + 25. triplus residui primi. Est autem residuum primi 12ℚ —— 3. Igitur æquatio erit inter 12ℚ + 25. & 32ℚ —— 9. Additisque 9. vtrinque, inter 12ℚ + 34. & 32ℚ. Ablataque 12ℚ vtrobique, inter 34. & 22ℚ. Diuisis ergo 34. per 2. fiet 12ℚ. 17. primus numerus. Secundus ergo erit 48. nimirum 12ℚ + 31. Ac primus 17. acceptis 20. à secundo, habebit 37. qui numerus residuum secundi 28. superat numero 9. Secundus autem 48. acceptis 3. à primo, habebit 51. qui numerus triplum residui primi 14. superat numero 9.

CLX. *160 Numerum inuenire, per quem si datus numerus diuidatur, ex Quotiente in quemuis datum numerum tantum fiat, quantum ex inuento numero in alium quemuis numerum datum.*

SIT datus numerus 36. diuidendus per inuentum numerum, ita vt Quotiens in 24. ductus tantũ faciat, quantum

quantum numerus inuentus in 54. ductus facit. Ponatur numerus quæsitus 12ℚ. per quem si diuidatur numerus 36. fit Quotiens $\frac{36}{12ℚ}$. qui ductus in 24 facit $\frac{864}{12ℚ}$. numerum æqualem numero 54ℚ. qui fit ex posito numero 12ℚ. in 54. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 864. & 54ℚ. Diuisis igitur 864. per 54. fiet 1ℚ 16. & 12ℚ. 4. numerus quæsitus. Diuiso enim dato numero 36. per 4. fit Quotiens 9. qui ductus in 24. facit 216. numerum æqualem ei, qui fit ex inuento numero 4. in 54.

Item inueniendus sit numerus, per quem si diuidatur datus numerus 40. fiat Quotiens, qui ductus in 8. tantum faciat, quantum inuentus numerus facit in 50. ductus. Ponatur quæsitus numerus 12ℚ per quem si diuidatur numerus 40. fit Quotiens $\frac{40}{12ℚ}$. qui ductus in 8. facit $\frac{320}{12ℚ}$. numerum æqualem numero 50ℚ. qui fit ex posito numero 12ℚ in 50. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 320. & 50ℚ. Diuisis ergo 320. per 50. fiet 1ℚ. 6 $\frac{2}{5}$. siue $\frac{32}{5}$. & 12ℚ. √ℚ $\frac{32}{5}$. numerus quæsitus. per quem si diuidatur datus numerus 40. hoc est, √ℚ 1600. fit Quotiens √ℚ $\frac{8000}{32}$. qui ductus in 8. hoc est, in √ℚ 64. producit numerum √ℚ $\frac{512000}{32}$. qui æqualis est numero √ℚ $\frac{80000}{5}$. qui fit ex numero inuento √ℚ $\frac{32}{5}$. in 50. id est, in √ℚ 2500. Quod enim æquales sint numeri √ℚ $\frac{512000}{32}$. & √ℚ $\frac{80000}{5}$. liquet, cum in crucem multiplicati producant eundem numerum √ℚ 2560000.

CLXI. *161 Tres numeros continue proportionales in data proportione inuenire, quorum quadrati in vnam summam collecti faciant datum numerum.*

SINT inueniendi tres numeri continue sesquitertij, quorum quadrati faciant 4329. Ponantur quæsiti numeri 9ℚ 12ℚ 16ℚ. in proportione sesquitertia. Eorum quadrati 81ℚ. 144ℚ. 256ℚ. faciunt summam 481ℚ æqualem 4329. Diuisis ergo 4329. per 481. fiet 1ℚ. 9. & 12ℚ3. Ergo primus numerus positus 9ℚ. est 27. secundus 36. & tertius 48. quorum quadrati 729. 1296. 2304. faciunt summam 4329.

SINT rursus inueniendi tres numeri continue dupli, quorum quadrati faciant 6000. Ponantur tres quæsiti numeri 12ℚ. 2ℚ. 4ℚ. Horum quadrati 1ℚ. 4ℚ. 16ℚ. faciunt summam 21ℚ. æqualem 6000. Diuisis ergo 6000. per 21. fiet 1ℚ $\frac{2000}{7}$. & 12ℚ. √ℚ $\frac{2000}{7}$. Numeri ergo quæsiti in proportione dupla sunt √ℚ $\frac{2000}{7}$. √ℚ $\frac{8000}{7}$. √ℚ $\frac{32000}{7}$. quorum quadrati $\frac{2000}{7}$. $\frac{8000}{7}$. $\frac{32000}{7}$. faciunt $\frac{42000}{7}$. hoc est, 6000.

CLXII. *162 Tres numeros continue proportionales in data proportione inuenire, ita vt parte data maximi numeri in partẽ datam medij multiplicata, & hoc producto in partem datam minimi ducto, procreetur datus numerus.*

SINT inueniendi tres numeri continue sesquialteri, ita vt tertia parte maximi ducta in semissem medij, & hoc numero producto in quartam partem minimi multiplicato, fiat numerus 576. Ponantur tres numeri quæsiti sesquialteri, 4ℚ. 6ℚ. 9ℚ. Ex $\frac{1}{3}$. maximi, id est, ex 3ℚ. in semissẽ medij, id est, in 3ℚ. fit numerus 9ℚ. & ex hoc in $\frac{1}{4}$. minimi, id est, in 1ℚ. fit numerus 9ℚℚ. æqualis 576. Diuisis ergo 576. per 9. fiet 1ℚℚ 64. cuius radix cubica 4. Ergo tres numeri quæsiti, cum positi sint 4ℚ. 6ℚ. 9ℚ. erunt 16. 24. 36. Atque ex tertia parte maximi, id est, ex 12. in semissem medij, id est, in 12. fit numerus 144. & ex hoc in $\frac{1}{4}$. minimi, id est, in 4. fit 576.

CLXIII. *163 Numerum inuenire, cuius datæ duæ partes inter se multiplicatæ producant numerum, quo diuiso per datum numerum, fiat Quotiens, qui contineat partem datam, vel partes radicis quadratæ numeri inuenti.*

SIT inueniendus numerus, cuius $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. inter se multiplicatæ faciant numerum, quo diuiso per 27. exeant $\frac{2}{3}$. radicis quadratæ numeri inuenti. Ponatur quæsitus numerus 12ℚ. Ex eius $\frac{1}{3}$. in $\frac{1}{4}$. id est, ex $\frac{1ℚ}{3}$. in $\frac{1ℚ}{4}$. fit numerus $\frac{1ℚ}{12}$. quo diuiso per 27. fit numerus $\frac{1ℚ}{324}$. æqualis duabus tertijs radicis quadratæ numeri inuenti 12ℚ. hoc est, duabus tertijs numeri √ℚ 12ℚ. hoc est, numero √ℚ $\frac{4ℚ}{9}$. qui facit $\frac{2}{3}$. numeri √ℚ 12ℚ. produciturque ex ductu √ℚ 12ℚ. in $\frac{2}{3}$. id est, in √ℚ $\frac{4}{9}$. Itaque æquatio inuenta est inter √ℚ $\frac{4ℚ}{9}$. & $\frac{1ℚ}{324}$. Igitur & æquatio erit inter eorum quadrata $\frac{4ℚ}{9}$. & $\frac{1ℚℚ}{104976}$. quæ per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationẽ inter 419904ℚ. & 9ℚℚ. Diuisis ergo 419904. per 9. fiet 1ℚℚ 46656. (quia inter 2ℚ & ℚℚ. medij sunt duo characteres ℚ & ℚ.) & 12ℚ. 36. numerus quæsitus. Nam ex 12. eius tertia parte in 9. eius quartam partem fit numerus 108. quo diuiso per 27. fit Quotiens 4. qui facit $\frac{2}{3}$. radicis quadratæ numeri inuenti 36. quæ radix est 6.

CLXIV. *164 Numerum inuenire, cuius pars data in se multiplicata, & productus numerus in aliam partem datam ductus procreet quadratum numerum inuenti numeri.*

SIT inueniendus numerus, cuius $\frac{1}{5}$. in se faciat numerum, qui ductus in $\frac{1}{5}$. eiusdem numeri inuenti producat quadratum numeri inuenti. Ponatur quæsitus numerus 12ℚ. Huius $\frac{1}{5}$. nimirum $\frac{1ℚ}{5}$. ducta in se facit $\frac{1ℚℚ}{25}$. qui numerus ductus in $\frac{1ℚ}{3}$. facit numerum $\frac{1ℚℚ}{75}$. æqualem quadrato numeri positi 12ℚ, hoc est, numero 1ℚℚ. ita vt æquatio sit inter $\frac{1ℚℚ}{75}$. & 1ℚℚ quæ per multiplicationem in crucẽ reducitur ad hanc inter 1ℚℚ. & 75ℚ. Diuisis ergo 75. per 1 fiet 12ℚ. 75. (quod Cossici numeri collaterales sint) numerus quæsitus. Nam eius quinta pars, 15. ducta in se facit 225. qui numerus ductus in 25. tertiam partem eiusdem numeri 75. facit 5625. quadratum inuenti numeri 75.

CLXV. *165 Numerum inuenire, cuius pars data in aliam partem datam multiplicata producat datum numerum.*

SIT inueniendus numerus, cuius $\frac{1}{4}$. ducta in $\frac{1}{6}$. faciat 384. Ponatur quæsitus numerus $12\mathcal{Q}$. Ex $\frac{1}{4}$ in $\frac{1}{6}$ fit numerus $\frac{1}{24}$. æqualis 384. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter $1\mathcal{G}$. & 9216. Diuisis igitur 9216. per 1 fiet $1\mathcal{G}$. 9216. & $12\mathcal{Q}$. 96. numerus quæsitus. Nam ex 24. quarta eius parte, in 16. eiusdem partem sextam fit numerus 384. datus.

ITEM sit inueniendus numerus, cuius $\frac{1}{4}$. in $\frac{1}{6}$. ducta faciat 100. Ponatur numerus quæsitus $12\mathcal{Q}$. Ex $\frac{1}{4}$ in $\frac{1}{6}$. fit numerus $\frac{1}{24}$. æqualis 100. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter $1\mathcal{G}$. & 2400. Diuisis ergo 2400. per 1. fiet $1\mathcal{G}$ 2400. cuius radix quadrata, $\sqrt{\mathcal{G}}$ 2400. erit numerus quæsitus. Nam eius $\frac{1}{4}$. est $\sqrt{\mathcal{G}}$ 150. & $\frac{1}{6}$. $\sqrt{\mathcal{G}}\frac{2400}{3}$. quæ partes inter se multiplicatæ procreant $\sqrt{\mathcal{G}}\frac{10000}{3}$. hoc est, $\sqrt{\mathcal{G}}$ 10000. siue 100.

SCHOLIVM.

SINE Algebra soluetur hoc problema hac ratione; Denominatores partium inter se multiplicentur, & productus numerus in datum numerum ducatur. Radix enim quadrata huius producti erit numerus quæsitus. Vt in priori exemplo, ex 4. in 6. fit 24. & ex 24. in 384. fit 9216. cuius radix quadrata 96. dabit numerum quæsitum.

QVOD si proponantur tres partes inter se multiplicandæ, ita vt producant numerum datum; multiplicandi erum partium denominatores inter se, & productus numerus in datum numerum ducendus. Huius enim numeri radix cubica dabit numerum quæsitum. Vt si quæratur numerus, cuius partes $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. inter se multiplicatæ producant 72000. Multiplicatis denominatoribus inter se, fit numerus 24. Et ex 24. in 72000. fit numerus 1728000. cuius radix cubica 120. dabit numerum quæsitum. Nam eius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. nimirum 60. 40. 30. inter se multiplicatæ faciunt 72000.

EODEM modo progrediendum est, si quatuor partes aliquotæ proponantur inter se multiplicandæ: sed ex vltimo producto extrahenda est radix zensizensica. Et si quinque proponantur, eruenda est radix surdesolida. Et sic de alijs in infinitum. Nam ex vltimo producto semper extrahenda est, radix, cuius exponens æqualis est numero partium aliquotarum. Vt si dentur 10. partes aliquotæ, extrahenda erit radix zensurdesolida. Et si dentur 12. radix zensizensicubica &c. Qua de re consule, quæ cap. 2. scripsimus de progressionibus numerorum Cossicorum.

CLXVI. *166 Tres numeros inuenire, vt bini quilibet multiplicati inter se gignant tres datos numeros.*

EX primo in secundum fiat 240. Ex primo in tertium 660. Et ex secundo in tertium, 1380. Ponatur primus numerus $12\mathcal{Q}$. Per quem si diuidatur numerus 240. productus ex primo in secundum, fiet secundus $\frac{240}{12\mathcal{Q}}$. Nam hic Quotiens ductus in diuisorem $12\mathcal{Q}$. producit diuisum 240. Eadem ratione erit tertius $\frac{660}{12\mathcal{Q}}$. Quotiens videlicet diuisionis numeri 660. per $12\mathcal{Q}$. Iam vero ex secundo $\frac{240}{12\mathcal{Q}}$. in tertium $\frac{660}{12\mathcal{Q}}$. fit numerus $\frac{158400}{144\mathcal{G}}$. æqualis 1380. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 158400. & $1380\mathcal{G}$. Diuisis ergo 158400. per 1380. fiet $1\mathcal{G}$. $114\frac{8}{23}$. (quod inter N. & $\mathcal{G}$. medius sit vnus character $2\mathcal{Q}$) & $12\mathcal{Q}$. erit $\sqrt{\mathcal{G}}$ $114\frac{8}{23}$. primus scilicet numerus, qui positus fuit $12\mathcal{Q}$. Et si per hunc primum, id est, per $\sqrt{\mathcal{G}}\frac{2640}{23}$. diuidatur primus numerus productus 240. hoc est, $\sqrt{\mathcal{G}}$ 57600. fiet Quotiens $\sqrt{\mathcal{G}}$ 5501 $\frac{9}{11}$. secundus videlicet numerus. Et si per eundem primum numerum $\sqrt{\mathcal{G}}\frac{2640}{23}$. diuidatur secundus numerus productus 660. hoc est, $\sqrt{\mathcal{G}}$ 435600. dabit Quotiens $\sqrt{\mathcal{G}}$ 3795. tertium numerum. Ex primo $\sqrt{\mathcal{G}}$ $114\frac{8}{23}$. in secundum $\sqrt{\mathcal{G}}$ 5501 $\frac{9}{11}$. fit $\sqrt{\mathcal{G}}$ 57600. hoc est, 240. Et ex eodem primo $\sqrt{\mathcal{G}}$ $114\frac{8}{23}$. in tertium $\sqrt{\mathcal{G}}$ 3795. fit $\sqrt{\mathcal{G}}$ 435600. id est, 660. Ac tandem ex secundo $\sqrt{\mathcal{G}}$ 5501 $\frac{9}{11}$. in tertium $\sqrt{\mathcal{G}}$ 3795. fit $\sqrt{\mathcal{G}}$ 1904400. id est, 1380.

CLXVII *167 Datis duobus numeris, alium tertium inuenire, qui cum minore numerum faciat æqualē ei, quem inuenti data pars cum maiore efficit.*

DATI sint duo numeri 12. & 20. inueniendusque sit alius, qui cum 12. tantum faciat, quantum eius $\frac{1}{7}$. cum 20. Ponatur numerus quæsitus $12\mathcal{Q}$. Igitur $12+12\mathcal{Q}$. æqualia erunt $20+\frac{1}{7}2\mathcal{Q}$. Ablatis $\frac{1}{7}2\mathcal{Q}$. vtrinque, erit æquatio inter $12+\frac{6}{7}2\mathcal{Q}$. & 20. Et ablatis 12. vtrobique, inter $\frac{6}{7}2\mathcal{Q}$. & 8. Diuisis ergo 8. per $\frac{6}{7}$. fiet $12\mathcal{Q}$. 14. numerus, quem inquirimus. Nam additus ad 12. facit 26. & eius $\frac{1}{7}$. nimirum 6. cum 20. faciunt similiter 26.

CLXVIII. *168 Numerum inuenire, ita vt quadrati quotcunque partium ipsius simul sumpti conficiant summam inuento numero æqualem, vel ipsius multiplicem.*

SIT primum inueniendus numerus, ita vt quadrati ex eius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. descripti summam faciant inuento numero æqualem. Ponatur numerus quæsitus $12\mathcal{Q}$. cuius partes nominatæ sunt $\frac{1}{2}2\mathcal{Q}$. $\frac{1}{3}2\mathcal{Q}$. & $\frac{1}{4}2\mathcal{Q}$. & earum quadrati $\frac{1}{4}\mathcal{G}$. $\frac{1}{9}\mathcal{G}$. $\frac{1}{16}\mathcal{G}$. qui simul faciunt $\frac{244}{576}\mathcal{G}$. quæ summa æqualis est $12\mathcal{Q}$. Diuisa ergo 1. per $\frac{244}{576}$. fiet $12\mathcal{Q}$. $\frac{576}{244}$. numerus quæsitus. Nam eius $\frac{1}{2}$. est $\frac{288}{244}$. eiusque quadratus $\frac{82944}{59536}$. & $\frac{1}{3}$. est $\frac{192}{244}$. eiusque quadratus $\frac{36864}{59536}$. & $\frac{1}{4}$. est $\frac{144}{244}$. eiusque quadratus $\frac{20736}{59536}$. qui omnes tres quadrati faciunt $\frac{140544}{59536}$. numerum æqualem inuento numero $\frac{244}{576}$. quippe cum tantum fiat ex denominatore huius in numeratorem illius, quantum ex numeratore in denominatorem.

SIT deinde inueniendus numerus, ita vt quadrati ex eius $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{4}$. procreati faciant numerum decuplum numeri inuenti. Ponatur numerus $12\mathcal{Q}$. cuius $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{4}$. sunt $\frac{1}{2}2\mathcal{Q}$. & $\frac{1}{4}2\mathcal{Q}$. & quadrati $\frac{1}{4}\mathcal{G}$. & $\frac{1}{16}\mathcal{G}$. qui simul faciunt summam $\frac{5}{16}\mathcal{G}$. æqualem $10\mathcal{Q}$. Diuisis ergo 10. per $\frac{5}{16}$. fiet $12\mathcal{Q}$. 32. numerus quæsitus. Nam quadrati 256. & 64. ex eius $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{4}$. descripti faciunt summam 320. decuplum numeri inuenti 32.

169 Nu-

169 Numerum inuenire, qui ductus in datam ipsius partem producat datum numerum quemcunque. CLXIX.

SIT inueniendus numerus, qui ductus in $\frac{1}{4}$. ipsius producat 90. Ponatur inuentus numerus $12\mathcal{Q}$. Ex $12\mathcal{Q}$. in $\frac{1}{4}2\mathcal{Q}$. fit numerus $\frac{1}{4}\mathcal{G}$. æqualis 90. Diuisis igitur 90. per $\frac{1}{4}$. fiet $1\mathcal{G}$. 120. & $12\mathcal{Q}$. $\sqrt{\mathcal{G}}$ 120. numerus quæsitus. Eius $\frac{1}{4}$. sunt $\sqrt{\mathcal{G}}\frac{1080}{16}$. vt patet, si $\sqrt{\mathcal{G}}$ 120. ducatur in $\frac{1}{4}$. hoc est, in $\sqrt{\mathcal{G}}\frac{9}{16}$. Iam ex $\sqrt{\mathcal{G}}$ 120. in $\sqrt{\mathcal{G}}\frac{1080}{16}$. fit $\sqrt{\mathcal{G}}\frac{1296000}{16}$. hoc est, $\sqrt{\mathcal{G}}$ 8100. hoc est, 90.

170 Datum numerum in duos partiri, vt eorum quadrati summam datam conficiant, maiorem tamen semisse quadrati ex dato numero geniti, & minorem quadrato eiusdem numeri. CLXX.

SIT numerus 40. diuidendus in duos, quorum quadrati faciant 928. numerum maiorem, quam 800. qui semissis est quadrati ex 40. procreati, & minorē quam 1600. qui quadratus est eiusdem numeri 40. Ponatur vnus numerorum $20-12\mathcal{Q}$. & alter $20+12\mathcal{Q}$. vt cum illo faciat 40. Quadrati horum duorum numerorum $400-402\mathcal{Q}+1\mathcal{G}$. & $400+402\mathcal{Q}+1\mathcal{G}$. faciunt $2\mathcal{G}+800$ numerum æqualem 928. Ablatis ergo 800. vtrobique, erit æquatio inter $2\mathcal{G}$. & 128. Diuisisque 128 per 2 fiet $1\mathcal{G}$. 64. & $12\mathcal{Q}$. 8. Ergo primus numerus positus $20-12\mathcal{Q}$. erit 12. & alter, quem posuimus $20+12\mathcal{Q}$. erit 28. Atque quadrati horum numerorum 12. & 28. nimirum 144. & 784. faciunt 928.

Hoc ænigma soluemus etiam per compositam æquationem in ænigmate 35. sequentis cap. 30.

171 Datum numerum in tres partes continue proportionales diuidere, ita vt productus numerus ex prima in tertiam ad productum ex prima in secundam habeat proportionem datam. CLXXI.

HOC ænigma solutum fuit etiam in problemate 133. sed pro alio exemplo.

SIT datus numerus 39. diuidendus in tres continue proportionales, ita vt numerus factus ex primo in tertium habeat ad numerum ex primo in secundum factum proportionem duplam sesquialteram. Ponatur secundus $12\mathcal{Q}$ ideoque primus ac tertius simul $39-12\mathcal{Q}$. Ex secundo $12\mathcal{Q}$. in se fit $1\mathcal{G}$.[a] quantum nimirum fit ex primo in tertium. Et quia hic productus debet esse duplus sesquialter ad eum, qui fit ex primo in secundum $12\mathcal{Q}$ fiet ex primo in secundū numerus $\frac{28}{5}$. (quod $1\mathcal{G}$. ad $\frac{28}{5}$. proportionem habeat duplā sesquialteram, vt constat, si $1\mathcal{G}$. diuidatur per $2\frac{1}{2}$. denominatorē proportionis duplæ sesquialteræ.) Quo diuiso per secundum $12\mathcal{Q}$. fit Quotiens $\frac{28}{5}\mathcal{Q}$. siue $\frac{2\mathcal{Q}}{5}$. qui ductus in diuisorem, id est, in $12\mathcal{Q}$. producit $\frac{24}{5}\mathcal{G}$. ac proinde primus numerus erit $\frac{2\mathcal{Q}}{5}$. quo ablato ex summa primi ac tertij, id est, ex $39-12\mathcal{Q}$. reliquus erit tertius numerus $\frac{195-7\mathcal{Q}}{5}$. in quem si ducatur primus $\frac{2\mathcal{Q}}{5}$. producetur numerus $\frac{390\mathcal{Q}-14\mathcal{G}}{25}$. æqualis numero $1\mathcal{G}$. qui fit ex medio $12\mathcal{Q}$. in se. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter $25\mathcal{G}$. & $390\mathcal{Q}-14\mathcal{G}$. Et additis $14\mathcal{G}$. vtrinque, erit æquatio inter $390\mathcal{Q}$. & $39\mathcal{G}$. Diuisis igitur 390. per 39. fiet $12\mathcal{Q}$ 10. (quod numeri Cossici sint collaterales) numerus scilicet medius. Primus ergo positus $\frac{2\mathcal{Q}}{5}$. nimirum $2\mathcal{Q}$. diuisæ per 5. erit 4. Et tertius, qui inuentus est $\frac{195-7\mathcal{Q}}{5}$. hoc est, $195-72\mathcal{Q}$. diuisæ per 5, erit 25. ita vt tres partes numeri 39. sint 4. 10. 25. continue proportionales. Et qui fit ex primo in tertium, vel ex secundo in se, nimirum 100. proportionem habet duplam sesquialteram ad numerum 40. qui fit ex primo in secundum.

[a] 20. sept.

QVONIAM vero, datis tribus numeris continue proportionalibus, [b] numerus, qui fit ex medio in se, ad productum ex primo in medium, eandem habet proportionem, quam tres dati numeri: propterea quod medius multiplicans se, & primum producit duos illos productos; soluetur hoc ænigma propositum facilius, si per ænigma 49. datus numerus secetur in tres numeros continue proportionales in proportione data. Itan. numerus factus ex primo in tertiū, hoc est, ex secundo in se, habebit ad factū ex primo in secundum proportionem datam, eandem nimirum, quam tres numeri habent. Vt in dato exemplo, secandus erit datus numerus 39. in tres numeros continue duplos sesquialteros, hoc modo. Ponantur tres numeri in proportione continua dupla sesquialtera $12\mathcal{Q}$. $2\frac{1}{2}2\mathcal{Q}$. $6\frac{1}{4}2\mathcal{Q}$. quorum summa $9\frac{3}{4}2\mathcal{Q}$. æqualis esse debet dato numero 39. Diuisis ergo 39. per $9\frac{3}{4}$. fiet $12\mathcal{Q}$. 4. primus numerus, qui positus fuit $12\mathcal{Q}$. Secundus ergo positus $2\frac{1}{2}2\mathcal{Q}$. erit 10. & tertius, quem posuimus $6\frac{1}{4}2\mathcal{Q}$. erit 25.

[b] 17. sept.

172 Datum numerum in duos partiri, vt ex vno in alterum fiat alius datus numerus minor quarta parte quadrati ex dato primo numero procreati: hoc est, ita vt radix quadrata secundi dati numeri minoris quarta parte quadrati ex primo dato numero procreati sit medio loco proportionalis inter duos numeros inuentos. CLXXII

SIT datus numerus 10. distribuendus in duos, inter quos $\sqrt{\mathcal{G}}$ 1. sit medio loco proportionalis, hoc est, vt ex vno in alium fiat 1. Ponatur minor pars $5-12\mathcal{Q}$. & maior $5+12\mathcal{Q}$. vt earum summa sit 10. Ex vna in alteram fit numerus $25-1\mathcal{G}$. vt in hac formula apparet, æqualis 1. Addito $1\mathcal{G}$. vtrobique, fiet æquatio inter 25 & $1\mathcal{G}+1$. Ablataque 1. vtrobique, inter 24 & $1\mathcal{G}$. Diuisis ergo 24. per 1 fiet $1\mathcal{G}$. 24. & $12\mathcal{Q}$ $\sqrt{\mathcal{G}}$ 24. Ergo minor pars posita $5-12\mathcal{Q}$. erit $5-\sqrt{\mathcal{G}}$ 24. Maior autem posita $5+12\mathcal{Q}$. erit $5+\sqrt{\mathcal{G}}$ 24. Atque hæ duæ partes

$$\begin{array}{rr} 5 & -1\,2\mathcal{Q} \\ 5 & +1\,2\mathcal{Q} \\ \hline & +5\,2\mathcal{Q} \;-\; 1\,\mathcal{G} \\ 25 & -5\,2\mathcal{Q} \\ \hline 25 & -1\,\mathcal{G} \end{array}$$

inter se multiplicatæ faciunt 1. vt hic cernitur. Fiet enim multiplicatio, si 24. quadratus posterioris particulæ subtrahetur ex 25. quadrato prioris particulæ, vt cap. 23. docuimus. [a] Igitur $\sqrt{\ }$ 1. medio loco proportionalis est inter $5-\sqrt{\ }24$. & $5+\sqrt{\ }24$. cum tam hi duo inter se multiplicati, quam ille $\sqrt{\ }1$. in se, faciat 1.

[a] 20. sept.

$$\begin{array}{r} 5 \text{ —— } \sqrt{\ } 24 \\ 5 + \sqrt{\ } 24 \\ \hline 1 \end{array}$$

PORRO hoc idem ænigma soluemus per compositam quoque æquationem in sequenti cap. ænigmate 38.

CLXXIII. *173 Datum numerum diuidere in duos, vt eorum quadrati summam faciant, quæ productum ex eorum multiplicatione superet dato numero.*

SIT datus numerus 8. diuidendus in duos, vt summa ex eorum quadratis collecta excedat productum numerum ex eorum multiplicatione mutua, numero 20. Ponatur minor numerus $4 \text{ —— } 1\mathcal{Q}$. & maior $4+1\mathcal{Q}$. vt simul faciant 8. Quadrati sunt $1\mathcal{S}+16-8\mathcal{Q}$. & $1\mathcal{S}+16+8\mathcal{Q}$. facientes summam $2\mathcal{S}+32$. cum $-8\mathcal{Q}$. & $+8\mathcal{Q}$. se mutuo tollant. Hæc summa excedere debet productum ex vno in alterum numero 20. Est autem hic productus $16-1\mathcal{S}$. vt in apposita formula apparet qui cum 20. faciet numerum $36-1\mathcal{S}$. æqualem quadratorum summæ $2\mathcal{S}+32$. Addito ergo $1\mathcal{S}$. vtrinque, erit æqualitas inter $3\mathcal{S}+32$. & 36. Ablatisq; 32. vtrobique, inter $3\mathcal{S}$. & 4. Diuisis ergo 4. per 3. fiet $1\mathcal{S}$ $\frac{4}{3}$. & $1\mathcal{Q}$ $\sqrt{\ }\frac{4}{3}$. Cum ergo minor numerus sit positus $4-1\mathcal{Q}$. erit ipse numerus minor $4-\sqrt{\ }\frac{4}{3}$. Maior autē positus $4+1\mathcal{Q}$. erit $4+\sqrt{\ }\frac{4}{3}$.

$$\begin{array}{r} 4 \text{ —— } 1\mathcal{Q} \\ 4 + 1\mathcal{Q} \\ \hline + 4\mathcal{Q} \text{ —— } 1\mathcal{S} \\ 16 \text{ —— } 4\mathcal{Q} \\ \hline 16 \text{ —— } 1\mathcal{S} \end{array}$$

qui duo numeri faciunt 8. & quadrati sunt $17\frac{1}{3}-\sqrt{\ }\frac{256}{3}$. & $17\frac{1}{3}+\sqrt{\ }\frac{256}{3}$. vt in hisce formulis apparet. quorum summa est $34\frac{2}{3}$. quæ superat productum $14\frac{2}{3}$. ex vno in alterum, numero dato 20. Productus autem hic $14\frac{2}{3}$. habetur, si $\frac{4}{3}$. quadratus posterioris particulæ detur ex 16. quadrato prioris particulæ, vt cap. 23. traditum est, & altera hæc formula indicat.

$$\begin{array}{r} 4 \text{ —— } \sqrt{\ } \frac{4}{3} \\ 4 + \sqrt{\ } \frac{4}{3} \\ \hline 14\frac{2}{3} \end{array}$$

SIT rursus datus numerus 40. distribuendus in duos, quorum quadrati summam faciant, quæ numerum ex eorum multiplicatione factum superet numero 403. Ponatur minor numerus $20-1\mathcal{Q}$. & maior $20+1\mathcal{Q}$. facientes summam 40. Quadrati sunt $1\mathcal{S}+400-40\mathcal{Q}$. & $1\mathcal{S}+400+40\mathcal{Q}$. quorum summa $2\mathcal{S}+800$. superans numero 403 numerum $400-1\mathcal{S}$. productum ex vno in alterum. qui productus habetur, si quadratus $1\mathcal{S}$. posterioris particulæ detur ex 400. quadrato prioris particulæ, vt in hac formula cernis, traditumque est cap. 23. Itaque si ad hunc productum addentur 403. fiet æquatio inter $2\mathcal{S}+800$. summam quadratorum, & $803-1\mathcal{S}$. Additoque $1\mathcal{S}$. vtrobique, inter $3\mathcal{S}+800$. & 803. Ablatisque 800. vtrinque, inter $3\mathcal{S}$. & 3. Diuisis igitur 3. per 3. fiet $1\mathcal{S}$. 1. & $12\mathcal{Q}$ 1. Erit ergo minor numerus, quem posuimus $20-12\mathcal{Q}$. 19. & maior positus $20+12\mathcal{Q}$. erit 21. qui problema conficiunt.

$$\begin{array}{r} 20 \text{ —— } 1\mathcal{Q} \\ 20 + 1\mathcal{Q} \\ \hline 400 \text{ —— } 1\mathcal{S} \end{array}$$

HOC etiam problema soluemus per compositam æquationem in ænigmate 39. sequentis cap.

SI numerus proponeretur 20. diuidendus in duos, vt summa quadratorum superet numerum ex partium multiplicatione productum numero 30. foret problema impossibile, vt ex ipsa solutione discès.

CLXXIV. *174 Numerum inuenire, cuius quadratus auctus dato numero, si ducatur in eundem quadratum mulctatum eodem dato numero producat quemuis datum numerum.*

SIT inueniendus numerus, cuius quadratus auctus octonario, si ducatur in eundem quadratum mulctatum eodem octonario, producat 6497. Ponatur numerus quæsitus $1\mathcal{Q}$. Eius quadratus auctus octonario erit $1\mathcal{S}+8$ mulctatus vero eodem octonario, $1\mathcal{S}-8$. Hi duo numeri inter se multiplicati faciunt $1\mathcal{SS}-64$. vt hic vides, si 64. quadratus posterioris particulæ, detur ex $1\mathcal{SS}$. particulæ prioris. qui productus æqualis esse debet dato numero 6497. Additis ergo 64. vtrobique, æquatio erit inter $1\mathcal{SS}$. & 6561. Diuisisque 6561. per 1. fiet $1\mathcal{SS}$. 6561. & radix eius zensizensica 9. numerus quæsitus. Nam eius quadratus 81. auctus octonario facit 89. & mulctatus octonario, 73. fitque numerus 6497. ex 89. in 73.

$$\begin{array}{r} 1\mathcal{S} + 8 \\ 1\mathcal{S} \text{ —— } 8 \\ \hline 1\mathcal{SS} \text{ —— } 64 \end{array}$$

SI iis-

SI iisdem positis, produci debeat numerus 10. reperietur æquatio inter $1\mathcal{SS}$. & 74. Diuisis ergo 74. per 1. fiet $1\mathcal{SS}$. 74. & radix Zensizensica $\sqrt{\ }\mathcal{SS}$ 74. numerus quæsitus. Eius enim quadratus $\sqrt{\ }\mathcal{SS}$ 5476. auctus octonario est $\sqrt{\ }\mathcal{SS}$ 5476 + 8. & mulctatus octonario, $\sqrt{\ }\mathcal{SS}$ 5476 − 8. qui duo numeri æquiualent his duobus $\sqrt{\ }\mathcal{S}$ 74 + 8. & $\sqrt{\ }\mathcal{S}$ 74 − 8. atque hi duo inter se multiplicati producunt 10. vt hic vides: quippe cum 64. quadratus posterioris particulæ detractus ex 74. quadrato particulæ prioris relinquat 10.

$$\begin{array}{r} \sqrt{\ } \mathcal{S}\ 74 + 8 \\ \sqrt{\ } \mathcal{S}\ 74 \text{ —— } 8 \\ \hline 10 \end{array}$$

SCHOLIVM.

ATQVE hæc dicta sint de ænigmatibus, quæ per simplicem æquationem enodantur. Ad similitudinem enim horum studiosus Lector alia, quotquot voluerit, formare poterit. Quare nunc alia ænigmata proponemus, in quibus soluendis occurrunt æquationes compositæ.

ÆNIGMATA VARIA NVMERORVM ABSTRACTORVM per Algebram enodanda, in quibus æquatio inter tres numeros, quorum vnus alijs duobus æqualis est, occurrit: quæ quidem composita æquatio dicitur.

CAPVT XXX.

I. *1 Datum numerum in duas partes distribuere, vt earum cubi datam summam, quæ maior sit quarta parte cubi ex dato numero procreati, efficiant.*

HOC ænigma, quod fuit 141. præcedentis cap. soluemus hic aliter, nimirum per æquationem compositam, in qua vnus numerus Cossicus duobus Cossicis numeris reperitur æqualis: & in qua eruenda est radix ex numero composito, vel diminuto, vt in cap. 12. traditum est. Id quod etiam fiet in alijs huius cap. ænigmatibus. Sit ergo datus numerus 10. diuidendus in duas partes, quarum cubi faciant summam 370. quæ maior est, quam 250. quarta pars cubi ex dato numeri 10. procreati. Ponatur prima pars $12\mathcal{Q}$. & secunda $10-12\mathcal{Q}$. Cubi harum partium sunt $1\mathcal{C}$. & $1000-300\mathcal{Q}+30\mathcal{S}-1\mathcal{C}$. quorum summa $1000-300\mathcal{Q}+30\mathcal{S}$. (Nam $+1\mathcal{C}$. & $-1\mathcal{C}$. se mutuo interimunt) æqualis esse debet 370. Additis $300\mathcal{Q}$ vtrobique, fiet æquatio inter $1000+30\mathcal{S}$. & $300\mathcal{Q}+370$. Et ablatis 370. vtrinque, inter $630+30\mathcal{S}$. & $300\mathcal{Q}$. Et rursum ablatis 630. vtrinque, inter $30\mathcal{S}$. & $300\mathcal{Q}-630$. Diuisis autem singulis hisce numeris per numerum maioris characteris Cossici, nimirum per 30. vt circa finem cap. 10. præcepimus, erit æquatio inter $1\mathcal{S}$. & $10\mathcal{Q}$ —— 21. quam sic resolues ex doctrina cap. 12. Semissis numeri radicum 5. facit quadratum 25. à quo demptis 21. propter signum − remanet numerus 4. cuius radix quadrata 2. addita ad 5. semissem numeri radicum dabit maiorem radicem 7. Et eadem radix 2. dempta ex eadem semisse 5. reliquam faciet minorem radicem 3. Huiusmodi enim numeri, in quibus numerus absolutus affectus est signo ——. duplicem radicem habent, vt cap. 12. tradidimus. Partes ergo numeri dati 10. sunt 7. & 3. quarum cubi 343. & 27. summam datam 370. efficiunt. vt etiam in ænigmate 141. præcedentis cap. inuentum est.

SI eodem numero dato, cuborum summa proponatur 400. inueniemus æquationem vltimam inter $1\mathcal{S}$. & $10\mathcal{Q}$ —— 20. quam ita resolues. Semissis numeri radicum 5. facit quadratum 25. à quo demptis 20. remanet numerus 5. cuius radix quadrata $\sqrt{\ }5$. addita ad 5. semissem numeri radicum dabit maiorem radicem $\sqrt{\ }5+5$. Et eadem radix $\sqrt{\ }5$. dempta ex eadem semisse 5. reliquam faciet minorem radicem $5-\sqrt{\ }5$. vt in eodem ænigmate 141. antecedentis cap. inuenimus.

QVO pacto autem ænigma hoc sine Algebra soluendum sit, dictum est supra in ænigmate 141. præcedentis cap.

II. *2 Datum numerum in duos cubos distribuere, quorum laterum summa data est: dummodo quarta pars cubi huius summæ minor sit dato numero.*

HOC problema cum antecedenti coincidit, vt in ænigmate 142. cap. præcedentis diximus.

III. *3 Numerum inuenire, qui cum dato numero suum quadratum efficiat.*

DATVS numerus sit 156. oporteatque inuenire numerum, qui additus ad 156. conficiat quadratum ipsius numeri inuenti. Ponatur numerus quæsitus $1\mathcal{Q}$. cuius quadratum $1\mathcal{S}$. cui æqualis debet esse $1\mathcal{Q}+156$. Semissis numeri radicum est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum, id est, ad $\frac{1}{4}$. addo 156. facioq; $156\frac{1}{4}$. siue $\frac{625}{4}$. ad cuius radicem $\frac{25}{2}$. hoc est, ad $12\frac{1}{2}$. addo semissem numeri radicum, nimirum $\frac{1}{2}$. efficioque pretium $1\mathcal{Q}$. 13. qui est numerus quæsitus. Nam 13. cum 156. facit 169. quadratum numeri 13.

SIT rursus inueniendus numerus, qui cum 30. faciat suum quadratum. Ponatur numerus quæsitus $1\mathcal{Q}$. cu-

1℞. cuius quadratum 1ʒ. cui æqualis debet esse 1℞ + 50. Semissis numeri radicum est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum, id est, ad $\frac{1}{4}$. addo 50. facioque 50$\frac{1}{4}$. siue $\frac{201}{4}$. ad cuius radicem, hoc est, ad √ʒ $\frac{201}{4}$. addo semissem numeri radicum, nimirum $\frac{1}{2}$. efficioque pretium 1℞. √ʒ $\frac{201}{4}$ + $\frac{1}{2}$. numerum scilicet quæsitum. Huius enim quadratus est √ʒ $\frac{804}{16}$ + $\frac{202}{4}$. vt in hac formula apparet, hoc est, √ʒ $\frac{201}{4}$ + 50$\frac{1}{2}$, quantum videlicet fit ex numero inuento √ʒ $\frac{201}{4}$ + $\frac{1}{2}$. vna cum dato numero 50. Conflatur enim etiam numerus √ʒ $\frac{201}{4}$ + 50$\frac{1}{2}$. Apposui formulam multiplicationis numeri inuenti √ʒ $\frac{201}{4}$ + $\frac{1}{2}$. in se quadrate, vt videas, quo pacto quadratus sit productus.

√ʒ $\frac{201}{4}$ + $\frac{1}{2}$
√ʒ $\frac{201}{4}$ + $\frac{1}{2}$
+ √ʒ $\frac{201}{16}$ + $\frac{1}{4}$
$\frac{201}{4}$ + √ʒ $\frac{201}{16}$
$\frac{201}{4}$ + √ʒ $\frac{804}{16}$ + $\frac{1}{4}$

IV. 4 *Numerum inuenire, cuius quadratus cum dato numero conficiat ipsius numeri inuenti zensizensum, siue quadrati quadratum.*

SIT datus numerus 83232. oporteatque inuenire numerum, qui cum 83232. efficiat quadrati quadratum ipsius. Ponatur quæsitus numerus 1℞. cuius quadratus 1ʒ. & quadrati quadratus est 1ʒʒ. æqualis 1ʒ + 83232. Semissis numeri zensorum est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum, id est, ad $\frac{1}{4}$. addo numerum 83232. efficioque 83232$\frac{1}{4}$. hoc est, $\frac{332929}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{577}{2}$. addo semissem numeri zensorum, nimirum $\frac{1}{2}$. efficioque $\frac{578}{2}$. hoc est, 289. quadratum. cuius radix 17. est numerus quæsitus, vt prope finem cap. 12. declaratum est. Nam characteres Cossici ʒʒ. ʒ. N. non sunt collaterales, sed inter quosuis duos medius est vnus: propterea primo loco inuenitur valor vnius quadrati, deinde radix eruitur, quæ offert numerum, quem inquirimus. Atque ita numeri inuenti 17. quadratus 289. cum dato numero 83232. efficit quadrati quadratum 83521. numeri inuenti 17.

V. 5 *Numerum inuenire, cuius cubus cum dato numero conficiat sui cubi quadratum, vel sui quadrati cubum.*

SIT datus numerus 7526792. inueniendusque alius, cuius cubus cum dato numero efficiat inuenti numeri cubi quadratum, vel (quod idem est) quadrati cubum. Ponatur quæsitus numerus 1℞. cuius cubus 1C. & zensicubus 1ʒC. æqualis 1C + 7526792. atque ex hoc numero composito eruenda est zensicubica, hoc modo. Semissis numeri medij characteris C, nimirum $\frac{1}{2}$. facit quadratum $\frac{1}{4}$. Addito numero 7526792. fit numerus 7526792$\frac{1}{4}$. vel $\frac{30107169}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{5487}{2}$. addo semissem prædictam $\frac{1}{2}$: numeri medij characteris C. facioque $\frac{5488}{2}$. id est, 2744. radicem quadratam huius numeri 1C + 7526792. propter characterem ʒ. qui in maximo charactere Cossico reperitur. Huius denique radicis quadratæ 2744. radix cubica 14. propter alium characterem C, in maximo charactere positum, dabit numerum quæsitum, vt cap. 12. prope finem docuimus. Huius enim cubus 2744. additus dato numero 7526792. constat suum zensicubum, vel quadrati cubum 7529536.

VI. 6 *Inuenire duos numeros constantes datum numerum, ita vt ex ductu vnius in alterum gignatur alius quiuis datus numerus.*

DATA summa sit 25. & productus numerus 84. Ponatur vnus numerus 1℞. ideoque alter 25 − 1℞. qui simul additi faciunt 25. Ex vno vero in alterum fit numerus 25℞ − 1ʒ. æqualis 84. Addito 1ʒ. vtrobique, erit æqualitas inter 25℞. & 1ʒ + 84. Ablatisque 84. vtrinque, inter 25℞ − 84. & 1ʒ. atque ex numero 25℞ − 84. elicienda est radix zensica, hac ratione. Semissis numeri radicum $\frac{25}{2}$. facit quadratum $\frac{625}{4}$. ex quo dempto numero 84. hoc est, $\frac{336}{4}$. propter signum −. remanet numerus $\frac{289}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{17}{2}$. addo prædictam semissem numeri radicum, videlicet $\frac{25}{2}$. efficioque $\frac{42}{2}$. hoc est 21. vnum ex numeris quæsitis. alter ergo erit 4. qui etiam inuenietur, si vltima radix inuenta $\frac{17}{2}$. detrahatur ex prædicta semisse numeri radicum, nimirum ex $\frac{25}{2}$. Nam numerus 25℞ − 84. duplicem radicem habet, propter signum −. quo absolutus numerus 84. afficitur. Iam duo numeri 21. & 4. inuenti faciunt summam datam 25. & ex vno in alterum procreatur datus numerus 84.

VII. 7 *Numerum inuenire, cuius zensizensus cum dato numero efficiat numerum in data proportione ad quadratum numeri inuenti.*

DATVS numerus sit 1183. inueniendusque sit alius numerus, cuius quadrati quadratus cum 1183. faciat numerum, qui ad quadratum inuenti numeri proportionem habeat, quam 176. ad 1. Ponatur quæsitus numerus 1℞. cuius zensizensus 1ʒʒ. & quadratus, siue zensus 1ʒ. Erit ergo æquatio inter 1ʒʒ + 1183. & 176ʒ. quandoquidem vnus zensizensus cum 1183. debet ad 1ʒ. proportionem habere, quam 176. ad 1. hoc est, æqualis esse 176ʒ. Ablatis igitur 1183. vtrinque, erit æquatio inter 1ʒʒ. & 176ʒ − 1183. Ex numero hoc 176ʒ − 1183. sic radicem zensizensicam eruemus. Semissis numeri medij characteris ʒ. est 88. ex cuius quadrato 7744. si tollantur 1183. propter signum −. remanent 6561. ad cuius radicem quadratam 81. si addatur prædicta semissis 88. fiet quadratus 169. cuius radix 13. dabit numerum quæsitum. Nam eius zensizensus 28561. cum dato numero 1183. facit numerum 29744. qui ad 169. quadratum inuenti numeri proportionem habet, quam 176. ad 1.

SED quoniam numerus 176ʒ − 1183. duplicem habet radicem zensizensicam, maiorem scilicet & mino

mino

minorem, vt cap. 12. traditum est, maior est inuenta 13. quæ problemati satisfacit. Minor autem habebitur, si 81. radicem quadratam residui 6561. subtrahemus ex prædicta semisse 88. Reliqui enim numeri 7. radix quadrata, nimirum √ʒ7. erit minor radix zensizensica, numerus videlicet quæsitus. Nam eius quadratus est 7. & zensizensus 49. qui cum 1183. facit numerum 1232. qui ad quadratum 7. proportionem habet eandem, quam 176. ad 1.

8 *Numerum inuenire, cuius zensicubus cum dato numero faciat numerum, qui ad suum cubum proportionem habeat datam.* VIII.

SIT datus numerus 106866411. inueniendusque sit alius numerus, cuius zensicubus cum dato numero faciat numerum, cuius proportio ad cubum inuenti numeri proportionem habeat eandem, quam 100000. ad 1. Ponatur quæsitus numerus 1℞. cuius cubus 1C. & zensicubus 1ʒC. Erit ergo æqualitas inter 1ʒC + 106866411. & 100000C. quandoquidem 1ʒC + 106866411. ad 1C, proportionem habere debet eandem, quam 100000. ad 1. Ablatis igitur 106866411. vtrobique, remanebit æqualitas inter 1ʒC. & 100000C − 106866411. atque adeo ex 100000C − 106866411. eruenda erit radix zensicubica hoc modo. Semissis numeri cuborum est 50000. à cuius quadrato 2500000000. si dematur numerus propositus, propter signum −, remanebit numerus 1431335889. ad cuius radicem quadratam 37833. si addatur semissis prædicta 50000. habebitur radix quadrata 87833. Cuius radix cubica √C 87833. dabit numerum quæsitum, iuxta doctrinam cap. 12. Nam eius cubus est 87833. & zensicubus 7714635889. qui cum dato numero 106866411. facit numerum 8783300000. qui ad cubum 87833. proportionem habet eandem, quam 100000. ad 1.

Et quoniam numerus 100000C − 106866411. duplicem habet radicem zensicubicam, quarum maior inuenta est √C 87833. satisfaciens ænigmati proposito. Minor ita reperietur. Vltima radix quadrata inuenta 37833. Ex prædicta semisse 50000. numeri cuborum detrahatur. Residui namque 12167. radix cubica 23. erit minor radix satisfaciēs quoq; ænigmati proposito. Nam eius cubus est 12167. & zensicubus 148035889. qui cum dato numero 106866411. facit numerum 1216700000. qui ad cubum 12167. eandem proportionem habet, quam 100000. ad 1.

9 *Duos numeros in dato excessu inuenire, ita vt ex ductu vnius in alterum gignatur numerus datus quicunque.* IX.

SIT datus excessus 6. & numerus datus 475. Ponatur minor numerus 1℞. & maior idcirco 1℞ + 6. Ex illo in hunc fit numerus 1ʒ + 6℞ æqualis 475. Ablatis ergo 6℞. vtrobique, erit æquatio inter 1ʒ. & 475 − 6℞. Radicem ergo ex hoc numero ita eruemus. Semissis numeri radicum 3. facit quadratum 9. ad quod adiicio numerum 475. qui intelligitur affectus signo +. Et ex conflato numero 484. capio radicem quadratam 22. Ex qua demo prædictam semissem 3. numeri radicum, propter signum −. Reliquus enim numerus 19. erit pretium 1℞. Ergo 1℞ + 6. valebit 25. Atque hi duo numeri 19. & 25. sunt quæsiti. Habent enim excessum datum 6. & ex vno in alterum producitur numerus 475.

SIT rursus datus excessus 6. & datus numerus 500. Iisdem positis, erit productus numerus 1ʒ + 6℞. æqualis 500. Et ablatis 6℞ vtrinque, erit æquatio inter 1ʒ. & 500 − 6℞. Semissis numeri radicum 3. facit quadratum 9. quod additum ad 500. facit 509. à cuius radice quadrata √ʒ 509. si dematur prædicta semissis 3. fiet minor numerus quæsitus √ʒ 509 − 3. Addito dato excessu 6. fiet maior √ʒ 509 + 3. Ex minore in maiorem fit numerus 509 − 9. vt in hac formula apparet, id est, 500. quia − √ʒ 4581. & + √ʒ 4581. se mutuo interimunt. Vel certe, quia vt cap. 23. traditum est, si 9. quadratum posterioris particulæ auferatur ex 509. quadrato prioris particulæ, remanet numerus productus 500.

√ʒ 509 + 3
√ʒ 509 − 3
− √ʒ 4581 − 9
509 + √ʒ 4581
509 − 9

10 *Numerum inuenire, cuius quadrati multiplex quilibet vna cum eiusdem numeri quadrato quadrati faciat datum numerum.* X.

SIT inueniendus numerus, cuius quadrati quincuplum vna cum eiusdem quadrati quadrato efficiat 535086. Ponatur quæsitus numerus 1℞. cuius quadratus 1ʒ. quinquies sumptus facit 5ʒ. qui numerus vna cum eiusdem numeri 1℞. Zensizenso, id est, cum 1ʒʒ. æqualis esse debet numero 535086. Quoniam igitur æquatio est inter 5ʒ + 1ʒʒ. & 535086. Ablatis 5ʒ. vtrinque, remanebit æquatio inter 1ʒʒ. & 535086 − 5ʒ. atque ex 535086 − 5ʒ. elicienda est radix Zensizensica, hunc in modum. Semissis numeri Zensorum $\frac{5}{2}$. facit quadratum $\frac{25}{4}$. ad quem adiectus numerus datus 535086. facit 535086$\frac{25}{4}$. hoc est, $\frac{2140369}{4}$. à cuius radice quadrata $\frac{1463}{2}$. si prædicta semissis $\frac{5}{2}$. dematur, propter signum −. remanebit radix quadrata $\frac{1458}{2}$. hoc est, 729. cuius radix quadrata 27. erit radix Zensizensica numeri 535086 − 5ʒ. nimirum numerus, quem inquirimus. Nam eius quadratus 729. quinquies sumptus facit 3645. qui numerus cum 531441. Zensizenso inuenti numeri 27. facit numerum datum 535086.

11 *Numerum inuenire, cuius cubus, cum eiusdem zensicubo faciat datum numerum.* XI.

SIT inueniendus numerus, cuius cubus cum eiusdem Zensicubo faciat 1291503906. Ponatur quæsitus numerus 1℞. cuius cubus 1C, & Zensicubus 1ʒC. Oportet ergo existere æquationem inter 1C + 1ʒC

& 1291

& 1291503906. ablatoque 1ℭ vtrinque, inter 1ʓℭ. & 1291503906 — 1ℭ. Ex quo numero eruenda est radix Zensicubica, hoc modo. Semissis numeri medij Cossici est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. Si addatur datus numerus, fit numerus 1291503906$\frac{1}{4}$. hoc est, $\frac{5166015625}{4}$. à cuius radice quadrata $\frac{71875}{2}$. si dematur prædicta semissis $\frac{1}{2}$. remanebit radix Zensica $\frac{71874}{2}$. id est, 35937. cuius radix cubica 33. erit radix Zensicubica numeri 1291503906 — 1ℭ. nimirum numerus, qui quæritur. Nam eius cubus 35937. cùm eiusdem Zensicubo 1291467969. facit numerum 1291503906.

XII. 12 *Datum numerum in duas partes diuidere, vt maiore per minorem diuisa, & minore per maiorem, summa Quotientum sit data.*

NVMERVS 100. diuidendus sit in duas partes, vt maiore diuisa per minorem, & minore per maiorem, duo Quotientes faciant summam 2$\frac{36}{91}$. Ponatur vna pars 1℞. & altera 100 — 1℞. Diuisa hac per illam, fit Quotiens $\frac{100-1℞}{1℞}$. Et illa per hanc diuisa, Quotiens fit $\frac{1℞}{100-1℞}$. quorum Quotientum summa $\frac{10000-200℞+2ʓ}{100℞-1ʓ}$. æqualis esse debet numero 2$\frac{36}{91}$. siue $\frac{218}{91}$. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 21800℞ — 218ʓ. & 910000 — 18200℞ + 182ʓ. Additis autem 218ʓ vtrinque, fiet æquatio inter 21800℞. & 910000 — 18200℞ + 400ʓ. Et additis 18200℞. vtrobique inter 40000℞. & 910000 + 400ʓ. Et ablatis 910000. vtrobique, inter 40000℞ — 910000. & 400ʓ. Et diuisis singulis numeris per numerum signo ʓ. affectum, id est, per 400. æqualitas erit inter 100℞ — 2275. & 1ʓ. Radix ergo quadrata ita eruetur. Semissis numeri radicum est 50. à cuius quadrato 2500. si detrahantur 2275. propter signum — reliquus fiet numerus 225. ad cuius radicem quadratam 15. si addatur prædicta semissis 50. fiet pretium radicis 65. maior pars. Minor ergo erit 35. quæ etiam habebitur, (quoniam numerus propositus 100℞ — 2275. duplicem radicem habet) si radix quadrata 15. proxime inuenta auferatur ex prædicta semisse 50. Itaque partes quæsitæ sunt 65 & 35. Et diuisa illa per hanc, & hac per illam, fiunt Quotientes 1$\frac{6}{7}$. & $\frac{7}{13}$. quæ summam faciunt 2$\frac{36}{91}$.

XIII. 13 *Numerum inuenire, ad quem quadratus ipsius mulctatus numero dato quocunque proportionem datam habeat.*

SIT inueniendus numerus, ad quem quadratus ipsius mulctatus numero 264. proportionem habeat decuplam. Ponatur quæsitus numerus 1℞. cuius quadratus 1ʓ. si prius ab eo subducantur 264. ad 1℞. proportionem habere debeat decuplam, ita vt æquatio sit inter 10℞. & 1ʓ — 264. Et additis 264. vtrinque, inter 10℞ + 264. & 1ʓ. quæ ita expedietur. Semissis numeri radicum 5. quadratum facit 25. & additis 264. fit numerus 289. ad cuius radicem quadratam 17. si prædicta semissis 5. addatur, fit pretium vnius radicis 22. numerus videlicet quæsitus. Nam eius quadratus 484. si amiserit 264. fiet 220. qui numerus decuplus est numeri 22.

XIV. 14 *Numerum inuenire, ad quem quadratus ipsius auctus dato numero proportionem habeat datam.*

SIT inueniendus numerus, ad quem ipsius quadratus auctus numero 110. proportionem habeat, quam 27. ad 1. Ponatur numerus quæsitus 1℞. cuius quadratus 1ʓ. si ei addentur 110. ad 1℞. proportionem habere debeat eandem, quam 27. ad 1. ita vt æquatio sit inter 1ʓ + 110. & 27℞. Ablatisque 110. vtrinque, inter 1ʓ. & 27℞ — 110. quam ita resolues. Semissis numeri radicum $\frac{27}{2}$. quadratum facit $\frac{729}{4}$. à quo si auferantur 110. id est, $\frac{440}{4}$. reliquus fit numerus $\frac{289}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{17}{2}$. si addetur prædicta semissis $\frac{27}{2}$. fiet maior radix $\frac{44}{2}$. id est, 22. Et si proxime inuenta radix $\frac{17}{2}$. auferetur à prædicta semisse $\frac{27}{2}$. reliqua fiet minor radix $\frac{10}{2}$. hoc est, 5. Nam hæc æquatio duplicem habet radicem. Atque ita vterque numerus 22. & 5. problemati proposito satisfaciet. Quadratus enim 484. numeri 22. auctus numero 110. fit numerus 594. qui ad 22. eandem proportionem habet, quam 27. ad 1. Item quadratus 25. numeri 5. auctus numero 110. fit 135. qui numerus ad 5. proportionem eandem habet, quam 27. ad 1.

XV. 15 *Duos numeros inuenire, quorum quadrati datam summam conficiant: & iidem numeri inter se multiplicati producant numerum, ad quem quadratorum summa habeat proportionem datam.*

SVMMA quadratorum data sit 180. quæ ad productum numerum proportionem habeat duplam sesquialteram: atque idcirco cum 180. ad 72. habeant proportionem duplam sesquialteram, productus numerus ex vno in alterum fit 72. qui numerus 72. habetur, si 180. diuidantur per 2$\frac{1}{2}$. denominatorem datæ proportionis. Ponatur vnus numerus quæsitus 1℞. & alter $\frac{72}{1℞}$. vt ex vno in alterum fiant 72. qui numerus $\frac{72}{1℞}$. habetur per diuisionem 72. per 1℞. quemadmodum si inueniendus sit numerus, qui ductus in 8. faciat 48. si diuidantur 48. per 8. inuenitur numerus 6. qui ductus in 8. facit 48. Iam quadrati positorum numerorum 1℞. & $\frac{72}{1℞}$. sunt 1ʓ. & $\frac{5184}{1ʓ}$. quorum summa $\frac{1ʓʓ+5184}{1ʓ}$. æqualis esse debet 180. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 1ʓʓ + 5184. & 180ʓ. Ablatisque 5184. vtrinque, erit æquatio inter 1ʓʓ. & 180ʓ — 5184. cuius radicem ita inuenies. Semissis numeri medij, qui gerit characterem ʓ. est 90. à cuius quadrato 8100. si demantur 5184. fiet reliquus numerus 2916. ad cuius radicem 54. si addatur semissis prædicta 90. fiet summa 144. cuius radix quadrata 12. iuxta doctrinam cap. 12. erit maior radix. Et si proxime inuentam radicem 54. demes ex semisse prædicta 90. reliquus erit numerus 36. cuius radix 6. dabit minorem radicem. quæ etiam habetur, si 72. diuidantur per priorem radicem inuentam 12. Itaque duo quæsiti numeri sunt 12. & 6. qui inter se multiplicati faciunt 72. ad quem numerum summa data quadratorum ex ipsis procreatorum, qui sunt 144. & 36. nimirum 180. proportionem habet duplam sesquialteram, quemadmodum propositum est.

16 *Datum numerum in tres numeros continue proportionales diuidere, ita vt productus ex primo in secundum, cum producto ex secundo in tertium, vna cum eo, qui fit ex tertio in primum faciat quemlibet numerum datum.* XVI.

SIT datus numerus 76. diuidendus, ita vt tres producti efficiant 1824. Quoniam datis tribus numeris continue proportionalibus, [a] qui fit ex medio in summam omnium, æqualis est eis, qui fiunt ex medio in [a] 1. secun.
primum, & ex medio in tertium, & ex medio in se, hoc est, ex tertio in primum, [b] cum hic æqualis sit ei, qui fit [b] 20. sept.
ex medio in se: si datus numerus producendus 1824. per datum numerum diuidendum 76. diuidatur, erit Quotiens 24. medius numerus proportionalis: quippe cũ Quotiens 24. ductus in diuisorẽ 76. id est, in summã omnium trium, gignat numerum diuisum 1824. qui nimirum æqualis ponitur tribus productis, quos diximus. Dempto ergo hoc medio 24. ex 76. summa omnium, reliqua fiet summa primi & tertij, 52. Ponatur ergo primus 1℞. eritque propterea tertius 52 — 1℞. ita vt tres numeri proportionales sint 1℞. 24. 52 — 1℞. [c] Igitur [c] 20. sept.
qui fit ex 1℞ in 52 — 1℞, id est, 52℞ — 1ʓ. æqualis erit numero 576. qui ex medio 24. fit in se. Addito ergo 1ʓ vtrinque, erit æquatio inter 52℞. & 1ʓ + 576. Ablatisque 578. vtrobique, inter 52℞ — 576. & 1ʓ. quæ æquatio ita resoluetur. Semissis numeri radicum est 26. à cuius quadrato 676. si demantur 576. remanet numerus 100. ad cuius radicem quadratam 10. si addatur prædicta semissis 26. fiet pretium radicis 36. primus numerus. tertius autem erit 16. nimirum 52 — 1℞. ita vt tres numeri proportionales sint, 36. 24. 16. facientes summam 76. & tres producti ex primo in secundum, & ex secundo in tertium, & ex tertio in primum efficiunt 1824.

Quoniam vero numerus 52℞ — 576. duplicem habet radicem, reperietur minor, si radicem quadratam inuentam 10. ex prædicta semisse 26. auferatur. Relinquetur enim pretium vnius radicis 16. primus numerus, tertius autem erit 36. nimirum 52 — 1℞. Eruntque rursum tres numeri proportionales 16. 24. 36. qui prius, inuerso tamen ordine.

17 *Datis duobus numeris siue æqualibus, siue inæqualibus, alium inuenire, qui vtrilibet eorum additus faciat summam, quæ ducta in additum, hoc est, in inuentum, producat quadratum alterius numeri.* XVII.

HOC problema soluimus in lineis, in scholio propos. 36. lib. 3. Euclidis.

SINT dati duo numeri 10. & 12. inueniendusque sit alius, qui additus primum ad 10. faciat numerum, qui ductus in additum, procreet quadratum alterius 12. nimirum 144. Ponatur numerus quæsitus 1℞. Addito numero 10. fit numerus 1℞ + 10. qui ductus in 1℞. facit 1ʓ + 10℞. qui numerus æqualis esse debet 144. Ablatis 10℞ vtrobique, erit æquatio inter 1ʓ. & 144 — 10℞. quam ita resolues. Semissis numeri radicum 5. facit quadratum 25. & additis 144. fit numerus 169. à cuius radice quadrata 13. si prædicta semissis 5. auferatur, propter signum —, remanebit pretium radicis 8. numerus quæsitus. Hic enim additus ad 10. facit 18. qui numerus ductus in 8. facit 144. quadratum alterius numeri dati 12.

DEINDE inueniendus sit numerus, qui additus ad 12. faciat numerum, qui ductus in additum producat 100. quadratum alterius numeri 10. Ponatur quæsitus numerus 1℞. qui cum 12. facit 1℞ + 12. Hic ductus in 1℞. facit numerum 1ʓ + 12℞. æqualem 100. Ablatis 12℞. vtrobique, erit æquatio inter 1ʓ. & 100 — 12℞. quam ita resolues. Semissis numeri radicum 6. facit quadratum 36. additisque 100. fit numerus 136. à cuius radice quadrata √ʓ 136. si detrahes semissem prædictam 6. relinquetur pretium radicis, √ʓ 136 — 6. numerus quæsitus. Hic enim additus ad 12. facit √ʓ 136 + 6. qui numerus ductus in inuentum √ʓ 136 — 6. producit numerum 100. quæ quidem multiplicatio perficietur, vt cap. 23. scripsimus, si quadratum posterioris particulæ 6. nimirum 36. auferatur ex 136. quadrato prioris particulæ.

SINT denique duo numeri æquales 8. & 8. ponaturq; inuentus 1℞. Ex 1℞. & 8. fit numerus 1℞ + 8. qui ductus in 1℞ facit 1ʓ + 8℞. numerum æqualem 64. quadrato numeri 8. Ablatis 8℞ vtrobique, erit æquatio inter 1ʓ. & 64 — 8℞. Semissis numeri radicum est 4. ad cuius quadratum 16. additis 64. fit numerus 80. à cuius radice quadrata √ʓ 80. si dematur prædicta semissis 4. remanet numerus √ʓ 80 — 4. qui quæritur. Hic additus ad 8. facit summam √ʓ 80 + 4. quæ ducta in inuentum, vel additum √ʓ 80 — 4. facit 64. quadratum numeri 8. vt hæc sequens formula docet. Nam 16. quadratus posterioris particulæ 4. ablatus ex 80. quadrato prioris particulæ √ʓ 80. relinquit 64.

√ʓ 80 — 4
√ʓ 80 + 4
64

XVIII. 18 *Numerum inuenire medium inter numerum quotlibet vnitatibus maiorem, & alium numerum quotuis vnitatibus minorem; ita vt extremi duo inter se multiplicati faciant datum quemcunque numerum.*

SIT inueniendus numerus medius inter numerum, qui ipsum nouenario superet, & alium numerum, quem ipse ternario superet; ita vt extremi inter se multiplicati faciant 133. Ponatur quæsitus numerus medius 1℞ inter 1℞ + 9. & 1℞ − 3. Ita enim à priore superatur nouenario, & posteriorem ternario superat. Hi duo extremi inter se multiplicati faciunt numerum 1ʒ + 6℞ − 27. æqualem 133. Additis 27 vtrobique, fiet æqualitas inter 1ʒ + 6℞. & 160. Ablatisque 6℞. vtrinque, inter 1ʒ. & 160 − 6℞. quæ ita absoluetur. Semissis numeri radicum est 3. ad cuius quadratum 9. additis 160. fit numerus 169. à cuius radice quadrata 13. si auferatur semissis prædicta 3. relinquetur pretium 1℞. 10. numerus scilicet medius quæsitus. eruntque extremi 19. & 7. atque inter se multiplicati faciunt 133.

SIT rursum inquirendus numerus medius inter duos, vt prius, ita vt extremi inter se multiplicati faciant 40. Inuenientur rursus extremi 1℞ + 9. & 1℞ − 3. qui inter se multiplicati faciunt numerum 1ʒ + 6℞ − 27. æqualē 40. Additis ergo 27. vtrobique, erit æquatio inter 1ʒ + 6℞. & 67. Ablatisq; 6℞ vtrinque, inter 1ʒ. & 67 − 6℞. Semissis numeri radicum est 3. ad cuius quadratum 9. additis 67. fit numerus 76. à cuius radice quadrata √ʒ 76. si dematur prædicta semissis 3. propter signum —. relinquetur pretium radicis √ʒ 76 − 3. numerus medius, qui quæritur. à quo si detrahantur 3. fiet minor extremus √ʒ 76 − 6. & si addantur 9. fiet maior extremus √ʒ 76 + 6. qui extremi inter se multiplicati faciunt 76 − 36. hoc est, 40. Nam + √ʒ 2736. & − √ʒ 2736 se mutuo interimunt, vt in apposita formula apparet. Vel etiam, quia 36. quadratum posterioris particulæ 6. demptum ex 76. quadrato prioris particulæ relinquit 40. vt cap. 23. docuimus.

	√ʒ 76	—	6
	√ʒ 76	+	6
+	√ʒ 2736	—	36
76 —	√ʒ 2736		
76	—		36

HOC problema soluimus etiam cap. præcedenti ænigmate 146. per simplicem æquationem.

XIX. 19 *Numerum inuenire, qui duos alios excedat datis numeris, ita vt duo illi inter se multiplicati producant numerum, qui inuentum dato numero excedat.*

SIT quærendus numerus, qui duos alios superet numeris 8. & 6. ita vt illi duo inter se multiplicati procreent numerum quaternario maiorem numero inuento. Ponatur numerus, qui quæritur 1℞. Duo ergo illi minores erunt 1℞ − 8. & 1℞ − 6. qui inter se multiplicati faciunt numerum 1ʒ − 14℞ + 48. æqualem 1℞ + 4. vt nimirum positum 1℞. superet quaternario. Ablatis 4 vtrinque, erit æquatio inter 1ʒ − 14℞ + 44. & 1℞. Et additis 14℞ vtrobique, inter 1ʒ + 44. & 15℞. Et ablatis 44. vtrinque, inter 1ʒ. & 15℞ − 44. Semissis numeri radicum est $\frac{15}{2}$. à cuius quadrato $\frac{225}{4}$. ablatis 44. siue $\frac{176}{4}$. propter signum — remanet numerus $\frac{49}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{7}{2}$. si prædicta semissis $\frac{15}{2}$. addatur, fiet pretium radicis $\frac{22}{2}$. hoc est, 11. numerus quæsitus. Ergo duo numeri minores erunt 3. & 5. qui inter se multiplicati faciunt 15. hoc est, 11 + 4.

QVIA vero numerus hic 15℞ − 44. duplicem radicem habet, si radix quadrata vltimo loco inuenta $\frac{7}{2}$. dematur ex prædicta semisse $\frac{15}{2}$. reliqua fiet minor radix $\frac{8}{2}$. hoc est, 4. numerus quæsitus. à quo si auferes 8. & 6. erunt duo alij numeri minores − 4. & − 2. qui inter se multiplicati faciunt + 8. qui numerus inuentum numerum 4. superat quaternario. Vbi vides, numeros etiam absurdos, siue fictos, hoc est, minores nihilo, satisfacere ænigmati proposito. quod alicui fortassis mirum videri possit.

SCHOLIVM.

IN ænigmatibus huic similibus accidit nonnunquam, æquationem inueniri simplicem: tunc nimirum, quando in numero producto ex multiplicatione duorum numerorum Coßicorum reperitur numerus absolutus æqualis excessui dato; quia tunc aufertur ille numerus absolutus, remanetque æquatio inter ʒ. & ℞. quod studiosum Lectorem monitum volo, ne turbetur, cum viderit aliquando occurrere æquationem duplicem, & aliquando simplicem, in varijs exemplis eiusdem ænigmatis. Sit enim quærendus numerus, qui alios duos superet numeris 8. & 6. ita vt duo illi inter se multiplicati procreent numerum, qui inuentum numerum excedat numero 48. Ponatur numerus quæsitus 1℞. Duo ergo illi minores erunt 1℞ — 8. & 1 — ℞ 6. qui inter se multiplicati faciunt numerum 1ʒ — 14℞ + 48. æqualem 1℞ + 48. Ablatis 48. vtrinque, erit æqualitas inter 1ʒ — 14℞. & 1℞. additisque 14℞. vtrobique, inter 1ʒ. & 15℞. quæ æquatio simplex est. Diuisis ergo 15. per 1. fiet 1℞ 15. (quod numeri Coßici ʒ & ℞. collaterales sint) nimirum numerus quæsitus. Igitur alij duo minores erunt 7. & 9. qui inter se multiplicati producunt numerum 63. qui inuentum 15. excedit numero 48.

XX. 20 *Numerum inuenire, quem alij duo excedant datis numeris, ita vt duo illi inter se multiplicati procreent numerũ, qui datum multiplicẽ quadrati ex inuento numero geniti, superet dato numero.*

SIT inueniendus numerus, quem alij duo superent numeris 7. & 19. qui inter se multiplicati excedant triplum quadrati ex inuento numero procreati, numero 73. Ponatur numerus quæsitus 1℞. Ergo duo alij maiores erunt 1℞ + 7. & 1℞ + 19. Hi inter se multiplicati faciunt numerum 1ʒ + 26℞ + 133. æqualem 3ʒ + 73. Nam ita superabit triplũ quadrati ex 1℞. descripti numero 73. Ablatis 73. vtrinque, erit æquatio inter 1ʒ + 26℞ + 60. & 3ʒ. Ablatoq; 1ʒ. vtrobique, inter 26℞ + 60. & 2ʒ. Diuisisque omnibus numeris per numerum zensorum, id est, per 2. erit æquatio inter 13℞ + 30. & 1ʒ. Semissis numeri radicum est $\frac{13}{2}$.

ad cuius

ad cuius quadratum $\frac{169}{4}$. additis 30. siue $\frac{120}{4}$. fit numerus $\frac{289}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{17}{2}$. si addatur semissis prædicta $\frac{13}{2}$. fiet 1℞ $\frac{30}{2}$. id est, 15. numerus, qui quæritur. Ergo duo numeri maiores erunt 22. & 34. qui inter se multiplicati faciunt numerum 748. qui triplum quadrati 225. ex inuento numero 15. procreati, nimirum numerum 675. superat numero 73.

21 *Numerum inuenire, cuius multiplex quiuis cum eiusdem numeri quadrato faciat datum numerum.* XXI.

SIT inueniendus numerus, cuius quadruplum cum eiusdem quadrato faciat 400. Ponatur numerus, quem quærimus 1℞. Huius quadruplum 4℞. cum eiusdem quadrato 1ʒ. facit numerum 1ʒ + 4℞. æqualem 400. Subtractis 4℞. vtrinque, erit æquatio inter 1ʒ & 400 − 4℞. Semissis numeri radicum est 2. ad cuius quadratum 4 additis 400. fit numerus 404. à cuius radice quadrata √ʒ 404. si prædicta semissis 2. dematur, fiet 1℞ √ʒ 404 − 2. numerus quæsitus. Eius quadruplum √ʒ 6464 − 8. vna cum eius quadrato, quod

	√ʒ 404	—	2
	√ʒ 404	—	2
—	√ʒ 1616	+	4
404 —	√ʒ 1616		
404 —	√ʒ 6464	+	4

404 —	√ʒ 6464	+	4
+	√ʒ 6464	—	8
404		—	4

est 404 − √ʒ 6464 + 4. (vt in apposita formula liquet) facit numerum 404 − 4. hoc est, 400. quia − √ʒ 6464. & + √ʒ 6464. se mutuo interimunt, vt altera formula monstrat.

ITEM sit inquirendus numerus, cuius quadruplum cum eiusdem quadrato faciat 780. Posita 1℞ erit eius quadruplum 4℞ vna cum eius quadrato 1ʒ numerus 1ʒ + 4℞. æqualis 780. Subtractisque 4℞ vtrinque, erit æquatio inter 1ʒ. & 780 — 4℞. Semissis numeri radicum est 2. ad cuius quadratum 4. additis 780. fit numerus 784. à cuius radice quadrata 28. si tollatur prædicta semissis 2 fiet 1℞. 26. numerus, quem inquirimus. Eius quadruplum 104. vna cum eiusdem quadrato 676. facit 780.

SCHOLIVM.

EADEM via inuenietur numerus, qui cum suo quadrato conficiat datum quemcunque numerum. Sit enim inquirendus numerus, qui cum suo quadrato faciat 400. Posita enim 1℞. pro numero quæsito, faciet is cum suo quadrato, id est, cum 1ʒ numerum 1ʒ + 1℞. æqualem dato numero 400. Dempta 1℞. vtrinque, erit æquatio inter 1ʒ. & 400 — 1℞. Semissis numeri radicum est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. si addantur 400. hoc est, $\frac{1600}{4}$ fiunt $\frac{1601}{4}$. à cuius radice quadrata, id est, à √ʒ $\frac{1601}{4}$. si tollatur semissis numeri radicum, nimirum $\frac{1}{2}$. fiet pretium radicis √ʒ $\frac{1601}{4}$ — $\frac{1}{2}$. numerus quæsitus. Eius enim quadratum est $\frac{1602}{4}$ — √ʒ $\frac{6404}{16}$. vt apposita formula docet. Cum hoc quadrato numerus inuentus √ʒ $\frac{1601}{4}$ — $\frac{1}{2}$. facit 400 numerum datum. Nam $\frac{1602}{4}$. & — $\frac{1}{2}$. siue $\frac{2}{4}$. faciunt $\frac{1600}{4}$. hoc est, 400. & — √ʒ $\frac{6404}{16}$. & + √ʒ $\frac{1601}{4}$. se mutuo interimunt, cum sint æquales. vt patet per multiplicationem in crucem. Numerator enim vterlibet in denominatorem alterius minutiæ ductus producit 25616.

		√ʒ $\frac{1601}{4}$	—	$\frac{1}{2}$
		√ʒ $\frac{1601}{4}$	—	$\frac{1}{2}$
	—	√ʒ $\frac{1601}{16}$	+	$\frac{1}{4}$
+ $\frac{1601}{4}$	—	√ʒ $\frac{1601}{16}$		
Summa.	$\frac{1602}{4}$ —	√ʒ $\frac{6404}{16}$.		

22 *Dato quouis numero, duos alios inuenire, qui inter se multiplicati producant datum ipsum numerum, & quadrati omnium trium faciant datam summam quamcunque.* XXII.

SIT datus numerus 8. inueniendique sint alij duo, qui inter se multiplicati faciant ipsum numerum 8. & quadrati omnium trium faciant 101 $\frac{7}{9}$. oportet quadratos duorum numerorum inuentorum facere 37 $\frac{7}{9}$. vt patet. si dati numeri 8. quadratus 64. detrahatur ex 101 $\frac{7}{9}$. summa omnium trium. Ponatur vnus numerorum, qui quæruntur 1℞. Et quia alter in hunc ductus debet facere 8. si 8. diuidantur per 1℞. erit Quotiens $\frac{8}{1℞}$. alter numerus. Nam ductus in diuisorem 1℞. producet 8. Quadrati horum duorum numerorum 1℞. & $\frac{8}{1℞}$. sunt 1ʒ & $\frac{64}{1ʒ}$. qui summam faciunt $\frac{1ʒʒ + 64}{1ʒ}$. æqualem 37 $\frac{7}{9}$. siue $\frac{340}{9}$. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 9ʒʒ + 576. & 340ʒ. Ablatisque 576. vtrobique, erit æquatio inter 9ʒʒ. & 340ʒ — 576. Diuisis omnibus numeris per numerum 9. charactere maximo ʒʒ. insignitum, fiet æquatio inter 1ʒʒ. & $\frac{340}{9}$ ʒ — 64. Semissis numeri Zensorum est $\frac{340}{18}$. à cuius quadrato $\frac{115600}{324}$. hoc est, à 356 $\frac{256}{324}$. Si demantur 64. remanent 292 $\frac{256}{324}$. hoc est, $\frac{94864}{324}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{308}{18}$. si addatur prædicta semissis Zensorũ $\frac{340}{18}$. fiet 1ʒ $\frac{648}{18}$. (quia inter Cossicos numeros binos medij sunt singuli) hoc est, 36. cuius radix quadrata 6. erit vnus numerorum, quem posuimus 1℞ ac proinde alter numerus, quem posuimus $\frac{8}{1℞}$. hoc est, 8. diuisa per 1℞. nimirum per 6. erit 1 $\frac{1}{3}$. Qui etiam hoc modo reperietur. Quoniam numerus $\frac{340}{9}$ ʒ — 64. duplicem habet radicẽ, si radix quadrata $\frac{308}{18}$ vltimo loco inuenta tollatur ex prædicta semisse $\frac{340}{18}$. reliquus erit alter Zensus $\frac{32}{18}$. siue $\frac{16}{9}$. cuius radix quadrata $\frac{4}{3}$. siue 1 $\frac{1}{3}$. offeret alterum numerum. Itaque duo numeri quæsiti sunt 6. & 1 $\frac{1}{3}$. qui inter se multiplicati faciunt 8. & eorum quadrati 36. & $\frac{16}{9}$. siue 1 $\frac{7}{9}$. faciunt 37 $\frac{7}{9}$. ac proinde quadrati omnium trium numerorum 8. 6. 1 $\frac{1}{3}$. faciunt summam 101 $\frac{7}{9}$.

 23 Duos

XXIII. 23 *Duos numeros inuenire datam efficientes summam, & qui inter se multiplicati producant datum numerum, qui maior non sit quadrato ex semisse datæ summæ descripto.*

VEL

Datum numerum in duos distribuere, vt ex vno in alterum gignatur datus quicunque numerus, qui maior non sit quadrato semissis dati numeri.

QVÆRENDI sint duo numeri conficientes summam 100. Vel (quod idem est.) Datus numerus 100 secandus sit in duos, qui inter se multiplicati faciant 10. Ponatur vnus numerus 12♀. ideoque alter 100 — 12♀. Hi inter se multiplicati faciunt numerum 1002♀ — 1♂. æqualem 10. Addito 1♂. vtrinque, erit æqualitas inter 1002♀. & 10 + 1♂. Ablatisque 10. vtrobique, inter 1002♀ — 10. & 1♂. Semissis numeri radicum est 50. à cuius quadrato 2500. ablatis 10. remanet numerus 2490. ad cuius radicem quadratam √♂ 2490. si addatur prædicta semissis 50. fiet 12♀. √♂ 2490 + 50. vnus numerorum, quem posuimus 12♀. Alter ergo erit 100 — √♂ 2490 + 50. hoc est, 100. demptis √♂ 2490 + 50. qui numerus est 50 — √♂ 2490. Nam ablatis √♂ 2490 + 50. ex √♂ 0 + 100. remanent — √♂ 2490 + 50. hoc est, 50 — √♂ 2490. vt hæc formula indicat. Itaque duo numeri quæsiti sunt √♂ 2490 + 50. & 50 — √♂ 2490. qui faciunt summam 100. quippe cum + √♂ 2490. & — √♂ 2490. se mutuo destruant. Et ex vno in alterum, hoc est, ex 50 + √♂ 2490. in 50 — √♂ 2490. gignitur numerus 10. vt hæc formula indicat. quæ multiplicatio fit, si quadratum 2490. posterioris particulæ detur ex 2500. quadrato particulæ prioris, vt cap. 23. dictum est.

√♂ 0 + 100
√♂ 2490 + 50
— √♂ 2490 + 50

50 + √♂ 2490
50 — √♂ 2490
10

QVONIAM vero æquatio inuenta duplicem habet radicem, inueniemus eosdem numeros per alteram radicem minorem. Si namque radix quadrata √♂ 2490. vltimo loco inuenta detur ex prædicta semisse 50. fiet 12♀. 50 — √♂ 2490. vnus videlicet numerorum, quos quærimus. alter erit 50 + √♂ 2490. qui nimirum remanet, si numerus 50 — √♂ 2490. detrahatur ex 100. vt in hac formula vides. Atq; ita inuenti sunt iidem numeri 50 — √♂ 2490. & 50 + √♂ 2490. ordine tamen inuerso.

100 + √♂ 0
50 — √♂ 2490
50 + √♂ 2490

DEBET autem numerus productus datus non maior esse quadrato, qui ex semisse datæ summæ, vel dati numeri gignitur. quia quadratus semissis maior est, numero, qui ex partibus inæqualibus producitur, [a] cum hic vna cum quadrato intermediæ sectionis æqualis sit illi quadrato. Vnde numerus 12. diuidi non potest in duas partes, vt ex earum multiplicatione producatur numerus 40. Id quod pulchre nos docet æquatio. Posita enim vna parte 12♀. & altera 12 — 12♀. fiet æquatio inter 1♂. & 12♀ — 40. Et quia ex 36. quadrato semissis numeri radicum auferri nequit numerus absolutus 40. pronunciabis, quæstionem esse impossibilem.

[a] *schol. 14. noni.*

XXIV. 24 *Numerum inuenire, cuius quadratus ab alio numero superetur dato numero, & alium excedat alio numero dato: ita vt extremi inter se multiplicati producant datum quemlibet numerum.*

QVÆRENDVS sit numerus, cuius quadratus superetur quinario ab alio numero, & alium quendam superet binario, & duo extremi inter se multiplicati faciant 2538. Ponatur numerus ille 12♀. cuius quadratus 1♂. Maior ergo erit 1♂ + 5. & minor 1♂ — 2. qui duo inter se multiplicati gignunt numerum 1♂ + 3♀ — 10. æqualem 2538. Additisque 10. vtrobique, erit æquatio inter 1♂ + 3♀. & 2548. Et ablatis 3♀. vtrinque, inter 1♂. & 2548 — 3♀. Quærenda ergo est radix Zensizensica, hoc modo. Semissis numeri Zensorum est $\frac{3}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{9}{4}$. additis 2548. fiue $\frac{10192}{4}$. fit numerus $\frac{10201}{4}$. à cuius radice quadrata $\frac{101}{2}$. si detur prædicta semissis $\frac{3}{2}$. remanet numerus $\frac{98}{2}$. hoc est, 49. cuius radix quadrata 7. dabit numerum quæsitum. Eius enim quadratus 49. est inter 54. quinario maiorem, & 47. binario minorem, sitque ex 47. in 54. numerus datus 2538.

XXV. 25 *Numerum inuenire, à cuius quadrato quadrati subtracti quotuis quadrati eiusdem numeri, relinquant datum numerum quemcunque.*

QVÆRENDVS sit numerus, cuius quatuor quadrati subtracti ab eiusdem quadrato quadrati relinquant 2205. Ponatur numerus 12♀. cuius quadratus 1♂. & quatuor quadrati 4♂. detracti ex 1♂. nimirū ex quadrati quadrato positi numeri 12♀. relinquunt numerum 1♂ — 4♂. æqualem 2205. Additisque 4♂. vtrobique, erit æquatio inter 1♂. & 4♂ + 2205. Eruenda ergo est radix zensizensica hoc modo. Semissis numeri zensorum est 2. ad cuius quadratum 4. additis 2205. fit numerus 2209. ad cuius radicem quadratam 47. addita prædicta semisse 2. fit numerus 49. cuius radix quadrata 7. dabit numerum, qui quæritur. Eius enim quatuor quadrati 196. dempti ex eiusdem zensizenso 2401. relinquunt 2205. numerum datum.

XXVI. 26 *Duos numeros inuenire, qui inter se multiplicati gignant numerum datū, & summa quadratorum eiusdem numeris procreatorum sit etiam data.*

DVO numeri inuenti faciant inter se multiplicati 78. & eorum quadrati summam 205. Queniam, vt in sequenti Lemmate demonstrabimus, duo numeri se multiplicantes producunt numerum medio loco proportionalem inter quadratos eorundem numerorum: si minor quadratus ponatur 1♂. ideoque maior 205 — 1♂. erit numerus 78. medio loco proportionalis inter quadratos 1♂. & 205 — 1♂. [a] ac proinde numerus 2053♂ — 1♂♂. productus ex 1♂. in 205 — 1♂. æqualis erit quadrato numeri medij 78. hoc est, numero 6084. Addito ergo 1♂♂ vtrinque, erit æquatio inter 1♂♂ + 6084. & 2053♂. Ablatisq; 6084. vtrobique, inter 1♂♂. & 2053♂ — 6084. Eruenda ergo est radix Zensizensica. quod ita fiet. Semissis numeri Zensorum est $\frac{2053}{2}$. ex cuius quadrato $\frac{4218025}{4}$. ablatis 6084. siue $\frac{1743536}{4}$. remanent $\frac{1768036}{4}$. ad cuius numeri radicem quadratam $\frac{1333}{2}$. si addatur prædicta semissis $\frac{2053}{2}$. fiet numerus $\frac{3538}{2}$. hoc est, 169. vnus quadratus, cuius radix 13. dabit vnum numerorum, nimirum maiorem. Et quia numerus 2053♂ — 6084. duplicem habet radicem, inuenietur altera radix, si radicem vltimo loco inuentam $\frac{1333}{2}$. detrahemus ex prædicta semisse $\frac{2053}{2}$. Reliquus enim numerus $\frac{720}{2}$. id est, 36. dabit minorem quadratum, cuius radix 6. dabit alterum numerorum. Sunt ergo duo numeri inuenti 6. & 13. qui inter se multiplicati faciunt 78. & eorum quadrati 36. & 169. faciunt summam 205.

[a] 20. sept.

IN numeris irrationalibus idem hoc problema expedietur, si duo numeri inueniendi sint, qui inter se multiplicati faciant 100. & summa quadratorum sit 300. Posito enim vno quadrato 1♂. erit alter 300 — 1♂. inter quos numerus 100. erit medius proportionalis, vt ex sequenti Lemmate constabit. Ex 1♂. in 300 — 1♂. fit numerus 300♂ — 1♂♂. [b] æqualis numero 10000. qui fit ex medio 100. in se. Addito ergo 1♂♂. vtrinque, erit æquatio inter 1♂♂ + 10000. & 300♂. Et ablatis 10000. vtrobique, inter 1♂♂. & 300♂ — 10000. Eruenda ergo hic etiam erit duplex radix Zensizensica, hoc videlicet modo. Semissis numeri Zensorum est 150. à cuius quadrato 22500. demptis 10000. remanet numerus 12500. ad cuius radicem quadratam √♂ 12500. si addetur prædicta semissis 150. fiet maior quadratus √♂ 12500 + 150. cuius radix quadrata, nimirum √♂ (√♂ 12500 + 150) dabit maiorem numerum. Et si radix illa √♂ 12500. tolletur ex semisse prædicta 150. reliquus erit minor quadratus 150 — √♂ 12500. cuius radix quadrata √♂ (150 — √♂ 12500) dabit minorem numerum quæsitum. Nam ex maiore radice √♂ (√♂ 12500 + 150) in minorem radicem √♂ (150 — √♂ 12500) si nimirum earum quadrata inter se multiplicentur, vt cap. 24. dictum est, & in hac formula apparet, fit numerus √♂ 10000. hoc est, datus numerus 100. Item quadrati √♂ 12500 + 150. & 150 — √♂ 12500. faciunt summam 300. vt manifestum est.

[b] 20. sept.

√♂ (√♂ 12500 + 150)
√♂ (150 — √♂ 12500)
— 12500 — √♂ 281250000
+ √♂ 281250000 + 22500
Productus. √♂ 10000

PRÆDICTA autem multiplicatio facilius conficietur, per ea, quæ cap. 23. dicta sunt, si numeri multiplicandi ita constituantur. Nam si 12500. quadratum posterioris particulæ detur ex 22500. quadrato particulæ prioris 150. remanebit numerus 10000. Præposito ergo signo √♂. fiet productus numerus √♂ 10000.

√♂ (150 + √♂ 12500)
√♂ (150 — √♂ 12500)
√♂ 10000

LEMMA.

DVO numeri inter se multiplicati procreant numerum medium proportionalem inter eorum quadratos, in proportione ipsorum numerorum.

SINT enim duo numeri A, & B. Ex A, in B, fiat C, & ex A, in se, fiat quadratus D, & ex B, in se quadratus E. Dico C, medium proportionalem esse inter D, & E; id est, E, C, D, esse continue proportionales in proportione B, ad A. Quoniam enim A, multiplicans B, & A. fecit C, & D; [c] erit C, ad D, vt B, ad A. Item quia multiplicans B, & A. fecit E, & C; [d] erit quoque E, ad C, vt B, ad A. Igitur E, C, D, continue proportionales sunt in proportione B, ad A. quod est propositum.

A. 3. B. 4.
D. 9. C. 12. E. 16.

[c] 17. sept.
[d] 17. sept.

COROLLARIVM.

HINC fit, si duo numeri se mutuo multiplicantes producunt aliquem numerum, quadratos ipsorum numerorum se mutuo multiplicantes producere quadratum numeri producti. Cum enim numerus 12. ex 3. in 4. productus sit medio loco proportionalis inter eorum quadratos 9. & 16. [e] fiet ex 9. in 16. quadratus numeri 12.

[e] 20. sept.

SCHOLIVM.

IDEM hoc ænigma 26. *soluetur sine præcedenti Lemmate, hac ratione. Ponatur in priori exemplo vnus numerorum* 12♀. *ideoque alter erit* $\frac{78}{12♀}$. *vt ex mutua eorum multiplicatione producatur numerus 78. Quadrati eorum* 1♂. & $\frac{6084}{144♀}$. *faciunt summam* $\frac{144♀ + 6084}{144♀}$. *æqualem 205. quæ æquatio per multiplicationem in crucē reducetur ad hanc inter* 1♂♂ + 6084. *& 205♂. Ablatisque 6084. vtrinque, erit æquatio inter 1♂♂ & 205♂ — 6084. vt prius.*

RVRSVS in posteriori exemplo ponatur vnus numerorum 12♀. *erit que alter* $\frac{100}{12♀}$. *vt eorum multiplicatio faciat 100.*

Quadrati eorum 1☗. & $\frac{100000}{1☗}$. *faciunt summam* $\frac{1☗☗+100000}{1☗}$. *aqualem 300. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter* 1☗☗ + *10000. & 300*☗. *Ablatisque 10000. vtrobique, erit æquatio inter* 1☗☗. *&* 300☗ —— *10000. vt supra.*

XXVII. 27 *Duos numeros inuenire facientes summam datam, quorum quadrati faciant quoque datam summam.*

SIT summa numerorum 19. & quadratorum 205. Ponatur primus numerus 12⚲. ideoque secundus 19 —— 12⚲. Quadrati eorum 1☗. & 361 — 382⚲ + 1☗. faciunt summam 361 — 382⚲ + 2☗. æqualem 205. Additis 382⚲. vtrobique, erit æquatio inter 361 + 2☗. & 382⚲ + 205. Et ablatis 205. vtrinque, inter 156 + 2☗. & 382⚲. Et rursum ablatis 156. vtrinque, inter 2☗. & 382⚲ — 156. Diuisisque omnibus per 2. numerum zensorum, erit æquatio inter 1☗. & 192⚲ — 78. quam ita resolues. Semissis numeri radicum est $\frac{1}{2}$. ex cuius quadrato $\frac{361}{4}$. detractis 78. hoc est, $\frac{313}{4}$. remanet numerus $\frac{49}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{7}{2}$. si addatur prædicta semissis $\frac{19}{2}$. fiet maior radix (quia numerus Cossicus duas radices habet) $\frac{26}{2}$. id est, 13. primus numerus quæsitus. Secundus ergo erit 6. nimirum 19 — 12⚲. quia numerus 6. erit quoq; minor radix, quæ habebitur, si vltima radix inuenta $\frac{7}{2}$. ex prædicta semisse $\frac{19}{2}$. detrahatur, remanet enim numerus $\frac{12}{2}$. siue 6. Numeri ergo qui quæruntur, sunt 13. & 6. quorum summa 19. & summa quadratorum 205.

RVRSVM summa numerorum sit 30. & quadratorum 600. Posito primo numero 12⚲. & secundo 30 — 12⚲. facient quadrati summam 900 — 60⚲ + 2☗. æqualem 600. Additis 60⚲. vtrinque, erit æquatio inter 900 + 2☗. & 60⚲ + 600. Et ablatis 600. vtrobique, inter 300 + 2☗. & 60⚲. Et rursum ablatis 300. vtrinque, inter 2☗. & 60⚲ — 300. Diuisisque omnibus numeris per 2. numerum Zensorum, æquatio erit inter 1☗. & 30⚲ — 150. cuius radix ita nota fiet. Semissis numeri radicum est 15. à cuius quadrato 225. demptis 150. remanet numerus 75. ad cuius radicem quadratam √☗ 75. si addetur prædicta semissis 15. fiet maior radix √☗ 75 + 15. prior numerus, qui positus est 12⚲. Et si eadem radix quadrata √☗ 75. tolletur ex prædicta semisse 15. reliqua fiet minor radix 15 — √☗ 75. qui numerus æqualis est posteriori numero 30 — 12⚲. Nam si ex 30. detrahatur radix inuenta √☗ 75 + 15. remanebit numerus 15 — √☗ 75. vt hæc formula docet. Eruntque duo numeri quæsiti √☗ 75 + 15. & 15 —— √☗ 75. quorum summa est 30. & quadratorum summa 600. vt duæ hæ formulæ indicant.

30 + √☗ 0	
15 + √☗ 75	
15 —— √☗ 75	

√☗ 75 + 15	15 —— √☗ 75
√☗ 75 + 15	15 —— √☗ 75
+ √☗ 16875 + 225	—— √☗ 16875 + 75
75 + √☗ 16875	225 —— √☗ 16875
300 + √☗ 67500	300 —— √☗ 67500

DEBET autem summa quadratorum esse maior semisse quadrati, qui ex data summa numerorum gignitur, & minor quadrato eiusdem summæ. Itaque si summa numerorum proponeretur 30. & quadratorum 400. foret quæstio impossibilis. Nam summa quadratorum maior non est semisse quadrati 900. ex data summa 30. producti. Atque ita occurreret vltima æquatio inter 1☗. & 30⚲ — 250. quæ resolui nequit. Nam ex 225 quadrato semissis numeri radicum auferri non possunt 250. &c.

QVOD si quadratorum summa sit maior quadrato summæ numerorum propositorum, solui etiam non poterit problema, nisi concedamus, vnum numerum esse maiorem ipsa summa, & alterum minorem nihilo. Vt si summa detur 40. & summa quadratorum 1602. Ponemus vnum numerū 12⚲. & alterum 40 — 12⚲. Quadrati eorum 1☗. & 1600 — 80⚲ + 1☗. faciunt summam 1600 — 80⚲ + 2☗. æqualem 1602. Additis 80⚲. vtrobique, erit æquatio inter 1600 + 2☗. & 80⚲ + 1602. Et ablatis 1600. vtrinque, inter 2☗. & 80⚲ + 2. Diuisisque omnibus per 2. numerum Zensorum, inter 1☗. & 40⚲ + 1. Iam semissis numeri radicum est 20. ad cuius quadratum 400. si addatur 1. fiunt 401. Et si ad √☗ 401. addatur prædicta semissis 20. fiet 12⚲. 20 + √☗ 401. prior numerus, quem posuimus 12⚲. qui demptus ex 40. reliquus fiet numerus posterior 20 — √☗ 401. vt in hac formula videre licet. Vbi vides priorem numerum 20 + √☗ 401. maiorem esse, quam 40. cum √☗ 401. maior sit quam 20. posteriorem vero 20 — √☗ 401. minorem esse nihilo, nimirum 20. — $20\frac{1}{41}$. quorum vtrumque ineptum est. Et tamen quæstioni satisfaciunt. Nam simul efficiunt summam 40. cum + √☗ 401. & —— √☗ 401. se mutuo interimant: & eorum quadrati 801 + √☗ 641600. & 801 —— √☗ 641600. summam faciant 1602. Simile quid habuisti in ænigmate 149. superioris capitis. Vides ergo, numeros minores nihilo non esse frustra excogitatos: quippe cum per illos ænigmata quoque dissoluantur.

40 + √☗ 0
20 + √☗ 401
20 —— √☗ 401

XXVIII. 28 *Datum numerum in duos partiri, vt eorum quadrati datam summam efficiant.*

HIC nihil aliud quæritur, nisi vt duo numeri inueniantur efficientes datum numerum, ita vt eorum quadrati efficiant quoque datam summam. quod in antecedenti ænigmate factum est.

XXIX. 29 *Datum numerum in tres numeros continue proportionales partiri, quorum medius datus sit; cuius tamen quadratus maior non sit quadrato semissis illius numeri, qui relinquitur, detracto dato medio ex dato numero.*

SIT numerus 283. diuidendus in tres continue proportionales, quorum medius sit 78. Ponatur primus numerus 12⚲. ac proinde tertius 205 —— 12⚲. vt duo hi faciant simul 205. qui numerus relinquitur, detracto dato medio 78. ex dato numero 283. Ex primo 12⚲. in tertium 205 —— 12⚲. fit numerus 2052⚲ —— 1☗. [a] qui æqualis erit quadrato medij, numero videlicet 6084. Addito ergo 1☗. vtrobique, erit æquatio inter 2052⚲ & 1☗ + 6084. Et ablatis 6084. vtrinque inter 2052⚲ — 6084. & 1☗. quæ æquatio ita resoluetur. Semissis numeri radicum est $\frac{2052}{2}$. à cuius quadrato $\frac{4205225}{4}$. si demantur 6084. hoc est, $\frac{4+33936}{4}$. remanebit numerus $\frac{1768921}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{1331}{2}$. si addatur semissis prædicta $\frac{2052}{2}$. fiet maior radix $\frac{3383}{2}$. hoc est, 169. Et si prædicta radix $\frac{1331}{2}$. tollatur ex prædicta semisse $\frac{2052}{2}$. relinquetur minor radix $\frac{721}{2}$. id est 36. Sunt ergo tres numeri continue proportionales 36. 78. 169. [a] 20. *septi.*

SIT rursum datus numerus 100. diuidendus in tres continue proportionales, quorum medius sit 30. Ponatur primus 12⚲. ac proinde tertius 70 —— 12⚲. vt duo hi faciant simul 70. qui numerus relinquitur, detracto dato medio 30. ex dato numero 100. Ex primo 12⚲. in tertium 70 —— 12⚲ fit numerus 702⚲ —— 1☗. [b] qui æqualis erit quadrato medij, numero videlicet 900. Addito ergo 1☗. vtrobique, erit æqualitas inter 702⚲ & 1☗ + 900. Ablatisque 900. vtrinque, inter 702⚲ —— 900. & 1☗. quam æquationem ita expedies. Semissis numeri radicum est 35. à cuius quadrato 1225 demptis 900. remanet numerus 325. ad cuius radicem quadratam addita prædicta semisse 35. fiet maior radix √☗ 325 + 35. Et si eadem radix √☗ 325. demat ur ex semisse prædicta 35. relinquetur minor radix 35 — √☗ 325. Itaque tres numeri quæsiti sunt 35 —— √☗ 325. 30 √☗ 325 + 35. continue proportionales facientes summam 100. Et qui fit ex primo in tertium, æqualis est quadrato medij, numero videlicet 900. vt hæc formula indicat. Quæ multiplicatio expeditior erit per ea, quæ cap. 23. dicta sunt, si numeri multiplicandi ita ordinentur, vt hæc altera formula monstrat. Nam si 325. quadratum posterioris particulæ tollatur ex 1225. quadrato prioris particulæ 35. reliquus fiet numerus 900. [b] 20. *septi.*

√☗ 325 + 35
35 — √☗ 325
— 325 — √☗ 398125
+ √☗ 398125 + 1225
900

35 + √☗ 325
35 — √☗ 325
900

SI in eodem exemplo medius numerus detur 40. erit quæstio impossibilis. Nam posito primo numero 12⚲. & tertio 60 —— 12⚲. fiet ex primo in tertium numerus 60⚲ —— 1☗. æqualis quadrato medij, nimirum numero 1600. Et reducta æquatione, erit æqualitas inter 1☗. & 60⚲ —— 1600. quod fieri nequit. Nam semissis numeri radicum est 30. à cuius quadrato 900. detrahi non possunt 1600. &c. Ratio est, quia numerus 1600. quadratus medij dati 40. maior est quadrato 900. semissis numeri 60. qui relinquitur, detracto medio dato 40. ex dato numero 100.

30 *Datum numerum in duas partes diuidere, ita vt earum cubi faciant summam datam quamcunque, quæ maior sit quarta parte cubi ex dato numero descripti.* XXX.

DATVS numerus 10. diuidendus sit in duas partes, quarum cubi faciant 370. qui numerus maior est quarta parte cubi ex 10. descripti, maior videlicet numero 250. Ponatur prima pars 12⚲. & secunda 10 —— 12⚲. Cubi harum partium sunt 1☾. & 1000 —— 300⚲ + 30☗ —— 1☾. quorum summa 1000 —— 300⚲ + 30☗. æqualis esse debet numero 370. Additis 300⚲. vtrinque, fiet æquatio inter 1000 + 30☗. & 300⚲ + 370. Et ablatis 370. vtrobique inter 630 + 30☗. & 300⚲. Et rursum ablatis 630. vtrinque, inter 30☗. & 300⚲ — 630. Diuisis autem singulis hisce numeris per numerum Zensorum, id est, per 30. erit æquatio inter 1☗. & 10⚲ — 21. quam sic resolues. Semissis numeri radicum 5. facit quadratum 25. à quo demptis 21. remanet numerus 4. ad cuius radicem quadratam 2. addita prædicta semisse 5. fiet maior radix 7. Et eadem radix 2. dempta ex semisse prædicta 5. reliquam faciet minorem radicem 3. Partes ergo numeri dati 10. sunt 7. & 3. quarum cubi 343. & 27. faciunt summam 370.

HOC idem ænigma fuit 141. capitis 29. præcedentis, sed solutum aliter, quam hic, nimirum per simplicem æquationem, quæ occurrit propter variam numerorum positionem.

Ibidem quoque docuimus, quo pacto ænigma hoc solui possit sine Algebra.

31 *Datum numerum in duos numeros distribuere, vt idem sit excessus inter quadratum maioris, & quadratum minoris, qui inter quadratum dati numeri, & quadratum maioris partis.* XXXI.

SIT datus numerus 30. Ponatur maior eius pars 12⚲. & minor 30 — 12⚲. Tres quadrati sunt 900. 1☗. & 900 — 60⚲ + 1☗. Excessus 900. supra 1☗. est 900 — 1☗. Excessus 1☗. supra 900 — 60⚲ + 1☗. est 60⚲ — 900. vt in hac formula subtractionis manifestum est. Est igitur æquatio inter hos excessus, id est, inter 900 —— 1☗. & 60⚲ —— 900. Additisque 900. vtrobique, inter 1800 — 1☗. & 60⚲. Et rursum addito 1☗. vtrinque, inter 1800. & 1☗ + 60⚲. Ablatisque 60⚲. vtrobique, inter 1800 —— 60⚲. & 1☗. Radix ita inuenietur. Semissis numeri radicum est 30. ad cuius quadratum 900. additis 1800. fit numerus 2700. à cuius radice quadrata √☗ 2700. si prædicta semissis 30. detur, remanebit pretium vnius radicis √☗ 2700. —— 30. maior scilicet pars. qua detracta ex dato numero 30. relinquetur minor pars 60 —— √☗ 2700.

+ 0 + 0 2⚲ + 1☗
+ 900 — 60 2⚲ + 1☗
— 900 + 60 2⚲ + 0☗

$$\begin{array}{r} +\sqrt{\mathfrak{8}}\ 0 + 30 \\ +\sqrt{\mathfrak{8}}\ 2700 - 30 \\ \hline -\sqrt{\mathfrak{8}}\ 2700 + 60 \end{array}$$

vt in hac formula ſubtractionis apparet. Iam tres quadrati ſunt $900\,3600 - \sqrt{\mathfrak{8}}\,9720000.\&6300 - \sqrt{\mathfrak{8}}38880000$. qui ſe mutuo excedunt hoc eodem numero $\sqrt{\mathfrak{8}}\,9720000$——2700. vt in hiſce formulis ſubtractionum perſpicuum eſt.

$$\begin{array}{r} +900 + \sqrt{\mathfrak{8}}\ 0 \\ +3600 - \sqrt{\mathfrak{8}}\ 9720000 \\ \hline -2700 + \sqrt{\mathfrak{8}}\ 9720000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +3600 - \sqrt{\mathfrak{8}}\ 9720000 \\ +6300 - \sqrt{\mathfrak{8}}\ 38880000 \\ \hline -2700 + \sqrt{\mathfrak{8}}\ 9720000 \end{array}$$

IN poſteriori formula, quoniam $\sqrt{\mathfrak{8}}\,9720000.\&\sqrt{\mathfrak{8}}38880000.$ commenſurabiles ſunt, cum maiore per minorem diuiſa fiat Quotiens rationalis $\sqrt{\mathfrak{8}}\,4$. hoc eſt, 2. ſi minor à maiore ſubtrahatur, reliquus erit numerus $\sqrt{\mathfrak{8}}\,9720000$. Hæc omnia clara ſunt, ſi conſiderentur ea, quę de ſubtractione ſignotum +&−. & de ſubtractione radicum ſurdarum dicta ſunt.

XXXII. *32 Datum numerum in duas partes diſtribuere, vt maioris partis quadratus cum minore parte faciat datum numerum quemcunque, minorem tamen quadrato dati numeri.*

SIT diuidendus datus numerus 10. in duas partes, vt quadratus maioris partis cum parte minore faciat $73\frac{3}{4}$. Ponatur maior pars $1\mathfrak{2}$. & minor 10——$1\mathfrak{2}$. Quadratus maioris partis eſt $1\mathfrak{8}$. qui cum minore parte facit ſummam $1\mathfrak{8}+10$——$1\mathfrak{2}$. æqualem numero $73\frac{3}{4}$. Ablatis 10. vtrobique, erit æquatio inter $1\mathfrak{8}$——$1\mathfrak{2}$. & $63\frac{3}{4}$. Additaque $1\mathfrak{2}$. vtrinque, inter $1\mathfrak{8}$. & $1\mathfrak{2}+63\frac{3}{4}$. Radix ita eruetur. Semiſſis numeri radicum eſt $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. additis $63\frac{3}{4}$. fit numerus 64. ad cuius radicem quadratam 8. ſi addatur prædicta ſemiſſis $\frac{1}{2}$. fiet pretium vnius radicis $8\frac{1}{2}$. maior pars, minor ergo erit $1\frac{1}{2}$. Nam quadratum maioris partis $8\frac{1}{2}$. eſt $72\frac{1}{4}$. & addita minore parte $1\frac{1}{2}$, fit numerus $73\frac{3}{4}$.

QVOD ſi minor pars ſtatuatur $1\mathfrak{2}$. & maior 10——$1\mathfrak{2}$. erit quadratus maioris partis 100——$20\mathfrak{2}+1\mathfrak{8}$. Addita vero minore parte $1\mathfrak{2}$. fit ſumma 100——$19\mathfrak{2}+1\mathfrak{8}$. æqualis numero $73\frac{3}{4}$. Additis ergo $19\mathfrak{2}$ vtrobique, erit æquatio inter $1\mathfrak{8}+100$. & $19\mathfrak{2}+73\frac{3}{4}$. Ablatisque $73\frac{3}{4}$. vtrinque. inter $1\mathfrak{8}+26\frac{1}{4}$. & $19\mathfrak{2}$. Ablatisque rurſum $26\frac{1}{4}$. vtrobique, inter $1\mathfrak{8}$. & $19\mathfrak{2}$——$26\frac{1}{4}$. Semiſſis numeri radicum eſt $\frac{19}{4}$. à cuius quadrato $\frac{361}{4}$. ablatis $26\frac{1}{4}$. hoc eſt, $\frac{105}{4}$. remanet numerus $\frac{256}{4}$. cuius radix quadrata $\frac{16}{2}$. addita ad prædictam ſemiſſem $\frac{19}{2}$. facit maiorem radicem $\frac{35}{2}$. id eſt, $17\frac{1}{2}$ quæ inutilis eſt, cum non poſſit eſſe pars dati numeri 10. Minor ergo radix (quia numerus Coſſicus $19\mathfrak{2}$——$26\frac{1}{4}$. duplicem radicem habet) problema ſoluet. quæ reperietur, ſi radix quadrata vltimo loco inuenta $\frac{16}{2}$ demat ur ex prædicta ſemiſſe $\frac{19}{2}$. Reliquus enim numerus $1\frac{1}{2}$. erit minor radix, offerens minorem partem numeri 10. maiorque propterea erit $8\frac{1}{2}$. veluti prius.

Vides ergo, non ſemper vtramque radicem, quam Coſſicus numerus habet, aſſumi poſſe, ad problematis propoſiti ſolutionem. Maior tamen radix inuenta $\frac{35}{2}$. quamuis ad problema poſitum non pertineat, optime tamen reſpondet huic æquationi inter $1\mathfrak{8}$. & $19\mathfrak{2}$——$26\frac{1}{4}$. Nam eius radicis quadratus eſt $\frac{1225}{4}$. æqualis $19\mathfrak{2}$——$26\frac{1}{4}$ cum $19\mathfrak{2}$. faciant $\frac{665}{2}$. ſiue $\frac{1330}{4}$. à quibus ſi demantur $26\frac{1}{4}$. hoc eſt $\frac{105}{4}$. remanet numerus $\frac{1225}{4}$.

XXXIII. *33 Datum numerum extrema, ac media ratione ſecare.*

SIT datus numerus 10. ita ſecandus, vt proponitur: hoc eſt, vt minor pars, & maior, ac datus numerus 10. ſint continue proportionales, ſiue (quod idem eſt) vt quadratus maioris partis æqualis ſit numero, qui ex minore parte in datum numerum producitur. Ponatur maior pars $1\mathfrak{2}$. & minor 10——$1\mathfrak{2}$. Quadratus maioris partis eſt $1\mathfrak{8}$ æqualis numero 100——$10\mathfrak{2}$, qui fit ex minore parte 10——$1\mathfrak{2}$. in 10. Semiſſis numeri radicum eſt 5. ad cuius quadratum 25. additis 100. fit numerus 125. à cuius radice quadrata $\sqrt{\mathfrak{8}}\,125$. ſi tollatur prædicta ſemiſſis 5 reliqua fiet radix $\sqrt{\mathfrak{8}}\,125-5$. maior pars. qua ablata ex 10. reliqua fiet minor pars $15-\sqrt{\mathfrak{8}}\,125$. vt in hac formula apparet. Nam quadratum maioris partis eſt 150——$\sqrt{\mathfrak{8}}12500$. ac tantundem fit ex minore parte in 10. vt duæ hę formulæ multiplicationum demonſtrant.

$$\begin{array}{r} \sqrt{\mathfrak{8}}\ 0 + 10 \\ \sqrt{\mathfrak{8}}\ 125 - 5 \\ \hline -\sqrt{\mathfrak{8}}\ 125 + 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{\mathfrak{8}}\ 125 - 5 \\ \sqrt{\mathfrak{8}}\ 125 - 5 \\ \hline -\sqrt{\mathfrak{8}}\ 3125 + 25 \\ 125 - \sqrt{\mathfrak{8}}\ 3125 \\ \hline 150 - \sqrt{\mathfrak{8}}\ 12500 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15 - \sqrt{\mathfrak{8}}\ 125 \\ +10 \\ \hline 150 - \sqrt{\mathfrak{8}}\ 12500 \end{array}$$

SCHOLIVM.

SINE Algebra diuidetur numerus datus extrema ac media ratione, hoc modo. Ad quadratum numeri adijciatur eiuſdem quadrati quarta pars, & ex radice quadrata numeri conflati dematur ſemiſſis dati numeri. Reliquus enim numerus erit maior pars, qua dempta ex numero dato, reliqua fiet minor pars. Hæc praxis colligitur tum ex ſolutione huius problematis, tum ex figura propoſ. 11. lib. 2. Eucl.

34 Datum

34 Datum numerum in duos numeros partiri, ita vt quadratus maioris ad quadratum minoris proportionem habeat datam. XXXIIII.

SIT numerus 30. ſecandus in duos, vt maioris quadratus ad quadratum minoris proportionem habeat duplam ſeſquiquartam. Ponatur maior $1\mathfrak{2}$. & minor 30——$1\mathfrak{2}$. Quadratus illius eſt $1\mathfrak{8}$. duplus ſeſquiquartus ad quadratum huius, nimirum ad 900——$60\mathfrak{2}+1\mathfrak{8}$. Si ergo hic quadratus multiplicetur per $2\frac{1}{4}$. erit æquatio inter $1\mathfrak{8}$. & $\frac{2025-5402+9\mathfrak{8}}{4}$. quæ per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter $4\mathfrak{8}$. & $8100-5402+9\mathfrak{8}$. Additis igitur 5402. vtrobique, erit æquatio inter $4\mathfrak{8}+5402$. & $8100+9\mathfrak{8}$. Ablatisque $4\mathfrak{8}$. vtrinque, inter 5402. & $8100+5\mathfrak{8}$. Et rurſum ablatis 8100. vtrinque, inter $5\mathfrak{8}$. & $5402-8100$. Diuiſiſque omnibus per 5. erit æqualitas inter $1\mathfrak{8}$. & $1082-1620$. Semiſſis numeri radicum eſt 54. à cuius quadrato 2916. demptis 1620. remanet numerus 1296 cuius radix quadrata 36. ad prædictam ſemiſſem 54. facit maiorem radicem 90. quæ ad ænigma ſoluendum apta non eſt, cum non poſſit eſſe pars numeri dati 30. Si ergo eadem radix quadrata 36. dematur ex prædicta ſemiſſe 54. reliqua fiet minor radix 18. nimirum maior numerus quæſitus. Minor ergo erit 12. Nam 324. quadratus illius ad huius quadratum 144. proportionem habet duplam ſeſquiquartam.

VBI etiam vides, quamuis Coſſicus numerus duplicem radicem habeat, non tamen ſemper vtramque aſſumi poſſe. licet maior ad vnguem etiam reſpondeat æquationi. Nam 8100. quadratus maioris radicis 90. æqualis eſt $1082-1620$. cum 1082 efficiant 9720. à quibus ſi demantur 1620. relinquuntur 8100.

35 Datum numerum in duos numeros partiri, vt eorum quadrati ſummam datam conficiant, maiorem tamen ſemiſſe quadrati ex dato numero geniti, & minorem quadrato eiuſdem numeri. XXXV.

SIT numerus 40. diuidendus in duos, quorum quadrati faciant 928. qui numerus maior eſt, quam 800. ſemiſſis quadrati ex 40. procreati, & minor, quam 1600. quadratus eiuſdem numeri 40. Ponatur vnius numerorum $1\mathfrak{2}$. & alter $40-1\mathfrak{2}$. Quadrati ſunt $1\mathfrak{8}$. & $1600-80\mathfrak{2}+1\mathfrak{8}$. qui ſummam faciunt $2\mathfrak{8}+1600-80\mathfrak{2}$. æqualem 928. Additis $80\mathfrak{2}$. vtrobique, erit æquatio inter $2\mathfrak{8}+1600$. & $80\mathfrak{2}+928$. Et ablatis 928. vtrinque, inter $2\mathfrak{8}+672$. & $80\mathfrak{2}$. Et rurſum ablatis 672. vtrobique inter $2\mathfrak{8}$. & $80\mathfrak{2}-672$. Diuiſiſque omnibus per 2. inter $1\mathfrak{8}$ & $40\mathfrak{2}-336$. Semiſſis numeri radicum eſt 20. à cuius quadrato 400. demptis 336. remanet numerus 64. cuius radix quadrata 8. addita ad prædictam ſemiſſem 20. facit maiorem radicem 28. hoc eſt, maiorem numerum, Minor autem erit 12. quem etiam exhibet minor radix. Nam ſi quadrata radix inuenta 8. demat ur ex prædicta ſemiſſe 20. remanent 12. Iam quadratus 784. maioris numeri 28. cum 144. quadrato minoris numeri 12. facit datam ſummam 928.

HOC ænigma ſolutum etiam fuit in ænigmate 170. præcedentis cap. per æquationem ſimplicem.

36 Duos numeros in dato exceſſu inuenire, quorum quadrati datam ſummam efficiant, quæ maior tamen ſit quadrato dati exceſſus. XXXVI.

SIT datus exceſſus 11. & ſumma quadratorum 281. quæ maior eſt quadrato 121. dati exceſſus 11. Ponatur minor numerus $1\mathfrak{2}$. ideoque maior $1\mathfrak{2}+11$. Quadrati $1\mathfrak{8}$. & $1\mathfrak{8}+22\mathfrak{2}+121$. faciunt ſummam $2\mathfrak{8}+22\mathfrak{2}+121$. æqualem 281. Ablatis 121. vtrobique, erit æqualitas inter $2\mathfrak{8}+22\mathfrak{2}$. & 160. Demptiſque rurſum $22\mathfrak{2}$. vtrinque, inter $2\mathfrak{8}$. & $160-22\mathfrak{2}$. Diuiſiſque omnibus per 2. inter $1\mathfrak{8}$. & $80-11\mathfrak{2}$. Semiſſis numeri radicum eſt $\frac{11}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{121}{4}$. additis 80. ſiue $\frac{320}{4}$. fit numerus $\frac{441}{4}$. à cuius radice quadrata $\frac{21}{2}$. ablata prædicta ſemiſſe $\frac{11}{2}$. remanet valor vnius radicis $\frac{10}{2}$. hoc eſt, 5. minor numerus. Maior autem erit 16. Atque horum duorum numerorum quadrati 25. & 256. faciunt 281.

SIT rurſum datus exceſſus 11. & ſumma quadratorum 122. maior quadrato 121. exceſſus dati 11. Ponatur minor numerus iterum $1\mathfrak{2}$. & maior $1\mathfrak{2}+11$. Quadrati horum numerorum faciunt, vt prius, ſummam $2\mathfrak{8}+22\mathfrak{2}+121$. æqualem 122. Ablatis 121. vtrobique, erit æquatio inter $2\mathfrak{8}+22\mathfrak{2}$. & 1. Et ablatis rurſum $22\mathfrak{2}$. vtrinque, inter $2\mathfrak{8}$. & $1-22\mathfrak{2}$. Diuiſiſque omnibus per 2. inter $1\mathfrak{8}$. & $\frac{1}{2}-11\mathfrak{2}$. Semiſſis numeri radicum eſt $\frac{11}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{121}{4}$. addita $\frac{1}{2}$. ſiue $\frac{2}{4}$. fit numerus $\frac{123}{4}$. à cuius radice quadrata $\sqrt{\mathfrak{8}}\,\frac{123}{4}$. dempta prædicta ſemiſſe $\frac{11}{2}$. relinquetur pretium vnius radicis $\sqrt{\mathfrak{8}}\,\frac{123}{4}-\frac{11}{2}$. minor numerus, & additis 11. ſiue, $\frac{22}{2}$. fit maior numerus $\sqrt{\mathfrak{8}}\,\frac{123}{4}+\frac{11}{2}$. Quadrati horum numerorum faciunt ſummam 122. vt hæ formulæ multiplicationum indicant

$$\begin{array}{r} \sqrt{\mathfrak{8}}\ \frac{123}{4} + \frac{11}{2} \\ \sqrt{\mathfrak{8}}\ \frac{123}{4} + \frac{11}{2} \\ \hline +\sqrt{\mathfrak{8}}\ \frac{14883}{16} + \frac{121}{4} \\ \frac{123}{4} + \sqrt{\mathfrak{8}}\ \frac{14883}{16} \\ \hline \frac{244}{4} + \sqrt{\mathfrak{8}}\ \frac{595332}{16} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \sqrt{\mathfrak{8}}\ \frac{123}{4} - \frac{11}{2} \\ \sqrt{\mathfrak{8}}\ \frac{123}{4} - \frac{11}{2} \\ \hline -\sqrt{\mathfrak{8}}\ \frac{14883}{16} + \frac{121}{4} \\ \frac{123}{4} - \sqrt{\mathfrak{8}}\ \frac{14883}{16} \\ \hline \frac{244}{4} - \sqrt{\mathfrak{8}}\ \frac{595332}{16} \end{array}$$

Nam $\frac{244}{4}$. & $\frac{244}{4}$. faciunt $\frac{488}{4}$. hoc eſt, 122. & radices ſurdæ ſe mutuo deſtruunt.

37 Dato numero, alium inuenire, per quem ſi diuidatur datus numerus, fiat Quotiens ſuperans inuentum numerum dato numero. XXXVII

SIT datus numerus 60. inueniendusque ſit alius, per quem ſi diuidatur 60. fiat Quotiens ſuperans inuentum diuiſorē numero 7. Ponatur numerus, qui quæritur, $1\mathfrak{2}$. Quotiens ergo erit $\frac{60}{1\mathfrak{2}}$. qui ſuperat diuiſorem $1\mathfrak{2}$. numero $\frac{60-1\mathfrak{8}}{1\mathfrak{2}}$. (vt patet, ſi $1\mathfrak{2}$. detrahatur ex $\frac{60}{1\mathfrak{2}}$.) qui æqualis debet eſſe dato numero 7. ita vt æquatio ſit

inter

inter $\frac{60-1\mathfrak{S}}{1\mathfrak{Q}}$.& 7.quæ per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 60—1$\mathfrak{S}$.& 7$\mathfrak{Q}$. Addito ergo 1$\mathfrak{S}$ vtrobique, erit æquatio inter 60.& 1$\mathfrak{S}$+7$\mathfrak{Q}$. Et ablatis 7$\mathfrak{Q}$.vtrinque, inter 1$\mathfrak{S}$.& 60—7$\mathfrak{Q}$. Semissis numeri radicum est $\frac{7}{2}$.ad cuius quadratum $\frac{49}{4}$.additis 60.siue $\frac{240}{4}$.fit numerus $\frac{289}{4}$.à cuius radice quadrata $\frac{17}{2}$.si dematur prædicta semissis $\frac{7}{2}$.remanebit pretium vnius radicis $\frac{10}{2}$.hoc est, 5.numerus quæsitus. Nam diuisis 60. per 5. fit Quotiens 12.qui diuisorem 5.numero 7. superat.

xxxviii. *38 Datum numerum in duos numeros partiri, vt ex vno in alterum fiat alius datus numerus minor quarta parte quadrati ex primo dato numero procreati: hoc est, ita vt radix quadrata dati numeri secundi minoris quarta parte quadrati ex primo dato numero procreati sit medio loco proportionalis inter duos numeros inuentos.*

SIT datus numerus 10.diuidendus in duos, inter quos $\sqrt{\mathfrak{S}}$ 10.sit medio loco proportionalis, hoc est, vt ex eorum multiplicatione producatur numerus 10. Ponatur vnus numerorum 1$\mathfrak{Q}$.& alter 10—1$\mathfrak{Q}$. Ex eorum multiplicatione fit numerus 10$\mathfrak{Q}$—1$\mathfrak{S}$.æqualis 10. Addito 1$\mathfrak{S}$.vtrobique, fiet æquatio inter 10$\mathfrak{Q}$.& 1$\mathfrak{S}$+10. Et ablatis 10.vtrinque, inter 10$\mathfrak{Q}$—10.& 1$\mathfrak{S}$. Semissis numeri radicum est 5 à cuius quadrato 25.demptis 10. fit reliquus numerus 15. ad cuius radicem quadratam $\sqrt{\mathfrak{S}}$ 15. addita prædicta semissis 5. facit maiorem radicem $\sqrt{\mathfrak{S}}$15+5.eademque radix quadrata detracta ex prædicta semisse 5.reliquam facit minorem radicem 5 — $\sqrt{\mathfrak{S}}$ 15. Atque hi duo numeri $\sqrt{\mathfrak{S}}$ 15+5.& 5—$\sqrt{\mathfrak{S}}$15.faciunt summam 10. & ex vno in alterum fit quoque 10.vt in hac formula multiplicationis manifestum est. Nam — $\sqrt{\mathfrak{S}}$ 375. & + $\sqrt{\mathfrak{S}}$ 375. se mutuo interimunt : & ex additione + 25. & — 15. fit numerus 10.

$$\begin{array}{r} 5-\sqrt{\mathfrak{S}}\ 15 \\ \sqrt{\mathfrak{S}}\ 15+5 \\ \hline +25-\sqrt{\mathfrak{S}}\ 375 \\ +\sqrt{\mathfrak{S}}\ 375-15 \\ \hline 10 \end{array}$$

HOC idem ænigma soluimus per simplicem æquationem in præcedenti cap.ænigmate 172.

MVLTIPLICATIO quoque prædicta numeri 5 — $\sqrt{\mathfrak{S}}$ 15.in 5 + $\sqrt{\mathfrak{S}}$15.perficietur, si 15 quadratus posterioris particulæ ex 25.quadrato prioris particulæ detrahatur, vt cap.23.declaratum est Idem hoc ænigma solutum fuit in ænigmate 23.alio tamen exemplo proposito.

$$\begin{array}{r} 5-\sqrt{\mathfrak{S}}\ 15 \\ 5+\sqrt{\mathfrak{S}}\ 15 \\ \hline 10 \end{array}$$

xxxix. *39 Datum numerum diuidere in duos, vt eorum quadrati summam faciant, quæ productum ex eorum multiplicatione superet dato numero.*

SIT datus numerus 30.& excessus datus 228. Ponatur vnus numerorum 1$\mathfrak{Q}$. & alter 301—2$\mathfrak{Q}$. Quadrati sunt 1$\mathfrak{S}$.& 1$\mathfrak{S}$+900——60$\mathfrak{Q}$. qui summam faciunt 2$\mathfrak{S}$+900——60$\mathfrak{Q}$. quæ superare debet numerum productum ex 1$\mathfrak{Q}$.in 30——1$\mathfrak{Q}$.hoc est, numerum 30$\mathfrak{Q}$——1$\mathfrak{S}$. excessu 228. ita vt æqualitas sit inter 2$\mathfrak{S}$+900——60$\mathfrak{Q}$.& 30$\mathfrak{Q}$+228——1$\mathfrak{S}$. Et addito 1$\mathfrak{S}$.vtrinque, inter 3$\mathfrak{S}$+900——60$\mathfrak{Q}$.& 30$\mathfrak{Q}$+228. Et additis 60$\mathfrak{Q}$.vtrobique, inter 3$\mathfrak{S}$+900.& 90$\mathfrak{Q}$+228. Et ablatis 228.vtrinque, inter 3$\mathfrak{S}$+672.& 90$\mathfrak{Q}$. Et rursum ablatis 672.vtrobique, inter 3$\mathfrak{S}$.& 90$\mathfrak{Q}$—— 672. Diuisisque omnibus per 3. inter 1$\mathfrak{S}$.& 30$\mathfrak{Q}$——224. Semissis numeri radicum est 15. à cuius quadrato 225. demptis 224. supersit 1. cuius radix quadrata 1. addita ad prædictam semissem 15. facit maiorem radicem 16. Eadem vero ex semisse prædicta 15. detracta relinquit minorem radicem 14. Itaque quæsitæ partes numeri 30. sunt 16. & 14. Quadrati enim earum 256. 196. summam faciunt 452. quæ numerum 224. factum ex ductu 16. in 14. superat numero 228.

HOC idem problema soluimus per simplicem æquationem in ænigmate 173. præcedentis capitis, proposito tamen alio exemplo.

SI numerus diuidendus proponeretur 20. & excessus 30. fieret problema impossibile, vt ipsa operatio docebit.

XL. *40 Datum numerum partiri in duos, quorum radices quadratæ habeant differentiam datam, cuius tamen quadratus minor sit numero dato.*

SIT datus numerus 30.diuidendus in duos, quorum radices quadratæ habeant differentiam 5. Ponatur minoris radix 1$\mathfrak{Q}$.ideoque maioris radix 1$\mathfrak{Q}$+5. vt se excedant quinario. Quadrati harum radicum 1$\mathfrak{S}$.& 1$\mathfrak{S}$+10$\mathfrak{Q}$+25. faciunt summam 2$\mathfrak{S}$+10$\mathfrak{Q}$+25. æqualem 30. Ablatis 25. vtrobique, manebit æqualitas inter 2$\mathfrak{S}$+10$\mathfrak{Q}$.& 5. Ablatisque rursum 10$\mathfrak{Q}$ vtrinque, inter 2$\mathfrak{S}$.& 5——10$\mathfrak{Q}$. Diuisisque omnibus per 2. inter 1$\mathfrak{S}$.& $\frac{5}{2}$——5$\mathfrak{Q}$. Semissis numeri radicum est $\frac{5}{2}$.ad cuius quadratum $\frac{25}{4}$.additis $\frac{5}{2}$.siue $\frac{10}{4}$.fit numerus $\frac{35}{4}$.à cuius radice quadrata $\sqrt{\mathfrak{S}}\frac{35}{4}$.dempta prædicta semisse $\frac{5}{2}$.fiet pretium radicis $\sqrt{\mathfrak{S}}\frac{35}{4}$—— $\frac{5}{2}$. minoris scilicet numeri radix. Additis ergo 5.fiet maioris numeri radix $\sqrt{\mathfrak{S}}\frac{35}{4}$+$\frac{5}{2}$.quæ duæ radices se mutuo excedunt quinario. Et in se ductæ quadrate, faciunt numeros, qui quæruntur, 15—— $\sqrt{\mathfrak{S}}\frac{350}{16}$.& 15+$\sqrt{\mathfrak{S}}\frac{350}{16}$.qui faciunt 30. numerū datum.

IDEM ænigma solui etiam potest per simplicem æquationem, hoc modo. Ponatur minoris numeri radix 1$\mathfrak{Q}$— $\frac{5}{2}$.& maioris 1$\mathfrak{Q}$+$\frac{5}{2}$.vt hæc illam superet quinario. Ambæ in se ductæ quadrate faciunt 1$\mathfrak{S}$—— $\frac{10}{2}\mathfrak{Q}$+$\frac{25}{4}$.& 1$\mathfrak{S}$+$\frac{10}{2}\mathfrak{Q}$+$\frac{25}{4}$.quorum summa 2$\mathfrak{S}$+$\frac{30}{4}$.æqualis est 30. Ablatis $\frac{20}{4}$.hoc est, 12$\frac{1}{2}$.vtrobique, manebit æquatio inter 2$\mathfrak{S}$.& 17$\frac{1}{2}$. Diuisisque 17$\frac{1}{2}$. per 2. fiet 1$\mathfrak{S}$.+$\frac{35}{4}$.& 1$\mathfrak{Q}$ $\sqrt{\mathfrak{S}}\frac{35}{4}$. Cum ergo minoris numeri radix posita sit 1$\mathfrak{Q}$—— $\frac{5}{2}$. erit ipsa radix minoris numeri $\sqrt{\mathfrak{S}}\frac{35}{4}$—— $\frac{5}{2}$. Et maioris numeri radix $\sqrt{\mathfrak{S}}\frac{35}{4}$+$\frac{5}{2}$. cum posita sit 1$\mathfrak{Q}$+$\frac{5}{2}$. Inuentæ ergo sunt eædem radices, quæ prius, &c.

41 Datum

41 Datum numerum diuidere in duos, quorum radices inter se multiplicatæ faciant datum quemcunque numerum. XLI.

SIT datus numerus 12.secandus in duos, quorum radices inter se multiplicatæ faciant 5. Ponatur vnus numerorum 12$\mathfrak{Q}$.& alter 12——12$\mathfrak{Q}$. Erunt eorum radices, $\sqrt{\mathfrak{S}}$12$\mathfrak{Q}$.& $\sqrt{\mathfrak{S}}$(12——12$\mathfrak{Q}$.) Hæ inter se multiplicatæ faciunt $\sqrt{\mathfrak{S}}$(12$\mathfrak{Q}$——1$\mathfrak{S}$) qui numerus æqualis esse debet numero 5. Igitur & eorum quadrati 12$\mathfrak{Q}$——1$\mathfrak{S}$. & 25.æquales erunt. Additoque 1$\mathfrak{S}$.vtrobique, erit æquatio inter 12$\mathfrak{Q}$.& 1$\mathfrak{S}$+25. Et ablatis 25.vtrinque, inter 12$\mathfrak{Q}$——25.& 1$\mathfrak{S}$. Semissis numeri radicum est 6. à cuius quadrato 36. demptis 25. supereſt numerus 11.ad cuius radicem quadratam $\sqrt{\mathfrak{S}}$11. addita prædicta semisse 6. fiet maior radix $\sqrt{\mathfrak{S}}$11+6.siue 6+$\sqrt{\mathfrak{S}}$11.id est, maior numerus quæsitus. Et si eadem $\sqrt{\mathfrak{S}}$11. tollatur ex semisse prædicta 6. reliqua fiet minor radix 6—— $\sqrt{\mathfrak{S}}$ 11. nimirum minor numerus quæsitus. Atque duo hi numeri 6+$\sqrt{\mathfrak{S}}$11.& 6——$\sqrt{\mathfrak{S}}$11. faciunt propositum numerum 12.& eorum radices sunt $\sqrt{\mathfrak{S}}$(6+$\sqrt{\mathfrak{S}}$11) & $\sqrt{\mathfrak{S}}$(6——$\sqrt{\mathfrak{S}}$11) quæ inter se multiplicatæ faciunt $\sqrt{\mathfrak{S}}$25.id est, 5.vt hæc formula monstrat. Nam si earum quadrata 6+$\sqrt{\mathfrak{S}}$11.& 6——$\sqrt{\mathfrak{S}}$11. inter se multiplicentur, (quod fiet, si 11.quadratum posterioris particulæ ex 36.quadrato particulæ prioris detrahatur, vt cap.23.dictum est) fiet productus $\sqrt{\mathfrak{S}}$25.id est, 5.

$$\begin{array}{r} \sqrt{\mathfrak{S}}\ (6+\sqrt{\mathfrak{S}}\ 11) \\ \sqrt{\mathfrak{S}}\ (6-\sqrt{\mathfrak{S}}\ 11) \\ \hline \sqrt{\mathfrak{S}}\ 25 \end{array}$$

PER simplicem æquationem soluemus idem ænigma, hoc modo. Ponatur vnus numerus 6+12$\mathfrak{Q}$.& alter 6——12$\mathfrak{Q}$. quorum radices $\sqrt{\mathfrak{S}}$(6+12$\mathfrak{Q}$)& $\sqrt{\mathfrak{S}}$(6——12$\mathfrak{Q}$) inter se multiplicatæ faciunt numerum $\sqrt{\mathfrak{S}}$(36——1$\mathfrak{S}$) vt hæc formula indicat, æqualem numero 5 Igitur & eorum quadrati 36.——1$\mathfrak{S}$ & 25.æquales erunt. Additoque 1$\mathfrak{S}$.vtrinque, erit æquatio inter 36.& 1$\mathfrak{S}$+25. Ablatisque 25. vtrobique, inter 11.& 1$\mathfrak{S}$. Diuisis ergo 11. per 1. fiet 1$\mathfrak{S}$.11.& 12$\mathfrak{Q}$.$\sqrt{\mathfrak{S}}$11. Et quia vnus numerorum positus fuit 6+12$\mathfrak{Q}$. erit ipse numerus 6+$\sqrt{\mathfrak{S}}$11. Alter vero, quem posuimus 6——12$\mathfrak{Q}$. erit 6—— $\sqrt{\mathfrak{S}}$11. quemadmodum supra.

$$\begin{array}{r} \sqrt{\mathfrak{S}}\ (6+12\mathfrak{Q}) \\ \sqrt{\mathfrak{S}}\ (6-12\mathfrak{Q}) \\ \hline -72\mathfrak{Q}-1\mathfrak{S} \\ 36+72\mathfrak{Q} \\ \hline \sqrt{\mathfrak{S}}\ (36-1\mathfrak{S}) \end{array}$$

42 Dato numero, inuenire alium, qui cum dato efficiat quadratum numeri inuenti. XLII.

SIT datus numerus 40. Ponatur inuentus numerus 12$\mathfrak{Q}$. cuius quadratus 1$\mathfrak{S}$. Ergo 12$\mathfrak{Q}$+40. æqualia sunt 1$\mathfrak{S}$. Semissis numeri radicum est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$.additis 40. fit numerus 40.$\frac{1}{4}$.id est, $\frac{161}{4}$.ad cuius radicem quadratam $\sqrt{\mathfrak{S}}\frac{161}{4}$.addita prædicta semisse $\frac{1}{2}$. fiet pretium 12$\mathfrak{Q}$.$\sqrt{\mathfrak{S}}\frac{161}{4}$+$\frac{1}{2}$. nimirum numerus quæsitus, qui cum dato numero 40. facit $\sqrt{\mathfrak{S}}\frac{1601}{4}$+40$\frac{1}{2}$. qui numerus æqualis est quadrato numeri inuenti $\sqrt{\mathfrak{S}}\frac{161}{16}$+$\frac{1}{2}$. Nam hic in se ductus (vt apposita formula docet) producit numerum $\frac{161}{4}$+$\sqrt{\mathfrak{S}}\frac{6441}{16}$. hoc est, 40$\frac{1}{2}$+$\sqrt{\mathfrak{S}}\frac{161}{4}$. propterea quod hæ minutiæ $\sqrt{\mathfrak{S}}\frac{6441}{16}$.& $\sqrt{\mathfrak{S}}\frac{161}{4}$.æquales sunt.

$$\begin{array}{r} \sqrt{\mathfrak{S}}\ \frac{161}{4}+\frac{1}{2} \\ \sqrt{\mathfrak{S}}\ \frac{161}{4}+\frac{1}{2} \\ \hline +\sqrt{\mathfrak{S}}\ \frac{161}{4}+\frac{1}{4} \\ \frac{161}{4}+\sqrt{\mathfrak{S}}\ \frac{161}{16} \\ \hline \frac{1601}{4}\ \text{siue}\ 40\frac{1}{2}+\sqrt{\mathfrak{S}}\ \frac{6441}{16} \end{array}$$

SIT rursus datus numerus 100. Ponatur numerus quæsitus 12$\mathfrak{Q}$. Ergo 1 2$\mathfrak{Q}$+110. æqualia sunt 1$\mathfrak{S}$. Semissis numeri radicum est $\frac{1}{2}$.ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$.additis 110. fit numerus 110$\frac{1}{4}$.siue $\frac{441}{4}$.ad cuius radicem quadratam $\frac{21}{2}$.addita prædicta semisse $\frac{1}{2}$. fit pretium 12$\mathfrak{Q}$.$\frac{22}{2}$. hoc est, 11. numerus quæsitus. Huius enim quadratus 121.æqualis est numero conflato ex dato 110.& inuento 11.

HOC problema propositum etiam fuit in ænigmate 3. huius cap. in alijs tamen numeris.

43 Datum numerum in duos partiri, vt summa quadratorum cum producto ex vno in alterum faciat datum numerum quemcunque. XLIII.

SIT datus numerus diuidendus 20. & quadrati cum producto ex vna parte in alteram faciant 309. Ponatur vnus numerorum 12$\mathfrak{Q}$.& alter 20——12$\mathfrak{Q}$. Quadrati faciunt summam 2$\mathfrak{S}$+400——40$\mathfrak{Q}$. quæ cum producto ex vno in alterum, id est, cum 20$\mathfrak{Q}$——1$\mathfrak{S}$. facit numerum 1$\mathfrak{S}$+400——20$\mathfrak{Q}$. æqualem 309. Additis 20$\mathfrak{Q}$.vtrobique, erit æquatio inter 1$\mathfrak{S}$+400.& 20$\mathfrak{Q}$+309. Et ablatis 309. vtrinque, inter 1$\mathfrak{S}$+91.& 20$\mathfrak{Q}$. Et rursum ablatis 91. vtrinque, inter 1$\mathfrak{S}$.& 20$\mathfrak{Q}$——91. Semissis numeri radicum est 10. à cuius quadrato 100. ablatis 91. remanet numerus 9. ad cuius radicem 3. addita prædicta semisse 10. fit maior radix 13. Et eadem radice 3. dempta ex prædicta semisse 10. reliqua fiet minor radix 7. Duæ ergo partes numeri 20. sunt 13.& 7. Nam earum quadrati 169.& 49. vna cum 91. producto ex vno in alterum faciunt 309.

IDEM exequemur per simplicem æquationem, hoc modo. Ponatur maior pars 10+12$\mathfrak{Q}$.& minor 10—12$\mathfrak{Q}$.vt simul conficiant 20. Quadrati sunt 1$\mathfrak{S}$+20$\mathfrak{Q}$+100.& 1$\mathfrak{S}$.—20$\mathfrak{Q}$+100. facientes summam 2$\mathfrak{S}$+200. quæ cū producto ex vna parte in alteram, nimirum cum 100—1$\mathfrak{S}$ (qui productus habetur, si 1$\mathfrak{S}$.id est, quadratꝰ posterioris particulæ demaī ex 100. quadrato prioris particulę vt hic apparet) facit numerū 1$\mathfrak{S}$+300. æqualem 309.

$$\begin{array}{r} 10 + 1\,\mathcal{Q} \\ 10 - 1\,\mathcal{Q} \\ \hline 100 - 1\,\mathcal{G} \end{array}$$

lem 309. Ablatis ergo 300. vtrobique, manebit æqualitas inter $1\mathcal{G}$. & 9. Diuisisque 9. per 1. fiet $1\mathcal{G}.9$ & $1\mathcal{Q}.3$. Ergo maior pars posita $10+1\mathcal{Q}$. erit 13. Minor autem posita $10-1\mathcal{Q}$. erit 7. veluti prius.

XXXXIIII. 44 *Numerum inuenire, qui in datum numerum ductus faciat numerum æqualem ei, quem inuenti numeri quadratus cum quolibet numero, qui minor sit quadrato ex semisse dati numeri procreato facit.*

SIT inueniendus numerus, qui ductus in 10. tantum faciat, quantum eius quadratus cum 20. numero scilicet minore, quam quadratus semissis numeri 10. Ponatur numerus quæsitus $1\mathcal{Q}$. qui ductus in 10. facit $10\,\mathcal{Q}$. æquales $1\mathcal{G}+20$. nimirum quadrato ex $1\mathcal{Q}$. procreato, vna cum 20. Ablatis 20. vtrobique, manebit æqualitas inter $10\mathcal{Q}$ —— 20. & $1\mathcal{G}$. Semissis numeri radicum est 5. à cuius quadrato 25. demptis 20. remanet numerus 5. cuius radix $\sqrt{\mathcal{G}5}$. addita prædictæ semissi 5. facit $\sqrt{\mathcal{G}5}+5$. maiorem radicem. Et eadem radix dempta ex prædicta semisse 5. reliquam facit minorem radicem $5-\sqrt{\mathcal{G}5}$. Atque vterque numerus $\sqrt{\mathcal{G}5}+5$. & $5-\sqrt{\mathcal{G}5}$. problema conficit. Nam multiplicatio $\sqrt{\mathcal{G}5}+5$. in 10. facit $50+\sqrt{\mathcal{G}}500$. quantum nimirum fit ex $30+\sqrt{\mathcal{G}}500$. quadrato numeri $\sqrt{\mathcal{G}5}+5$. vna cum 20. Item ex $5-\sqrt{\mathcal{G}5}$. in 10. fit numerus $50-\sqrt{\mathcal{G}}500$. æqualis quadrato $30-\sqrt{\mathcal{G}}500$. numeri $5-\sqrt{\mathcal{G}5}$. vna cum 20.

ITEM sit inueniendus numerus, qui ductus in 20. tantum faciat, quantum eius quadratus cum 84. Ponatur quæsitus numerus $1\mathcal{Q}$. Ex $1\mathcal{Q}$. in 20. fit numerus $20\,\mathcal{Q}$. æqualis $1\mathcal{G}+84$. nimirum quadrato ex $1\mathcal{Q}$. procreato, vna cum 84. Ablatis 84. vtrobique, manebit æqualitas inter $20\mathcal{Q}-84$. & $1\mathcal{G}$. Semissis numeri radicum est 10. à cuius quadrato 100. demptis 84. supereſt numerus 16. cuius radix 4. addita ad prædictam semissem 10. facit maiorem radicem 14. Ablata vero ex eadem semisse reliquam facit minorem radicem 6. Atque numerus vterque 14. & 6. problema soluit. Nam ex 14. in 20. fit numerus 280. æqualis ei, quem eius quadratus 196. cum 84. facit. Item ex 6. in 20. fit numerus 120. æqualis ei, quem eius quadratus 36. cum 84. efficit.

XXXXV. 45 *Numerum inuenire, qui ad quemuis datum numerum additus faciat summam, quæ ducta in numerum inuentum faciat numerum datum quemcunque.*

SIT inueniendus numerus, quo addito ad 12. & summa ducta in numerum inuentum, producatur 189. Ponatur numerus quæsitus $1\mathcal{Q}$. Additis 12. fit numerus $1\mathcal{Q}+12$. qui ductus in inuentum nimirum in $12\mathcal{Q}$. facit numerum $1\mathcal{G}+12\,2\mathcal{Q}$. æqualem 189. Ablatis $12\,2\mathcal{Q}$. vtrobique. erit æquatio inter $1\mathcal{G}$. & 189 —— $12\,2\mathcal{Q}$. Semissis numeri radicum est 6. ad cuius quadratum 36. additis 189. fit numerus 225. à cuius radice 15. ablata prædicta semisse 6. manet valor $1\mathcal{Q}$. 9. numerus videlicet quæsitus. Hic enim additus ad 12. facit 21. & ex 21. in 9. fit datus numerus 189.

ITEM sit inueniendus numerus, quo addito ad 12. & summa ducta in numerum inuentum, fiat numerus 400. Ponatur $1\mathcal{Q}$. Additis 12. fit numerus $1\mathcal{Q}+12$. qui ductus in $1\mathcal{Q}$. facit numerum $1\,\mathcal{G}+12\,\mathcal{Q}$. æqualem 400. Ablatisque $12\,\mathcal{Q}$. vtrobique, manet æqualitas inter $1\mathcal{G}$. & 400 —— $12\,\mathcal{Q}$. Semissis numeri radicum est 6. ad cuius quadratum 36. additis 400. fit numerus 436. à cuius radice, $\sqrt{\mathcal{G}}436$. si demtus sit prædicta semissis 6. reliqua fiet æstimatio vnius radicis $\sqrt{\mathcal{G}}436-6$. numerus videlicet, quem inquirimus. Nam si addatur ad 12. fiet numerus $\sqrt{\mathcal{G}}436+6$. vt in hac formula vides. Hic autem numerus $\sqrt{\mathcal{G}}.436+6$. multiplicatus per inuentum numerum $\sqrt{\mathcal{G}}436-6$. facit numerum datum 400. vt hæc altera formula docet. quæ multiplicatio fiet, si 36. quadratus posterioris particulæ 6. subducatur à 436. quadrato prioris particulæ, vt cap. 23. declaratum fuit.

$$\begin{array}{r} \sqrt{\mathcal{G}}\ 436 - 6 \\ \quad + 12 \\ \hline \sqrt{\mathcal{G}}\ 436 + 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{\mathcal{G}}\ 436 + 6 \\ \sqrt{\mathcal{G}}\ 436 - 6 \\ \hline 400 \end{array}$$

XXXXVI. 46 *Datum numerum in duas partes secare, vt numerus procreatus ex vna in alteram ductus in quadratum dati numeri faciat numerum quemcunque datum.*

SIT numerus datus 20. secandus in duos, vt numerus ex eorum multiplicatione procreatus, si ducatur in 400. quadratum dati numeri, efficiat 300. Ponatur vnus numerus $1\mathcal{Q}$. & alter 20 —— $1\mathcal{Q}$. Ex $1\mathcal{Q}$. in 20. —— $1\mathcal{Q}$. fit numerus $20\,\mathcal{Q}$ —— $1\mathcal{G}$. Et hic ductus in 400. facit $8000\,\mathcal{Q}$ —— $400\,\mathcal{G}$. qui æqualis esse debet 300. Additis $400\,\mathcal{G}$. vtrobique, erit æquatio inter $8000\,\mathcal{Q}$. & $300+400\,\mathcal{G}$. Et ablatis 300. vtrinque, inter $400\,\mathcal{G}$. & $8000\,\mathcal{Q}$ —— 300. Diuisis omnibus per 400. erit æquatio inter $1\mathcal{G}$ & $20\,\mathcal{Q}$ —— $\frac{3}{4}$. Semissis radicum est 10. à cuius quadrato 100. siue $\frac{400}{4}$. demptis $\frac{3}{4}$. remanent $\frac{397}{4}$. cuius $\sqrt{\mathcal{G}}\,\frac{397}{4}$. addita semissi prædictæ 10. facit maiorem radicem $10+\sqrt{\mathcal{G}}\,\frac{397}{4}$. & ablata ex eadem semisse 10. relinquit radicem minorem $10-\sqrt{\mathcal{G}}\,\frac{397}{4}$. quæ sunt partes quæsitæ. Nam ex vna in alteram fit numerus $\frac{3}{4}$. si nimirum posterioris particulæ quadratum $\frac{397}{4}$. dematur ex 100. siue $\frac{400}{4}$. quadrato prioris particulæ. At ex $\frac{3}{4}$. in 400. quadratum dati numeri 20. fit numerus $\frac{1200}{4}$. hoc est, 300.

47 *Numerum inuenire, cuius quadratus auctus dato numero, si ducatur in eundem quadratum multatum alio numero dato, producat datum numerum quemcunque.* VI VII.

INVENIENDVS sit numerus, cuius quadratus octonario auctus, si ducatur in eundem quadratum multatum ternario, producat 6942. Ponatur quæsitus numerus $1\mathcal{Q}$. Eius quadratus $1\mathcal{G}$. auctus octonario, erit $1\mathcal{G}+8$. multatus vero ternario, $1\mathcal{G}-3$.

Hi duo numeri inter se multiplicati faciunt $1\mathcal{G}\mathcal{G}+5\,\mathcal{G}$ —— 24. vt in hac formula vides. qui numerus æqualis esse debet numero 6942. Additis ergo 24. vtrobiq;, erit æqualitas inter $1\mathcal{G}\mathcal{G}+5\mathcal{G}$. & 6966. Et ablatis $5\mathcal{G}$. vtrinque, inter $1\mathcal{G}\mathcal{G}$. & $6966-5\mathcal{G}$. Iam sic.

$$\begin{array}{r} 1\,\mathcal{G} + 8 \\ 1\,\mathcal{G} - 3 \\ \hline -3\,\mathcal{G} - 24 \\ 1\,\mathcal{G}\mathcal{G} + 8\,\mathcal{G} \\ \hline 1\,\mathcal{G}\mathcal{G} + 5\,\mathcal{G} - 24 \end{array}$$

Semissis numeri Zensorum est $\frac{5}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{25}{4}$. additis 6966. hoc est, $\frac{27864}{4}$. fit summa $\frac{27889}{4}$. ex cuius radice quadrata $\frac{167}{2}$. detracta semisse prædicta $\frac{5}{2}$. remanent $\frac{162}{2}$. hoc est, 81. vnus Zensus, cuius radix 9. dabit pretium vnius radicis pro numero quæsito. Nam eius quadratus 81. auctus octonario facit 89. & multatus ternario, 78. fit ex 89. in 78. numerus datus 6942.

SI ijsdem positis, produci debeat numerus 10. reperietur æquatio inter $1\mathcal{G}\mathcal{G}$. & 34 —— $5\mathcal{G}$. Iam sic. Semissis numeri Zensorum est $\frac{5}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{25}{4}$. additis 34. hoc est, $\frac{136}{4}$. fit summa $\frac{161}{4}$. à cuius radice quadrata $\sqrt{\mathcal{G}}\,\frac{161}{4}$. detracta prædicta semisse $\frac{5}{2}$. fiet $1\mathcal{G}.\sqrt{\mathcal{G}}\,\frac{161}{4}-\frac{5}{2}$. & huius radix quadrata, $\sqrt{\mathcal{G}}\,(\sqrt{\mathcal{G}}\,\frac{161}{4}-\frac{5}{2})$ numerus quæsitus. Nam eius quadratus $\sqrt{\mathcal{G}}\,\frac{161}{4}-\frac{5}{2}$. auctus octonario, siue $\frac{16}{2}$. facit $\sqrt{\mathcal{G}}\,\frac{161}{4}+\frac{11}{2}$. Multatus vero ternario, siue $\frac{6}{2}$. facit $\sqrt{\mathcal{G}}\,\frac{161}{4}-\frac{11}{2}$. qui duo numeri inter se multiplicati producunt numerum 10. vt hæc formula indicat. Nam si $\frac{25}{4}$. quadratus posterioris particulæ detrahatur ex $\frac{161}{4}$. quadrato particulæ prioris remanent $\frac{136}{4}$. hoc est, 10.

$$\begin{array}{r} \sqrt{\mathcal{G}}\,\frac{161}{4} + \frac{11}{2} \\ \sqrt{\mathcal{G}}\,\frac{161}{4} - \frac{11}{2} \\ \hline \frac{40}{4}. \text{ siue } 10. \end{array}$$

ÆNIGMATA VARIA NVMERORVM AD *res materiales contractorum, cum nonnullis exemplis ad secundas radices pertinentibus.*

CAPVT XXXI.

PROPONEMVS in hoc cap. præter ænigmata, quæstiones nonnullas alias non admodum difficiles, quarum aliquæ non solum per regulam Falsi, verum etiam per solam regulam Trium expediri possunt; vt præstantia regulæ Algebræ magis eluceat: quippe quæ omnes Arithmeticæ regulas complecti videatur. Hinc igitur exordiamur.

1 *Summam pecuniæ, quam in sacculo habeo, existimat quidam astantium valere 600. aur. Cuius errorem sic corrigo. Si ad meam pecuniam accederent partes $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}$. & à summa detraheretur $\frac{1}{1\frac{1}{2}}$. eiusdem meæ pecuniæ, tunc haberem 600. aureos. Quæstio est, quanta sit mea pecunia.* I.

PONATVR esse $1\mathcal{Q}$. aur. Si accedant partes $\frac{1}{2}\,2\mathcal{Q}.\frac{1}{3}\,2\mathcal{Q}.\frac{1}{4}\,2\mathcal{Q}$. quæ faciunt summam $1\frac{1}{12}\,2\mathcal{Q}$. fiet tota pecunia $2\frac{1}{12}\,2\mathcal{Q}$. Ablata autem $\frac{1}{1\frac{1}{2}}\,2\mathcal{Q}$. reliquæ fient $22\mathcal{Q}$. æquales 600. Diuisis igitur 600. per 2. fiet $12\mathcal{Q}$ 300. Atque hæc est pecunia in meo sacculo. Nam si accedant partes $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}$. nimirum aurei 150. 100. & 75. fiet summa aur. 625 & dempta $\frac{1}{1\frac{1}{2}}$. nimirum aur. 25. reliquus erit numerus 600.

2 *Viator quidam conficit quotidie 9. milliaria. Alius decimo post die elapso idem iter instituit, ex eodem loco conficit $\mathcal{G}$ quotidie 14. milliaria. Quæritur, quoto die posterior priorem assequetur.* II.

PONATVR, ambos simul futuros in $12\mathcal{Q}$. dierum. Ergo prior vltra 90. milliaria, quæ in decem diebus absoluit, conficiet in $12\mathcal{Q}$ dierum præterea $92\mathcal{Q}$. milliariorum, quandoquidem singulis diebus 9. milliaria conficit. Posterior autem conficiens quotidie 14. milliaria, conficiet in $12\mathcal{Q}$. dierum, $142\mathcal{Q}$ milliariorum. Et quia in $12\mathcal{Q}$. dierum tot milliaria prior necessario confecerit, vna cum 90. quæ in 10. diebus absoluit, quot posterior in $12\mathcal{Q}$. dierum; quandoquidem tunc simul futuri sunt: erit æquatio inter $92\mathcal{Q}+90$. & $142\mathcal{Q}$. Ablatisque $92\mathcal{Q}$. vtrobique, inter 90. & $52\mathcal{Q}$. Diuisis ergo 90. per 5. fiet $12\mathcal{Q}$. 18. Igitur post 18. dies conuenient. Nam prior in 18. diebus absoluit milliaria 162. additisque 90. quæ in præcedentibus 10. diebus confecit, fient 252. milliaria, quot videlicet posterior in 18. diebus absoluit.

SCHOLIVM.

HÆC porro quæstio in numeris abstractis ita proponeretur. Quæratur numerus, qui ductus in 9. & ad productum additio 90. numerum efficiat æqualem ei, qui ex eodem numero in 14. multiplicato gignitur. Posito enim numero quæsito $1\mathcal{Q}$.

erunt 9ℨ+90. æquales numero 1aℨ. Ablatis ergo 9ℨ vtrobique, reperietur æqualitas inter 90. & 5ℨ. Diuisisque 90. per 5. fiet 1ℨ. 18. numerus, quem quærimus. Nam hic ductus in 9. facit 162. & additis 90. fit numerus 252. æqualis ei, qui fit ex 18. in 14.

III. 3 *Viator singulis diebus 9. milliaria conficit: alius vero decimo post die elapso idem iter ingreditur. Quæritur quot milliaria absoluet hic, vt priorem assequatur in 18. diebus.*

PONATVR 1ℨ milliariorum. Ergo in 18. diebus conficiet 18ℨ. milliariorũ. Cum ergo prior singulis diebus conficiens 9. milliaria, absoluat in 18. diebus 162. milliaria, & additis 90. quæ perambulauit in prioribus 10. diebus, fit manifestum, eum confecisse 252. milliaria. Est ergo æquatio inter 18ℨ. & 252. Diuisisq; 252. per 18. fiet 1.ℨ14. atque tot milliaria conficere debet posterior, vt in 18. diebus priorem assequatur.

IIII. 4 *Interrogatus quidam, quota sit hora diei, ita respondit. Dimidiata pars horarum à media nocte vsque ad hoc instans elapsarum addita ad tres quartas horarum futurarum ad sequentem mediam noctem, indicabit numerum horarum, quem quæris. Quæritur ergo, quota tunc sit hora.*

PONATVR 1ℨ horarum à media nocte præteritarum. Cum ergo ab vna media nocte ad aliam mediam noctem effluant horæ 24 supererunt vsque ad mediam noctem insequentem horæ 24——1ℨ. Huius numeri $\frac{1}{2}$. faciunt $\frac{24-1\text{ℨ}}{2}$. quibus si addatur $\frac{3}{4}$ℨ. horarum præteritarum, siue $\frac{1}{2}$ℨ. fiet numerus $\frac{72-1\text{ℨ}}{4}$. æqualis 1ℨ. Quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 4ℨ. & 72—1ℨ. Additaque 1ℨ. vtrinque, erit æquatio inter 72. & 5ℨ. Diuisis ergo 72. per 5. fiet 1ℨ. $14\frac{2}{5}$. numerus horarum, quæ à media nocte vsque ad horam quæstionis effluxerunt. Ac proinde erit tunc hora 2. & Min. 24. à meridie: cum 1. hora contineat 60. Min. quod ita probatur. Dimidiata pars horarum $14\frac{2}{5}$. à media nocte præteritarum facit horas $7\frac{1}{5}$. quibus si addantur $\frac{3}{4}$. horarum $9\frac{3}{5}$. quæ supersunt vsque ad mediam noctem, nimirum $7\frac{1}{5}$. fient horæ $14\frac{2}{5}$.

EODEM modo procedemus, si fermo sit de horis ab occasu Solis, more Italorum. Nam si quis responderit, eam tunc instare horam, quæ ex $\frac{3}{4}$. horarum à proximo Solis occasu elapsarum additis ad semissem horarum, quæ vsque ad alterum occasum Solis supersunt, conficitur: Ponemus 1ℨ. horarum à proximo occasu præteritarum. Cum ergo ab vno occasu ad alium occasum fluant horæ 24. supersunt vsque ad sequentem occasum horæ 24——1ℨ. Huius numeri semissis facit $\frac{24-1\text{ℨ}}{2}$. hoc est, $\frac{48-2\text{ℨ}}{4}$. quæ addita ad $\frac{3}{4}$ℨ. horarum elapsarum faciet $\frac{48+1\text{ℨ}}{4}$. qui numerus æqualis est 1ℨ. quæ æquatio per multiplicationẽ in crucem reducetur ad hanc inter 4ℨ. & 48+1ℨ. Ablataque 1ℨ. vtrobique, erit æquatio inter 48. & 3ℨ. Diuisisque 48. per 3. fiet 1ℨ16 numerus horarum ab occasu præteritarum. quod ita probatur. Tres quartæ horarum 16. elapsarum faciunt 12. horas, quibus si addatur $\frac{1}{2}$. horarum 8. quæ vsque ad alterum occasum supersunt, nimirum 4. fient horæ 16.

V. 5 *Quidam habet duas mensuras vini, quarum vna valet 12. nummos, & altera 15. Vult autem ex vtroque vino miscere vnam mensuram, cuius pretium sit 13. nummorum. Quæritur, quantum vini de qualibet mensura recipiendum sit.*

PONE 1ℨ partium mensuræ vilioris vini. Et pretiosioris vini mensuram 1——1ℨ. Tunc institue regulam Trium bis, hoc modo.

Prioris vini	mensura 1	numm. 12	mens. 1ℨ?	numm. facit 12 ℨ.
Posterioris vini.	1	15	1—1ℨ?	facit 15—15ℨ.

Nam si 1. mensura prioris vini valet 12. numm. 1ℨ. vnius mensuræ eiusdem vini valebit 12ℨ. numm. Et si 1. mensura posterioris vini valet 15. numm. 1——1ℨ. mens. eiusdem vini valebit 15—15ℨ. numm. Igitur 1ℨ. mens. prioris vini, & 1—1ℨ. mens. posterioris valebunt 15—3ℨ. numm. quod pretium æquiualebit 13. numm. Additis ergo 3ℨ. vtrobique, erit æquatio inter 3ℨ+13. & 15. Ablatisque 13. vtrinque, inter 3ℨ. & 2. Diuisis ergo 2. per 3. fiet 1ℨ. $\frac{2}{3}$. De viliori igitur vino recipiendæ sunt $\frac{2}{3}$. vnius mensuræ, & de præstantiori $\frac{1}{3}$. vnius mensuræ quod sic probatur.

Prioris vini	mens. 1	numm. 12	mens. $\frac{2}{3}$?	valent	numm. 8
Posterioris vini.	1	15	$\frac{1}{3}$?	valent	5

Nam $\frac{2}{3}$. vnius mensuræ prioris vini valebunt 8. numm. & $\frac{1}{3}$. mensuræ vini posterioris, 5. numm. atque idcirco 1. mensura mixta 13. numm.

VI. 6 *Mensura vini valet 10. numm. Quantum ergo aquæ commiscendum est vni mensuræ, vt 1. mensura mixta valeat 7. numm. ?*

PONE 1ℨ mensuræ aquæ. Deinde institue regulam Trium hoc modo.

mens. vini.	mens. aquæ	numm.	mens. mixta	numm.
1+1ℨ		10	1? valet	$\frac{10}{1+1\text{ℨ}}$.

Nam

Nam si 1. mensura vini vna cum 1ℨ. mensuræ aquæ valet 10. numm. 1. mensura ex vino & aqua mixta valebit $\frac{10}{1+1\text{ℨ}}$. Itaque æquatio erit inter $\frac{10}{1+1\text{ℨ}}$. & 7. quæ per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 10. & 7+7ℨ. Ablatisque 7. vtrobique, æquatio erit inter 3 & 7ℨ. Diuisisque 3. per 7. fiet 1ℨ $\frac{3}{7}$. Ac tantum æquæ vnius mensuræ commiscendum est cum 1. mensura vini, vt 1 mensura mixta valeat 7. numm. quod ita probatur.

mens. ex vino & aqua $1\frac{3}{7}$.	numm. 10	mens. 1?	valet	numm. 7

Nam si 1. mensura vini cũ $\frac{3}{7}$. vnius mensuræ aquæ valet 10. numm. 1. mensura sola mixta valebit 7. numm.

VII. 7 *Sunt in quodam vasculo 20. mensuræ vini, quarum quælibet valet 12. numm. Infunditur deinde vasculo illi aqua, donec vasculum vino illo & aqua repleatur. Et tunc 1. mensura mixta valet 10. numm. Quæritur, quanta sit capacitas illius vasculi.*

PONE mensuras 20+1ℨ. vnius mensuræ. Deinde institue regulam Trium sic.

mens. vini.	mens. aquæ.	numm.	mens. mixta	numm.
20+	1ℨ	240	1? valet	$\frac{240}{20+1\text{ℨ}}$.

Nam si 1. mensura vini valet 12. numm. mensuræ vini 20+1ℨ. mens. aquæ simul valebunt 240. numm. Igitur 1. mensura mixta valebit $\frac{240}{20+1\text{ℨ}}$. numm. atque ita inuenta est æquatio inter $\frac{240}{20+1\text{ℨ}}$. & 10. quæ per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 240. & 200+10ℨ. Et ablatis 200. vtrinque, manebit æqualitas inter 40. & 10ℨ. Diuisisque 40. per 10. fiet 1ℨ. 4. atque tot mens. aquæ infusæ sunt illi vasculo, ita vt totum vasculum capiat 24. mensuras. quod probatur sic.

mens. vini & aquæ 24	numm. 240	mens. 1?	valet	numm. 10.

Nam si 24. mensuræ ex vino & aqua valent 240. numm. propterea quod 1. mens. vini valet 12. numm. valebit 1. mens. mixta 10. numm.

VIII. 8 *Duo tabellarij ex duabus ciuitatibus, inter quas intercipiuntur Leucæ 140. eodem die proficiscuntur, alter versus alterum. Vnus quolibet die conficit 8. Leucas, alter vero 6. Leucas. Quæstio est, quando conuenient, sibique mutuo occurrent.*

PONE in 1ℨ. dierum. & institue regulam Trium sic.

Dies 1	Leucæ 8	Dies 1ℨ?	Leucæ 8ℨ.
1	6	1ℨ?	6ℨ.

Prior ergo in 1ℨ. dierum conficiet 8ℨ Leucarum. Et posterior 6ℨ. atque ambo simul emensi erunt 14 ℨ. leucarum, hoc est, leucas 140. Est ergo æquatio inter 14ℨ. & 140. Diuisis igitur 140. per 14. fiet 1ℨ. 10. Atque decimo die peracto conuenient. quod sic probo.

Dies 1	Leucæ 8	Dies 10?	Leucæ 80
1	6	10?	60

Nam prior in 10. diebus conficiet 80. leucas, & posterior 60. quæ simul totum spatium intermedium leucarum 140. constituunt.

IX. 9 *Quidam permutans 568. aureos, pro eis recipit quatuor genera monetarum. Primi generis monetæ 7. faciunt 1. aur. Secundi generis, 18. Tertij, 21. & quarti 28. Recipit autem ex quolibet genere eundem numerum monetarum. Quæritur, quotnam monetas cuiuslibet generis accipiat.*

PONATVR 1ℨ. monetæ cuiuslibet, & regula Trium instituatur quater sic.

Mon.	aur.	Mon.	aur.
7	1	1ℨ?	$\frac{1}{7}$ℨ
18	1	1ℨ?	$\frac{1}{18}$ℨ
21	1	1ℨ?	$\frac{1}{21}$ℨ
28	1	1ℨ?	$\frac{1}{28}$ℨ

Nam si 7. mon. faciunt 1. aur. 1ℨ. mon. faciet $\frac{1}{7}$ℨ. aur. & sic de reliquis. Faciunt autem fractiones in quarto loco descriptæ numerum $\frac{71}{252}$ℨ. aur. æqualem numero 568. aur. Diuisis ergo 568. per $\frac{71}{252}$. fiet 1ℨ. 2016. atque tot monetas ex quolibet genere recipiet. quod sic probo.

Mon.	aur.	Mon.	aur.
7	1	2016?	288
18	1	2016?	112
21	1	2016?	96
28	1	2016?	72

Nam 2016.mon.primi generis faciunt 288.aur. Secundi autem generis, 112.aur. Tertij, 96.aur. & quarti 72.aur. qui omnes faciunt summam 568.aur.

X. 10 *Mercator quidam emit lanam, & ceram pro 124. aur. Constant autem 100. libræ lanæ 7. aur. & 100. lib. ceræ 14. aur. emit q. duplo plures lib. lanæ, quam ceræ. Quæstio est, quot lib. vtriusq; rei emerit.*

PONE 1☍.librarum ceræ, & 2☍ librarum lanæ: & instituo bis regulam Trium, hoc modo.

lib.	aur.	lib.	aur.
100 lanæ	7	2☍ lib. lanæ?	$\frac{14}{100}$☍
100 ceræ	14	1☍ lib. ceræ?	$\frac{14}{100}$☍

Erit ergo inuenta æquatio inter $\frac{28}{100}$☍ aur. & 124.aur. Diuisisque 124.per $\frac{28}{100}$. fiet 1☍.442$\frac{6}{7}$. atque tot lib. ceræ emit, & lanæ lib. 885$\frac{5}{7}$. quod ita probatur.

lib.	aur.	lib.	aur.
100 lanæ	7	885$\frac{5}{7}$?	62
100 ceræ	14	442$\frac{6}{7}$?	62

Ita enim pro lana, ac cera expendit 124.aur.

XI. 11 *Emit quidam aliquot vlnas panni, quas iterum vendidit. Emit autem 5. vlnas pro 7. aur. & vendidit 7. vlnas pro 11. aur. lucratusque est hac mercatura 100. aur. Quæritur, quotnam fuerint illæ vlnæ.*

PONE 1☍ vlnarum, & instituo regulam Trium bis.

vlnæ	aur.	vlnæ	aur.
5	7	1☍?	$\frac{7}{5}$☍
7	11	1☍?	$\frac{11}{7}$☍

Vides, si $\frac{7}{5}$☍ aur. quos expendit, detrahantur ex $\frac{11}{7}$☍ aur. quos recepit, relinqui $\frac{6}{35}$☍ aur. pro lucro. Est ergo æquatio inter $\frac{6}{35}$☍ aur. & 100.aur. Diuisisque 100.per $\frac{6}{35}$. fiet 1☍.583$\frac{1}{3}$. vln. atq; tot fuerunt vlnæ emptæ atque venditæ. quod sic probo.

vlnæ	aur.	vlnæ	aur.
5	7	583$\frac{1}{3}$?	816$\frac{2}{3}$.
7	11	583$\frac{1}{3}$?	916$\frac{2}{3}$.

Vbi cernis, eum lucratum esse 100.aureos.

XII. 12 *Emit quidam aliquot vlnas panni, expendens 11. aur. pro 7. vlnis. Et totum pannum iterum vendidit, coactusque est dare 5. vlnas pro 7. aureis: perdiditque in hac mercatura 100. aur. Quæritur, quot vlnas emerit, ac vendiderit.*

Pone 1☍. vln. &c. vt prius. & instituo regulam Trium bis, hoc modo.

vln.	aur.	vln.	aur.
7	11	1☍?	$\frac{11}{7}$☍
5	7	1☍?	$\frac{7}{5}$☍

Igitur si $\frac{7}{5}$☍ aur. quos recepit, detrahantur ex $\frac{11}{7}$. ☍ aur. quos expendit, emerget damnum $\frac{6}{35}$☍ aur. eritque æquatio inter $\frac{6}{35}$☍ aur. & 100.aur. Diuisis ergo 100.per $\frac{6}{35}$. fiet 1☍ 583$\frac{1}{3}$ vln. atque tot vlnæ fuerunt emptæ, ac venditæ. quod sic probo.

vln.	aur.	vln.	aur.
7	11	583$\frac{1}{3}$?	916$\frac{2}{3}$.
5	7	583$\frac{1}{3}$?	816$\frac{2}{3}$.

Vides ergo eum damnum fecisse 100.aureorum.

XIII. 13 *Libræ 100. ceræ emuntur 17. aureis. Quæritur, quot libræ vendendæ sint pro 1. aur. vt 102. aur. lucrentur 18. aur.*

Pone 1☍ librarum, & instituo regulam Trium bis.

aur.	lib.	aur.	lib.
17	100	102?	600
1	1☍	102+18?	120☍

Nam

Nam 102.aur. dabunt 600.lib. Et si pro 1.aur. datur 1☍.lib. dabuntur 120☍.lib. pro aur. 102+18. quæ 120☍. æquales sunt 600.lib. quia tota cera venditur.

Eritque æquatio inter 120☍.lib. & 600.lib. Diuisis ergo 600.per 120.fiet 1☍.5.lib. Atque tot libræ vendendæ sunt pro 1.aur. vt in 600.libris fiat lucrum 18.aur. pro 102.aur. quod sic probo.

lib.	aur.	lib.	aur.
100	17	600?	102
5	1	600?	120

Vbi in priori exemplo vides 600.lib. facere 102.aur. In posteriori vero 120.aur. id est, 102+18.

14 *Emit quidam 100. lib. ceræ pro 17. aur. in quibus vendendis fecit damnum 18. aur. pro 102. aur.* XIIII. *Quæritur quot libras pro 1. aur. dederit.*

Pone 1☍. librarum, &c.

aur.	lib.	aur.	lib.
17	100	102?	600
1	1☍	102−18?	84☍

Eritque æquatio inter 84☍.lib. & 600.lib. Diuisis igitur 600.per 84.fiet 1☍.7$\frac{1}{7}$.lib. Atque tot lib. dedit pro 1. aur. vt damnum fecerit 18.aur. in 102.aur. & 600.libris. quod sic probo.

lib.	aur.	lib.	aur.
100	17.	600?	102
7$\frac{1}{7}$	1	600?	84

Vbi vides expensos fuisse 102.aur. pro 600.lib. Et pro eisdem receptos fuisse 84.aur. id est, 102−18.

15 *Tres mercatores ineunt societatem. Primus ponit 40. aur. per 2. menses. Secundus 20. aur. per 5. menses Tertius summam quandam aur. per 3. menses. Lucrati sunt autem 3276. aur. de quibus primo obtigerunt 1040. aur. Secundo 1300. & tertio 936. Quæritur quot aureos tertius posuerit.* XV.

Ponatur 1☍ aureorum.

aur.	mens.	lucrum aur.	aur.
40	2	3276	1040 primi
20	5	3276	1300 secundi
1☍	3	3276	936 tertij

Per multiplicationem aureorum in tempus, reducentur numeri ad regulam Trium hoc modo.

252	80	3276?	1040 primi
	100	3276?	1300 secundi
	3☍. vel	3276?	936 tertij
	72		

VT autem inueniatur æquatio, & pretium 1☍. inueniendus est numerus primus in regula Trium, qui nimirum summa est trium numerorum 80. 100. & 3☍. hoc modo. Quoniam ita se habet primus ille numerus inueniendus ad 80. vt 3276. ad 1040. [a] fiet idem numerus ex primo in quartum, qui ex secundo in tertium. [a] 19. sept. Si ergo 262080. productus ex secundo 80. in tertium 3276. diuidatur per quartum 1040. exibit primus 252. Ex quo si dematur summa ex 80. & 100. collecta, nimirum 180. remanebit pretium 3☍. videlicet 72. Diuisis ergo 72. per 3. fiet 1☍ 24. numerus aur. quos tertius posuit. quæ pecunia ducta in 3. menses facit 72. &c.

Pretium 1☍. hoc etiam modo reperietur. Inuento primo numero 252. [b] erit numerus 235872. factus [b] 19. sept. ex primo 252. in quartum 936. æqualis numero 98282☍ facto ex secundo 3☍. in tertium 3276. Diuisis igitur 235872. per 9828. fiet 1☍. 24. vt prius.

16 *Tres socij volunt inter se distribuere 455. aur. ea conditione, vt quoties primus recipit 2. toties secundus recipiat 3. Et quoties secundus recipit 4. toties tertius recipiat 5. Quæritur, quot aureos quilibet recipiat ex illa summa 455. aureorum.* XVI.

PONE primum accipere 1☍. Et secundum 1$\frac{1}{2}$☍. vt habeat numerum sesquialterum ad primum. Tertium vero 1$\frac{7}{8}$☍. vt habeat numerum sesquiquartum ad secundum. Erit ergo æquatio inter 4$\frac{3}{8}$☍. & 455. Diuisis igitur 455. per 4$\frac{3}{8}$. fiet 1☍ 104. numerus primi. Secundus ergo accipiet 156 nimirum 1$\frac{1}{2}$☍. Tertius vero 195. nimirum 1$\frac{7}{8}$☍. quod sic probatur. Tres numeri 104. 156. 195. faciunt summam 455. diuidendam. Et quoties 2. sunt in 104. toties 3. sunt in 156. Et quoties 4. sunt in 156. toties 5. sunt in 195. cum idem Quotiens fiat, diuidendo 104. per 2. & 156. per 3. Item diuidendo 156. per 4. & 195. per 5.

1	☍
1	1/2 ☍
1	7/8 ☍

EADEM via tenenda est, si plures socij fuerint: vt si fuerint quatuor, & quoties tertius accipit 6. toties quartus accipiat 7. ponendæ erunt $2\frac{3}{16}2\mathcal{Q}$ pro quarto, vt habeat numerum sesquisextum ad tertium. Si igitur diuidendi sint aurei 21840. erit æquatio inter $6\frac{9}{16}2\mathcal{Q}$. & 21840. Diuisis igitur 21840. per $6\frac{9}{16}$ fiet $12\mathcal{Q}$. 3328. portio primi, quem posuimus accipere $1\mathcal{Q}$. Portio secundi erit $1\frac{1}{2}2\mathcal{Q}$. id est, 4992. Portio tertij erit $1\frac{2}{8}2\mathcal{Q}$. nimirum 6240. Portio denique quarti erit $2\frac{3}{16}2\mathcal{Q}$. hoc est, 7280. quod probabis, vt prius. Nam omnes quatuor portiones faciunt summã diuidendam 21840. & idem Quotiens fit, diuidendo 3328. per 2. & 4992. per 3. Atque idem quoque, diuidendo 4992. per 4. & 6240. per 5. Deniq; idem ẽt, diuidendo 6240. per 6. & 7280. per 7.

1 $2\mathcal{Q}$
$1\frac{1}{2}$ $2\mathcal{Q}$
$1\frac{2}{8}$ $2\mathcal{Q}$
$2\frac{3}{16}$ $2\mathcal{Q}$

XVII. 17 *Habeo quatuor auri fragmenta, quæ æquiualent aureis 164. Et primum in valore duplum est secundi: secundum triplum tertij: & tertium quadruplum quarti. Quæritur valor singulorum fragmentorum.*

PONE quartum, siue minimum $1\mathcal{Q}$. aur. tertium $4\mathcal{Q}$. secundum $12\mathcal{Q}$. & primum $24\mathcal{Q}$. Sunt ergo $41\mathcal{Q}$. æquales 164. aur. Diuisisque 164. per 41. fiet $1\mathcal{Q}$. 4. atque tot aureis æquiualet minimum fragmentum, siue quartum: atque idcirco tertium valebit 16. aur. secundum 48. & primum 96. qui quidem aurei faciunt summam 164. & seruant proportiones in quæstione expressas.

XVIII. 18 *Tres socij conferunt totam suam pecuniam, atque ita colligunt 100. aur. Est autem pecunia primi subdupla pecuniæ secundi: & pecunia secundi subtripla pecuniæ tertij. Quæritur, quantum quisque contulerit.*

PONE primum contulisse $1\mathcal{Q}$. Secundum $2\mathcal{Q}$. & tertium $6\mathcal{Q}$. Eruntq; $9\mathcal{Q}$. æquales 100. aur. Diuisis igitur 100. per 9. fiet $1\mathcal{Q}$. $11\frac{1}{9}$. pecunia primi. Secundi pecunia idcirco erit $22\frac{2}{9}$. Et tertij $66\frac{6}{9}$. quæ tres summæ faciunt 100. aur. seruantque proportiones in quæstione expressas.

XIX. 19 *Moriens quidam testamentum condit, relinquitque 3000. aur. distribuendos inter vxorem, filium & duas filias hac conditione, vt portio filij sit dupla portionis matris: & portio matris dupla quoque portionis vnius filiæ. Quæritur, quanta sit vniuscuiusque portio.*

PONATVR portio vnius filiæ $1\mathcal{Q}$. matris $2\mathcal{Q}$. & filij $4\mathcal{Q}$. Erunt ergo $8.2\mathcal{Q}$. æquales 3000. aur.

Portio filiæ	$1\mathcal{Q}$	id est	375	aur.
filiæ	$1\mathcal{Q}$		375	
matris	$2\mathcal{Q}$		750	
filij	$4\mathcal{Q}$		1500	

Diuisisque 3000. per $8\mathcal{Q}$. fiet $1\mathcal{Q}$. 375. portio vnius filiæ. atque idcirco portio matris 750 & filij 1500.

XX. 20 *Mercator quidam qualibet parte tertia suæ pecuniæ lucratur $\frac{1}{10}$. eiusdem pecuniæ. Deinde qualibet parte tertia eiusdem pecuniæ lucratur $\frac{1}{5}$. lucri prioris. Et sic omnibus computatis, inuenit 864. aur. Quæritur quanta fuerit illa pecunia, & quantum vtrumque lucrum.*

PONATVR $1\mathcal{Q}$ pecuniæ. Ergo primum lucrum fuit $\frac{3}{10}2\mathcal{Q}$. quando quidem quælibet $\frac{1}{3}2\mathcal{Q}$. lucrata est $\frac{1}{10}2\mathcal{Q}$. Deinde secundum lucrum fuit $\frac{2}{5}2\mathcal{Q}$ prioris lucri $\frac{3}{10}2\mathcal{Q}$. nimirum $\frac{9}{100}2\mathcal{Q}$. hoc est, $\frac{1}{20}2\mathcal{Q}$. quandoquidem quælibet $\frac{1}{3}2\mathcal{Q}$ lucrata est $\frac{1}{2}$. prioris lucri. Iam $12\mathcal{Q}$. $\frac{1}{10}2\mathcal{Q}$. & $\frac{1}{20}2\mathcal{Q}$. faciunt summã $1\frac{1}{20}2\mathcal{Q}$. æqualem 864. aur. Diuisis ergo 864. per $1\frac{1}{20}$. fiet $1\mathcal{Q}$. 720. atque tot aureos habuit mercator ille. Ergo lucrum primum $\frac{3}{10}2\mathcal{Q}$. fuit 108. aur. Et lucrum secundum $\frac{1}{100}$. fuit 36. aur. quæ duo lucra cum 720. aur. faciunt 864. aur.

XXI. 21 *Mercator quidam qualibet parte quarta suæ pecuniæ lucratur $\frac{1}{20}$. eiusdem pecuniæ. Deinde qualibet parte tertia eiusdem pecuniæ lucratur $\frac{1}{10}$. summæ ex eadem pecunia, & lucro collectæ. Et sic singulis computatis, inuenit mercator ille 400. aur. Quæritur, quanta fuerit illa pecunia, & quantum vtrumque lucrum.*

PONE pecuniam fuisse $1\mathcal{Q}$. Ergo primum lucrum fuit $\frac{4}{100}2\mathcal{Q}$. hoc est, $\frac{1}{25}2\mathcal{Q}$. Deinde secundum lucrum fuit $\frac{1}{300}2\mathcal{Q}$ siue $\frac{2}{225}2\mathcal{Q}$. nimirum $\frac{6}{1000}$. summæ $\frac{6}{225}2\mathcal{Q}$. ex priori lucro, & $1\mathcal{Q}$. collectæ. Iam $12\mathcal{Q}$. $\frac{1}{25}2\mathcal{Q}$. & $\frac{2}{225}2\mathcal{Q}$ faciunt summam $1\frac{2}{25}2\mathcal{Q}$. æqualem 400. aur. Diuisis ergo 400. per $1\frac{2}{25}$. fiet $12\mathcal{Q}$. $256\frac{16}{39}$. aur. atque tot aur. habuit mercator ille. Primum autem lucrum $\frac{1}{25}2\mathcal{Q}$. fuit aur. $51\frac{11}{39}$. Secundum vero lucrum $\frac{2}{225}2\mathcal{Q}$. fuit $92\frac{4}{39}$. quæ duo lucra cum $256\frac{16}{39}$. faciunt 400. aur.

XXII. 22 *Mercator quidam qualibet parte quarta suæ pecuniæ lucratur $\frac{1}{20}$. eiusdem pecuniæ. Deinde singulis partibus quintis eiusdẽ pecuniæ prioris lucratur $\frac{1}{17}$. eiusdem pecuniæ. Atque ita singulis computatis, inuenit 2136. aur. Quæritur, quanta fuerit illa pecunia, & quantum vtrumq; lucrum.*

PONE pecuniam fuisse $1\mathcal{Q}$. Ergo primum lucrum fuit $\frac{4}{100}2\mathcal{Q}$. siue $\frac{1}{25}2\mathcal{Q}$. Secundum vero $\frac{5}{425}2\mathcal{Q}$. Iam $12\mathcal{Q}$. $\frac{2}{125}2\mathcal{Q}$. & $\frac{5}{425}2\mathcal{Q}$. faciunt summam $1\frac{47}{425}2\mathcal{Q}$. æqualem 2136. aur. Diuisis igitur 2136. per $1\frac{47}{425}$. fiet $12\mathcal{Q}$. 1620. aur. pecunia mercatoris. Ergo primum lucrum $\frac{1}{25}2\mathcal{Q}$. fuit 216. aur. Secundum vero $\frac{5}{425}2\mathcal{Q}$. fuit 300. aur. quæ duo lucra cum 1620. aur. faciunt summam 2136. aur.

23 *Tria poma aurea venduntur 11. denariolis. Quæritur quot poma vendantur pro 572. denariolis.* XXIII.

HÆC quæstio per regulam Trium expedietur hoc modo.

Denar.	pom. aur.	Denar.	pom. aur.
11	3	572?	156.

Per Algebram vero soluetur, si pro quarto numero inueniendo in regula Trium ponatur $12\mathcal{Q}$ pomorum. [a] Et [a] *19. sept.* quia tantum fit ex primo in quartum, quantum ex secundo in tertium, erit numerus $11\mathcal{Q}$ productus ex primo

Denar.	pom. aur.	Denar.	pom. aur.
11	3	572?	$12\mathcal{Q}$

in quartum, æqualis numero 1716. producto ex secundo in tertium. Diuisis ergo 1716. per 11. fiet $12\mathcal{Q}$. 156. numerus pomorum, quæ constant 572. denar. Vides ergo excellentiam Algebræ etiam in quæstionibus regulæ Trium. quod etiam in sequenti exemplo apparebit.

24 *Libræ 47. quarundam mercium constant aur. 30. Quæritur, quanti constabunt 100. libræ.* XXIV.

PONATVR $12\mathcal{Q}$. vt hic vides.

lib.	aur.	lib.	aur.
47	30	100?	$12\mathcal{Q}$

Est ergo æquatio inter $47\,2\mathcal{Q}$. & 3000. Diuisis ergo 3000. per 47. fiet $12\mathcal{Q}$. $63\frac{19}{47}$. aur.

25 *Est massa quædam argenti pondus habens marcarum 7. quarum quælibet continet 5. semiuncias puri argenti, & 11. semiuncias cupri. Commiscetur autem massæ illi liquatæ alia massa cupri puri, ponderis 21. marcarum. Quæritur quantum argenti puri habitura sit quælibet marca illius massæ nouæ 28. marcarum.* XXV.

HIC certum est, pauciores semiuncias puri argenti contineri in 28. marcis, quam in 7. quippe cum semiunciæ in his contentæ distributæ sint æqualiter inter 28. marcas. Et quia in illis 7. ponuntur 35. semiunciæ puri argenti, diuisis his per 28. reperientur in qualibet marca $1\frac{1}{4}$. semiunciæ puri argenti. Si igitur 1 marca pondus habet 16. semiunciarum, erunt in qualibet marca $14\frac{1}{4}$. semiunciæ cupri. Hoc autem ita esse, facile probabitur. Nam pondus 21. marcarum cupri puri, facit 336. semiuncias cupri: Et si accedant 77 semiunciæ in prioribus 7 marcis contentæ, fient semiunciæ cupri 413. qui numerus etiam producitur ex $14\frac{1}{4}$. (quot nimirum semiuncias cupri in qualibet marca inesse diximus) in 28. marcas. Sed vt quæstio hæc soluatur per Algebram, sic stabit exemplum ad regulam Trium inuersam.

arg. mix.	arg. pur.	arg. mix.	arg. pur.
7. marc.	5. semiunc.	28. marc?	semiunc. $12\mathcal{Q}$.

Et quoniam in regula Trium inuersa, numerus factus ex primo in secundum, æqualis est numero facto ex tertio in quartum, propterea quod tertius numerus in regula Trium ordinaria deberet tenere primum locum, vt in Arithmetica practica diximus: erit æquatio inter 35. & $28\mathcal{Q}$. Diuisisque 35. per 28 fiet $12\mathcal{Q}$. puri argenti semiunciæ $1\frac{1}{4}$. vt prius.

26 *Quinque conuictores singulis hebdomadis soluunt 11. aur. quantum ergo soluent 18. conuictores in 40. diebus.* XXVI.

HÆC quæstio spectat ad regulam Trium compositam. quæ ad regulam Trium simplicem reducitur per multiplicationem conuictorum in tempus, vt hic.

Conuict.	Dies	aur.	Conuict.	Dies	aur.
5	7	11	18	40?	$12\mathcal{Q}$

Conuict.	aur.	Conuict.	aur.
35	11	720?	$12\mathcal{Q}$

Nam tantum soluet vnus in duobus diebus, quantum duo in vno. Et tantum vnus in 35. diebus, quantum 5. in septem. atque hæc est ratio, cur dicta multiplicatio fieri debeat. Posito igitur quarto numero $12\mathcal{Q}$. erit æquatio inter $352\mathcal{Q}$. & 7920. Diuisis ergo 7920. per 35. fiet $12\mathcal{Q}$. $226\frac{2}{7}$. aur. quot nimirum 18. conuictores in 40. diebus soluent.

XXVII. 27 *Pro tribus ponderibus æqualibus vehendis per leucas 7. debentur vectori 11. grossi, quorum quilibet valet denariolos 25. Quæro iam, quot similia pondera sint vehenda per 40. leucas pro 400. grossis.*

HÆC etiam quæstio ad regulam Trium compositam pertinet, vt hic vides.

Grossi	Pond.	Leuc.	Grossi	Pond.	Leuc.
11	3	7	400?	12ϱ	40

Pone 12ϱ. Pond. vehendorum, & reduc regulam ad regulam Trium ordinariam per multiplicationem pond. in spatium itinerarium: quandoquidem tantum soluendum est pro 1. pondere per 2. Leucas, quantum pro 2. pond. per 1. Leucam: & tantum per 1. pond. per 21. Leuc. quantum pro 3 pond. per 7 Leuc. quam reductionem

Grossi	Pond.	Grossi	Pond.
11	21	400?	402ϱ

hic cernis. Erit igitur æquatio inter 4402ϱ. & 8400. Diuisis ergo 8400. per 440. fiet 12ϱ. 19 $\frac{1}{11}$. Pond. vehenda per 40. Leucas pro 400 grossis. Nam si pro 3. pond. per 7. Leucas soluuntur 11. grossi, pro 19 $\frac{1}{11}$. pond. per 7. Leucas soluentur 70 grossi. vt hic vides.

Pond.	Grossi	Pond.	Grossi
3	11	19 $\frac{1}{11}$?	70

Deinde si per 7 Leucas soluuntur 70 grossi, per 40 Leucas soluentur 400. grossi, vt hic vides.

Leuc.	Grossi	Leuc.	Grossi
7	70	40?	400

XXVIII. 28 *Tres sartores perficiunt 7. tunicas 14. diebus. Quot igitur diebus duo sartores perficient 8. tunicas?*

Pone 12ϱ. dierum.

Sart.	Dies	Tunic.	Sart.	Dies	Tunic.
3	14	7	2	12ϱ	8

Reductis numeris per multiplicationem ad regulam Trium ordinariam, vt hic.

42 7 2 12ϱ 8

Erit æquatio inter 336. & 14 2ϱ. Diuisis ergo 336. per 14. fiet 12ϱ. 24. dies, in quibus duo sartores 8. tunicas perficient. Nam si 3. sartores in 14. diebus perficiunt 7. tunicas, duo sartores in 14. diebus, nimirum in eodem tempore, perficient 4 $\frac{2}{3}$. tunicas, vt hic cernitur.

Sart.	Tunic.	Sart.	Tunic.
3	7	2?	4 $\frac{2}{3}$.

Deinde si tunicæ 4 $\frac{2}{3}$. absoluuntur 14. diebus, tunicæ 8. absoluentur diebus 24. vt hic constat.

Tunic.	Dies	Tunic.	Dies
4 $\frac{2}{3}$	14	8?	24

XXIX. 29 *Seruo cuidam promisit quidam ciuis pro 12. mensibus mercedem 10. aur. & 1. tunicam. Post 7. autem menses dedit illi tunicam, & 2. aur. Quanti ergo æstimata est tunica illa?*

PONE eius pretium esse 12ϱ. aur. Et dic. Si 12. menses poscunt 12ϱ + 10. aur. quantum postulat 1. mensis? inueniesque $\frac{1\text{ϱ}+10}{12}$. aur. Rursum dic. Si 7. menses poscunt 12ϱ + 2. aur. quantum postulat 1. mensis? inueniesque $\frac{12\text{ϱ}+2}{7}$ aur. vt hic vides.

Menses	Aurei	Mensis	Aurei
12	12ϱ + 10	1?	$\frac{1\text{ϱ}+10}{12}$
7	12ϱ + 2	1?	$\frac{12\text{ϱ}+2}{7}$

Erit ergo æquatio inter $\frac{1\text{ϱ}+10}{12}$ & $\frac{12\text{ϱ}+2}{7}$. cum vterque numerus sit merces 1. mensis, quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 7 2ϱ + 70. & 12 2ϱ + 24. Ablatis ergo 24 vtrinque, erit æquatio inter 7 2ϱ + 46. & 12 2ϱ. Rursumque ablatis 7 2ϱ. vtrobique, inter 46 & 5 2ϱ. Diuisis igitur 46 per 5. fiet 12ϱ. 9 $\frac{4}{5}$. aur. pro pretio tunicæ. Nam hac ratione merces 12. mensium erit 19 $\frac{1}{5}$. aur. nimirum 10. aur. & tunica. Igitur merces 7. mensium erit 11 $\frac{1}{5}$ aur. vt hic vides. nimirum 2. aur. & pretium tunicæ 9 $\frac{4}{5}$. aur.

Menses.	Aur.	Menses.	Aur.
12	19 $\frac{1}{5}$.	7?	11 $\frac{1}{5}$.

30 *Ciuis*

XXX. 30 *Ciuis quidam seruo suo pigro ita mercedem 30. dierum constituit, vt laboranti singulis diebus dare velit 7. grossos: ociantem vero mulctare 5. grossis. Ratione autem inita post 30. dies, seruus ille neque recipit aliquid, neque domino aliquid reddit. Quot igitur diebus laborauit, & quot laborare intermisit?*

PONE 12ϱ. dierum laboris, ideoque 30 —— 12ϱ dierum otij. Et institue regulam Trium bis, hoc modo.

Dies	grossi	Dies	grossi
Laboris 1	7	12ϱ?	72ϱ
Otij 1	5	30 — 12ϱ?	150 — 52ϱ

Quia igitur tantum meruit, quantum demeruit, erit æquatio inter 72ϱ. & 150 — 52ϱ. Additisque 52ϱ vtrobique, inter 12 2ϱ. & 150. Diuisis ergo 150 per 12. fiet 1 2ϱ. 12 $\frac{1}{2}$ dies laboris, & otij 17 $\frac{1}{2}$. quod ita probatur.

Dies	grossos	Dies	grossos
Laboris 1	7	12 $\frac{1}{2}$?	87 $\frac{1}{2}$
Otij 1	5	17 $\frac{1}{2}$?	87 $\frac{1}{2}$

Vbi vides, tantam esse mercedem, quanta est mulcta.

XXXI. 31 *Mercator quidam vendidit 20. libras partim croci, & partim zinziberis, aureis 45. Vendidit autem 1 lib. croci aureis 3. & 1. libram zinziberis $\frac{1}{2}$. aur. Quæstio est, quot libræ croci venditæ sint, & quot zinziberis?*

PONE 12ϱ librarum croci, ideoque 20 —— 12ϱ librarum zinziberis, & institue regulam Trium bis, hoc modo.

lib.	aur.	lib.	aur.
Croci 1	3	12ϱ?	32ϱ
Zinzib. 1	$\frac{1}{2}$	20 — 12ϱ?	$\frac{20-1\text{ϱ}}{2}$

Æquatio igitur est inter summam ex 32ϱ aur. & $\frac{20-1\text{ϱ}}{2}$ aur. collectam, & 45. aur. Est autē illa summa 10 + $\frac{5}{2}$ 2ϱ aur. (Nam $\frac{20-1\text{ϱ}}{2}$ æquiualent numero 10 — $\frac{1}{2}$ 2ϱ. cui si addantur 32ϱ aur. fit summa 10 + $\frac{5}{2}$ 2ϱ.) Igitur æquatio est inter aur. 10 + $\frac{5}{2}$ 2ϱ aur. & 45. aur. Ablatisq; 10. aur. vtrobique, inter $\frac{5}{2}$ 2ϱ. & 35. Diuisis igitur 35 per $\frac{5}{2}$. fiet 12ϱ. 14. Atque tot lib. croci venditæ sunt, ac proinde 6. lib. zinziberis. quod ita probatur.

lib.	aur.	lib.	aur.
Croci 1	3	14?	42
Zinzib. 1	$\frac{1}{2}$	6?	3

Vbi vides ex pretio 14 lib. croci, & 6 lib. zinziberis colligi 45 aureos.

XXXII. 32 *Negociator quidam habet duo genera monetarum numero 560. quæ æquiualent 160. aureis. Quædam illarum monetarum valent $\frac{1}{3}$. aur. & reliquarum quælibet $\frac{1}{4}$. aur. Quæritur numerus priorum, ac posteriorum.*

PONE 12ϱ. priorum, & posteriorum 560 — 12ϱ. & institue regulam Trium bis, hoc modo.

Monet.	aur.	Monet.	aur.
1	$\frac{1}{3}$	12ϱ?	$\frac{1}{3}$ 2ϱ
1	$\frac{1}{4}$	560 — 12ϱ?	$\frac{560-1\text{ϱ}}{4}$

Quarti numeri inuenti æquiualent 160. aur. Summa illorum numerorum facit aur. 140 + $\frac{1}{12}$ 2ϱ. (Nam $\frac{560-1\text{ϱ}}{4}$. æquiualent numero 140 — $\frac{1}{4}$ 2ϱ. cui si addatur $\frac{1}{3}$ 2ϱ. fit summa 140 + $\frac{1}{12}$ 2ϱ.) Est igitur æquatio inter aur. 140 + $\frac{1}{12}$ 2ϱ. & 160 aur. Ablatisque 140 vtrinque, inter $\frac{1}{12}$ 2ϱ & 20. Diuisis igitur 20 per $\frac{1}{12}$. fiet 12ϱ. 240. atque tot monetæ sunt prioris generis, quarum singulæ valent $\frac{1}{3}$. aur. posterioris autem generis, quarum singulæ valent $\frac{1}{4}$. aur. sunt 320. quod ita probatur.

Monet.	aur.	Monet.	aur.
1	$\frac{1}{3}$	240?	80
1	$\frac{1}{4}$	320?	80

Vbi cernis, numeros in quarto loco positos facere 160. aur.

33 *Qui-*

XXXIII. 33 *Quidam lanio boues emit, qui interrogatus, quanti vnum emerit, respondit: Quanto 10. boues emi pluris 40. aureis, tanto 18. boues emissem pluris 96. aureis. Quæritur de pretio.*

HÆC quæstio soluetur per modum regulæ Algebræ sine numeris Cossicis, & sine positione 12ℨ. quod sane peregregium videri possit. quod etiam in proximis tribus quæstionibus, quæ sequuntur, faciemus. Quoniam igitur boues 10 — 40. aur. excessus est pretij 10. boum supra 40 aur. quippe cum dicat lanio, se amplius 40 aur. expendisse, quos non debuisset expendere. Item boues 18 — 96. aur. excessus est pretij 18. boum supra 96 aur. quos non debuisset expendere. atque hi duo excessus æquales ponuntur: erit æquatio inter boues 10 — 40 aur. & boues 18 — 96 aur. Additisque 96. aur. vtrobique, inter boues 10 + 56 aur. & boues 18. (Nam ex 96. additis ad — 40. fit summa + 56.) Et ablatis 10 bobus vtrinque, inter 56 aur. & 8. boues. Diuisis ergo 56 per 8. fiet pretium 1 bouis 7 aur. quod ita probatur. 10 boues valebunt 70 aur. ablatisque 40 aur. quos vltra iustum pretium expendit, remanent aur. 30 pro pretio 10 boum. Item 18 boues valebunt 126 aur. detractisque 96 aur. quos non debuerat expendere, remanent similiter 30 aur. pro pretio 18 boum.

Si dixisset lanio ille, se 10 boues tanto emisse pluris 40 aur. quanto emere potuisset 18 boues minoris 96 aur. existeret æquatio inter boues 10 — 40 aur. & aur. 96. — 18 bobus. quia ille esset excessus pretij 10 boū vltra 40 aur. hic autem excessus aur. 96. vltra pretium 18 boum. Additis igitur 18 bobus vtrinque, erit æquatio inter 28 boues — 40 aur. & 96 aur. Additisque rursum 40 aur. vtrobique, inter 28 boues. & 136 aur. Diuisis ergo 136 per 28. fiet pretium 1 bouis aur. $4\frac{6}{7}$. quod probatur sic. Boues 10. valebunt aur $48\frac{4}{7}$. & demptis 40. aur. remanent aur. $8\frac{4}{7}$. pro pretio 10 boum. Item 18 boues valebunt aur. $87\frac{3}{7}$. quibus demptis ex 96. remanent similiter aur. $8\frac{4}{7}$. pro pretio 18 boum.

Sic si dicas. Emi 4 grossis —— 3. ouis, 41. oua, erit æquatio inter 4 gros. —— 3. ouis, & 41. oua. Additisq; 3. ouis vtrobique, inter 4. gros. & 44. oua. Diuisis igitur 44 per 4. fiet Quotiens 11. atque tot oua ementur 1 grosso.

Item si dicas. 4 grossi ——3. denar. faciunt 97. denariolos, inuenies 1 gros. facere 25 denar.

Item si dicat quis, 4 aur. + 125 gros. facere aur. 10 $\frac{1}{4}$. Demptis 4 aur. vtrobique, erit æquatio inter 125 gros. & $6\frac{1}{4}$ aur. Diuisis ergo $6\frac{1}{4}$ aur. per 125 gros. fiet Quotiens $\frac{1}{20}$ aur. valor 1 grossi, hoc est, 1 gross. facit $\frac{1}{20}$ vnius aurei. Quod si diuides 125 gross. per $6\frac{1}{4}$ aur. fiet Quotiens 20. atque tot grossi facient 1. aureum.

XXXIV. 34 *Quando 7. vlnæ cuiusdam panni emuntur $4\frac{1}{2}$. aur. emuntur eodem pretio 17. vlnæ aur. 10. gross. $18\frac{4}{7}$. Quæstio est, quot grossi faciant 1. aur.*

QVONIAM eadem est proportio 7. vln. ad $4\frac{1}{2}$. aur. quæ 17 vln. ad aur. 10. gross. $18\frac{4}{7}$. collocabimus hos quatuor numeros proportionales hoc ordine.

vlnæ	aur.	vlnæ	aur. gross.
7	$4\frac{1}{2}$.	17?	10. $18\frac{4}{7}$.

[a] 19. sept. Et quia tantum fit ex primo in quartum, quantum ex secundo in tertium; erit æquatio inter 70. aur. + 130 gross. & $\frac{153}{2}$. aur. siue $76\frac{1}{2}$. aur. Ablatisque 70. aur. vtrobique, inter 130 gross. & $6\frac{1}{2}$. aur. Diuisis ergo 130 per $6\frac{1}{2}$. fiet Quotiens 20. atque tot grossi æquiualent 1. aureo.

XXXV. 35 *Quidam recipit à mercatore crocum pro 10. aur. Deinde rursum ab eodem accepit 24. lib. croci. Tandem reddit mercatori 30. lib. croci, & mercator, supputato pretio croci, restituit ei 14. aur. Quæritur pretium 1. lib. croci.*

HIC vides 10. aur. + 24 lib. esse totum debitum, quod emptor mercatori debet. Similiter 30. lib. — 14. aur. Est ergo æquatio inter 10 aur. + 24 lib. & 30 lib. — 14. aur. Additisque 14. aur. vtrobique, inter 24 aur. + 24 lib. & 30 lib. Ablatisque 24 lib. vtrinque, inter 24 aur. & 6 lib. Diuisis igitur 24 per 6 fiet Quotiens 4. atque tot aurei faciunt pretium 1. libræ. quod sic probatur.

Pro 10 aur. emuntur libræ $2\frac{1}{2}$. atque ita emptor recepit à mercatore lib. $26\frac{1}{2}$. quæ valent 106 aur. Si igitur mercatori restituantur 30 lib. debebit mercator emptori lib. $3\frac{1}{2}$. cum hic solum receperit lib. $26\frac{1}{2}$. Valent autem $3\frac{1}{2}$. lib. aur. 14. quos mercator emptori restituit.

XXXVI. 36 *Ciuis quidam inuenit, nescio quot, pauperes ante ianuam domus suæ: quibus è denariolis, quos in manu habet, septenos erogat denariolos. quo facto, supersunt ei in manu 24. denarioli. Quod si cuilibet dare voluisset 9. defuissent illi 32. denarioli. Quæritur, quot pauperes fuerint, & quot denariolos ciuis ille habuerit in manu.*

HIC vides, 7. summas denariolorum, quarum quælibet æqualis est numero pauperum, + 24 denar. æquales esse toti numero denariolorū, quos ciuis ille in manu habebat: propterea quod tot denarioli, quot sunt pauperes, vnam summā constituunt; ac proinde toties 7. denarioli, quot sunt pauperes, constituent 7. summas. Eodem modo 9. summæ denariolorum, quarum quælibet æqualis est eidem numero pauperum, — 32. denar. æquales erunt toti numero denariolorum, quos ille ciuis habebat in manu. Ergo æquatio erit inter 7. summ. + 24. & 9. summ. —— 32. Additisq; 32. vtrinque, inter 7. summ. + 56. & 9. summ. Ablatisq; 7. summ. ex 9. inter 56. & 2. summ. Diuisis ergo 56 per 2. fiet Quotiens 28. numerus pauperum. Nam si cuilibet dentur 7. denar. erogati erunt 196. denar. Et quia tunc superfuerunt 24. denar. habuit ciuis ille in manu 220. denar. Quod si cuilibet dare voluisset 9. denar. oportuisset illum habere in manu 252. denar. Defuissent ergo illi 32. denarioli.

37 *Pro 70. summis librarum quarundam mercium penditur vectigal 1. summa — 32. aur. Et pro 200. summis penditur 1. summa + 20. aur. Quæritur, quanti 1. summa constet.* XXXVII.

PONE 12ℨ aur. & institue regulam Trium bis, hoc modo.

Summæ	aur.	Summa	aur.
70	12ℨ — 32	1?	$\frac{12ℨ-32}{70}$
200	12ℨ + 20	1?	$\frac{12ℨ+20}{200}$

Nam si pro 70. summ. penditur vectigal 12ℨ — 32 aur. pro 1. summa pendetur $\frac{12ℨ-32}{70}$ aur. &c. Atque ita erit æqualitas inter $\frac{12ℨ-32}{70}$ aur. & $\frac{12ℨ+20}{200}$ aur. cum vterque numerus sit vectigal 1. summæ. Hæc æquatio per multiplicationem in cruçem reducitur ad hanc inter 2002ℨ — 6400 aur. & 70 2ℨ + 1400 aur. Additis igitur 6400. vtrobique, erit æquatio inter 2002ℨ & 702ℨ + 7800. Ablatisq; 702ℨ vtrinque, inter 1302ℨ & 7800. Diuisis ergo 7800 per 130. fiet 12ℨ. 60 aur. pro pretio vnius summæ. quod sic probatur. Pro 70 summis pendetur vectigal 28 aur. nimirum 12ℨ — 32 aur. Et pro 200. summis pendetur vectigal 80 aur. nimirum 12ℨ + 20 aur. vt hic apparet.

Summæ	aur.	Summæ	aur.
70	28	200?	80

38 *Vlnæ 10. panni rubri cum 4. vlnis panni nigri constant aur. 88. atque eodem pretio 2. vlnæ panni rubri cum 4. vlnis panni nigri constant aur. 32. Quæstio est de pretio 1. vlnæ.* XXXVIII

PONATVR 12ℨ pretium 1. vlnæ panni rubri. Constabuntque 10 vlnæ 10 2ℨ. ac proinde 4 vlnæ panni nigri constabunt 88 aur. — 102ℨ. Vlnæ vero 2. panni rubri constabunt 22ℨ. ideoque 4 vlnæ panni nigri, 32 aur. — 22ℨ. Erit ergo æquatio inter 88. aur. — 102ℨ & 32 aur. — 22ℨ. cum vterque numerus sit pretium 4 vlnarū panni nigri. Additis igitur 102ℨ vtrobiq;, erit æquatio inter 88 aur. & 32 aur. + 82ℨ. Ablatisq; 32. aur. vtrinque, inter 56 aur. & 82ℨ. Diuisis ergo 56 per 8. fiet 12ℨ. 7. aur. pro pretio vnius vlnæ panni rubri. quod probatur. Nam 10 vlnæ valebunt aur. 70. propterea quæ 4. vlnæ panni nigri, aur. 18. qui cum 70. faciunt 88. aur. Igitur 1 vlna panni nigri valebit aur. $4\frac{1}{2}$. Atque hoc pretio 2 vlnæ panni rubri cum 4. vlnis panni nigri valebunt aur. 32.

QVOD si 10. vlnæ panni rubri cum 4 vlnis panni nigri constent aur. 88. atque eodem pretio 2 vlnæ panni rubri cum 6 vlnis panni nigri constent aur. 41. constabunt 4. vlnæ panni nigri aur. 88 — 102ℨ. Et 6. vlnæ panni nigri, aur. 41 — 22ℨ. si nimirum ponatur 12ℨ. pro pretio 1 vlnæ panni rubri, vt prius. Sed non erit æquatio inter aur. 88 — 102ℨ. & aur. 41 — 22ℨ. cum prior numerus sit pretium 4 vlnarum panni nigri, posterior vero 6 vlnarum. Oportet ergo prius inuestigare pretium 4 vlnarum ex pretio 6 vlnarum, per regulam Trium, hac ratione.

Vlnæ	aur.	Vlnæ	aur.
6	41 — 22ℨ	4?	$\frac{164-8ℨ}{6}$

Inuenieturque 4 vlnarum pretium $\frac{164-8ℨ}{6}$ aur. atque ita inuenta erit æquatio inter aur. 88 — 102ℨ & aur. $\frac{164-8ℨ}{6}$. quæ per multiplicationem in cruçem reducitur ad hanc inter aur. 528 — 602ℨ. & aur. 164 — 82ℨ. Additisque 602ℨ vtrobique, inter 528 aur. & aur. 164 + 522ℨ. Et ablatis 164 aur. vtrinque, inter 522ℨ. & 364 aur. Diuisis ergo 364 per 52. fiet 12ℨ. 7 aur. pro pretio 1 vlnæ panni rubri, veluti prius.

ET si 10 vlnæ panni rubri cum 4 vlnis panni nigri constarent 88 aur. vt prius, sed 2 vlnæ panni rubri cum 4 vlnis panni nigri valerent tantum 20 aur. inuenires pretium 12ℨ. $8\frac{1}{2}$ pro pretio 1 vlnæ panni rubri. quod probare potes. Nam 10 vlnæ panni rubri valebunt 85 aur. & 4 vlnæ panni nigri, aur. 3. ideoque 1 vlna $\frac{3}{4}$ aur. Atque ita 2 vlnæ panni rubri valebunt aur. 17. qui cum 3 aur. nimirum cum pretio 4 vlnarum, faciunt 20 aur.

39 *Mercator in tribus nundinis eandem aureorum summam exponens, lucratus est in singulis $\frac{1}{8}$. suæ summæ aureorum. Deinde ad alias se conferens nundinas lucratus est $\frac{1}{10}$. eiusdem suæ summæ priori lucro auctæ. Atque ita deprehendit se habere 1287. aur. Quæritur summa aureorum, quos initio habuit.* XXXIX.

PONATVR 12ℨ. Et quia in singulis nundinis lucratus est $\frac{1}{8}$ 2ℨ. habebit post illas tres nundinas aur. $1\frac{3}{8}$ 2ℨ hoc est, $\frac{11}{8}$ 2ℨ. Deinde quia cum $\frac{11}{8}$ 2ℨ lucratus est $\frac{1}{10}$ 2ℨ. id est, $\frac{33}{80}$ 2ℨ. si hoc lucrum ad $\frac{11}{8}$ 2ℨ adiicitur, fiet summa $\frac{1144}{640}$ 2ℨ. quam vltimo loco habuit. quæ æqualis est 1287 aur. Diuisis ergo 1287 per $\frac{1144}{640}$. fiet 12ℨ. 720 summa aureorum illius mercatoris. Nam eius $\frac{1}{8}$. quas in tribus nundinis est lucratus, sunt 270. aur. qui cum 720. faciunt 990 aur. cum quibus tandem lucratus est $\frac{1}{10}$. nimirum $\frac{2970}{10}$. hoc est, 297 aur. qui cum 990. faciunt aur. 1287.

IN numeris abstractis proponeretur hæc quæstio hunc in modum. Inuenire numerum, qui cum $\frac{1}{8}$. ipsius, & cum $\frac{1}{10}$. huius summæ faciat 1287. Hic enim numerus inuenietur 720. &c.

XL. 40 *In exercitu Imperatoris peditum numerus octuplo maior est numero equitum. In hos distribuuntur aur.392000. ita vt quini singulis peditibus, & 16. cuilibet equiti dentur. Quæritur, quot sint pedites, & quot equites.*

PONATVR 1☍ equitum, ideoque 8☍ peditum, instituaturque regula Trium bis, hoc modo.

	Eques	aur.	Equitum	aur.
	1	16	1☍?	16☍
Pedes	1	5	8☍?	40☍

Erunt igitur 56☍ aur. æquales 392000 aur. Quare diuisis 392000 per 56. fiet 1☍. 7000. numerus equitum. ideoque pedites fuerunt 56000. octies plures. Nam ita distributi erunt equitibus aur. 112000. & peditibus aur. 280000. qui cum illis faciunt 392000. aur.

XLI. 41 *Tres milites prædam quandam aureorum æqualiter inter se diuidere volebant. Sed oborta lite, vt fit, ad manus ventum est, & tantum quisque rapuit, quantum per vim potuit. Deinde lite composita, numerarunt singuli pecunias suas, ac tandem deprehenderunt, primum acceptis 5. à secundo, habere numerum æqualem numero aureorum, qui secundo supersunt: Secundum vero, acceptis 7. à tertio, habere numerum æqualem residuo tertij: Tertium denique, acceptis 9. à primo, habere numerum triplum eius, qui primo supererat. Quæritur summa aureorum in illa præda repertorum, & quantum quisque rapuerit.*

PONE primum rapuisse 1☍. Acceptis ergo 5. à secundo, habuit 1☍ + 5. qui numerus æqualis dicitur esse residuo secundi. Antequam secundus igitur dedit 5. primo, habuit 1☍ + 10. Acceptis autem 7. à tertio, habuit 1☍ + 17. ac tantundem fuit residuum tertij. Igitur antequam tertius dedit 7. secundo, habuit 1☍ + 24. Acceptis vero 9. à primo, habuit 1☍ + 33. qui numerus triplus esse dicitur eius, qui primo remanet, hoc est, 1☍ − 9. Ergo huius triplum 3☍ − 27. æquale est 1☍ + 33. Additisque 27. vtrobique, erit æquatio inter 1☍ + 60. & 3☍. Ablataque 1☍ vtrinque, inter 60. & 2☍. Diuisis ergo 60 per 2. fiet 1☍. 30. numerus primi. Numerus autem secundi, qui inuentus est 1☍ + 10. fuit 40. Tertius autem, qui inuentus est, rapuisse 1☍ + 24. habuit 54. & summa aureorum fuit 124. quod probare poteris. Nam primus, acceptis 5. à secundo, habebit 35. quot nimirum secundo supersunt. Et secundus, acceptis 7. à tertio, habebit 47. quot videlicet tertio supersunt. Tertius denique, acceptis 9. à primo, habebit 63. qui numerus triplus est residui primi, nimirum 21. Iam si 124. aur. in tres æquales partes distribuantur, obuenient cuique militi 41 $\frac{1}{3}$. aur.

XLII. 42 *Quatuor socij marsupium inuenerunt aureis plenũ, è quibus quilibet partem forte fortuna accepit. Sed cum singuli suos aureos numerarent, cognouerunt, primum, acceptis 25. à secundo, habere numerum æqualem residuo secundi: Secundum vero, acceptis 30. à tertio, habere triplum residui tertij: Tertium autem, acceptis 40. à quarto, habere numerum duplum residui quarti: Quartum denique, acceptis 50. à primo, habere numerum triplum residui primi, ac præterea 5: Quæritur aureorum summa, & quot quisque acceperit.*

PONE primum accepisse 1☍. Acceptis ergo 25. à secundo, habebit 1☍ + 25. ac totidem supererunt secundo, ac proinde secundus, antequam dedit 25. primo, habuit 1☍ + 50. Acceptis autem 30. à tertio, habebit 1☍ + 80. Remanserunt ergo tertio $\frac{1}{3}$☍ + 26 $\frac{2}{3}$. vt ille numerus huius sit triplus: ac proinde tertius antequam dedit 30. secundo, habuit $\frac{1}{3}$☍ + 56 $\frac{2}{3}$. Acceptis autem 40. à quarto, habebit $\frac{1}{3}$☍ + 96 $\frac{2}{3}$. qui numerus duplus esse debet residui quarti: ac proinde quarto tunc superfuerunt $\frac{1}{6}$☍ + 48 $\frac{1}{3}$. Et antequam daret 40. tertio, habuit $\frac{1}{6}$☍ + 88 $\frac{1}{3}$. Hic denique, acceptis 50. à primo, habebit $\frac{1}{6}$☍ + 138 $\frac{1}{3}$. qui numerus, demptis 5. triplus esse debet numeri 1☍ − 50. qui primo supererat. Ergo huius triplum 3☍ − 150. æquale est $\frac{1}{2}$☍ + 133 $\frac{1}{3}$. Additis ergo 150. vtrobique, erit æqualitas inter 3☍ & $\frac{1}{2}$☍ + 283 $\frac{1}{3}$. Ablataque $\frac{1}{6}$☍ vtrinque, inter 2 $\frac{5}{6}$☍ & 283 $\frac{1}{3}$. Diuisis igitur 283 $\frac{1}{3}$ per 2 $\frac{1}{2}$☍. fiet 1☍. 100. numerus primi. Ergo secundus 1☍ + 50. erit 150. Tertius autem $\frac{1}{3}$☍ + 56 $\frac{2}{3}$. erit 90. Quartus denique $\frac{1}{6}$☍ + 88 $\frac{1}{3}$. erit 105. Ita namque primus cum 25. secundi habebit 125. ac tantum etiam remanet secundo. Secundus vero cum 30. tertij habebit 180. numerum scilicet triplum numeri 60. qui tertio supererat. Tertius deinde cum 40. quarti habebit 130. qui numerus duplus est numeri 65. qui quarto supererat. Quartus denique cum 50. primi habebit 155. qui numerus, demptis 5. triplus est numeri 50. qui primo supererat.

100.	1☍
150.	1☍ + 50
90.	$\frac{1}{3}$☍ + 56 $\frac{2}{3}$
105.	$\frac{1}{6}$☍ + 88 $\frac{1}{3}$

XLIII. 43 *In exercitu Cæsareo ex Germanis, Vngaris, & Italis conflato, sunt quidem Germani 25000. Vngari vero faciunt $\frac{1}{2}$. Germanorum, atque Italorum. Itali denique faciunt $\frac{1}{8}$. Germanorum, atque Vngarorum. Quæritur numerus Vngarorum, & Italorum, & quantus sit totus exercitus.*

PONE pro Vngaris 1☍ Ergo Germani simul cum Italis erunt 2☍. Et totus exercitus 3☍. Quia vero Itali faciunt $\frac{1}{8}$. Germanorum vna cum Vngaris: sunt autem Vngari cum Germanis 1☍ + 25000. facient Itali $\frac{1}{8}$☍ + 3125. Quoniam igitur Germani sunt 25000. & Vngari 1☍, atque Itali $\frac{1}{8}$☍ + 3125. erit totus exercitus 1 $\frac{1}{8}$☍ + 28125. æqualis 3☍. Ablatis ergo 1 $\frac{1}{8}$☍. vtrobique, erit æquatio inter 28125. & 1 $\frac{7}{8}$☍. Diuisisque 28125. per 1 $\frac{7}{8}$. fiet 1☍ 15000. numerus Vngarorum. Itali vero erunt 5000. nimirum $\frac{1}{8}$. Germanorum, atque Vngarorum, qui simul faciunt 40000. totusque exercitus erit 45000.

XLIV. 44 *Sunt duo Duces, quorum vnus milites habet pauciores 40. quam alter. Et vterque suis militibus 1200. aur. distribuit, quo facto euenit, vt prioris Ducis milites singuli haberent 5. aur. amplius, quam milites Ducis posterioris. Quæstio est, quot milites vterque Dux habeat, & quot aureos singuli milites accipiant.*

PONATVR 1☍ militum pauciorum, & 1☍ + 40. plurium. Si per hos milites diuidantur 1200. aur. fient Quotientes $\frac{1200}{1☍}$. & $\frac{1200}{1☍+40}$. numeri videlicet aureorum, qui singulis obuenerunt. Et quoniam quilibet priorum habet 5. amplius, quam posteriorum quilibet; si posteriori Quotienti addantur 5. fiet summa $\frac{5☍+1400}{1☍+40}$. (vt in hac formula vides) æqualis priori Quotienti $\frac{1200}{1☍}$. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 1200☍ + 48000. & 5☍ + 1400☍. Ablatisque 1200☍ vtrinque, inter 48000. & 5☍ + 200☍. Et rursum ablatis 200☍ vtrobique, inter 48000 —— 200☍. & 5☍. Diuisisque omnibus per 5. inter 9600 —— 40☍. & 1☍. Semissis numeri radicum est 20. ad cuius quadratum 400. additis 9600. fit numerus 10000. à cuius radice quadrata 100. si auferatur prædicta semissis 20. remanet pretium 1☍. 80. numerus scilicet militum pauciorum. Ergo plures erunt 120. nimirum 40. amplius, quam 80. quod probatur. quia diuisis 1200 per 80. fit Quotiens 15. atque tot aureos singuli militum 80. accipiunt. Diuisis autem 1200 per 120. fit Quotiens 10. numerus videlicet aureorum, quos singuli militum 120. accipiunt. Vbi vides, quemlibet priorum habere 5. amplius, quam quemlibet posteriorum.

1200	5☍ + 200
1	5
1☍ + 40	1☍

1☍ + 40

XLV. 45 *Duæ Societates, quarum altera alteram 4. hominibus superat, parem aureorum summam viritim diuidunt. In singulos minoris Societatis cedunt 8. aurei amplius, quam in singulos maioris. Aureorum autem summa numerum sociorum vtriusque societatis superat aureis 172. Quæritur summa aureorum, ac Sociorum.*

PONATVR pro minore Societate, 1☍ hominum; ac propterea pro maiore, 1☍ + 4. Eritque summa aureorum 2☍ + 176. quæ summa diuisa per 1☍ & per 1☍ + 4. facit Quotientes $\frac{2☍+176}{1☍}$. & $\frac{2☍+176}{1☍+4}$. numeros scilicet aureorum, qui cuilibet obueniunt. Et quia prior Quotiens superat posteriorem 8. aureis: si ad posteriorem addantur 8 aur. fiet summa $\frac{10☍+208}{1☍+4}$ (vt in hac formula vides) æqualis priori Quotienti $\frac{2☍+176}{1☍}$. quę æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 10☍ + 208☍ & 2☍ + 184☍. Ablatis autē 2☍. vtrobique, erit æquatio inter 8☍ + 208☍. & 184☍ + 704. Et rursum ablatis 184☍ vtrinque, inter 8☍ + 24☍ & 704. Et ablatis rursum 24☍ vtrobique, inter 8☍. & 704 —— 24☍. Diuisisque omnibus per 8. inter 1☍ & 88 —— 3☍. Semissis numeri radicum est $\frac{3}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{9}{4}$ additis 88, fiue $\frac{352}{4}$ fit numerus $\frac{361}{4}$. à cuius radice quadrata $\frac{19}{2}$. si demptur prædicta semissis $\frac{3}{2}$. supererit pretium 1☍. $\frac{16}{2}$. hoc est, 8. numerus minoris Societatis: maioris autem numerus Sociorum erit 12. nimirum 1☍ + 4. Summa denique aureorum erit 192. nimirum 2☍ + 176. quod probatur. Nam diuisis aureis 192. per 8. & 12. fiunt Quotientes 24. & 16. quorum ille hunc superat 8. aureis.

2☍ + 176	8☍ + 32
2☍ + 176	8
1☍ + 4	1

1☍ + 4

XLVI. 46 *Mercator quidam ad nundinas ter profectus, prima negotiatione lucratus est summam æqualem suæ pecuniæ, ita vt post primam negotiationem habuerit duplum suæ pecuniæ. Deinde in secunda negotiatione lucratus est radicem quadratam eius dupli, ac præterea 2. aureos. In tertia denique negotiatione lucratus est quadratum totius prioris summæ, & insuper 4. aureos. Atque ita deprehendit se habere 510. aureos. Quæritur summa pecuniæ, quam initio habuit.*

PONE illum post secundam negotiationem habuisse 1☍, cum qua lucratus est in tertia negotiatione eius quadratum, ac præterea 4 aur. ita vt lucrum hoc fuerit 1☍ + 4. Igitur post tertiam negotiationem habuit summam 1☍ + 1☍ + 4. æqualem 510. aur. Ablatis 4. vtrinque, erit æquatio inter 1☍ + 1☍. & 506. Ablataque rursus 1☍ vtrobique, inter 1☍ & 506 —— 1☍. Semissis numeri radicum est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. additis 506. fit numerus 506 $\frac{1}{4}$. hoc est $\frac{2025}{4}$. à cuius radice quadrata $\frac{45}{2}$. si tollatur prædicta semissis $\frac{1}{2}$. remanet pretium 1☍, $\frac{44}{2}$. hoc est, 22. Atque tot aureos post secundam negotiationem habuit. Et quia hoc fuit lucrum radicis pecuniæ, quam post primam negotiationem habuit, præterea 2 aurei: demptis 2 supererunt 20. nimirum lucrum radicis pecuniæ, quam habuit post negotiationem primam. Ergo illa pecunia ponatur 1☍. cuius radix quadrata 1☍. Eritq; lucrum post secundam negotiationē, 1☍ + 1☍ æquale 20. Ablata autem 1☍ vtrobique, erit æquatio inter 1☍, & 20 —— 1☍. Semissis numeri radicum est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. additis 20.

hoc est, $\frac{g}{4}$. fit numerus $\frac{g^2}{4}$. à cuius radice quadrata $\frac{g}{2}$. dempta prædicta semisse $\frac{1}{2}$. supererit pretium $12\mathcal{Q}$. $\frac{g}{2}$. hoc est, 4. Atque tantum fuit lucrum secundæ negotiationis, +2. Ablatis igitur 4. & 2. ex 22. (nimirum ex pecunia, quam post secundam negotiationem habuit) supersunt 16. ac tantum habuit post primam negotiationem, quæ pecunia dicitur esse dupla illius, quam ad nundinas attulit: ac proinde initio habuit 8. aur. quod probatur. Nam post primam negotiationem habuit 16 aur. & post secundam 22. nimirum radicem numeri 16, & præterea 2, hoc est 6. quæ cum 16 faciunt 22. Cum his lucratus est quadratum, nimirum 484. ac præterea 4. atque ex 22. 484. & 4. colligitur summa 510 aur.

XLVII. 47 *Visum est hoc loco artificium, quo Archimedes argenti quantitatem aureæ coronæ permixtam deprehendit, per regulam Algebræ explicare.*

CAPIANTVR igitur duæ massæ, auri vna, & altera argenti, æqualis ponderis cum corona. Deinde vas æneum affabre factum aqua impleatur, & immissa corona, 100 librarum, ponamus effluxisse 65. lib. aquę. Repleto postea vase iterum aqua, immissam massam auri puri 100. librarum eiecisse 60. libras aquę. Denique iterum repleto vase aqua, immissam massam puri argenti eiecisse 90 lib. aquę. Ponatur $12\mathcal{Q}$ lib. argenti contineri in corona, ac proinde lib. auri $100 - 12\mathcal{Q}$. & instituatur regula Trium bis, hoc modo.

	lib.	aquæ	lib.	lib.
Auri	100	60	$100 - 12\mathcal{Q}$?	$\frac{6000 - 60\mathcal{Q}}{100}$
Argenti	100	90	$12\mathcal{Q}$?	$\frac{90\mathcal{Q}}{100}$

Reperies enim libras auri $100 - 12\mathcal{Q}$ eiicere libras aquę $\frac{6000 - 60\mathcal{Q}}{100}$. si 100 lib. auri eiiciunt 60 lib. At $12\mathcal{Q}$ lib. argenti eiicere libras aquæ $\frac{90\mathcal{Q}}{100}$. si 100 lib. argenti eiiciunt 90 lib. aquę. Hæ libræ aquę eiectæ faciunt $\frac{6000 + 30\mathcal{Q}}{300}$ lib. aquę (Quoniam enim fractiones $\frac{6000 - 60\mathcal{Q}}{100}$ & $\frac{90\mathcal{Q}}{100}$ eundem habent denominatorem, satis est addere numeratores, & summę conflatę $6000 + 30\mathcal{Q}$. supponere eundem denominatorem 100) æquales 65 lib. quas corona eiicit. Hęc æquatio inter $\frac{6000 + 30\mathcal{Q}}{100}$. & 65. per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter $6000 + 30\mathcal{Q}$. & 6500. Ablatisque 6000. vtrinque, erit æquatio inter $30\mathcal{Q}$ & 500. Diuisis ergo 500 per 30. fiet $12\mathcal{Q}$. $16\frac{2}{3}$. atque tot libręargenti in corona permixtę fuerunt: aç propterea solum $83\frac{1}{3}$ libræ auri in eadem reperiuntur. quod probatur, vt hic vides.

	lib.	aquæ	lib	aquæ
Argenti	100	90	$16\frac{2}{3}$?	15
Auri	100	60	$83\frac{1}{3}$?	50

Reperies enim libras argenti $16\frac{2}{3}$. eiicere lib. aquę 15. & libras auri $83\frac{1}{3}$. eiicere lib. aquę 50. quę cum 15. faciunt 65. quot videlicet libręaquę effluunt, si corona in aquam imponatur.

SCHOLIVM.

EODEM *modo soluetur hæc quæstio. Sunt tres massæ eiusdem ponderis, nimirum 10. librarum: Vna auri puri, altera argenti puri, & tertia ex auro, argentoque mixta. Prima autem eiicit $\frac{1}{3}$. lib. aquæ: Secunda $\frac{3}{4}$. lib. aquæ: ac tertia $\frac{1}{2}$. lib. aquæ. Nam sic instituetur regula trium bis, si in tertia massa ponatur $12\mathcal{Q}$. lib. argenti, ac proinde auri lib. $10 - 12\mathcal{Q}$.*

Auri	lib. 10.	aquæ lib. $\frac{1}{3}$	$10 - 12\mathcal{Q}$	lib. auri?	aq. lib. $\frac{10 - 12\mathcal{Q}}{3}$
Argenti	lib. 10.	aquæ lib. $\frac{3}{4}$	$12\mathcal{Q}$	lib. argenti.	aq. lib. $\frac{36\mathcal{Q}}{40}$

Nam duo numeri in quarto loco facient summam $\frac{400 + 86\mathcal{Q}}{1200}$. lib. aquæ æqualem $\frac{1}{8}$. lib. aquæ, quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 12000. & $3200 + 688\mathcal{Q}$. Et ablatis 3200. vtrobique, erit æquatio inter 8800. & $688\mathcal{Q}$. Diuisis igitur 8800 per 688 $\mathcal{Q}$. fiet $12\mathcal{Q}$. $1\frac{112}{143}$. atque tot lib. argenti sunt in tertia massa, ac proinde in eadem erunt lib. $8\frac{31}{43}$. auri, quod probatur, vt hic vides.

Argenti	lib. 10	aq. lib. $\frac{3}{4}$	arg. lib. $1\frac{112}{143}$?	aq. lib. $\frac{165}{172}$
Auri	lib. 10	aq. lib. $\frac{1}{3}$	aur. lib. $8\frac{31}{43}$?	aq. lib. $\frac{375}{1290}$

Inuenies argenti lib. $1\frac{112}{143}$. eiicere aquæ lib. $\frac{165}{172}$. & auri lib. 8. $\frac{31}{43}$. eiicere aquæ lib. $\frac{375}{1290}$. quæ cum illis faciunt $\frac{1}{8}$. libr. aquæ.

QVOD si quis desideret magis accuratam rationem deprehendendi quantitatem auri, & argenti in corona illa, vel in tertia massa proxime dicta, is legat eruditissimum libellum Marini Chetaldi Patritij Ragusini, qui inscribitur Promotus Archimedes. Vbi in propos. 17. varias causas errorum, qui in prædicto Archimedis artificio committi possunt, enumerat. Deinde in propos. 18. magis accuratum artificium demonstrat.

XLVIII. 48 *Tres mercatores lucrati sunt 700. aur. quos inter se ita distribuerunt, habita ratione pecuniæ, quam quisque ad negotiationem attulit, vt portio secundi superarit portionem primi aureis 12. portio vero tertij portionem secundi aureis 16. Quæritur, cuiusque portio quanta fuit.*

PONATVR portio primi $12\mathcal{Q}$. eritque propterea portio secundi $12\mathcal{Q} + 12$. & tertij $12\mathcal{Q} + 28$. Hæ tres portiones simul faciunt $32\mathcal{Q} + 40$. æquales 700. Ablatis 40 vtrobiq;, erit æquatio inter $32\mathcal{Q}$. & 660. Diuisis igitur

igitur 660 per 3. fiet $12\mathcal{Q}$. 220. portio primi. Portio autem secundi erit 232. & tertij 248. quę omnes simul faciunt 700.

XLIX. 49 *Tres lusores, quorum quisque certam summam aureorum attulit, eam sortem habuerunt, vt statim primus lucratus sit $\frac{1}{2}$. secundi: Deinde secundus $\frac{1}{3}$. tertij: tertius denique $\frac{1}{4}$. primi. Atque ita contigit, vt singuli haberent 700. aur. Quæritur, quot quisque aureos ad ludum attulerit.*

PONATVR pecunia primi $12\mathcal{Q}$ qui si det $\frac{1}{4}2\mathcal{Q}$ tertio, supererunt ei $\frac{3}{4}2\mathcal{Q}$, quæ cum $\frac{1}{2}$. secundi debent facere 700. Ergo $\frac{1}{2}$ secundi est $700 - \frac{3}{4}2\mathcal{Q}$ atque idcirco huius duplum attulit, nimirum $1400 - 1\frac{1}{2}2\mathcal{Q}$. Nam ita, postquam perdiderit $\frac{1}{3}$ remanebunt illi $700 - \frac{3}{4}2\mathcal{Q}$. qui numerus cum $\frac{1}{3}$. tertij debet facere 700. Ergo $\frac{1}{3}$. tertij est $\frac{1}{4}2\mathcal{Q}$; ideoque ad ludum attulit $2\frac{1}{4}2\mathcal{Q}$, siue $\frac{9}{4}2\mathcal{Q}$. qui si amiserit $\frac{1}{3}$. supererunt ei $\frac{6}{4}2\mathcal{Q}$ quæ cum $\frac{1}{4}$. primi, nimirum cum $\frac{1}{4}2\mathcal{Q}$. habebit $\frac{7}{4}2\mathcal{Q}$ æquales 700. Diuisis igitur 700 per $\frac{7}{4}$ fiet $12\mathcal{Q}$. 400. pecunia videlicet primi. Ac proinde secundus, qui inuentus est attulisse $1400 - 1\frac{1}{2}2\mathcal{Q}$. attulit ad ludum aur. 800. Et tertius aur. 900. nimirum $2\frac{1}{4}2\mathcal{Q}$ quod probatur. Nam si primus amittat $\frac{1}{4}$. supererunt 300. aur. qui cum $\frac{1}{4}$. aureorum 800. quos secundus attulit, faciunt 700. aur. Item $\frac{1}{2}$. secundi, nimirum 400. aurei cum $\frac{1}{3}$. tertij, id est, cum 300. facit similiter 700 aur. Ac denique $\frac{3}{4}$. tertij, postquam amiserit $\frac{1}{3}$. nimirum 600 aur. cum $\frac{1}{4}$. primi, id est, cum 100. facit quoque 700. aureos.

L. 50 *Quidam habet duo vasa aurea, & vnum operculum, cuius pretium est 150. aur. quod additum ad pretium primi vasis facit pretium triplum pretij secundi vasis. Additum vero idem operculum vasi secundo facit precium æquale pretio primi vasis. Quæstio est de pretio vtriusque vasis.*

PONATVR pretium primi $12\mathcal{Q}$ Ergo $12\mathcal{Q} + 150$. tripla sunt pretij secundi vasis, ideoque eius æstimatio est $\frac{1}{3}2\mathcal{Q} + 50$ aur. Cui si accedat operculum 150 aur. erit eius tunc pretium $\frac{1}{3}2\mathcal{Q} + 200$ aur. æquale $12\mathcal{Q}$. nimirum pretio primi vasis. Ablata $\frac{1}{3}2\mathcal{Q}$. vtrinque, erit æquatio inter $\frac{2}{3}2\mathcal{Q}$. & 200. Diuisis igitur 200 per $\frac{2}{3}$. fiet $12\mathcal{Q}$. 300 aur. pretium scilicet primi vasis. Secundi autem vasis pretium, quod inuentum est $\frac{1}{3}2\mathcal{Q} + 50$ erit 150 aur. quod probatur. Nam 300 aur. hoc est, pretium primi vasis, cum pretio operculi, id est, cum 150. faciunt summam 450. triplam pretij secundi vasis, nimirum 150 aur. At 150. aur. pretium videlicet secundi vasis, cum operculo, siue cum 150 aur. faciunt summam 300 aur. æqualem pretio primi vasis.

LI. 51 *Quidam emit, nescio quot, perdices, ita vt si emisset seorsum illarum $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. & $\frac{1}{5}$. & insuper 6. haberet 100. perdices. Quæritur numerus perdicum.*

PONATVR $12\mathcal{Q}$, cuius $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. & $\frac{1}{5}$. faciunt $\frac{47}{60}2\mathcal{Q}$. quę cum 6. faciunt $\frac{47}{60}2\mathcal{Q} + 6$. æqualia 100. Ablatis 6 vtrobique, erit æquatio inter $\frac{47}{60}$. & 94. Diuisis igitur 94 per $\frac{47}{60}$. fiet $12\mathcal{Q}$. 120. numerus videlicet perdicum emptarum. Nam eius $\frac{1}{3}$. est 40. & $\frac{1}{4}$. est 30. & $\frac{1}{5}$. est 24. quę omnes partes cum 6. faciunt summam 100 perdicum.

LII. 52 *Alexander Magnus, cum quadam die familiariter cum Calisthene philosopho ageret de ætate sua, & amicorum suorum Ephestionis, & Clyti, ita disseruit. Ego, inquit, Ephestionem meum duobus annis antecedo. At Clytus amborum annos sua ætate comprehendit, & præterea annos quatuor. Cui Calisthenes. Cum pater meus vixerit annos 96. iucunda mihi fuit ista relatio, ô Rex. Nam annos trium vestrum ætas eius præcise habuit. Quæritur, qua ætate Alexander colloquium istud habuerit, & quot annos tam Ephestio, quam Clytus tunc habuerit.*

PONATVR pro annis Ephestionis $12\mathcal{Q}$. Igitur anni Alexandri fuerunt $12\mathcal{Q} + 2$. & Clyti $12\mathcal{Q} + 6$. qui omnes faciunt annos $42\mathcal{Q} + 8$ æquales 96. Ablatis 8 vtrobique, erit æquatio inter $42\mathcal{Q}$ & 88. Diuisis igitur 88 per 4 fiet $12\mathcal{Q}$. 22. anni nimirum Ephestionis. Alexander igitur habuit 24. annos. Clytus vero 30. qui anni in vnam collecti summam faciunt 96 annos.

LIII. 53 *Nicanor ea pugna, qua interiit, occurrit Iudæ Machabæo, agmine quadrato collecto ex Syrorum auxiliarijs militibus, atque ijs, quos secum adduxerat. Cæsa sunt autem ex eo agmine 35000. Reliqui fuga elapsi sunt, quorum numerus fuit 156. vltra numerum auxiliariorum militum Syrorum. Quæstio est, quot militibus occurrerit Nicanor Machabæo, & quot habuerit milites auxiliarios, quot item secum adduxerit.*

PONATVR pro agmine illo quadrato 18. in quo computati sunt milites cæsi 35000. Item numerus fuga seruatorum 156. & numerus militum auxiliariorum incognitus. Ponatur hic numerus $12\mathcal{Q}$. cui si addantur milites cæsi 35000. & 156. fuga seruati, conflabitur summa $12\mathcal{Q} + 35156$. æqualis 18. nimirum toti agmini quadrato. Semissis numeri radicum est $\frac{1}{4}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. additis 35156. hoc est, $\frac{140624}{4}$ conficietur numerus $\frac{140625}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{375}{2}$. si addatur prędicta semissis numeri radicum, nimirum $\frac{1}{2}$. fiet $12\mathcal{Q}$. $\frac{376}{2}$. hoc est, 188. numerus videlicet auxiliariorum militum. ipse vero secum adduxit 35156. atque idcirco totum agmen quadratum comprehendit 35344. qui numerus quadratus est habens radicem 188.

LIV. 54 *Quidam habet 4. massas ex argento, & cupro mixtas. Pondus primæ continet 11. marcas, quarum quælibet conflatur ex 9. semiuncijs puri argenti, & 7. semiunc. cupri puri: quia 1. marcam statuimus comprehendere 16. semiuncias. Pondus secundæ massæ est 15. marcarum, quarum singulæ continent 7 semiunc. argenti, & 9. semiunc. cupri. Pondus tertiæ massæ habet 24. marcas, quarum singulæ constant 10. semiunc. argenti, & 6. semiunc. cupri. Pondus denique quartæ massæ est 136. marcarum, quarum singulæ continent 14. semiunc. argenti, & 2. semiunc. cupri. Vult autem ex hisce massis conflare vnam, additis aliquot marcis argenti, ita vt quælibet marca contineat 15. semiunc. puri argenti, & 1. semiunc. puri cupri. Quæstio iam est, quantum argenti puri admiscendum sit illis massis, & quot marcas massa noua sit habitura.*

PONATVR $12\mathcal{Q}$. marcarum puri argenti addendarum. Quoniam vero omnes marcæ mixtæ in illis 4. massis contentæ sunt 186. & omnes semiunciæ puri argenti 2348. & cupri 628. vt hic vides.

Marcæ mixtæ	Semiunciæ puri arg.	Semiunc. puri cupri.
11	99	77
15	105	135
24	240	144
136	1904	272
186	2348	628

Cum enim prima massa marcarum 11. quælibet marca contineat 9 semiunc. argenti puri, & cupri 7 semiunc. erunt in tota illa massa 99 semiunc. argenti puri, & 77 semiunc. puri cupri; &c. instituenda erit regula trium hoc modo.

Marcæ mixtæ	Mar. pu. arg.	Semiunc. cupri.	Mar. mix.	Semiun. cupri.
$186+12\mathcal{Q}$		628	1?	$\frac{628}{186+12\mathcal{Q}}$

Hoc est, Marcæ mixtæ $186+12\mathcal{Q}$. marcarum puri arg. continent 628. semiunc. cupri, (quia in massa conflanda comprehenduntur 628 semiunc. cupri; quot videlicet in 4. massis compositis continentur, cum nulla noua semiunc. cupri accedat) quot ergo semiunc. cupri continebit 1 marca noua mixta? Inuenies enim $\frac{628}{186+12\mathcal{Q}}$ semiunc. cupri, quæ fractio æquiualet 1 semiunc. cupri: propterea quod in vna marca noua mixta contineatur tantum 1 semiunc. cupri ex hypothesi. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 628. & $186+12\mathcal{Q}$. Ablatisque 186. vtrobique, erit æquatio inter 442. & $12\mathcal{Q}$. Erit ergo $1\mathcal{Q}$. 442. atque tot marcæ argenti puri admiscendæ sunt, vt singulæ marcæ comprehendant 15 semiunc. puri arg. & 1 semiunc. cupri. quod sic probatur. Quoniam in 4 illis massis propositis continentur 186 marcæ mixtæ, si addantur inuentæ 442 marcæ argenti puri, fient marcæ mixtæ 628. atque idcirco quælibet habebit 1 semiunc. cupri, quod in omnibus simul sint 628 semiunc. cupri.

ET quia vna marca posita est 16 semiunciarum, comprehendent 442 marcæ puri arg. semiuncias 7072. quibus si addantur semiunciæ 2348 puri argenti, quæ in 4 massis propositis reperiuntur, fient 9420 semiunc. puri argenti. quæ distributæ in 628 marcas nouæ massæ conflatæ, dabunt cuilibet marcæ 15 semiuncias argenti puri.

HÆC eadem quæstio facile etiam expedietur sine Algebræ auxilio. Quoniam enim in 4 massis propositis habentur 628 semiunciæ cupri, necesse est, vt massa noua conflanda sit totidem marcarum, vt nimirum cuilibet 1 semiuncia cupri possit assignari. Si igitur 186 marcæ mixtæ, quas 4. illæ massæ continent, detrahantur ex 628. supererunt 442 marcæ puri argenti addendæ ad 186 marcas, vt fiat numerus marcarum 628. in noua massa conflata comprehensarum.

QVOD si massa ex 4. propositis conflanda sit cum argento addito, vt singulæ marcæ contineant 13 semiuncias puri arg. & 3 semiunc. cupri. Diuisis 628 semiunciis cupri per 3. exibit numerus marcarum in noua massa, $209\frac{1}{3}$. Ita enim quælibet marca 3 semiunc. cupri continebit. Si igitur ex $209\frac{1}{3}$. demantur marcę 186. in 4. primis massis contentę, reliquus fiet numerus $23\frac{1}{3}$. marcarum puri arg addendarum: conflabiturque numerus $209\frac{1}{3}$. marcarum in massa noua comprehensarum: quarum quælibet 13 semiunc. arg. puri comprehendet. Nam in marcis $209\frac{1}{3}$. continentur semiunciæ $\frac{10048}{3}$. ex quibus si demantur 628. siue $\frac{1884}{3}$. semiunc. cupri puri in massa noua contentę, remanebunt $\frac{8764}{3}$ semiunc. argenti puri: quibus in $209\frac{1}{3}$. marcas distributis, prouenient cuilibet marcæ 13 semiunc. puri argenti.

SI vero massa ex eisdem 4 massis conflanda sit, cum cupro addito, vt singulę marcæ contineant 12 semiunc. argenti puri, & 4 semiunc. cupri puri: erit cuprum adiiciendum, non autem argentum. quia distributis 2348 semiunc. argenti, quę in 4. illis massis existunt, in 186 marcas, reperientur in qualibet marca plures semiuncię argenti, quam 12. nimirum $12\frac{116}{186}$. Diuisis igitur 2348 semiunc. argenti puri per 12. exibit in Quotiente numerus marcarum in noua massa, $195\frac{2}{3}$. Sic enim quęlibet marca continebit 12 semiunc. argenti puri. Demptis autem marcis 186. quas illę 4. massæ complectuntur, remanebunt $9\frac{2}{3}$ marcę cupri addendę, vt confletur noua massa marcarum $195\frac{2}{3}$. quarum quęlibet 4 semiunc. cupri continebit. Nam in marcis $195\frac{2}{3}$. continentur $\frac{23928}{3}$ semiunciæ. E quibus si demantur 2348 semiunc. argenti, hoc est, $\frac{7044}{3}$. relinquentur $\frac{23488}{3}$ semiunc. cupri, quibus distributis in $195\frac{2}{3}$ marcas, prouenient cuilibet marcę 4 semiunc. cupri.

IAM vero si quæratur, quantum cupri addendum sit quatuor illis massis, vt in qualibet marca nouæ massæ conflatæ reperiantur 15 semiunc. puri cupri, & 1 argenti: instituenda erit regula Trium hoc modo, posita $12\mathcal{Q}$ marcarum puri cupri.

Marcæ

Marcæ mix.	Marcæ pu. cup.	Semiun. arg.	Mar. mix.	Sem. arg. pu.
$186+12\mathcal{Q}$		2348	1?	$\frac{2348+12\mathcal{Q}}{186+12\mathcal{Q}}$

Eritque quartus numerus æqualis 1 semiunciæ argenti puri: quæ æqualitas per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 2348 & $186+12\mathcal{Q}$. Ablatisque 186. vtrobique, erit æquatio inter 2162 & $12\mathcal{Q}$. Erit ergo $12\mathcal{Q}$ 2162. numerus videlicet marcarum cupri admiscendarum, vt singulæ marcæ contineant 15 semiunc. cupri, & 1 argenti. Quoniam enim in 4. illis massis existunt 186. marcæ, additis proxime inuentis 2162. fiet numerus marcarum 2348. ac proinde quælibet habebit 1 semiunc. argenti: quippe cum in omnibus simul sint 2348 semiunc. argenti. Et quia 2162. marcæ puri cupri comprehendunt semiunc. 34592. si addantur 628. semiunc. cupri in quatuor prioribus massis contentæ, fient 35220 semiunc. quibus distributis in 2348 marcas nouæ massæ conflatæ, congruent cuilibet marcæ 15 semiunciæ cupri.

SI autem quæstio sit, quantum argenti contineat 1. marca, si 4. illæ massæ conflentur, & nihil eis addatur: sic stabit regula Trium.

Marcæ	Semiunc. arg.	Marca	Semiunc. arg.
186	2348	1?	$12\frac{58}{93}$

Continebit ergo 1 marca semiunc. arg. $12\frac{58}{93}$. & proinde semiunc. cupri $3\frac{35}{93}$.

SIC si quæratur, quantum cupri contineat 1 marca, sic stabit regula.

Marcæ	Semiunc. cupri	Marca	Semiunc. cupri
186	628	1?	$3\frac{35}{93}$

Continebit enim 1 marca semiunc. cupri puri $3\frac{35}{93}$. ideoque $12\frac{58}{93}$. semiuncias puri argenti.

ET si quæstio sit, cuius ponderis massa continens in qualibet marca 3 semiunc. argenti, & 13 cupri, commiscenda sit illis 4 massis, vt singulæ marcæ nouæ massæ conflatæ contineant 5 semiunc. argenti, & 11. cupri, ponatur pro numero marcarum addendarum $1\mathcal{Q}$. & pro numero semiunc. argenti in illa massa contentarum, $32\mathcal{Q}$ quia numerus semiunciarum in illa massa triplus est numeri marcarum, quandoquidem quælibet marca comprehendere dicitur 3 semiunc. argenti. Sic igitur stabit regula Trium.

Mar. mix.	Mar. mix. nouæ	Semiunc. arg.	Sem. arg. nouæ	Marca noua	Sem. arg.
$186+12\mathcal{Q}$		2348 + $32\mathcal{Q}$		1?	$\frac{2348+32\mathcal{Q}}{186+12\mathcal{Q}}$

Quartus enim numerus æquabitur 5 semiuncijs argenti, quot nimirum 1 marca massæ nouæ includere debet. quæ æqualitas per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter $2348+32\mathcal{Q}$. & $930+52\mathcal{Q}$. Ablatisque 930 vtrobique, erit æquatio inter $1418+32\mathcal{Q}$ & $52\mathcal{Q}$. Ablatisque rursum $32\mathcal{Q}$ vtrinque, inter 1418. & $22\mathcal{Q}$. Diuisis igitur 1418 per 2. fiet $12\mathcal{Q}$. 709. numerus marcarum, quas massa quinta commiscenda continebit. Additis igitur 186 marcis quatuor priorum massarũ, fiet noua massa marcarum 895. quarũ quælibet continet 5. semiunc. argenti, & 11. cupri. quod sic probatur. Duc 895. marcas in 16 semiunc. faciesque 14320. semiuncias partim argenti, & partim cupri in massa noua marcarum 895. contentas. Deinde duc easdem marcas 895. in 5. semiunc. argenti, quas quælibet marca continere debet, faciesque semiunc. argenti 4475. in noua illa massa contentas. Denique duc easdem marcas 895. in 11. semiunc. cupri, quas quælibet marca continere debet, efficiesque 9845. semiunc. cupri, quæ cum 4475 semiunc. argenti faciunt 14320. quot nimirum semiunciæ in vniuersum continentur in 895. marcis.

55 *Duo Societatem ineunt: quorum secundus duplo plus pecuniæ secum affert, quam primus, ac præterea 5. aur. Lucrati sunt autem 960. aur. ex quibus primo obuenerunt aur. 300. & secundo 660. Quantum ergo singuli imposuerunt.* LV.

PONE pro primo $1\mathcal{Q}$. ideoque pro secundo $2\mathcal{Q}+5$. Summa amborum est $32\mathcal{Q}+5$. qua lucrati sunt 960. aur. Institue ergo regulam Trium sic.

$32\mathcal{Q}+5$	960	$12\mathcal{Q}$?	$\frac{960\mathcal{Q}}{32\mathcal{Q}+5}$

Inuenies enim primum, qui posuit $1\mathcal{Q}$. lucrari $\frac{960\mathcal{Q}}{32\mathcal{Q}+5}$. qui numerus æqualis est 300. aur. qui primo obuenerunt. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter $9602\mathcal{Q}$. & $9002\mathcal{Q}+1500$. Ablatis igitur $9002\mathcal{Q}$ vtrobique, remanebit æquatio inter $602\mathcal{Q}$. & 1500. Diuisis igitur 1500 per 60. fiet $1\mathcal{Q}$ 25. pro aureis, quos primus posuit. Ergo secundus posuit 55. aur. quod probatur. Amborum enim summa est 80 aur. Ergo regula Trium sic stabit bis.

80 960 25? 300 80 960 55? 660

56 *Duo habent pecuniam, nimirum 200. aur. simul, & pecunia secundi diuisa per pecuniam primi facit Quotientem $1\frac{1}{2}$. Quæstio est, quantam quisque pecuniam habeat.* LVI.

HÆC quæstio cum sequentibus ad secundas radices pertinet. Ponatur pro primo $1\mathcal{Q}$. & pro secundo 1A. Resoluenda ergo est secunda radix in primam hoc modo. Quoniam ambo habent 200. aur. erit æquatio

inter 12Q + 1A, & 200. Ablataque 12Q vtrinque, inter 1A, & 200 — 12Q. Erit igitur 1A, resoluta in 200 — 12Q. Quare pono denuo numerum primi 12Q, & secundi 200 — 12Q. qui simul faciunt 200. aur. Diuiso iam numero secundi per numerum primi, fit Quotiens $\frac{200-12Q}{12Q}$. æqualis $1\frac{1}{2}$. hoc est, $\frac{3}{2}$. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 400 — 24Q, & 32Q. Additisque 24Q vtrobique, erit æquatio inter 400 & 52Q Diuisis ergo 400 per 5 fiet Quotiens 80. numerus prioris. Ergo secundus habebit 120. nimirum 200 — 12Q. quo numero diuiso per 80 fit Quotiens $1\frac{1}{2}$.

Aliter. Ponatur numerus secundi 12Q, & primi 1A. Ergo iterum erit æquatio inter 12Q + 1A, & 200. aur. Ablataque 12Q vtrobique, inter 1A, & 200 — 12Q. atque ita 1A, resoluta est in 200 — 12Q. Pono ergo denuo pro secundo 12Q & pro primo 200 — 12Q. Diuiso illo per hunc fit Quotiens $\frac{200-12Q}{12Q}$. æqualis $\frac{3}{2}$. quæ æqualitas per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 24Q & 600 — 36Q. Additisq; 36Q vtrinque, erit æquatio inter 52Q & 600. Diuisis ergo 600 per 5. fiet 12Q. 120. pro numero secundi. Primus ergo habet 80. nimirum 200 — 12Q. vt prius.

LVII. 57 *Septem mercatores debent cuidam creditori pecuniam hoc modo. Sex, excluso septimo, debent simul 994. aur.*
Deinde sex, secluso primo, debent 882. aur.
Sex, secluso secundo, debent aur. 952.
Sex, dempto tertio, debent aur. 896.
Sex, excluso quarto, debent aur 910.
Sex, secluso quinto, debent aur. 840.
Sex denique, excepto sexto, debent aur. 1036.
Quæritur iam, quanta sit summa totius debiti, & quantum quisque debeat.

PRIMVM quia excluditur debitum septimi à tota summa: si pro debito septimi ponatur 1Q. erit summa totius debiti 994 + 12Q. aur.

Deinde quia excluditur debitum primi: si pro eo ponatur 1A, erit summa totius debiti aur. 882 + 1A.

Tertio quia excluditur debitum secundi, pone pro eo 1B, aur. eritque summa totius debiti aur. 952 + 1B.

Quarto quia eximitur debitum tertij, si pro eo ponatur 1C, aur. erit summa totius debiti aur. 896 + 1C.

Quinto quia subticetur debitum quarti, si pro eo ponatur 1D, aur. erit totius debiti summa aur. 910 + 1D.

Sexto quia supprimitur debitum quinti, si pro eo ponatur 1E, aur. habebitur summa totius debiti 840 + 1E, aur.

Septimo denique, quia non exprimitur debitum sexti, si pro eo ponatur 1F, aur. erit summa totius debiti 1036 + 1F, aur.

994 + 1 2Q
882 + 1 A
952 + 1 B
896 + 1 C
910 + 1 D
840 + 1 E
1036 + 1 F

Quia igitur summa omnium, hoc est, totum debitum septies ponitur, vt hic vides, habebimus sex æquationes, si superiorem cum singulis inferioribus conferemus; propterea quod quodlibet totum sibi ipsi est æquale. Videlicet.

Primum 994 + 12Q. æqualia sunt 882 + 1A. Igitur ablatis 882. vtrobique, erit æquatio inter 112 + 12Q, & 1A. Cum ergo pro debito primi posita sit 1A; erit debitum primi aur. 112 + 12Q.

Deinde eodem modo æquatio erit inter 994 + 12Q, & 952 + 1B. Ablatisque 952 vtrinque, inter 42 + 12Q, & 1B, ac proinde debitum secundi 42 + 12Q.

Tertio similiter æquatio erit inter 994 + 12Q, & 896 + 1C. Ablatisque 896 vtrinque, inter 98 + 12Q, & 1C: ideoque debitum tertij erit 98 + 12Q.

Quarto pari ratione erit æquatio inter 994 + 12Q, & 910 + 1D. Ablatisque 910 vtrobique, inter 84 + 12Q, & 1D. Debitumque quarti erit aur. 84 + 12Q.

Quinto non secus erit æquatio inter 994 + 12Q, & 840 + 1E. Ablatisque 840 vtrobique, inter 154 + 12Q, & 1E: propterea que debitum quinti erit aur. 154 + 12Q.

SEXTO non aliter æquatio erit inter 994 + 12Q, & 1036 + 1F. Ablatisque 994 vtrobique, inter 12Q, & 42 + 1F. Rursumque ablatis 42 vtrinque, inter 12Q — 42. & 1F. ideoque debitum erit sexti aur. 12Q — 42.

Debitum primi	112	+ 1	2Q
Secundi	42	+ 1	2Q
Tertij	98	+ 1	2Q
Quarti	84	+ 1	2Q
Quinti	154	+ 1	2Q
Sexti	1 2Q	—	42
Septimi	1 2Q		

Et quia pro debito septimi posita fuit 12Q. erunt omnium debita hæc, quæ faciunt summam 72Q + 448. aur. æqualem 994 + 12Q. cum hic etiam numerus toti debito æqualis sit, vt paulo ante diximus. Ablata ergo 12Q. vtrinque, erit æquatio inter 62Q + 448. & 994. Ablatisque rursum 448 vtrobique, inter 62Q, & 546. Diuisis igitur 546 per 6. fiet 12Q. 91. debitum septimi, quod fuit 12Q. Hinc facile debita aliorum elicies. Quoniam enim debitum primi fuit 112 + 12Q. erit ipsum debitum 203. summa

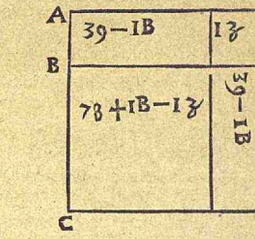
summarum ex 91. & 112. conflata. Sic etiam debitum sexti erit 49. nimirum 12Q — 42. & sic de cæteris, vt hic cernis.

Debitum	Primi	203	aur.	Summa omnium, seu totum debitum.	1085. aur.
	Secundi	133			
	Tertij	189			
	Quarti	175			
	Quinti	245			
	Sexti	49			
	Septimi	91			

Probatio. Dempto debito septimi ex toto debito. debebunt 6. alij aur. 994. Item dempto debito primi ex eodem debito toto, debebunt 6. alij, aur. 882. & sic de cæteris.

58 *Duo socij habent duos numeros aureorum, quorum summa à summa quadratorum ex ipsis procreatorum subtracta, relinquit 78. Addita vero ad numerum ex eorum multiplicatione productum facit 39. Quæritur, qui sint isti numeri.* LVIII.

HANC quæstionem per sequentem figuram explicabimus, vbi quadratum rectæ AC, diuisum est in duo quadrata, & duo complementa, quorum quodlibet inter duo quadrata medium proportionale est, vt in Lemmate propos. 54. lib. 10. Eucl. demonstrauimus, & supra quoque in numeris in Lemmate ænigmatis 26. cap. 30. ostendimus. Ponatur ergo minor numerus 12Q; nimirum linea AB, & maior 1A, nimirum linea BC. Summa autem ex ipsis conflata, nimirum linea AC, ponatur 1B. Eritque quadratum rectæ AB, 1☐. Et quoniam summa numerorum 1B, subtracta ex duobus quadratis rectarum AB, BC, relinquit 78. facient duo illa quadrata 78 + 1B. Ita enim si ex illis demetur 1B, relinquentur 78. Igitur quadratum rectæ BC, erit 78 + 1B, — 1☐. Si enim duo quadrata faciunt 78 + 1B, vt diximus, erit solum quadratum rectæ BC, 78 + 1B — 1☐.



Deinde quia summa numerorum AB, BC, nimirum 1B, addita ad productum ex eorum multiplicatione, id est, ad complementum AD, facit 39. erit complementum hoc 39 — 1B. Ita namque si addatur 1B, fiet ipsum complementum 39.

Quia vero quadratum rectæ AC, quæ valet 1B, constat ex duobus quadratis rectarum AB, BC, id est, ex 78 + 1B, & ex duobus complementis, hoc est, ex 78 — 2B, estq; quadratum rectæ AC, ex 1B, procreatum 1B☐. erit æquatio inter 1B☐. & 156 — 1B. qui numerus conflatur ex 78 + 1B, id est, ex duobus quadratis, & ex duobus complementis, hoc est, ex 78 — 2B. Huius autem numeri 156 — 1B, radix non aliter inuestigabitur, quam ex numero 156 — 12Q, ac si hic æqualis esset 1☐. nimirum hoc pacto. Semissis numeri radicū est $\frac{1}{4}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{16}$. additis 156. hoc est, $\frac{625}{4}$. fit numerus $\frac{625}{4}$. à cuius radice quadrata $\frac{25}{2}$. si demptur prędicta semissis $\frac{1}{2}$. remanebit pretium 12Q. $\frac{24}{2}$. hoc est 12. aç tantum valet recta AC, hoc est, 1B, summa numerorum 12Q. & 1A.

Quoniam igitur 1B, est 12. complementum 39 — 1B, erit 27. & quadratum maius 78 + 1B — 1☐. erit 90 — 1☐. estque complementum 27. medium proportionale inter quadratum hoc maius 90 — 1☐. & quadratum minus 1☐. vt initio diximus: si ducatur 90 — 1☐. in 1☐. fiet numerus 90☐ — 1☐☐. [a] æqualis quadrato ex 27. descripto nimirum numero 729. Addito ergo 1☐☐. vtrobique, erit æquatio inter 90☐. & 729 + 1☐☐. & ablatis 729. vtrobique, inter 90☐ — 729. & 1☐☐. Huius numeri 90☐ — 729. radicem Zensizensicam ita inueniemus. Semissis numeri Zensorum est 45 à cuius quadrato 2025. si demantur 729. remanet numerus 1296. ad cuius radicem 36. si addatur prædicta semissis 45. fit 1☐81. maior, minor autem erit 9. si nimirum ex prædicta semisse 45. demptur inuenta radix 36. Zensorum autem 81. & 9. radices quadratæ sunt 9. & 3. numeri quæsiti. Nam eorum quadrati sunt 81. & 9 à quorum summa 90. si ipsorum numerorum summa 12. detrahatur, reliquus fit numerus 78. Et si eadem summa 12. addatur ad 27. numerum ex eorum multiplicatione productum, fit summa 39.

[a] 29. *sepii.*

PORRO postquam inuentum fuit, 1B, summam numerorum 12Q, & 1A, esse 12. facilius inueniemus vtrumque numerorum 12Q & 1A, seorsum, per ænigma 172. cap. 29. Quoniam enim complementum, quod fit ex AB, in CB, inuentum est 27. si numerus 12. diuidatur in duas partes, vt ex vna in alteram fiat numerus 27. qui non maior est quarta parte quadrati ex numero 12. facti, vt in prædicto ænigmate docuimus, inuenietur vna pars 3. & altera 9. Idem quoque efficietur per ænigma 38. cap. 30.

VEL, si numerus 12. per ænigma 170. cap. 29. vel 35. cap. 30. diuidatur in duos numeros, quorum quadrati simul faciant 90. summam videlicet duorum quadratorum rectarum AB, CB, quæ inuenta est 90. reperientur iterum duæ partes 3. & 9.

SCHOLIVM.

EX hoc ænigmate facile intelligitur, eum qui quæstiones per Algebram soluere vult, debere optime esse exercitatum in Geometriæ scientia, vt cap. 1. diximus. Hoc enim ænigma ab eo, qui Geometricā ignorat, vix, aut nullo modo soluetur, vt patet.

59 *Duo socij habent duas summas aureorum. Quadrati numeri ex summis procreatis faciunt 340: Sed ipsæ summæ inter se multiplicatæ faciunt $\frac{6}{7}$ maioris quadrati. Quæstio est, quantæ sint istæ summæ.* LIX.

PONATVR maior summa 12Q, & minor 1A. Quadrati sunt 1☐. & 1A☐. qui simul facere debent 340.

Igitur 1☽.erit 340——1A☽.&1A☽,erit 340——1☽. Duo vero numeri inter se multiplicati faciunt numerum 1☉A,æqualem $\frac{6}{7}$☽.hoc est, $\frac{6}{7}$.maioris quadrati,qui est 1☽. Si igitur æquatio est inter 1☉A,& $\frac{6}{7}$☽.erit quoque æquatio inter horum numerorum quadrata, nimirum inter 1☽ A☽.& $\frac{36}{49}$☽☽. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 49☽ A☽,& 36☽☽. Et per depressionem signi ☽, primæ radicis, erit æquatio inter 49 A☽,& 36☽. Ac per regulam Trium, si 36☽.æquiualent 49 A☽.æquiualebit 1☽.numero $\frac{49A☽}{36}$.vt hic vides,abiecto signo ☽.in primo ac tertio numero.

36 49A☽ 1? $\frac{49A☽}{36}$.

Et quoniam 1A☽.fuit æqualis numero 340——1☽.erit quoque æquatio inter 1A☽.& 340—— $\frac{49A☽}{36}$. quandoquidem 1☽.inuentus fuit æqualis numero $\frac{49A☽}{36}$.Additis igitur $\frac{49A☽}{36}$.vtrobique, erit æquatio inter 1A☽+ $\frac{49A☽}{36}$.& 340.Cum ergo 1A☽.faciat $\frac{36}{36}$A☽.(quod $\frac{36}{36}$.& 1.æquales sint numeri.)erit æquatio inter $\frac{85}{36}$.A☽. &340.Diuisis ergo 340.per $\frac{85}{36}$.fiet 1A☽.144.cuius radix 12. erit vnus numerorum, nimirum summa pecuniæ minor,pro qua posuimus 1A,cuius quadratum 1A☽.Quia vero quadratum maioris summæ fuit 340——1A☽. Si pretium 1A☽. nimirum 144.demat ur ex 340. reliquum fiet quadratum maioris summæ 196. cuius radix est 14.alter numerorum,nimirum maior summa,quam posuimus 12☉ Itaque primus habet 14.aur.& secundus 12. Quadrati enim horum numerorum 196. 144. faciunt 340. & ex 14.in 12. fit numerus 168. hoc est, $\frac{6}{7}$. maioris quadrati 196.

LX. *60 Tres socij habent pecunias. Primus dicit secundo, si mihi dares $\frac{1}{2}$ tuæ pecuniæ, haberem 100.aur. Secundus vero dicit tertio, si mihi dares $\frac{1}{3}$. tuæ pecuniæ, haberem 100.aur. Tertius denique dicit primo, si mihi dares $\frac{1}{4}$. tuæ pecuniæ haberem 100.aur. Quæritur, quantum quisque eorum habeat.*

PONATVR primi pecunia 1☉.aur.secundi 1A,aur.& tertij 1B,aur.Primus ergo cum $\frac{1}{2}$.secundi habebit 1☉+$\frac{1}{2}$.A qui numerus æqualis est 100.aur.Dempta ergo 1☉,vtrinq;,erit æquatio inter $\frac{1}{2}$A.& 100.aur. ——1☉.ideoque & inter dupla,nimirum inter 1A,& 200.aur.——2☉.Atque ita pro secundo,loco 1A, pono 200.aur.——2☉,qui secundus cum $\frac{1}{3}$.tertij,habebit 200.aur.——2☉+$\frac{1}{3}$B,qui numerus etiam æqualis est 100.aur. Additis ergo 2☉.vtrobique,erit æqualitas inter 200.aur.+$\frac{1}{3}$B,& 100.aur.+2☉.Et ablatis 100.vtrobique, inter 100.aur.+$\frac{1}{3}$B,& 2☉.Et rursum ablatis 100. vtrinque, inter $\frac{1}{3}$B, & 2☉——100. ideoque & inter tripla, nimirum inter 1B,& 6☉——300.aur.Atque ita pro tertio,loco 1B, pono 6☉——300.aur.Hic tertius cum $\frac{1}{4}$.primi,id est,cum $\frac{1}{4}$☉. habebit 6$\frac{1}{4}$☉—300. numerum etiam æqualem 100.aur. Additis igitur 300.vtrobique,erit æquatio inter 6$\frac{1}{4}$☉.& 400. Diuisis ergo 400.per 6$\frac{1}{4}$.fiet 1☉64. atque tot aureos habet primus. Secundus autem, qui inuentus est habere 200——2☉.habet aur.72. Tertius denique,qui deprehensus est habere aur.6☉——300.habet 84.aur.Ita enim tam primus 64.cum $\frac{1}{2}$. secundi 72.id est, cum 36. quam secundus 72. cum $\frac{1}{3}$.tertij 84.id est,cum 28. quam tertius 84.cum $\frac{1}{4}$. primi 64.id est, cum 16 habebit 100.aur.

LXI. *61 Tres habent pecuniam. Primus dicit reliquis, si adhuc haberet is 100. aur. esset summa vestrorum aur. dupla meæ summæ. Secundus dicit reliquis, si adhuc haberet is 100. aur. esset summa vestrorum aur. meæ summæ tripla. Tertius reliquis dicit, si adhuc haberet is 100. aur. summa vestrorum aur. esset summæ meæ quadrupla. Quæritur, quantum quisque habeat.*

PONATVR primi pecunia 1☉,& aliorum duorum simul 1A. Hi duo cum 100.aur.habebunt summam duplam pecuniæ primi. Ergo æquatio erit inter 2☉.& 1A+100.Et ablatis 100.vtrobique,inter 2☉—— 100.& 1A.ac proinde secundus;ac tertius,qui ponuntur habere 1A,habebunt 2☉——100. Et si addatur summa primi,quæ est 1☉,erit summa omnium trium 3☉——100.

Ponatur deinde summa secundi 1B.habebuntque propterea primus ac tertius 3☉——100——1B,quandoquidem omnes tres habent 3☉——100. Et quia summa primi ac tertij,vna cum 100.aur. tripla est summæ secundi;erit æquatio inter 3☉——1B. (Nam si addantur 100.ad 3☉——100——1B, fit summa 3☉——1B) & 3B.Addita igitur 1B,vtrinque,erit æqualitas inter 3☉& 4B. atque idcirco & inter subquadrupla, hoc est, inter $\frac{3}{4}$☉.& 1B.ac proinde secundus,qui habet 1B.habebit $\frac{3}{4}$☉.

Denique pro summa tertij ponatur 1C. habebuntque propterea reliqui duo 3☉——100——1C, quandoquidem omnes tres habent 3☉——100. aur. Et quoniam summa primi ac secundi, vna cum 100.aur.quadrupla est summæ tertij, erit æquatio inter 3☉—1C. (Nam si addantur 100.ad 3☉—100—1C.fit summa 3☉—1C) & 4 C.Additaque 1C,vtrinque,erit æquatio inter 3☉.& 5 C.ideoque & inter subquintupla,hoc est,inter $\frac{3}{5}$ ☉.& 1C.ac proinde tertius habebit $\frac{3}{5}$☉.

Itaque cum primus habeat 1☉.secundus $\frac{3}{4}$☉.& tertius $\frac{3}{5}$☉,habebunt omnes tres simul 1$\frac{37}{20}$☉.siue $\frac{47}{20}$ ☉.Habebant aũt omnes tres simul etiam 3☉—100.Est igitur æquatio inter $\frac{47}{20}$☉.siue 2$\frac{7}{20}$☉.& 3☉——100. Additisq;,100.vtrinq; inter 2$\frac{7}{20}$☉+100.& 3☉.Ablatisq; 2$\frac{7}{20}$☉.vtrobique,inter 100.& $\frac{13}{20}$☉.Diuisis igitur 100.per $\frac{13}{20}$.fiet 1☉ 153$\frac{1}{13}$.aur.pecunia primi.Secundus autem habens $\frac{3}{4}$☉.habebit 115$\frac{5}{13}$.Et tertius habens $\frac{3}{5}$ ☉.habebit 92$\frac{4}{13}$.Nam secundus ac tertius vna cum 100.habebunt 307$\frac{9}{13}$.qui numerus duplus est numeri 153 $\frac{1}{13}$.quem habet primus.Item primus ac tertius vna cum 100.habebunt 346$\frac{1}{13}$. qui numerus triplus est numeri 115$\frac{5}{13}$.quem habet secundus. Secundus denique ac primus, vna cum 100. habebunt 369$\frac{3}{13}$. aur. qui numerus quadruplus est numeri 92$\frac{4}{13}$.quem habet tertius.

LXII. *62 Tres habent pecuniam. Primus reliquis dicit, si adhuc haberem 100. aur. fieret mea summa æqualis duabus summis vestris. Secundus reliquis dicit, si haberem adhuc 100.aur. summa mea esset vestræ summæ dupla. Tertius denique ait ad reliquos, si adhuc haberem 100.aur. summa mea fieret summæ vestræ tripla. Quæritur, quantum quisque habeat.*

PONATVR primi summa 1☉.Ergo cũ 100.habebit 1☉+100 ac tanta erit summa secundi & tertij, omnesque

omnesque tres habebunt 2☉+100.Ponatur summa secundi 1A.Ergo cum 100.habebit 1A+100.qui numerus duplus est summæ primi ac tertij,quæ est 2☉.+100——1A, (quia cum omnes tres habeant 2☉+100.si tollatur 1A,summa videlicet secundi,remanebit summa primi ac tertij 2☉+100—1A.) Ac proinde æquatio erit inter 1A+100.& 4☉+200——2A. Additisque 2A,vtrobique inter 3A+100.& 4☉+200. Et ablatis 100.vtrinque,inter 3A,& 4☉+100.Si ergo omnia diuidantur per 3.erit æquatio inter 1A,& $\frac{4}{3}$☉+$\frac{100}{3}$. Ac proinde cum secundus positus sit habere 1A,erit eius summa $\frac{4}{3}$☉+$\frac{100}{3}$.Ponatur deniq; summa tertij 1B. Ergo cum 100.habebit 1B+100. qui numerus triplus est summæ primi ac secundi, quæ est $\frac{7}{3}$☉+$\frac{100}{3}$.conflata ex 1☉summa primi,& $\frac{4}{3}$☉+$\frac{100}{3}$.summa secundi.Igitur æquatio erit inter 1B+100.& $\frac{7}{3}$☉+$\frac{300}{3}$. hoc est, inter 1B+100.& 7☉+100.Ablatisque 100.vtrobique,inter 1B,& 7☉. Ac proinde tertij summa, quæ posita fuit 1B, erit 7☉.

Itaque cum primus habeat 1☉.secundus $\frac{4}{3}$☉+$\frac{100}{3}$. & tertius 7☉. habebunt omnes tres 9$\frac{1}{3}$☉+$\frac{100}{3}$. Habebant autem omnes tres etiam 2☉+100.Est igitur æquatio inter 9$\frac{1}{3}$☉+$\frac{100}{3}$.& 2☉+100.Ablatisque 2☉ vtrobique,inter 7$\frac{1}{3}$☉+$\frac{100}{3}$.& 100.Ablatisque rursum $\frac{100}{3}$. hoc est, 33$\frac{1}{3}$. vtrobique, inter 7$\frac{1}{3}$☉.& 66$\frac{2}{3}$. Diuisis igitur 66$\frac{2}{3}$.per 7$\frac{1}{3}$. fiet 1☉9$\frac{1}{11}$.summa primi.Secundus autẽ habens 1$\frac{1}{3}$☉+33$\frac{1}{3}$.habebit 45$\frac{5}{11}$.Tertius deniq; habens 7☉.habebit 63$\frac{7}{11}$.Ita namque primus cum 100.faciet 109$\frac{7}{11}$.summam æqualem summę secundi ac tertij Secundus vero cum 100. faciet summam 145$\frac{5}{11}$. duplam summæ primi ac tertij. Tertius denique cum 100.faciet 163$\frac{7}{11}$.summam triplam summæ primi ac secundi.

LXIII. *63 Tres habent pecuniam. Primus reliquis dicit, si de vestra summa remoueretis 100. aur. haberẽ summam æqualem reliquæ vestræ summæ. Secundus reliquis dicit, si de vestra summa remoueretis 100 aur. esset mea summa reliquæ vestræ dupla. Tertius denig; dicit reliquis, si de vestra summa remoueretis 100. aur. mea summa esset reliquæ vestræ summæ tripla. Quæritur vnius cuiusq; summa.*

PONATVR primi pecunia 1☉.Ergo reliqui duo simul habebunt 1☉+100. vt amotis 100. habeant reliquam summam æqualem summæ primi. Omnesque tres simul habebunt 2☉+100.

Ponatur pecunia secundi 1A.quæ dupla est pecuniæ primi ac tertij,si remoueant 100.aur. Habent autem primus ac tertius 2☉+100—1A.(cum enim omnes tres habeant 2☉+100.si demat ur 1A,summa secundi, reliqua fiet summa primi ac tertij 2☉+100—1A.)& amotis 100.habebunt 2☉——1A.cuius numeri dupla est 1A,summa secundi.Ergo æquatio erit inter 4☉——2A.& 1A. Et additis 2A, vtrinque,inter 4☉,& 3A. Et omnibus diuisis per 3.inter $\frac{4}{3}$☉.& 1A.Ac proinde summa secundi,quem posuimus habere 1A,erit $\frac{4}{3}$☉.

Ponatur denique summa tertij 1B,quæ tripla est summæ primi ac secundi,si remoueant 100.aur.Habent autem primus & secundus $\frac{7}{3}$☉,& amotis 100.habebunt $\frac{7}{3}$☉——100.cuius numeri triplum $\frac{21}{3}$☉——300.æquale erit summæ tertij 1B.Ergo tertius habet 7☉——300.

Itaque cum primus habeat 1☉.secundus $\frac{4}{3}$☉.& tertius 7☉——300. habebunt omnes tres simul 9$\frac{1}{3}$☉ ——300.Habebant autem omnes tres quoque simul 2☉+100 Æquatio ergo est inter 9$\frac{1}{3}$☉——300.& 2☉ +100. Additisque 300. vtrinque inter 9$\frac{1}{3}$☉,& 2☉+400. Ablatisque 2☉. vtrobique, inter 7$\frac{1}{3}$☉.& 400. Diuisis ergo 400.per 7$\frac{1}{3}$.fiet 1☉.54$\frac{6}{11}$. pecunia primi.Secundus vero habens $\frac{4}{3}$☉habebit 72$\frac{8}{11}$.Et tertius habens 7☉——300.habebit 81$\frac{9}{11}$.quod probatur. Nam si ex 154$\frac{6}{11}$. summa secundi ac tertij reijciantur 100. remanebit summa 54$\frac{6}{11}$.æqualis summæ primi. Et si ex 136.$\frac{4}{11}$.summa primi, ac tertij, abijciantur 100.reliqua erit summa 36$\frac{4}{11}$.subdupla summæ secundi 72$\frac{8}{11}$. Si denique ex 127$\frac{1}{11}$. summa primi ac secundi remoueantur 100 remanebit summa 27$\frac{3}{11}$ subtripla summæ tertij 81$\frac{9}{11}$.

LXIIII. *64 Tres habent pecuniam. Primus reliquis dicit, si de mea summa remouerem 100. aur. summa vestra esset reliquæ meæ summæ quadrupla. Secundus dicit reliquis, si de mea summa abijcerem 100. aur. vestra summa esset reliquæ meæ summæ tripla. Denique tertius reliquis dicit, si de mea summa auferem 100. aur. esset vestra summa reliquæ meæ summæ dupla. Quæritur vniuscuiusque summa.*

PONATVR pecunia primi 1☉+100.Ergo secundus ac tertius habebunt 4☉.vt hæc summa quadrupla sit summæ primi,si prius abiecerit 100.aur.omnesque tres habebunt 5☉+100.

Ponatur deinde pecunia secundi 1A+100.vt abiectis 100.reliqua summa 1A, sit subtripla summæ primi ac tertij;quæ est 5☉+100——1A+100. ita vt æquatio sit inter 3A.& 5☉+100——1A+100. Et addita 1A +100.vtrinq;, inter 4A+100.& 5☉+100. Ablatisq; 100.vtrobiq;,inter 4A,& 5☉ Diuisisq; his duob. numeris per 4.erit æquatio inter 1A,& $\frac{5}{4}$☉.Cum ergo secũdus positus sit habere 1A+100.habebit $\frac{5}{4}$☉+100.

Ponatur denique summa tertij 1B+100. vt abiectis 100.reliqua summa sit subdupla summæ primi ac secundi;quę est 2$\frac{1}{4}$☉+200.ita vt æquatio sit inter 2B,& 2$\frac{1}{4}$☉+200.Diuisis ergo omnibus per 2.erit 1B,æqualis $\frac{9}{8}$☉+100.Cum ergo tertius positus sit habere 1B+100.habebit $\frac{9}{8}$☉+200.

Itaque cum primus habeat 1☉+100. Secundus $\frac{5}{4}$☉+100. & tertius $\frac{9}{8}$☉+200. habebunt omnes tres simul 3$\frac{3}{8}$☉+400.Habebant autem omnes tres etiam simul 5☉+100. Æquatio igitur est inter 3$\frac{3}{8}$☉+400. & 5☉+100.Ablatisque 100.vtrobique,inter 3$\frac{3}{8}$.☉+300.& 5☉. Et rursum ablatis 3$\frac{3}{8}$.☉ vtrinque,inter 300 & 1$\frac{5}{8}$☉.Diuisis igitur 300.per 1$\frac{5}{8}$.fiet 1☉.184$\frac{8}{13}$.Primus ergo qui positus est habere 1☉+100.habebit 284$\frac{8}{13}$. aur.Secundus vero habens $\frac{5}{4}$☉+ 100. habebit 330$\frac{10}{13}$ aur. Tertius denique habens $\frac{9}{8}$☉+200. habebit 407 $\frac{9}{13}$.aur.quod probatur. Nam si primus remoueat 100.de sua summa,erit reliquus numerus 184$\frac{8}{13}$.subquadruplus summæ secundi ac tertij, quæ est 738$\frac{6}{13}$. Et si secundus de summa abijciat 100.erit reliquus numerus 230 $\frac{10}{13}$.subtriplus summæ primi ac tertij. quæ est 692$\frac{4}{13}$. Denique si tertius de sua summa remoueat 100. erit reliquus numerus 307$\frac{9}{13}$.subtuplus summæ primi ac secundi,quæ est 615$\frac{5}{13}$.

LXV. 65 *Tres habent pecuniam. Primus reliquis dicit, si vobis darem 100. aur. faceretis summam meæ reliquæ summæ quintuplam. Secundus dicit reliquis, si vobis darem 100. aur. fieret vestra summa reliquæ meæ summæ sextupla. Tertius denique reliquis dicit, si vobis darem 100. aur. faceretis summam reliquæ meæ summæ septuplam. Quæritur vniuscuiusque summa.*

PONATVR pecunia primi 1 2℘ + 100. Ergo reliqui duo habebunt 5 2℘ —— 100. vt si primus eis det 100. habeant 5 2℘. numerum videlicet quintuplum reliqui numeri primi. Omnesque tres simul habebunt 6 2℘.

Ponatur secundi pecunia 1 A + 100. vt postquam alijs duobus dederit 100. reliqua 1 A, sit subsesçupla summæ aliorum cum illis 100. aur. quos à secundo acceperunt. Habent autem primus ac tertius 6 2℘ —— 1 A + 100. ac propterea cum 100. aur. secundi habebunt 6 2℘ + 100 —— 1 A + 100. qui numerus sesçuplus est 1 A, hoc est æqualis 6 A. Additis ergo 1 A + 100. vtrobique erit æquatio inter 6 2℘ + 100. & 7 A + 100. Ablatisque 100. vtrobique, inter 6 2℘. & 7 A. Diuisisq; duobus hisce numeris per 7. erunt $\frac{6}{7}$ 2℘. æquales 1 A. Ergo secundus, quem posuimus habere 1 A + 100. habebit $\frac{6}{7}$ 2℘ + 100.

Ponatur denique pecunia tertij 1 B + 100. vt postquam alijs duobus dederit 100. aur. reliqua 1 B, sit subseptupla summæ primi, ac secundi vna cum 100. aur. quos à tertio acceperunt. Habent autem primus ac secundus $\frac{1\frac{3}{7}}{}$ 2℘ + 200. ideoque cum 100. aur. tertij habebunt $\frac{1\frac{3}{7}}{}$ 2℘ + 300. qui numerus septuplus est 1 B, hoc est, æqualis 7 B. Diuisisque $\frac{1\frac{3}{7}}{}$ 2℘ + 300. & 7 B, per 7. erit æquatio inter $\frac{1\frac{3}{49}}{}$ 2℘ + $\frac{300}{7}$. & 1 B. Ergo tertius, quem posuimus habere 1 B + 100. habebit $\frac{1\frac{3}{49}}{}$ 2℘ + $\frac{1000}{7}$.

Itaque cum primus habeat 1 2℘ + 100. Secundus $\frac{6}{7}$ 2℘ + 100. & tertius $\frac{1\frac{3}{49}}{}$ 2℘ + $\frac{1000}{7}$. habebunt omnes tres simul $2\frac{6}{49}$ 2℘ + $\frac{2400}{7}$. Habebant autem & omnes tres simul 6 2℘. Est igitur æqualitas inter $2\frac{6}{49}$ 2℘ + $\frac{2400}{7}$ & 6 2℘. Ablatisque $2\frac{6}{49}$ 2℘. vtrinque inter $\frac{2400}{7}$. & $3\frac{43}{49}$ 2℘. Diuisis igitur $\frac{2400}{7}$. per $3\frac{43}{49}$. fiet 12℘. $88\frac{8}{49}$. Primus ergo, cuius dedimus 12℘ + 100. habebit $188\frac{8}{49}$. Secundus autem, qui inuentus est habere $\frac{6}{7}$ 2℘ + 100. habebit $175\frac{15}{19}$. Tertius deniq; habens $\frac{1\frac{3}{49}}{}$ 2℘ + $\frac{1000}{7}$. habebit $166\frac{6}{19}$. quod probatur. Nam si primus det 100. aur. alijs duobus habebunt alij duo $442\frac{1}{19}$. qui numerus quintuplus est reliquæ summæ primi $88\frac{8}{19}$. Et si secundus alijs duobus det 100. aur. habebunt alij duo $454\frac{14}{19}$. qui numerus sextuplus est summæ reliquæ secundi $75\frac{15}{19}$. Denique si tertius alijs duobus det 100. aur. habebunt alij duo $464\frac{4}{19}$. qui numerus septuplus est reliquæ summæ tertij $66\frac{6}{19}$.

LXVI. 66 *Tres pecuniam habent. Primus reliquis dicit, si vos daretis mihi 100. aur. fieret mea summa vestræ summæ reliquæ æqualis. Secundus reliquis dicit, si daretis mihi 100. aur. fieret mea summa vestræ summæ reliquæ dupla. Tertius denique dicit reliquis, si mihi daretis 100. aur. fieret mea summa reliquæ vestræ summæ tripla. Quæritur vniuscuiusque summa.*

PONATVR pecunia primi 1 2℘. qui si acceperit 100 aur. ab alijs duobus habebit 1 2℘ + 100. ac tantundem habebunt tunc alij duo, atque idcirco antequam dederunt 100. aur. habuerunt 1 2℘ + 200. Omnesq; tres habebunt 2 2℘ + 200.

Ponatur pecunia secundi 1 A. qui si acceperit 100. aur. ab alijs duobus, habebit 1 A + 100. qui numerus duplus est summæ reliquæ primi, ac tertij. quæ antequam dederint 100. aur. alijs duobus, est 2 2℘ + 200 —— 1 A. & postquam dederint 100. aur. alijs duobus, habebunt 2 2℘ + 100 —— 1 A. Huius ergo duplum 4 2℘ + 200 —— 2 A, æquale erit 1 A + 100. Et additis 2 A. vtrobique, æquatio erit inter 4 2℘ + 200. & 3 A. + 100. Et ablatis 100. vtrinque, inter 4 2℘ + 100. & 3 A. Diuisisque duobus hisce numeris per 3. erit æquatio inter $\frac{4}{3}$ 2℘ + $\frac{100}{3}$. & 1 A. Secundus ergo habet $\frac{4}{3}$ 2℘ + $\frac{100}{3}$. quoniam posuimus eum habere 1 A.

Ponatur denique pecunia tertij 1 B, qui si acceperit 100. aur. ab alijs duobus, habebit 1 B + 100. qui numerus triplus est summæ reliquæ primi ac secundi; quæ antequam dederint 100. aur. alijs duobus, est $\frac{2}{3}$ 2℘ + $\frac{200}{3}$. & postquam dederint 100. aur. alijs duobus, habebunt $\frac{7}{3}$ 2℘ —— $\frac{200}{3}$. Huius ergo triplum 7 2℘ —— 200. æquale est 1 B + 100. Et additis 200. vtrinque, æqualitas erit inter 7 2℘. & 1 B + 300. Ablatisque 300. vtrobique, inter 7 2℘ —— 300. & 1 B. Tertius igitur, quem posuimus habere 1 B. habebit 7 2℘ —— 300.

Itaque cum primus habeat 1 2℘. Secundus $\frac{4}{3}$ 2℘ + $\frac{100}{3}$ & tertius 7 2℘ —— 300. habebunt omnes tres simul $9\frac{1}{3}$ 2℘ —— $\frac{800}{3}$ Habebant autem & omnes simul 2 2℘ + 200. Est ergo æqualitas inter $9\frac{1}{3}$ 2℘ —— $\frac{800}{3}$. & 2 2℘ + 200. Ablatisque 2 2℘. vtrobique, inter $7\frac{1}{3}$ 2℘ —— $\frac{800}{3}$. & 200. Additisque $\frac{800}{3}$. vtrinque, inter $7\frac{1}{3}$ 2℘. & $\frac{1400}{3}$. Diuisis igitur $\frac{1400}{3}$. per $7\frac{1}{3}$. fiet 12℘. $63\frac{1}{11}$. pecunia primi. Secundus vero, qui inuentus est habere $\frac{4}{3}$ 2℘ + $\frac{100}{3}$. habebit $118\frac{2}{11}$. Tertius denique, quem inuenimus habere 7 2℘ —— 300. habebit $145\frac{5}{11}$. quod probatur. Nam primus cum 100. habebit summam $163\frac{7}{11}$. æqualem summæ reliquorum, si prius dederint 100. aur. Secundus vero cum 100. faciet summam $218\frac{2}{11}$. duplam reliquorum summæ, postquam 100. aur. dederint. Tertius denique cum 100. faciet summam $245\frac{5}{11}$. triplam summæ reliquorum, postquam dederint 100. aur.

LXVII. 67 *Tres habent pecuniam. Dicit primus reliquis, Si mihi daretis $\frac{1}{3}$. vestræ summæ, haberem 100. aur. Secundus vero dicit reliquis, si mihi daretis $\frac{1}{3}$. vestræ summæ, haberem 100. aur Tertius denique reliquis dicit, si mihi daretis $\frac{1}{4}$. vestræ summæ, haberem 100. aur. Quæritur pecunia vniuscuiusque.*

PONATVR pecunia primi 100 —— 1 2℘. Ergo reliqui duo habebunt 2 2℘. Ita enim si dent $\frac{1}{3}$. nimirum 1 2℘. primo, habebit primus 100. aur. Omnesque tres simul habebunt 100 + 1 2℘.

Ponatur secundi pecunia 1 A, habebuntque primus ac tertius 100 + 1 2℘ — A, qui si secundo dent $\frac{1}{3}$. nimirum $\frac{100}{3}$ + $\frac{1}{3}$ 2℘ —— $\frac{1}{3}$ A. habebit secundus 1 A + $\frac{100}{3}$ + $\frac{1}{3}$ 2℘ —— $\frac{1}{3}$ A, hoc est, $\frac{2}{3}$ A + $\frac{100}{3}$ + $\frac{1}{3}$ 2℘. qui numerus

numerus æqualis est 100. aur. Si ergo auferantur $\frac{100}{3}$. vtrobique, erit æquatio inter $\frac{2}{3}$ A + $\frac{1}{3}$ 2℘. & $\frac{200}{3}$. Ablatisq; $\frac{1}{3}$ 2℘ vtrinque, inter $\frac{2}{3}$ A, & $\frac{200}{3}$ —— $\frac{1}{3}$ 2℘. Diuisisque duobus hisce numeris per $\frac{2}{3}$. erit æqualitas inter 1 A, & 100 —— $\frac{1}{2}$ 2℘. Secundus ergo habebit 100 —— $\frac{1}{2}$ 2℘.

Ponatur pecunia tertij 1 B. Et quia primus ac secundus habent 200 —— $\frac{1}{2}$ 2℘. si tertio dent $\frac{1}{4}$. nimirum 50. — $\frac{1}{8}$ 2℘. habebit tertius 1 B + 50 —— $\frac{1}{8}$ 2℘. qui numerus æqualis est 100. aur. Ablatisque 50. vtrinque, erit æqualitas inter 1 B —— $\frac{1}{8}$ 2℘. & 50. Additisque $\frac{1}{8}$ 2℘ vtrobique, inter 1 B, & 50 + $\frac{1}{8}$ 2℘. Tertius igitur habebit 50 + $\frac{3}{8}$ 2℘.

Itaq; cũ primus habeat 100 — 1 2℘. Secũdus 100 — $\frac{1}{2}$ 2℘. & tertius 50 + $\frac{1}{8}$ 2℘. habebũt omnes tres simul 250 — $\frac{5}{8}$ 2℘. Habebant aũt omnes tres simul ẽt 100 + 1 2℘. Est igitur æquatio inter 250 — $\frac{5}{8}$ 2℘. & 100 + 1 2℘. Additisque $\frac{5}{8}$ 2℘. vtrobiq;, inter 250. & 100 + $2\frac{1}{8}$ 2℘. Ablatisq; 100. vtrinq;, inter 150. & $2\frac{1}{8}$ 2℘. Diuisis igitur 150. per $2\frac{1}{8}$. fiet 12℘. $70\frac{10}{17}$. Primus igitur habens 100 — 12℘, habebit $29\frac{7}{17}$. Secundus autem habens 100 — $\frac{1}{2}$ 2℘. habebit $64\frac{12}{17}$. Tertius denique habens 50 + $\frac{1}{8}$ 2℘. habebit $76\frac{8}{17}$. Nam tam primus cum $\frac{1}{3}$. summæ reliquorum duorum, quam secundus cum $\frac{1}{3}$ summæ aliorum duorum, & quam tertius cum $\frac{1}{4}$. summæ aliorum duorũ habet 100. aur.

LXVIII. 68 *Tres habent pecuniam. Primus reliquis dicit, si vobis darem $\frac{1}{2}$. meæ summæ, haberetis 100. aur. Secundus vero reliquis dicit, si vobis darem $\frac{1}{3}$. meæ summæ, haberetis 100. aur. Tertius denique reliquis dicit, si vobis darem $\frac{1}{4}$. meæ pecuniæ, haberetis 100. aur.*

VEL

Secundus, ac tertius dicunt primo, si nobis dares $\frac{1}{2}$. tuæ pecuniæ, haberemus 100. aur. At primus, ac tertius dicunt secundo, si nobis dares $\frac{1}{3}$. tuæ pecuniæ, haberemus 100. aur. Denig. primus, ac secundus dicunt tertio, si nobis dares $\frac{1}{4}$. tuæ pecuniæ, haberemus 100. aur. Quæritur vniuscuiusque summa.

PONATVR pecunia primi 1 2℘. Ergo reliqui duo habebunt 100 —— $\frac{1}{2}$ 2℘. vt accipientes $\frac{1}{3}$. primi, nimirum $\frac{1}{3}$ 2℘. habeant 100. Omnesque tres habebunt $\frac{1}{2}$ 2℘ + 100.

Ponatur pecunia secundi 1 A, eritque summa primi ac tertij $\frac{1}{2}$ 2℘ + 100 — 1 A. Et si acceperint $\frac{1}{3}$. secundi, nimirum $\frac{1}{3}$ A, habebunt $\frac{1}{2}$ 2℘ + 100 —— 1 A + $\frac{1}{3}$ A, qui numerus æqualis est 100. Additis ergo 1 A, vtrobique, erit æquatio inter $\frac{1}{2}$ 2℘ + 100 + $\frac{1}{3}$ A. & 100 + 1 A. Ablatisque 100. vtrinque, inter $\frac{1}{2}$ 2℘ + $\frac{1}{3}$ A. & 1 A. Et rursum ablata $\frac{1}{3}$ A, vtrobique, inter $\frac{1}{2}$ 2℘. & $\frac{1}{3}$ A. Diuisoque vtroque numero per $\frac{1}{2}$. inter $\frac{1}{4}$ 2℘. & 1 A. Habet ergo secundus $\frac{1}{4}$ 2℘.

Ponatur pecunia tertij 1 B. Et quoniam primus & secundus habent $\frac{3}{4}$ 2℘. Si acceperint $\frac{1}{4}$. tertij, habebunt $\frac{3}{4}$ 2℘ + $\frac{1}{4}$ B. summam æqualem 100. aur. Ablatisque $\frac{3}{4}$ 2℘ vtrobique, erit æquatio inter $\frac{1}{4}$ B & 100 —— $\frac{3}{4}$ 2℘. Diuiso ergo vtroque numero per $\frac{1}{4}$. erit 1 B, æqualis 400 —— 72℘. Tertius ergo habet 400 —— 72℘.

Itaque cum primus habeat 1 2℘. secundus $\frac{1}{4}$ 2℘, & tertius 400 —— 72℘ habebunt omnes tres 400 —— $\frac{25}{4}$ 2℘. Habebant autem & omnes simul $\frac{1}{2}$ 2℘ + 100. Si igitur vtrinque addantur $\frac{25}{4}$ 2℘. erit æqualitas inter 400. & $\frac{27}{4}$ 2℘ + 100. Ablatisque 100. vtrobique, inter $\frac{27}{4}$ 2℘. & 300. Diuisis igitur 300. per $\frac{27}{4}$. fiet 12℘. $52\frac{8}{27}$. pecunia primi. Secundi pecunia, qui inuentus est habere $\frac{1}{4}$ 2℘. erit $39\frac{1}{27}$. aur. Tertius denique habens 400 —— 72℘. habebit $34\frac{18}{27}$. aur. quod probatur. quia tam secundus ac tertius cum $\frac{1}{2}$. primi, quam primus ac tertius cum $\frac{1}{3}$. secundi, & quam primus & secundus cum $\frac{1}{4}$. tertij habent 100. aur.

LXIX. 69 *Tres mercatores Societatem ineunt per 12. menses. Primus imponit 100. aur. Secundus 200. aur. & tertius 300. aur. Post menses autem duos imponit primus aliquot libras piperis, cuius 3. libræ valent 1. aur. Et post menses quatuor secundus imponit massam argẽti, cuius 1. marca valet 7. aur. Transactis 12. mensibus, recipit primus ex lucro 50. aur. secundus 110. aur. & tertius 90. aur. ita vt totum lucrum fuerit 250. aur. Quæritur, quot libras piperis primus imposuerit, & quot marcas argenti secundus.*

PONE primum imposuisse 1 2℘. librarum piperis: Et secundum 1 A. marcarum argenti. Cum ergo tres libræ piperis valeant 1. aur. valebit 1 2℘ lib. aur. $\frac{1}{3}$ 2℘. Et cum 1. marca argenti valeat 7. aur. valebit 1 A marcarum aur. 7 A, vt hic vides.

Lib.	aur.	Lib.	aur.
3	1	12℘?	$\frac{5}{3}$ 2℘
Marca	aur.	Marc.	aur.
1	7	1 A?	7 A

Et quia pecunia cuiusque multiplicanda est in tempus, si 100. aur. primi ducantur in 12. mens. fiet numerus 1200. Et ex 200. aur. secundi in 12. mens. fiet numerus 2400. & ex 300. aur. tertij in 12. mens. fiet numerus 3600. Rursus ex $\frac{1}{3}$ 2℘ primi in 10. mens. quibus in Societate stetit, (nam post duos menses imposuit $\frac{1}{3}$ 2℘ aur. hoc est, 1. lib. piperis) fit numerus $\frac{10}{3}$ 2℘. aur. Et ex 7. A, in 8. mens. quibus in commertio steterunt, (nam post 4. mens. imposuit 1 A, marc. quæ valet 7 A) fit numerus 56 A marc. Igitur numerus primi est 1200 + $\frac{10}{3}$ 2℘. Secundi 2400 + 56 A marc. & tertij 3600. qui tres numeri faciunt 7200 + $\frac{10}{3}$ 2℘ + 56 A. Vnde sic stabit exemplum ad regulam. Trium ter repetitam.

$$7200 + \tfrac{10}{3}\,2℘ + 56\,A \qquad \begin{cases} 1200 + \frac{10}{3}\,2℘? & 50 \\ 250 \left\{ \begin{array}{l} 2400 + 56\,A? \\ 3600? \end{array} \right. & 110 \\ & 90 \end{cases}$$

hoc est, si 7200 + $\frac{10}{3}$ 2℘ + 56 A, lucrantur 250. aur. quid lucrabuntur aur. 1200 + $\frac{10}{3}$ 2℘. & quid aur. 2400 +

[a] *19. septi.* 2400+56A. & quid aur. 3600? Erunt autem lucra aur. 50. 110. & 90. vt in quæstione positum est. [a] Ergo tantum fiet ex primo numero in quartos, quantum ex secundo in tertios. Fit autem ex primo in quartum 90. numerus 648000+3002℣+5040A. qui æqualis erit numero 900000. qui fit ex secundo 250. in tertium 3600. Ablatis igitur 648000. vtrobique, erit æquatio inter 3002℣+5040A. & 252000. Et ablatis 3002℣ vtrinque, inter 5040A, & 252000−3002℣. Diuisisq; duobus hisce numeris per 5040. fiet 1A, 50−$\frac{5}{7}$2℣. Ac proinde 56A facient 2800−$3\frac{1}{7}$2℣. quibus additis ad 7200+$\frac{10}{3}$2℣. siue +$3\frac{1}{7}$2℣. fiet numerus 10000. qui primum locum obtinebit in regula trium, pro numero 7200+$\frac{10}{3}$2℣+56A. vt alios etiam numeros Cossicos resoluere possis, vt hic cernis.

	1200 + $\frac{10}{3}$2℣?	50
10000	250 { 2400 + 56 A?	110
	3600?	90

Nam ex 10000. in 110. fit numerus 1100000. æqualis numero 600000+14000 A, facto ex 250. in 2400 +56A. Ablatis ergo 600000. vtrinque, erit æqualitas inter 500000. & 14000 A. Diuisisque duobus hisce numeris per 14000. fiet 1A, $35\frac{5}{7}$ marc. argenti. Denique ex 10000. in 50. fit numerus 500000. æqualis numero 300000+$\frac{250000}{3}$2℣. facto ex 250. in 1200+$\frac{10}{3}$2℣. Ablatis ergo 300000. vtrobique, erit æqualitas inter 200000. & $\frac{250000}{3}$2℣. Diuisisque 200000. per $\frac{250000}{3}$2℣ fiet 12℣. 240. libræ piperis. quod probatur sic. $35\frac{5}{7}$. mar. argenti valebunt aur. 250. & 240. lib. piperis aur. 80. vt hic vides.

Marca	aur.	Marc.	aur.
1	7	$35\frac{5}{7}$?	250
Lib.	aur.	Lib.	aur.
3	1	240?	80

Et quia aurei 250. steterunt in commercio 8. menses: ductis 250 in 8. fit numerus 2000. qui addendus est ad 2400. loco 56. A. vt numerus tertius in medio fit 4400. Item quia aur. 80 steterunt in commercio 10. menses: ductis 80. in 10. fit numerus 800. qui ad 1200. addendus est loco $\frac{10}{3}$2℣. vt numerus tertius in supremo loco sit 2000. Vnde sic denuo stabit exemplum.

	2000?	50
10000	250 { 4400?	110
	3600?	90

Vbi vides, tres numeros tertios facere 10000. primum numerum regulæ Trium: eosdemque lucrifacere 50. 110. & 90. &c.

LXX. 70 *Tres mercatores ineunt Societatem. Primus imponit 35, aur. amplius, quam secundus. At secundus, ac tertius simul imponunt 84. aur. Lucrum commune est 66. aur. ex quibus tertius pro parte sui lucri recipit aur. 21. Quæstio est, quantum quisque imposuerit, & quantum tam primus, quam secundus de lucro receperit.*

PONE, primum imposuisse 12℣+35. aur. Secundum 12℣. aur. vt primus vltra huius summam imposuerit præterea 35. aur. Et tertium aur. 84−12℣. vt summa secundi ac tertij faciat 84. aur. Deinde ponatur lucrum primi 1A; & secundi 1B. Et quoniam lucrum tertij est 21. aur. sic stabit exemplum.

	12℣+35?	1A
119+12℣.	66 { 12℣?	1B
	84−12℣?	21

[b] *19. septi.* [b] Et quoniam tantum fit ex primo numero in quartum, quantum ex secundo in tertium: Fit autem numerus 2499+212℣. ex primo 119+12℣ in quartum infimum: Et ex secundo 66. in tertium infimum 84−12℣. fit numerus 5544−662℣. qui illi æqualis est. Additis igitur 662℣ vtrinque, fiet æquatio inter 2499+87 2℣. & 5544. Et ablatis 2499. vtrobique, inter 872℣, & 3045. Diuisis ergo 3045. per 87. fiet 12℣. 35. ac proinde primus imposuit 70. aur. nimirum 12℣+35. Et secundus 35. nimirum 12℣. Et tertius 49. nimirum 84−12℣. Et primus numerus regulæ erit 154. Ergo iam ita stabit exemplum.

	70?	1A
154	66 { 35?	1B
	49?	21

Ex 154. in 1A, fit numerus 154A, æqualis numero 4620. facto ex 66. in 70. Diuiso ergo vtroque numero per 154. fiet 1A, 30. Item ex 154. in 1B, fit numerus 154B, æqualis numero 2310. facto ex 66. in 35. Diuiso ergo vtroque numero per 154. fiet 1B, 15. Recepit ergo primus de lucro 30. aur. & secundus 15. aur. quod ita probatur.

	70?	30
154	66 { 35?	15
	49?	21

AENIG-

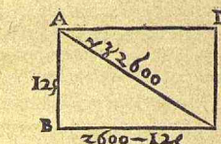
ÆNIGMATA VARIA AD FIGVRAS Geometricas pertinentia.

CAPVT XXXII.

IN extremo hoc cap. reducentur ad vsum omnia fere illa, quæ de numeris irrationalibus præcepta sunt: quippe cum ænigmata proponenda sint varia de figuris Geometricis, in quibus plerumq; latera, diametri, atque areæ per numeros surdos explicari solent. Horum ænigmatum primum sit hoc.

1 *Est rectangulum quoddam altera parte longius ABCD, cuius area continet palmos 120. diameter vero palm. √ 2600. Quæruntur latera.* I.

[a] *47 pri.* [a] QVONIAM quadrata laterum AB, BC, æqualia sunt quadrato diametri AC. quod est 2600. si quadratum lateris AB, ponatur 12℣, erit quadratum lateris BC, 2600 −− 12℣. Ergo latera ipsa erunt √ 12℣, & √ (2600 −− 12℣) quæ inter se multiplicata producent aream BD, nimirum palm. 120. vt cap. 1. lib. 3. Geom. pract. diximus, atque idcirco quadrata laterum 12℣, & 2600 −− 12℣. inter se multiplicata producent quadratum areæ, nimirum 14400. ex coroll. Lemmatis ænig. 26. cap. 30. Cum ergo ex 12℣. in 2600 −12℣ fiat 2600 2℣ −1℣. erit æquatio inter 14400. & 26002℣ −1℣. Additoque 1℣. vtrinque, inter 1℣ +14400. & 26002℣. Ablatisque 14400. vtrobique, inter 1℣. & 26002℣ −14400. Iam sic. Semissis numeri radicum est 1300. à cuius quadrato 1690000. subtractis 14400. remanent 1675600.



Ad huius numeri radicem quadratam √ 1675600. si addatur prædicta semissis 1300. fiet 12℣. 1300 + √ 1675600. Et si eadem radix ex prædicta semisse detrahatur, reliqua fiet minor radix 1300 − √ 1675600 (quia hæc æquatio duplicem habet radicem, propter signum − quo numerus absolutus afficitur.) Ergo minoris lateris AB, quadratum erit 1300 − √ 1675600. maioris autem lateris BC, quadratū erit 1300 + √ 1675600. quod etiam relinquitur, si quadratum 1300 − √ 1675600. lateris AB, detrahatur ex 2600. quadrato diametri AC, vt in hac formula apparet. Vides ergo duo quadrata 1300 −− √ 1675600. & 1300 + √ 1675600. simul facere 2600. quadratum diametri. Et si eorum latera √ (1300 − √ 1675600.) & √ (1300 + √ 1675600) inter se multiplicentur, producí aream rectāguli √ 14400. hoc est, 120. palm. quę multiplicatio fiet, si quadratū posterioris particulæ 1675600 demātur ex 1690000 quadrato prioris particulæ, & reliquo numero signum √, præfigatur. vt ex ijs constat, quæ cap. 23. & 24. scripsimus, atque in hac formula apparet.

2600 + √ o	
1300 −− √ 1675600	
1300 + √ 1675600	

√ (1300 −− √ 1675600)	
√ (1300 + √ 1675600)	
√ 14400	

ALITER. Posito quadrato minoris lateris AB, 12℣. & idcirco quadrato maioris lateris 2600 − 12℣. erunt ipsa latera √ 12℣, & √ (2600 − 12℣) quæ inter se multiplicata facient aream 120. palm. Faciunt autem √ (26002℣ − 1℣) vt hic vides. quæ multiplicatio fiet, si ipsa quadrata 2600 − 12℣. & 12℣. inter se multiplicentur, & producto numero signum √. præfigatur. Est igitur æquatio inter 120. & √ (26002℣ − 1℣) atque ideo & inter eorum quadrata 14400. & 2600 2℣ − 1℣. vt supra, &c.

√ (2600 −− 1 2℣)	
1 2℣	
√ (26002℣ −− 1 ℣)	

ALITER. Ponatur minus latus AB, 12℣. ideoque eius quadratum 1℣. Erit igitur quadratum maioris lateris BC, 2600 − 1℣. & ipsum latus BC, √ (2600 − 1℣.) Ducatur AB, 12℣. in BC, √ (2600 − 1℣.) quod fiet, vt cap. 26. dictum est, si 12℣. reducatur ad quadratum 1℣, præponaturque signum √. Nam si √ 1℣. ducatur in √ (2600 − 1℣) quod fiet, si eorum quadrata 1℣. & 2600 − 1℣. inter se multiplicentur, vt cap. 26. dictum est, producetur numerus √ (2600℣ − 1℣℣) pro area rectanguli 120. Ergo æquatio erit inter √ (2600℣ − 1℣℣) & 120. ac proinde & inter eorum quadrata 2600℣ − 1℣℣. & 14400. Et addito 1℣℣. vtrobique, inter 2600℣. & 1℣℣ +14400. Ablatisque 14400. vtrinque, inter 2600℣ − 14400. & 1℣℣. Iam sic radicem Zensizensicā eruemus. Semissis numeri Zensorum est 1300. à cuius quadrato 1690000. demptis 14400. remanent 1675600. Ad huius numeri radicem quadratam √ 1675600. si addatur prædicta semissis 1300. fiet 1℣. 1300 + √ 1675600. Et si eadem radix ex prædicta semisse demātur, relinquetur minus quadratum 1300 − √ 1675600. Ergo maioris lateris BC, quadratum erit 1300 + √ 1675600. & minoris lateris AB, quadratū erit 1300 − √ 1675600. & radix maior erit √ (1300 + √ 1675600) & minor, √ (1300 − √ 1675600) vt supra, &c.

[a] 47. primi ALITER, [a] Quoniam quadrata laterum AB, BC, faciunt 2600. & ex vno latere in aliud fit area 120. inueniendi erunt per ænigma 26. cap. 30. duo numeri, qui inter se multiplicati faciant 120. & eorum quadrati faciant 2600. quod ita fiet. Ponatur minor numerus quadratus 1☗. & maior 2600—1☗. Et quoniam per Lemma

[b] 20 septi. ænigmatis 26. cap. 30. numerus 120. quem latera quadratorum 1☗. & 2600——1☗. producunt, medio loco proportionalis est inter ipsa quadrata; [b] erit numerus 2600☗——1☗☗. factus ex 1☗ in 2600——1☗. æqualis quadrato numeri 120. hoc est, numero 14400. Est ergo æquatio inter 2600☗——1☗☗. & 14400. Additoque 1☗☗. vtrobique, inter 2600☗. & 1☗☗+14400. Et ablatis 14400, vtrinq; inter 2600☗—14400. & 1☗☗. vt supra, &c.

II. 2 *Campus altera parte longior habet latera in proportione septupla: & eorum quadrata simul sumpta ad eorum summam proportionem habent centuplam. Quæruntur latera, area, & diameter.*

PONATVR minus latus 1☍. & maius 7☍, quorum summa 8☍. & quadrata 1☗. 49☗. summam faciunt 50☗. centuplam summæ 8☍. Igitur æquatio est inter 50☗. & 800☍. Diuisis ergo 800. per 50. fiet 1☍. 16 minus latus. Maius erit 112. in proportione septupla. Ergo area erit 1792. producta ex vno latere in aliud. Diameter vero erit √☗ 12800. Hoc est, quadrata laterum 256. & 12544. facient summam 12800. centuplam summę laterum 16. & 112. quæ est 128. at quadratum diametri erit 12800. summa duorum quadratorum laterum, ac proinde diameter √☗ 12800.

III. 3 *Est rectangulum 4500. palmorũ, & longitudo tripla est latitudinis. Quærũtur latera, & diameter.*

PONATVR latitudo 1☍. & longitudo 3☍. Hæc latera inter se multiplicata producunt aream 3☗. æqualẽ 4500. Diuisis ergo 4500 per 3. fiet 1☗. 1500. & 1☍. √☗ 1500. latitudo rectanguli: & eius triplum √☗ 13500 erit eiusdem longitudo. Ex latitudine in longitudinem fit area √☗ 20250000. hoc est, 4500. Diametri autem quadratum erit 15000. æquale duobus quadratis laterum, & ipsa diameter erit √☗ 15000.

IIII. 4 *Est parallelepipedum, hoc est, columna quadrilatera palmorum 3375. Altitudo ad longitudinẽ basis, & hæc longitudo ad latitudinem basis proportionem habet sesquialteram, Quæruntur mensuræ.*

PONATVR altitudo 9☍ longitudo 6☍ & latitudo 4☍. in continua proportione sesquialtera. Latitudo in longitudinem facit basem 24☗. & hæc in altitudinem facit aream parallelepipedi 216☍☍. æqualem 3375. Diuisis igitur 3375. per 216. fiet 1☍☍ 15 $\frac{135}{216}$. & 1☍. cubica $2\frac{1}{2}$. Ergo 9☍. facient $22\frac{1}{2}$. altitudinem: Et 6☍ facient 15. longitudinem basis: Et 4☍. facient 10. latitudinem basis. quæ mensuræ inuicem multiplicatæ faciunt 3375.

V. 5 *Est parallelepipedum basem habens quadratam, cuius latus subdecuplum est altitudinis parallelepipedi, cuius area continet 6780. palmos. Quæritur basis, & altitudo.*

PONATVR latus basis 1☍. ideoque altitudo parallelepipedi 10☍. Ex 1☍. in se fit 1☗. nimirum basis quadrata, quæ ducta in altitudinem, id est, in 10☍. facit 10☍☍. aream scilicet parallelepipedi æqualem 6780. Diuisis igitur 6780. per 10. fiet 1☍☍. 678. & 1☍. √☍☍ 678. latus basis. quod in se ductum facit √☍☍ 459684. aream basis. Altitudo vero ad latus decuplam habens proportionem erit √☍☍ 678000. quæ ducta in aream basis, id est, in √☍☍ 459684. facit √☍☍ 311665752000. aream totius parallelepipedi, nimirum 6780.

VI. 6 *Est superficies rectangula habens longitudinem quadruplam latitudinis, & aream 576. Quæruntur latera.*

PONATVR minus 1☍. & maius 4☍. Hæc inter se multiplicata producunt 4☗. aream rectanguli æqualem 576. Diuisis ergo 576 per 4. fiet 1☗. 144. & 1☍ 12. minus latus. Maius ergo erit 48.

VII. 7 *Est columna quadrangula rectangula, cuius basis latera proportionem habent sesquitertiam, & altitudo ad latus maius basis proportionem habet duplam superbipartientem tertias: soliditas denique columnæ continet palm. 93312. Quæruntur dimensiones singulæ.*

PONATVR latus minus basis 3☍. & maius 4☍. altitudo vero $10\frac{2}{3}$☍. vt ad maius latus 4☍. habeat proportionem duplam superbipartientem tertias, & maius latus ad minus sesquitertiam. Hi tres numeri inter se multiplicati producunt 128☍☍. soliditatem videlicet columnæ æqualem 93312. Diuisis igitur 93312. per 128. fiet 1☍☍. 729 & 1☍. 9. Ergo latus minus basis, quod posuimus 3☍. erit 27. & maius 4☍. erit 36. altitudo vero $10\frac{2}{3}$☍. erit 96. Atque tres hæ dimensiones inter se multiplicatæ faciunt aream 93312.

VIII. 8 *Sunt duæ turres inæquales supra duas bases quadratas erectæ. Latera basium proportionem habent sesquitertiam, qualem etiam habent & altitudines & soliditates: ipsæque altitudines permutatim sunt laterum basium duplæ. Soliditates denique ambarum turrium simul complectuntur palm. 21000. Quæruntur dimensiones singulæ.*

PONATVR latus minoris basis 3☍. & maioris 4☍. vt hoc ad illud proportionem habeat sesquitertiam sine fractione. Eritque minor basis 9☗. & maior 16☗. Et quia altitudines laterum basium sunt permutatim duplæ. hoc est, altitudo turris maioris basis dupla est lateris basis minoris, & altitudo turris minoris

[c] 15. quin. basis dupla est lateris maioris basis; erit illa 6☍, & hæc 8☍, habebuntque proportionem sesquitertiam, [c] eandem nimirum, quam latera basium habent, eritque turris minoris basis altior, quam turris maioris basis.

Quoniam

Quoniam vero, vt in sequenti Lemmate demonstrabimus, duo numeri multiplicantes per crucem duos numeros, qui habeant duplicatam proportionem priorum numerorum, producunt duos numeros in eadem cum illis proportione: [a] habentque bases duplicatam proportionem laterum basium, ideoque & altitudinem: fit vt maior altitudo 8☍. ducta in minorem basem 9☗. producat 72☍☍, turrim minoris basis, & minor altitudo 6☍, ducta in maiorem basem 16☗, producat 96☍☍. turrim maioris basis; quę per prędictum Lemma sequens habebunt eandem proportionem sesquitertiam, quam ipsæ altitudines, vel latera basium habent: eritque propterea turris maioris basis, & minoris altitudinis maior, ac turris minoris basis, & maioris altitudinis minor. Atque ambæ turres simul conficiunt 168☍☍. summam æqualem 21000. Diuisis ergo 21000. per 168. fiet 1☍☍. 125. & 1☍. 5. Ideoque latus maioris turris. quod positum est 4☍. erit 20. palm. Et latus minoris turris positum 3☍. erit 15. palm. Et reliquæ dimensiones erunt, vt in hac formula positæ sunt. Vbi vides, & latera basium & altitudines, soliditatesque turrium habere proportionem sesquitertiam, & bases ipsas proportionem superseptupartientem nonas, duplicatam scilicet proportionis sesquitertiæ. Soliditates deniq; ambarum turriũ conficere palm. 21000. vt ænigma proponit.

[a] 20. sexti.

8 2☍ X 16 ☗ 96 ☍☍
6 2☍ X 9 ☗ 72 ☍☍

Latus basis turris minoris.	15
Latus basis turris maioris.	20
Basis minoris turris	225
Basis maioris turris.	400
Altitudo minoris turris.	40
Altitudo maioris turris.	30
Soliditas minoris turris.	9000
Soliditas maioris turris.	12000

LEMMA.

SI duo numeri in duos, qui habeant proportionem duplicatam illorum, per crucem multiplicentur, habebunt producti eandem, quam ipsi numeri, proportionem.

SINT *duo numeri quicunque 8. & 6 proportionem sesquitertiam habentes: & alij duo 16. & 9. habentes proportionem duplicatam proportionis sesquitertiæ, nimirum superseptupartientem nonas, vt hic apparet 16. 12. 9. Fiatque 72. ex 8. in 9. & 96 ex 6. in 16. Dico esse 96. ad 72. vt 8. ad 6. Cum enim 16. & 9. habeant proportionem duplicatam proportionis 8. ad 6. cadet inter illos medius proportionalis 12. in proportione 8. ad 6. ac proinde cum sit, vt primus 8. ad secundum 6. ita tertius 16. ad quartum 12.* [b] *fiet idem numerus ex primo 8. in quartum 12. qui ex secundo 6. in tertium 16. nimirum 96. Item cum sit, vt primus 8. ad secundum 6. ita tertius 12. ad quartum 9.* [c] *fiet idem numerus 72. ex primo 8. in quartum 9 qui ex secundo 6. in tertium 12. Quo circa cum 96. fiat ex 12. in 8. & 72. ex 12. in 6.* [d] *erit eadem proportio 96. ad 72. quæ 8. ad 6.*

8 X 16 96
12
6 9 72

[b] 19. septi. [c] 19. septi. [d] 17. septi.

HINC *fit, minorem altitudinem ducendam esse in maiorem basem, & maiorem altitudinem in minorem basem, vt soliditates procreatæ eandem habeant proportionem, quam altitudines; ac propterea maiorem turrem habere minorem altitudinem: minorem vero turrem altitudinem maiorem. Propter hanc causam dictum est in ænigmate, altitudines esse permutatim duplas laterum basium.*

9 *Est triangulum rectangulum, cuius basis (voco basem, latus recto angulo oppositum) continet palm. 52. Latera autem proportionem habent duplam superbipartientem quintas. Quæruntur duo latera.* IX.

PONATVR minus 5☍. & maius 12☍. vt sine fractione proportionem habeant duplam superbipartientem quintas: Quadrata laterum sunt 25☗. & 144☗. quæ simul faciunt summam 169☗. [e] æqualem quadrato basis, numero scilicet 2704. Diuisis igitur 2704. per 169. fiet 1☗. 16. & 1☍. 4. Minus ergo latus 5☍. erit 20. palm. & maius 12☍. erit 48. palm. quod probatur. Nam duo quadrata laterum 400. & 2304. faciunt 2704. quadratum basis.

[e] 47. primi

10 *Est altera parte longius, cuius area 500. palm. & duo latera simul faciunt 100. palm. Quæruntur latera.* X.

PONATVR vnum 1☍. & alterum 100——1☍. Hæc multiplicata inter se faciunt 100☍——1☗. aream rectanguli æqualem 500. Addito ergo 1☗. vtrinque, erit æquatio inter 100☍—1☗. & 1☗+500. Ablatisque 500. vtrobique, inter 100☍—500. & 1☗. Ita autem radix Zensica etuetur. Semissis numeri radicum est 50. à cuius quadrato 2500. demptis 500. remanet numerus 2000. ad cuius radicem √☗ 2000 si addatur prædicta semissis 50. fiet maior radix 50+√☗ 2000. Et si eadem radix √☗ 2000. ex prędicta semisse demtur, reliqua fiet minor radix, 50—√☗ 2000. Est igitur maius latus 50+√☗ 2000. minus autem 50—√☗ 2000. quod etiam habebitur, si maius detrahatur ex 100. summa laterum, vt hic vides. quod probatur, quia duo latera 50+√☗ 2000. & 50—√☗ 2000. faciunt 100. & inter se multiplicata producunt aream 500. quæ multiplicatio fiet, vt cap. 23. traditum est, si 2000. quadratum posterioris particulæ subducatur ex 2500 quadrato particulæ prioris, vt appositæ formula indicat.

100 + √☗ 0
50 + √☗ 2000
50 — √☗ 2000

50 + √☗ 2000
50 — √☗ 2000
500

XI. 11 *Est rectangulum, cuius diameter √8 180. & maius latus ad minus proportionem habet triplam. Quæruntur latera, & area.*

PONATVR minus latus 12ϱ, & maius 3 2ϱ, quorum quadrata 1☐, & 9☐, faciunt summam 10☐, [a] æqualem quadrato diametri, hoc est, numero 180. Diuisis ergo 180. per 10. fiet 1☐ 18. & 12ϱ, √8 18. latus minus. Maius ergo erit √8 162. illius triplum. Area autem erit √8 2916. id est, 54.

[a] *47. primi*

XII. 12 *Est triangulum rectangulum, cuius vnum latus est √8 18 + 3. Alterum autem latus, & basis simul faciunt √8 162 + 9. Quæruntur singula latera.*

PONATVR alterum latus incognitum 1 2ϱ, eritque propterea basis √8 162 + 9 — 12ϱ Quadrata laterum sunt 1☐, & 27 + √8 648. [b] quæ simul æqualia sunt quadrato basis, nimirum numero 243 — 18 2ϱ + 1☐ + √8 52488 — √8 648☐ vt duæ propositæ formulæ

[b] *47. primi*

```
                √8 18 + 3
                √8 18 + 3
-------------------------
              + √8 162 + 9
        + 18 + √8 162
-------------------------
           27 + √8 648
```

```
                √8 162 + 9 − 1 2ϱ
                √8 162 + 9 − 1 2ϱ
-------------------------------------
              − √8 162☐ − 9 2ϱ + 1☐
        + √8 13122 + 81 − 9 2ϱ
  + 162 + √8 13122 − √8 162☐
-------------------------------------
        + 243 − 18 2ϱ + 1☐ + √8 52488 − √8 648☐
```

multiplicationis quadratæ indicant. Si ergo vtrinque auferatur √8 648. erit æquatio inter 1☐ + 27. & 243 — 18 2ϱ + 1☐ + √8 41472 — √8 648☐. Nam si auferatur √8 648. à √8 52488 (quæ commensurabiles sunt, habentes proportionem noncuplam, propterea quod, si √8 52488. diuidatur per √8 648. Quotiens fit √8 81. id est, 9.) reliqua fiet √8 41472. Ablatoque 1☐. vtrinque, inter 27. & 243 — 18 2ϱ + √8 41472 — √8 648☐. Ablatisque rursum 27. vtrobique, inter 0. & 216 — 18 2ϱ + √8 41472 — √8 648☐. Et additis vtrobique 18 2ϱ. & √8 648☐. inter 18 2ϱ + √8 648 hoc est, inter √8 648☐ + 18 2ϱ. & 216 + √8 41472. Diuiso ergo hoc numero per illum, (abiectis signis Cossicis 2ϱ. & ☐, ex diuisore. quia totum hoc aggregatum √8 648☐ + 18 2ϱ, est numerus radicum, quod in creatione numeri quadrati basis, numerus √8 648☐. factus sit ex 12ϱ. in √8 162. bis; ac propterea numerus √8 648☐. censeri debeat pro numero radicum. Consule ea, quæ prope finem c. 26. scripsimus. Abijciuntur autem signa Cossica 2ϱ. & ☐, ex diuisore. quemadmodum si æquatio sit inter 20. & 5 2ϱ. vt diuidantur 20. per 5. abijcitur signum 2ϱ, propterea quod 5 2ϱ, est numerus radicum; sicuti √8 648☐ + 18 2ϱ) proueniet æstimatio 12ϱ, nimirum alterius lateris trianguli, quod positum fuit 12ϱ.

VT autem hæc diuisio fiat, multiplicandus est tam diuisor √8 648 + 18. quam numerus diuidendus per √8 648 — 18. vt cap. 23. docuimus. Ita enim fiet nouus diuisor 324. & nouus diuidendus √8 3359232 + 1296. quæ multiplicationes hic cernuntur.

```
√8 648 + 18
√8 648 − 18
-----------
       324
```

```
                  216 + √8 41472
                  √8 648 − 18
-------------------------------
                − 3888 − √8 13436928
  + √8 302330 88 + √8 26873856
-------------------------------
        √8 3359232 + 1296
```

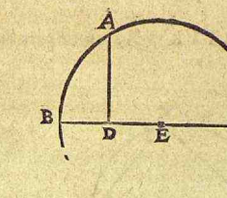
IN priori multiplicatione aufertur quadratum 324. posterioris particulæ 18. ex 648. quadrato prioris particulæ, vt cap. 23. docuimus. In posteriori vero detraximus √8 13436928. ex √8 302330 88. (quia commensurabiles sunt, habetque posterior numerus ad priorem proportionem sesquialteram) factusq; est residuus numerus √8 3359232. Item ex √8 26873856. id est, ex 5184. dempsimus 3888. factusque est totus productus √8 3359232 + 1296.

Iam vero si diuidatur √8 3359232. per 324. hoc est, per √8 104976. fiet Quotiens √8 32. Et diuisis 1296. per 324. fit Quotiens 4. Pretium ergo 12ϱ. est √8 32 + 4. atque tantum est alterum latus trianguli quæsitum, quod posuimus esse 12ϱ. Basis vero angulo recto opposita, quam statuimus √8 162 + 9 — 12ϱ. erit √8 50 + 5 qui numerus relinquitur, si radix inuenta √8 32 + 4. detrahatur ex √8 162 + 9. nimirum ex summa lateris quæsiti, ac basis. quod etiam patet, quia quadrata laterum simul sumpta faciunt 75 + √8 5000. quadratum basis inuentæ √8 50 + 5. Sunt enim duo illa quadrata 27 + √8 648. & 48 + √8 2048.

ALIVD exemplum facilius. Sit vnum latus 4. & summa alterius lateris cum base sit 8. Ponatur alterum latus incognitum 12ϱ. ac prinde basis 8 — 12ϱ. Quadrata duorum laterum 16. & 1☐. [c] sunt simul sumpta æqualia quadrato basis, numero videlicet 64 — 16 2ϱ + 1☐. Ablato ergo 1☐. vtrinque, erit æquatio inter 16. & 64 — 16 2ϱ. Additisque 16 2ϱ. vtrobique, inter 16 + 16 2ϱ. & 64. Ablatisque 16. vtrinque, inter 16 2ϱ. & 48. Diuisis ergo 48. per 16 fiet 12ϱ. 3. pro altero latere. Ac proinde basis 8 — 12ϱ. erit 5. quod probatur, cum quadrata laterum 16. & 9. æqualia sint quadrato 25. basis. Area vero trianguli erit 6. semissis nimirum numeri 12. producti ex vno latere in aliud.

[c] *47. primi*

13 *Est circulus, cuius diameter 120. & ex quodam puncto circumferentiæ demissa perpendicularis ad diametrum est √8 (2925 — √8 405000.) Quæruntur partes diametri.*



PONATVR minor pars BD, 1.2ϱ. ideoque maior CD, 120 — 12ϱ. Et quia, ex scholio propos. 13. lib. 6. Eucl. AD. est media proportionalis inter BD, CD; [a] erit rectangulum sub BD, CD, æquale quadrato ex AD. Fit autem ex BD, 12ϱ. in CD. 120 — 12ϱ. numerus 1202ϱ — 1☐. Hic ergo æqualis est quadrato rectę AD nimirũ numero 2925 — √8 405000. Addito ergo 1☐. vtrobiq;, erit æquatio inter 1202ϱ. & 1☐ + 2925 — √8 405000. Ablatisq; 2925 — √8 405000. vtrinq;, inter 1☐. & 1202ϱ — 2925 — √8 405000. Ex hoc ergo numero sic radicem quadratã eruemus. Semissis numeri radicum est 60. è cuius quadrato 3600. demptis 2925 — √8 405000. remanet numerus 675 + √8 405000. vt in hac formula vides. ad cuius radicem quadratam, quæ est √8 (675 + √8 405000) si addatur prædicta semissis 60. fit maior radix 60 + √8 (675 + √8 405000) atque tanta est portio CD. Et si eadem √8 (675 + √8 405000) detrahatur ex eadem semisse 60. remanebit minor radix 60 — √8 (675 + √8 405000) pro minore portione BD. quæ etiam habebitur, si ex tota diametro 120. detrahes portionem CD, nimirum 60 + √8 (675 + √8 405000) vt hic vides.

[a] *17. sexti.*

```
3600 + √8 0
2925 − √8 405000
----------------
675 + √8 405000
```

```
120 + √8 0
 60 + √8 (675 + √8 405000)
--------------------------
 60 − √8 (675 + √8 405000)
```

IAM vero vt æstimationem vtriusque portionis 60 + √8 (675 + √8 405000) & 60 — √8 (675 + √8 405000) inuenias, eruenda est radix ex hoc Binomio 675 + √8 405000. vt ad finem cap. 28. docuimus, hoc videlicet modo. Diuidatur maior particula 675. in duas partes per Lemma cap. 28. quæ inter se multiplicatæ producant quartam partem quadrati minoris particulæ √8 405000. quod ita fiet. Semissis numeri diuidendi 675. est $\frac{675}{2}$. ex cuius quadrato $\frac{455625}{4}$. detracta quarta parte quadrati minoris particulæ, quæ est $\frac{405000}{4}$. remanet numerus $\frac{50625}{4}$. cuius radix quadrata $\frac{225}{2}$. addita semissi prędictę $\frac{675}{2}$. facit $\frac{900}{2}$. hoc est, 450. maiorem partem. Et eadem radix $\frac{225}{2}$. dempta ex eadem semisse $\frac{675}{2}$. relinquit $\frac{450}{2}$. hoc est, 225. minorem partem. Atque hæ duæ partes 450. 225. inter se multiplicatæ producunt 101250. quartam partem quadrati 405000. minoris particulæ √8 405000. Radices autem partium 225. & 450. copulatæ per signum +, hoc modo. √8 225 + √8 450. hoc est, 15 + √8 450. dabunt radicem Binomij 675 + √8 405000. ad quam radicem si addatur numerus 60. semissis nimirum numeri radicum, fiet maior radix 75 + √8 450. pro maiore portione CD. Et si ex eadem semisse 60. dematur eadẽ radix, remanebit minor portio BD, 45 — √8 450. vt prior hæc formula monstrat. quę etiam habebitur, si maior portio 75 + √8 450. subtrahatur ex tota diametro 120. vt secunda hæc formula indicat. Vides ergo, quam laboriosa fuerit extractio radicis ex hoc numero Cossico, 1202ϱ — 2925 — √8 405000. quæ difficultas orta est ex numero irrationali composito (— 2925 — √8 405000.) Quare proponemus aliud exemplum facilius in materia Sinuum.

```
 60 + √8 0
 15 + √8 450
------------
 45 − √8 450
```

```
120 + √8 0
 75 + √8 450
------------
 45 − √8 450
```

SIT igitur in eadem figura diameter BC, 2000. vt sinus totus sit 1000. Et AD, sit sinus grad. 20. nimirum 342. Quæruntur sinus versi arcuum AB, AC, & sinus complementi DE. Pro BD, ponatur 12ϱ, eritque propterea CD, 2000 — 12ϱ. Et quoniam AD. est media proportionalis inter BD, CD, ex scholio propos. 13. lib. 6. Eucl. [b] erit numerus 20002ϱ — 1☐ factus ex BD, in CD, æqualis quadrato ex AD, nimirum numero 116964. Additoque 1☐. vtrinque, erit æquatio inter 20002ϱ. & 1☐ + 116964. Ablatisque 116964. vtrobique, inter 1☐ & 20002ϱ — 116964.

[b] *17. sexti.*

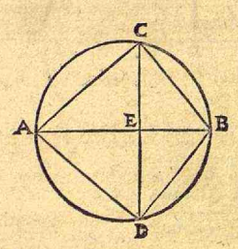
IAM sic. Semissis numeri radicum est 1000. è cuius quadrato 1000000. demptis 116964. remanet numerus 883036. ad cuius radicem quadratam √8 883036. si prædicta semissis 1000. addatur fiet maior radix 1000 + √8 883036. pro maiori portione CD. Et si eadem radix ex eadem semisse 1000. demat, reliqua fiet minor radix 1000 — √8 883036. pro minori parte BD. quæ etiam habebitur, si maior portio ex tota diametro 2000. subtrahatur, vt in hac formula vides. Itaque si omnia hæc in numeris absolutis desiderentur, cum numeri 883036. maior radix sit 940. & minor 939. erit CD, 1940. maior quam vera, & 1939. minor quam vera. Item BD, erit 60. minor quam vera, & 61. maior, quam vera. Quod si auferatur semidiameter CE, 1000. ex 1940. relinquetur sinus complementi 940. maior, quam verus, & 939. minor, quam verus, &c.

```
2000 + √8 0
1000 + √8 883036
----------------
1000 − √8 883036
```

INVENTIS porro segmentis BD, CD, si ducantur rectæ AB, AC, inuenientur ipsæ chordæ, ex propos. 47. lib. 1. Eucl. cum triangula fiant rectangula ABD, ACD, &c. In priori exemplo reperietur chorda AB, √8 (5400 — √8 6480000) & chorda AC, √8 (9000 + √8 6480000) &c.

XIIII. 14 *Est circulus, cuius diameter diuiditur per lineam perpendicularem ad diametrum extrema ac media ratione, & vna è duabus chordis minoribus est 150 — √ 4500. Quæstio est, quanta sit diameter, & quantæ eius portiones, & reliquæ lineæ.*

PONATVR EB, minor pars diametri AB, 1 2. Et quia AB, secta est in E, extrema ac media ratione, estque maius segmentum AE, erit AE, media proportionalis inter AB, & EB: [a] Est autem & BC, media proportionalis inter easdem AB, EB. Igitur AE, BC, æquales sunt. Ponitur autem BC. 150 — √ 4500. Igitur & AE, est 150 — √ 4500. [b] Cum ergo CE, sit media proportionalis inter AE, EB; [c] erit numerus 150 2 — √ 4500 3. factus ex AE, in EB. æqualis quadrato ex CE; ideoque recta CE, erit √ (150 2 — √ 4500 3.) Est autem eadem CE, √ (27000 — √ 405000000 — 1 3) propterea quod 1 3, quadratum rectæ EB, demptum ex 27000 — √ 405000000 quadrato rectæ BC, [d] reliquum facit 27000 — √ 405000000 — 1 3. quadratum rectæ CE. Igitur æqualia sunt duo quadrata 150 2 — √ 4500 3. & 27000 — √ 405000000 — 1 3. quippe cum vtrumque quadrato rectæ CE, ostensum sit æquale. Addito ergo 1 3. vtrinque, erit æquatio inter 1 3 + 150 2 — √ 4500 3. & 27000 — √ 405000000. Et ablatis 150 2 — √ 4500 3. vt obique, inter 1 3. & 27000 — √ 405000000 — 150 2 — √ 4500 3. Ex hoc numero Cossico ita eliciemus pretium 1 2. Totus numerus est instar numeri Cossici diminuti, cuius portio 27000 — √ 405000000. pro numero absoluto habetur, & altera portio — 150 2 — √ 4500 3. pro numero radicum. Nam √ 4500 3. est etiam numerus radicum, vt in ænigmate 12. diximus, & ad finem cap. 26. docuimus. Itaque dimidium numeri radicum erit — 75 — √ 1125. ad cuius quadratum 6750 — √ 25312500. si addantur 27000 — √ 405000000. fit numerus 33750 — √ 632812500. à cuius radice quadrata auferenda est semissis numeri radicum, quæ fuit — 75 — √ 1125. vt habeatur valor 1 2.



[a] *coroll. 8. sexti.*

[b] *coroll. 8. sexti.*

[c] *17. sexti*

[d] *47. prim.*

ITA autem ex Residuo hoc 33750 — √ 632812500. radicem quadratam eruemus. Secetur maius nomen 33750. in duas partes, quæ inter se multiplicatæ producant quartam partem quadrati nominis minoris, quæ quarta pars est 158203125. quod ita fiet, iuxta doctrinam Lemmatis cap. 28. Ex 284765625. quadrato semissis maioris nominis 33750. detrahatur dicta quarta pars 158203125. Et reliqui numeri 126562500. radix quadrata 11250. addatur, & detrahatur ex 16875. semisse numeri 33750. Nam numeri producti 28125. 2625. erunt partes quæsitæ, quæ inter se multiplicatæ faciunt 158203125. Atque hæ partes copulatæ per signum — dabunt radicem propositi Residui, præposito tamen signo √ 3. vtrique parti, hoc modo √ 3 28125 — √ 3 5625. vt ad finem cap. 28. tradidimus: hoc est, √ 3 28125 — 75. Ab hac radice detrahendum est dimidium numeri radicum 75 — √ 3 1125. propter signum — quo numerus radicum afficiebatur. Fietque numerus reliquus √ 3 40500 — 150. pro pretio 1 2, hoc est, pro linea EB. Cum ergo AE, ipsi CB, æqualis, sit 150 — √ 4500. erit tota diameter √ 18000. quia √ 3 40500; & √ 4500. commensurabiles sunt, habentes proportionem triplam, & minore ex maiore subducta, relinquitur √ 18000. At CE, erit (√ 162000000 — 36000) numerus videlicet factus ex AE, in EB. Denique AC, erit √ (√ 405000000 — 9000) cum eius quadratum æquale sit duobus quadratis rectarum AE, CE. Et quia AC, æqualis est AD, & CE, ipsi ED, cognitæ erunt omnes lineæ huius figuræ. Atque ita vides duo quadrata rectarum AC, BC, nimirum √ 3 405000000 — 9000. & 27000 — √ 3 405000000. facere 18000. quadratum diametri AB, vt vult propos. 47. lib. 1. Eucl.

[c] *31. tertij.*

[c] cum angulus ACB, in semicirculo sit rectus.

ALITER. Quoniam maius segmentum AE, æquale ipsi CB, est 150 — √ 4500. si ponatur EB, 1 2. erit tota diameter AB, 150 — √ 3 4500 + 1 2. Atque ita quadrato maioris segmenti AE, 27000 — √ 3 405000000. æqualis erit numerus 150 2 — √ 4500 3 + 1 3. factus ex EB, id est, ex 1 2. in totam AB, id est, in 150 — √ 4500 + 1 2. Et transpositis particulis huius æquationis, vt supra reperietur iterum æquatio inter 1 3. & 27000 — √ 3 405000000 — 150 2 + √ 4500 3, &c.

ALITER. Ponatur tota diameter AB, 1 2, eritque minus segmentum EB, 1 2 — 150 — √ 4500. Atque [f] ita numerus 1 3 — 150 2 — √ 4500 3. factus ex 1 2, id est, ex AB, in 1 2 — 150 — √ 4500. id est, in EB, æqualis erit quadrato 27000 — √ 3 405000000. rectæ AE. Et additis vtrobique 150 2 — √ 4500 3 æquatio erit inter 1 3 & 27000 — √ 3 405000000 + 150 2 — √ 4500 3. Ex hoc ergo numero Cossico ita radicem extrahemus. Totus numerus intelligatur compositus ex duabus particulis, quarū prior 27000 — √ 3 405000000. est instar numeri absoluti, & posterior + 150 2 — √ 4500 3. instar numeri radicum. Dimidium numeri radicum est 75 — √ 1125. ad cuius quadratum 6750 — √ 25312500. si addantur 27000 — √ 3 405000000. fit numerus 33750 — √ 3 632812500. ad cuius radicem quadratam √ 28125 — 75. (quæ inuenietur, vt supra) si addatur semissis numeri radicum 75 — √ 1125. fiet 1 2 √ 3 18000. pro diametro AB, quantam videlicet supra inuenimus, &c.

[f] *17. sexti.*

XV. 15 *Est quadratum, cuius latus est 7. Quæritur diameter.*

QVADRATVM lateris est 49. [g] cuius duplum est quadratum diametri. Igitur quadratum diametri erit 98. & ipsa diameter √ 3 98.

[g] *schol. 47. primi.*

16 *Est quadratum, cuius diameter est √ 3 98. Quæritur latus.* XVI.

[a] QVONIAM quadratum diametri duplum est quadrati lateris: estque quadratum diametri 98. erit quadratum lateris 49. & latus ipsum √ 3 49. hoc est, 7.

[a] *schol. 47. primi.*

17 *Quadratum, cuius diameter & latus faciunt summam 6. Quæruntur diameter ac latus.* XVII.

PONATVR latus 1 2. ac proinde diameter 6 — 1 2. [b] Et quia quadratum diametri duplum est quadrati lateris: Estque quadratum lateris 1 3. & quadratum diametri 36 — 12 2 + 1 3. erit æquatio inter 2 3. & 36 — 12 2 + 1 3. Ablato que 1 3. vtrinque, inter 1 3. & 36. — 12 2.

[b] *schol. 47. primi.*

Iam sic. Semissis numeri radicum est 6. ad cuius quadratum 36. si addantur 36. fit numerus 72. à cuius radice √ 3 72. si prædicta semissis 6. dematur, reliqua fiet æstimatio 1 2. √ 3 72 — 6. atque tantum erit latus. quod demptum ex 6. reliquam faciet diametrum 12 — √ 3 72. vt in hac formula vides. quod probatur. quia quadratum diametri 216 — √ 41472. duplum est quadrati lateris 108 — √ 10368. Et diameter ac latus faciunt summam 6.

$$\frac{\sqrt{3}\ 0 + 6 \quad \sqrt{3}\ 72 - 6}{12 - \sqrt{3}\ 72}$$

18 *Est quadratum, cuius latus ductum in diametrum facit 10. Quæruntur latus ac diameter.* XVIII.

PONATVR latus 1 2. ideoque diameter $\frac{\cdot 0 \cdot}{1\ 2}$. Nam ex 1 2 in $\frac{\cdot 0 \cdot}{1\ 2}$ fiunt 10. qui numerus $\frac{\cdot 0 \cdot}{1\ 2}$ est Quotiens, si 10. per 1 2. diuidantur. Ita enim Quotiens ductus in diuisorem 1 2. producit numerum diuisum 10. Et [c] quia quadratum diametri duplum est quadrati lateris: estque quadratum lateris 1 3. & quadratum diametri $\frac{\cdot 00 \cdot}{1\ 3}$. erit æqualitas inter 2 3. & $\frac{\cdot 00 \cdot}{1\ 3}$. quæ per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 2 3. & 100. Diuisis ergo 100. per 2. fiet 1 3. 50. & 1 2. √ 3 50. pro latere. Quia vero diameter posita fuit $\frac{\cdot 0 \cdot}{1\ 2}$. hoc est, 10 diuisa per 1 2. si diuidantur 10. per √ 3 50. numirum per pretium 1 2. fiet Quotiens √ 3 200. pro diametro. quod probatur. Nam ex latere √ 3 50. in diametrum √ 3 200. fit numerus √ 3 10000. id est, 10. Et √ 3 40000 quadratum diametri duplum est quadrati lateris √ 3 2500.

[c] *schol. 47. primi.*

19 *Est quadratum, cuius diameter superat latus numero 3. Quæruntur latus, ac diameter.* XIX.

PONATVR latus 1 2. ideoque diameter 1 2 + 3. [d] Et quia quadratum diametri duplum est quadrati lateris: estque quadratum lateris 1 3. & quadratum diametri 1 3 + 62 2 + 9. erit æquatio inter 2 3. & 1 3 + 62 2 + 9. Ablatoque 1 3. vtrinque, inter 1 3. & 62 2 + 9. Semissis numeri radicum est 3. ad cuius quadratum 9. additis 9. fit numerus 18. ad cuius radicem √ 18 si addatur prædicta semissis 3. fiet 1 2. √ 18 + 3. pro latere. Diameter autem erit √ 18 + 6. quod probatur. quia quadratum diametri 54 + √ 2592. duplum est quadrati lateris 27 + √ 648. Et diameter latus superat numero 3.

[d] *schol. 47. primi.*

20 *Est quadratum, cuius latus ductum in differentiam inter diametrum & latus facit 15. Quæruntur diameter ac latus.* XX.

PONATVR latus 1 2. ac propterea differentia inter diametrum ac latus $\frac{1\ 5}{1\ 2}$ quæ habetur ex diuisione 15. per 1 2. vt nimirum Quotiens ductus in diuisorem 1 2. producat numerum diuisum 15. Quia ergo diameter excedit latus hac differentia, erit diameter 1 2 + $\frac{1\ 5}{1\ 2}$. [e] Quoniam autem quadratum diametri duplum est quadrati lateris: estque quadratum lateris 1 3. & quadratum diametri $\frac{1\ 3 + 3 \cdot 6 + 2\ 2\ 5}{1\ 3}$. erit æquatio inter 2 3. & $\frac{1\ 3 + 3 \cdot 6 + 2\ 2\ 5}{1\ 3}$ quæ per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 2 3. & 1 3 + 30 3 + 225. Ablato ergo 1 3 3. vtrinque, erit æquatio inter 1 3. & 30 3 + 225. Ex hoc numero radicem Zensizensicam sic eruemus. Semissis numeri Zensorum est 15. ad cuius quadratum 225. additis 225. fit numerus 450 ad cuius radicem quadratam √ 450. si addatur prædicta semissis 15. fiet 1 3. √ 450 + 15. & 1 2. √ (√ 450 + 15) vt ad finem cap. 12. traditum est, atque tantum est latus: cuius quadrati √ 450 + 15. duplum dabit quadratum diametri √ 1800 + 30. ac proinde diameter erit √ (√ 1800 + 30) quod probatur. Nam si latus ex diametro subtrahatur, remanebit differentia √ (√ 1800 + 30) — √ (√ 450 + 15) quæ ducta in latus √ (3 450 + 15) producit numerum 15. Consule caput 24. vbi hæc multiplicatio expresse habetur.

[e] *schol. 47. primi.*

21 *Est rectangulum cuius area est 30. & proportio laterum sesquialtera. Quæruntur latera, & diameter.* XXI.

PONATVR minus latus 2 2. ideoque maius 3 2. sesquialterum ad illud. Ex multiplicatione laterum inter se, fit numerus 6 3. area rectanguli, æqualis areæ datæ 30. Diuisis igitur 30. per 6. fiet 1 3 5. & 1 2. √ 3 5. Et quia minus latus posuimus esse 2 2. erit minus latus √ 3 20 numerus videlicet duplus radicis, numeri scilicet √ 3 5. Cum ergo maius latus positum sit 3 2. erit maius latus √ 3 45. numerus scilicet triplus vnius radicis, quæ fuit √ 3 5. [f] Quia vero quadrata laterum 20. & 45. simul æqualia sunt quadrato diametri, erit quadratum diametri 65. & ipsa diameter √ 65. quod probatur. quia ex latere √ 3 20. in latus √ 3 45. fit numerus √ 3 900. hoc est 30, quantam videlicet posuimus aream rectanguli.

[f] *schol. 47. primi.*

XXII. 22 *Est rectangulum, cuius area 80. & differentia laterum 2. Quæruntur latera, ac diameter.*

PONATVR minus latus 12ϱ. ideoque maius 12ϱ+2. Hæc latera inter se multiplicata faciunt aream 1ϫ+22ϱ. æqualem areæ datæ 80. Ablatis igitur 22ϱ. vtrobique, erit æqualitas inter 1ϫ. & 80——22ϱ. Semissis numeri radicum est 1. ad cuius quadratum 1. additis 80. fit numerus 81. à cuius radice 9. si prædicta semissis 1. dematur, reliqua fiet æstimatio 12ϱ. 8. pro minore latere: Maius ergo erit 10. excedens illud binario. Ex latere 8. in latus 10. fit area proposita 80. Duo vero quadrata laterum 64. & 100. æqualia sunt quadrato diametri, ac propterea quadratum diametri erit 164. ipsaque diameter $\sqrt{ϫ}$ 164.

XXIII. 23 *Est rectangulum, cuius area 80. & summa duorum laterum 20. Quæruntur latera, & diameter.*

PONATVR vnum latus 12ϱ. ideoque alterum 20——12ϱ. Hæc inter se multiplicata faciunt aream 20ϱ——1ϫ. æqualem areæ datæ 80. Addito ergo 1ϫ+80. & 20ϱ——80. Semissis numeri radicum est 10. à cuius quadrato 100. demptis 80. remanet numerus 20. ad cuius radicem $\sqrt{ϫ}$ 20. addita prædicta semisse 10. fiet 12ϱ. $\sqrt{ϫ}$ 20+10. maior pro vno latere. Atque eadem radix $\sqrt{ϫ}$ 20. dempta ex prædicta semisse 10. reliquam faciet minorem radicem 10——$\sqrt{ϫ}$ 20 quæ etiam habebitur, si latus inuentum $\sqrt{ϫ}$ 20+10. detrahatur ex 20. summa laterum, vt hic vides. Latera inuenta 10+$\sqrt{ϫ}$ 20. & 10——$\sqrt{ϫ}$ 20. inter se multiplicata producunt aream 80. propositam. quæ multiplicatio facile fiet, si (per doctrinam cap. 23. 20. quadratum particulæ posterioris detrahatur ex 100. quadrato particulæ maioris, vt in secunda hac formula vides. Iam quadrata laterum 120+$\sqrt{ϫ}$ 8000. & 120−$\sqrt{ϫ}$ 8000. [a] æqualia sunt quadrato diametri: ideoque quadratum diametri erit 240. & ipsa diameter $\sqrt{ϫ}$ 240.

$\sqrt{ϫ}$ 0 + 20	
$\sqrt{ϫ}$ 20 + 10	
$-\sqrt{ϫ}$ 20 + 10	
10 + $\sqrt{ϫ}$ 20	
10 − $\sqrt{ϫ}$ 20	[a] 47. primi
80	

XXIIII. 24 *Est rectangulum, cuius diameter 30. & summa laterum 42. Quæruntur latera, & area.*

PONATVR vnum latus 12ϱ. ac proinde alterum 42——12ϱ. Horum quadrata 1ϫ. & 1764——84ϱ+1ϫ. [b] æqualia sunt quadrato diametri: atque idcirco æquatio erit inter 2ϫ+1764——84ϱ. & 900. Et additis 84ϱ. vtrobique, inter 84ϱ+900. & 2ϫ+1764. Ablatisque 900. vtrinque, inter 84ϱ. & 2ϫ+864. Et rursum ablatis 864. vtrinque, inter 2ϫ. & 84ϱ——864. Diuisisque omnibus per 2. inter 1ϫ. & 42ϱ——432. Semissis numeri radicum est 21. à cuius quadrato 441. demptis 432. remanet numerus 9. ad cuius radicem 3. addita prædicta semisse 21. fiet radix maior 24. pro latere maiore: Eademque radix 3. dempta ex prædicta semisse 21. relinquit minorem radicem 18. pro minore latere. quod etiam habebitur, si latus maius inuentum 24. subtrahatur ex 42. summa laterum. Iam ex 24. in 18. fit area 432. Vbi etiam vides quadrata laterum 576. & 324. efficere 900. quadratum diametri propositæ 30.

[b] 47. primi

XXV. 25 *Est rectangulum, cuius area cum diametro facit 15. & differentia laterum est $\sqrt{ϫ}$ 5. Quæruntur latera, diameter, & area.*

PONATVR minus latus 12ϱ——$\sqrt{ϫ}$ 1¼. (qui numerus $\sqrt{ϫ}$ 1¼. est semissis datæ differentiæ $\sqrt{ϫ}$ 5.) & maius 12ϱ+$\sqrt{ϫ}$ 1¼. Ita enim hoc excedet illud differentia $\sqrt{ϫ}$ 5. cum minus à maiore subductum relinquat $\sqrt{ϫ}$ 5. vt in hac formula vides. Nam $\sqrt{ϫ}$ 1¼. & $\sqrt{ϫ}$ 1¼. debent addi, propter diuersa signa + & ——. quæ additio fit, si $\sqrt{ϫ}$ 1¼. duplicetur, & duplato numero $\sqrt{ϫ}\frac{20}{4}$. hoc est, $\sqrt{ϫ}$ 5, superioris numeri signum + intelligatur præpositum, vt cap. 4. diximus. Ex latere 12ϱ——$\sqrt{ϫ}$ 1¼. in latus 12ϱ+$\sqrt{ϫ}$ 1¼. fit area 1ϫ——1¼. Et quia area cum diametro facit 15. Si ex hac summa detrahatur dicta area 1ϫ——1¼. remanebit diameter 16¼——1ϫ. cuius quadratum erit 1ϫϫ+264 1/16——32½ϫ. quod serua.

1 2ϱ + $\sqrt{ϫ}$ 1¼	
1 2ϱ − $\sqrt{ϫ}$ 1¼	
$\sqrt{ϫ}$ 5	

Quia vero quadratum lateris minoris 12ϱ——$\sqrt{ϫ}$ 1¼. est 1ϫ——$\sqrt{ϫ}$5ϫ+1¼. Et quadratum lateris maioris 12ϱ+$\sqrt{ϫ}$ 1¼. est 1ϫ+$\sqrt{ϫ}$5ϫ+1¼. quæ duo quadrata conficiunt 2ϫ+2½. [c] qui numerus æqualis erit quadrato diametri supra seruato, numero videlicet, 1ϫϫ+264 1/16——32½ϫ. Additis ergo 32½ϫ. vtrinq; erit æqualitas inter 34½ϫ+2½. & 1ϫϫ+264 1/16. Et ablatis 2½. vtrobique, inter 34½ϫ. & 1ϫϫ+261 9/16. Et rursum ablatis 261 9/16. vtrinque, inter 34½ϫ—— 261 9/16. & 1ϫϫ. Iam sic. Semissis numeri Zensorum est 17¼. à cuius quadrato 297 9/16. demptis 261 9/16. remanet numerus 36. cuius radix 6. dempta ex prædicta semisse 17¼. relinquit minorem Zensum

[c] 47. primi

Zensum 11⅝. & minorem radicem $\sqrt{ϫ}$ 11¼. Ergo minus latus positum 12ϱ——$\sqrt{ϫ}$ 5/4. erit $\sqrt{ϫ}$ 11¼——$\sqrt{ϫ}$ 5/4. Maius vero, quod posuimus 12ϱ+$\sqrt{ϫ}$ 5/4 erit $\sqrt{ϫ}$ 11¼+$\sqrt{ϫ}$ 5/4. quæ duo latera se mutuo excedunt numero $\sqrt{ϫ}$ 5. vt in hac formula subtractionis videre licet, id est, $\sqrt{ϫ}$ 5. Atque eadem duo latera inter se multiplicata faciunt 10. pro area, vt hic vides. Nam + $\sqrt{ϫ}\frac{225}{16}$. & —— $\sqrt{ϫ}\frac{225}{16}$. se mutuo tollunt, & 4⅝——5/4. faciunt 4/4. hoc est, 10.

$\sqrt{ϫ}$ 11¼ + $\sqrt{ϫ}$ 5/4	
$\sqrt{ϫ}$ 11¼ — $\sqrt{ϫ}$ 5/4	
0 + $\sqrt{ϫ}\frac{20}{4}$	

DEINDE quadrata laterum sunt 5/4——$\sqrt{ϫ}\frac{900}{4}$. & 5/4+$\sqrt{ϫ}\frac{900}{4}$. quæ summam faciunt 25. [a] æqualem quadrato diametri (quia ——$\sqrt{ϫ}\frac{900}{4}$. & +$\sqrt{ϫ}\frac{900}{4}$. se mutuo tollunt, & ex 5/4. & 5/4. fiunt 10/4. id est, 25.) Quare $\sqrt{ϫ}$ 25. nimirum 5. erit diameter, quæ cum area inuenta 10. facit summam 15. propositam.

$\sqrt{ϫ}\frac{45}{4}$ — $\sqrt{ϫ}$ 5/4	
$\sqrt{ϫ}\frac{45}{4}$ + $\sqrt{ϫ}$ 5/4	
+ $\sqrt{ϫ}\frac{225}{16}$ — 5/4	[a] 47. pri.
4⅝ — $\sqrt{ϫ}\frac{225}{16}$	
4/4 id est, 10	

QVAMVIS autem numerus Cossicus 34½ϫ——261 9/16. habeat duplicem radicem, vt cap. 12. ostendimus: tamen cum maiore radice, quæ est $\sqrt{ϫ}$ 23¼. (quæq; reperitur, si radix 6. supra inuenta addatur ad prædictam semissem 17¼.) Numerus enim conflatus 23¾. erit maior Zensus, & $\sqrt{ϫ}$ 23¾. maior radix) hic nihil efficies. quia latera essent $\sqrt{ϫ}$ 23¼——$\sqrt{ϫ}$¼. & $\sqrt{ϫ}$ 23¼+$\sqrt{ϫ}$ 5/4. quæ inter se multiplicata facient maiorem aream, quam 10. inuenieturque maior diameter, quam 5. Quare summa ex area, & diametro conflata maior erit summa proposita 15. Vides ergo hic mirum quid, non posse videlicet semper assumi vtramque radicem æquationis. quod quidem raro contingit. Itaque si examen institutum per alteram radicum non respondet ænigmati, assumenda est altera radix. Vt in proposito ænigmate, quia examen per radicem maiorem non succedit, propterea minor radix assumpta est.

ALIVD exemplum simile. Sit differentia laterum 2. & area cum diametro faciat 58. Quæruntur rursum latera, diameter, & area.

PONATVR minus latus 12ϱ——1. (Est autem 1. semissis differentiæ laterum) & maius 12ϱ+1. Ita enim hoc excedet illud binario, cum minus à maiore subtractum relinquat 2. vt hic vides. Quadrata laterum sunt 1ϫ−22ϱ+1. & 1ϫ+22ϱ+1. quæ faciunt summam 2ϫ+2. [b] æqualem quadrato diametri. Ex 12ϱ−1. in 12ϱ+1. fit area 1ϫ−1. quæ cum diametro debet facere 58. Si ergo ex 58. dicta area detrahatur, reliqua fiet diameter 59−1ϫ. cuius quadratum est 1ϫϫ+3481−118ϫ. Et quia paulo ante idem quadratum inuentum est 2ϫ+2. erunt duo hęc quadrata inter se æqualia. Additis ergo 118ϫ vtrobique, erit æquatio inter 1ϫϫ+3481. & 120ϫ+2. Ablatisque 2 vtrinque, inter 1ϫϫ+3479. & 120ϫ, & rursum ablatis 3479 vtrobique, inter 1ϫϫ, & 120ϫ−3479. Semissis numeri Zensorum est 60. à cuius quadrato 3600. detractis 3479. remanet numerus 121. cuius radix 11. detracta à prædicta semisse 60. relinquit 49. minorem Zensum: ac proinde minor radix erit 7. Cum ergo minus latus positum sit 12ϱ−1. & maius 12ϱ+1. erit illud 6. & hoc 8. quorum differentia est 2. Ex 6 in 8 fit area 48. quæ cum diametro facere debet 58. Detractis igitur 48 ex 58 reliqua fiet diameter 10. quæ etiam reperietur, si laterum quadrata 36 & 64 in vnam summam 100 colligantur, [c] quę æqualis erit quadrato diametri, ideoque diameter erit $\sqrt{ϫ}$ 100, id est, 10.

1 2ϱ + 1	
1 2ϱ —— 1	[b] 47. pri.
0 + 2	

[c] 47. pri.

HIC etiam cum maiore radice, quę est $\sqrt{ϫ}$ 71. (quia superior radix 11. addita ad prędictam semissem 60 facit 71. maiorem Zensum, maior propterea radix erit $\sqrt{ϫ}$ 71) nihil efficies. nam latera erunt $\sqrt{ϫ}$ 71−1. & $\sqrt{ϫ}$ 71+1, maiora quam 6 & 8. ideoque maiorem aream continebunt, quam 48. atque eorum quadrata maius quadratum diametri constituent, quam 100. ac proinde diameter maior erit quam 10. atque idcirco area cum diametro maiorem summam conficiet, quam 58. Vbi etiam vides, non posse semper assumi vtramque radicem ad problematis solutionem, vt paulo ante diximus.

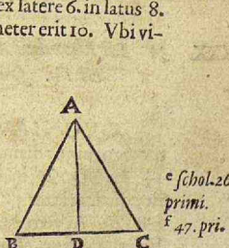
26 *Est rectangulum, cuius vnum latus est 6. & quod fit ex altero latere in diametrum est 80. Quæruntur alterum latus, ac diameter, vna cum area.* XXVI.

PONATVR alterum latus 12ϱ. Quadrata laterum 6. & 12ϱ, sunt 36 & 1ϫ, [d] quorum summa 1ϫ+36. æqualis erit quadrato diametri. Et quia ex latere incognito in diametrum fit numerus 80. si 80 diuidantur per 12ϱ latus ignotum, fiet Quotiens 80/12ϱ. ac tanta erit diameter: quippe cum ex Quotiente hoc 80/12ϱ in 12ϱ, diuisorem producatur numerus diuisus 80. ideoque quadratum diametri erit 6400/1ϫ. æquale priori quadrato eiusdem diametri inuento 1ϫ+36. Hęc æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 1ϫϫ+36ϫ. & 6400. Ablatis ergo 36ϫ vtrobique, erit æquatio inter 1ϫϫ, & 6400−36ϫ. Semissis numeri Zensorum est 18, ad cuius quadratum 324. additis 6400. fit numerus 6724. à cuius radice 82. si prędicta semissis 18. tollatur, relinquetur pretium 1ϫ. 64. Ergo 12ϱ erit 8 latus quæsitum. Nam ex latere 6. in latus 8. fit area 48. Et quadrata laterum 36. & 64. faciunt quadratum diametri 100. ideoque diameter erit 10. Vbi vides, ex latere 8. inuento in diametrum 10 fieri 80.

[d] 47. pri.

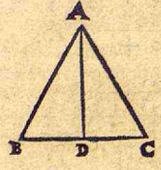
27 *Est triangulum æquilaterum ABC, cuius area 60. Quæruntur latus BC, ac perpendicularis AD.*

[e] QVONIAM AD, secat BC, bifariam, ponatur BD, 1ϱ, & quodlibet laterum 2ϱ. erit quadratum BD, 1ϫ. & quadratum lateris AB, 4ϫ. [f] Cum ergo duo quadrata BD, AD, æqualia sunt quadrato AB, erit quadratum AD, 3ϫ, & ipsa AD, $\sqrt{ϫ}$ 3ϫ. Ex BD, 1ϱ, in AD $\sqrt{ϫ}$ 3ϫ. fit area trianguli ABC, vt cap. 2.



[e] *schol. 26. primi.*
[f] 47. pri.

lib.4. Geom. Pract. demonstrauimus, nimirum $\sqrt{3}\,3\mathcal{S}$, vt hic apparet: quia $12\mathcal{Q}$. quadranda est, & quadrato $1\mathcal{S}$. preponendum signum $\sqrt{3}$. atque ita $\sqrt{3}\,3\mathcal{S}$. multiplicanda in $\sqrt{3}\,1\mathcal{S}$. vt ad finem cap.26. scripsimus. Et quia area posita est 60. erit æquatio inter 60. & $\sqrt{3}\,3\mathcal{S}$. ideoq; & inter eorũ quadrata 3600. & $3\mathcal{S}$. Diuisis ergo 3600. per 3. fiet $1\mathcal{S}$. 1200. & $\sqrt{3}\,1200$ erit pretiũ $12\mathcal{Q}$, hoc est, lineę BD, ac proinde totum latus BC, erit $\sqrt{3}\,19200$. nimirum duplum $\sqrt{3}\,1200$. Vt enim dupletur $\sqrt{3}\,1200$. ducenda est per Zenfizemsum binarij, nimirum per 16. Quoniam autem area 60. producitur ex BD, $\sqrt{3}\,1200$. in AD, si 60. hoc est, radix $\sqrt{3}\,12960000$. diuidatnr per $\sqrt{3}\,1200$. fiet Quotiens $\sqrt{3}\,10800$. pro perpendiculari AD. quod probatur. Nam ex $\sqrt{3}\,1200$. in $\sqrt{3}\,10800$. fit $\sqrt{3}\,12960000$. hoc est, 60. area proposita.



$\sqrt{3}$	3	$3\mathcal{S}$
	1	$2\mathcal{Q}$
$\sqrt{3}$	3	$3\mathcal{S}$

ALIVD exemplum. Sit area trianguli $\sqrt{3}\,243$. Positis iisdem, inuenietur æqualitas inter $\sqrt{3}\,243$. & $\sqrt{3}\,3\mathcal{S}$. ac proinde & inter eorum quadrata 243. & $3\mathcal{S}$. Diuisis ergo 243. per 3. fiet $1\mathcal{S}$. 81. cuius $\sqrt{3}\mathcal{S}$, est 3. quantitas lineæ BD, ac proinde totum latus BC, erit 6. Quod si diuidatur area $\sqrt{3}\,243$. per BD, quę est 3. hoc est, per $\sqrt{3}\,9$. fiet Quotiens $\sqrt{3}\,27$. pro perpendiculari AD. quod probatur. quia ex BD, 3. id est, ex $\sqrt{3}\,9$. in AD, $\sqrt{3}\,27$. fit $\sqrt{3}\,243$. area proposita.

XXVIII. 28 *Est triangulum æquilaterum ABC, cuius perpendicularis AD, est 6. Quæruntur latus BC, & area.*

PONATVR BD, $1\mathcal{Q}$, inuenietúrque AD, $\sqrt{3}\,3\mathcal{S}$. vt in precedenti ænigmate. Et quia eadem AD, posita est 6. erit æquatio inter 6. & $\sqrt{3}\,3\mathcal{S}$. Si ergo diuidantur 6. per $\sqrt{3}\,3$. numerum maioris characteris $\mathcal{S}$. fiet $12\mathcal{Q}$. $\sqrt{3}\,12$. pro recta BD: quia vt ad finem cap.26. diximus numerus $\sqrt{3}\,3\mathcal{S}$, est numerus radicum, & non Zensorum.

Vel sic. Quoniam æquatio est inter 6. & $\sqrt{3}\,3\mathcal{S}$, erit quoque æquatio inter eorum quadrata 36. & $3\mathcal{S}$. Diuisis ergo 36 per 3. fiet $1\mathcal{S}$. 12. & $12\mathcal{Q}$. $\sqrt{3}\,12$. pro linea BD. Atque idcirco totum latus BC, erit $\sqrt{3}\,48$. duplum videlicet $\sqrt{3}\,12$. Area autem erit $\sqrt{3}\,432$. numerus scilicet productus ex BD, $\sqrt{3}\,12$. in AD, 6. id est, in $\sqrt{3}\,36$.

ALIVD exemplum. Sit perpendicularis AD, 3.

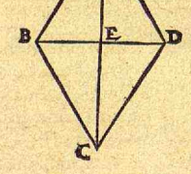
Positis iisdem, reperietur æquatio inter 3. & $\sqrt{3}\,3\mathcal{S}$. Diuisis igitur 3. per $\sqrt{3}\,3$. qui est numerus radicum, vt dictum est, fiet $12\mathcal{Q}$, $\sqrt{3}\,3$. pro recta BD, totumque latus BC, erit $\sqrt{3}\,12$.

Vel sic, quia æquatio est inter 3. & $\sqrt{3}\,3\mathcal{S}$, erit quoque æquatio inter eorum quadrata 9. & $3\mathcal{S}$. Diuisis ergo 9. per 3. fiet $1\mathcal{S}$. 3. & $12\mathcal{Q}$, $\sqrt{3}\,3$. pro recta BD, totumque latus BC, erit $\sqrt{3}\,12$. Area autem erit $\sqrt{3}\,27$. numerus videlicet productus ex BD, $\sqrt{3}\,3$. in AD, 3. id est, in $\sqrt{3}\,9$. quod verum esse, liquido constat, cum quadratum lateris, nimirum 12. ad quadratum perpendicularis, id est, ad 9. proportionem habeat sesquitertiam, vt vult Eucl. propos. 12. lib. 13.

XXIX. 29 *Est Rhombus ABCD, cuius area 60. & proportio diametrorum AC, BD, sesquiquarta. Quæruntur latus, & diametri.*

[a] *schol.34. primi.*
[b] *schol. 26 primi.*
[c] *1. secun.*
[d] *47. pri.*

PONATVR maior diameter AC, $5\mathcal{Q}$, ideoque minor BD, $4\mathcal{Q}$. [a] Quia igitur diametri in Rhombo se mutuo diuidunt bifariam, atque angulos etiam bifariam: [b] erit AE, diuidens in Isosscele ABD, angulum A, bifariam, ad BD, perpendicularis. Igitur cum area trianguli ABD, producatur ex AE, in BE, vt cap. 2. lib. 4. Geom. Pract. ostendimus; & area trianguli CBD, ex CE, hoc est, ex AE, in DE; producetur tota area Rhombi ex AE, in BD. Eodemque modo eadem area producetur ex BE, in AC. Fit autem ex BE, $2\mathcal{Q}$. in AC, $5\mathcal{Q}$, numerus $10\mathcal{S}$. Igitur æquatio erit inter 60. & $10\mathcal{S}$, quod vterque numerus sit area Rhombi. Diuisis ergo 60. per 10. fiet $1\mathcal{S}$, 6 & $12\mathcal{Q}$, $\sqrt{3}\,6$. Igitur AC, posita $5\mathcal{Q}$, erit $\sqrt{3}\,150$. Et BD, posita $4\mathcal{Q}$, erit $\sqrt{3}\,96$. quod probatur, quia ex BE, $\sqrt{3}\,24$. (semisse diametri BD, $\sqrt{3}\,96$) in AC, $\sqrt{3}\,150$. fit area Rhombi $\sqrt{3}\,3600$. id est, 60. Atque ita cognita est vtraque diameter.



Deinde quia AE, EB, sunt $\sqrt{3}\,37\frac{1}{2}$. & $\sqrt{3}\,24$. & earum quadrata $37\frac{1}{2}$. & 24. quæ simul faciunt $61\frac{1}{2}$. summam [d] æqualem quadrato lateris AB; erit latus AB, $\sqrt{3}\,61\frac{1}{2}$.

XXX. 30 *Est Rhombus ABCD, cuius area 60. & diuisa maiore diametro AC, per minorem BD, Quotiens est $1\frac{1}{4}$. Quæruntur diametri, & latus.*

QVONIAM ex BE, in AC, fit area Rhombi; fiet ex BD, in AC, duplum areæ, nimirum 120. Ponatur ergo minor diameter BD, $12\mathcal{Q}$, ideoque maior diameter AC, $1\frac{1}{4}2\mathcal{Q}$. vt diuisa per BD, faciat Quotientem $1\frac{1}{4}$. Ex BD, $12\mathcal{Q}$, in AC, $1\frac{1}{4}2\mathcal{Q}$, fit numerus $\frac{5}{4}\mathcal{S}$. qui æqualis erit 120. Per multiplicationem ergo in crucem, erit æqualitas inter $5\mathcal{S}$ & 480. Diuisis igitur 480. per 5 fiet $1\mathcal{S}$. 96. & $12\mathcal{Q}$, $\sqrt{3}\,96$. pro diametro BD, quę posita fuit $12\mathcal{Q}$. At vero AC, posita $1\frac{1}{4}2\mathcal{Q}$. erit $\sqrt{3}\,150$. quia $\sqrt{3}\,96$. multiplicata per $\frac{5}{4}$. id est, per $\sqrt{3}\,\frac{25}{16}$. facit $\sqrt{3}\,150$. Vel etiam, si ad $\sqrt{3}\,96$. adiiciatur $\frac{1}{4}$. nimirum $\sqrt{3}\,6$. fit summa $\sqrt{3}\,150$. Atque ita inuentæ sunt diametri BD, Ac $\sqrt{3}$

$\sqrt{3}\,96$. & $\sqrt{3}\,150$. quod probatur. quia ex $\sqrt{3}\,24$. semisse diametri BD, in $\sqrt{3}\,150$. diametrum AC, fit area Rhombi $\sqrt{3}\,3600$. hoc est, 60. Deinde quia AE, EB, sunt $\sqrt{3}\,37\frac{1}{2}$. & $\sqrt{3}\,24$. [a] facient earum quadrata $37\frac{1}{2}$. & 24. summam $61\frac{1}{2}$. æqualem quadrato lateris AB: propterea que latus AB, erit $\sqrt{3}\,61\frac{1}{2}$. [a] *47. primi*

APPENDIX.

HÆC sunt, studiose Lector, quæ de regula Algebræ, eiusque explicatione scribenda mihi visa sunt: qui plura requirit, ab alijs huius regulæ scriptoribus petat. Non grauabor tamen appendicis loco subiungere quatuor ænigmata Ptolemæi ex libro primo Epigrammatum græcorum desumpta, & quintum aliud Euclidis, ascriptis ipsis Epigrammatibus græcis, cum eorum interpretatione, non quidem de verbo ad verbum, sed vt res clarior fieret, expresso illorum sensu dumtaxat. Ænigmata Ptolemæi sunt hæc.

I. DE PALLADIS STATVA, QVOTNAM illa auri talenta appendat. I.

Πρῶτον.

Παλλὰς ἐγὼ τελέσθην σφυρήλατος, αὐτὰρ ὁ χρυσὸς
Αἰζηῶν πέλεται δῶρον ἀοιδοπόλων,
Ἥμισυ μὲν χρυσοῖο χαείσης, ὀγδοάτῳ δὲ
Θέωνις, ἠ δεκάτῳ μοῖραν ἔθηκε Σόλων.
Αὐτὰρ εἰκοστῷ Θεμίσων, τὰ δὲ λοιπὰ τάλαντα
Ἐννέα. ἡ τέχνη, δῶρον ἀεισοδίκου.

PALLAS ego sum, malleo hunc in modum fabrefacta: sed aurum munus est iuuenum, qui in studio versantur Poetices. Dimidiam quidem auri partem contulit Charisius: Octauam vero Thespis: Decimam dehinc Solon: Et vigesimam Themison: Reliqua autem nouem talenta, & mercedem item, quæ artifici debebatur, contulit Aristodicus.

Quæritur de toto pondere statuæ, & quot quisque talenta contulerit.

PONATVR pondus statuæ $12\mathcal{Q}$ talentorum auri. Ergo Charisius contulit $\frac{1}{8}2\mathcal{Q}$. tal. Thespis $\frac{1}{8}2\mathcal{Q}$. Solon $\frac{1}{10}2\mathcal{Q}$. Themison $\frac{1}{20}2\mathcal{Q}$ & Aristodicus 9. talenta, quæ omnes partes conficiunt $\frac{33}{40}2\mathcal{Q}+9$. summam æqualem $12\mathcal{Q}$. Ablatis igitur $\frac{33}{40}2\mathcal{Q}$ vtrinque, æqualitas erit inter 9. & $\frac{9}{40}2\mathcal{Q}$. Diuisis igitur 9 per $\frac{9}{40}$. fiet $12\mathcal{Q}$. 40 Atque tot talentorum fuit statua. Charisius ergo contulit 20. talenta, nimirum semissem totius ponderis. Thespis 5. talenta, octauam scilicet partem. Solon 4. talenta, nimirum partem decimam. Themison denique 2. talenta, partem videlicet vigesimam, quæ omnes partes cum 9. talentis, quæ contulit Aristodicus, conficiunt 40. talenta.

2. DE AVGEÆ ARMENTIS, QVOTNAM boues fuerint. II.

Δεύτερον.

Αὐγείῳ ἐρέεινε μέγα σθένος Ἀλκίδαο,
Πληθὺν βουκολίων διζήμενος, ὃς ἀπάμεπτο,
Ἀμφὶ μὲν Ἀλφειοῖο ῥοὰς φίλος ἤμισυ τῶνδε,
Μοίρη δ' ὀγδοάτη ὄχθον κέρυα ἀμφινέμονται.
Δωδεκάτη δ' ἀπάνευθε Ταραξίπποιο παρ' ὄχθας,
Ἀμφὶ δ' ἄρ' Ἠλίδα δῖαν εἰκοστὴ νεμέδονται.
Αὐτὰρ ἐν Ἀρκαδίῃ τεσσαρακοστῷ σφῆλόν σφα,
Λοιπὰς δ' αὖλιδάσεις ἀγέλας τόδε πεντήκοντα.

AVGEAM interrogauit generosus Hercules de multitudine armentorum, cui ille respondit. Media horum pars, amice, circa fluuium Alpheum pascitur: octaua autem circa Saturni collem: caterum duodecima procul hinc iuxta loca Taraxippi extrema: At vigesima eorum pars circa Elidem pascitur: trigesimam vero in Arcadia ego reliqui: Reliqua autem quinquaginta numero armenta videas ipse.

Quæstio est de numero boum, & quotnam in singulis locis fuerint.

PONATVR numerus boum $12\mathcal{Q}$. Ergo iuxta fluuium Alpheum fuerunt $\frac{1}{2}2\mathcal{Q}$ boum: Et circa collem Saturni $\frac{1}{8}2\mathcal{Q}$. At iuxta Taraxippi extrema $\frac{1}{12}2\mathcal{Q}$. Circa vero Elidem montẽ $\frac{1}{20}2\mathcal{Q}$. Et in Arcadia $\frac{1}{30}2\mathcal{Q}$: & apud Augeam 50. boues. quæ omnes partes conficiunt $\frac{19}{24}2\mathcal{Q}+50$. summã æqualem $12\mathcal{Q}$. Ablatis igitur $\frac{19}{24}2\mathcal{Q}$ vtrobiq; æqualitas erit inter 50. & $\frac{1}{24}2\mathcal{Q}$. Diuisis ergo 50 per $\frac{1}{24}$. fiet $12\mathcal{Q}$. 240. pro numero omnium boum, quorum

quorum semissis 120. fuit circa fluuium Alpheum: & 30. boues, nimirum $\frac{1}{6}$. circa collem Saturni: Et $\frac{3}{10}$. nimirum 20. iuxta Taraxippi extrema: At iuxta Elidem montem 12. nimirum $\frac{1}{20}$. in Arcadia denique boues 8. pars videlicet $\frac{1}{30}$. Atque omnes hi boues cum 50. qui prope Augeam fuerunt, faciunt 240.

III.

3. LEONIS ÆNEI CANALES.

Τείτον.

Χάλκεός εἰμι λέων, κεφαλὴ δέ μοι ὄμματα δοιὰ
Καὶ στόμα σιὼ δὲ δέναρ δεξιτερσῖο ποδός.
Πλήθει δὲ κεράσσας δ' ὕδασι δεξιὸν ὄμμα,
Καὶ λαὸν τελοῦσῖς, ἢ φοινίρεσσι δέναρ.
Ἄρκιον ἓξ ὥρας πλῆσαι στόμα· ἓν δ' ἅμα πάντα,
Καὶ στόμα; ἢ γλῶσσα, ἢ δέναρ, εἰπὲ πόσον;

AENEVS ego sum Leo: canales vero mihi sunt oculi duo: & os cum palma dextri pedis. Implent autem craterem eundem, dexter quidem oculus duobus diebus: sinister vero tribus: Et palma quatuor diebus: Porro sex horis os implere eum potest. Hæc igitur simul omnia & os, & oculi, & palma, dic quanto tempore eundem craterem impleant?

PONATVR pro tempore 12♎, horarum. atque dicatur.

Hor.	Crater.	Hor.	Crater.
48	1	1 2♎?	$\frac{1}{48}$ 2♎
72			$\frac{1}{72}$ 2♎
96			$\frac{1}{96}$ 2♎
6			$\frac{1}{6}$ 2♎

Si 48. horis impletur 1. Crater, in 12♎ horarum implebitur $\frac{1}{48}$ 2♎ Crateris: & sic de reliquis, vt in regula Trium quater adhibita vides. Atque omnes hæ partes faciunt $\frac{67}{288}$ 2♎. vnius Crateris, æquales 1. Crateri. Si igitur 1. diuidatur per $\frac{288}{67}$ fiet 12♎. $\frac{288}{67}$. hoc est, Horæ $4\frac{44}{67}$. quibus Crater implebitur. quod probatur. vt hic vides.

Hor.	Crater.	Hor.	Crater.
48	1	$4\frac{44}{67}$?	$\frac{67}{67}$
72			$\frac{44}{67}$
96			$\frac{33}{67}$
6			$\frac{44}{67}$

Nam si oculus dexter 48 horis implet 1. Craterem, horis $4\frac{44}{67}$. implebunt $\frac{67}{67}$. Crateris vnius, &c. atque omnes istæ partes Crateris conficiunt vnum craterem.

IV.

4. DE STATVIS ZETHI, AMPHIONIS, ac matris ipsorum Antiopes.

Τέταρτον.

Ἀμφω μὲν ἡμεῖς εἴκοσι μνᾶς ἤλκομεν,
Ζῆθός τε χ' ὦ ξυώαμφ, ἰὼ δέ μου λέβης
Τείτον, τὸ τέτρατόν τε τοῦδ' Ἀμφίονος
Ἐξ πάντ' ἀνδρῶν, μητρὸς δ' ἰσήσεις ϛαθμόν.

AMBO quidem nos viginti minas appendimus, Zethus pariter, & meus consanguineus. At si de meis minis tertiam partem: minarum vero Amphionis quartam sumpseris, sex in summa inuentis, matris pondus reperies. Quæstio est, quot minas tum Zethus, tum Amphion eius consanguineus appenderit.

PONE pro Zetho 12♎ minarum: ideoque pro Amphione minas 20 — 12♎. faciesque tertiam partem Zethi $\frac{1}{3}$2♎, & quartam partem Amphionis 5 — $\frac{1}{4}$2♎, quæ summam faciunt 5 + $\frac{1}{12}$2♎, æqualem 6. Ablatis igitur 5. vtrobique, erit æquatio inter $\frac{1}{12}$2♎. & 1. Diuisa ergo 1. per $\frac{1}{12}$. fiet 12♎. 12. atque tot minarum fuit statua Zethi. Amphionis vero 8. & Antiopes 6. quæ minæ omnes faciunt 26.

V.

5. EVCLIDIS GEOMETRICVM.

Εὐκλείδου Γεωμετρικόν.

Ἡμίονος καὶ ὄνος φορέοντα οἶνον ἔβαινον,
Αὐταρ ὄνος στενάχιζεν ἐπ' ἄχθεϊ φόρτου ἑοῖο.
Τὼ δὲ βαρυστενάχοντα ἰδοῦσ' ἐφέεινεν ὀνείην·

Μῆτερ

Μῆτερ πὴ κλαίουσ' ὀλοφύρεαι ἠύτε κούρη:
Εἰ μέτερον ἔμοι ἄθλιος· ἀπλάσιον στένεν ἦεν.
Εἰ δὲ ἓν ἀμπλάβοις, πάντως ἰσότητα φυλάξεις.
Εἰπὲ τὸ μέτρον ἄειστε Γεωμετείης ὀπάσσω.

IBANT Mulus, & Asina vinum portantes: Asina autem ex dolore ponderis sui ingemiscebat. Quare visa, Mulus grauiter ingemiscentem Asinam sic interrogauit. Mater cur ita lamentaris, cur puellæ instar lacrimas fundis? Mensuram mihi vnam si dederis, duplo, quam tu, plus sustulero: sin vero tu à me vnam acceperis, idem plane, quod ego, pondus feres. Mensuram itaque peritissime Geometer dicas volo.

Alia versio.

Mulæ, Asinæque duos imponit seruulus vtres
Impletos vino, segnemque vt vidit Asellam
Pondere defessam vestigia figere tarda
Mula rogat: Quid chara parens cunctare, gemisque?
Vnam ex vtre tuo mensuram si mihi reddas.
Duplum oneris tunc ipsa feram: Sed si tibi tradam
Vnam mensuram, fient æqualia vtrique
Pondera. Mensuras dic docte Geometer istas.

Alia Versio.

Mulus portabat vinum comitatus Asella,
Hæc oneris queritur pondera vasta sui.
Ille graues matris gemitus miratur, & inquit,
Cur adeo lachrymis lumina mæsta fluunt?
Mollities teneras, mater, decet illa puellas,
Quas premit insuetus, debilitatque labor.
Vnam mensuram, si nostros fundis in vtres,
Ipse tui vini pondera dupla feram:
Sin vnam contra nostro de fasce leuabis
Partem, tunc æquum pondus vterque feret.
Dic mihi mensuras, ô docte Geometer istas,
Non aliter Phœbi nomine dignus eris.

PONE pro mensuris muli 12♎. ac proinde pro mensuris asinæ $\frac{1}{2}$2♎ + 1$\frac{1}{2}$. Ita enim si mulo dederit vnam mensuram, habebit mulus 12♎ + 1. quod pondus duplum erit reliquo ponderi asinæ, nimirum $\frac{1}{2}$2♎ + $\frac{1}{2}$. At si mulus asinæ det 1. mensuram, erit reliquum pondus muli 12♎ — 1. æquale ponderi asinæ, quod tunc erit $\frac{1}{2}$2♎ + 2$\frac{1}{2}$. Addatur 1. vtrobique, fietque æquatio inter 12♎. & $\frac{1}{2}$2♎ + 3$\frac{1}{2}$. Ablataque $\frac{1}{2}$2♎. vtrinque, erit æqualitas inter $\frac{1}{2}$2♎. & 3$\frac{1}{2}$. Diuisis igitur 3$\frac{1}{2}$. per $\frac{1}{2}$. fiet 12♎ $\frac{1}{4}$. hoc est 7. pro mensuris muli. Asina ergo habens $\frac{1}{2}$2♎ + 1$\frac{1}{2}$. portabit mensuras 3$\frac{1}{2}$. & 1$\frac{1}{2}$. nimirum 5. quod probatur. Nam si mulo det asina 1. mensuram, habebit mulus 8. mensuras, quæ duplæ sunt quatuor mensurarum, quæ asinæ supersunt. At si mulus det asinæ mensuram 1. portabit vterque 6. mensuras.

INDEX

INDEX CAPITVM QVÆ IN ALGEBRA CONTINENTVR.

PROOEMIVM, De Algebræ præstantia. 3
CAP. I. De Inuentore Algebræ, ac nomine. 4
II. De Numeris Cossicis, siue Denominatis. 5
III. De Numeratione Cossicorum numerorum. 9
IV. De Additione, & Subtractione numerorum Cossicorum. 9
V. De Multiplicatione, & Diuisione numerorum Cossicorum. 13
VI. De numeris fictis, siue minoribus, quam nihil. 16
VII. De Fractionibus numerorum Cossicorum. 17
VIII. De Regula Algebræ. 20
IX. De Aequationum varietate. 21
X. De reductione Aequationum. 22
XI. De diuisione, quam præcipit Regula Algebræ. 24
XII. De extractione radicum, cuius mentionem facit Regula Algebræ. 24
XIII. De multitudine Regularum Algebræ, quam alij auctores introducunt. 33
XIV. Quæstio proposita, vtrum possibilis sit, necne, an vero inepta ac nugatoria, quo pacto ex ipsa operatione, quæ per Algebræ regulam fit, cognoscatur. 34
XV. De secundis radicibus. 36
XVI. De numeris irrationalibus, siue surdis. 38
XVII. De reductione radicum simplicium ad eandem denominationem. 39
XVIII. De multiplicatione, ac diuisione radicum simplicium. 41
XIX. De Additione radicum simplicium. 44
XX. De Subtractione radicum simplicium. 47
XXI. Inter duos numeros quotlibet medios proportionales constituere. 48
XXII. De Additione, ac subtractione numerorum irrationalium compositorum. 49
XXIII. De Multiplicatione, ac diuisione numerorum irrationalium compositorum, & diminutorum. 52
XXIV. De Radicibus numerorum irrationalium compositorum, vel diminutorum, quas alij Vniuersales dicunt: Et de earundem Algorithmo. 58
XXV. De minutijs numerorum irrationalium, ac de earundem Algorithmo. 65
XXVI. De numeris irrationalibus, siue Denominatis, vna cum eorum Algorithmo. 66
XXVII. De Binomijs, atque Apotomis, Residuisue. 65
XXVIII. De extractione radicum ex Binomijs, & Apotomis. Vbi obiter de alijs lineis irrationalibus, de quibus Euclides in lib. 10. disputat. 72
XXIX. Aenigmata varia numerorum abstractorum per Algebram enucleanda, in quibus æquatio inter duos numeros occurrit: quæ quidem simplex æquatio dicitur. 79
XXX. Aenigmata varia numerorum abstractorum per Algebram enodanda, in quibus æquatio inter tres numeros, quorum vnus alijs duobus æqualis est, occurrit: quæ quidem composita æquatio dicitur. 129
XXXI. Aenigmata varia numerorum ad res materiales contractorum, cum nonnullis exemplis ad secundas radices pertinentibus. 145
XXXII. Aenigmata varia ad figuras Geometricas pertinentia. à pag. 169. vsque ad finem.

FINIS.