APoLo
NIO Pergeo
Con[illegible]
[illegible]

20-a-3

APOLLONII PERGÆI CONICORVM LIB. V. VI. VII.

&

ARCHIMEDIS ASSVMPTORVM LIBER.

APOLLONII PERGÆI
CONICORVM LIB. V. VI. VII.

PARAPHRASTE

ABALPHATO ASPHAHANENSI

Nunc primùm editi.

ADDITVS IN CALCE

ARCHIMEDIS ASSVMPTORVM LIBER,

EX CODICIBVS ARABICIS M.SS.

SERENISSIMI

MAGNI DVCIS ETRVRIÆ

ABRAHAMVS ECCHELLENSIS MARONITA

In Alma Vrbe Linguar. Orient. Professor Latinos reddidit.

IO: ALFONSVS BORELLVS

In Pisana Academia Matheseos Professor curam in Geometricis versioni contulit, & notas vberiores in vniuersum opus adiecit.

AD SERENISSIMVM

COSMVM III.

ETRVRIÆ PRINCIPEM.

FLORENTIÆ,

Ex Typographia Iosephi Cocchini ad insigne Stellæ MDCLXI.

SVPERIORVM PERMISSV.

AD SERENISSIMVM

COSMVM TERTIVM

ETRVRIÆ PRINCIPEM.

IO: ALFONSVS BORELLIVS F.

HAVD puto, Serenissime Princeps, timorem cœlestis irę, sed Amorem potius, & beneficentiam primùm in orbe Deos fecisse; nec alios ab initio habitos cum Prodico censeo, quàm res humano generi summopere vtiles, & salutares. Et sanè consentaneum est in primorum hominum mentibus, quibus reuelationis lumen non affulsit, excitatam fuisse notitiam cuiusdam naturæ, quæ esset mundi veluti Princeps, & Parens, quotiescumque non perfunctoriè attenderet animum præcipuè ad bonitatis affluentiam, mirabiliumque, & insignium vtilitatum comprehensionem, qua Solaris splendidissima machina lumine suo ordinatissimè circumacto cuncta viuificat, fouet, ac nutrit; mirarenturque liberalitatem Telluris, cùm tot opes, ac copias plantarum, fructuum, animalium è sinu suo veluti mater benigna mortalibus præbet. Hæc & similia dum prisci homines contemplarentur, fieri non potuit, quin tantorum munerum largitores grato affectu prosequerentur. Neque alia ratione cùm viri heroica virtute præditi artes, & inuenta præclara valdè vtilia ingeniosè iuxta, ac liberaliter mortalibus contulistuliſſent, ſumma veneratione talem, ac tantam bonitatem ſuſceperunt, & Diuinitatis honores eis deſignarunt, vt Cereri, Baccho, Herculi, Mercurio, & alijs. Horum autem illi præſtantiora bona attuliſſe humano generi cenſendi ſunt, non qui fragilem, & limo affixam noſtram partem, ſed qui animum Diuinæ auræ participem eruditione, ac ſapientia perfecerunt, & ornarunt. Hinc artem, & facultatem illam tradentes, qua vaſti maris planitiem intrepidè perambulare non dubitamus coactis ventis imperata facere, ibidemque verſantes acu magnetica itinera ad vnguem menſuramus, & terræ plagas, & cœli, ſtellarumque loca, & ſitus medijs in tenebris conſtituti clarè conſpicimus. Vel hìnc qua pondera immenſa puſillis noſtris viribus tanta facilitate mouemus, vt terram vniuerſam è ſuo loco transferre ſe poſſe non diffiteretur magnus ille Archimedes, ſi haberet, vbi pedem extra illam figeret. Aut qua naturæ miracula in elementis, plantis, animantibus perſcrutamur. Quaue ex fragili vitro linceos oculos veluti efformantes adeò cœlo proximi efficimur, vt ferè ſummas mundi partes, & ſtellas innumeras hactenus inconſpicuas contrectare videamur. Aut eam tandem doctrinam Aſtronomicam, qua in Cęlum transuolamus, duabus nimirum alis Geometriæ, & Arithmeticæ, quibus Diuinæ Sapientiæ theſauros contemplando, ſumma dulcedine in hac mortali vita, gloriæ, felicitatiſque illius ineffabilis participes efficimur.

Sed quia felices admirabilium rerum inuentores vel fortunæ, vel temporum iniuria plerumque nequeunt ſua ſtudia, licet illuſtria, & ſalutaria poſteritati

transmit-

tranſmittere, ideo viris principibus ſingulari virtute præditis, ſine quorum auctoritate, & munificentia bonæ illæ artes omnino depreſſæ, contemptæ, & ſqualidæ deperirent, dum eas diuino inſtinctu promouent, augent, atque in vitam reuocant, ne dum pares, ſed maiores gratias ijs habendas priſci homines cenſuerunt, quàm inuentoribus ipſis, cùm ipſi bonis illis alioqui non duraturis genus hominum beauerint.

Atqui inter iſtos Heroas digniſsimum ſibi meritò locum vindicarunt Maiores tui, Princeps Sereniſsime, quibus gratitudinis perpetuam deberi memoriam eruditi omnes fatentur. Quippe poſtquam Barbarorum incurſionibus Europa vniuerſa, & Italia Princeps eius prouincia priſco nitore amiſſo, omni ornatu litterarũ, artium, bibliothecarum, lycęorum, imo humanitatis, & politiæ ſpoliata diù iacuiſſet, Diuino fauore primus omnium ſurrexit Magnus ille Coſmus Mediceus, qui viros doctrina eximios cum vniuerſa ſupellectile Grecæ ſapientiæ Conſtantinopolitani Imperij calamitatem fugientes eo affectu complexus eſt, vt omnium Muſarum parens appellari deberet, qui ob liberalitatem pluſquam regiam, & beneficentiam vbique terrarum effuſam, atque ob alia heroica geſta Pater Patrię prius ſalutatus fuerat. In eius locum ſucceſsit Laurentius nepos, qui non ferro, & cęde, ſed ciuili prudentia, & alto conſilio Patriam, & pene Europam moderatus eſt: nec modo Poëticis leporibus ornatus, ſed profundiſsimæ Philoſophiæ Platonicæ innutritus, eamdem doctrinam opera, & ſtudio potiſsimum Marſilij Ficini è Gręco translatam illuſtratamque poſteris tranſtulit. Bibliothecam inſuper Laurentianam à maioribus inchoatam comparatis

vndique

vndique manuscriptis codicibus summo impendio, summaque cura locupletauit. Isq; filium reliquit Leonem X. Pont. Max., qui vniuersi orbis viros eruditos dilexit, fouit, amplificauit: Bibliothecam Vaticanã mirificè instruxit: Vrbis Lyceum à fundamentis erexit, codicibus, & viris doctrina magnis ornauit, atq; prisca barbarie omnino deleta aureum litterarum sæculum restituit. Sed Cosmus ille primus Magnus Dux Etruriæ mihi nunc non reticendus, qui præter præclara bellica, & politica facinora, quibus Etruscum Imperium auxit, atque firmauit, promouendis disciplinis sedulò intentus Athenæum Pisanum, vt cum maximè reparauit, vt professoribus disciplinarum fama præstantibus nobilitauit: Florentinam Academiam instituit, Pandectarum libros ad fidem egregij, & vetustissimi codicis manuscripti amplissimè excudi iussit: tot insignes Græci, Latini, Etrusci idiomatis scriptores vigilijs, & labore eruditissimorum virorum illustratos typis edendos curauit: Paulum Iouium cum primis, & Io: Baptistam Adrianum ad sui temporis historias conscribendas amplissimis oblatis præmijs persuasit. Virtutes, atque opera tam Magni Parentis imitatus est Franciscus, qui in Imperio successit, & antiquitatis studio maximè delectatus, præclaras, atq; innumeras venerandæ vetustatis reliquias, lapides, gemmas, numismata collegit. Hunc excepit Ferdinandus primus verè litteratorũ Mecoenas, qui Bibliothecam codicibus Hæbreis, Chaldæis, Syriacis, Egyptijs, Persis, & Arabicis (inter quos hi libri Apollonij, & Archimedis extant) felicissimè ditatam reliquit, atque eruditissimos viros Hieronymum Mercurialem, Petrum Angelum, Iacobum Mazzonum, Io:

Bapti-

Baptistam Raimundum, totq; alios largissimis stipenpendijs euocauit, atq; aluit; Sacrosanctaq; Euangelia fidei propagandæ studio imprimi, Euclidem quoque, Auicennam, Geographiam Nubiensem typis nitidissimis Arabicè omnia edi curauit. Non absimilis litterarum amore Cosmus Secundus, cuius nomen, ac gloriam magnus ille Galilæus erga Principem de se optimè meritum gratissimus in cœlum vexit, ac insculpsit;
„ Vir nempe (vt Gassendus ait) super æthera notus; quo
„ alium non extulit ætas hæc nostra gloriosiorem; quip-
„ pe tametsi orbis terrarum laudatis virorum illustrium
„ dictis, factisq; circumstrepit, horum tamen omnium
„ memoriam silentium altum breui inuoluet: nomen,
„ quod ille cœlo inscripsit, donec cœlestia curæ erunt,
„ apud homines perennabit. Tandem Ferdinandus
Secundus ingenij perspicacia mirabilis, maiestate imperij præclarus, virtutibus, & Philosophia illustrior feliciter regnat: is est, cuius munificentia, ac fauore Europa vniuersa in Etrusca hac regia (ne aulicum decus, aut cultum, nobilium obsequia, & famulitium, Musæum amplissimum, ac ditissimum referam) eruditorum frequentiam philosophantium, disceptationes, ac perpetua exercitia literaria æstimari, ac florere merito suspicit, & veneratur; cum Musæ reliquis in aulis tantũ non neglectæ huc se se recepisse veluti in sedem suam videantur; hìc enim in delicijs habentur sectiones anatomicæ, cœlestes obseruationes, chimica esperimenta, vniuersęque naturalis philosophiæ accurata inquisitio. Vno verbo hinc credula philosophia exulat; non hominum libri in pretio habentur, sed Dei volumen, scilicet rerum natura veris, accuratisq; experimentis summo studio indagatur, & colitur. Præclaris

ris

ris hiſce ſtudijs lactatus, & innutritus es, Princeps Sereniſsimè, tot tantorumq; heroum progenies, quorum virtutes incomparabiles,& egregia geſta conſentaneū eſt in te vno veluti foco ſpeculi parabolici ſimul collecta, & vnita ſplendeſcere, vt totas vires ſuas ſumma virtus experiatur, atq; ineffabilem bonitatem, beneficentiæq; ſtudium, virtutum, artium, ſcientiarum cultum à maioribus acceptum ſtudiosè, & religiosè conſerues, atq; ad poſteros auctum tranſmittas.

Si igitur hominum genus natura dictante primum Deo Op. Max., & beneficentiſsimo gratias iuſtis honoribus, & memori mente perſoluendas eſſe decreuit; atq; ne memoria beneficiorum deleretur templa, fana, feſtos dies, & ludos inſtituit. Secundo loco eoſdem ferè honores Heroibus, ac Principibus ſtatuit, nō his qui armis, & cęde potentiam violenter ſibi vindicarunt, ſed qui præſtantibus virtutibus ornati magna beneficia in homines contulerunt, ſique eos non humanis, ſed diuinis laudibus celebrari iuſsit, potiori iure tibi, Princeps Glorioſiſsimè, pręclariſsimorū heroum, ac virtutum hęredi plauſus debitus, honores, laudes, & grati animi monumenta ab eruditis Europæ viris offeruntur. Quandoquidem magna,& certa illos ſpes tenet ampliſsimum patrimonium heroicarum virtutū, quod Coſmus Pater Patriæ, Laurentius magnificentiæ exemplar, Leo ſui ſęculi felicitas, inſequenteſque generoſiſsimi Principes, atq; Heroes de genere humano, & bonis litteris optimè meriti tibi reliquerunt non ad faſtum, ſed ad imitationem, & ſtimulum gloriæ, nec externè, ſed in animo, & cordis ſacrario piè a te, ac reuerenter curandum, ſeruandum,amplificandum ea pręcipuè qua polles pręclara indole, ingenijq; acumine, ac felicitate, amoreq; ſcientiarum, ac bonarum artium, quibus te Deus, & Natura indulgentiſsimè cumulauit. Hoc quidem ſummopere precatur, & vouet eruditorum Reſpublica, ò Princeps longe incomparabilis, idque vaticinatur ex hoc tuo pręclaro decore, & ſummæ bonitatis ſpecimine: Quippe, ò Principum decus, & ſtudioſorum delicium, perbellè docuiſti virtutis heroicę magis proprium eſſe benefacere, & alijs prodeſſe, quàm laudes meritas captare,& exigere; dum veluti epulo lautiſsimo in hac ſolemni pompa tuarum nuptiarum,ſcientiarum cultores donatos voluiſti; quid enim pretioſius, & magis expetitum veritatis ſtudioſis præbere poſſes, quàm Quintum, Sextum, & Septimum libros Conicorum Apollonij Pergæi hactenus deploratos, atq; lemmata Archimedis,quæ Sereniſsimus Ferdinandus Secundus inclytus, atque optimus parens tuus ex Arabico verti, & typis excudi ad communem reipublicæ litterariæ bonum iuſsit? Tanto ergo pro beneficio

— grates perſoluere dignas

— Non opis eſt noſtræ,

Numina tibi

— pręmia digna ferant, quę te tam lęta tulerunt

— ſęcula. qui tanti talem genuere parentes.

CAVE CHRISTIANE LECTOR.

ABalphatus Asphahanensis Apollonij Paraphrastes religione Maumedanus fuit; quapropter aliquot locis more suę Gentis non modo Regi suo Abicaligiar Carsciaseph nimium adulatur, verùm etiam impiè loquitur. Nihil tamen omissum est, vt antiquus Codex integrè, fideliterq; exhiberetur. Hęc eadem de Archimedis interprete dicta sunto. De his te præmonitum volui, ne inter legendum piæ aures tuæ vel minimùm offenderentur.

Vale.

IN NOMINE DEI MISERICORDIS MISERATORIS.

PROOEMIVM

ABALPHATHI FILII MAHMVDI, FILII ALCASEMI, FILII ALPHADHALI ASPHAHANENSIS.

LAVS DEO VTRIVSQVE SECVLI DOMINO.

MATHEMATICA quamuis practica sit scientia, ac disciplina, cuius legibus, & præceptionibus disponitur, atq; dirigitur intellectiua potentia ad absolutam, perfectamque imaginum cognitionem, præscindendo à materijs, qui est primus gradus ascensionis à sensibilibus ad intelligiqilia; nihilominus suarum claritate demonstrationum, non solùm ab alijs differt scientijs verùm etiam longiſsimè ijs præſtat, atq; præcellit, eò quòd fæcium, ſordiumque dubitationum, & aliorum huiuſmodi generis accidentium expers omninò ſit, atq; libera. Ea autem propter ſe habet ad ſcientificam potentiam, quemadmodùm habent ſe limpidiſsima quæque orbi ſolis oppoſita ad viſiuam potentiam. Ex quo ad illam comparandam, conſequendamq; non excitatur intellectiua duntaxat vis, verùm etiam multùm exacuitur, atq; delectatur, ponderatis præſertim, expenſiſq; illius demonſtrationibus, & certiſsima earum comprehenſa, & cognita veritate. Tunc quippè huius veritatis percepta animus odorationis ſuauitate, auidè, & ardentiùs appetit conſequi ea omnia, quæ illius ſuggerunt demonſtrationes, earumque potiri. Subindè verò procedere conatur vltrò ad vltimum finem, nempè ad proprietatum, & obiecti illius cognitionem, excelſitatem, atque præſtantiam comparandam, tandemque ad ea omnia, quæ ad ipſam ſpectant. Quod quidem luminis cùm ipſius affulſerit ſtudioſis, & quàm præcellens ſit, animaduerterint, omnes ſuos contulerunt conatus ad libros componendos, conſcribendoſq; de ipſius elementis, principijs, ac omnibus ijs, quę indè deriuantur, & eò ſpectant. Solidiora porrò profeſsionis huius fundamenta omnium primus iecit Euclides in eo libro, quem de elementis inſcripſit, in quo fundamentales continentur rationes linearum tam rectarum, quàm curuarum, nec non ſuperficierum prouenientium vel ex earum ſingulis vel ex omnibus ſimul ſumptis. Rationes prætereà habentur ſolidorum prouenientium, vel

ex

ex ſuperficiebus rectilineis, qualia ſunt habentia baſes; vel ex curuis, qualia ſunt ſphœrica; vel ex hiſce compoſitis, quales ſunt ſuperficies Cylindrorum, & Conorum. Verùm enim verò figuris ex ſegmentis ſuperficierum planarum prouenientibus, & cuiuſlibet etiam Solidorum Sphœricorum, Cylindricorum, atque Conicorum nullum hactenùs iactum erat fundamentum, aut præmiſſa elementa, vel fundamenta aliqua. Ex quo illi priſci librorum Scriptores aliquid de ijs innuebant duntaxat, & quidem leuiter. De Sphœricis autem aliquid ex eorum legebant proprietatibus, & paſsionibus; ſiue ex proprietatibus ſegmentorum indè prouenientium; vel figurarum in ea incidentium; vel ex accidentibus quibuſdam ipſius Sphœræ, quæ ex eius procedunt motibus; vel quia ſe inuicem includunt, & componunt. Nam Sphœra aliqua opus illi erat ad Sphœræ vniuerſalis cognitionem conſequendam vna cum eius orbibus, ac motibus, & ad inuicem atque ſua centra applicatione. Et id tandem, donec librum Almageſti compoſuit Ptolomæus, in quo ea omnia recondidit copiosè, quæ illi anguſtè, & leuiter hoc de argumento ſuis innuebant ſcriptis, tradens non ſolùm methodum, ac rationem eorum aſſequendi cognitionem, ſed, & inſtrumentorum etiam vſum. Quod profectò iactum fuit tamquàm vniuerſale quoddam fundamentum, ac principium ea omnia comprehendens, quæ ad Sphœrica pertinent; vndè hac in re ſatis abundè ſtudioſorum ſiti, & deſiderio conſultum fuit. Porrò Appollonius profeſsionē, & diſciplinam hanc ad ſupremum per-

** 2 fectioſectionis perduxit gradum, Conicorum componendo librum, qui Conicarum ſectionum complectitur proprietates, quæ ſublimiorem, eminentioremque diſciplinæ huius ſibi vindicant locum. Et ſane tot propoſitionibus, totque figuris illum ditauit, vt admirabiles illæ nuncupari meruerint, eò quòd contineant lineas curuas, ſeu medias inter rectas, ac circulares ſeſe inuicem ſecantes; adeoque miros quidem fundunt ſenſus, & proprietates. Quos quidem omnes libros, qui diſciplinæ huius fundamenta ſunt, ad Arabicam tranſtulere linguam illius ſtudioſi. Quamuis autem liber iſte Conicorum præſtantiſsimus ſit, tam ratione ſui, quàm præclariſsimi Auctoris, nihilominùs nimiam ob illius obſcuritatem, difficultateſque obuiam occurrentes, ac profundiſsimos, quos continet ſenſus; tum etiam ob innumeras, & admirabiles figuras, & propoſitiones; tandemque ob temporis diuturnitatem, ingenteſque perferendos labores ab interprete, qui eùm ex Græca transferat lingua, dudum neglectus fuit, ac penè etærnæ datus obliuioni, vt nemò hactenùs illum, vel Commentarijs illuſtrauerit, vel congeſſerit in ordinem, quamquàm ſummè ſit neceſſarius, ac vtiliſsimas complectatur propoſitiones, & figuras. Quapropter diù ſepultus, & ignotus iacuit, & penè ad defectum vſque, ac interitum, cùm apud Diſciplinæ ſtudioſos, tum etiam ipſos profeſſores, & fragmenta ex illo circumferebantur aliqua, & ea ſanè faciliora, quia obſcuriora euitabant omnes, atque declinabant; vno verbo integrum hactenùs viderat nemo. Hinc mihi famulo

visum

viſum eſt, me Reipublicæ Literariæ gratam rem facturum, ſi eum in integrum reſtituam, ac in vnum congeram volumen, vt ita redactus facilis ſit portatu, ſub omnium verſetur oculis, omnium teratur manibus, & ad reliqua facilior reddatur aditus.* Quem etiam librum comparare ſtudui Bibliothecæ domini noſtri Regis præſtantiſsimi, munificentiſsimi, doctiſsimi, iuſtiſsimi, victoris, triumphatoris, Fidei defenſoris, celſitudinis Monarcharum, gloriationis ſui generis, gloriæ religionis, ſolis Regum, Abicaligiar Carſciaſeph Filij Alì, Filij Phrami, Filij Haſami, Principis Fidelium, quem incolumem, ac ſoſpitem ſeruet Deus, eiuſque deprimat hoſtes, & proterat oſores. Nunc autem aliquid de ordine, & rerum diſpoſitione, ac conciſa breuitate dicendum nobis ſupereſt. Nam rerum ordo, & accommodata diſpoſitio id intelligentiæ afferunt auxilij, quod in ſcientijs comparandis luculentiſsimæ demonſtrationes; conciſa verò breuitas, ac ſuis terminis neceſſarijs expedita, & ritè diſpoſita, eandem penè proportionem habet ad intelligentiam, ac cauſa ad cauſatum. Ea autem propter ordinis conſeruatrix virtus venatio dici ſolita eſt, & ſatis quidem appoſitè, & eleganter. Nàm concepti ſenſus, & in mente comparati, ſi intra ordinis cancellos includantur, ſingulos ſuis diſpenſare momentis procliuè poterit conſeruatrix rerum illa virtus. Simillimi, alioquin erunt feris per vaſtas vagantibus ſolitudines, ac nullo coërcitis vallo, quorum imagines, & motus ita ſeſe offerunt conſpicienti, & contemplanti, vt nullo negotio eas

capere,

** Impiè adulatur Regi ſuo Paraphraſtes Arabicus.*

capere, & aucupari ſe poſſe arbitretur, at cum id præſtare tentat, ſtatim dilabuntur, atque euaneſcunt. Ea planè ratione termini rerum ſingulos in mente conceptos ſenſus deſignantes, niſi ſuo coërceantur ordine dilabuntur, & euaneſcunt; præcipuè cùm modò hanc, modò illam fundant ſignificationem, cùm iuxta labentis temporis varietatem, tùm diuerſitatem regionum, & prouinciarum, vt non eadem vbique, & ſemper ſit par ratio, licet ijdem in anima maneant habitus. Ex quo palam, & planè relinquitur, quòd acquiſiti illi termini non inhæreant, quemadmodùm ſubſiſtenti eſſentiales inhærent differentiæ; neque etiam quemadmobùm proprietates neceſſariò conſequentes ſuo inhærent ſubiecto; ſed ea inhærent ratione, quá accidentia difficilè, ac tardè amouibilia. Quandoquidem termini eiuſmodi vocabula ſunt quædam rebus impoſita, & applicata ad ſenſus commodè eliciendos, atque eruendos. Quod autem vel diuino factitatum eſt inſtinctu, vel Prophetica inſpiratione edoctum, ſicut indicat nobis Altiſsimus Deus dicens: *(in Alcorano) & docuit Adamum cuncta nomina; vel iudicio, & calculo ſapientum virorum, quemadmodùm præſtitiſſe legimus primos illos artium inuentores. & ſcientiarum; vel magna aliqua neceſſitas hominum coëgit vulgus ad eiuſmodi excogitandos terminos, rebuſque imponendos, ac tranſlatione quadam vocabula mutuanda, & ad alias, atque alias res transferenda, ex quo ſynonymorum ea enata eſt copia. Nec vllus profectò ſapientum, qui has profeſsi ſunt Diſciplinas, aut qui ipſorum

* *Inſulsè ex Alcorano profert, quæ ſunt in Sacra Geneſi.*

ſorum

ſorum ſecuti ſunt veſtigia, hanc imponendorum terminorum rationem aſpernatus ſubindè eſt, aut ab illa abhorruit; quinimò acceptiſsima ſemper omnibus fuit, vt quæ maximum rerum intelligentiæ ſplendorem affert, & claritatem. Eandem igitur hanc ob cauſam in colligendis, digerendiſque hiſce famulus libris, antiquorum ſapientum, & artium profeſſorum, inuentorumque inſiſtens veſtigijs, terminos, & vocabula ſingulis rebus imponere, & earum vim breui declarare definitione cenſuit, vt ita ſuis coërcita omnia limitibus nequeant in varias partes, & ſenſus diffluere, ad conciliandam lectori inter legendum hos Apollonij libros eam, quæ fieri poteſt, facilitatem. Innui præterea eandem etiam ob cauſam obſcurioribus in locis expoſitionem aliquam, ne vlla ſubindè relinqueretur difficultas ad mentem Auctoris cumulatè aſſequendam.

Tandem lectorem meum enixè rogo, vt excuſatum me habeat, ſi mendum aliquod, aut erratum meam ſubterfugerit diligentiam.

Interea Deum ſuppliciter deprecor Altiſsimum, vt nos ad ea, quæ vtiliora nobis ſunt, demúm perducat.

Ne vacaret pagina ipſiusmet Apollonij Pergæi ex Epiſtola ad Eudemum Argumenta in quatuor Conicorum libros poſteriores, qui Græcâ linguâ iniuria temporum perierunt, hìc apponuntur, quorum tres ex Arabicis M.SS. nunc exhibentur.

Reliqui autem quatuor libri ad abundatiorem ſcientiam pertinent. Quintus de Minimis, & Maximis magna ex parte agit. Sextus de Æqualibus, & Similibus coni ſectionibus. Septimus continet Theoremata quæ determinandi vim habent. Octauus Problemata conica determinata.

Hæc eadem Pappus Alexandrinus lib. 7. Mathemat. Collect., atq; Eutocius in Commentar. ad Apollonium.

ABRAHAMI ECCHELLENSIS

IN LATINAM EX ARABICIS

Librorum Apollonij Pergæi verſionem

PRAEFATIO.

APOLLONIVS Pergæus vetuſtiſſimus, ac magni nominis Græcus auctor otto de Sectionibus Conicis conſcripſit libros. Horum priores quatuor hactenus omnium teruntur manibus; poſteriores verò, neſcio quo fato, & rerum viciſſitudine ſunt amiſſi, ac non ſine magno literatorum animi mœrore iamdudum deplorati, & nuſquam perdiligenter non quæſiti ab ijs præſertim, qui Geometriæ, & Matheſeos operam nauant ſtudijs, ſed fuſtra diu. Tandem deprehenſum eſt, hos, quemadmodum, & reliquam penè Grecæ ſapientiæ ſupellectilem ad Arabum migraſſe ſcholas, ibique Arabicè conuerſos, & Arabicis indutos ornamentis, in illius gentis tamquam extorres, & inquilinos latitaſſe Bibliothecis. Quamobrem eorum miſerti vicem Sereniſſimi Magni Etruriæ Duces, inde magno ſoluto pretio redemerunt, ipſorumque tam præclara opera quaſi iure poſtliminij vindicarunt, ac demum patrio ſolo reddiderunt. Attamen ſat non fuit, aut viſum eſt ſummis iſtis Principibus Apollonium in libertatem aſſeruiſſe, & ex Barbarorum eripuiſſe manibus, ac in celeberrrima totius Europæ Auorum repoſuiſſe Biblioteca; ſed omnem nauarunt operam, & ſtudium, vt Latinâ etiam donati linguâ in literatorum gratiam publici iuris fierent. *Ea propter verè Magnus ille in omnibus Ferdinandus primus celeberrimam eam erexit Typographiam è nomine gentilitio Sereniſſimæ familiæ *Mediceam* nuncupatam, cui nullam ſimilem, aut parem vidit Chriſtianus Orbis, aut viſurus vnquàm eſt; ſiue characterum, præſertim Arabicorum, ſpectes copiam, ſiue varietatem, ſiue nitorem, ſiue elegantiam. Dictis hiſce profectò noſtris ſpectatiſſimam, ac manifeſtiſſimam fidem faciunt Sacroſanti Euangeliorum libri, Auicennæ, Euclidis, aliaque Arabica opera ijs edita typis, quæ omnibus Orientis gentibus admirationi ſunt, atque adeo auidiſſimè expetuntur, ac magno comparantur pretio. Sed hæc non typis duntaxat excudi iuſſit munificentiſſimus Princeps, verùm etiam viros linguarum peritiſſimos ingenti conduxit ſtipendio, qui Arabicorū Codicum vacarent verſionibus. Hos autem inter principem obtinebat locum Ioannes Baptiſta Raimundus vir, & ſcientiarum cognitione, & linguarum peritia omnium ore celebratiſſimus. Is autem, & ſcriptis literis, & familiaribus cum amicis colloquijs Apollonij librorum verſionem ſæpenumerò pollicitus eſt. Imò erant, qui libris editis verſionem iam à Raimundo confectam, & perfectam eſſe, in vulgus iactarent. Verùm cum nunquam viſa fuerit eiuſmodi verſio, neque inter ipſius ſcripta reperta, neque in Aduerſarijs notata, aut catalogo ipſius librorum adſcripta, quæ omnia religioſè hactenùs conſeruantur, hoc vnum credendum ſupereſt, eam votis ſolùm ſuſceptam, & cogitatione delineatam fuiſſe; rem autem, aut quòd per otium ipſi non licuit, aut ob Codicis lectionem, & ſcripturæ difficultatem, quæ maxima eſt, vel ob orationis abſtruſæ, & ſermonis ancipitem, ac multiplicem verborum poteſtatem, vel tandem aliquam aliam ob cauſam, quàm, conijcere difficile eſt, perficere non potuiſſe.

** Fallitur C.V.Ger. Io:Voſſius hoc tribuens Sixto V. P.M. C.17. 29. de ſcient. Mathemat.*

Nihilo

Nihilo tamen minùs Magni Principis, Magni Filij, Magni Nepotes aut ab incœptis deſtiterunt, aut generoſiſſimi animi dudum conceptum ſtudium remiſerunt. Quamobrem ante biennium ſcriptis à Sereniſſimo Principe Leopoldo literis officij plenis, & humanitate, tam proprio, quàm Magni Ferdinandi II. fratris nomine, impoſita mihi fuit hæc prouincia optatæ diu, & penè deſperatæ verſionis. Quo ſanè, vt ingenuè fatear, nihil iucundius, nihil carius, nihil antiquius accidere mihi poterat; quòd hac data occaſione, aliquam grati animi ſignificationem exhibere me poſſe putabam Sereniſſimo illi Principi, cuius ampliſſima in me beneficia ſum expertus. Memini profectò, nec ex animo meo excidet, imo clauo fixum trabali manet, quanta in me contulit Magnus Ferdinandus Secundus ornamenta, quanta in me vſus eſt liberalitate, & beneficentia, non tantùm dum fortuna mihi arridebat, non ſolùm dum res ſuccedebant proſperè, non modò dum ad illum ab Amiro Fachraddino miſſus ſingulari felicitate fruebar, ſed etiam in naufragio, & iactura illa barbarica, in Carrellina coniuratione, & proditione, in aduerſiſſima fortuna. Sed hæc omnia magis à me exprimi poſſunt profundiſſimo ſilentio, quàm verborum, copia, aut oratione altius exaggerata. Verùm enim verò dum arbitrabar, mirificam nactum me eſſe opportunitatem gratificandi Principi de me optimè merito, & exhibendi aliquod grati animi ſignum, penè concepta excidi ſpe. Nam aperto Apollonij Codice, & coniectis in eum oculis duæ primo ferè intuitu ſeſe mihi obtulerunt difficultates, quas à me neque ſuperari, neque vinci poſſe prorsùs exiſtimaui. Hinc ſummus, & abſtruſus pudor, hinc plurimus ſudor ingenuè omnia fateor. Et eò magis intimis animi ſenſibus angebar, quod ea verſio non in ſeceſſu aliquo fiebat, & remotis arbitris, vbi aciem mentis abducere, difficultates commodè expendere, animoque intento, & libero luſtrare quæ in rem eſſent, ac per otium poſſem, ſed præſentibus grauiſſimis viris, & quidem, ex tempore, & nulla data præmeditandi facultate, interpretationem facere compellebar. Ea fortè illorū præclariſſimorū virorū de me erat opinio, & exiſtimatio, quàm tamen parum abfuit, quin penitus perdidiſſem, cùm vix, & ne vix quidem ſcripturam illam legere poſ-

 ſem,

ſem, quæ prima erat difficultas. Nam puncta aberant diacritica imprimis (de punctis vocalibus hic non loquimur, nec eorũ inter legendum à peritis linguæ habetur ratio, aut negotium aliquod faceſſunt), nempè ea, quæ formam dant literis, literaſque conſtituunt, & ſine quibus literæ ſunt pura, ac nuda materia omni ſpoliatæ forma. Quid autem ſit materia omni ſpoliata forma, neque ipſi ſciunt Philoſophi, quorum id ſcire intereſt. Eodem prorſus ſe habent modo Arabum literæ, ſeu potiùs literarum ductus, & lineæ diacriticis hiſce carentes punctis. Eadem enim figura, ſeu linea, exempli gratia, ſi vnum ei ſuperponitur punctum erit N. ſi verò ſupponatur, B. ſi duo ſuperponuntur, T. ſi tria Th. ſi duo ſupponantur, I. & ſic de cæteris ferè omnibus arguendum eſt. Si quis autem percontabitur, quid erit illa figura, & linea, ſi nullum adſit punctum? reſpondetur materia ſine forma, & quid ſit prorsùs ignoratur. Augebant etiam lectionis difficultatem ipſæ literarum figuræ, quæ ita raptim, & curſim, licet elegantiſſimè, ductæ erant, vt vix ab inuicem quandoque, & identim diſtinguerentur. Hæc autem difficultas terruit quidem primo aſpectu ſed breui, & citius quàm credebam, ſuperata fuit, tum ſtudio, & diligentia, tum experientia, quàm ab ipſa ineunte ætate ex lectione eiuſmodi ſcriptorum generis comparauimus.

Altera difficultas, quæ ſe nobis obtulerat, maioris quidem erat ponderis, & momenti; verſabatur quippè circa diſciplinæ vocabulorum intelligentiam, & notionem, quorum ignari eramus, & penitùs ieiuni. At hanc quoque difficultatem facili negotio ſuperauimus ope, & opera Clariſſimi, atque Doctiſſimi Viri D. Ioannis Alphonſi Borelli Matheſeos in Piſana Academia profeſſoris celeberrimi, qui, & verſionem ipſam promouerat apud Sereniſſimos Principes, & Codicem comportauerat idem Romam, ac perpetuus mihi aderat Dux, & Magiſter. Et ita ſanè ea omnia, quæ ad Diſciplinæ, eiuſque vocabulorum notionem pertinebant, clarè, dilucidè, & explicatè ordine inſinuauit, vt breui meis auditoribus Matheſeos profeſſor viderer. Porrò quod hac in re magis mirandum eſt, nec ſilentio prætereundum, ea erat Viro illi Doctiſſimo ſingularis ingenij perſpicacitas, vt ſæpe in abſtruſis quibuſdam locis, non ex integris,

tegris,

tegris, inquam, præmiſſis, ſed ex vnica dictione totam illationem inde colligeret, non ſenſu, ſed totidem penè verbis, ac ſi Arabica legeret verba, & linguæ veteranus eſſet profeſſor. Proindè verius ipſi, quàm mihi adſcribenda eſt hæc verſio, longè tamen abſit omnis adulatio, & animi propenſio in virum amiciſſimum. Hac mutua contentione, & interpretandi, & vertendi trium Menſium ſpatio verſio noſtra confecta, & abſoluta eſt, in qua horis tantummodò matutinis propter nimios calores æſtiuos conſumpſimus. Et hæc de ratione verſionis poſteriorum librorum Apollonij, & methodo ſatis dicta ſint. Nunc de ipſo Apollonio, eiuſque librorum Arabica verſione, & illius auctoribus nonnihil dicere, par, & conſentaneum eſt.

Apollonium ſub Achaz Filio Ioatham regis Iuda poſt Thaletem Mileſium Floruiſſe, Arabes perhibent Scriptores. Sic enim lib. 3. Chronicorum in Achaz ſcriptum reliquit Gregorius Barhebræus: *Poſt Thaletem celebris fuit in Geometricis præcipue diſciplinis Apollonius Naggiar.* (ideſt faber lignarius) *Is compoſuit Tractatum de ſcientia Conicor. nempè de lineis, quæ neque rectæ ſunt, neque arcuatæ, ſeu curuæ, ſed inclinatæ.* Notandum hìc eſt vocem *Naggiar*, quæ Apollonio tribuitur, vt cognomen, & nos *fabrum lignarium* vertimus, poni (vt opinor) pro *Geometra*, & id fortè exindè, quòd inſtrumenta, quibus vtebantur Geometræ ex lignis olim conficiebantur. Quod, & indè conijcio, quia hoc idem vocabulum Euclidi quoque tribuitur apud eundem Gregorium ſic de illo ſcribentem. *At Euclides Naggiar ex Vrbe Tyro erat.*

De verſione autem librorum Apollonij in Arabicam linguam ita ſtatim ſubdit mox laudatus Gregorius: *Ex his autem verſi ſunt in Arabicam linguam tempore Almamuni ſeptem libri, eius tamen præfatio indicat, octo fuiſſe libros; qui quidem Tractatus cum alio Tractatu eiuſdẽ Apollonij cauſam dedere Euclidi ſuorum componendorum librorũ longum poſt tempus.* In his longè videtur diſcrepare Gregorius à communi Chronologorum ſententia, & opinione, qui Apollonium Floruiſſe ſcribunt anno periodi Iulianę 4474. ideſt annis ante Chriſtum Dominum 240. adeoque multò iunior eſt, quàm facit illum Gregorius. Diſcrepat præterea ab ijſdem Chronologis in ætate Euclidis, quem Apollonio iuniorem agnoſcit,

vbi

vbi illi eum collocant in anno periodi Iulianæ 4430. ideſt ante Chriſtum Dominum annis 284. iuxta quàm opinionem Apollonius iunior erit Euclide annis 44.

Almamun autem ſub quo facta eſt librorum Apollonij verſio in Arabicam linguam ex laudato Gregorio Chalipha ſecundò ſalutatus eſt An. Heg. 203. ex omnium ſcriptorum ſententia, qui annus ex Tabula Aerarum Iſmaelis Sciahinſciah, quàm refert in hiſtoria Gentium, reſpondet Anno Chriſti Domini ſolari 826. plùs minuſue. Nam Hegiram accidiſſe anno Chriſti 631. habet Iſmaèlis Tabula contra omnium Chronologorum Orientalium opinionem, qui eam reponunt in ann. Chriſti 622. & vndecim Heraclij, vno excepto Eutychio Alexandrino, qui eam reponit in ſua hiſt. Eccles. in an. Chriſti 614. ſcribit enim ibi: *A Chriſto Domino noſtro vſque ad Hegiram ſunt anni 614.* In quo octennio integro diſcrepat ab alijs Chronologicis. Sed hæc leuiter tetigiſſe, ſatis eſt; non eſt enim animus hic temporum apices data opera excutere, nec id ſanè vacat, nec huius loci eſt.

Principem autem Almamunum, eam procuraſſe verſionem librorum Apollonij, non ſolùm facilè, ſed procerto credendum eſt. Nam is omnium ſcientiarum ſtudijs vehementiſſimè ardebat, proindeque congerendorum vndique librorum nunquàm finem faciebat, eratque in eorum interpretes prolixiſſimus. Mira ſanè, quæ de illius, ac proaui Abugiahphar Almanſur animi propenſione in literas, & literatos viros refert Sahadus Filius Ahmedi Andaluſij in Hiſt. Arabum. *Is*, inquit ibi, *erat ſtatus Arabum in gentilitate. Poſtquàm verò fauoribus proſequutus eſt Deus Altiſsimus Haceſmitas, deuoluitque ad eos imperium, conuerſæ mentes ſunt, & intellectus à ſtupore, in quo iacebant, & exſuſcitata ingeniorum acumina poſtquàm extincta erant. Horum autem primus, qui promouendis ſcientijs operam nauauit, erat Abugiahphar Almanſur ſecundus Chalipha. Qui tametſi Iuriſprudentiæ deditiſsimus eſſet, & peritiſsimus; nihilominus, & Philoſophiæ vacabat ſtudio, ſed ardentius Aſtronomiæ. Cùm verò Imperij ſuſcepiſſet ſceptra Chalipha ſeptimus Abdalla Almanſun filius Aaronis Raſcidi, abſoluit ea, quæ inceperat Auus ipſius Almanſur, operamque dedit ſcientijs vbique inquirendis. Hinc Græcorum ſcripſit Imperatoribus rogans ſibi mitti quotquot haberi poſſunt Philoſophorum libri, qui quotquot comparare potuerunt miſerunt ipſi. Quibus ille vertendis peritiſsimos quoſque ſelegit interpretes, & curam iniunxit interpretandi, & verſi ſunt eo ſtudio maiori, quod fieri poteſt. Quo autem facto homines non ſolùm incitabat, ſed & cogebat quodammodò, vt ijs legendis, & ediſcendis operam darent. Ipſe verò ſapientes viros familiariſsimè conueniebat, eorumque peramicè vtebatur conſuetudine, atque plurimùm illorum delectabatur colloquijs. Nouerat, & quippe optime, ſapientes viros Deo Altiſsimo mortalium eſſe cariſsimos, ac ipſi coniunctiſsimos, eò quod ſeſe dederunt animæ rationalis virtutibus comparandis, poſthabitis, & contemptis ijs, quibus Sinenſes, ac Turcæ, eorumque ſimiles incumbunt. Hi enim oſtentare amant artium Mechanicarum ſubtilitatem, animæ iraſcibilis gloriantur potentijs, & concupiſcibilis iactant ſe ſe facultatibus. Cùm tamen hæc omnia communia cum ijs ipſa habere bruta, ſcire debeant; imò longè ab illis ſuperantur. Peritia, & ſubtilitate artis ab Apibus, quæ ſua examina, ſeu penarium ſexangula mirà conſtruunt arte. Audacia, & fortitudine à Leonibus, alijſque feris, quibus in hiſce haud comparandus eſt homo. Libidine, & Luxuria à ſuibus, atque alijs, quæ hic memorari neceſſe non eſt. Hacque de cauſa ſapientes viri ſunt lampades in tenebris, & mortalium omnium Domini. Et heu quàm turpe, atque deforme eſt terrarum hoc orbis theatrum, quoties ſuis caret ſapientibus.* Hæc Sahedus in Hiſtoria Arabum.

Noſtram autem verſionem hanc Arabicam quod attinet, alia prorsùs eſt ab ea, quæ ſub Almamuno confecta eſt. Hoc planè patet ex ipſius Auctoris Abalphathi in præfatione verbis. Dicit quippè ibi, ſe eam adornaſſe verſionem pro regis Abicaligiar Bibliotheca. Abicaligiar autem rex ſalutatus eſt, teſte Sciahinſciah, Gregorio, & alijs, Hegiræ anno 372. nempè annis 169. poſt Almamuni inaugurationem ijsdem, quos mox laudauimus, auctoribus.

Verſionem tamen illam, quæ ſub Almamuno facta eſt, nequaquàm vidit noſtræ huius verſionis auctor Abalphath, quemadmodùm ex verbis eius, quæ ad ſeptimi libri adiecit calcem, patet luculenter. Ibi enim, *puto* inquit, *me in hoc*, nempè in hac verſione concinnanda, *quoſcunque alios anteuertiſſe*. Itaque exiſtimat is noſter Auctor, ſe omnium primum Apollonij verſionem Reipublicæ literariæ dediſſe. Quod, & in ipſa quoque innuit

innuit præfatione , asserens vsque ad sua tempora nullam integram librorum Apollonij extitisse inter Arabes versionem ; sed fragmenta quædam. Ex quo arguere est , aut eum minimè antiquiorem Almamuni vidisse versionem, aut istam non fuisse integram , sed Epitomem aliquam ex septem Apollonij decerptam libris , de qua ille in præfatione . Vt vt sit nostra hæc alia prorsùs est ab ea , & ad ipsius auctoris calculos redacta , atque adeò integra , & omnium perfectissima , atque absolutissima .

Cæterũ admonitum volumus benignum lectorem , nos in hac versione adornanda satis presè Arabicam secutos esse phrasim, nec omninò elegantiam , & venustatem linguæ expressisse , arbitrantes id maximè pertinere ad fidelis interpretis partes , & officium.

Ea autem quæ occurrunt circa ipsam phrasim , & vocabula nonnulla obseruanda , Arabicæ Editioni reseruauimus , rati ea commodius , & magis ad rem ibi exponenda esse , & suis exprimenda characteribus. Interim benè vale, & hoc qualicunque fruere studio , & labore.

IO: ALFONSI BORELLI

PRÆFATIO AD LECTOREM.

ACCIPE tandem , studiose Lector , in solemni hac pompa nuptiarum Serenissimi Principis Etruriæ Regio splendore à Serenissimo Magno Duce parata tamdiu deploratos , & expetitos libros postremos Conicorum Apollonij Pergæi , vtque sine mora mens tua epulis hisce lautissimis saturari possit , non te demorari diutine patiar in limine , recensendo scilicet nomen Apollonij , patriam , ætatem , & opera ab eo conscripta , neque insuper doctrinæ conicæ ortum , & progressum à primis incunabulis ad virilem vsque , & vegetam ætatem , ad quam Apollonius eam euexit , propter quod facimus magnus Geometra cognominatus est ; hæc enim trita iam sunt , & vulgaria : breuiter tantummodo percurram , quæ ad notitiam horum librorum facere videntur.

Illius pretiosissimæ bibliothecæ orientalis, quàm Serenissimo Ferdinando Primo gratitudinis ergo reliquerat Ignatius Neama Patriarcha Antiochensis libellum nitidissimè Arabicè scriptum mihi ostenderat Serenissimus Princeps Leopoldus Musarum decus , & gloria , nostrique sæculi lumen eruditum. Codici inscripserat Raimundus, siue quis alius : Otto libri de Conici d'Apollonio del Patriarca. *Summa lætitia libellum exosculatus , licet Arabici idiomatis sim prorsus ignarus , non potui me continere , quin saltem contrectarem, atque reuoluerem paginas illas ; cumque præter figuras mihi satis notas quatuor priorum Apollonij librorum vidissem alias conicas figuras , in quibus ab vno puncto in eis collocato eductæ erant plurimæ rectæ lineæ ad conisectionem , illico in mentem venere illa Eutocij verba in expositione epistolæ Apollonij ad Eudemum :* Quintus , *inquit* , liber de Minimis, & Maximis magna ex parte agit; quemadmodum enim in elementis didicimus, si ab aliquo puncto in circulum lineæ ducantur, earum quidem , quæ ad concauam ipsius circumferentiam pertinent , maximam esse , quæ per centrum transit, earum vero, quæ ad conuexam, minimam esse, quæ inter dictum punctum , & diametrum interijcitur, ita & de

**** coni-

conisectionibus in quinto libro inquirit. Sexti, septimi, & octaui libri propositum manifestè ab ipso Apollonio explicatur. *Cùmq; postea à quodam Maronita Arabicè callente accepissem tractatum, seu librum quintum Apollonij esse illum, in quo figuræ prædictæ delineatæ erant, pariterque in subsequenti libro sexto conspexissem figuras alias exprimentes æqualitatem, & similitudinem sectionum conicarum, mihi certum fuit, verè Apollonij esse libros illos. Haud tamen negabo scrupulum, ac dubitationem iniectam, ex eo quod textus ille Arabicus non præferebat in fronte Apollonij, vel vllius alterius nomen, & definitiones primi libri centuriam superabant, cum Apollonius non nisi nouendecim suo primo libro apposuisset. Insuper in prioribus quatuor libris non totidem figuras conspiciebam, nec omnino similes, easdemque, nec eodem ordine dispositas, ac in textu Græco Eutocij videre est; quare censui librum prædictum epitomen esse Conicorum Apollonij ab aliquo alio conscriptam. Hanc quoq; præclarissimi Torricellij fuisse sententiam postea didici ex eius Epistola ad eruditissimum Michaelem Angelum Riccium missam. Perstiti tamen debere latinè verti lucubrationem tam eximiam, eruditisq; optatissimam, nam nisi ipsissimum opus esset Apollonij, saltem ex ijsdemmet libris epitome illa desumpta, & transcripta existimari debuerat.*

Igitur Serenissimus Ferdinandus Secundus Magnus Dux munificentia verè regia, qua bonas artes promouere studet, annuente, & summopere coadiuuante Serenissimo Principe Leopoldo fratre Matheseos, atque omnigenæ Sapientiæ perito cultore, atq; egregio vindice, præcepit, vt volumen Arabicum Romæ latinè redderetur ab Abrahamo Ecchellense linguarum Orientalium doctissimo, & peritissimo professore. Is quidem summa alacritate negotio suscepto primùm bono me esse animo iussit; monuit enim nouum non eße apud Arabes libros nomine auctoris in fronte carere, ostenditque in proemio eiusdem codicis apertissimè declarari esse libros Conicorum Apollonij paraphrasticè expositos: deinde ex translatione priorum quatuor librorum patuit demonstrationes propositionum penè non differre quoad doctrinam à textu Græco Eutocij, licet verbum verbo non responderet: nec mirari paucitatem figurarum, quandoquidem vna, eademq; figura quatuor, aut quinque propositionibus inseruiret. Incomparabili igitur gaudio perfusus Apollonium penè è manibus sublatum iterum amplexibus strinxi, & exosculatus sum. Sed molestum summopere fuit octauum librum deesse: collegi tamen Io:Baptistam Raimundum opusculum arithmeticum (quod in hoc codice Arabico subsequitur libro Septimo Apollonij) pro octauo

eiusdem libro accepisse, pariterq; Hieronymum Lunadorum in libro de Romana Curia nobis imposuisse, cum octo Apollonij libros ex Arabico transtulisse latinè Raimundum typis publicauit; qui enim fieri potuit, vt octo libros dedisset is, qui an septem, aut octo libri essent non animaduerterat?

Modo operæ pretium erit ante oculos ponere formam, & dispositionem huius paraphrasis ab interprete Abalphatho editæ. Et primo sciendum est eum collegisse simul septem integros libros Conicorum Apollonij ex fragmentis, quæ hactenus apud Arabes sparsim circumferebantur, disposuisseque propositiones eorumdem librorum alio ordine, ac diuerso ab Apolloniano, relictis tamen numeris antiquis, nam in primo libro post primam, & secundam propositiones subsequuntur vndecima, tertia, quarta, septima, & sic vlterius semper ordine perturbato procedendo. Hac nempe ratione simul collectis in eadem figura pluribus propositionibus, quas in locis dissitis collocauerat Apollonius, putauit Abalphathus breuiùs se eas demonstraturum retenta semper Apollonij sententia, scilicet ijsdem medijs, & eodem progressu, quo vsus est Apollonius, demonstrat Paraphrastes easdem propositiones. An vero variare noluerit reuerentia retentus, vel potius nequiuerit virium defectu, (quippe ingenio non admodum felici, et inueniendi sagaci à natura donatus) non ausim affirmare. Superaddit quoq; numerosam farraginem aliarum definitionum, quibus compendiosiùs, & clariùs demonstrationes absolui posse profitetur, quod quidem non raro ipse aßequitur; aliquaudo verò ob affectatam nimiam breuitatem obscurior efficitur: accidit quoque, vt aliquæ definitiones inutiles, & otiosæ sint, vel repetitio declarationis earumdem prolixitatem creet maiorem.

Animaduersione dignum est, quod Manuscriptum licet non distinguatur capitibus, aut paragraphis, sed continuo, perpetuoquè sermone procedat more Arabum, in eo tamen numerorum tria genera passim occurrunt, qui omnes ferè interlineares, pauci quidem in margine positi, aliqui rubris characteribus depicti, alij vero positi super alios numeros in eadem linea, veluti fractiones numerorum describi solent, hac ratione $\frac{9}{49}$. 50. *vel* $\frac{16}{68}$. 69. 70. 71., *& licet rarò synceri, & veridici sint, conieci tamen supremos numeros indicare partes, seu sectiones, in quas Abalphathus librum distribuit, atq; partitur: infimi verò numeri docent quotnam propositiones in vnaquaque sectione contineantur: itaque hi numeri* $\frac{16}{68}$. 69. 70. 71. *significant in lib.* 5. *Sect.* 16. *contineri Apollonij Propositiones* 68. 69. 70. 71. *reliqui numeri interlineares sic dispositi* 24. *ex* 5., *vel* 37. *ex* 6. *citationes sunt, indicantque Prop.* 24. *lib.* 5. *Conic.*

Apoll., vel Prop. 37. lib. 6. Sed mirum quàm mendosi sint omnes ferè numeri huius codicis! in solo enim quinto libro frequenter duæ, vel tres propositiones diuersæ vno, & eodem numero designantur, & è contra plures, & separati numeri nulli propositioni tribuuntur; nuspiam enim reperies propositiones 16. 17. 18. 24. 40., & quamplurimas alias. Citationes postea inter propositiones interpositæ mendosissimæ, obscuriores tenebras obducunt, quare non parum laboris, & molestiæ habui, vt propositionibus horum subsequentium librorum numeros debitos, & legitimos assignarem; nam prioribus quatuor in libris propositionum numeri licet perturbato ordine dispositarum facilè restitui, & corrigi potuerunt ex Græco exemplari, at in libris 5. 6. & 7. numeros erroneos serie propositionum alterata nisi ariolando assequi quis poterit? Cum ex Arabico codice mendas hasce numericas corrigi posse Excellentissimus Abrahamus Ecchellensis desperasset, repetitis litteris, vt coniecturis negotium perficerem, iussit; & siquidem propositiones Apollonij vno, vel altero tantum ordine disponi potuissent, forsan mentem auctoris conijcere arduum non fuisset, sed inter multas, & varias series, quibus conica doctrina exponi posset, si eam, quàm Abalphathus elegit, assecutus fuero, fortunæ tribuendum erit.

Sed quid ego minutias numerorum consector, cum in textu ipso insuperabiles ferè, & maioris momenti difficultates supersint? nulla propositio fuit, in qua sententiæ, verba, aut numeri, aut litteræ non fuerint multifariam permutatæ, mutilatæ, aliæ pro alijs repositæ, atque in propositionibus plerisque tituli ipsi, & expositiones summopere deprauatæ, vt prorsus ignoraretur quid nam demonstrandum proposuerit Apollonius. Itaque verba, litteræ, numeri, citationes, imò sententiæ deficientes, aut permutatæ vna cum affectata Paraphrastis Arabici breuitate, & multiplici, & noua nomenclatura cimmerias tenebras effundebant. Hasce in angustias redactus, quod potui, feci, vt germanum sensum Apollonij, & correctissimum exhiberem textum.

Hanc tamen cautionem adhibui, vt in notis semper bona fide apponerem ipsissima verba textus, quæ transtulerat ex codice Arabico me præsente Excellentissimus Ecchellensis, ibidemque rationes apposui mutationis, & correctionis factæ. Itaque persæpe vbi sententia videbatur obscura, neque distinctè explanata, tunc quidem meis verbis declaraui. Et quia multoties ob nimiam paraphrastis breuitatem, vel librariorum vitio propositiones nõ solide demonstrantur, vel nequeunt ex præcedentibus deduci, addidi ex meo penu lemmata nonnulla, quibus euidenter confirmantur, quæ in

textu

textu ambiguitatem aliquam præseferebant. Apposui quoque prolixè propositionum casus omnes neglectos in textu, eorumque demonstrationes. Sed hisce omnibus in rebus religiosus adeò fui, vt omnia diuerso charactere in notis memorauerim, exceptis tamen ijs, quæ minoris momenti sunt, vt litteræ transpositæ, & deficientes, & verba aliqua impropria, & non significantia, quæ commemorare non censui, ne volumen in immensum excresceret.

Tandem potuissem quidem abundantioris doctrinæ gratia non pauca meo marte hisce libris superaddere non omnino forsan contemnenda, sed parcus adeo fui, vt tantummodo quæ ad illustrationem, & ornatum operis facere videbantur, adiecerim suntq; nonnullæ propositiones additæ, quæ nouæ, & forsan inelegantes non erunt.

Considerandæ modo sunt difficultates à præstantissimo, et doctissimo Claudio Midorgio propositæ contra Manuscriptum Arabicum Apollonij, quod Clarissimus, & de bonis litteris optimè meritus Golius ex oriente detulit, eædemq; difficultates eodem iure nostrum Manuscriptum, quod Golianum, petunt. Verba Mersenni in præfatione Conicorum Apollonij suæ synopsis Mathematicæ hæc sunt. Suspicatur autem Claudius Midorgius hos tres libros, (*scilicet 5. 6. & 7. Conicorum Apollonij*) esse cuiusdam Arabis sub Apollonio latentis, quòd in quinto suo libro primam propositionem sexti Apollonij superius allatam non solum in cono recto, sed in quouis etiam scaleno, & illorum portionibus quibuscumque datis possibilia quæque demonstrat. *Hæc quidem ratio quanti ponderis sit æqui rerum æstimatores iudicent, & si quidem omnes, qui in Geometricis mediocriter versati sunt optimè norunt successiuè aliquid vlterius inueniri præter ea, quæ diuini Præceptores Euclides, Archimedes, Apollonius, & Ptolemæus ediderunt, facile enim esse inuentis addere quis ignorat? Nulli vnquam venit in mentem librum Spiralium non ab Archimede, sed ab aliquo alio scriptum fuisse, propterea quod vniuersaliùs quarumcumque spiralium passiones Neoterici demonstrarunt; Nec quia admirabilis Maurolicus in suo quinto Conicorum libro, & alij recentiores, sicuti præclarus Phylosophus, & Mathematicus Vincentius Viuianus Patritius Florentinus in suo erudito libro de Maximis, & Minimis alia longè diuersa ab Apollonij speculationibus excogitarunt, hos libros adulterinos esse ausi sunt affirmare. Et sicuti ipsemet Midorgius non repudiauit librum primum Conicorum ab Eutocio editum, licet ipse in suo libro tertio melius se demonstrasse propositiones 52. 53. 54.*

libri

libri primi summopere glorietur, pari iure hi libri adulterini censendi non erunt non alia de causa, nisi quia propositiones horum librorum non correspondent, nec assimilantur admirandis cogitationibus in eius sublimi mente repositis. Et sane non dubito, quòd si Midorgius ipse hos libros vidisset, & contrectasset, omnino illius magni Apollonij esse absq; vlla hæsitatione affirmasset. Nam primi quatuor libri continent easdem propositiones, & sæpe numero eadem verba, quæ in textu Græco Eutocij leguntur: reliqui libri subsequentes docent ea, quæ in epistola ad Eudemum proposuerat se demonstraturum Apollonius, & quæ Pappus, & Eutocius distinctè, & expresè ibidem tractari affirmant. Rursus profunda mentis perspicacia, methodus scribendi, & genius Apollonij adhuc ibidem conspicitur, nec fieri potuit, vt à translatoribus, à Paraphraste, à temporis diuturnitate prorsus deleretur, atque mirandum ingenium Apollonij à tanta barbarie omnino occultaretur. Rursus in confesso est opera Euclidis, Archimedis, Apollonij, Ptolomæi, & aliorum magnorum virorum Arabicè translata fuisse, & expresè grauissimi scriptores Arabi, præcipuè Gregorius Bar-Hebræus lib. 9. Chronicorum ait, opera Apollonij Arabicè translata primò fuisse anno 200. AEgyræ Maumettanæ sub Almen Kalypha à Ioanne Patricida, & postea ab alijs recentioribus. Quare dubitandum non est hos esse veros, atque legitimos tres postremos Conicorum libros Apollonij Pergæi Paraphrasticè ab Abalphatho descriptos.

Fruere modo, mi lector, præclaro, & admirando beneficio Serenissimi Principis Etruriæ, qui regali magnificentia, et liberalitate pretiosissimum hunc thesaurum humanissimè largitur. Vale.

INDEX

INDEX

Propositionum Lib. V. VI. VII. Conic. iuxta seriem numerorum ab Apoll. seruatam, cum Lemmatibus, & Proposition. additis,

Vbi indicantur sectiones, & paginæ, in quibus propositiones reperiri debent.

INDEX

APOL-

APOLLONII PERGAEI
CONICORVM LIB. V.

DEFINITIONES.

I.

SI à puncto aliquo in axe sectionis conicæ sumpto egrediantur aliquę rectæ lineæ ad sectionem, vocabo punctum illud, ORIGINEM.

II.

Et lineas, RAMOS.

III.

Segmentum autem axis intèr illud, & verticem sectionis ei proximiorem, MENSVRAM.

IV.

Sed si fuerit mensura æqualis semissi erecti, vocabo illam, COMPARATAM.

V.

Et perpendiculares cadentes ab extremitatibus ramorum super axim vocabo, POTENTES illorum ramorum.

VI.

Abscissa verò illarum potentium, ABSCISSA ramorum.

VII.

Et inuersa illarum potentium, INVERSA ramorum.

VIII.

Atque rectangulum contentum sub inclinato, & aggregato inclinati, & erecti, vel differentia transuersi, & erecti vocabo, FIGVRAM COMPARATAM.

IX. In

IX.

In quolibet rectangulo applicato ad ſegmentum axis, ſi illud ſegmentum ad latitudinem illius rectanguli eandem proportionem habuerit, quam axis ad latitudinem figuræ comparatæ vocabo illud, EXEMPLAR.

X.

Si ex puncto ſuper axim educatur perpendicularis ad vtraſque partes ſectionis, & ex puncto aliquo illius perpendicularis educantur lineæ terminatæ ad ſectionem ex vtraque parte, vocabo punctum illud in perpendiculari ſumptum, CONCVRSVM.

XI.

Et lineas etiam, RAMOS.

XII.

Et qui ſecant menſuram, & terminantur ad ſectionem ex altera parte concurſus, RAMOS SECANTES.

XIII.

At qui non ſecat illam, & tranſit per concurſum, & terminatur ad axim, & ſectionem ſimul, RAMVM TERMINATVM.

XIV.

Sed cuiuſcumque rami ſecantis, cuius portio inter ſectionem, & axim intercepta eſt linea breuiſſima, vocabo illum, BREVISECANTEM.

XV.

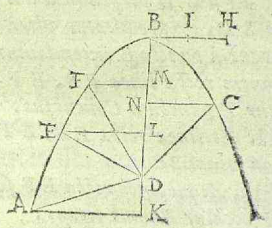
Et vocabo ſegmentum axis inter perpendicularem, & verticem ſectionis proximiorem interceptum, MENSVRAM, quoque.

XIV.

Et portionem ſectionis conicæ diſſectam ab ordinatione axis tranſeuntis per originem, ſiuè per concurſum propè verticem proximiorem ſectionis, vocabo, SEGMENTVM illius puncti.

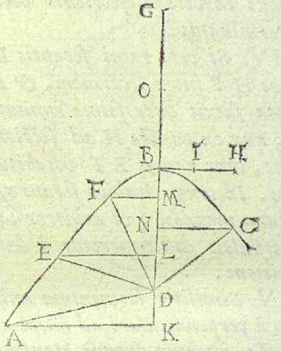
N O T Æ.

HAE definitiones non ſunt Apollonij, ſed Interpretis Arabici, qui in proœmio huius operis apertè ait, addidiſſe plurimas definitiones in libris Apollonij, quibus theoremata breuiſsimè proponi poſſe profitetur, vt in prioribus quatuor libris videre eſt. Eas autem exemplis illuſtrare conabor.



I. *Sit quælibet coni ſectio A B C, cuius axis B D, & in eo ſumatur quodlibet punctum D intrà ſectionem, à quo educantur rectæ lineæ D A, D E, D F, D C vſque ad ſectionem. Tùnc vocatur punctum D, Origo.*

II. *Et lineæ D A, D E, & cæteræ vocantur, Rami.*

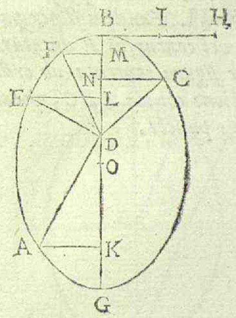


III. *Portio verò axis B D intèr originem D, & verticem B interpoſita vocatur Menſura. Sed in ellipſi A B C G, ſi axis portiones D B, & D G inæquales fuerint, tantummodò minor portio B D vocatur Menſura, non autem maior D G.*

IV. *Sit poſteà recta B I ſemiſsis lateris recti B H iam ſi menſura D B æqualis fuerit ſemierecto B I, vocatur D B, Menſura comparata.*

V. *At ſi à terminis ramorum A, E, F C educantur ad axim perpendiculares A K, E L, F M, C N, ipſum ſecantes in K, L, M, N vocantur illæ rectæ lineæ Potentes illorum ramorum.*

VI. *Recta verò K B vocatur Abſciſſa rami D A, & L B Abſciſſa rami D E, & ſic reliquæ omnes.*

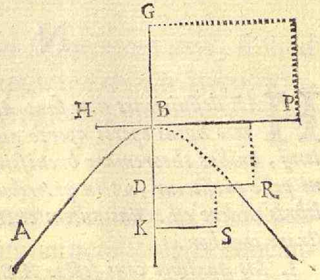


VII. *Sit poſteà O centrum ſectionis, iam axis portio ex centro O vſquè ad potentialem A K educta, ſcilicet O K vocatur Inuerſa rami D A, pariterque O M eſt Inuerſa rami D F.*

VIII. *Si ponatur recta linea B P ad axim perpendicularis, quæ in hyperbola fiat æqualis aggregato, in ellipſi verò fiat æqualis differentiæ laterum recti B H, & tranſuerſi G B, tunc rectangulum contentum ſub G B, & B P vocatur, Figura comparata.*

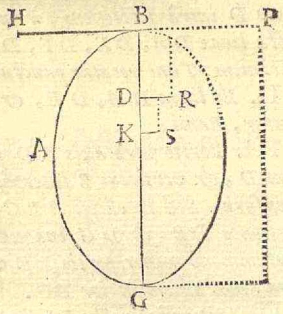
IX. *Poſteà ſi, vt G B ad B P ità fiat ſeg-*

mentum axis D B ad D R, & compleatur parallelogrãmum rectãgulum B R, tunc spatium B R vocatur Exemplar. Pari ratione si, vt G B ad D P ità fiat segmentum axis D K ad latitudinem K S, compleaturque parallelogrammum rectangulum D S, vocabitur paritèr D S Exemplar.



X. *Et si C D perpendicularis fuerit ad axim B D, & producatur vltrà axim in E, atquè à puncto E extendantur vsquè ad sectionem rectæ lineæ E B, E F, E G, vocabitur E punctum Concursus.*

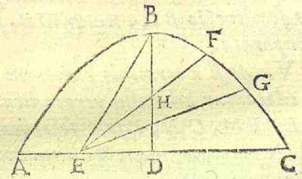
XI. *Et lineæ rectæ E B, E F, E G vocantur etiam Rami.*



VII. *Atquè linea recta E F secans axim in H vocatur Ramus secans.*

XIII. *Et recta linea E B conueniens cum axi in vertice sectionis vocatur Ramus terminatus.*

XIV. *Si verò rami secantis E F portio eius H F inter sectionem, & axim intercepta fuerit breuissima omnium linearum, quæ ex puncto H ad sectionem duci possunt, tunc ramus E F vocabitur Breuisecans. In textu Arabico secans ramus vocabatur, mendosè, vt arbitror, non enim hæc definitio distingueretur à duodecima definitione.*



XV. *Similitèr segmentum axis D B sectum à perpendiculari ad axim ex origine E ducta, vocatur quoquè Mensura.*

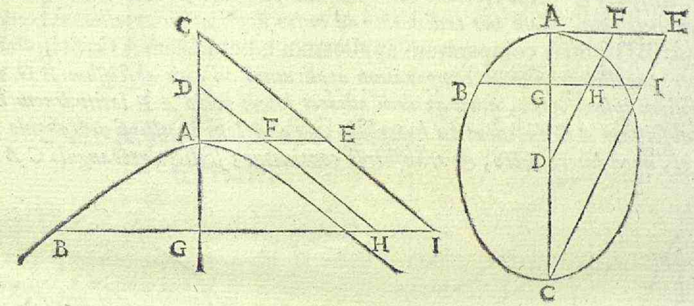
XVI. *Tandem si per punctum originis D, vel concursus E ducatur ordinata A C, tunc figura contenta ab ordinata A C, & sectione conica A B C, vocatur Segmentum illius puncti.*

SECTIO PRIMA

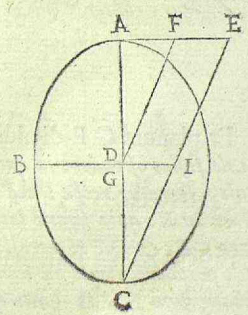
Continens propositiones I. II. & III. Apollonij.

PROPOSITIO I.

Si ex centro D sectionis A B (habentis centrum) egrediatur linea recta D F H bifariam diuidens A E erectum illius axis, quod sit perpendiculare super axim C A G, secans axis ordinationem B G I; vtiquè dimidium illius ordinationis, videlicet B G, poterit duplum plani, quod producit illa linea cum axi inter erectum, & illam ordinationem, nempè duplum A G H F.



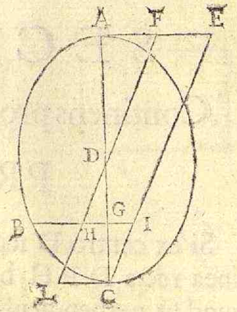
a
b
QVia B G potest comparatum applicatum ad abscissam A G, & planum G F dimidium est illius comparati; ergò B G poterit duplum plani G F; & hoc erat ostendendum.



PROPOS. II.

PAritèr quoquè ostendetur, si potens transierit per centrum ellipsis, quod B G poterit duplum trianguli A F G.

PROPOS. III.



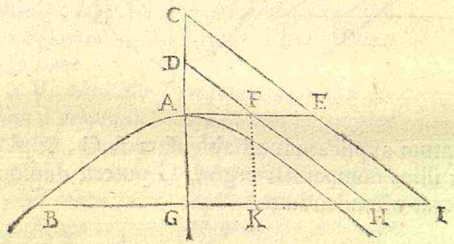
SI verò in ellipsi cadat B G infrà centrum, poterit duplum differentię duorum triangulorum D A F, & D G H, nempè duplum plani G L. Et hoc erat propositum.

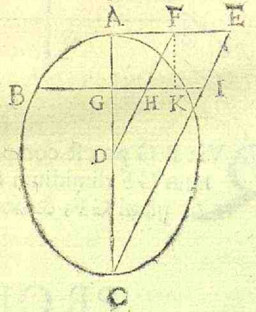
Notæ in Propositionem primam.

Vocat in primo libro interpres sectiones habentes centrum hyperbolem, & ellipsim, & vocat erectum latus rectum sectionis, vocat etiam ordinationem axis eam, quam nos ordinatim ad axim applicatam appellamus.

Quia B G potest comparatum applicatum ad abscissam A G, &c. *Vocat insuper parallelogrammum comparatum applicatum ad axis abscissam A G rectangulum ipsum A G I, quod quidem adiacet lateri recto A E latitudinem habens abscissam A G excedens in hyperbola, & deficiens in ellipsi rectangulo simile ei, quod latere recto, & transuerso continetur; scilicet rectangulo C A E.* a

12. 13. lib. primi.





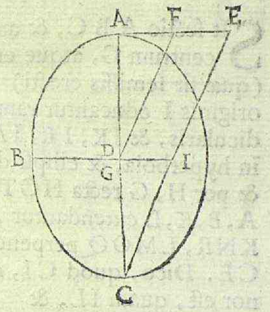
Et planum G F dimidium est illius comparati, &c. *Non erit inutile paulo fusius ostendere id quod ob nimiam facilitatem Apollonius tantummodò innuit. Ducatur recta linea F K parallela axi D A secans ordinatam B G productam in K: quia figuræ latera C A, & A E sunt ipsarum D A, A F duplicia, ergo C E, & D F H parallelæ sunt, estque K H parallela A E, cum ambo positæ sint perpendiculares ad axim, & C A, F K sunt quoque æquidistantes, ergo triangulum F K H simile est triangulo C A E, & propterea parallelogramma rectangula F K H, & C A E similia erunt. Et quoniam quadratum ordinatæ B G æquale est rectangulo contento sub latere recto E A, & abscissa A G excedente* b

Ibidem.

dente

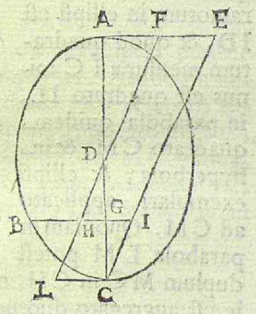
dente in hyperbola, & deficiente in ellipsi rectangulo F K H simile ei, quod lateribus recto, & transuerso continetur, scilicet C A E, & est A F semissis lateris recti, igitur quadratum B G æquale est summæ in hyperbole, & differentiæ in ellipsi rectanguli G A F bis sumpti, & rectanguli F K H, quod est æquale duplo trianguli F K H: sed quadrilaterum A G H F æquale est aggregato in hyperbola, & differentiæ in ellipsi rectanguli G A F, & trianguli F K H, ergo quadratum B G æquale est duplo quadrilateri A G H F, seù differentiæ triangulorum D A F, & D G H.

Notæ in Propositionem secundam.



Secunda propositio facilè ex prima deducitur; nam, quando ordinata B G H I transit per centrum D ellipsis; tunc tria puncta G, D, H conueniunt, & triangulum D G H euanescit, & ideò differentia trianguli D A F, & trianguli D G H nullum spatium habentis, erit triangulum ipsum D A F.

Notæ in Propositionem tertiam.



In tertia propositione similitèr, quandò ordinata B H G I cadit infrà centrum D ellipsis, tunc ducta C L parallela ipsi A E, erunt duo triangula D A F, & D C L æqualia inter se, cum sint similia, & latera homologa D A, D C sint æqualia, quia sunt semiaxes; propterea differentia triangulorum D G H, & D A F, seù D C L erit trapezium C G H L, quod subduplum est quadrati ordinatæ B G.

SECTIO SECVNDA

Continens propositiones IV. V. VI. Apollonij.

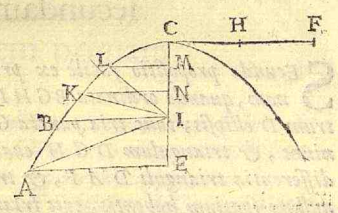
COmparata est minima ramorum egredientium ex sua origine (4) in parabola (5) & hyperbola (6) pariterque in ellipsi (si comparata fuerit portio maioris duorum axium, & tunc maximus est residuum transuersi axis.) Reliquorum verò propinquior minimo

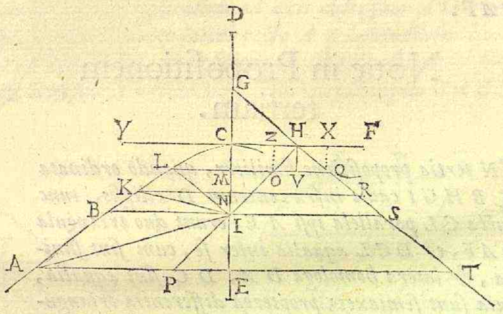
minimo

minimo remotiore minor eſt. Quadratum autem menſuræ minus eſt quadrato cuiuslibet rami aſſignati (4) in parabola quidem quadrato ſuæ abſciſſæ (5) & in hyperbola (6) & ellipſi exemplari applicato ad abſciſſam illius rami.

PROPOSITIO IV.

Sit ſectio A B C, & axis eius C E, & inclinatus, ſiue tranſuerſa D C centrum G, atque erectum C F, & ex C E ſecetur C I æqualis C H (quæ ſit ſemiſſis erecti) & ex puncto originis I educantur rami I B perpendicularis, & I K, I L, I A, & per H, I in hyperbola, & ellipſi ducatur H I P, & per H, G recta H G T, ad quam ex A, B, K, L extendantur A P E T, B I S, K N R, L M O Q perpendiculares ſuper C E. Dico, quod C I, comparata minor eſt, quam I L, & I L, quam I K, & I K, quam I B, & maximus ramorum in ellipſi eſt I D, & quod quadratum menſuræ I C minus eſt quadrato I L, in parabola quidem quadrato C M, & in hyperbola, & ellipſi exemplari applicato ad C M. Quoniam in parabola L M poteſt a





duplum M C in C H, nempè C I (12. ex primo) & quadratum I L æquale eſt aggregato duorum quadratorum L M, & M I, quadratum itaque L I æquale eſt quadrato M I, & M C in C I bis, quæ ſunt æqualia duobus quadratis C I, M C. Quadratum igitur C I minus eſt quadrato L I quadrato ipſius M C, quæ eſt eius abſciſſa, & pariter oſtendetur, quod quadratum C I minus eſt quadrato I K quadrato N C, & minus quadrato I B quadrato C I, & minus quadrato A I quadrato E C.

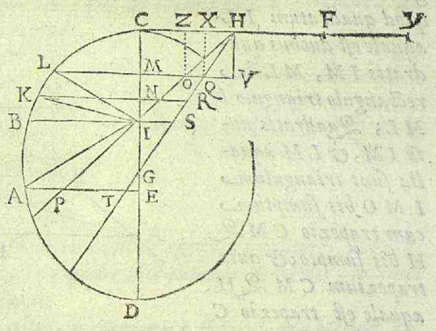
PROPOSITIO V. & VI.

At verò in hyperbola, & ellipſi producantur ex Q, O, H lineæ parallelæ ipſi M C, & quia I C ex hypotheſi æqualis eſt H C, erit I a M æqualis M O, quadratum itaque I M duplum eſt trianguli I M O, & b quadratum L M duplum eſt trapezij C M Q H (prima ex 5.) ergo quadratum I L

tum I L duplum eſt trianguli I C H vnà cum duplo trianguli Q H O, nempe cum plano rectanguli Q Z; ſed quadratum I C eſt duplum trianguli I H C (eò quod C H æqualis eſt C I) ergo quadratum C I minus eſt quadrato L I plano rectanguli Q Z.

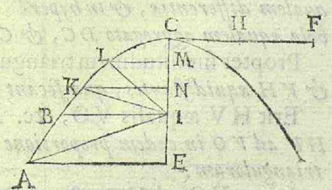
c Deindè ponamus in ellipſi Y F æqualem differentiæ, & in hyperbola d æqualem aggregato D C, C F; ergo propter ſimilitudinem duorum triangulorum G M Q, H V Q, & H V O, M I O, erit H V æqualis V O, & H e V, vel ei æqualis O V ad V Q eſt, vt M G ad M Q, nempe vt G C ad H C, ſeù vt D C ad C F, igif tur V O ad V Q eſt vt D C ad C F, & comparando ſummas terminorum ad antecedentes in hyperbola, & differentias eorundem ad antecedentes in ellipſi fiet O Q ad V O (quæ æqualis eſt O g Z, nempè M C) vt Y F ad Y C, & eſt Y C, æqualis D C, & Y F æqualis ſummæ in hyperbola, & differentiæ in ellipſi ipſarum D C, & C h F; quadratum igitur I C minus eſt quadrato I L rectangulo Q Z, quod eſt exemplar ſimile plano rectanguli C D in Y F, quæ eſt figura comparata. Atque ſic demonſtrabitur, quod quadratum I C minus ſit quadrato I K exemplari applicato ad N C, & minus eſt quadrato B I exemplari applicato ad I C, & minus quadrato A I exemplari applicato ad E C: Eſtque M C minor, quàm N C, & N C, quam C I, & C I, quàm C E; igitur L I maior eſt, quàm I C, & I K maior, quàm L I, & I B maior, quàm I K, & I A, quàm I B. Et hoc erat oſtendendum.

Def. 8. 9. huius.



Notæ in propoſitionem quartam.

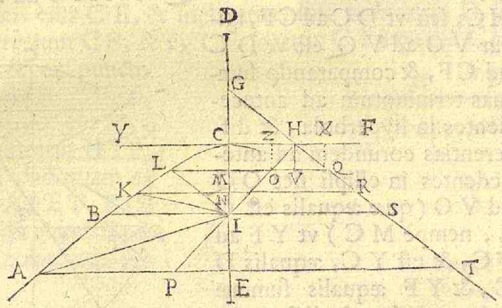
a Quoniam in parabola L M poteſt duplum M C, &c. *Quadratum enim L M æquale eſt rectangulo ſub abſciſſa M C, & latere recto C F, eſtque C H ſemiſsis erecti C F; ergo L M poteſt duplum rectanguli M C H.* 11. Lib. 1.

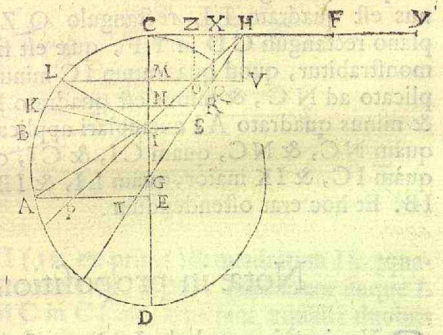


Notæ in propositionem quintam.

ERit I M æqualis M O, &c. *Propter parallelas M O, C H, & similitudinem triangulorum I M O, & I C H.* a

Ergo quadratum I L duplum est triãguli I C H, &c. *Eo quod quadratum I L æquale est duobus quadratis I M, M L in rectangulo triangulo I M L; Quadratis autẽ I M, & L M æqualia sunt triangulum I M O bis sumptum cum trapezio C M Q H bis sumpto;* 1. huius. *& quia trapezium C M Q H æquale est trapezio C M O H, cum triangulo H O Q; at triangulo I M O, & trapezio C M Q H simul sumptis æqualia sunt triangulum I C H, cum triangulo H O Q. Ergo quadratum L I æquale erit duplo trianguli I C H cum duplo trianguli H O Q.* b





Deindè ponamus in ellipsi Y F æqualem D C, & in hyperbola, &c. *Textus videtur corruptus, quem sic corrigendum puto. Ponamus Y F in ellipsi æqualem differentiæ, & in hyperbola æqualem aggregato D C, & C F.* c

Propter similitudinem triangulorum, &c. *Sunt enim duæ rectæ lineæ C G, & V H æquidistantes, quæ secant rectas lineas conuenientes in Q, & O.* d

Erit H V æqualis V O, &c. *Eo quòd M I ostensa est æqualis M O, estque H V ad V O in eadem proportione æqualitatis propter iam dictam similitudinem triangulorum.* e

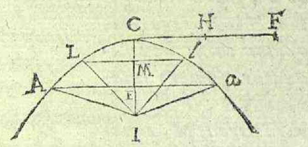
Igitur V O ad V Q est, vt D C ad C F, & conuersa proportione deindè componendo in hyperbola, & inuertendo in ellipsi fiet in hyperbola Q O ad O V, &c. *Textum corruptum, atque confusum clariùs exponi posse censeo per Lemma inferius appositum hac ratione. Et comparando summas in hyperbola, & differentias terminorum in ellipsi ad antecedentes.* f

Vt Y F ad Y C, & in ellipsi, vt F C ad C F, & Y F in ellipsi æqualis D C, g

D C, quadratum igitur, &c. *Textum corruptum sic corrigendum puto; & est Y C æqualis D C, atque Y F æqualis summæ in hyperbola, & differentiæ in ellipsi laterum D C, & C F.*

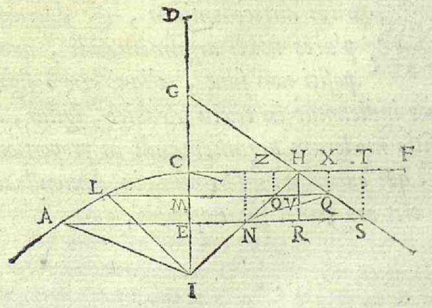
h Exemplar simile plano rectanguli C D in Y F in hyperbola, & Y C in ellipsi, &c. *Hæc postrema verba expungenda duxi, tanquam superuacanea.*

Potest etiam ad imitationem Euclidis reperiri multitudo ramorum inter se æqualium, qui ex origine duci possunt in eadem conisectione. Itaque quoties PROP. I. Additar. *mensura fuerit comparata, scilicet æqualis semissi lateris recti, tunc duo tantum rami inter se æquales a puncto originis ad vtrasque partes axis duci possunt in qualibet conisectione, eruntque illi, qui ad terminos L l cuiuslibet ordinatim applicatæ L l ducuntur ab origine I, nam efficiuntur duo triangula I M L, & I M l, quæ circa angulos æquales ad M, nẽpe rectos, habent latera æqualia, scilicet L M, & l M medietates ordinatim applicatæ, & segmentum axis I M inter ordinatam, & originem est latus commune; ergo bases, seu rami I L, & I l sunt æquales. Reliqui verò rami supra, vel infra terminum eiusdem ordinatim applicatæ minores, aut maiores sunt ramo ad eius terminum ducto; quare duo tantum rami ad vtrasque partes axis inter se æquales duci possunt.*



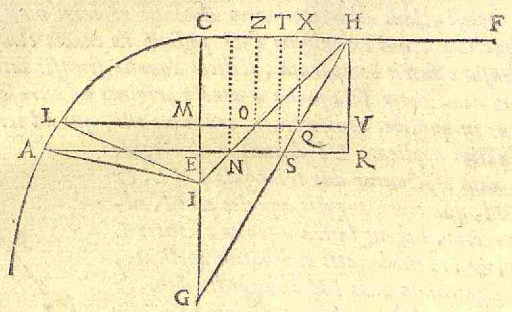
Rursus quadratum rami I A remotioris a comparata superat quadratum rami I L propinquioris (in parabola quidem) rectangulo sub differentia, & sub aggregato abscissarum eorundem ramorum; in reliquis verò sectionibus rectangulo sub differentia abscissarum, & sub recta linea, ad quam summa abscissarum eandem proportionem habet, quam latus transuersum ad summam in hyperbola, & ad differentiam in ellipsi laterum transuersi, & recti. PROP. II. Add.

Et primò in parabola, quia quadratum I A æquale est quadrato I C cum quadrato abscissæ C E; 4. huius. *pariterque quadratum I L æquale est quadrato eiusdem I C cum quadrato abscissæ C M;* ibidem. *ergo excessus quadrati I A supra quadratum I L æqualis est differentiæ quadratorum E C, & C M; sed excessus quadrati E C supra quadratum M C æqualis est rectangulo, cuius basis æqualis est summæ laterum E C, & C M; altitudo verò æqualis est E M differentiæ laterum eorundem quadratorum (vt deducitur ex elementis) igitur excessus quadrati I A supra quadratum I L æqualis est rectangulo, cuius basis est summa abscissarum E C, C M, altitudo verò E M differentia earundem abscissarum.*



Secundò in hyperbola, & ellipsi fiat exemplar N T applicatum ab abscissam C E. Et quia quadratum I A æquale est quadrato eiusdem

I C cum exemplari N T, & quadratum I L æquale eſt quadrato eiuſdem I C cum exemplari Q Z. Ergò exceſſus quadrati I A ſupra quadratum I L æqualis eſt differentiæ exemplarium N T, & Q Z. Poſteà ducatur recta Q N: quia triangula Q N S, O N Q æqualia ſunt triangulo, cuius baſis æqualis eſt ſumma rectarum N S, & O Q, altitudo verò V R, vel M E, ſuntque illa duo triãgula æqualia trapezio N O Q S ſiue exceſſui trianguli N H S, ſupra triangulum H O Q: ergo triãgulum cuius baſis æquatur ſummæ ipſarum N S, O Q altitudo verò E M, æquale eſt differentiæ triãgulorum N H S, O H Q. Et ſimiliter eorum dupla, ſcilicet rectangulum, cuius baſis æqualis eſt ſummæ N S, O Q, altitudo verò æqualis M E, erit differentia exemplarium rectãgulorum N T, & Q Z; ſed ſumma altitudinum V H, H R, ſeu ſumma abſciſſarum C M, C E ad ſummam baſium N S, O Q eandem proportionem habet, quam vna H V ad vnam O Q, ſeu quam latus tranſuerſum D C ad ſummam in hyperbola, & ad differentiam in ellipſi laterum tranſuerſi D C, & recti C F: Igitur differentia exemplarium N T, Q Z, ſeu exceſſus quadrati I A ſupra quadratum I L æqualis eſt rectangulo contento ſub E M differentia abſciſſarum, & ſub ſumma ipſarum N S, & O Q, ad quam ſumma abſciſſarum eandem proportionem habet, quam latus tranſuerſum ad ſummam in hyperbola, & ad differentiam in ellipſi laterum tranſuerſi, & recti, quod fuerat propoſitum.



MONITVM.

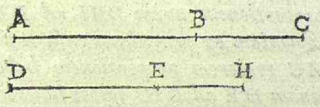
EX *varia diſpoſitione terminorum proportionalitatis ſcilicet duorum antecedentium, & duorum conſequentium conſurgunt plures modi argumentandi, quorum aliqui in elementis expoſiti non ſunt, aliqui verò ſignificantiſſimis vocibus, & breuiùs indicantur in textu Arabico, igitur, ne ſepiùs repetatur prolixa expoſitio modorum argumentandi in proportionalibus, & non proportionalibus, qui cumulatè inſeruntur in demonſtrationibus Apollonij opere pretium erit eos ſemel hìc exponere.*

LEMMA I.

Si quatuor quantitates eandem proportionem habuerint, antecedentes, vel conſequentes ad terminorum ſummas, vel differentias in eadem ratione erunt; & è contra.

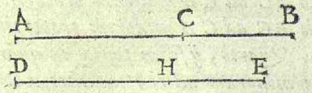
H*Abeat A B ad B C eandem proportionem, quàm D E ad E H: ſequitur primò, quod A C ad C B ſit, vt D H ad H E; & huiuſmodi argumentatio vocatur in elementis compoſitio terminorum proportionis: itaque ſummæ antecedentium, & conſequentium ad eaſdem conſequentes ſunt etiam proportionales: ſi vero ex eadem hypotheſi concludatur, quod A C ad A B, ſit vt D H ad D E, vt nimirum ſummæ terminorum proportionis ad antecedentes ſint proportionales: quod quidem manifeſtum eſt, nam poſita fuit A B ad B C, vt D E ad E H; erit inuertendo C B ad B A, vt H E ad E D, & componendo C A ad A B erit vt H D ad D E: modo huiuſmodi argumentandi forma innominata eſt; poteſt autem breuitatis gratia appellari, Per comparationem ſummæ terminorum ad antecedentes.*

Secundò concludi poteſt, quod A B ad A C ſit vt D E ad D H; quia, vt in prima parte dictum eſt, A C ad A B erat vt D H ad D E, ergo inuertendo A B ad A C erit vt D E ad D H: hæc argumentandi forma vocari poteſt, Per comparationem antecedentium ad terminorum ſummas.



Tertiò concludi poteſt: quod B C ad C A, ſit vt E H ad H D; nam componendo A C ad C B, erat vt D H ad H E, quare inuertendo B C ad C A erit vt E H ad H D, & hæc argumentatio fieri dicetur comparando conſequentes ad terminorum ſummas.

Deindè ſint eædem quatuor proportionales in ſecunda figura, nimirum totum A B ad ſegmentum eius B C ſit vt totum D E ad portionem eius E H; tunc reſiduum A C ad C B erit, vt reſiduum D H ad H E; hæc argumentatio fieri dicitur in elementis, diuidendo terminos proportionis, eſtque comparatio differentiarum terminorum ad conſequentes.



At ſi concludatur ex eadem hypotheſi quod A B ad A C ſit vt D E ad D H; hæc argumentatio in elementis fieri dicitur per conuerſionem rationis eſtque comparatio antecedentium ad differentias terminorum.

Poſtea ex eadem hypotheſi ſequitur quod A C ad A B ſit vt D H ad D E: quia per conuerſionem rationis, ſeu referendo antecedentes ad differentias terminorum eſt A B ad A C, vt D E ad D H; ergo inuertendo A C ad A B erit vt D H ad D E, & hæc argumentatio innominata fiet comparando differentias terminorum ad antecedentes.

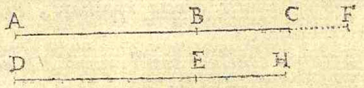
Tandem ex eadem hypothesi sequitur, quod C B ad C A sit vt E H ad H D: nam diuidendo est vt A C ad C B, ita D H ad H E; ergo inuertendo B C ad C A erit vt E H ad H D: & hæc argumentatio innominata fieri dicetur comparando consequentes ad dereniſſtias terminorum.

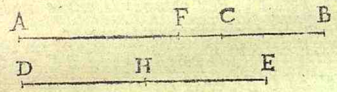
LEMMA II.

Si prima AB ad secundam BC maiorem proportionem habuerit quàm tertia DE ad quartam EH: comparando antecedentes ad terminorum summas habebit AB ad AC maiorem proportionem quàm DE ad DH.

Lem. 1. *Fiat A B ad B F, vt D E ad E H; erit B F maior quàm B C, atque A F maior quàm A C; ergo A B ad A F eandem proportionem habebit quàm D E ad D H, sed eadem A B ad minorem A C maiorem proportionem habet quàm ad A F maiorem, ergo A B ad A C maiorem proportionem habet quàm D E ad D H.*

Secundò iisdem positis, dico comparando terminorum summas ad antecedẽtes A C ad A B habere minorem proportionem quàm D H ad D E. Quoniam ex præcedenti casu A B ad A C maiorem proportionem habebat quàm D E ad D H; igitur inuertendo C A ad A B minorem proportionem habebit quàm D H ad D E.





Tertiò, dico quod comparando consequentes ad terminorum summas B C ad C A minorem proportionem habebit quàm E H ad H D; quia (ex hypothesi) A B ad B C maiorem proportionem habet quàm D E ad E H componendo A C ad C B maiorem proportionem habebit quàm D H ad H E, & inuertendo B C ad C A minorem proportionem habebit, quàm E H ad H D.

Quartò, iisdem positis in quarta figura, dico quod comparando differentias terminorum ad consequentes A C ad C B maiorem proportionem habebit quàm D H ad H E: quia ex constructione A B ad B F est, vt D E ad E H, diuidendo A F ad F B erit vt D H ad H E; sed A C maior est quàm A F, & C B minor, quàm F B; igitur A C ad C B maiorem proportionem habebit quàm A F ad F B; & propterea A C ad C B maiorem proportionem habebit, quàm D H ad H E.

Quintò, dico quod è contra, comparando consequentes ad differentias terminorum C B ad C A minorem proportionem habebit quàm E H ad H D. Quia (ex præcedenti casu) A C ad C B maiorem proportionem habebat quàm D H ad H E; ergo inuertendo C B ad C A minorem proportionem habebit quàm E H ad H D.

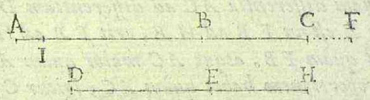
Ibidem. *Sextò, dico quod comparando antecedentes ad differentias terminorum B A ad A C minorem proportionem habebit quàm E D ad D H. Quia ex constructione A B ad B F est, vt D E ad E H; ergo A B ad A F est, vt E D ad D H; sed B A ad maiorem C A habet minorem proportionem quàm ad F A; igitur B A ad A C minorem proportionem habet quàm E D ad D H.*

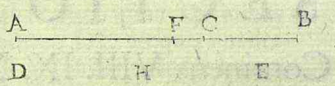
Septimò, dico è contra, quod comparando differentias terminorum ad antecedentes C A ad A B maiorem proportionem habebit quàm H D ad D E. Quoniam, ex præcedenti casu, B A ad A C minorem proportionem habebat quàm E D ad D H; igitur inuertendo C A ad A B maiorem proportionem habebit quàm H D ad D E.

LEMMA III.

Si quatuor quantitates eandem rationem habuerint homologorum summæ, vel differentiæ in eadem ratione erunt.

Ostensum enim fuit in elementis, quod proportionalium omnes antecedentes ad omnes consequentes eandem proportionem habent, quàm vna antecedentium ad vnam consequentium. Similiter ostensum fuit, quod si totum ad totum eandem rationem habuerit, quàm ablatum ad ablatum, & reliquum ad reliquũ, vt totum ad totum se habebit; sed vno verbo homologorum summæ, vel differentiæ in eadem ratione erunt iuxtà Arabici expositoris compendium.





LEMMA IV.

Si prima AB ad secundam DE maiorem proportionem habuerit, quàm tertia BC ad qnartam EH: dico, quod comparando homologorum summas AB ad DE maiorem proportionem habebit, quàm prima cum tertia, idest AC ad secundam cum quarta, idest DH.

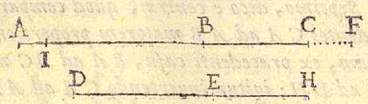
Fiat B F ad E H, vt A B ad D E: ergo A B ad D E est, vt A F ad D H; sed A F maior est quàm A C, igitur A F ad eandem D H maiorem proportionem habet, quàm A C: & ideo A B ad D E maiorem proportionem habet, quàm A C ad D H. Lem. 3.

Secundò iisdem positis, dico, quod tertia B C ad quartam E H minorem proportionem habet qnàm A C ad D H.

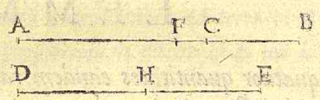
Fiat vt B C ad E H, ita I B ad D E, ergo C B ad E H est, vt C I ad H D; sed A B maior est quàm I B, & ideo C A maior quàm C I; igitur I C ad eandem D H Ibidem.

DH minorem proportionem habet quàm AC, & propterea BC ad EH minorem proportionem habebit quàm AC ad DH.

Tertiò ijſdem poſitis in ſexta figura, dico quod comparando homologorum differentias prima AB ad ſecundam DE minorem proportionem habet quàm differentia AC ad differentiam DH.



Lem. 3. *Fiat BF ad EH, vt AB ad DE, ergo AF ad DH eſt vt AB ad DE, ſed AF minor eſt quam AC, ergo AF ad eandem DH minorem proportionem habet quàm AC: & propterea AB ad DE minorem proportionem habet quàm AC ad DH.*



Ibidem. *Quartò, dico, quod tertia CB ad quartam HE minorem proportionem habet quàm differentia AC ad differentiam DH. Quoniam ex conſtructione AB ad DE eſt vt FB ad HE, erit FB ad HE, vt AF ad DH; ſed CB minor eſt quàm FB, atque AC maior quàm AF, & AF ad eandem DH minorem proportionem habet quàm AC; igitur CB ad HE eo magis habebit minorem proportionem quàm AC ad DH quæ erant oſtendenda.*

SECTIO TERTIA

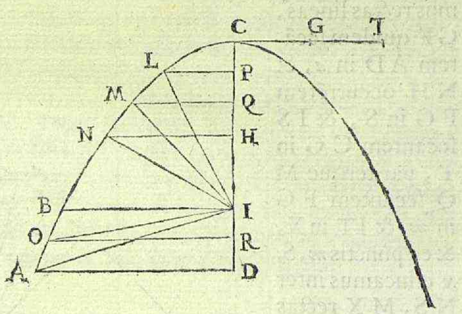
Continens VIII. IX. X. Propoſ. Apollonij.

SI menſura fuerit maior comparata, dummodo in ellipſi minor ſit medietate axis tranſuerſi, tunc minimus ramorum in ſectionibus eſt, cuius potentialis abſcindit à menſura verſus originem in parabola (8) lineam æqualem comparatæ, in hyperbola verò (9) & in ellipſi (10.) lineam, cuius inuerſæ proportio ad illam eſt, vt proportio figuræ; & reliqui rami, quo accedunt ad minimum ſunt minores remotioribus; & quadratum minimæ minus eſt quadrato cuiuslibet rami aſſignati in parabola quidem (8) quadrato exceſſus ſuarum abſciſſarum, & in hyperbola (9) & ellipſi (10.) exemplari applicato ad exceſſum ſuarum inuerſarum. a

SIt itaque ſectio ABC, & menſura IC, inclinatus, ſiue tranſuerſa EC, dimidium erecti CG, centrum F, origo I, & IH in parabola ſit ęqualis CG, & in hyperbola, & ellipſi FH ad HI ſit, vt FC dimidium inclinati, ſeu tranſuerſæ ad CG, dimidium erecti, & educta ex H perpendiculari HN, & coniuncta recta NI; Dico NI minimum eſſe ramorum egredientium ex I, & inſuper, propinquiores illi minores eſſe remotioribus ramis ex vtraque parte, & quod quadratum IN minus eſt quadrato MI (exempli gratia) in parabola quadrato QH, in hyperbola, & ellipſi exemplari applicato ad QH. b

c Quoniam quadratum HN in parabola ęquale eſt HI, nempe CG in HC bis (11. ex primo) erit quadratum IN ęquale IH in HC bis cum quadrato HI; at quadratum MQ æquale eſt HI in QC bis (11. ex primo) igitur quadratum MI ęquale eſt IH in QC bis cum quadrato IQ;

d hoc autem eſt ęquale duobus quadratis IH, HQ, & IH in HQ bis; igitur quadratum IM æquale eſt IH in HC bis cum quadrato IH, quę ſunt æqualia quadrato NI vnà cum quadrato HQ. Quadratum igitur MI excedit quadratum NI quadrato HQ. Et conſtat quoque, quadratum IL excedere quadratum IN quadrato PH; atque PH maior eſt, quàm QH, ergo IL maior eſt, quàm IM, & IM, quàm NI. Ponamus iam BI perpendicularem ſuper CI, ergo quadratum BI ęquale eſt IC



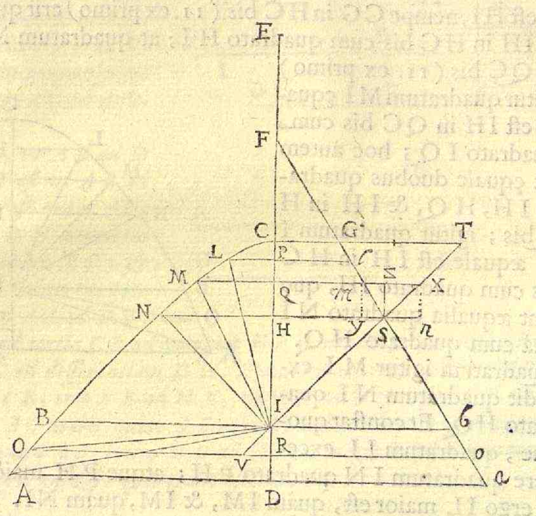
e in IH bis (11. ex primo); quadratum igitur IN minus eſt quàm quadratum BI quadrato IH.

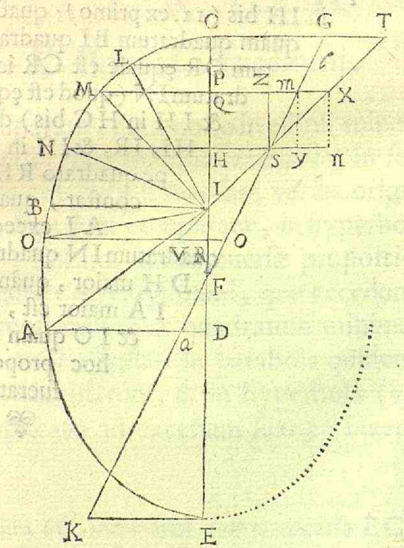
f Et quia quadratum OR ęquale eſt CR in IH bis excedet quadratum IN (quod eſt ęquale quadrato IH, & IH in HC bis) duobus quadratis HI, IR, & IH in IR bis, nempè quadrato RH; atquè ſic conſtat, quadratum AI excedere quadratum IN quadrato DH; eſtque DH maior, quàm RH, igitur IA maior eſt, quàm IO, & IO quàm IN. Et hoc propoſitum fuerat.

PROPOSITIO IX. & X.

AT in hyperbola (10.) & ellipsi educamus rectas lineas, GF quidem secantem AD in *a*, & NH occurrentem FG in S, & IS secantem CG in T, pariterque MQ secantem FG in *m*, & IT in X, & ex punctis *m*, S, *x* educamus inter NS, MX rectas *my*, X*n*, SZ parallelas ipsi CI. Et quia CF ad CG, nempe FH ad HS posita est, vt
FH ad HI erit HI æqualis HS; h
quadratum igitur IH est æquale duplo trianguli IHS, & quadratum NH æquale est duplo trape-
Prop. 1. h. zij HG; quare quadratum NI æquale est duplo trapezij IG;
similiter quadratum IQ æquale est i
duplo trianguli IQX, & quadratum MQ est æquale duplo trapezij QG; itaque quadratum ex IM æquale est duplo trapezij IG cum duplo trianguli *m*SX, quod est æquale plano *mn*: Et CF ad CG, nempe proportio figuræ est, vt SZ, nempe ZX ad Z*m* (& hoc quidem propter similitudinem triangulorũ) quare comparãdo priores ad sum-
Lem. 1. h. mas terminorum in hyperbola, & k
ad eorundem differentias in ellipsi fiet XZ (quæ est æqualis ipsi X*n*)
ad X*m*, vt proportio inclinati, siue l
transuersæ ad latitudinem figuræ
Def. 9. comparatæ; igitur planum *m n* est exemplar, estque applicatum ad X*n*, nempe

g

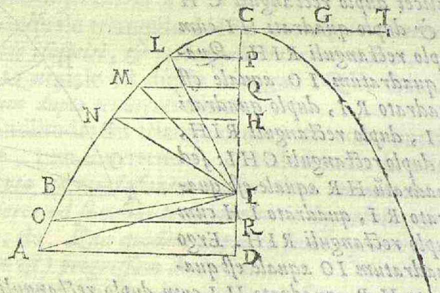




nempe ad QH. Eodem modo constat, quod quadratum IL excedit quadratum IN quantitate exemplaris applicati ad HP, & quod quadratum BI excedit quadratum IN exemplari applicato ad IH, & quod quadra-
m tum IO excedit quadratum IN exemplari applicato ad RH (eo quod quadratum RI æquale est duplo trianguli RVI, & quadratum OR æqua- Prop. 1. h.
le est duplo trapezij RG, at in ellipsi quando OR cadit infra centrum F
æquale est duplo trapezij RK; quadratum igitur OI in ellipsi æquale est Prop. 3. h.
n duplo trianguli KEF, quod est æquale FCG cum duplo trapezij VF, igitur quadratum OI in hyperbola, & ellipsi excedit duplum trapezij IG
o (quod est æquale quadrato NI) duplo trianguli VS*o*, quod est æquale exemplari applicato ad RH: & similiter patet, quod quadratum AI excedit quadratum NI exemplari applicato ad DH, estque DH maior
p quàm RH, & RH maior quàm IH; quare AI maior est, quàm OI, & OI maior, quàm BI, & BI, quàm NI, & quodlibet horum duorum excedit NI potestate plano iam dicto, & hoc erat ostendendum.

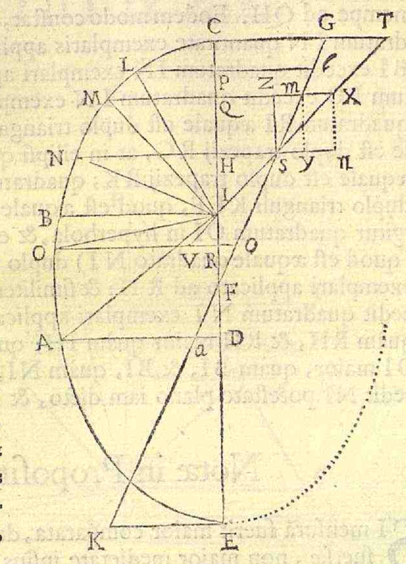
Notæ in Propositionem VIII.

a SI mensura fuerit maior comparata, dummodò in ellipsi sit portio transuersæ, non maior medietate ipsius, tunc minimus, &c. *Sic puto legendum: Si mensura fuerit maior comparata, dummodò in ellipsi minor sit medietate axis transuersi, tunc minimus, &c. Nam si mensura sumi posset æqualis semitransuerso, tunc quidem origo esset in centro ellipsis, quare vndecima propositio huius esset superflua, in qua supponitur origo in ipsomet centro ellipsis. Animaduertendum est quod in hac propositione mensura necessario sumi debet in axe maiori ellipsis; quandoquidem mensura IC ponitur maior, quàm CG, & CF maior quàm CI, ergo CF maior est quàm CG, & illius duplum scilicet axis EC maior erit duplo huius, sed vt EC ad duplum CG, ita est quadratum EC ad quadratum Recti axis eiusdem ellipsis: ergo EC est maior duorum axium ellipsis ABC.*



b Et educta ex H perpendiculari HN, &c. *Idest ex H educta HN perpendiculari ad axim CI, quæ secet sectionem in N, & iuncta recta NI, pariterque ductis reliquis ramis IM, IL, IB, IA, atque ab eorum terminis ad axim extensis perpendicularibus, vt in propositionibus quarta, quinta, sexta factum est.*

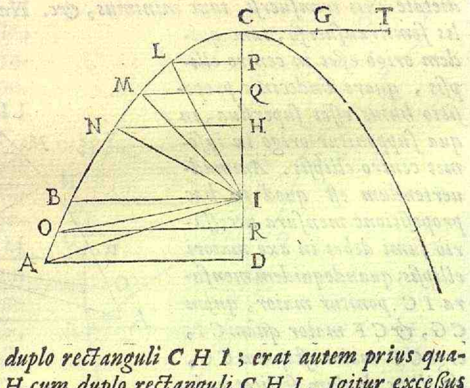
c Quadratum HN in parabola æquale est HI nempè CG in HC bis (prima ex quinto) &c. *Hoc deduci non potest ex prima propositione huius libri,* *ſed potius ex vndecima libri primi; eſt enim quadratum H N æquale rectangulo contento ſub abſciſſa H C, & ſub latere recto, eſtque rectangulum ſub H C, & ſub ſemierecto C G ſemiſsis illius; igitur quadratum H N æquale eſt duplo rectanguli H C G.*



Hoc autem eſt æquale duobus quadratis I H, H Q, & I H in H Q bis, &c. d *Poſt hæc verba ſubiungo claritatis gratia, atque C H in H I bis æquale eſt duplo C Q in H I vna cum duplo Q H in H I.*

Ergo quadratum B I æquale eſt I C in I H bis, &c. e *Hic pariter, vt clarior reddatur demõſtratio, ſubiungo, ſcilicet duplo rectãguli C H I vna cum duplo quadrati H I; erat autem quadratum N I æquale duplo rectanguli C H I, & vnico quadrato H I, ergo, &c.*

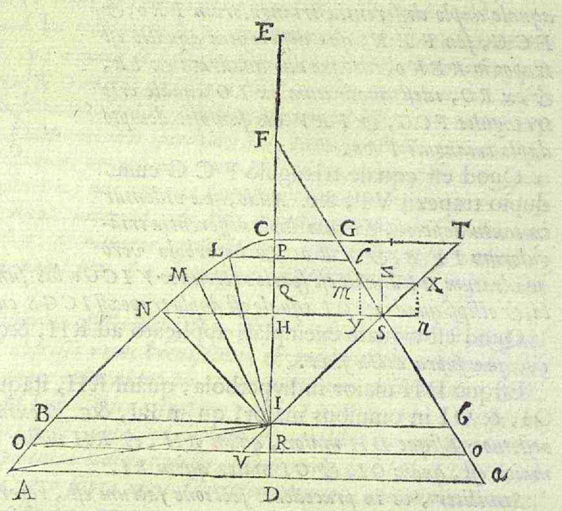
Et quia quadratum O R æquale eſt C R in I H bis, &c. f *Subiungo hanc declarationem. Scilicet duplo rectanguli C H I, & duplo quadrati H I cum duplo rectanguli R I H. Quare quadratum I O æquale eſt quadrato R I, duplo quadrati H I, duplo rectanguli R I H, & duplo rectanguli C H I: ſed quadratũ H R æquale eſt quadrato R I, quadrato I H cum duplo rectanguli R I H. Ergo quadratum I O æquale eſt quadrato H R, quadrato H I cum duplo rectanguli C H I; erat autem prius quadratum I N æquale quadrato I H cum duplo rectanguli C H I. Igitur exceſſus quadrati I O ſupra quadratum I N eſt quadratum H R.*



Notæ

Notæ in Propoſitionem IX. & X.

g AT in hyperbola, & ellipſi educamus G F ad *a* ex A D, & H N ad *s* ex F G, & I S ad T ex C G, ſi educta occurrat ſectioni ad A, & M Q poſita ad *m* ex *a*, F G, & X in I T, & ex *m*, S X, *my*, *xn*, S Z inter N S, M X, &c. *Eadẽ phraſi inconcinna exponitur vniuerſa conſtructio huius propoſitionis, ideo curaui eam reddere clariorem, dicendo; Educamus rectas lineas G F quidem ſecantem A D in a, &c.*



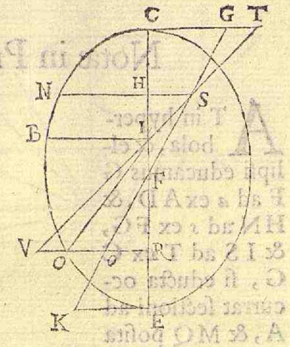
h Quadratum igitur I H eſt æquale triangulo I H S, &c. *Quia nimirum. Quadratum I H eſt æquale duplo iſoſcelei, & rectanguli trianguli I H S.*

i Et ſimiliter quadratum I Q æquale eſt duplo trianguli I Q X, &c. *Scilicet duplo trapezij I S m Q cum duplo trianguli S m X.*

k Et hoc quidem propter ſimilitudinem triangulorum, at componendo proportionem in hyperbola, tum inuertendo, & reflectendo in ellipſi fit, &c. *Huiuſmodi verba inepta ad concluſionem inferendam commutaui dicendo; Quare comparando priores ad ſummas terminorum in hyperbola, & ad eorum differentias in ellipſi fit, &c. Quæ quidem expeditè (vt in primo præcedentium Lemmatum oſtenſum eſt) progreſſum declarant.*

l Vt proportio inclinati, ſiue tranſuerſæ ad latitudinem figuræ comparatæ; igitur planum *m n* eſt exemplar, &c. *Subiungo: nam, vt dictum eſt in quinta, & ſexta huius, poteſt hìc demonſtrari, quod figura m n ſimilis eſt ei, quæ continetur latere tranſuerſo E C, & ſumma in hyperbola, & differentia in ellipſi laterum tranſuerſi, & recti iuxta definitiones octauam, & nonam.*

m Quadratum R I æquale eſt duplo trianguli R V I, & quadratum O R in hyperbola æquale eſt duplo trapezij R G, & in ellipſi æquale eſt duplo trapezij R K, &c. *Legendum puto quadratum R I æquale eſt duplo trianguli* 1. huius. *R V I, & quadratum O R æquale eſt duplo trapezij R G, at in ellipſi quando O R cadit infra centrum F æquale eſt duplo trapezij R K, &c. Deindè quum triangulum R V I ſimile ſit triangulo I H S propter parallelas V R, S H; ideò triangulum R V I erit quoque iſoſceleum, & rectangulum. Poſtea quadratum*



Prop.1.h. *dratum O R æquale est duplo trapezij R C G O; Sed in ellipsi quando ordinata O R cadit infra centrum F, tunc quidem ducta E K parallela C G, quæ secet G F in K, erit quadratum O R æquale duplo differentiæ triangulorum F R o, & F C G, seu F E K, quæ differentia æqualis est trapezio R E K o, ideoque duo quadrata ex I R, & ex R O, idest quadratum ex I O æquale erit triangulis F C G, & I R V bis sumptis dempto duplo trianguli F R o.*

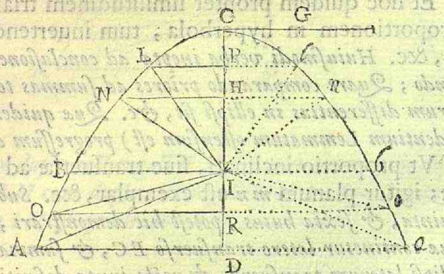
Quod est ęquale triangulo F C G cum duplo trapezij V F, &c. *Addo, quæ videntur in textu deficere, seu cum duplo differentiæ triangulorum I V R, & F R o. In hyperbola verò quadratum O I æquale est spatio rectilineo V I C G o bis sumpto, quare in hyperbola, & ellipsi quadratũ O I æquale est duplo trapezij I C G S cum duplo triãguli V o S.* n

Quod est æquale exemplari applicato ad RH, &c. *Hoc enim constat ex ijs, quæ supra dicta sunt.* o

Estque DH maior in hyperbola, quàm RH, itaque A I maior, quàm OI, & OI in omnibus maior, quàm BI, &c. *Textum hunc corruptum sic restituo: Estque D H maior, quàm R H, & R H maior quàm I H; itaque A I maior est, quàm O I, & O I maior quàm B I.* p

Similiter, vt in præcedenti sectione factum est, reperietur multitudo ramorum inter se æqualium, qui ex origine ad sectionem duci possunt. Existente mensura I C maiore, quàm comparata, si differentia abscissarum rami maioris, PROP. III. Add. *& breuissimi æqualis fuerit abscissæ rami breuissimi, erunt tantummodo tres rami inter se æquales; si verò maior fuerit, duo rami solummodo æquales erunt; at si fuerit minor eadem abscissa, erunt quatuor rami tantùm æquales inter se.*

Et primò ramorum I O, & breuissimi I N abscissæ sint R C, H C, & eorum differentia R H, sitque R H æqualis H C, & producatur O R perpendicularis ad axim quousque secet sectionem ex altera parte in puncto o, coniungaturque ramus I o. Dico quod tres rami I O, I o, I C tantũmodo inter se æquales sunt; quoniam quadrata in parabola rectarum R H, & H C, 8.huius. *seu in hyperbola, & ellipsi,* 9.10.h. *rectangula exemplaria inter se similia applicata ad R H, & H C æqualia sunt inter se, cum eorum latera homologa R H, H C æqualia supposita sint; estque excessus quadrati rami I O, vel I o, seu I C supra quadratum rami breuissimi I N æqualis quadrato R H, vel C H in parabola, & in reliquis sectionibus, exemplaribus similibus applicatis ad easdem rectas æquales R H, H C;*

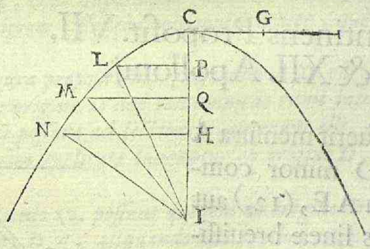


H C; igitur prædicti excessus tam in parabola, quàm in reliquis sectionibus æquales sunt inter se, & ideò quadrata ramorum I O, I o, I C, & rami ipsi æquales erunt: cumque quilibet alius ramus supra, vel infra ramum I O maior, vel minor sit illo, non erunt plures, quam tres rami inter se æquales.

Secundò H D differentia abscissarum rami I A, & breuissimi I N supponatur maior, quàm H C quæ est abscissa breuissimi rami I N; & producta similiter ordinata D A vltra axim ad sectionem in a, & coniuncta I a; Dico, quod duo rami tantummodo I A, & I a inter se æquales sunt: Quia H D maior est, quàm H C, erit quadratum ex H D maius quadrato H C; pariterque exemplar applicatum ad H D maius erit exemplari ei simili applicato ad H C, & ideo tam quadratum I A, quàm I a maius erit quadrato I C, cum quodlibet illorum maiori excessu superet quadratum breuissimi rami I N quam quadratqm I C, quare tam ramus I A, quàm I a (qui æquales sunt) maiores erunt, quàm I C, & ideo maiores quàm intercepti inter I C, & I N, pariterque maiores, quàm interpositi inter I N, & I A, & minores omnibus alijs, qui infra ipsos cadunt. Quapropter duo tantùm rami I A, I a ab origine ad sectionem duci possunt inter se æquales.

Tertiò sint duæ abscissarum differentiæ H P, & H I æquales inter se, & quælibet earum minor H C abscissa rami breuissimi, & producantur perpendiculares ad axim L P, B I, donec conueniant ex altera parte cum sectione in l, & b, coniunganturque rami ad l, b. Dico, quatuor ramos I B, I L, I l, I b æquales inter se tantummodo duci posse; quia, vt dictum est, quilibet eorum superat ramum breuissimum I N potentia eodem excessu, erunt radij ipsi I B, I L, I l, I b æquales inter se, reliqui verò supra, & infra ipsos maiores, aut minores erunt, & ideo non possunt duci plures, quàm quatuor rami iam dicti æquales. Quod erat ostendendum.

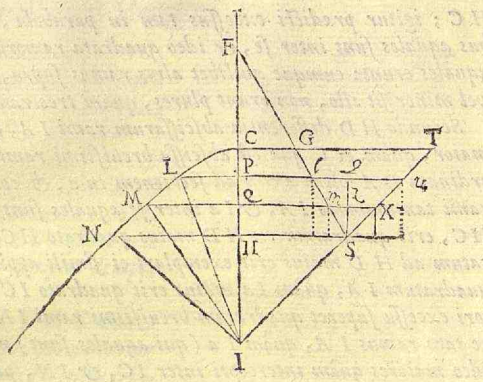
Et insuper quadratum rami à breuissimo remotioris superat quadratum rami propinquioris, PROP. IV. Add. *in parabola quidem rectangulo sub excessu, & sub aggregato differẽtiali suarum abscissarum ab abscissa rami breuissimi, in reliquis verò sectionibus rectãgulo sub eodem excessu differentiali, & sub recta linea, ad quam summa differentialis eandem proportionem habet, quam latus transuersum ad summam in hyperbola, & ad differentiam in ellipsi laterum recti, & transuersi.*

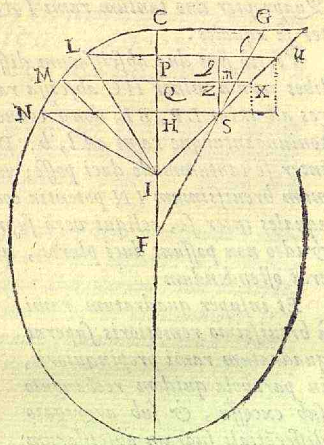


Quoniam in parabola quadratum I L superat quadratum I M eodem excessu, quo quadratum H P superat quadratum H Q (cum quadratum H P, atque quadratum I N simul sumpta æqualia sint quadrato L I, & quadrata ex H Q, & Ex 8. hu. *ex I N æqualia sint quadrato I M) sed excessus quadrati H P supra quadratum H Q æqualis est rectangulo sub P Q differentia, & P H, H Q, summa laterum eorundem quadratorum contento; igitur quadratum I L superat quadratum rami I M propinquioris breuissimo I N rectangulo sub P Q excessu, & P H Q aggregato*

aggregato differentiali abſciſſarum ramorum I L, I M ab abſciſſa rami breuiſſimi.

Pari modo in hyperbola, & ellipſi quadratum I L ſuperat quadratum I M eodẽ Ex 9.10.h. *exceſſu, quo exemplar applicatum ad H P ſuperat exemplar applicatum ad H Q; ſed differentia exemplarium applicatorum ad H P, & H Q æqualis eſt rectangulo ſub P Q exceſſu differentiali, & recta linea compoſita ex X m, & u l, ad quam ſumma differentialis P H Q eandem proportionem habet, quam latus trãſuerſum ad ſummam in hyperbola, & ad differentiam in ellipſi laterum tranſuerſi, & recti, vt in nota propoſitionis 5. oſtenſum eſt; igitur quadratum I L ſuperat quadratum I M iam dicto rectangulo ſub P Q, & ſub X m, & u l, quod erat oſtendendum.*

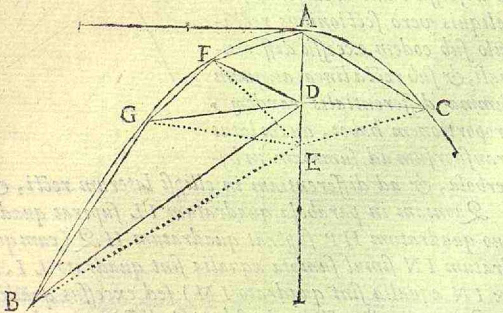




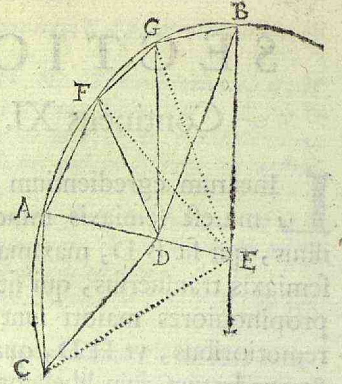
SECTIO IV.

Continens Propoſit. VII. & XII. Apollonij.

SI fuerit menſura A D minor comparata A E, (12.) aut ſit pars lineæ breuiſſimæ, & axis in ellipſi ſit maior, erit A D breuiſſimus ramorum egredientium ex origine eius in omnibus ſectionibus, vt ſunt F D, G D, B D, C D, & proximior illi minor eſt remotiore, nempe F D quam G D, & G D, quàm B D. a



Quia



b QVia A E eſt linea breuiſſima, igitur F E maior eſt illa; itaque angulus F A E maior eſt, quàm
c A F E; Ergo ille eſt multò maior quàm A F D, quare F D maior eſt; atque ſic
d patet quod G E maior ſit quàm E F, & ideo angulus G F E maior eſt, quàm E G F; igitur angulus G F D multò maior eſt, quàm F G D, & propterea G D maior eſt, quàm D F, & ſimiliter B D, quàm G D, & D C, quàm A D, & hoc erat propoſitum.

NOTÆ.

a SI fuerit menſura A D minor comparata A E, &c. *Senſus propoſitionis clarior ſic reddetur; Si fuerit menſura A D minor comparata A E, quæ in ellipſi ſumi debet in axi maiori eius (12.) aut ſit pars lineæ breuiſſimæ; erit A D minimus ramorum F D, G D, B D, C D, egredientium ex origine eius in omnibus ſectionibus, & proximior illi, &c.*

b Quia A E eſt linea breuiſſima, igitur, &c. *Vt conſtructio compleatur ſubiungo: Igitur ſi coniungantur rectæ lineæ E F, E G, E C, E B, & rectæ lineæ A F, F G, G B, A C erit F E maior, quàm A E.*

c Ergo hic eſt multò maior, quàm A F E, &c. *Senſus clarior reddetur hac ratione: Ergo angulus F A E multò maior erit, quàm A F D, qui eſt portio minoris anguli, quarè F D ſubtendens angulum maiorem eſt maior, quàm A D.*

d Igitur ipſe multò maior eſt, &c. *Superaddo rationem illationis dicendo; Et propterea angulus G F D maiorem excedens erit multò maior, quàm F G D, qui portio minoris eſt.*

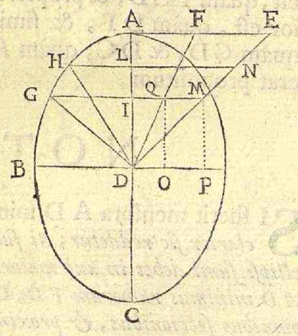
Manifeſtum eſt in prima figura propoſitionis 7. quando A D eſt portio axis minor comparata, quod tunc ex origine D duo tantummodo rami inter ſe æquales ad vtraſque partes axis duci poſſunt ad ſectionem, & erunt illi, qui ad terminos eiuſdem ordinatim ad axim applicatæ iunguntur ab origine D, vt conſtat ex ſuperiùs dictis.

At in ſecunda figura propoſitionis 12. poſſunt quidem ab origine D ad ſectionem duci hinc indè à breuiſſima D A, aliquando duo tantùm rami inter ſe æquales, aliquando tres, atque etiam quatuor inter ſe æquales, quæ cognitio pendet ex propoſitione 72. huius libri.

SECTIO QVINTA

Continens XI. Proposit. Apollonij.

LInearum egredientium ex D centro ellipsis A B C, breuissima est semiaxis minor rectus illius, qui sit B D, maxima verò est semiaxis transuersus, qui sit A D, & propinquiores maiori sunt maiores remotioribus, vt H D, quam G D, & quadratum cuiuslibet rami, vt G
D (exempli gratia) excedit quadra- a
tum breuissimę B D exemplari applicato ad inuersam illius I D.



EDucamus itaque E A æqualem A D, & abscindamus ex illa A F ęqua- b
lem dimidio erecti, & iungamus D F, D E, & perducamus ex G, H
perpendiculares ad D A, & sint G I M, H L N. Quia quadratum G I æ- c
quale est duplo trapezij I F (prima ex quinto) & quadratum I D est æqua-
le duplo trianguli I D M, eo quod I D est æqualis I M, erit quadratum d
D G æquale duplo trianguli A D F (quod est æquale quadrato B D (2. ex
quinto) vnà cum duplo trianguli Q M D, quod est æquale rectangulo Q
P; igitur quadrati G D excessus supra quadratum B D est æqualis plano
Q P, & quia D A, nempe E A ad A F est, vt D I, nempe M I ad I Q, e
& per conuersionem rationis A E ad E F, scilicet dimidium transuersæ
ad illius excessum super A F dimidium erecti, est, vt M I, nempe M P
Def. 8. 9. huius. ad M Q; igitur planum Q P simile est figuræ comparatæ, & M P æqua-
lis est D I. Similiter patet, quod quadratum D H excedit quadratum B
D exemplari applicato ad D L, & quadratum D A superat quadratum
B D exemplari applicato ad D A: Est verò D I minor, quàm D L, &
D L, quàm D A; igitur B D (quæ est dimidium recti) minor est, quàm f
G D, & G D, quàm D H, & D H quàm D A, quod erat ostendendum.

NOTÆ.

ET debet esse linea breuissima perpendicularis ad mensuram, nempe B a
D perpendicularis D A, &c. *Hæc omnino expungi debent, tanquam superuacanea, axes enim esse nequeunt, nisi ad inuicem perpendiculares sint; quare censeo ab aliquo verba illa addita textui Apollonij fuisse.*

Edu-

b Educamus itaque E A, &c. *Lego: Educamus itaq; E A perpendicularem, & æqualem A D.*

c Et perducamus ex G, H perpendiculares, &c. *Et perducamus ex G, H perpendiculares ad D A, & sint H L N, & G I M, quæ secent F D in Q, & D E in M, & N, atque à punctis Q, M educantur M P, Q O, parallelæ D A, quæ secent rectum axem B D in O, P. Addidi hæc postrema verba, vt constructio completa sit.*

d Eo quod I D est æqualis I M, &c. *Quoniam sicuti in triangulo D A E simili triangulo D I M (propter angulum D communem, & rectos angulos ad I, & A) latus D A æquale erat E A, ita latus D I æquale est I M.*

e Nempe M I ad I Q, & è contra, &c. *Lego: Nempe M I ad I Q, & per conuersionem rationis.*

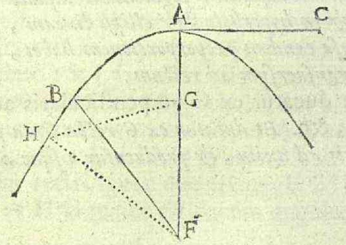
f Cumque B D sit dimidium axis recti erit perpendicularis ad A D mensuram, &c. *Hæc verba postrema pariter expungi debent, nisi fortè corollarium propositionis exponunt, & tunc textus sic restitui deberet. Ex dictis constat, lineam breuissimam è centro ellipsis ad sectionem ductam, perpendicularem esse ad axim eius maiorem.*

Manifestum est ex centro ellipsis ad sectionem duci non posse plures, quàm quatuor ramos inter se æquales, neque pauciores duobus; tres autem nequaquam; nam duæ medietates cuiuslibet axis æquales sunt inter se, & quatuor rami ad extremitates duarum applicatarum ad axim æqualiter è centro distantium ducti æquales sunt inter se.

SECTIO SEXTA

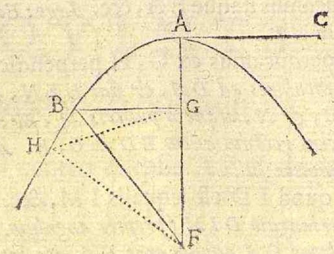
Continens Proposit. XIII. XIV. XV. Apollonij.

OStendamus modò conuersum harum propositionum; & est, quod linea breuissima B F continet cum sua mensura A F angulum acutum, vt B F A in omnibus sectionibus, & ellipsi (si tamen non egrediatur ex eius centro) eiusque potentialis abscindet
a mensuram (13) in parabola æqualem comparatæ (14) & in hyperbola (15) & ellipsi lineam, ad quam inuersa est, vt proportio figuræ.

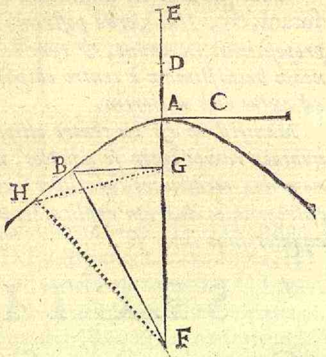


SIt centrum D, & dimidium erecti A C. Quia B F est linea breuissima, erit A F maior quàm A C, eo quòd si esset æqualis (4. 6. ex quinto) aut

aut minor illa (7. ex quinto) esset linea breuissima A F, aut pars illius, quod est falsum, igitur maior est, quàm A C; & propterea A D ad A C maiorem proportionem habet, quàm ad A F; ponamus ergo, vt A D ad A C, ita D G ad G F in hyperbola, & ellipsi; at in parabola ponamus G F æqualem A C, & ducatur ex G perpendicularis ad sectionem. Dico, quod ei occurret ad B. Nam si occurrat sectioni ad aliud punctum, vt H coniuncta H F erit H F breuissima (8. 9. 10. ex quinto) sed supposuimus B F esse breuissimam, quod est absurdum, ergo perpendicularis occurrit sectioni in B. Et quia angulus B G F est rectus, erit angulus B F G acutus, quod erat ostendendum.



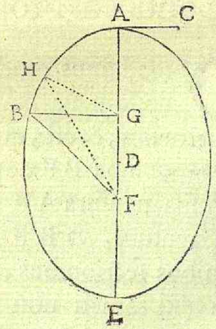
b



NOTÆ.

a

ET eius potentialis secet mensuram in parabola, &c. *Idest, & eius potentialis abscindet ex mensura vsque ad originem, in parabola quidem segmentum æquale comparatæ, & in hyperbola, & ellipsi lineam, ad quam inuersa eandem proportionem habet, quam latus transuersum ad rectum.*



b

Et ducatur ex G perpendicularis ad sectionem, &c. *Et ducatur ex G recta linea perpendicularis ad axim, & producatur vsque ad sectionem.*

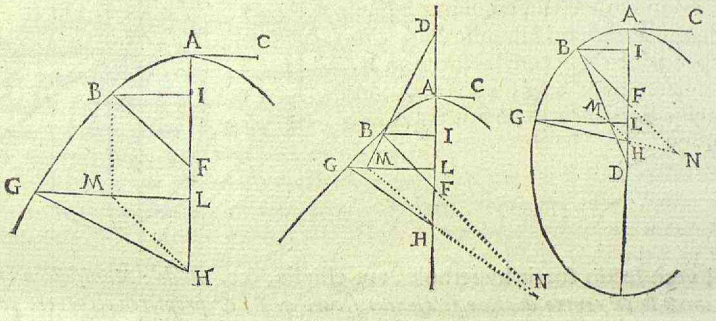
SECTIO

SECTIO SEPTIMA

Continens XXVI. XXVII. XXVIII. Propos. Apollonij.

PROPOSITIO XXVI. & XXVII.

ANgulorum ab axi sectionis A H, & à lineis breuissimis F B, H G contentorum proximiores vertici sectionis minores sunt remotioribus, nempe angulus A F B minor est A H G.



SIt itaque centrum D, & semi inclinatus axis A D, siue semitransuer-
a fus, & dimidium erecti A C: educamus itaque duas perpendiculares
G L, B I, & si sectio fuerit parabole, erit F I æqualis L H, quia quælibet
b earum æqualis est A C (13. ex quinto) & L G maior est, quàm B I; an-
gulus igitur F minor quàm H; si verò sectio fuerit hyperbole, aut ellipsis,
c erit F I ad I D, vt H L ad L D, quia quælibet earum est, vt A C ad A D
d (14. 15. ex quinto) & permutando, erit I D ad L D nempe B I ad M L,
vt I F ad L H, & anguli I, & L sunt recti; igitur duo triangula B I F, M
L H sunt similia, ideoque angulus A H G maior est, quàm angulus A F
B, & hoc erat propositum.

PROPOSITIO XXVIII.

Hinc patet, lineas breuissimas sibi occurrere ad partes axis sectionis.

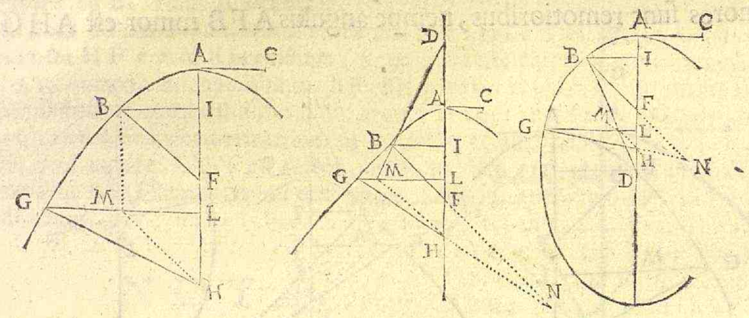
e QVia angulus A F B minor est, quàm angulus A H G; quare sibi oc- 26. 27. h.
currunt ad partes F, H, & hoc erat ostendendum.

NOTÆ

NOTÆ.

Educamus itaque duas perpendiculares, &c. *Educamus itaque ex punctis B, G duas GL, BI perpendiculares ad axim ei occurrentes in L, I.* a

Et LG maior est, quàm BI, &c. *Subiungo: Eo quod potentialis GL magis recedit à vertice, quàm BI; si iam ducatur BM parallela axi in parabola, & ex centro educta in reliquis sectionibus, secans GL in M, coniungaturque HM, erit in parabola ML minor quàm GL, & æqualis BI, & ideo angulus MHL minor erit angulo GHL, & æqualis angulo F, & propterea angulus F minor est, quàm GHL.* b



31. lib. I. Si verò sectio fuerit hyperbole, aut ellipsis, &c. *Addo: Manifestum est rectam BD ex centro ductam sectionem secare in B, & propterea occurrere potentiali GL à vertice remotiori, quàm BI inter puncta G, & L, & erit FI, & cætera.* c

Erit ID ad LD, nempe BI ad ML, &c. *Addo (propter parallelas BI, ML, & similitudinem triangulorum DBI, & DML.)* d

Quia angulus AFB minor est, quàm angulus AHG, &c. *Addo: Et sumpto communi angulo FHN erunt AFB, seu HFN, & FHN simul sumpti minores duobus angulis GHA, FHN, qui duobus rectis æquales sunt; quare BF, GH, concurrunt ad partes F, & H, vt in N.* e

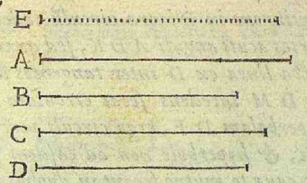
Pro intelligentia sequentium propositionum hæc præmitti debent.

LEMMA V.

Habeat A ad B maiorem proportionem, quàm C ad D. Dico, rectangulum sub extremis A, D contentum maius esse eo, quod sub medijs B, C continetur, & è conuerso.

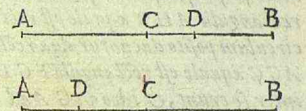
Fiat vt C ad D, ita E ad B; patet ex elementis, A excedere ipsam E; quare rectangulum AD maius erit rectangulo ED: est verò rectangulum B, C sub

C sub intermedijs contentum æquale ei, quod sub extremis E, D quatuor proportionaliũ continetur; ergo rectangulum AD maius est rectangulo BC. Postea sit rectangulũ AD maius rectangulo BC; Dico A ad B maiorem proportionem habere, quàm C ad D; Si enim hoc verum non est, habebit A ad B eandem, aut minorem proportionem quàm C ad D, quare rectangulum AD æquale, aut minus erit rectangulo BC, quæ sunt contra hypothesim; igitur A ad B maiorem proportionem habet, quàm C ad D.



LEMMA VI.

Si recta linea AB secetur bifariam in C, & non bifariam in D: Dico, quod semissis CB ad alterum segmentorum inæqualium DB habet maiorẽ proportionẽ, quàm reliquum inæqualiũ AD ad alterã medietatẽ AC.

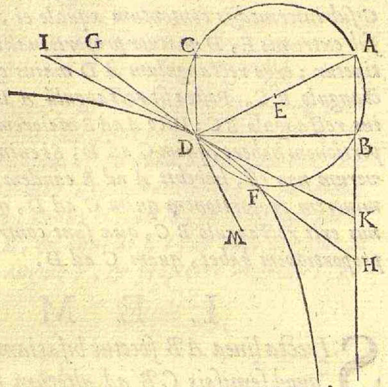


Quoniam quadratum semissis CB, seu rectangulum BCA maius est rectangulo ADB sub inæqualibus segmentis contento; ergo ex præcedenti lemmate CB ad DB maiorem proportionem habet, quàm AD ad AC; Assumitur in sequenti prop. 52. problema antiquum inuentionis duarum mediarum continuè proportionalium inter duas rectas lineas datas, cuius constructio, & demonstratio ab Apollonio inuenta adhuc legitur apud Eutocium, sed organica quidem illa est, & ad manuum operationes maximè accomodata, non omnino diuersa ab ea, quàm Hero, & Philo ediderunt. At Parmenion aliam eiusdem problematis demonstrationem Apollonio tribuit paulò diuersam ab ea, quàm Eutocius recensuit: eam sane nec percepit, nec rite exposuit, Philoponus, quàm enim petitionem non demonstratam ipse vocat consequẽtia est necessaria ex descriptione hyperboles, quæ omnino subintelligi, & adiungi debet, vt colligitur ex Pappi verbis: hi enim (scilicet Hero, & Philo) asserentes problema solidum esse, ipsius constructionem instrumentis tantum perfecerunt congruenter Apollonio Pergæo, qui resolutionem eius fecit per conisectiones. Erit igitur Apollonij propositio huiusmodi. Cõm. lib. 2. Arch. de Sphera, & Cylin. Prop. 2. In lib. 5. Post Analit. comm. 36. Coll. lib. 3. Prop. 4.

LEMMA VII.

Inter rectam lineam AC maiorem, & BC minorem duas medias proportionales reperire.

Conueniant illæ ad angulos rectos in A, & compleatur Parallelogrammum ABDC, cui circumscribatur circulus diametro DA, & per punctum D circa asymptotos CAB describatur hyperbole DF; & ducatur recta DM circulum tangens in D, & recta IDK sectionem ibidem contingens, occurrens asymptotis in I, & K, erunt quidem ID, & IK æquales inter se, & DC parallela est AK, ergo IC æqualis est CA: pari ratione KB æqualis erit BA, sed posita fuit CA maior quàm AB, ergo in triangulis IAD, & KDA basis IA maior erit, quàm AK, & latera ID, DK æqualia sunt, & DA est commune, igitur angulus ADI maior erit angulo ADK, & propterea recta linea IK sectionẽ con- Prop. 4. lib. 2. Prop. 34. lib. I. 3. lib. I.



contingens in D intra circulũ cadet ad
partes acuti anguli A D K, ſed quælibet
recta linea ex D inter tangentes K D,
& D M incedens ſecat circulum, &
36. lib. 1. *hyperbolam D F, ergo circuli periphe-*
ria, & hyperbole non ad eaſdem par-
33. lib. 4. *tes cauæ ſe mutuo ſecant in duobus pun-*
ctis: concurrant in D, & F, & co-
niungatur recta linea D F, quæ pro-
8. lib. 2. *ducta ſecet aſymptotos in punctis G,*
& H: oſtendendũ eſt rectas B H, & G C
eſſe duas medias proportionales quæſitas.
Quoniã eiuſdem rectæ lineæ portiones G
Ibidem. *D, & F H inter hyperbolen, & aſym-*
ptotos interceptæ æquales ſunt inter ſe, addita communi D F, erunt F G, & G H inter ſe quoq; æquales quare rectangulum D H F æquale erit rectangulo F G D, ſed rectangulũ A H B æquale eſt rectangulo D H F, (eo quod ab eodem puncto H extra circulum poſito ducuntur duæ rectæ lineæ circulum ſecantes): ſimili modo rectangulũ A G C æquale eſt rectangulo F G D, igitur duo rectangula A G C, & A H B æqualia inter ſe erunt, & ideo vt G A ad A H, ita erit reciprocè B H ad G C, ſed vt G A ad A H; ita eſt D B ad B H, nec non G C ad C D, (propter æquidiſtantiã ipſarum D B, G A, & ipſarum C D, & A H, & ſimilitudinem triangulorum), quare D B, ſeu C A ad B H eandem proportionem habebit, quàm B H ad G C, & eandem, quàm habet G C ad C D, ſeu ad A B, & propterea quatuor rectæ lineæ C A, B H, C G, & B A erunt in continua proportionalitate, quod erat propoſitum.

SECTIO OCTAVA

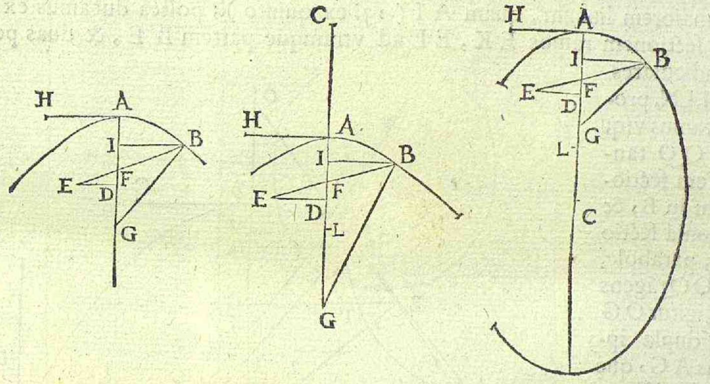
Continens Prop. IL. L. LI. LII. LIII. Apoll.

SI menſura non excedit comparatam, nullus ramorum ſecantiũ ex concurſu egredientium erit Breuiſecans: & lineæ breuiſſimæ ab extremitatibus ramorum ductæ in ſectione abſcindunt ex axi lineam maiorem, quàm abſcindunt rami (51. & 52.) Si verò menſura a
excedit comparatã exponi debet linea certis quibuſdam legibus inuenienda, quæ vocabitur TRVTINA. Et ſiquidẽ perpendicularis maior fuerit illa, tunc rami habebunt proprietates memoratas; ſi verò æqualis fuerit, tunc inter ramos vnicus breuiſecans aſſignari poteſt, & propietates reliquorũ ramorũ erunt illæ eædem ſuperius expoſitæ; ſi verò minor eſt illa, ramorũ omniũ duo tantum breuiſecantes erunt, reliquorum verò, qui non intercipiuntur inter duos breuiſecantes, eædem propietates erunt; eorũ verò, qui intercipiuntur, lineæ breuiſſimæ egredientes ab earum extremitatibus abſcindunt ex axi lineas minores, quàm ſecant rami ipſi. Oportet autem in ellipſi,

in ellipſi, vt menſura ſumatur in maiori duorum axium, & rami egrediantur ad eius ſectionem.

PROPOSITIO IL. & L.

b EX E concurſu ſuper perpendicularem E D educamus E B ſecantem menſuram A D in F, & ſectionem A B in B, & ſit A H dimidium erecti; ſitque menſura A D non maior, quàm
c H A. Dico quod B F non erit breuiſſima, & minima egrediens ex B abſcindit ex ſagitta maiorem lineam, quàm F A: at ſi fuerit A D maior, quàm A H, tunc B F poteſt eſſe linea breuiſſima.

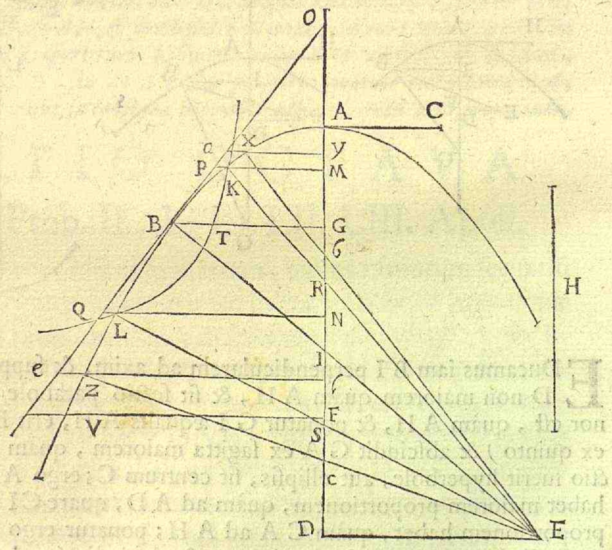


d EDucamus iam B I perpendicularem ad axim, & ſupponamus prius A D non maiorem quàm A H, & ſit ſectio parabole; igitur D I minor eſt, quàm A H, & ponatur G I æqualis A H, erit B G minima (8. ex quinto) & abſcindit G A ex ſagitta maiorem, quàm A F; ſi verò ſe-
e ctio fuerit hyperbole, aut ellipſis, ſit centrum C; ergo A C ad A H non habet maiorem proportionem, quàm ad A D, quare C I ad I F maiorem proportionem habet, quàm C A ad A H; ponatur ergo I C ad I G, vt A C ad A H; ergo B G eſt minima, & abſcindit (9. & 10. ex quinto) G A maiorem, quàm F A, quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO LI.

DEindè sit D A maior quàm A C, sitque prius sectio parabole, & secetur ex D A ipsa D F æqualis A C, & A G fiat pars tertia ipsius A F, educaturque B G perpendicularis ad axim, & vt D F ad F G, ita fiat B G ad lineam H (& hæc est Trutina) coniungaturque B E; & siquidem D E fuerit maior a quàm H. Dico, quod nullus ramus breuisecans duci potest.

Quoniam D E maior est, quàm H habebit D E ad B G, nempe D I b ad I G maiorem rationem, quàm G F ad F D, & componatur proportio, vt demonstretur, quod I G minor sit, quàm D F, quæ æqualis est ipsi A C; breuissima itaque egrediens ex B abscindit ex sagitta A D maiorem lineam, quàm A I (13. ex quinto); postea ducamus ex E ad sectionem ramos E K, E L ad vtramque partem B E, & duas perpendiculares KM, LN, producamus vsq; ad Q O tangẽtem sectionem in B; & quoniã sectio est, parabole, & O Q tãgens 35. lib. I. est, igitur O G est dupla ipsius A G, quę est semissis ipsius F G; ergo G F æqualis c est G O, erit igitur G O ad O M, nempe B G ad P M in maiori proportione, quã M F ad F G;



itaque M K in F M minus est, quàm B G in G F, quod est minus quàm d E D in D F propterea quod E D maior est quàm H; igitur E D in D F multò maius est, quàm K M in MF, quare E D ad M K, nempe D R ad R M maiorem rationem habet, quàm M F ad F D, & componendo patet, e quod D F maior sit, quàm R M. Igitur breuissima egrediens ex K (13. f ex quinto) cadit extra R K; Et simili modo constat, quod breuissima egrediens

egrediens ex puncto L cadit extra L S, quapropter duci non potest ex E ad sectionem L B A linea, aliqua cuius portio intercepta inter axim, & sectionem, sit linea breuissima.

Pariter demonstrabitur, quemadmodum iam ostensum est, quod si E D g fuerit æqualis H, tunc G I æqualis erit D F, quæ est æqualis ipsi A C; & ideo B I (8. ex quinto) vna est ex breuissimis, non autem R K, quia demonstrabitur, quod E D ad M K, nempe D R ad R M maiorem rationem habet, quàm M F ad F D, & propterea D F maior erit, quàm R M; breuissima ergo cadit extra R K. (13. ex quinto) Et S L quoque non est ex breuissimis, quod ita demonstrabimus; Si N S minor est, quàm D F; ergo breuissima egrediens ex L cadit extra S L; Non igitur ex E duci potest ad sectionem linea breuisecans præter E B, & hoc erat ostendendum.

Tertio loco sit E D minor quàm H, & ostendetur quod E D in D F h minus est, quàm B G in G F; postea ponamus T G in G F æquale illi, & erigamus super F perpendicularem F V, & ducamus per T sectionem 4. lib. 2. hyperbolicam circa duas continentes A F, & F V; duæ sectiones se mutuò secabunt in duobus punctis, & sint K, L, & educamus ex illis duas L N, P K M perpendiculares ad A D. Et quoniam perpendiculares K M, T G, L N parallelæ sunt continenti V F, erit K M in M F æquale L N in N F (12. ex secundo) & quodlibet eorum æquale est T G in G F, quod factum est æquale E D in D F; igitur E D ad K M, nempe D R ad R M est vt M F ad F D, & componendo patet, quod D F est æqualis R M, & pro- i pterea K R est linea breuissima (8. ex quinto.)

k Et similiter patebit, quod L S sit breuissima.

l Et cum B I intercipiatur inter illas patet etiam, quod B G in G F maius sit, quàm E D in D F, ostendetur vt dictum est, quod I G maior sit, quàm D F; breuissima ergo ducta ex B cadit inter I, & A.

Deindè ex concursu E ad sectionem parobolicam A B Z educamus E X, m E Z; quas intersecant *l* Z, X Y perpendiculares ad A D, quæ parallelæ sunt continenti F V secantes K T L hyperbolen, ergo *a* Y in Y F æquale est G T in G F, quod factum est æquale E D in D F, itaque E D in D F maius est, quàm X Y in Y F; igitur E D ad X Y, quæ est vt D *b* ad *b* Y maiorem rationem habet, quàm Y F ad F D, & componendo patet, quod F D maior est quàm *b* Y; itaque breuissima egrediens ex X abscindit ex A D lineam maiorem, quàm *b* A; Simili modo demonstrabitur, quod Z *c* n non sit breuissima, & quod breuissima egrediens ex Z abscindit ex A D lineam maiorem, quàm A *c*, & hoc erat propositum.

PROPOSITIO LII. LIII.

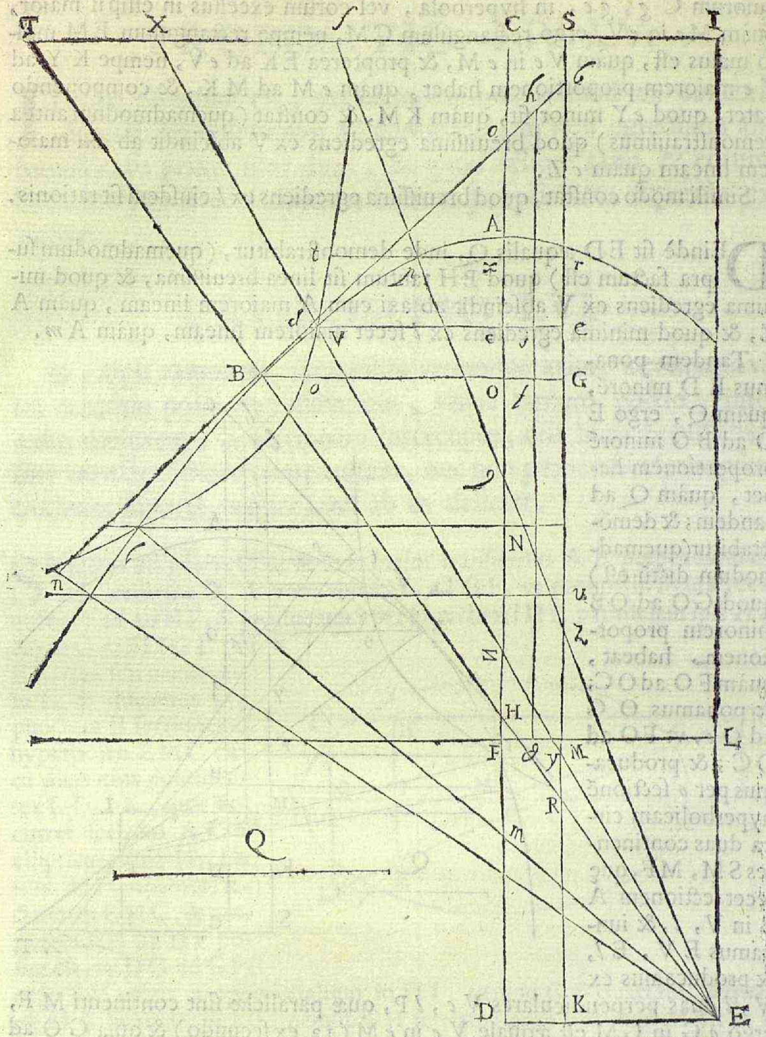
Deindè sit sectio hyperbole, aut ellipsis A B, & axis illius C A D, centrum C, & D A mensura, quæ sit maior dimidio erecti, & perpendicularis E D. Dico, quod rami egredientes ex E a habent superiùs expositas proprietates.

E 2 Itaque

ITaque per C producamus CI parallelam perpendiculari ED, & pona- b
mus quamlibet duarum proportionum CF ad FD, & EK ad KD, vt
proportio figuræ, & educamus ex E, K rectas EI, KS parallelas ipsi C
Lem. 7. AD, & interponamus inter FC, CA duas medias proportionales CN, c
CO, & erigamus per O perpendicularem BO, quæ occurrat sectioni in
B; & ponamus proportionem alicuius lineæ, vt Q ad BO compositam d
ex CD ad DF, & FO ad OC, & sit ED maior, quàm Q Trutina: Di-
co, quod nulla breuisecans egreditur ex E ad sectionem, & linea breuis-
sima, egrediens ab extremitate cuiuslibet rami assignati, abscindit cum
A ab axi maiorem lineam, quàm secant illi rami. Producatur priùs EB e
secans axim in H, & quia ED maior est, quàm Q, ergo proportio ED f
ad BO (quæ componitur ex ED ad DK, nempe IC ad CS, & ex D
K, nempe GO ad OB) maior est proportione, quàm habet Q ad BO,
quæ ex hypothesi componebatur ex CD ad DF, & ex FO ad OC; sed g
ED ad DK est, vt CD ad DF (quia quælibet earum est, vt proportio
figuræ compositæ, vel diuisæ) remanet proportio OG ad OB maior ea,
Lem. 5. quàm habet FO ad OC; igitur OG in OC, nempe rectangulum CG
præmiss. maius est, quàm BO in OF: & ponamus rectangulum FG commune, h
erit rectangulum FS maius, quàm BG in GM; est verò rectangulum
FS æquale rectangulo EM (eo quod EK ad KD, nempe ad FM est, vt
SM ad MK, quia quælibet earum est, vt proportio figuræ; itaque re- i
ibidem. ctangulum EM maius est, quàm MG in GB, & propterea EK ad BG,
nempe KR ad RG maiorem rationem habet, quàm GM ad MK, ergo
componendo, patet, quod KM, nempe DF maior est, quàm GR, &
ideo EI ad KM, nempe CD ad DF, seu IC ad CS minorem propor-
tionem habet, quàm EI ad GR, quæ est, vt IT ad BG, propter simi-
litudinem duorum triangulorum EIT, BGR, ergo IT ad BG maiorem k
Lem. 4. rationem habet, quàm IC ad CS, seu ad OG; & comparando homo-
præm. logorum differentias in hyperbola, & eorum summas in ellipsi, habebit
CT ad BO, nempe CH ad HO maiorem rationem, quàm IC ad CS,
nempe CD ad DF, & diuidendo in hyperbola, & componendo in elli-
psi CO ad OH, habebit maiorem proportionem quàm CF ad FD, quæ
est, vt proportio figuræ; igitur breuissima egrediens ex B (9. 10. ex quinto)
abscindit cum A maiorem lineam, quàm AH.

Posteà educamus ex E lineam occurrentem sectioni in V, & produca-
mus eam, quousque occurrat CI ad X, & ducamus per B lineam tan- l
gentem sectionem, quæ occurrat inclinato, siue transuersæ in *a*, & per V
ducamus perpendicularem super axim, cui occurrat ad *c*, & occurrat tan-
genti B*a* in *d*; & quoniam OG ad OB, quemadmodum demonstraui-
mus, maiorem proportionem habet, quàm FO ad OC, ponamus *f*O ad
OB, vt FO ad OC, & per *f* producamus *fgh* parallelam axi AD: Et m
quia *f*O ad OB est, vt FO ad OC, erit rectangulum *f*OC æquale BO
in OF, & ponamus rectangulum *f*F communiter fiet B*f* in *fg* æquale *g* n
F in FC, & quia CO inuersa in trutinatam C*a* æquale est quadrato C
A dimidij inclinati, siue transuersæ (39. ex primo) erit OC ad CA, vt
37. primi. CA ad C*a*; igitur C*a* est linea quinta proportionalis aliarum quatuor o
linearum proportionalium assignatarum; ergo FC ad CO est, vt CO ad

C*a*



C*a*, & comparando homologorum differentias erit FO ad O*a*, vt FC Lem. 4.
ad CO, quæ est, vt *f*B ad BO, nempe *fh* ad O*a*; igitur proportiones
ipsarum FO, *fh* ad eandem O*a* eædem sunt; ergo sunt æquales; & pro-
pterea *fi* ad *ih* maiorem proportionem habet, quàm ad *fg*, & compo-
p nendo *fh* ad *ih*, nempe B*f* ad V*i* maiorem proportionem habet, quàm
ig ad *gf*; ergo B*f* in *fg*, nempe rectangulum *g*C maius est quàm *i*V
q in *ig*, & ponamus rectangulum *ge* commune, erit aggregatum rectan-

gulorum

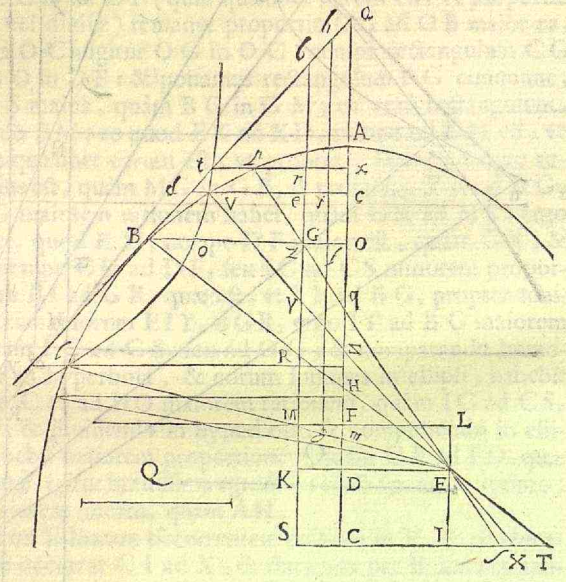
gulorum C g, g e, in hyperbola, vel eorum exceſſus in ellipſi maior,
quàm M e in e V, ergo rectangulum C M, nempe rectangulum E M mul-
tò maius eſt, quàm V e in e M, & propterea E K ad e V, nempe K Y ad
Lem. 5. Y e maiorem proportionem habet, quàm e M ad M K, & componendo r
patet, quod e Y minor ſit, quàm K M, & conſtat (quemadmodum antea
demonſtrauimus) quod breuiſſima egrediens ex V abſcindit ab axi maio- s
rem lineam quàm c Z.

Simili modo conſtat, quod breuiſſima egrediens ex l eiuſdem ſit rationis.

t

DEindè ſit E D æqualis Q, inde demonſtrabitur, (quemadmodum ſu-
pra factum eſt) quod B H tantùm ſit linea breuiſſima, & quod mi- a
nima egrediens ex V abſcindit ab axi cum A maiorem lineam, quàm A
Z, & quod minima egrediens ex l ſecet maiorem lineam, quàm A m.

Tandem ponamus E D minorē, quàm Q, ergo E D ad B O minorē proportionem habet, quàm Q ad eandem; & demōſtrabitur (quemadmodum dictū eſt) quod G O ad O B minorem proportionem habeat, quàm F O ad O C; & ponamus O G ad O o, vt F O ad O C; & producamus per o ſectionē hyperbolicam circa duas continentes S M, M F, quę ſecet ſectionem A B in V, l, & iungamus E V, E l, & producamus ex



b

c

V, l duas perpendiculares V c, l P, quæ parallelæ ſint continenti M F,
ergo o G in G M eſt æquale V e in e M (12. ex ſecundo) & quia G O ad
O o eſt, vt F O ad O C erit o O in O F æquale rectangulo G C, & pona-
mus rectangulum F G commune fiet rectangulum C M (quod erat ęquale
rectangulo M E) æquale ipſi o G in G M, quod eſt æquale ipſi V e in e d
M; ergo rectangulum E M æquale eſt ipſi V e in e M. Tandem proſe-
quamur ſuperiorem demonſtrationem, vt oſtendatur veritas reliquarum
propoſitionum, & hoc erat propoſitum. e

PROP.

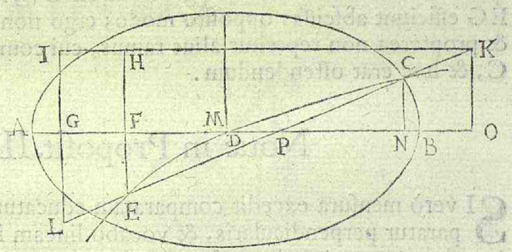
PROPOSITIO LIV. LV.

ITaque oſtenſum eſt, vti memorauimus, quod ex concurſu
a duarum breuiſſimarum ad coniſectionem non egrediatur alia
breuiſecans præter illas duas, & quod reliqui rami ex eorum
concurſu educti ad ſectionem habent proprietates ſuperiùs ex-
poſitas.

PROPOSITIO LVI.

In ellipſi ramorum, ſecantium vtrumque axim, à concurſu vl-
tra centrum poſito egredientium, vnius tantum portio, inter
a axim maiorem, & ſectionem intercepta, erit linea breuiſsima,
ſiue menſura ipſam comparatam, nec non perpendicularis ipſam
trutinam ſuperet, æquet, vel ab ea deficiat.

SIt ſectio ellipſis A C B, & axis maior tranſuerſus A B perpendicularis
b E F, centrum D, & ponamus D G ad G F, vt proportio figuræ, & ſi-
militer E H ad H F, & producamus per H rectam I H K parallelam ipſi A B,
& per G rectā I G L ipſi
E F, quæ ſibi occurrant
c in I, & ducamus per
punctum E ſectionem 4. lib. 2.
hyperbolen E M C cir-
ca duas eius continen-
tes L I, I K, quæ oc-
curret ſectioni A C B
ellipticæ, quia I L, I K
ſunt duæ cōtinentes ſe-
ctionem E M C, & pro-
portio E H ad H F po-
d ſita eſt, vt D G ad G F;



ergo E H prima proportionalium in H I, nempe G F quartam, æquale
eſt D G ſecundæ in I G, nempe F H tertiam; ergo punctum M eſt in il-
lius diametro, & propterea ſectio hyperbole E M C tranſit per centrum
ſectionis ellipſis A C B; quare duæ ſectiones ſe inuicem ſecant, ſitque
e concurſus in C, & producamus per E, C lineam occurrentem duabus con-
tinentibus ſectionem in L, K, & producamus duas perpendiculares C N,
K O ſuper A B. Et quia K C, L E ſunt æquales (16. ex ſecundo) erit G F 8. lib. 2.
f æqualis O N; quare F O æqualis eſt ipſi G N; atque E H ad H F, nempe
E K ad K P, ſeu F O (quæ eſt æqualis ipſi G N) ad O P eandem propor-
tionem habet, quàm D G ad G F, quę eſt ęqualis ipſi O N, & ideo G N
ad O P eſt, vt D G ad O N, & comparando homologum differentias D N Lem. 3.

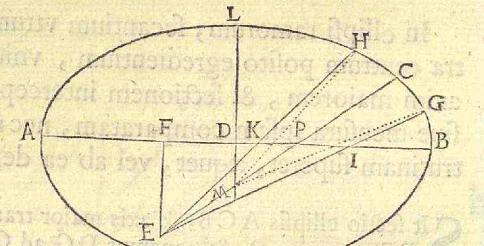
ad N P

ad N P erit, vt D G ad G F, quæ est proportio figuræ; ergo C P est linea breuissima. (10. ex quinto) Et hoc fuit propositum.

PROPOSITIO LVII.

Et dico, quod non reperiatur vllus alius ramus, à quo abscindi possit inter sectionem, & D B linea breuissima. g

Nam si producantur E H, E G ad vtrasque partes ipsius E C secantes D B in K, I, & producamus per D perpendicularem ad A B, h quæ occurrat sectioni ad L, & ipsi E C ad M, quia iam productæ sunt ex concursu M duæ breuisecantes M C, M L (51. ex quinto) igitur linea educta ex M ad H abscindit ex D B cum B maiorem lineam, quàm secat breuissima egrediens ex H k (11. ex quinto) & linea educta ex M ad G abscindit ex D B lineam minorem ea, quàm secat linea breuissima egrediens ex G (51. ex quinto) sed E H, & E G efficiunt abscissas opposito modo; ergo non sunt duæ breuisecantes, & propterea non reperitur alius ramus, cui competat proprietas ipsius E C, & hoc erat ostendendum.



Notæ in Proposit. IL. L.

a Si verò mensura excedit comparatam educatur linea, ad quam comparatur perpendicularis, & vocabo lineam illam Trutinam, &c. *Sic legendum puto : Si verò mensura excedit comparatam exponi debet linea certis quibusdam legibus inuenienda, quæ vocabitur Trutina.*

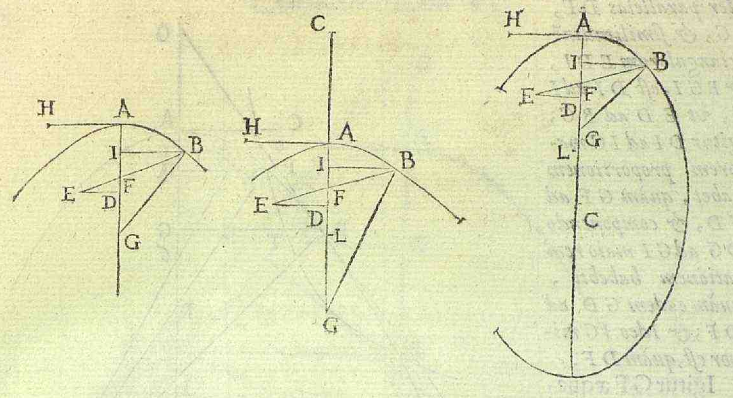
b Ex E concursu super perpendicularem, &c. *Idest. Ex E concursu perpendicularis E D ad axim A G, & ramoram secantium educamus E B secantem mensuram, &c.*

c Tunc B F non est ex minimis, &c. *Dico quod B F non erit recta linea minima earum, quæ inter punctum sectionis B, & axim intercipitur.*

d Et ponatur G I æqualis A H, &c. *Et ponatur G I æqualis A H, iungaturque B G, cumque A D posita sit non maior, quàm H A, erit illius portio F I minor, quàm A H, seu quàm G I, ergo B G est breuissima, &c.* (8. huius.)

e Ergo C A ad A H non habet maiorem proportionem, quàm ad A D; quare D I ad I F, &c. *Ergo G A ad A H non habet maiorem proportionem, quàm ad A D, & addatur indirectum recta A L æqualis A H in hyperbola, &*

auferatur

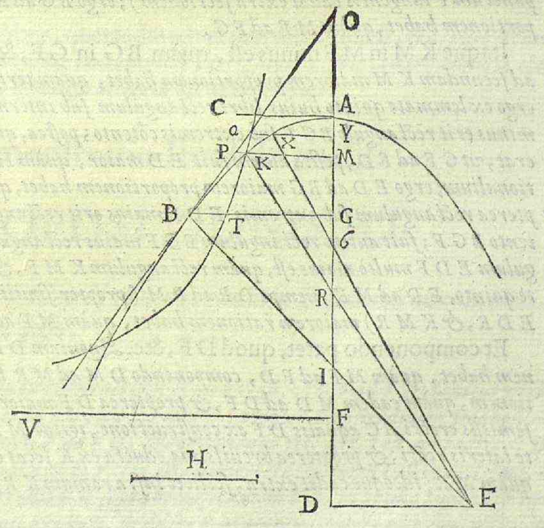


auferatur in ellipsi; quare C A ad A L non habet maiorem proportionem, quàm ad A D, & componendo in hyperbola, & diuidendo in ellipsi C L ad A L, non habet maiorem proportionem, quàm C D ad D A, sed C D ad A D minorem proportionem habet, quam ad eius segmentum I D, ergo diuidendo in hyperbola, & componendo in ellipsi habebit A C ad A D, & adhuc ad A L, seu A H minorem proportionem, quàm C I ad I D, habet verò C I ad I D minorem rationem, quàm ad eius segmentum I F; igitur C I ad I F maiorem proportionem habet, quàm C A ad A H.

Notæ in Proposit. LI.

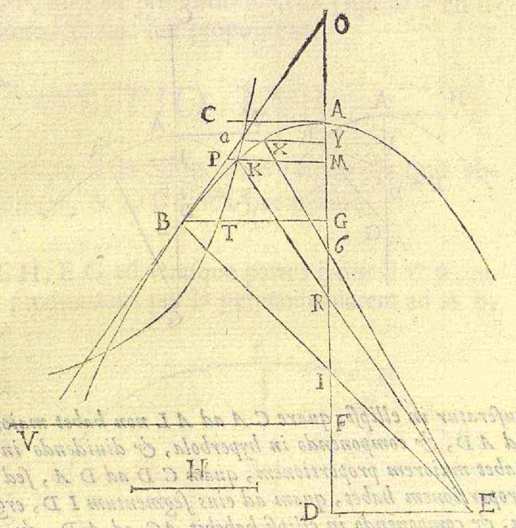
a Dico quod nullus ramus breuisecans duci potest, &c. *Dico, quod ex concursu E ad sectionem nullus ramus breuisecans duci potest.*

b Quoniam D E maior est, quàm H, &c. *Quoniam D E maior est, quàm H habebit E D ad B G maiorem rationem, quàm H ad eandem B G; posita autem fuit inuersè G F ad F D, vt H ad B G; ergo E D ad B G maiorem rationem habet, quàm G F ad F D; & pro-*



F *pter*

pter parallelas D E, B G, & similitudinē triangulorum E D I, & B G I, est D I ad I G, vt E D ad B G; igitur D I ad I G maiorem proportionem habet, quàm G F ad F D, & componendo D G ad G I maiorem rationem habebit, quàm eadem G D ad D F; & Ideo I G minor est, quàm D F.



Igitur G F æqualis est G O, ergo G O ad O M, &c. *Igitur G F æqualis est G O, & quia F O secatur bifariam in G, & non bifariam in M (ex lemmate sexto huius libri) habebit semissis G O ad vnum segmentorum inæqualium M O maiorem proportionem, quàm reliquum segmentum M F ad alteram medietatem F G, sed propter parallelas P M, B G, & similitudinem triangulorum B G O, P M O est G O ad O M, vt B G ad P M, ergo B G ad P M maiorem proportionem habet, quàm M F ad F G: habet verò B G ad minorem M K maiorem proportionem, quàm ad M P (cum punctum P tangentis cadat extra sectionem); ergo B G ad K M adhuc maiorem proportionem habet, quàm M F ad F G.* c

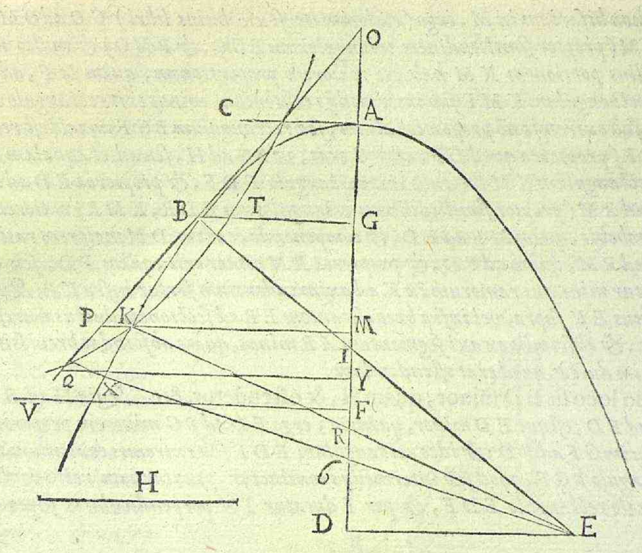
Itaque K M in M F minus est, quàm B G in G F, &c. *Quoniam prima B G ad secundam K M maiorem proportionem habet, quàm tertia M F ad quartam F G; ergo ex lemmate quinto huius libri rectangulum sub intermedijs contentum K M F minus erit rectangulo B G F sub extremis cōtento; postea, quia H ad B G ex hypothesi erat, vt G F ad F D, posita autem fuit E D maior, quàm H, quæ est prima proportionalium; ergo E D ad B G maiorem proportionem habet, quàm G F ad F D, & propterea rectangulum sub extremis E D F maius erit rectangulo sub intermedijs contento B G F; fuit autem rectangulum B G F maius rectangulo K M F; igitur rectangulum E D F multò maius est, quàm rectangulum K M F, & ideo, ex eodem lemmate quinto, E D ad M K, nempe D R ad R M (propter similitudinem triangulorum E D R, & K M R) maiorem rationem habet, quàm M F ad F D.* d

Lem. 5.

Et componendo patet, quod D F, &c. *Quoniam D R ad R M maiorem rationem habet, quàm M F ad F D, componendo D M ad M R habebit maiorem proportionem, quàm eadem M D ad D F, & propterea D F maior est, quàm R M, est verò semissis erecti A C æqualis D F ex constructione, igitur M R minor est A C medietate lateris recti, & propterea breuissima educta ex K secat ex axi segmentum maius, quàm M R; ideoque cadit extra, scilicet infra ramum K R E.* e

8. huius.

Et



f Et simili modo constat, quod breuissima egrediens ex puncto L cadit extra S L, &c. *Ad vitandam confusionem figuræ, & prolixitatem demonstrationis apposui duas figuras, in quibus duo casus ijsdem caracteribus notantur, itaque absq; nouo labore, si inspiciatur secunda figura, ijsdem verbis prioris casus, ostendetur casus secundus.*

g Pariter demonstrabitur, quemadmodum iam ostensum est, &c. *Pars secunda huius propositionis innuitur tantummodo paucißimis verbis; quare maioris claritatis gratia integram demonstrationem hic afferre libuit.*

Demonstratio secundæ partis.

PROPOSITIONIS LI.

Esto E D æqualis trutinæ H: Dico ex concursu E vnicum tantùm breuisecantem ramum duci posse.

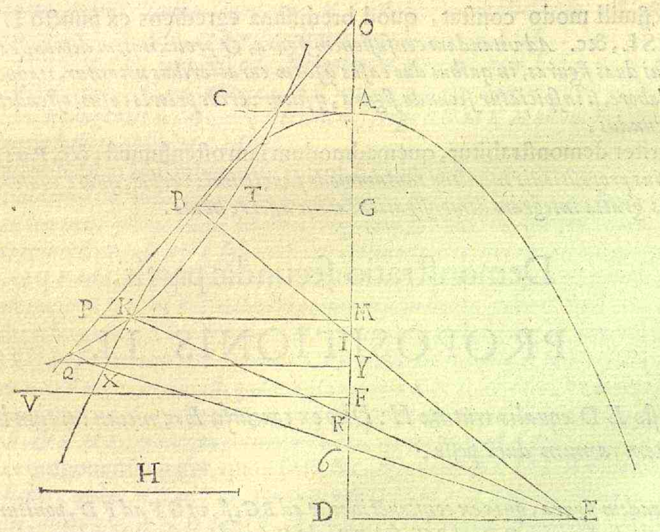
In eadem figura, quia ex constructione H ad B G est, vt G F ad F D, ponitur verò E D æqualis H; ergo E D ad B G, seu D I ad I G (propter similitudinem triangulorum E D I, B G I) est, vt G F ad F D, & componendo D G ad G I est, vt eadem G D ad D F; ideoque I G æqualis est D F, seu A C semierecto; igitur B I est breuissima. 8. huius.

Postea ducto quolibet ramo E K supra breuisecantem E B (in prima figura, & infra in secunda) occurrente axi in R, & ducta K M perpendiculari ad axim, quæ cum secet in M, & tangentem O B in P. Quoniam (vt dictum est) O F secatur bifariam

 in G,

in G, & non biſariam in M, ergo (ex lemmate ſexto huius libri) G O ad O M, ſeu G B ad P M (propter ſimilitudinem triangulorum B G O, & P M O) & multo magis G B ad illius portionem K M habebit maiorem proportionem, quàm M F, ad F G; ideoque rectangulum K M F ſub intermedijs contentum minus erit rectangulo B G F
Lem. 5. prçmiſ. *contento ſub extremis nõ proportionalium; ſed rectangulum B G F æquale eſt rectangulo E D F (propterea quod D F, ad F G erat, vt B G ad H, ſeu ad ei æqualem E D)*
Lem. 5 prçmiſ. *igitur rectangulum K M F minus erit rectangulo E D F, & propterea E D ad K M, ſeu D R ad R M (propter ſimilitudinem triangulorum E D R, K M R) maiorem rationem habebit, quàm M F ad F D, & componendo, eadem D M maiorem rationem habebit ad R M, quàm ad F D, & propterea R M minor erit, quàm F D, ſeu quàm*
ex 8. 13. huius. *A C; igitur minimus ramorum ex K ad axim cadentium fertur infra K R; Quapropter ramus E K ſupra, vel infra breuiſecantem E B ad ſectionem ductus non eſt breuiſecans, & abſcindit ex axi ſegmentum A R minus, quàm abſcindat breuiſſima ex K ad axim ducta, quod erat oſtendendum.*

Tertio loco ſit E D minor, quàm H, & oſtendetur, &c. *Quia H ad B G eſt,* h
vt G F ad F D, eſtque E D minor, quàm H; ergo E D ad B G minorem proportionem
Lem. 5. prçmiſ. *habet, quàm G F ad F D; & ideo rectangulum E D F ſub extremis contentum minus eſt rectangulo B G F, quod ſub intermedijs continetur; ponatur iam rectangulum T G F æquale rectangulo E D F, & per F ducatur F V perpendicularis ſuper axim A D.*



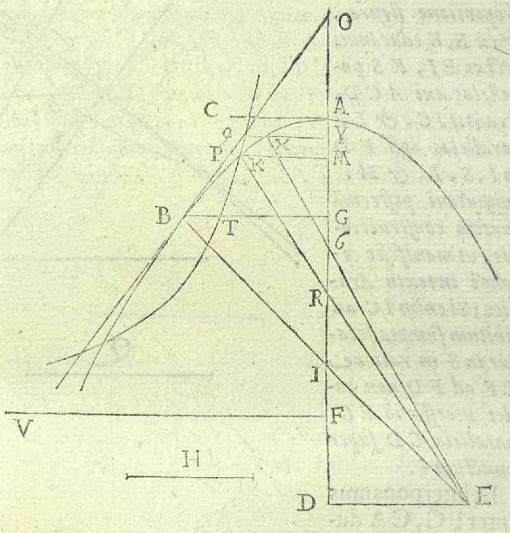
Et componendo, patet, quod D F eſt æqualis R M, &c. *Nam D R ad R M* i
eſt, vt M F ad F D, & componendo, eadem D M ad R M, atque ad D F, ſeu ad ſemierectum A C eandem proportionem habebit, & ideo D F eſt æqualis R M.

Et

k Et ſimiliter patebit, quod L S ſit breuiſſima, &c. *Secundus caſus abſque vllo labore oſtenſus erit ijſdem verbis, & caracteribus, quibus caſus primus expoſitus fuit, ſi inſpiciatur ſecunda figura.*

l Et cum B I intercipiatur inter illas patebit etiam, &c. *Et cum B I intercipiatur inter duos ramos breuiſecantes E K, qui ducuntur ex punctis K, in quibus hyperbole K T L ſecat parabolen A B L, cadet punctum T hyperboles intra parabolen; quare rectangulum B G F maius erit rectangulo T G F, ſeu K M F, quod æquale eſt rectangulo E D F, vt dictum eſt, quare E D ad B G, ſeu D I ad I G (propter ſimili-* Lem. 5.
tudinem triangulorum E D I, B G I) habebit minorem proportionem, quàm G F ad præmiſ.
F D, & componendo, eadem D G ad G I minorem proportionem habebit, quàm ad F D, ſiue ad A C, & ideo I G maior erit, quàm A C.

m Deinde ex concurſu E ad ſectionem, &c. *Deinde ex concurſu E ad ſectionem A B parabolen educantur duo rami E X ſupra breuiſecantem E K in prima figura, & infra eamdem in figura ſecunda, & ex punctis X ducantur duæ X Y perpendiculares ad axim, ſecantes axim in Y, & hyperbolen K T in a exiſtẽte extra parabolen; cumque duæ rectæ a Y, necnõ T G parallelæ ſint cõtinenti F V, & interponãtur inter hyperbolẽ K T, & reliquã*



continentem F A erit rectangulum a Y F æquale rectangulo T G F, quod factum 12. lib. 2.
eſt æquale rectangulo E D F, eſtque X Y portio ipſius a Y; igitur rectangulum E D F maius erit rectangulo X Y F, & ideo E D ad X Y, ſeu D b, ad b Y (propter ſimilitu- Lem. 5.
dinem triangulorum E D b, X Y b) maiorem rationem habet, quàm Y F ad F D, & præmiſ.
componendo eadem D Y ad Y b maiorem proportionem habebit, quàm ad D F, ſeu C A.

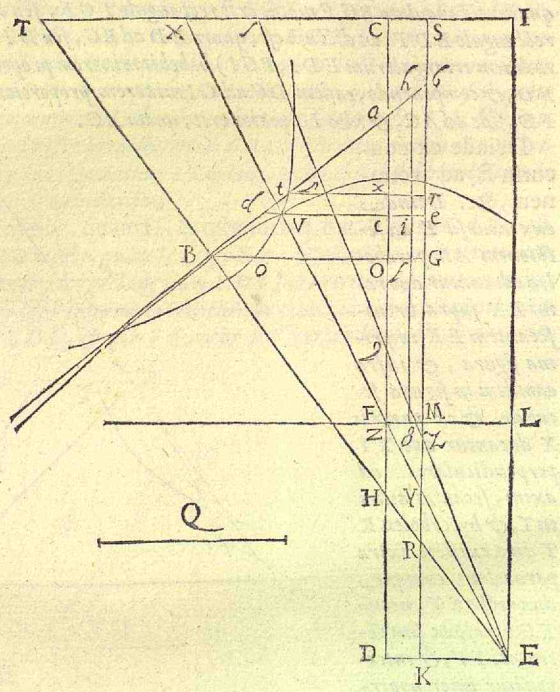
n Simili modo demonſtrabitur, &c. *Abſque noua demonſtratione propoſitum oſtendetur inſpiciendo ſecundam figuram.*

Notæ in Propoſ. LII. LIII.

a DIco, quod rami egredientes ex E habent ſuperiùs expoſitas proprietates, &c. *Ideſt eaſdem, quas habent rami in parabola educti iuxta comparationem perpendicularis E D ad Trutinam.*

Et

Et ponamus quamlibet duarum proportionum C F ad F D, & I S ad S C, vt proportio figuræ, & educamus ex E, S, &c. *Ideſt fiat diſtantia ex centro vſque ad perpendicularem E D ad eius portionem D F in hyperbola, vt ſumma lateris tranſuerſi, & recti ad latus rectum, & vt eorum differentia in ellipſi ad latus rectum ita fiat C D ad eius productionem D F; tunc enim C F ad F D diuidendo in hyperbola, & componendo in ellipſi habebit eandem proportionem, quàm latus tranſuerſum ad rectum; pariterq; fiat E K ad K D in eadē proportione figuræ, & ex E, K educamus rectas E I, K S parallelas axi A C D, ſecantes I C, & L F parallelas ipſi E D in I, S, L, & M. Immutaui poſtremā partem conſtructionis, vt manifeſte erroneā in textu Arabico; Si enim I C ad libitum ſumpta ſecatur in S in ratione C F ad F D non cadet neceſſariò E L parallela C D ſuper punctum I.* b



Et interponamus inter F C, C A duas C N, C O proportionales illis duabus, &c. *Textum corruptum ſic reſtituo: Interponamus inter F C, & A C duas medias proportionales, itaut F C, N C, C O, C A ſint continuè proportionales, quod fieri poſſe conſtat ex lemmate 7. huius libri.* c

d Et ponamus proportionem lineæ alicuius, vt eſt Q compoſitam, &c. *Vocatur Trutina in hyperbola, & ellipſi linea recta Q, quæ ad B O compoſitam proportionem habet ex C D ad D F, & ex ratione F O ad O C.*

e Producatur priùs E B ſecans axim in H, &c. *Producatur priùs E B ſecans axim in H, & rectam S K in R, nec non rectam I C in puncto T.*

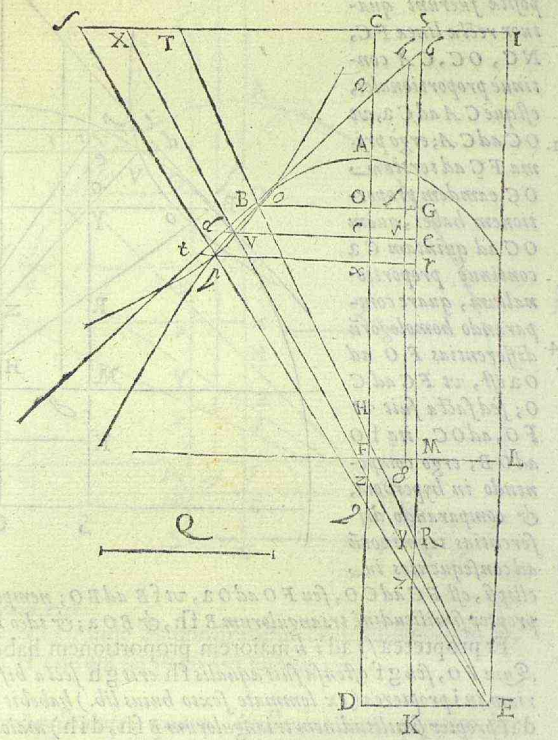
f Ergo E D ad B O, quæ componitur ex E D ad D K, &c. *Nam poſita intermedia D K, proportio E D ad B O compoſita erit ex ratione E D ad D K, & ex ratione D K ad B O; eſt verò I C ad C S, vt E D ad D K (propter parallelas I E, S K, C D) atque D K eſt æqualis G O in parallelogrammo G D; ergo proportio E D ad B O componitur ex ratione I C ad C S, & ex ratione G O ad O B.*

g Sed E D ad D K eſt, vt C D ad D F, quia quælibet earum vt proportio figuræ

figuræ compoſitæ, vel diuiſæ, &c. *Quia E K ad K D, atque C F ad F D eandem proportionem habebant, quàm latus tranſuerſum ad rectum; ergo componendo in hyperbola, & diuidendo in ellipſi erit E D ad D K, vt C D ad D F.*

h Et ponamus rectangulum F G cōmune, &c. *Scilicet rectangulū F G addatur in hyperbola, & auferatur cōmuniter in ellipſi.*

i Et propterea E K ad B G, nempe K R ad R G, &c. *Quia propter ſimilitudinem triangulorum E K R, & B G R erit E K ad B G, vt K R ad R G; quare K R ad R G maiorem proportionē habet, quàm G M ad M K; & componendo K G ad G R maiorem rationem habet, quam eadem G K ad K M, quare K M, nēpe e i æqualis D F maior eſt, quàm G R.*



k Et auferēdo homologū ab homologo in hyperbola, & coniungendo *e a* in ellipſi, habebit, &c. *Scilicet comparando homologorum differentias in hyperbola, eorundem ſummas in ellipſi, ideſt C T ad B O, nempe C H ad H O (propter ſimilitudinem triangulorum C H T, & O H B) habebit maiorem proportionem, quàm I C ad C S, nempe C D ad D F.* Lem. 4. præmiſ.

l Poſtea educamus ex E lineam occurrentem ſectioni in V, &c. *Educamus ex E lineam occurrentem ſectioni in V, quæ ſecet axim in Z, & S M in Y.*

m Et per *f* producamus *f g h* parallelam axi A D, &c. *Et per* f *ducamus* f g *parallelam axi A D, quæ ſecet tangentem B* a *in* h, *& L F in* g, *atque V* c *ſecet illam in* i, *& S M in* e.

n Et ponamus rectangulum F *f* communiter, &c. *Et communiter addamus in hyperbola, & auferamus in ellipſi rectangulum F* f, *fiet rectangulum B* f g *æquale rectangulo* g *F C. Nomina Inuerſi, & Trutinatæ definita fuerunt in primo libro ab interprete Arabico.*

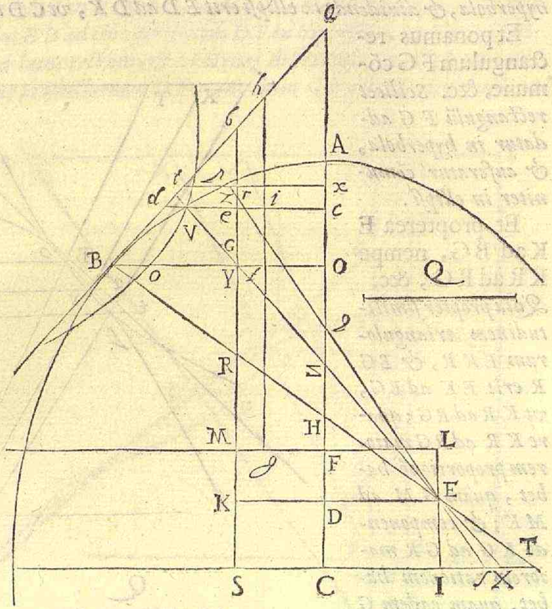
Igitur

Igitur C *a* eſt linea quinta proportionalis aliarum quatuor, &c. *Quia poſitæ fuerunt quatuor rectæ lineæ F C, N C, O C, C A continuè proportionales, eſtque C A ad C* a, *vt* o

37. lib. 1. *O C ad C A; ergò prima F C ad tertiam O C eamdem proportionem habet, quàm O C ad quintam C* a *continuè proportionalium, quare comparando homologorũ*

Lem. 4. præmiſſ. *differentias F O ad O* a *eſt, vt F C ad C O; ſed facta fuit vt F O, ad O C, ita* f *O ad O B; ergo componendo in hyperbola, & comparando differentias terminorũ*

Lem. 2. præm. *ad conſequentes in ellipſi, eſt F C ad C O, ſeu F O ad O* a, *vt* f *B ad B O; nempe vt* f h *ad eandem O* a, *propter ſimilitudinẽ triangulorum B* f h, *& B O* a; *& ideo F O, &* f h *æquales ſunt.*



Et propterea *f i* ad *i h* maiorem proportionem habet, quàm ad *f g*, &c. *Quia F O, ſeu* g f *oſtenſa fuit æqualis* f h *erit* g h *ſecta bifariam in* f, *& non bifariam in* i *propterea (ex lemmate ſexto huius lib.) habebit* f h *ad* i h, *ſcilicet B* f *ad* d i *(propter ſimilitudinem triangulorum B* f h, d i h*) maiorem proportionem, quàm* i g *ad* g f, *ſed B* f *ad V* i *portionem ipſius* d i *habet maiorem proportionem, quàm ad* p

Lem. 5. *d* i; *ergo B* f *ad V* i *habet maiorem proportionem, quàm* i g *ad* g f, *ergo rectangulum*

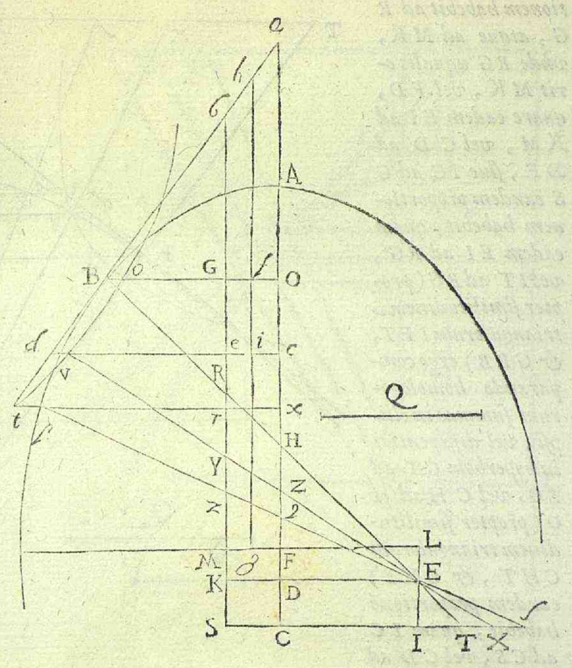
In nota literę n præm. *B* f g, *nempe rectangulum* g *C (quod eſt oſtenſum ei æquale) maius eſt rectangulo V* i g.

Et ponamus rectangulum *g e* commune, &c. *Et addamus in hyperbola, & auferamus in ellipſi rectangulum* g e *communiter.* q

Et propterea E K ad *e* V, nempe K ad Y *e*, &c. *Sunt enim triangula E K Y, & V* e *Y ſimilia, ergo E K ad* e *V eſt, vt K Y ad Y* e, *quarè K Y ad Y* e *maiorem proportionem habet, quàm* e *M ad M K, & componendo, eadem K* e *maiorem proportionem habet ad* e *Y, quàm ad M K, ſeu ad F D; vnde patet, quod* e *Y minor ſit, quam F D.* r

Et conſtat quemadmodum antea demonſtrauimus, &c. *Quoniam* e *Y minor oſtenſa eſt, quam K M ergo eadem E I ad Y* e, *ſeu I X ad V* e *(propter ſimilitudinem triangulorum E I X, Y* e *V) maiorem proportionem habebit, quàm E I ad M K, ſeu I C ad C S, vel ad ei æqualem* c e; *igitur comparando homologorum ſummas* ſ

mas in ellipſi, & eorundem differentias in hyperbola C X ad c *V, vel (propter ſimilitudinem triãgulorum X C Z, V* c *Z) C Z ad Z* ç *maiorem proportionem habet, quàm I C ad C S, vel C D ad D F; & componendo in ellipſi, & diuidendo in hyperbola C* c *ad* c *Z maiorẽ proportionem habebit, quàm C F ad F D, & ideo breuiſſima egrediens ex V abſcindit lineã maiorem, quàm A Z.* Lem. 4.



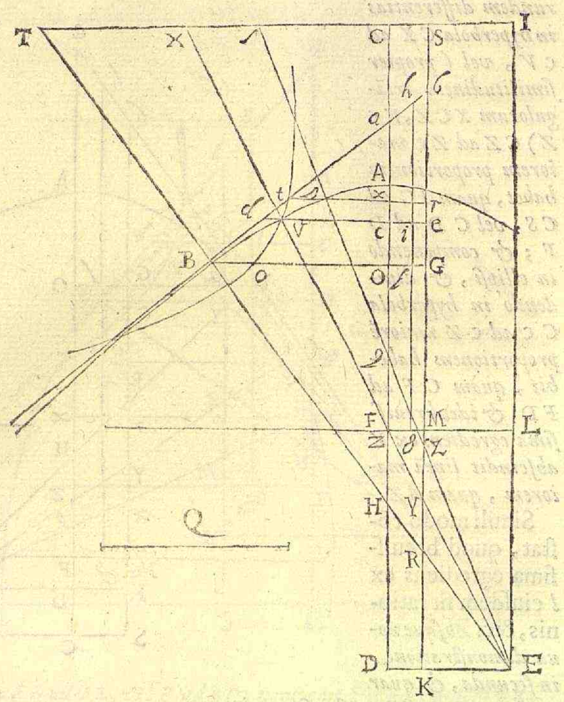
9. 10. huius.

t Simili modo cõſtat, quod breuiſſima egrediens ex *l* eiuſdem ſit rationis, &c. *Abſque noua demonſtratione in ſecunda, & quarta figura propoſitum oſtenſum erit.*

a Deinde ſit E D æqualis Q, inde demonſtrabitur (quemadmodum ſupra factum eſt) quod B H tantum ſit linea breuiſſima, &c.

Secunda pars huius propoſitionis, quam Apollonius non expoſuit hac ratione ſuppleri poteſt.

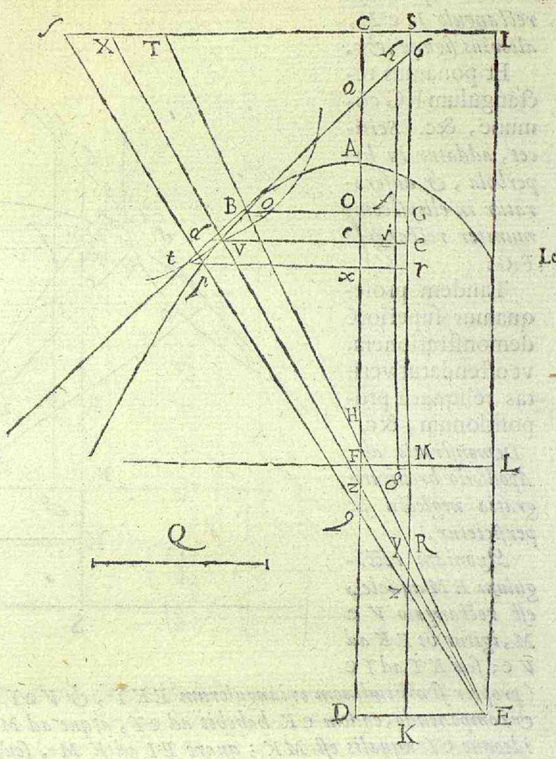
Sit E D æqualis Trutinæ Q, habebunt E D, atque Q eandem proportionem ad B O, componitur verò proportio E D ad B O ex rationibus E D ad D K, & D K ad B O, ſeu O G ad B O; componebatur autem proportio Trutinæ Q ad B O ex rationibus C D ad D F, & F O ad O C; ergo ablata communiter proportione E D ad D K, vel C D ad D F, relinquetur proportio G O ad O B eadem proportioni F O ad O C; ergo rectangulum G O C ſub extremis contentum æquale erit rectangulo B O F ſub intermedijs compræhenſo, addatur in hyperbola, & auferatur in ellipſi communiter rectangulum F G, erit rectangulum F S æquale rectangulo B G M; Et quia I S ad S C, vel E K ad K D, vel ad F M erat, vt C F ad F D, vel vt S M ad M K; ergo rectangulum E M æquale eſt rectangulo F S; & propterea rectangulum E M æquale erit rectangulo B G M; quapropter vt E K ad B G, ſeu K R ad R G, ita erit G M ad M K, & componendo, eadem



KG eandem proportionem habebit ad RG, atque ad MK, vnde RG æqualis erit MK, vel FD, quare eadem EI ad KM, vel CD ad DF, siue IC ad CS eandem proportionem habebit, quam eadem EI ad RG, vel IT ad BG (propter similitudinem triangulorum IET, & GRB) ergo comparando homologorum summas in elli-
Lem. 4. *psi, vel differentias in hyperbola CT ad BO, vel CH ad HO (propter similitudinem triangulorum CHT, & OHB) eandem proportionẽ habebit, quàm IC ad CS, vel CD ad DF, & diuidendo in hyperbola, & cõponendo in ellipsi CO ad OH eandem proportionem habebit, quàm CF ad FD, siue quàm habet latus transuersum ad rectum; & propterea BH est breuissima*
9. 10. huius. *linearum ex B ad axim cadentium.*

Deinde educatur quilibet ramus EV supra, vel infra breuisecantem EB, qui productus secet rectam IC in X, & CA in Z, atque SM in Y, & educatur ex V recta V e *perpendicularis ad axim, secans DF in* c, *& SM in* e, *atque contingentem sectionem in puncto B, scilicet ipsam B* a *secet in* d. *Et quia (vt modo ostensum est) rectangulum FS æquale est rectangulo BGM, suntque pariter ostensæ OC, AC, C*a *proportionales; ergo C*a *est quinta proportionalis post quatuor præcedentes FC, NC, OC, AC continuè proportionales; & ideo FC ad*
Lem. 3. *CO est, vt CO ad C*a; *ergo comparando homologorum differentias tam in hyperbola, quàm in ellipsi erit, FO ad O*a, *vt FC ad CO: est autem GB ad BO, vt FC ad CO, vt antea ostensum est; ergo GB ad BO erit, vt FO ad O*a; *sed propter similitudinem triangulorum BG*b, *BO*a *est GB ad BO, vt G*b *ad O*a; *ergo FO, seu MG ad O*a *eandem proportionem habet, quàm G*b *ad eandem O*a; *& propterea MG æqualis est G*b; *cumque M*b *secetur æqualiter in G, & inæqualiter in* e *(ex lemmate 6. huius) G*b *ad* eb, *seu BG, ad* de, *propter similitudinem triangulorum BG*b, *& BO*a, *& multo magis BG ad V*e *portionem ipsius* de *habebit maiorem proportionem, quàm* e*M ad GM; ergo rectangulum*

BGM



*BGM sub extremis cõtentum maius erit rectãgulo V*e*M sub* Lem. 5.
*medijs compræhenso; erat autem prius rectangulum BGM æquale rectangulo EM; ergo rectangulũ EM maius est rectangulo V*e*M, &*
*propterea EK ad V*e, *seu KY ad Y*e *(propter similitudinem triangulorum EYK, & V*e*Y) maiorem proportionem habebit, quàm* e*M ad MK, & componendo, eadem K*e *ad Y*e *maiorem proportionem habebit, quàm ad MK; ergo Y*e *minor est, quàm MK, quare EI ad Y*e, *seu IX ad* e*V (propter similitudinem triangulorum IEX,* e*YV) habebit maiorem proportionem, quàm eadem EI ad MK, seu IC ad CS, vel ad* ce; *& propterea comparando homologorum* Lem. 4.
summas in ellipsi, & earundem differentias in hyperbola CX ad c*V, vel CZ ad Z*c *(propter similitudinem triangulorum CZX, V*c*Z) maiorem proportionem habebit, quàm SK, ad KM, seu CD ad DF, & diuidendo in hyperbola, & componendo in ellipsi C*c *ad* c*Z habebit maiorem proportionem, quàm CF ad FD, seu quàm latus transuersum ad rectum, & propterea breuissima linea-* ex 9. 10. huius.
rum cadentium ex puncto V ad axim abscindet segmentum maius, quàm AZ, & ramus EV non erit breuisecans, quod fuerat ostendendum.

b Et demonstrabitur, quemadmodum dictum est, quod GO ad BO minorem proportionem habet, quàm FO ad OC, &c. *Nam proportio ED ad BO componitur ex rationibus ED ad DK, & DK, seu GO ad BO. Pariterque proportio Trutinæ Q, quæ erat maior quàm ED ad BO componitur ex rationibus CD ad DF, & FO ad OC, auferatur communis proportio ED ad DK, vel CD ad DF, remanet proportio GO ad OB minor proportione FO ad OC.*

c Et producamus ex V, *l* duas perpendiculares V *e*, *l* P, quæ, &c. *Et producamus ex V, & V duas perpendiculares V*e, *quæ parallelæ sint continenti FM, & secent reliquas lineas in signis antea expositis; Rectangulum ergo V*e

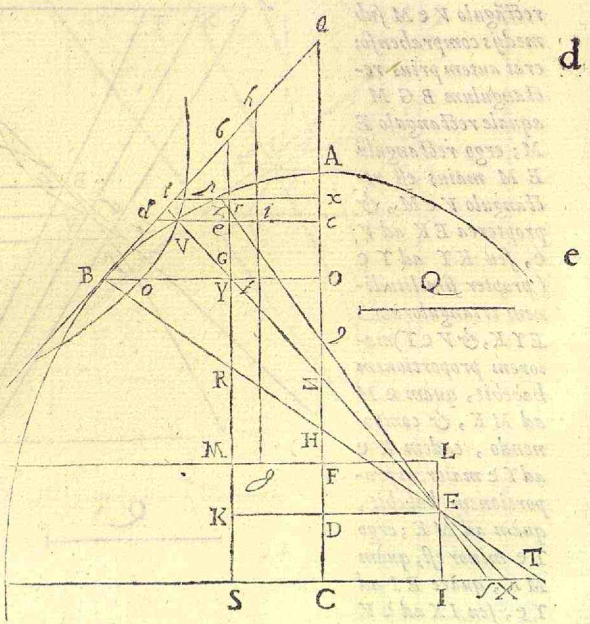
G 2 *in* e

in e *M æquale est rectangulo V* e *M, alterius figuræ, &c.*

Et ponamus rectangulum F G commune, &c. *Scilicet, addatur in hyperbola, & auferatur in ellipsi communiter rectangulũ F G.*

Tandem prosequamur superiorẽ demonstrationem, vt ostendatur veritas reliquarũ propositionum, &c.

Demonstratio ab Apollonio breuitatis gratia neglecta sic perficietur.

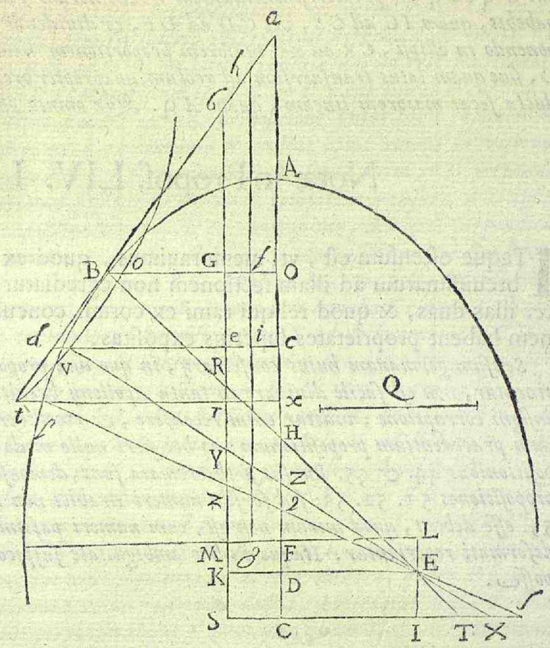


Quoniam rectãgulum E M æquale est rectangulo V e *M, igitur vt E K ad V* e*, seu K Y ad Y* e *(propter similitudinem triangulorum E K Y, & V* e *Y) ita erit* e *M ad M K, & componendo, eadem* e *K habebit ad* e *Y, atque ad M K eandem proportionem, ideoque* e *Y æqualis est M K; quare E I ad K M, seu I C ad C S eandem proportionem habebit, quàm E I ad* e *Y, seu quàm I X ad* e *V (propter similitudinem triangulorum I E X, &* e *Y V) quare comparando homologorum differentias*
Lem. 3. *in hyperbola, & eorundem summas in ellipsi C X ad* c *V, vel C Z ad Z* c *(propter similitudinem triangulorum C Z X,* c *Z V) habebit eandem proportionem, quàm I C ad C S, vel C D ad D F, & diuidendo in hyperbola, & componendo in ellipsi C* c *ad* c *Z eandem proportionem habebit, quàm C F ad F D, seu quàm habet latus*
9. 10. huius. *transuersum ad rectum, & propterea recta linea V Z est breuissima omnium, quæ ex V ad axim A D duci possunt.*

Iisdem prorsus verbis ostensum erit, quod recta linea l m *sit breuissima omnium cadentium ex puncto* l *ad axim, si nimirum apponatur caracteres prioris casus, vt patet in secunda, & quarta figura.*

Iisdem positis ostendendum est, ramum B E, interceptum inter duos breuisecantes E V, non esse breuisecantem, atque lineam breuissimam ex B ad axim A D extensam cadere supra ramum B E versus verticem A.

Quoniam rectangulum B G M maius est rectangulo o *G M, atque ostensum fuit rectangulum E M æquale rectangulo* o *G M; ergo rectangulum B G M maius est*
Lem. 5. *rectangulo E M, & propterea E K ad B G, seu K R ad R G (propter similitudinem triangulorum) minorem proportionem habebit, quàm G M ad M K, & componendo*



ponendo eadem K G ad G R minorẽ proportionem habebit, quã ad K M, & propterea G R maior erit, quàm K M, vnde E I ad G R, seu I T ad G B (propter similitudinem triangulorum E I T, R G B) minorem proportionem habet, quàm E I ad K M, seu I C ad C S; & ideo comparando homologorũ summas in ellipsi, & Lem. 4.
eorundem differentias in hyperbola C T ad O B, siue C H ad H O (propter similitudinem triangulorũ) habebit minorẽ proportionem, quàm I C ad C S, vel C D ad D F, & diuidendo in hyperbola, & componendo in ellipsi C O ad O H habebit minorem proportionem, quàm Ex 9. 10.
C F ad F D, siue quàm latus transuersum habet ad rectum; ergo breuissima ex huius.
B ad axim ducta eum secat supra punctum H, & abscindit lineam minorem, quàm A H.

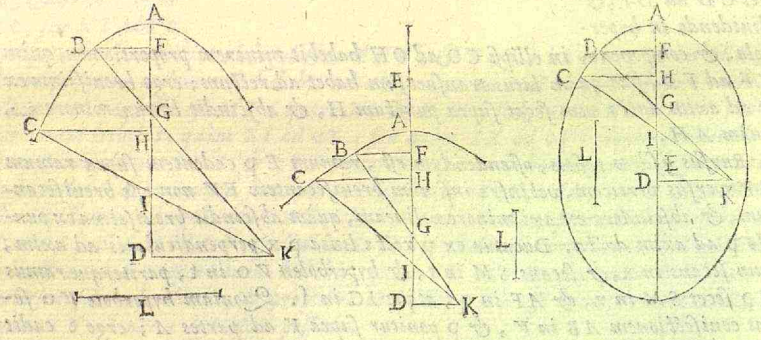
Rursus iisdem positis, ostendendum est, ramum E p *cadentem supra ramum E V versus verticem, vel infra infimum breuisecantem E V non esse breuisecantem, & abscindere ex axi minorem lineam, quàm abscindit breuissima ex puncto* p *ad axim ducta. Ducatur ex* p *recta linea* p x *perpendicularis ad axim, eum secans in* x*, & secans S M in* r*, & hyperbolen V* o *in* t*, pariterque ramus E* p *secet S M in* z*, & A F in* q*, atque I C in* ſ*. Quoniam hyperbole V* o *secat conisectionem A B in V, &* p *ponitur supra V ad partes A; ergo* t *cadit extra sectionem A B, & propterea* t r *maior erit, quàm* p r*; vnde rectangulum* p r *M minus erit rectangulo* t r *M; sed propter asymptotos S M, M F est rectan-* 12. lib.2.
gulum t r *M æquale rectangulo* o *G M, seu rectangulo E M, vt dictum est; ergo rectangulum* p r *M minus est rectangulo E K M, & propterea E K ad* p r*, seu* Lem. 5.
K z *ad* z r *(propter similitudinem triangulorum) maiorem proportionem habet, quàm* r *M ad M K, & componendo, eadẽ K* r *ad* r z *maiorẽ proportionẽ habet, quàm ad M K; ergo* r z *minor est, quàm M K; ideoque E I ad* r z*, seu I* ſ *ad* r p *(propter similitudinem triangulorum E I* ſ*, &* r p z*) maiorem proportionem habet, quàm E I ad M K, seu I C ad C S, vel ad* r x*; ergo comparando homo-* Lem. 4.
logorum summas in ellipsi, & eorundem differentias in hyperbola C ſ *ad* x p*,*
siue

siue C q ad q x (propter similitudinem triangulorum) maiorem proportionem habebit, quàm I C ad C S, vel C D ad D F, & diuidendo in hyperbola, & componendo in ellipsi, C x ad x q maiorem proportionem habebit, quàm C F ad F D, siue quàm latus transuersum ad rectum, quapropter breuissima ex p ad axim Ex 9. 10. huius. *ducta secat maiorem lineam, quàm A q. Quæ omnia ostendenda fuerant.*

Notæ in Propos. LIV. LV.

ITaque ostensum est, vti memorauimus, quod ex concursu duarum breuissimarum ad illam sectionem non egrediatur alia breuisecans præter illas duas, & quod reliqui rami ex eorum concursu educti ad sectionem habent proprietates superius expositas. a

Sensum germanum huius consectarij, in quo duæ propositiones Apollonij continentur, non est facile diuinare in tanta Apollonij breuitate, & textus Arabici insigni corruptione; videtur enim recensere, & recolligere conclusionem quamdam præcedentium propositionum: at hoc fieri nullo modo debebat in duabus propositionibus 44. & 45. Rursus si theoremata sunt, demonstrari non poterant ante propositiones 51. 52. 53; sed forsan numeri Arabici non 44. & 45; sed 54. & 55. esse debent, quod mirum non est, cum numeri passim in hoc codice Arabico deformati reperiantur. Itaque in hac ambiguitate suspicor, textum sic restitui posse.



PROP. 5. Addit. ***Si in conisectione duæ breuisecantes ductæ fuerint ab eorum concursu, nullus alius ramus ductus erit breuisecans: Et ramorum ab eodem concursu extensorum, qui inter breuisecantes intercipiuntur, abscindunt axis segmenta maiora, & qui non intercipiuntur, minora, quàm abscindant lineæ breuissimæ ab eorum terminis ad axim ductæ: oportet autem in ellipsi, vt duo rami, & perpendicularis cadant inter axis maioris verticem, & centrum sectionis.***

Sit

Sit conisectio A B C, cuius axis A D, & in hyperbola, & ellipsi centrum E; & sumantur quælibet duo puncta B, & C, quæ in ellipsi sint in eodem eius quadrante, & ducantur B F, C H perpendiculares ad axim, & in parabola fiant F G, & H I æquales semissi lateris recti; at in hyperbola, & ellipsi fiat E F ad F G, nec non E H ad H I, vt latus transuersum ad rectum, coniunganturq; rectæ B G, & C I. Manifestum est B G, & C I esse lineas breuissimas, 8. 9. 10. huius. *quæ si producantur vltra axim (ex 28. propositione huius libri) conuenient alicubi, vt in K. Dico, quod ex concursu K nullus alius ramus breuisecans duci potest ad sectionem A B C. Extendatur ex K super axim A D perpendicularis K D, & reperiatur sectionis Trutina L competens mensuræ A D ipsius concursus K, vt in propositionibus 51. & 52. præcipitur. Et certè perpendicularis K D non erit maior, quàm L, aliàs duci non posset ramus vllus breui-* 51. 52. huius. *secans ex concursu K ad sectionem A B C, quod est falsum; factæ enim fuerunt K B, & K C breuisecantes; Similiter K D non erit æqualis Trutinæ L, quandoquidem tunc vnica tantummodo breuisecans ex K ad sectionem A B C duci posset, quod rursus falsum est, positæ enim fuerunt duæ breuisecantes; igitur perpendicularis K D necessario minor erit Trutina L, & ideo ex concursu K duæ* 51. 52. huius. *tantummodo breuisecantes ad sectionem A B C duci possunt, quæ sunt B K, C K; & propterea nullus alius ramus breuisecans ex concursu K ad sectionem A B C duci potest præter duos K B, & K C; quod erat primo loco ostendendum.*

Secundo ijsdem positis, dico, quod rami ducti inter K B, & K C cadunt infra lineas breuissimas ab eorom terminis ad axim ductas, & quod rami producti ex K supra breuisecantem K B versus A verticem sectionis, vel infra ramum breuisecantem K C abscindunt axis segmenta ex vertice minora, quàm abscindant lineæ breuissimæ ab eorum terminis ad axim ductæ. Reperiatur denuo Trutina L, ostendetur, vt prius perpendicularis K D minor, quàm L, & duæ tantummodo breuisecantes K B, & K C; quare quilibet ramus ex K ad sectionis punctum, 51. 52. huius. *inter B, C positum extensus, secat segmentum axis ex vertice A maius quàm abscindat linea breuissima ab eius termino ad axim ducta: pariterque quilibet ramus ex K ad punctum sectionis supra B, positum, vel infra ramum K C extensus, abscindet segmentum axis ex A minus, quàm secet linea breuissima ab eius termino ad axim ducta; quod erat ostendendum.*

Notæ in Proposit. LVI.

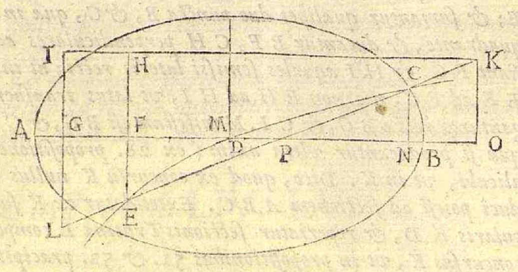
a REperitur quidem in ramis aggregati secantis bifariam inclinatum, super quod non cadit perpendicularis, breuisecans vna tantum, quomodocumque se habeant perpendicularis, & mensura, &c.

Sensum huius propositionis nec Apollonius quidem si reuiuisceret insigni barbarie corruptum perciperet, censeo tamen, sic restitui debere.

In ellipsi ramorum secantium vtrumque axim à concursu vltra centrum posito egredientium, vnius tantùm portio inter axim maiorem, & sectionem intercepta erit linea breuissima; siue mensura ipsam comparatam, nec non perpendicularis ipsam Trutinam superet, æquet, vel ab ea deficiat.

Sit

Sit ſectio ellipſis A C B tranſuerſa A B, &c. *Lego; Sit ſectio ellipſis A C B, & axis maior A B, centrum D, & perpendicularis E F ſecans axim in F inter centrũ ellipſis D, & verticem A.* b



Et ducamus per punctum E ſectionẽ hyperbolicam E M C circa duas eius continentes, &c. *Ideſt circa duas aſymptotos I L, I H per* c
12. & 13. lib. 2. *E deſcribatur hyperbole E M C, quæ ſecet axim A B æquidiſtantem alteri aſymptoton in aliquo puncto vt in M; oſtendetur punctum M ſuper ellipſis centrum D cadere.*

Ergo E H prima in proportione in I H ſubſequentem, nempe G F ſubſequens ipſam M G quartam, æquale eſt ſubſequenti D G ſecundæ in I G nempe F H tertiam. Ergo punctum N, &c. *Textus corruptus ſic reſtitui poſſe cenſeo; Ergo E H prima proportionalium in H I, nempe G F quartam æquale eſt D G ſecundæ in I G, nempe F H tertiam, &c. Propterea quod E H ad F H, atque D G ad G F poſitæ fuerunt, vt latus tranſuerſum ad rectum; ergo rectangulum ſub D G, & H F, ſeu I G, extremis quatuor proportionalium, æquale eſt rectangulo ſub intermedijs E H, & F G, ſeu H I, eſtque punctum E in hyperbola E M C cuius aſymptoti K I, L I; ergo punctum D in eadem hyperbola exiſtit; ſed erat prius in ellipſis diametro A B, ſcilicet in centro; quare in eorum communi ſectione exiſtet: erat autem punctum M communis ſectio hyperboles E C, & axis ellipſis A B; igitur puncta M, & D coincidunt, & hyperbole E D C* d
8. lib. 1. *tranſit per centrũ ſectionis ellipticæ A C B, & ideo hyperbole E D C, quæ in infinitũ extendi, & dilatari poteſt neceſſario ſecabit finitam ellipſim alicubi, vt in C.*

Et producamus per E C lineam, &c. *Et producamus per E C rectam lineam, quæ occurrat continentibus in L, K, & ſecet axim ellipſis in P.* e

Erit G F æqualis O N, quare F O, &c. *Quia duæ rectæ lineæ A O, L K ſecantur à parallelis I L, F E, C N, K O proportionaliter, & ſunt K C, L E* f
8. lib. 2. *æquales, ergo O N, F G inter ſe æquales erunt, & addita communiter N F erit F O æqualis N G; Et quoniam E H ad H F eſt vt E K ad K P (propter parallelas K I, O A) nempe vt F O, ſeu ei æqualis G N ad O P (propter parallelas E F, O K) ſed eandem proportionẽ habet D G ad G F, quàm E H ad H F; ergo G N ad O P eandem proportionem habet quàm D G ad G F, & compa-*
Lem. 3. *rando homologorum differentias D N ad N P erit vt D G ad G F, ſeu vt latus*
10. huius. *tranſuerſum ad rectum; & ideo C P eſt breuiſſima.*

Quia in ſequenti propoſitione 57; & in alijs adhibetur propoſitio non adhuc demonſtrata; nimirum poſita C P linea breuiſſima, pariterque I D ſemiſſi axis recti minoris etiam breuiſſima (ex 11. huius) quæ occurrant vltra axim in M deducuntur ea omnia, quæ in propoſitionibus 51. & 52. ex hypotheſi omni-

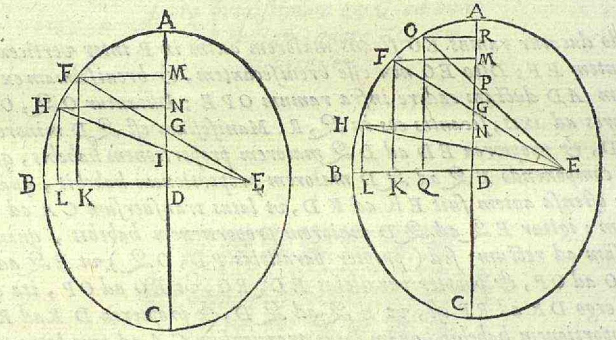
no diuer-

no diuerſa eliciebantur; nam in dictis propoſitionibus perpendicularis ex concurſu ad axim ducta efficiebat in ellipſi menſuram (iuxta definitionem 15. huius libri) minorem medietate axis tranſuerſi, ideſt perpendicularis ex concurſu cadebat inter centrum ſectionis, & proximiorem verticem: hic vero perpendicularis ex concurſu M per centrum D ellipſis tranſit.

Animaduertendum eſt hoc theorema demonſtratum fuiſſe ab Apollonio Propoſ. 35. huius libri, quod tamen paraphraſtes neſcio an iure in fine huius voluminis tranſpoſuit; Sed quia predicta propoſitio 35. omnino hic eſt neceſſaria, & pendet ex alijs præcedentibus, libuit potius aliam independentem demonſtrationem afferre quam ordinem propoſitionum ſatis alteratum denuo perturbare.

LEMMA VIII.

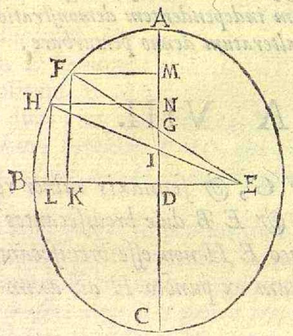
IN ellipſi A B C linea breuiſſima F G, & ſemiaxis minor rectus B D conueniant in E, erunt E F, & E B duæ breuiſecantes, ducatur quilibet ramus E H inter eos: Dico E H non eſſe breuiſecantem, & cadere infra lineam breuiſſimam ductam ex puncto H ad axim.

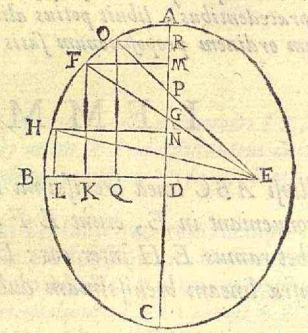


Ducantur ex F, & H rectæ F K, H L perpendiculares ad axim rectum B D eum ſecantes in K, & L, pariterque ducantur F M, H N perpendiculares ad axim tranſuerſum A D eum ſecantes in M, N. Et quia F G eſt breuiſſima, ergo D M ad M G eandem proportionem habet, quàm latus tranſuerſum C A ad eius 15. huius.
latus rectum; ſed propter parallelas D E, M F, eſt D M ad M G, vt E F ad F G, ſeu E K ad K D (propter parallelas G D, F K) quare E K ad K D eandem proportionem habet, quàm latus tranſuerſum ad rectum, & diuidendo E D ad D K eandem proportionem habebit, quàm differentia lateris tranuerſi, & recti ad latus rectum, eſt vero D L maior, quàm D K (cum H L parallela ipſi F K cadat inter punctum K, & B) igitur E D ad maiorem D L minorem proportionem habet, quàm ad D K, & propterea componendo E L ad L D minorem proportionem habebit, quàm latus tranſuerſum ad rectum: eſt vero E H ad H I,

H vt E L

vt E L ad L D (propter parallelas I D, H L) pariterque D N ad N I est, vt E H ad H I (porpter parallelas E D, N H) quare D N ad N I erit vt E L ad L D, & propterea D N ad N I minorem proportionem habebit, quàm latus transuer-
10. huius. *sum C A ad eius latus rectum, & ideo linea breuissima ex puncto H ad axim A D ducta cadet supra ramum H I E versus verticem A, atq; E H non erit breuisecans, quod erat primo loco ostendendum.*

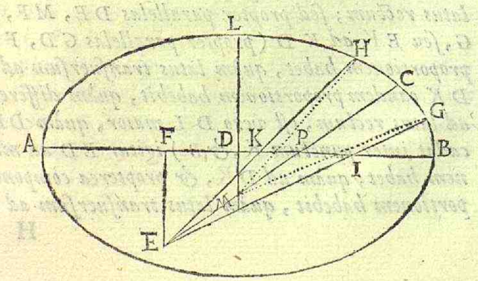




Secundo ducatur ramus E O secans maiorem axim in P inter verticem A, & breuisecantem E F; Dico E O non esse breuisecantem, & breuissimam ex puncto O ad axim A D ductam cadere infra ramum O P E; Ducantur O Q, O R perpendiculares ad axes, secantes eos in Q, R. Manifestum est Q D minorem esse, quàm K D, & propterea E D ad D Q maiorem proportionem habebit, quàm ad D K, & componendo E Q ad Q D maiorem proportionem habebit, quàm E K ad K D: ostensa autem fuit E K ad K D, vt latus transuersum C A ad eius latus rectum; igitur E Q ad Q D maiorem proportionem habebit, quàm latus transuersum ad rectum; sed (propter parallelas P D, O Q) vt E Q ad Q D ita est E O ad O P, & propter parallelas E D, R O, vt E O ad O P, ita est D R ad R P; ergo D R ad R P est, vt E Q ad Q D, & propterea D R ad R P maiorem proportionem habebit, quàm latus tranuersum C A ad eius latus rectum;
ex 10. huius. *igitur E O non erit breuisecans, & breuissima ex puncto O ad axim ducta cadit infra ramum E O versus D, quod erat ostendendum.*

Notæ in Propos. LVII.

ET dico, quod non reperiatur vllus alius ramus, &c. *Idest sit rursus linea breuissima C M, quæ producta concurrat cum perpendiculari E F in E, quæ secet axim in F vltra centrum D ad partes verticis A. Dico, quod præter ramum* g



mum E C nullus alius ramus breuisecans ex concursu E ad sectionem duci potest, qui cadat in eodem quadrante B L, quem breuisecans intersecat.

h Nam si producantur E H, E G, &c. *Ducantur quilibet rami E H, E G ad vtrasque partes breuisecantis E C intra quadrantem B L, qui secent D B in K, & I, & producatur per centrum D recta M D L perpendicularis ad axim B A, quæ secet sectionem in L, & ramum E C in M.*

i Et quia iam productæ sunt ex concursu M duæ breuisecantes, &c. *Quia C M breuissima ex hypothesi occurrit semiaxi minori recto L D breuissimæ pariter (ex 11. huius) in M, sequitur (non quidem ex 51. 52. huius, sed ex lemmate 8. præmisso) quod linea recta ex M ad H coniuncta cadat infra breuissimam ex puncto H ad axim B A ductam, & coniuncta recta M G cadit supra breuissimam ex puncto G ad axim ductam.*

k Sed E H, & E G efficiunt abscisas opposito modo, &c. *Quia ab eodem puncto H sectionis ducuntur tres rectæ lineæ H E, H M, & breuissima ex H ad axim B A ducta, quarum intermedia est H M, eo quod breuissima ex H ad axim A B cadit supra H M ad partes B, vt dictum est, & H E cadit* Lem. 8.
infra H M ad partes A; ergo H E cadit infra breuissimam ex H ad A B ductam, & propterea E H non erit breuisecans: Similiter breuissima ex G ad A B extensa cadit infra G M ad partes A, vt dictum est; at E G cadit Ibidem.
supra G M ad partes B; ergo E G cadit supra breuissimam ex G ad axim A B ductam, quare E G non est breuisecans.

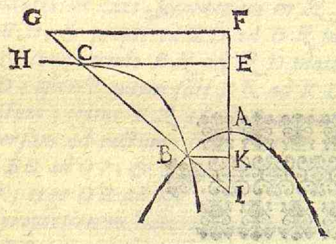
SECTIO NONA

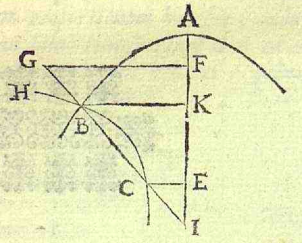
Continens Propos. LVIII. LIX. LX. LXI. LXII. & LXIII.

IAm ex puncto dato C extra, vel intra sectionem A B (quod in axi I A non sit) possumus rectam lineam ducere, cuius portio intercepta inter sectionem, & axim sit linea breuissima. a

PROPOSITIO LVIII.

Sit sectio parabole, & producamus perpendicularem C E super I E A, & ponamus E F æqualem dimidio erecti, & du-
4. lib. 2. camus G F parallelam ipsi C E, & per C ducamus hyperbolen b
H C B circa duas continentes illam G F, I F, quæ occurrat sectioni A B in B, & per B, C producatur linea occurrens continenti I A in I, & continenti G F in G: Dico, quod B I est linea breuissima.



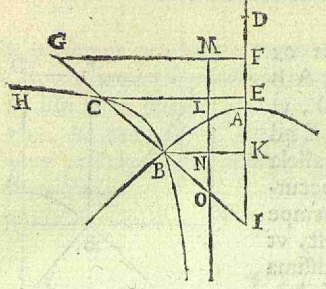


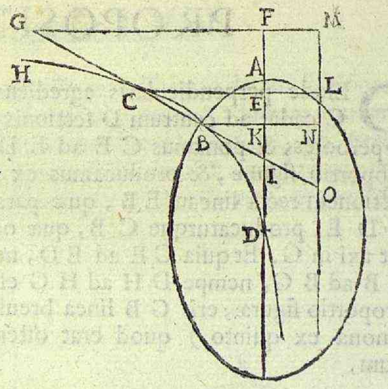
8. lib. 2. Producatur perpendicularis B K. Quoniam C I æqualis est B G (sexta c
ex secundo) erit E I æqualis K F, & E F, K I erunt æquales, atque supposita, est E F æqualis dimidio erecti; ergo K I ita est pariter; Quare B I est breuissima, (octaua ex quinto) & hoc erat probandum.

PROPOSITIO LIX. LXII. & LXIII.

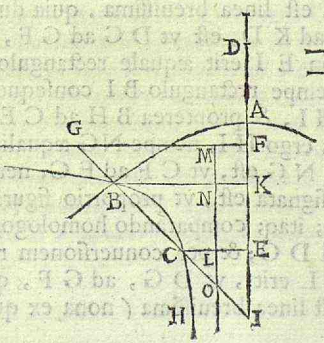
DEinde sit sectio hyperbole, aut ellipsis, cuius centrum D, & lineis, a
atque signis in eodem statu manentibus, ponamus D F ad F E, &

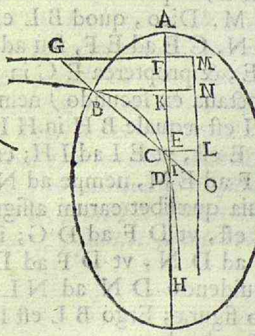
similiter





similiter C L ad L E, vt proportio figuræ, & producamus per L ipsam O M parallelam A I F, & per F ipsam G M parallelam C E, & fa-
ciamus sectionem H C B hyperbolen transeuntem per punctum C circa 4. lib. 2.
continentes G M, O M, quæ occurret sectioni A B (in ellipsi quidem vt 56. huius.
b demonstrauimus) in hyberbola vero eo quod O M parallela axi D A inclinato subtendit, si producatur, angulum subsequentem continentiæ angulum secabit A B, & corda, si producatur, occurret sectioni; Ergo O M ingreditur sectionem A B, & ampliatur sectio A B per extensionem
longè à duabus lineis O M, M G, & sectio B C prope illas ducitur (deci- 14. lib. 2.
mosexta, ex secundo) igitur duæ sectiones A B, C B sibi occurrunt, vt in B, & ducamus per B, C lineam occurrentem D F A in I, & G F in G;
c Et quia B O æqualis est ipsi C G (octaua ex secundo) erit O N æqualis ipsi M L, & O L ipsi N M; ergo O L, nempe N M, seu K F ad E I est, vt C L ad C E, nempe D F ad D E, ergo K F ad E I est, vt D F
d ad E D comparando homologorum summas in hyperbola, & eorundem Lem. 3.
differentias in ellipsi, & iterum comparando antecedentes ad differen- Lem. 1.
tias terminorum fiet D K ad K I, vt D F ad F E, quæ est vt proportio figuræ; igitur B I est linea breuissima (9. 10. ex quinto) & hoc erat probandum.

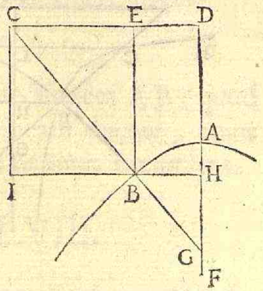




PROPOSITIO

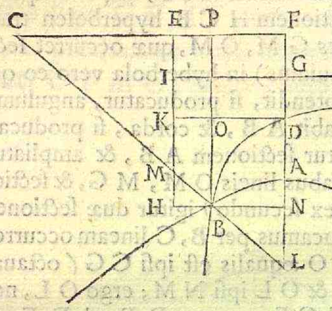
PROPOSITIO LX.

DEinde perpendicularis egrediens ex C cadat ad centrum D ſectionis A B hyperboles, & ponamus C E ad E D, vt proportio figuræ, & producamus ex E ad ſectionem rectã lineam E B, quæ parallela ſit D E, producaturque C B, quæ occurrat axi in G. Et quia C E ad E D, nempe C B ad B G, nempe D H ad H G eſt, vt proportio figuræ; erit G B linea breuiſſima (nona ex quinto) quod erat oſtendendum. a b



PROPOSITIO LXI.

SIt poſtea punctum C, & perpendicularis C F, & F remotius à vertice ſectionis, quàm ſit centrum, & ponamus C E ad E F, vt eſt proportio figuræ, & ſimiliter D G ad G F, & ex E producamus E H, quæ ſit parallela ipſi F A, & ex G, D. ad illam G I, D K, quæ ſint parallelæ ipſi C F; & duca-
4 lib. 2. mus ſectionem hyperbolen tranſeuntem per D, quam contineant I H, I G, quæ occurret ſectioni A B ſimiliter in B; Itaque per B, C producamus lineam, quæ occurrat axi F A in L, & ipſi E H in M. Dico, quod B L eſt linea breuiſſima. quia ducta perpendiculari H N, C E ad E F, ſeu ad K D, eſt vt D G ad G F, nempe vt K I ad I E, & propterea E C in E I erit æquale rectangulo D I ſubſequenti
12. lib. 2. (octaua ex ſecundo) nempe rectangulo B I conſequenti; Ergo C E in E I eſt æquale B H in H I, & propterea B H ad C E, nempe H M ad M E eſt, vt E I ad I H; ergo H I, nempe N G æqualis eſt E M, & ideo L F ad E M, nempe ad N G eſt, vt C F ad E C, nempe D F ad D G, quia quælibet earum aſſignata eſt, vt proportio figuræ; ergo L F ad N G eſt, vt D F ad D G; itaq; comparando homologorum differentias L D ad D N, vt D F ad D G; & per conuerſionem rationis, & poſtea diuidendo D N ad N L erit, vt D G, ad G F, quæ eſt vt proportio figuræ; Ergo B L eſt linea breuiſſima (nona ex quinto) & hoc erat oſtendendum.

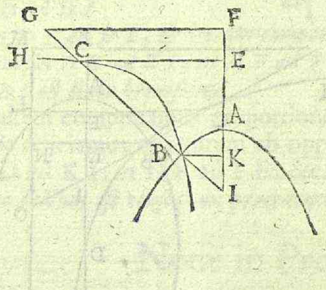


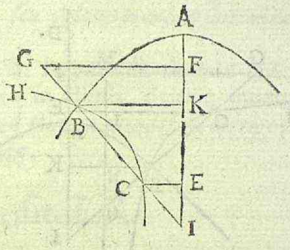
a b

Notæ

Notæ in Propoſit. LVIII.

a IAm poſſumus producere ex puncto aſſignato C extra datam ſectionem A B, aut intra (ſi punctum non fuerit ad axim I A) lineam diuidentem ex illo inter ſectionem, & axim lineam breuiſſimam, &c. *Sic legendum puto. Ex punto dato C extra, vel intra ſectionem A B, quod in axi non ſit, lineam rectam ducere, cuius portio incercepta inter ſectionem, & axim ſit linea breuiſſima.*





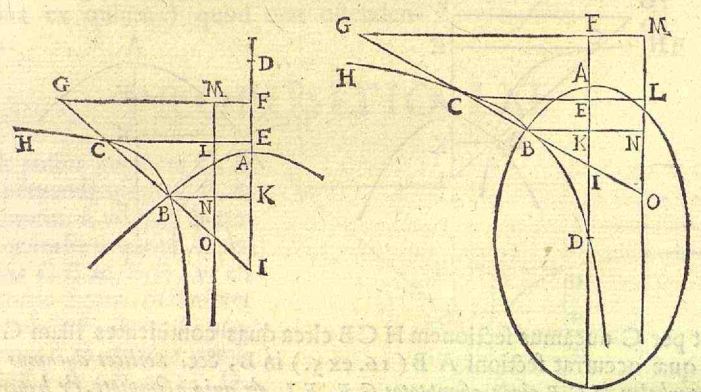
b Et per C ducamus ſectionem H C B circa duas continentes illam G F, I F, quæ occurrat ſectioni A B (16. ex 5.) in B, &c. *Scilicet ducamus per C hyperbolen H C B circa aſymptotos G F, F I, & quia aſymptoti, & hyperbo-* 4. lib. 2.
le H C B producta ad ſe ipſas ſemper proprius accedunt, atque parabole A B 14. 2.
producta ſemper magis ab axi A I remouetur; igitur hyperbole H C B, & para- Ex 8. 1
bola A B ſe mutuo ſecabunt; ſecent ſe ſe in puncto B. Animaduertendum eſt, quod in textu Arabico aſſumitur hæc concluſio, vt demonſtrata in propoſitione 16. huius quinti libri; & ſiquidem numeri huius citationis mendoſi non ſunt, hæc propoſitio ſexta decima deſideratur in hoc libro.

c Producatur perpendicularis B K. Quoniam C I, &c. *Ex puncto B ad axim ducatur perpendicularis B K, ſecans eum in K; quoniam quando punctum C ponitur intra parabolen, tunc B G æqualis eſt I C; quando vero cadit extra,* 8. lib. 2.
tunc C G eſt æqualis B I, & addita communi B C erit I C æqualis B G, cumq; duæ rectæ lineæ I G, I F conuenientes in I ſecentur à rectis lineis K B, E C, F G inter ſe parallelis, eo quod ſunt perpendiculares ad eundem axim; ergo I G, & I F ſecantur in ijſdem rationibus, & propterea E I æqualis erit K F; ſicuti I C æqualis erat B G, pariterque I K æqualis erit E F, ſicuti I B æqualis erat C G; poſita autem fuit E F æqualis ſemierecto; igitur K I ſemiſſi lateris recti pariter æqualis erit.

Notæ

Notæ in Proposit. LIX. LXII. & LXIII.

ET lineis, atque signis eodem statu manentibus, &c. *Ideſt punctum C extra, aut intra ſectionem ponatur, dummodo non ſit in axi, ducaturq; C E perpendicularis ad axim, ſecans eum in E, & vt latus tranſuerſum ad rectum, ita fiat D F ad F E, atque C L ad L E, & per L producatur O L M parallela A I, & per F ducatur F M G parallela C E, quæ ſecet O M in M, & per* a
4. lib. 2. *C deſcribatur hyperbole H C B circa aſymptotos G M O, quæ in ellipſi per eius centrum D tranſibit, & ideo eam ſecabit ſicuti oſtenſum eſt in 56. huius.*

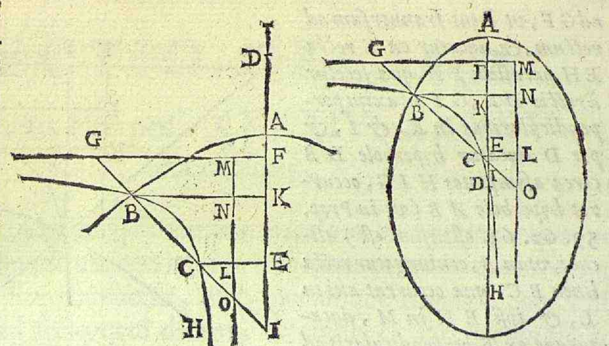


Eo quod O M parallela axi D A inclinato ſubtendit, &c. *Quoniam in hyperbola O M parallela axi ſecat vtrãque linearum continentium angulum,* b
11. lib. 2 *qui deinceps eſt ei, qui hyperbolen continet ſectioni occurret, & producta ſectionem A B ſecabit, & ideo O M cadit intra ſectionem A B, atque hyperbole A B producta ſemper magis, ac magis recedit tum ab M O parallela axi, cum ab M*
14. lib. 2. *G parallela tangenti verticali, & ſectio H C B, & aſymptoti O M G ad ſe ipſas ſemper propius accedunt, igitur ſectiones A B, B C conueniunt; ſecent ſe ſe in B, & ducamus per B, C lineam occurrentem axi in I, ipſi M O in O, & M G in G.*

Et quia B O æqualis eſt ipſi C G, &c. *Cum lineæ rectæ O M, O G ſe ſecantes in O, ſecentur à parallelis E C, K B, F G proportionaliter, erit O N æqualis M L, ſicuti O B æqualis erat C G, & O L, æqualis erit N M, ſicuti* c
8. lib. 2. *O C æqualis erat B G, cumque triangula O C L, & I C E ſint ſimilia propter parallelas O L, I E, erit O L ad E I, vt L C ad C E; eſt vero M N, ſeu F K æqualis ipſi L O, igitur F K ad E I eſt, vt L C ad E C, ſed ex constructione erat D F ad F E, vt C L ad L E, ſcilicet vt latus tranſuerſum ad*
Lem. 1. *rectum; ergo antecedentes ad ſummas terminorum in hyperbola, & ad*

eorumdem

eorundẽ differentias in ellipſi ſcilicet C L ad C E erit vt D F ad D E, & propterea K F ad E I erit, vt D F ad D E, & cõparando homologorum ſummas in hyperbola, & eorundem differentias in ellipſi, K D ad D I



Lem. 3.

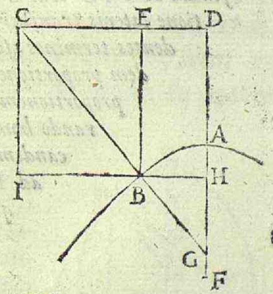
erit, vt D F ad D E, & iterum comparando antecedentes ad differentias terminorum fiet D K ad K I, vt D F ad F E, ſeu vt latus tranſuerſum ad rectum; Lem. 1.
igitur B I eſt linea breuiſſima. Ex 9. 10. huius.

d Si autem componamus proportionem in hyperbola deinde abſcindamus, & reijciamus oppoſitum ab oppoſito in ellipſi, deinde inuertamus fiet K D ad K I, vt D F ad F E, &c. *Sed textum mendoſum corrigi debere, vt ſupra factum eſt conſtat ex præcedenti nota.*

Notæ in Proposit. LX.

a DEinde ſit perpendicularis ex C, &c. *Si ex puncto C extra hyperbolen poſito perpendicularis ad axim ducta ad centrum eius D pertingat, duci debet pariter ex puncto C recta linea ad ſectionem, cuius portio inter axim D F, & ſectionem A B ſit linea breuiſſima; fiat C E ad E D, vt latus tranſuerſum ad rectum, & ex E ducatur E B parallela axi, ſecans hyperbolen in B, & ex B ducatur B H perpendicularis ad axim, ſecans eum in H.*

b Et quia C E ad E D, nempe C B ad B G, &c. *Quia propter parallelas B E, F D eſt C E ad E D, vt C B ad B G, & propter parallelas D C, H B, eſt D H ad H G, vt C B ad B G, quare D H ad H G erit, vt C E ad E D: poſita autem fuit C E ad E D, vt latus tranſuerſum ad rectum; igitur D H ex centro hyperboles ad H G eandem proportionem habet, quàm latus tranſuerſum ad rectum, & propterea G B erit linea breuiſſima.*



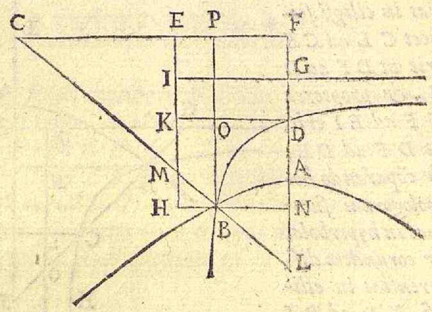
9. huius.

Notæ in Proposit. LXI.

a SIt poſtea punctum C, & perpendicularis C F, &c. *Si à puncto C extra hyperbolen A B poſito, C F perpendicularis ad axim efficiat F A ſegmentũ tranſuerſi axis maius ſemiſſe eius D A, & ponantur C E ad E F, atque D G*

ad G F,

ad G F, vt latus tranuersum ad rectum, & ducatur ex E recta E H parallela F A, quæ secetur à rectis D K, G I ad axim perpendicularibus in K, & I, &
4. lib. 2. *per D ducatur hyperbole D B circa asymptotos H I G, occurret hyperbole A B (vt in Prop. 59. 62. 63. ostensum est) alicubi, vt in B, coniungatur recta linea B C, quæ occurrat axi in L, & ipsi E H in M, ducaturque ex B perpendicularis ad axim eum secans in N, & rectam E M in H. Dico, quod B L est linea breuissima.*



C E ad E F, nempe K D est, vt D G ad G F, &c. *Quoniam ex constructione C E ad E F, seu ad ei æqualem K D, in parallelogrammo D E, est vt D G ad G F, scilicet vt latus transuersum ad rectum, estque K I ad I E, vt D G ad G F propter parallelas D K, G I, F E; ergo vt prima C E ad secundam D K, ita est tertia K I ad quartam I E, & propterea rectangulum C E I sub extremis contentum æquale est rectangulo D K I sub intermedijs compræhenso;* b
12. lib. 2. *est vero rectangulum B I æquale rectangulo D I cum compræhendantur ab hyperbole D B, & asymptotis H I G; ergo rectangulum C E I æquale est rectangulo B H I; & propterea B H ad C E, nempe H M ad M E (propter similitudinem triangulorum B H M, C E M) eandem proportionem habebit, quàm E I ad I H, & componendo eadem H E ad H I, atque ad E M eandem proportionem habebit; & ideo H I seu ei æqualis N G æqualis erit E M, quare eadem L F ad N G, atque ad E M eandem proportionem habebit: sed propter similitudinem triangulorum L C F, M C E est F C ad E C, vt F L ad M E, seu ad N G, & erat C E ad E F, necnon D G ad G F in eadem propor-*
Lem. 1. *tione lateris transuersi ad rectum, & summæ terminorum ad antecedentes terminos, scilicet F C ad E C, necnon F D ad D G eandem proportionem habent; quare L F ad N G eandem proportionem habet, quàm F D ad D G, & compa-*
Lem. 3. *rando homologorum differentias L D ad D N eandem proportionem habebit, quàm F D ad D G, & comparando conse-*
Lem. 1. *quentes ad differentias terminorum D N ad L N erit, vt D G ad F G, scilicet vt latus transuersum ad rectum;*
9. huius. *quapropter B L est linea breuissima.*

SECTIO DECIMA

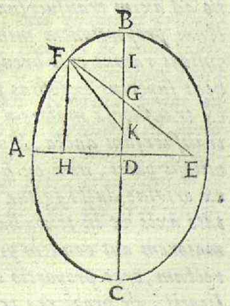
Continens Propos. XXXXIV. XXXXV. Apollonij.

a SI ex axe recto ellipsis sumatur mensura ab origine, quæ ad semiaxim rectum non habeat minorem proportionem, quàm habet figura suæ transuersæ, tunc quicumque ramus secans, ab illa origine ad sectionem ductus, abscindit ex axe transuerso ad verticem sectionis lineam minorem ea, quàm abscindit linea breuissima egrediens ab eius termino in sectione posito ad transuersum axim; si vero fuerit proportio ad semirectum minor, tunc ramorum secantium vnus est breuisecans; reliqui vero, qui sequuntur extremum transuersæ habent proprietates superius expositas, & qui sequuntur extremitatem recti, secant ex transuersa lineam maiorem ea, quàm abscindit breuissima egrediens ab eius termino.

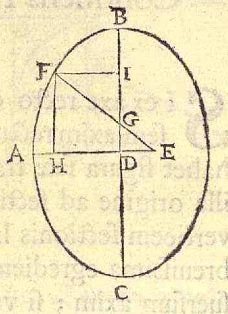
PROPOSITIO XXXXIV.

b Sit A D dimidium axis recti, & minoris sectionis ellipticæ A B C, & mensura A E, quæ sit maior, quàm A D, & proportio illius ad istam non sit minor proportione figuræ sectionis; Dico, quod linea breuissima egrediens ab extremitate cuiuscumque rami secantis educti ex E ad sectionem A B C, secat ex tranuersa B C cum vertice B, vel C lineam maiorem ea, quàm abscindit ille ramus.

c Ponatur ramus E F, & ducamus ex F ad vtrumque axim duas perpendiculares F H, F I. Et quia proportio E A ad A D non est minor proportione figuræ, sed minor est, quàm E H ad H D, nempe E F ad F G, seu D I ad I G, erit proportio figuræ minor, quàm D I ad I G, & ponamus D I ad I K, vt est proportio figuræ, & iungamus F K; erit ergo F K linea breuissima (10. ex 5.) & iam secat K B maiorem, quàm B G, & G F non erit breuissima; & hoc erat propositum. 10. huius.

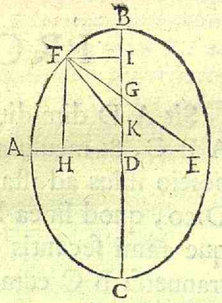


PROPOSITIO XXXXV.



SI autem fuerit ratio E A ad A D minor, quàm proportio figuræ, ponamus E H ad H D in proportione figuræ, & producamus perpendicularem H F, & iungamus F E, & ducamus perpendicularem F I. Et quoniam E H ad H D, nempe D I ad I G est, vt proportio figuræ, erit F G linea breuissima *(10. ex 5.)* Et quoniam iam educti sunt ex E duo breuisecantes F E, & E A (11. ex 5.) tunc à terminis ramorum egredientium ex E, qui terminantur ad sectionem B F, linea breuissima egrediens erit remotior ab ipso B, & qui terminatur ad sectionem A F, breuissima egrediens ab extremitate illius erit proximior, ipsi B (51. 52. ex 5.) & hoc erat ostendendum. a b

Notæ in Propos. XXXXIV.



P*Vto, numeros 53. & 54. Propositionum huius sectionis mendosos esse, nam Propositio 53. posita fuit in præmissa sectione, & Propositio 54. inferius apposita reperitur; Censeo igitur, esse Propositiones XXXXIV. & XXXXV.*

a Si ex axe recto ellipsis sumatur mensura, &c. *Hoc est si ex axe minori, recto ellipsis sumatur mensura, quæ habeat non minorem proportionem ad semiaxim rectum, quàm habet axis transuersus ad suum latus rectum, quilibet ramus secans, ab origine ad sectionem ductus, abscindit ex axe transuerso ad verticem sectionis minorem lineam, quàm secat linea breuissima ab eius termino ad axim transuersum ducta. Si vero mensura ad minorem semiaxim rectum proportionem minorem habuerit, quàm latus transuersum ad rectum, tunc vnicus ramus erit breuisecans; reliqui vero sequentes terminum transuersi, habent superius expositas proprietates, & sequentes extremitates axis recti, secant ex transuersa maiorem lineam, quàm secet breuissima ab eius termino ad axim transuersum ducta. Quod autem mensura necessario sumi debeat in axe minori ellipsis patet, nàm ex hypothesi rami sunt secantes non quidem ex concursu, sed ex origine ducti igitur origo cadit infra centrum, & mensura maior erit medietate axis vt in textu habetur; debet autem habere mensura ad semiaxim rectum maiorem aut eandem proportionem, quàm axis transuersus habet ad eius latus rectum, ergo proportio axis transuersi ad suum latus rectum erit maioris inæqualitatis, & propterea transuersus axis erit maior quàm axis rectus.*

b Sit A D dimidium axis recti sectionis ellipticæ A B C, &c. *Sit A D dimidium axis minoris, & recti ellipsis A B C, sitque mensura A E maior, quàm A D, & E A ad A D habeat maiorem, aut eandem proportionem, quàm habet latus transuersum B C ad eius rectum latus.*

c Ponatur ramus E F, & producamus ex F, &c. *Ducatur quilibet ramus secans E F, & ex F ad vtrumque axim perpendiculares F H, F I, quæ secent eos in H, & I. Et quia D H minor est, quàm D A, habebit eadem E D ad D H maiorem proportionem, quàm ad D A, & componendo E H ad H D, maiorem proportionem habebit, quàm E A ad A D; est vero E F ad F G, vt E H ad H D (propter parallelas D G, H F) nec non D I ad I G est, vt E F ad F G (propter parallelas E D, I F) ergo D I ad I G maiorem proportionem habet, quàm E A ad A D: habebat autem E A ad A D maiorem, aut eandem proportionem, quàm latus transuersum B C ad eius rectum latus; igitur D I ad I G maiorem proportionem habebit, quàm latus transuersum B C ad eius rectum latus: fiat iam D I ad I K, vt latus transuersum B C ad eius latus rectum, iungaturque F K, erit I K maior, quàm I G, & F K linea breuissima, quæ secat segmentum axis K B maius, quàm B G, vnde E F non erit breuiscans.* 10. huius.

Notæ in Propos. XLV.

a SI autem fuerit ratio E A ad A D minor, quàm proportio figuræ, &c. *Habeat E A ad A D minorē proportionem, quàm latus transuersum B C ad eius rectum latus, & fiat E H ad H D, vt latus transuersum ad rectum; habebit E H ad H D maiorem proportionem, quàm E A ad A D, & diuidendo eadem E D ad D H habebit maiorem proportionem, quàm ad D A; & propterea D H minor erit, quàm D A; vnde ex puncto H si eleuetur H F perpendicularis ad D A intra sectionem cadet, & secabit eam alicubi, vt in F: ducatur postea ex F recta F E, quæ secet axim in G, & F I perpendicularis ad axim B C eum secans in I. Et quoniam, propter parallelas G D, F H, est E F ad F G, vt E H ad H D, pariterque, propter parallelas E D, I F, est D I ad I G, vt E F ad F G, quare D I ad I G eandem proportionem habet, quàm E H ad H D, seu quàm latus transuersum B C ad eius latus rectum; & propterea F G est breuissima.* 10. huius.

b Et quoniam iam eductæ sunt ex E duæ breuisecantes, &c. *Textus Arabicus vsque ad finem propositionis est omnino corruptus, cum supponat propositionem non demonstratam, vt in propositione 56. notaui; Itaque, sic eum restitui posse censeo. Quoniam ex consursu E breuissimæ F G, & semiaxis recti minoris D A rami educti ad sectionem F A secant axis segmenta vsque ad verticem B maiora, quàm abscindant breuissimæ ab eorum terminis ad axim ductæ, scilicet breuissimæ cadunt supra ramos (ex Lemmate 8. præmisso) similiter rami ex concursu E ad sectionem B F ducti cadunt supra breuissimas ab eorum terminis ad axim extensas (ex eodem Lemmate 8.) & hoc erat ostendendum.*

SECTIO VNDECIMA

Continens Propoſ. LXVIII. LXIX. LXX. & LXXI. Apollonij.

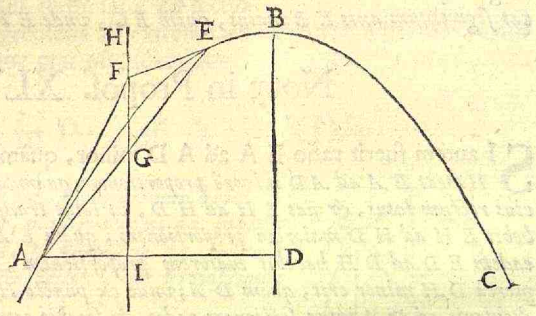
PROPOSITIO LXVIII. LXIX.

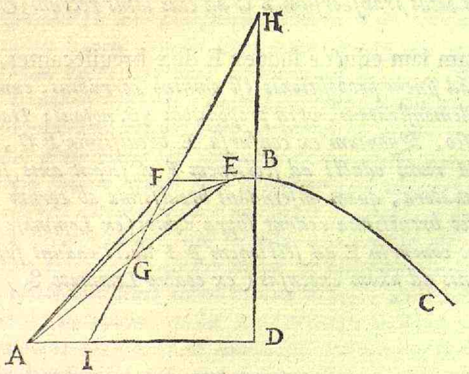
SI occurrant duæ tangentes alicui ſectioni A B C, vt ſunt A F, E F, vtique quod abſcinditur ex tangente proximiori vertici ſectionis, qui eſt B minus eſt ſegmento abſciſſo ex alia, nempe E F minor eſt, quàm A F. a b

Iuncta enim A E, & in parabola ex F producta linea F I parallela axi B D erit illa diameter, bifariam ſecans E A in G (34. ex 2.) Similiter ex centro H producamus H F G, quæ eſt quoque diameter (34. ex 2.) bifariam ſecans E A in G, & ducamus A D in parabola, & hyperbola perpendicularem ſuper axim D B. Ergo angulus A I G in parabola eſt rectus, & in hyperbola obtuſus; ergo F G A erit obtuſus in illis omnibus; quare maior eſt, quàm angulus F G E, & A G æqualis eſt ipſi G E, & F G communis; igitur E F minor eſt, quàm F A.

30. lib. 2.

Ibidem.

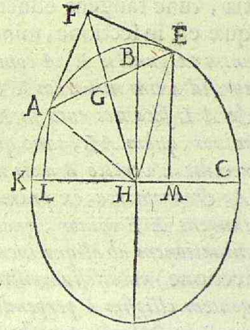




PROP.

PROPOSITIO LXX.

c POſtea in ellipſi iungamus E H, A H, & C ſit extremitas axis recti; erit A H minor quàm E H (11. ex 5.) & angulus E G H, nempe A G F maior erit, quàm A G H, ſeu E G F, ergo E F minor eſt, quàm F A, & hoc erat propoſitum.



PROPOSITIO LXXI.

d PAtet ex hoc, quod ſi producantur ex duobus punctis contactus in ellipſi perpendiculares E M, A L, & fuerit E M minor, exempli gratia, tunc tangens educta ab eius extremitate minor quoque eſt, quemadmodum demonſtrauimus, & hoc erat oſtendendum.

Notæ in Propoſit. LXVIII. LXIX. LXX. & LXXI.

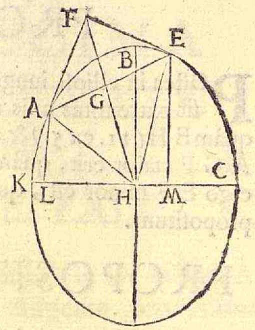
a SI occurrant duæ tangentes alicui ſectioni A B C, aut circulo, vt ſunt, &c. *Ideſt ſi coniſectionem A B C contingant duæ rectæ A F, E F in punctis A, & E concurrentes in F, erit portio tangentis inter occurſum, & contactum vertici B proximiorem intercepta, minor ea, quæ inter occurſum, & remotiorem à vertice contactum continetur; oportet autem in ellipſi B verticem eſſe axis maioris. Expungo verba,* aut circulo, *tanquam erronea, & incaute ab aliquo textui ſuperaddita. Circulum enim tangentes ab eodem puncto ductæ inæquales eſſe nequeunt.*

b Et ducamus A D in parabola, & hyperbola, &c. *Et ducamus A D in parabola, & hyperbola perpendicularem ſuper axim B D, ſecantem eum in D, atque G F H in I; cumque in parabola diameter F G I ſit parallela axi B D, erit angulus A I G rectus æqualis interno, & oppoſito ad eaſdem partes, angulo D; in hyperbola vero cum triangulum H D I ſit rectangulum in D, erit externus A I G obtuſus, eſtque in triangulo G I A angulus externus A G F maior interno, & oppoſito A I G, recto in parabola, & obtuſo in hyperbola; erit quoque angulus F G A obtuſus in parabola, & hyperbola.*

c Et angulus E G H, &c. *Quia F H eſt diameter ſecans bifariam E A in G; ergo triangula E G H, & A G H habent duo latera æqualia E G, A G, & G H, commune; eſtque H E, vertici B axis maioris ellipſis propinquior, maior remotiore H A; ergo angulus E G H maior erit angulo A G H; eſtque angulus A G F æqualis E G H maiori, & E G F æqualis minori A G H; igitur angulus A G F maior eſt angulo E G F, & latera circa inæquales angulos ſunt æqualia ſingula ſingulis, ergo tangens A F maior eſt, quàm E F.* 30. ex 2. Com. 11. huius.

Patet

Patet ex hoc, quod si producantur ex duobus punctis contactus in ellipsi perpendiculares E M, A L; & fuerit E M minor, exempli gratia, tunc tangens educta ab eius extremitate, quæ est in sectione, minor quoque est, &c. *Si enim ex punctis E, A contactuum in ellipsi ducantur ad axim minorem K C perpendiculares E M, & A L secantes eum in M, & L, fueritque E M minor, quàm A L, tunc quidem punctum E magis recedit à vertice B axis maioris, quàm punctum A; & propterea, ex præmissa 70. huius libri, erit tangens E F minor, quàm A F. Expungo determinationem ab aliquo incaute additam* (quæ est in sectione) *manifestum enim est duci non posse contingentem ellipsim à perpendicularis termino M in axi minori posito, sed à termino E in sectionis peripheria constituto.* d



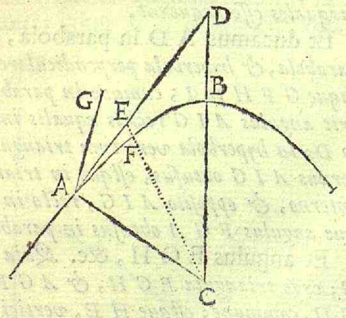
SECTIO DVODECIMA

Continens XXIX. XXX. XXXI. Propos. Appollonij.

QVælibet linea recta A E D tangens sectionem aliquam A F B in A extremitate lineæ breuissimæ A C est perpeudicularis super illam, nēpe D A C est angulus rectus. Et si fuerit perpendicularis super illam vtique tanget sectionem.

Alioquin producatur perpendicularis C E super A D, erit A C maior, quàm E C, ergo maior est, quàm F C; sed est minor, cũ sit minor, quàm C F, quod est absurdum. Igitur angulus D A C, est rectus, quod erat ostendendum. a

Si verò fuerit D A C rectus, erit A D tangens, alioquin sit tangens A G; ergo C A G erit rectus, sed erat C A D rectus, quod est absurdum; ergo A D est tangens, & hoc erat probandum. b



Notæ in Proposit. XXIX. XXX. & XXXI.

a ALioquin producatur perpendicularis C E, &c. *Existente C A linea breuissima, & A D tangente, si C A non est perpendicularis ad tangentem ducatur ex origine C recta C E perpendicularis ad tangentem A D, secans eam in E, & sectionem in F, erit in triangulo A C E angulus C A E acutus, & minor angulo recto E, & propterea C A subtendens maiorem angulum rectum, maior erit quàm C E, quæ acutum subtendit: cumque punctum E tangentis cadat extra sectionem, erit C F minor, quàm C E; ideoque C A multo maior est, quàm C F, quapropter C A non erit breuissima, quod est contra hypothesin.*

b Si vero fuerit D A C rectus, &c. *Quia C A supponitur breuissima, & angulus D A C rectus, erit A D tangens; nam si hoc verum non est, ducatur ex puncto A recta linea A G, contingens sectionem in A; secabit vtique tangens A G ipsam D A, & erit angulus C A G rectus nimirum contentus à breuissima C A, & tangente A G, ex proxime demonstrata propositione; ergo duo anguli recti C A D, & C A G æquales sunt inter se, pars, & totum, quod est absurdum.* 33. 34. lib. 2.

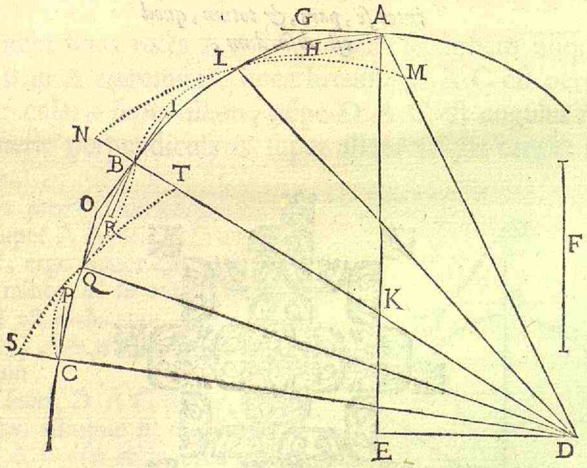
SECTIO DECIMATERTIA

Continens Propos. LXIV. LXV. LXVI. LXVII. & LXXII. Apollonij.

PROPOSITIO LXIV. LXV.

SI ramorum secantium D C, D B, D A eductorum ex concursu D ad sectionem C A non fuerint duo breuisecantes, vtique minimus eorum est, ramus terminatus D A, qui ambit cum axe A E angulum acutum; nempe D A E, & reliquorum propinquior illi minor est remotiore, scilicet D B maior, est quàm D A, & D C quàm D B.

Si vero inter illos fuerint duo breuisecantes tunc vicinior vertici sectionis est maximus ramorum, & maiori proximior, est maior, & minori propinquior est minor.



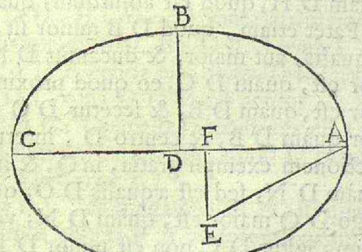
Producamus perpendicularem D E super axim E A, & reperiatur Trutina F. Et primo loco nullus ramus sit breuisecans, iam si D B, non est maior, quàm D A, sit æqualis illi, & ducamus duas perpendiculares a
A G,

A G, A H super E A, & D A. Et quia A G tangit sectionem, cadet
A H intra sectionem, & ducamus rectam B I tangentem sectionem in 33. 34.
b B. Quoniam ex D non educitur ad sectionem A C vllus breuisecans, lib. 1.
erit E A non maior dimidio erecti (49. 50. ex 5.) aut erit D E maior
quàm F (52. ex 5.) Iis positis vtique linea breuissima ex B educta abscindit cum A ex axi lineam maiorem, quàm A K (49. 50. 51. 52. ex 5.)
verùm linea breuissima continet cum tangente B I angulum rectum (29.
c 30. ex 5.) igitur D B I est acutus, quare si centro D, interuallo D B circulus describatur, tunc B I cadit intra circulum, & A H cadit extra id
d ipsum, quia est perpendicularis ad D A; igitur circulus secat conisectionem; secet eam in L, & iungamus L D, ducamusque L G sectionem 33. 34.
e tangentem. Patet (vt dictũ est) quod D L G sit acutus; ergo L G cadit lib. 1.
intra circulum B L A, sed cadit extra, quod est absurdum; ergo B D non est æqualis ipsi A D. Neque minor illo esse potest; quia si secetur D M maior, quàm D B, & minor, quàm D A, & centro D, interuallo D M, circulus M L N describatur, tunc D N, nempe D M maior est,
f quàm D B, & propterea circulus N L M secat conisectionem. Subinde patebit (quemadmodũ demostrauimus) quod D B non sit minor, quàm D A; igitur D B maior est, quàm D A.

g Postea dico, quod D C maior est, quàm D B; quia demonstrauimus, angulũ D B O esse obtusum, & patet, quod D C P est acutus, & procedendo trito iam itinere demonstrabimus, quod Q O necesse est, vt cadat intra circulum C Q B. Et quod si fuerit D C minor, quàm D B, aut æqualis, necesse est, vt Q O cadat intra circulum C Q B; sed cecidit extra, quod est absurdum; igitur D C maior est, quàm D B, & D B maior, quàm D A, quod erat ostendendum.

PROPOSITIO LXVI.

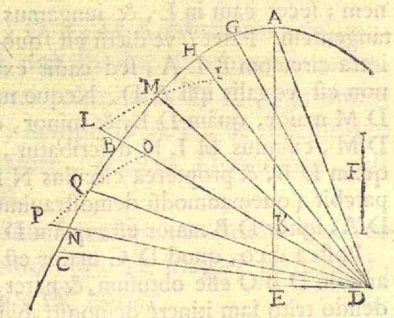
IN sectione elliptica A B C, cuius axis maior A C eius centrum D, & D B dimidium recti, duci nequeat ex E ad quadrantem A B breuisecans, & producatur perpendicularis E F; Dico punctum F cadere inter D A.



a Quia si caderet inter C, D duci posset ex E ad sectionem A B
b aliqua breuisecans (56. ex 5.) quod est contra suppositionem. Deinde patet, quemadmodum demonstrauimus in parabola, & hyperbola, quod pr. 64. 65.
E A minima sit linearum, & ramorum ad sectionem B A cadentium, & huius.
propinquior illi, minor sit remotiore, & hoc erat propositum.

PROPOSITIO LXVII.

POstea repetamus figuras, paraboles, & hyperboles, & a
quoquot sunt illius signa, & supponamus quod ipsius D B
portio B K, sit tantummodo linea breuissima; Dico, quod D A
quoque minima est linearum egredientium ex D ad sectionem
A C, & illi propinquiores sunt minores remotioribus. b

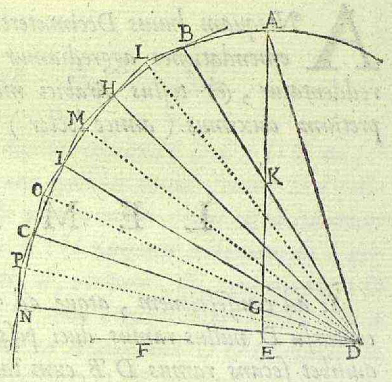


Quia educitur ex D vnus tantum c
breuisecans erit mensura E A maior
dimidio erecti, & D E æqualis F
Trutinæ (51. 52. ex 5.) vnde sequi-
tur, quod lineæ breuissimæ eductæ
ab extremitatibus reliquorum ramo-
rum abscindunt cum A ab axi line-
as maiores, quàm secant illi rami.
Ducamus prius ad sectionem B A
ramum D G, inde constat D G ma-
iorem esse, quàm D A (64. 65. ex d
5.) Dico iam, quod D B maior est
illa, alioquin esset æqualis, vel mi-
nor illa, & producamus D H ad sectionem B G; ergo D H maior est,
quàm D G, quia remotior est ab D A (64. 65. ex 5.) quare maior est,
quàm D B, & ex illo secetur D I maior, quàm D B, & minor, quàm
D H, & centro D interuallo D I descriptus circulus secabit sectionem
B G, secet eam in M, & iungamus D M; ergo D M, nempe D I, quæ e
concessa fuit maior, quàm D B est etiam maior, quàm D H, propterea
quod est remotior ab D A, quàm D H (64. ex 5.) igitur D I maior est
quàm D H, quod est absurdum; quare D B maior est, quàm D H.

Patet etiam, quod D B minor sit, quàm D C, alioquin esset vel illi f
æqualis, aut maior, & ducamus D N ad sectionem C B; ergo D N mi-
nor est, quàm D C, eò quod proximior est D A (64. ex 5.) quare mi-
nor est, quàm D B, & secetur D O ex D B maior, quàm D N, & mi-
nor quàm D B, & centro D, interuallo D O circulus descriptus secabit g
sectionem exempli gratia, in Q, & iungamus D Q, igitur D Q minor est
quàm D N, sed est æqualis D O, quæ supposita fuit maior, quàm D N,
ergo D Q maior est, quàm D N; verum est minor illo, quod est absur-
dum; igitur D C non est minor D B, neque æqualis; quare maior illa
est. Atque sic patet, quod D B minor sit omnibus lineis egredientibus
ex D ad sectionem B C, & illi proximiores ex illa parte, minores sunt
remotioribus. Quapropter manifestum est, quod D A sit minimus omni-
um ramorum egredientium ex D ad sectionem A B C, & reliqui proxi-
miores illi, minores sunt remotioribus, quod erat ostendendum.

PROPOS.

PROPOSITIO LXXII.



SI eductæ fuerint ex D duæ
breuisecantes D C, D B,
quorum segmenta G C, B K
sint breuissima, & D B propin-
quior sit vertici sectionis; Di-
co, quod D B maximus est ra-
a morum egredientium ad sectio-
nem A B C, & minimus eorũ
D C, & ramorum egredientiũ
ad sectionem A C, qui D B
propinquiores maiores sunt
remotioribus, & propinquiores
D C (ex ramis egredientibus ad sectionem in ea parte) mino-
res sunt remotioribus.

Sit F Trutina, & quia iam ducti sunt ex D duo breuisecantes, ideo
E A excedit dimidium erecti, & D E minor est, quàm F (51. 52. ex 5.)
his positis, vtique lineæ breuissimæ egredientes ab extremitatibus ramo-
rum qui sunt in sectione B C abscindunt ab axi E A minores lineas, quàm
abscindunt rami (51. 52. ex 5.) & qui ducuntur ab extremitatibus egre-
dientium ad reliquas sectiones abscindunt lineas maiores. Educamus ita-
que ramos D H, D I ad sectionem B C, & ducamus B L, L H M, & I
M tangentes sectionem in punctis B, H, I; quia B K est breuissima erit 29. 30.
L B D angulus rectus, & quia breuissima egrediens ex H abscindit cum huius.
A ab axi E A lineam minorem, quàm secat D H erit L H D obtusus, & Ex 29. 30.
iungamus D L; igitur duo quadrata D H, H L minora sunt, quàm qua- huius.
dratum D L, quod est æquale duobus quadratis L B, D B; verum L B
minor est, quàm H L (68. ex 5.) ergo D B maior est, quàm D H. atq;
b sic patet, quod D H maior sit, quàm D I, quia D H M est acutus, & D Ibidem.
I M obtusus: & D I maior sit, quàm D C. Quare B D maximus est ra-
c morum egredientium ad B C, & iam demonstratum est, quod sit maxi-
mus ramorum egredientium ad B A (64. 65. ex 5.)

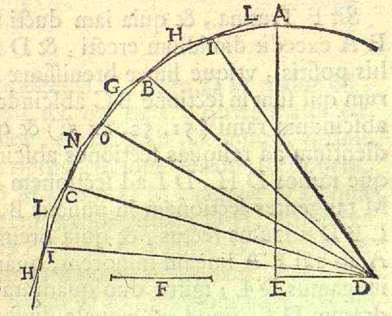
Ponamus postea N extra sectionem B C, & iungamus D N, itaque
linea breuissima egrediens ex N abscindit ab axi E A maiorem lineam, 51. 52.
d quàm secat D N; ergo tangens in N continet cum D N angulum acu- huius.
tum: postea ostendetur, quemadmodum hic dictum est, quod D C mi- Ex 29. 30.
nimus sit reliquorum ramorum egredientium ad reliquas sectiones, & sit huius.
minimus ramorum egredientium ad A C, quare manifestum est, quod
D B sit maximus ramorum, & D C minimus, & quod maioribus pro-
pinquiores sunt maiores remotioribus, & minoribus propinquiores, mi-
nores sunt remotioribus, quod erat ostendendum.

MONITVM.

ANtequam huius Decimætertiæ Sectionis explicationes, atque emendationes aggrediamur; vt Notæ breuiores, clarioresque reddentatur, & textus Arabici menda facilius corrigi possent, operæ pretium duximus (amice lector) Lemmata sequentia præmittere.

LEMMA IX.

Si ad conisectionem, atque ad vnum quadrantem ellipsis A B C à concursu D nullus ramus duci possit, qui sit breuisecans; Dico, quod quilibet secans ramus D B cum tangente H B G per eius terminum B ducta efficit angulum D B H ad partes verticis A acutum, & D B G, qui deinceps est, obtusum.



Quoniam nullus ramus ex concursu D ad sectionem A C ductus est breuisecans, erit (ex conuersa propositionis 49. 50. 51. 52. huius) mensura A E aut non maior semisse lateris recti, aut perpendicularis D E maior Trutina, quæ sit F, & ideo quilibet ramus secans D B cadit supra breuissimam ex puncto B ad axim ductam, est verò breuissima ex puncto B ad axim ducta
29. 30. huius. *perpendicularis ad G B H tangentem sectionem in B; ergo angulus D B H, verticem A respiciens est acutus, & qui deinceps est D B G erit obtusus.*

LEMMA X.

Iisdem positis, si à concursu D vnicus tantum ramus D B breuisecans ad sectionem A B duci potest; Dico, quod quilibet alius ramus secans D I supra, vel infra breuisecantem D B positus efficit cum recta L I H tangente sectionem in I angulum D I L, verticem respicientem, acutum, & D I H, qui deinceps est, obtusum.

Nam ex conuersa propositione 51. & 52. huius perpendicularis D E æqualis erit Trutinæ F, & ideo quilibet ramus D I positus supra, vel infra breuisecantē (qui

est D B) cadit supra breuissimam ex puncto I ad axim ductam, quæ perpendicularis est ad tangentem L I H, & propterea angulus D I L, verticem A respiciens erit acutus, & consequens angulus D I H obtusus. 51. 52. huius. 29. 30. huius.

LEMMA XI.

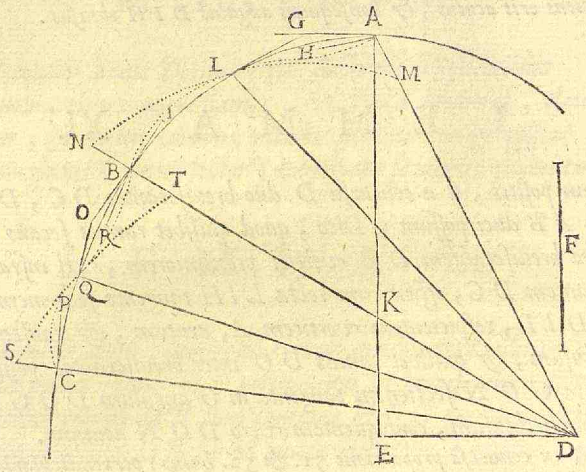
Iisdem positis, si à concursu D duo breuisecantes D C, D B ad sectionem A B duci possunt; Dico, quod quilibet ramus secans D I positus supra breuisecantem D B vertici proximiorem, vel infra infimum breuisecantem D C, efficit cum recta L I H tangente sectionem in I angulum D I L, respicientem verticem A, acutum, & consequentem D I H obtusum, & quilibet ramus D O inter breuisecantes positus efficit cum recta G O N sectionem tangente in O angulum D O G verticem respicientem obtusum, consequentem vero D O N acutum.

Quia (ex conuersa propositione 51. & 52. huius) perpendicularis D E minor esse debet Trutina F, & propterea quilibet ramus D I supra breuisecantem 51. 52. huius. *D B, vel infra breuisecātem D C cadit supra breuissimam ex puncto I ad axim ductam, cum qua contingens L I angulum rectum constituit; ergo angulus D I* 29. 30. huius. *L verticem respiciens, est acutus, & consequens D I H obtusus; Similiter quilibet ramus D O inter breuisecantes positus cadit infra breuissimam ex puncto O ad axim ductam, & cum illa sectionem contingens G O efficit angulos rectos,* Ibidem. *igitur angulus D O G verticem respiciens, est obtusus, & consequens D O N acutus.*

Notæ in Propos. LXIV. & LXV.

ANtea Apollonius docuit qui nam rami ab origine ad conisectionem ducti essent minimi, & quo ordine reliqui rami se se excederent, modò agit de ramis axim secantibus à concursu ductis, & quærit qui minimus, & qui maximus sit, & quo ordine disponantur.

a Producamus perpendicularem D E super axim, &c. *Si nullus ramus breuisecans à concursu D ad sectionem A C duci potest; Dico, quod ramus terminatus D A est minimus omnium ramorum secantium D B, D C, & propinquiores vertici A minores sunt remotioribus; ducatur D E perpendicularis ad axim eum secans in E, & reperiatur Trutina F. Et siquidem D A non est minor quolibet alio ramo secante D B infra ipsum posito erit æqualis, aut maior illo; sitque prius D A æqualis D B, si fieri potest, & ex puncto A verticis ducatur A G perpendicularis ad axim A E, quæ continget sectionem in A,* 17. lib. 1. *pariterque ducatur recta A H perpendicularis ad ramum A D inclinatum ad axim;* 32. pr. *& quia*



& quia A H cadit infra A G ad partes axis cum D A, ad quam illa perpendicularis est, extendatur vltra axim A E, nec possit inter tangentem A G, & sectionem conicam A B, aliqua recta linea intercipi; igitur A H cadit intra conisectionem, & angulus E A H est acutus.

b Quoniam ex D non educitur ad sectionem A C vllus breuisecans, &c. *Sequitur quidem ex hac hypothesi, quod mensura E A non sit maior semierecto* Ex 49. 50. huius. *aut si maior est, sit quoque perpendicularis D E maior Trutina F, ex conuersa propositione 51. 52. huius per deductionem ad inconueniens.*

c Quare si centro D interuallo D B, &c. *Circulus enim B I L H A radio D B descriptus transibit per verticem A cum radius D B positus sit æqualis D A, cumque angulus D B I sit acutus, ex Lemmate nono, cadet necessario B I intra circulum B I L.*

d Igitur circulus secat conisectionem, &c. *Quia B I cadit extra conisectionem, quàm tangit, & intra circulum B L A, vt dictum est, è contra recta A H cadit intra eandem conisectionem, & extra ipsum circulum, quem tangit, cum H A perpendicularis sit ad circuli radium D A; igitur circulus B I L A fertur extra conisectionem ad partes B I, & intra eandem ad partes A H; quare necessario conisectionem secat.*

e Patet, vt dictum est, quod D L G sit acutus, &c. *Hoc enim sequitur ex nono Lemmate præmisso, respicit enim angulus D L G verticem A; & ideo est acutus, & cadit necessario recta L G intra circulum B L A radio D L descriptum ad partes L A; & portio circuli L H A cadit intra conisectionem L A;* 35. 36. lib. 1. *igitur recta L G cadit intra conisectionem L A, sed cadit extra eandem sectionem, cum contingat eam in L, quod est absurdum.*

Deinde

f Deinde patebit, quemadmodum demonstrauimus, &c. *Quia D M facta est maior, quàm D B, & minor quàm D A, estque circuli radius D N æqualis D M; ergo punctum M cadit intra conisectionem, N vero extra ipsam; & propterea circulus M L N sectionem conicam secabit alicubi, vt in L, & portio circuli M L intra conisectionem A L incidet: rursus ducatur radius D L, & L G conisectionem tangens in L erit, vt prius angulus D L G acutus;* 33. 34. lib. 1. *& ideo L G cadit intra circulum L M, & propterea intra conisectionem A L, sed eadem L G cadit extra ipsam, quia eam contingit in L, quod est absurdum; quare ramus D A non est maior, quàm D B; sed prius neque illi æqualis erat; igitur ramus terminatus D A minor est quolibet ramo secante D B infra ipsum posito, & propterea minimus erit omnium secantium.*

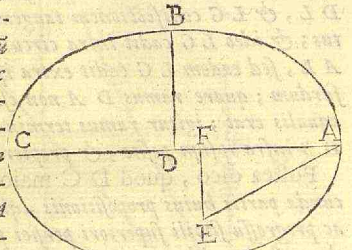
g Postea dico, quod D C maior est, quàm D B, &c. *Demonstratio secundæ partis huius propositionis, quàm Apollonius innuit (quia constructione, ac progressu simili superiori perfici potest) hac ratione restituitur. Demonstrandum est quemlibet ramum D B vertici A proximiorem esse minorem quolibet ramo D C remotiore. Ducantur recta C P contingens sectionem in C, & O B tangens sectionem in B, & recta B R perpendicularis ad ramum D B; & si quidem ramus D C non concedatur maior, quàm D B, sit primo ei æqualis, si fieri potest, & centro D interuallo D C describatur circulus C P R, qui transibit per punctum B, ob æqualitatem radiorum D C, D B; & quia (ex Lemmate nono) angulus D C P verticem respiciens, est acutus, recta C P cadet intra circulum C P R; sed cadit extra conisectionem, cum sit contingens; igitur portio circularis peripheriæ C P ducitur extra conisectionem C Q B: rursus, quia angulus D B O est obtusus (ex nono Lemmate, cum verticem A non respiciat) ergo R B perpendicularis ad D B cadit intra conisectionē, cum B O posita sit eā contingens: cadit verò eadem B R extra circulum B R Q, cum sit perpendicularis ad circuli radium D B; igitur circuli portio B R intra conisectionem cadet: sed priùs eiusdem circuli portio C P extra eandem sectionem ducebatur; igitur idem circulus secat conisectionem alicubi, vt in Q, ducaturque denuo ramus D Q, & Q O contingens sectionem in Q; Vnde (ex nono Lemmate) angulus D Q O erit acutus; & propterea recta Q O intra circuli portionem* 33. 34. lib. 1. *Q R constituta intra conisectionem cadet, quod est absurdum; recta enim Q O extra conisectionem Q A cadit, quàm contingit in Q; non ergo ramus D C æqualis est ipsi D B. Sit secundò D C minor, quàm D B (si fieri potest) seceturque D T minor quàm D B, sed maior quàm D C; & centro D interuallo D T describatur circulus T Q S; is quidem ad partes B cadet intra, ad partes vero C extra conisectionem; & propterea eam alicubi secabit, vt in Q; & ducto ramo D Q, & Q O contingente sectionem in Q, erit angulus D Q* Lem. 9. *O acutus, & ideo recta Q O cadet intra circulum T Q, & propterea intra conisectionem, quod est absurdum; Q O enim cadit extra sectionem Q A, quàm contingit in Q; non ergo ramus D C minor est, quàm D B, sed neque æqualis priùs ostensus fuit; igitur quilibet ramus D B vertici A propinquior minor est quolibet ramo remotiore D C, quod erat ostendendum.*

 Notæ

Notæ in Propoſ. LXVI.

a QVia ſi caderet inter C, D duci poſſet, &c. *Quotieſcumq; enim perpendicularis E F, cadit ſuper centrũ D, vel ſecat ſemiaxim D C inter D, & C, tũc ex concurſu E vnicus ramus breuiſecans duci poteſt ad ſectionem B A, qui nimirum cadit inter verticem remotiorem A, & axim minorem D B: ſed ex hypotheſi nullus ramus ex concurſu E ad quadrantem ellipſis A B duci poteſt, qui ſit breuiſecans; igitur perpendicularis E F ſecat ſemiaxim A D in puncto F poſito inter A, & D.*

45. 56. huius.

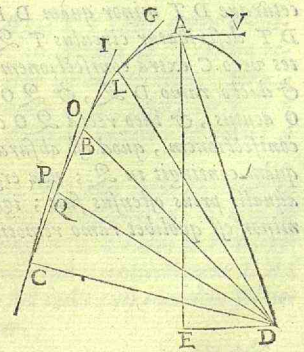


Deinde patet, quemadmodum demonſtrauimus in vtraque hyperbola, &c. *Permuto particulam [vtraque] vt manifeſtè erroneam, legi enim debet in parabola, & hyperbola. Quod vero ramus terminatus E A minimus ſit omnium ramorum ſecantium manifeſtum eſt ex demonſtratione propoſitionis 64. 65., quæ comprehendit etiam ellipſim, quando menſura F A minor eſt ſemiaxi A D, vt ex propoſitione 52. patet. Et ſimiliter ramorũ ſecantium ex concurſu E ad ſectionem A B ductorum propinquiores vertici A minores ſunt remotioribus ex eadem demonſtratione 64. 65. huius.*

Ex demonſtratione præmiſſa propoſitionum 64. & 65. deduci poteſt conſectarium, à quo notæ ſubſequentes breuiores reddantur.

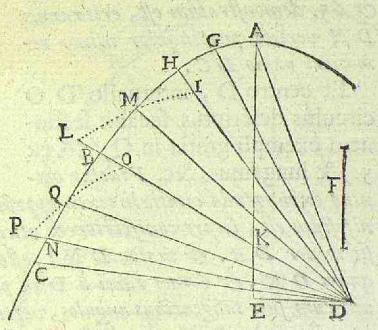
COROLLARIVM PROPOSIT. LXIV. & LXV.

SI in aliqua peripheria cuiuslibet coniſectionis omnes rami ſecantes, qui à concurſu duci poſſunt, cum tangentibus ab eorum terminis ductis conſtituunt angulos, qui verticem reſpiciunt, acutos; rami proximiores vertici ſectionis minores erunt remotioribus.



Ex eo enim, quod in propoſitionibus 64. & 65., omnes rami D A, D L, D B, D Q, D C, & reliqui omnes, qui duci poſſunt ex concurſu D ad ſectionem A B C efficiunt cum tangentibus ſectionẽ à terminis A, L, B, Q, C angulos, verticem A reſpicientes, acutos, vt ſunt D A V, D L G, D B I, D Q O, D C P, oſtenſus eſt ramus D A minor quàm D B, & D B propinquior vertici A, minor ramo D C remotiore.

Notæ in Propoſ. LXVII.



a POſtea repetamus figuram vtramque hyperboles, &c. *Lego; Repetamus figuras paraboles, & hyperboles, & ſupponantur denuo eædem lineæ eductæ ex concurſu D ad ſectionem; & perpendicularis D E, atque Trutina F, & omnium ramorum ſecantium vnicus tantummodo D B ſit breuiſecans.*

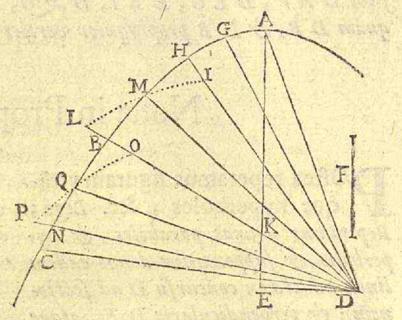
b Et illi propinquiores ſint maiores remotioribus, &c. *Sed mendoſè; legi debet; Et illi propinquiores ſint minores remotioribus.*

c Quia educitur ex D vnus tantum breuiſecans, &c. *Legi debet. Quia educitur ex concurſu D vnus tantum breuiſecans, erit menſura E A maior dimidio erecti, & D E perpendicularis ad axim æqualis erit Trutinæ F.* Conuerſ. 51. 52. huius.

d Inde conſtat D G maiorem eſſe, quàm D A, &c. *Quia ex concurſu D ad ſectionem A C vnicus ramus D B breuiſecans ſupponitur igitur omnes rami cadentes inter A, & B præter infimum D B conſtituunt cum tangentibus ſectionem, ab eorum terminis ductis, angulos reſpicientes verticem A acutos; & propterea ramus terminatus D A minor eſt quolibet ramo D G infra ipſum, & ſupra ramum D B poſito; atque ramus D G minor eſt quolibet alio à vertice remotiore ducto ex D ad peripheriam A B. Dico iam, quod ramus D B maior eſt quolibet ramo D G, poſito infra verticem A, & ſupra breuiſecantem D B; Si enim hoc verum non eſt, erit D B æqualis, aut minor, quàm D G, & tunc ducto quolibet ramo D H ad ſectionem G B infra ramum D G, erit D H remotior à vertice A maior propinquiore D G, & propterea ramus D B adhuc minor erit ramo D H.* Lem. 10. Coroll. 64. 65. huius. Ibidem.

e Ergo D M nempe D I, &c. *Quia D M, vt remotior à vertice A, eſt maior, quàm propinquior D H eſt vero D L, atque D I æqualis D M cum ſint radij eiuſdem circuli; ergo D I portio maior eſt, quàm totum D H, quod eſt abſurdum; quare D B maior eſt quolibet ramo D G infra verticem A, & ſupra ramum D B poſito; & propterea D B multo maior erit, quàm D A.* Ibidem.

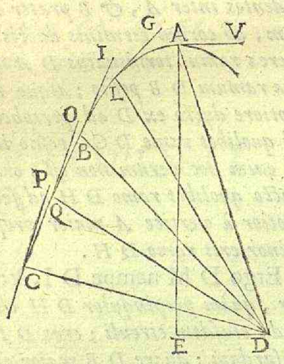
f Ergo D N minor eſt, quàm D C, &c. *Dubitare quis poſſet, an ramus D N, quia propinquior eſt vertici A ſit minor remotiore ramo D C, vt in propoſitione 64. & 65. verificabatur; & ratio eſt, quia hypotheſes ſunt diuerſæ, nam ibi nullus ramus breuiſecans à concurſu D ad ſectionem A C duci poſſe ſupponebatur, in hac vero propoſitione 67. ponitur vnicus breuiſecans D B, at ſcrupulus omnis tolletur, ſi dicatur, non quidem ex propoſitionibus 64. & 65. ſed ex demonſtratione ibi allata, ſeu ex Corollario in fine notarum appoſito, propo-*



propositum deduci, nam duo rami D C, & D N positi infra singularem
Lem. 10. breuisecantem D B efficiunt cum rectis tangentibus sectionẽ angulos verticem respicientes acutos; igitur vt in secunda parte propositionum 64. & 65. demonstratum est, erit ramus D N vertici propinquior minor remotiore ramo D C.

Et centro D, interuallo D O circulus descriptus secabit sectionem exempli gratia in Q (56. ex 5.) & iungamus, &c. g Videtur omnino expungenda citatio in textu apposita; (56. ex 5.) nam circulum O Q manifestum est, secare coniſectionem alicubi, vt in Q, cum radius D O positus sit minor D B, & maior D N; postea, quia D Q propinquior est vertici A,
Lem. 10. Coroll. 64. 65. huius. quàm D N, & omnes rami à D ad peripheriam sectionis N Q ducti, efficiunt cum suis tangentibus angulos, verticem respicientes, acutos; igitur D Q minor est, quàm D N, quod est absurdum; posita enim fuit D O, seu ei æqualis D Q, & D P maior, quàm D N.

COROLLARIVM PROPOSIT. LXVII.

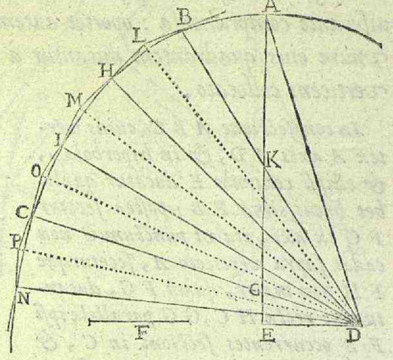


Angulorum à ramis secantibus, qui à cõcursu ad coniſectionem duci possunt, cum tangentibus ab eorum terminis ductis cõpræhensorum, si vnus tantum rectus fuerit, reliqui omnes verticem respicientes acuti; rami proximiores vertici sectionis, minores erũt remotioribus.

Ex eo enim, quod in propositione 67. omnes rami D A, D L, D C, & reliqui omnes, qui duci possunt ex concursu D ad sectionem A B C, cum tangentibus sectionem à terminis A, L, C compræhenderunt angulos verticem respicientes D A V, D L G, D C P acutos, & tantummodo vnus D B I rectus fuit ostensus est ramus D A minor, quàm D L, & D L vertici A propinquior, minor, quàm D B, atq; D B minor quolibet remotiore D C.

Notæ

Notæ in Proposit. LXXII.



a ET minimus eorum D C, &c. *Textus videtur mendosus; nam vt inferius ostendetur, ramus breuisecans D C à vertice remotior, non semper minimus est omnium ramorum cadentium ex concursu D ad sectionem A B C; itaque legendum puto; D C est minimus ramorum cadentium ad peripheriam sectionis B C N; quod manifestè indicatur ex determinatione in fine propositionis apposita; inquit enim: propinquiores D C (ex ramis egredientibus ad sectionem in ea parte) minores sunt remotioribus, vbi coniĳcitur, Apollonium noluisse pronũciare, ramum D C minimum esse omnium, qui in sectione A C N duci possunt, neque propinquiores D C minores esse quolibet remotiori ad partes verticis A constituto, sed tantummodo eorum, qui in sectione C B, & in inferiori C N ducuntur minimum esse D C, & ei propinquiores minores esse remotioribus.*

b Atque sic patet, quod D H maior sit, quàm D I, &c. *Ex vndecimo enim Lemmate angulus D H M est acutus, & D I M obtusus, & coniuncta D M erunt duo quadrata D H, H M maiora quadrato D M, quæ subtendit angulum acutum; quadratum verò D M maius est duobus quadratis D I, I M, ergo multo magis duo quadrata D H, H M simul sumpta maiora sunt duobus quadratis D I, I M simul sumptis, & auferatur ex aggregato maiori quadratum minus H M, & ex minori tollatur quadratum maius I M (cum contingens H M propinquior vertici A minor sit remotiore M I) remanet quadratũ* 68. 69. huius. *D H maius quadrato D I, & propterea ramus D H maior erit ramo D I, & simili modo ramus D I maior ostendetur ramo D C.*

c Et iam demonstratũ est, &c. *Scilicet: quia omnes rami ex D ad peripheriã A B ducti efficiunt cum suis tangentibus angulos verticem respicientes acutos;* Lem. 11 Coroll. 64. 65. huius. *& propterea ramus D B maior erit quolibet alio ramo inter B, & A ducto; ideoque D B erit maximus cadentium in peripheria A B.*

d Postea ostendetur, quemadmodum hìc dictum est, &c. *Textus est valde corruptus; sic restituendum puto; Ostendetur, quemadmodum supra dictum est, (scilicet in secunda parte propos. 67.) quod D C minimus sit omnium ramorum ad sectionem infimam C N cadentium, & vt hic ostensum est, sit minimus ramorum egredientium ad sectionem B C; quare patet, quod D B sit maximus ramorum cadentium ad sectionem A C, & D C sit minimus cadentium ad sectionem B C N, & quod propinquiores maioribus, sunt maiores remotioribus in peripheria sectionis A C, & propinquiores minoribus, sunt minores remotioribus in peripheria sectionis B C N, & hoc erat ostendendum.*

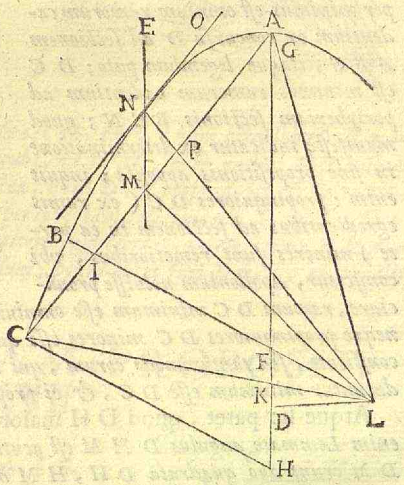
Quod

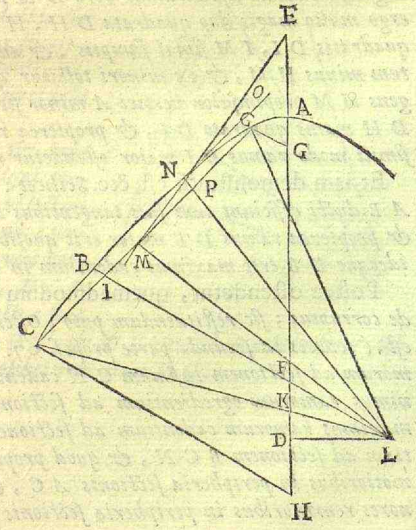
Quod autem infimus ramus breuisecans D C non sit necessario minimus omnium ramorum cadentium ad peripheriam sectionis A B, modò ostendetur.

PROB. 6. Addit.

In conisectione duos ramos breuisecantes, ducere, quorum infimus maior sit ramo secante posito in peripheria à vertice, & suprema breuisecante comprehensa: oportet autem in ellipsi, vt rami secantes ad vnum eius quadrantem ducantur à concursu, inter axim minorem, & verticem collocato.

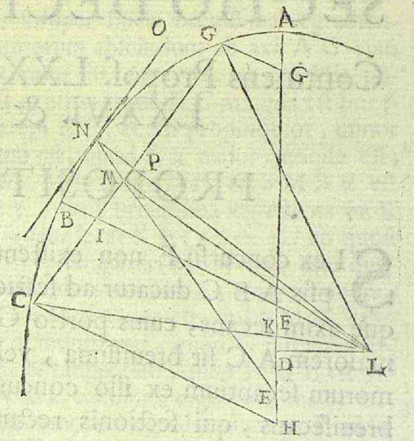
In conisectione A B C, cuius vertex A axis A D, & in hyperbola, & ellipsi centrum E ducatur qualibet 8. 9. 10. huius. *breuissima F B: postea secetur F G ex axi, ita vt punctum G non cadat supra verticem A, seceturque F H non maior, quàm F G, ducanturque rectæ H C, G G parallelæ ipsi F B occurrentes sectioni in C, & G, coniungaturque recta C G secans F B in I: patet, C I maiorem non esse, quàm I G; propterea quod G C, G H à parallelis secantur proportio-* 8. 9. 10. 26. 27. 28. huius. *naliter; Deinde ex C ducatur alia breuissima C K, occurrens B F vltra axim in L, iungaturque ramus G L: ostendendum est L C maiorem esse, quàm L G. Secetur C G bifariam in M, atque per M ducatur sectionis diameter M N parallela axi in parabola, & per centrum exstensa in reliquis sectionibus, occurrens sectioni in N, ducaturque O N se-* 33. 34. lib. 1. *ctionem contingens in N, iunganturque L M, & L N, quæ secet G C in P. Quoniam G I æqualis, aut maior est, quàm I C, cadet punctum M bipartitæ diuisionis totius C G, vel in I, vel inter I, G, & in vtroque casu punctum N cadet inter G, & B (eo quod diameter M N parallela axi in parabola, aut ex centro E educta in reliquis sectionibus efficit angulum N M L ad partes verticis A) & ideo ramus L N cadens supra duos breuisecantes L C, L B ad partes verticis efficit cum tangen-*





te O N

te O N angulum acutum L N O verticem A respicientem; estque G C ordinatim applicata ad diametrum N M parallela tangenti verticali O N; ergo angulus L P G externus æqualis erit angulo L N O interno, & opposito, & ad easdem partes constituto; & ideo angulus G P L acutus quoque erit, at in triangulo P M L angulus internus L M P, & oppositus minor est externo L P G acuto; igitur angulus L M P acutus pariter erit, & L M C obtusus; suntq; in triangulis L M G, & L M C circa angulos inæquales, latera G M, M C æqualia, & L M commune; ergo L C maior est, quàm L G, quod erat faciendum. Lem. 11. 5. lib. 2.



E contra fieri potest, vt infimus breuisecans ramus L C æqualis, aut minor sit ramo aliquo supra breuisecantem reliquum B L posito. Nam L C minor est, quàm B L, & maior effici potest ramo non vltra sectionis verticem A collocato ex prima parte huius propositionis, sed rami à concursu L educti cadentes inter puncta A, & B successiuè augentur quo magis à vertice A recedunt; Ergo ramus L C æqualis, aut minor erit aliquo ramo ab eodem concursu L educto inter puncta A, & B cadente; igitur manifestum est ramum breuisecantem C L infimum duorum breuisecantium, non esse semper minimum omnium ramorum cadentium ex concursu L ad peripheriam sectionis A B C, sed tantummodo minorem esse eorum, qui inter duo breuisecantes B L, C L cadunt, & reliquorum infra ramum C L cadentium, atque aliquorum in pepheria A N existentium propè maximum L B; quapropter existimandum est, incuria alicuius verba illa non sine Apollonij iniuria textui irrepsisse.

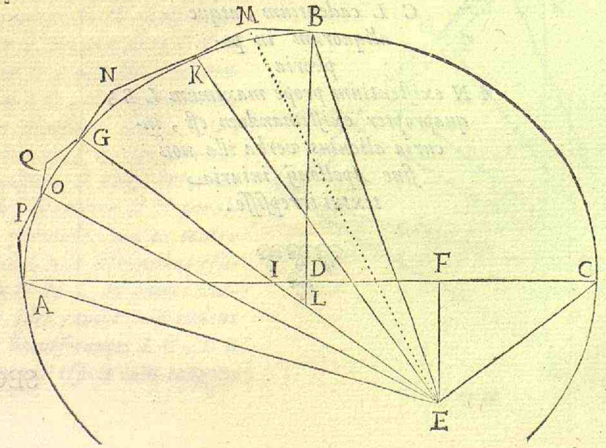
SECTIO

SECTIO DECIMAQVARTA

Continens Propoſ. LXXIII. LXXIV. LXXV. LXXVI. & LXXVII.

PROPOSITIO LXXIII.

SI ex concurſu E non exiſtente ſuper rectum minorem elli- a
pſis A B C ducatur ad ſectionem A B vnicus ramus vtrumque axim ſecans, cuius portio G I inter ſectionem, & axim maiorem A C ſit breuiſſima, vel duo breuiſecantes; vtique ramorum ſecantium ex illo concurſu egredientium maximus erit breuiſecans, qui ſectionis rectum ſecat, nempe E G, & illi proximior maior eſt remotiore; minimus verò eorum eſt, qui terminatur à vertice ſectionis proximiori concurſui, nempe E C, & illi propinquiores minores ſunt remotioribus, nempe inter C G. Si autem egrediantur ex illo tres breuiſecantes, & duo illorum ſecuerint menſuram, & vnus ſecuerit rectum, vtique qui rectum ſecat eſt maximus ramorum ſecantium: & ramorum inter mediam breuiſecantem, & remotiorem verticem ſectionis à concurſu cadentium, proximior illi, eſt maior remotiore, & maximus duorum reliquorum breuiſecantium eſt ille, qui vertici proximus eſt, & ramorum, inter proximiorem verticem ſectionis, & intermedium breuiſecantem cadentium, vicinior illi, maior eſt remotiore.



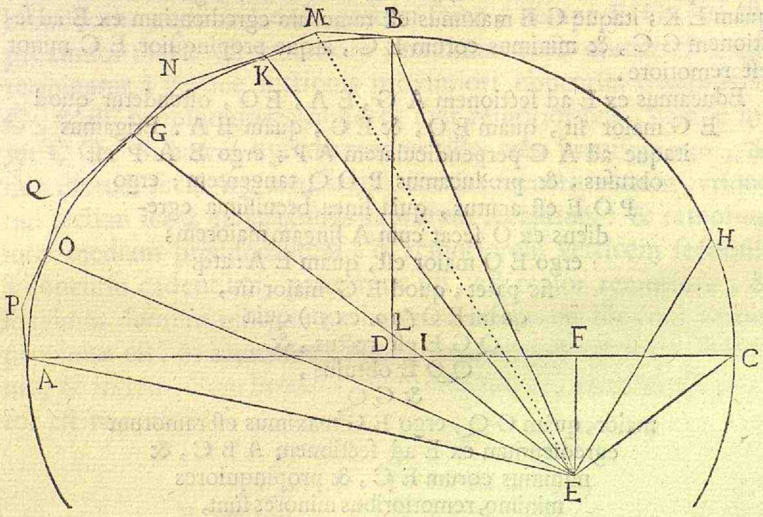
b Erigamus itaque ſuper D perpendicularem D B occurrentem E G in
L; ergo eſt dimidium recti, & E non eſt indirectum, quia non egredi-
c tur ex E, niſi vnicus breuiſecans; inſuper lineæ breuiſſimæ egredien-
tes ab extremitatibus reliquorum ramorum abſcindunt ab axi A C cum
C, lineam maiorem, quàm ſecant rami illi. (51. 52. ex 5.) His po-
ſitis manifeſtum eſt, quod E C F eſt acutus; atque E C minima eſt linea-
rum egredientium ex E ad quadrantem E B, & illi propinquior, minor
d eſt remotiore; modo demonſtrandum eſt, quod E K maior quoque eſt,
quàm E B, producamus itaque B M, M K tangentes, ergo M B E eſt
obtuſus, & M K E acutus (29. ex 5.) quia breuiſſima egrediens ex K
abſcindit cum A minorem lineam, quàm ſecat K E (57. ex 5.) eo quod
K cadit inter duas lineas L B, L G; & iungamus M E; ergo duo qua-
drata M B, B E minora ſunt, quàm quadratum M E, quare minora
erunt duobus quadratis M K, K E, & M B maior eſt, quàm M K, ergo 70. huius.
B E minor eſt, quàm K E; & ſic demonſtratur, quod G E maior ſit,
quàm K E; Nam ſi producamus G N tangentem, tunc N G E eſt re-
ctus, quia G I eſt breuiſſima, & N K E obtuſus; ergo G E maior eſt, 30. huius.
quàm E K; itaque G E maximus eſt ramorum egredientium ex E ad ſe-
ctionem G C, & minimus eorum E C, atque propinquior E C minor
eſt remotiore.

e Educamus ex E ad ſectionem A G, E A, E O, oſtendetur quod
E G maior ſit, quàm E O, & E O, quàm E A. Erigamus
itaque ad A C perpendicularem A P; ergo E A P eſt
obtuſus, & producamus P O Q tangentem; ergo
P O E eſt acutus, quia linea breuiſſima egre- 57. huius.
diens ex O ſecat cum A lineam maiorem;
ergo E O maior eſt, quàm E A: atq;
ſic patet, quod E G maior ſit,
quàm E O (29. ex 5.) quia
Q G E eſt rectus, &
Q O E obtuſus,
& G Q
maior, quàm O Q, ergo E G maximus eſt ramorum
egredientium ex E ad ſectionem A B C, &
minimus eorum E C, & propinquiores
minimo, remotioribus minores ſunt,
& propinquiores maximo, ma-
iores ſunt remotioribus;
quod erat oſtenden-
dum.

PROPOSITO LXXIV.

DEinde sint E H, E G duo breuisecantes, & E G secet rectum B D. Dico, quod E G est maximus ramorum egredientium ex E ad sectionem A B C, & E C est minimus.

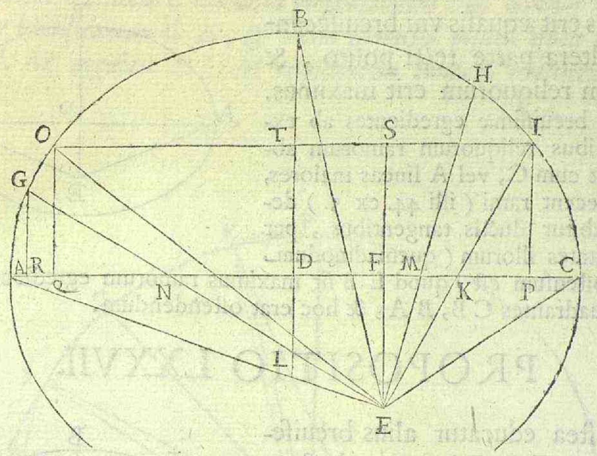
Producatur perpendicularis E F, quæ non cadet super centrum; si enim per centrum duceretur, duci posset ex E, aut vnicus breuisecans
Ex 45. huius. tantum (44. ex 5.) aut tres (45. ex 5.) quod est contra hypothesin; ergo E F per centrum non transit, cadat super C D; & quia ducuntur ex E duo breuisecantes, erit C F maior dimidio erecti, & E F æqualis Trutinæ (52. ex 5.) patet itaquè, vti antea demonstrauimus, quod E G maximus sit ramorũ, & E C minimus; atquè propinquior maximo, maior est, & propinquior minimo, est minor. a



PROPOSITO LXXV.

POstea educamus ex E tres breuisecantes E G, E H, E I, & secent E I, E H mensuram, & E G secet rectum in L. Dico, quod E G est maximus ramorum egredientium ex E ad sectionem A B C, & ramorum inter A H cadentium propinquiores illi, maiores sunt remotioribus, & E I est maximus ramorum egredientium ad sectionem H C, & illi propinquiores maiores sunt remotioribus. a

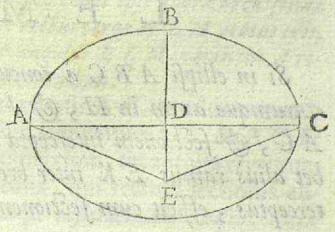
Quo-



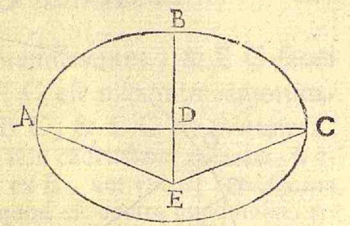
b Quoniam I K, H M sunt duæ breuissimæ constat, quod E I maximus sit ramorum cadentium ad illam sectionem (72. ex 5.) & propinquior illi maior est remotiore: nec non; quia H M, G N sunt duæ breuissimæ
c constat, vt dictum est, quod G E sit maximus ramorum cadentium vtrin- 74. huius.
d que ad sectionẽ A H. Dico etiam, E G maiorem esse, quàm E I; nam si producatur I O parallela ipsi A C, & iungatur E O, ducanturque perpendiculares I P, O Q, G R, E F S, quia G N, I K sunt breuissimæ erit 15. huius.
D P ad P K, quæ est, vt proportio figuræ, vt D R ad R N; ergo F P ad P K minorem proportionem habet, quàm F R ad R N, & diuidendo F K ad K P, nempe F E ad I P, minorem proportionem habet, quàm F N ad N R, nempe F E ad G R: ergo F E ad I P minorem proportionem habet, quàm ad G R, & propterea G R minor est, quàm I P, quæ est æqualis O Q, cuius punctum O remotior est à vertice, quàm G, & ideo E G maior est, quàm E O. (74. ex 5.) Et quia O T æqualis est T I erit O S maior quàm S I, & S E perpendicularis ad O I est communis; igitur O E maior est, quàm E I; & ostensa est E G maior, quàm O E; Ergo E G maior est, quàm E I, quod erat ostendendum.

PROPOSITIO LXXVI.

a SI ex concursu E in recto E B posito ellipsis A B C nõ educatur breuisecans præter E B, qui transeat per centrum; erit E B maximus ramorum secantium ex concursu ad sectionem egredientium.



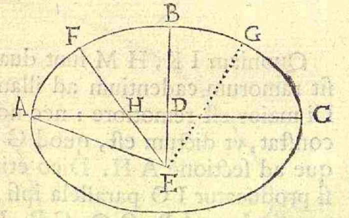
Si vero ex illo educatur alius breuiſecans erit æqualis vni breuiſecanti ex altera parte recti poſito, & omnium reliquorum erit maximus.



b Quia breuiſſimæ egredientes ab extremitatibus reliquorum ramorum abſcindunt cum C, vel A lineas maiores, quàm ſecent rami (illi 44. ex 5.) demonſtrabitur ductis tangentibus, per extremitates illorum (quemadmodum antea oſtenſum eſt) quod E B ſit maximus ramorum egredientium ad duos quadrantes C B, B A, & hoc erat oſtendendum.

PROPOSITIO LXXVII.

a POſtea educatur alius breuiſecans E F; Dico, quod eſt æqualis vni breuiſecanti E G æque remoto à recto D B, & eſt maximus reliquorum omnium.



b Quia B D, F H ſunt duæ breuiſſimæ, ergo rami egredientes ad ſectionem B F abſcindunt cum A maiores lineas, quàm ſecent breuiſſimæ, egredientes ab eorum extremitatibus: idem dicendum eſt de ramis educti ad ſectionis peripheriam B G, & rami educti ad peripherias C G, A F abſcindunt cum C, vel A lineas minores (45. ex 5.) conſtat itaque adhibitis lineis tangentibus, vt dictum eſt, quod E F ſit maximus ramorum ſecantium ex E ad C B A egredientium, excepto vno E G, cui eſt æqualis, quod erat oſtendendum. c

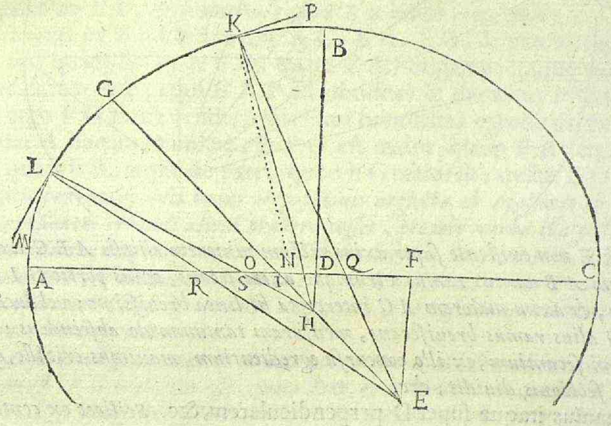
Notæ in Propoſit. LXXIII.

P*RO clariori intelligentia propoſitionum huius ſectionis hæc præmitto.*

L E M M A XII.

Si in ellipſi A B C à concurſu E ductus fuerit ramus E G ſecans vtrumque axim in H, & I, cuius portio G I, inter axim maiorem A C, & ſectionem intercepta, ſit linea breuiſſima; dico, quod quilibet alius ramus E K inter breuiſecantem G E, & axim minorem interceptus, efficit cum ſectionem tangente K P angulum E K P acutum, reſpi-

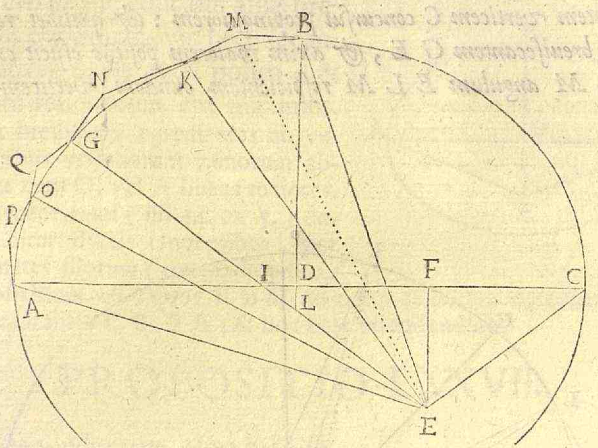
reſpicientem verticem C concurſui propinquiorem: & quilibet ramus E L inter breuiſecantem G E, & axim maiorem poſitus efficit cum tangente L M angulum E L M reſpicientem eundem verticem A acutum.



Ducatur E F perpendicularis ad axim maiorem, eum ſecans inter verticem C, & centrum D in F, & ex concurſu axis minoris B H, & breuiſſimæ G E, ſcilicet ex H ducantur rectæ H K, & H L; pariterque ex punctis, K, & L ducantur ad axim maiorem A C lineæ breuiſſimæ K N, L O, ei occurrentes in N, & O. Quoniam (ex præmiſſo Lemmate 8.) à concurſu H ducitur ramus H K inter breuiſecantes H B, H G interceptus; ergo H K cadit infra breuiſſimam K N ad partes verticis C; eſt vero angulus N K P rectus à tangente, & breuiſſima contentus; ergo angulus H K P erit acutus, cum H K cadat inter N K, & tangentem K P; cadit vero E K infra ramum H K verſus C; igitur angulus E K P reſpiciens verticem C proximiorem concurſui E erit acutus. 29. 30. huius.

Similiter (ex eodem Lemmate 8.) quia ramus H L ducitur inter breuiſecantem H G, & verticem A à concurſu E remotiorem, cadet ipſe ſupra breuiſſimā L O, eſtque angulus O L M ad partes verticis A rectus; ergo H L M acutus erit, Ibidem. *cumque E L cadat ſupra H L verſus A; igitur angulus E L M, verticem A remotiorem reſpiciens, erit acutus, quod erat oſtendendum.*

a Si à concurſu E non exiſtente ſuper recto ellipſis A C, producatur vnicus ramus ſecans ipſam A C, vt E G, cuius ſegmentum G I, & A C ſit breuiſsimum, vel duo breuiſecantes; vtique maximus ſecantium ramorum egredientium ex illo concurſu, eſt breuiſecans, qui rectum ſectionis abſcindit, nempe E G, &c. *Textum mendoſum ſic reſtituendum cenſeo. Si ex concurſu*



concursu E non existente super axim rectum minorem ellipsis A B C ducatur ad sectionem A B vnicus ramus vtrumque axim secans, cuius portio G I inter sectionem, & axim maiorem A C intercepta sit linea breuissima; vel ducatur præter E G alius ramus breuisecans, mensuram tantummodo abscindens; vtique ramorum secantium, ex illo concursu egredientium, maximus erit ille, qui axim rectum sectionis diuidit, &c.

Erigamus itaque super D perpendicularem, &c. *Scilicet ex centro sectionis D eleuetur D B perpendicularis ad axim maiorem A C, occurrens sectioni in B, & ipsi E G in L, & propterea D B erit semissis recti axis, & punctum E in axi B D non existit ex hypothesi, &c.* b

Quoniam non egreditur ex E nisi vnus breuisecans, ergo lineæ breuissimæ egredientes ab extremitatibus reliquorum ramorum, abscindunt ab axi cum A C, L A lineam maiorem, quàm secent illorum rami (51. 52. ex 5.) & iam patet, quod si ita se res habet L E C est acutus; quia E C breuissima est linearum egredientium ex E ad quadrantem A B, & propinquior illi, minor est remotiore, &c. *Sic legendum puto: Quia præter E G, vtrumque axim secantem nullus alius breuisecans duci posse à concursu E ad sectionem supponitur, ergo lineæ breuissimæ egredientes ab axtremitatibus reliquorum ramorum in quadrante C B abscindunt ab axi A C cum vertice C lineas maiores, quàm secent rami (51. 52. ex 5.) pariterque constat, quod angulus E C F sit acutus, atque ramus E C est minimus egredientium ex E ad quadrantem C B, & propinquior minimæ, minor est remotiore. Demonstrandum modo est, quod K E maior quoque est, quàm E B, &c.* c

64. 65. huius.

Producamus itaque M B, M K tangentes; ergo M B E est obtusus, & M K E est acutus (29. ex 5.) quia breuissima egrediens ex K abscindit A lineam minorem, quàm A E (57. ex 5.) eo quod K est inter duo segmenta L B, L G: & iungamus M E; ergo duo quadrata M B, B E minora sunt, quàm quadratum M E, quæ minora sunt duobus quadratis M K, K E, &c. *Idest: ex punctis B, K ducantur duæ tangentes sectionem M B, K M* d

occur-

occurrentes in M, & quia angulus D B M rectus est contentus ab axe, & tangente, & cadit B E inter C, & D ergo angulus E B M est obtusus; postea, quia E K cadit infra breuissimam E G, & supra minorem axim B D, ergo angulus E K M respiciens verticem C propinquiorem concursui, erit acutus, & iuncta M E erunt duo quadrata E B, B M minora quadrato E M, estque quadratum E M minus duobus quadratis E K, K M circa acutum angulum (cum priora angulum obtusum compræhendant,) Igitur duo quadrata E B, B M simul sumpta minora sunt duobus quadratis E K, K M: estque quadratum M B maius quadrato M K, cum contingens M K, proximior vertici A axis maioris minor sit remotiore B M; igitur quadratum E B, scilicet residuum minoris summæ minus erit quadrato E K, & propterea ramus E B minor erit, quàm E K. Conuers. 32. lib. 1. Lem. 12. 70. huius.

e Et educamus ex E ad sectionem A G, E A, E O, & patebit, quod E G maior sit, quàm E O, & E O, quàm E A: erigamus itaque ad A C perpendicularem A P; ergo E A P est obtusus: & ducamus P O Q tangentem; ergo P O E est acutus, quia linea breuissima egrediens ex O abscindit cum A lineam maiorem, & P O est maior, quàm P A; ergo E O maior est quàm E A, atque sic patet, quod E G maior sit, quàm E O, &c. *Demonstratio postremæ partis huius propositionis neglecta ab Apollonio ob sui facilitatem occasionem errandi alicui præbere posset, propter verba illa postrema textui superaddita; non enim ex maiori summa duorum laterum P O, O E si auferatur maior O P, & ex minori summa P A, A E auferatur minor P A, necessario residuum maioris, idest E O maior erit quam E A residuum minoris; itaque sensus huius contextus talis erit.*

Ex concursu E ad sectionem A G ducantur rami E A, & quilibet alius E O; ostendendum est, E G maiorem esse, quàm E O, & E O maiorem, quàm E A: ducantur A P, Q O tangentes sectionem in A, & O conuenientes in P, & tangenti G Q in Q. manifectum est angulum E A P obtusum esse, cum angulus C A P sit rectus pariterque quilibet ramus E O inter breuisecantem E G, & verticem A remotiorem interceptus efficit angulum E O P, verticem A respicientem acutum, & sic reliqui omnes rami inter puncta G, & A cadentes; quare (ex Corollario propositionum 64. & 65.) ramus E A minor erit quolibet ramo E O inter verticem A, & G cadente: rursus, quoniam breuisecans E G constituit cum tangente angulũ E G Q rectum; quare ex concursu E ad sectionis peripheriam G A omnes rami cadentes efficiunt cum tangentibus angulos, verticem A respicientes, acutos, & vnus tantummodo E G Q est rectus; igitur (ex Coroll. propos. 67. huius) ramus E O vertici A propinquior minor est remotiore E G; Quapropter ramus breuisecãs E G maximus est omnium ramorum secantium ad peripheriam A B C cadentium. Conuers. 32. lib. 1. Lem. 12. 29. 30. huius. Lem. 12.

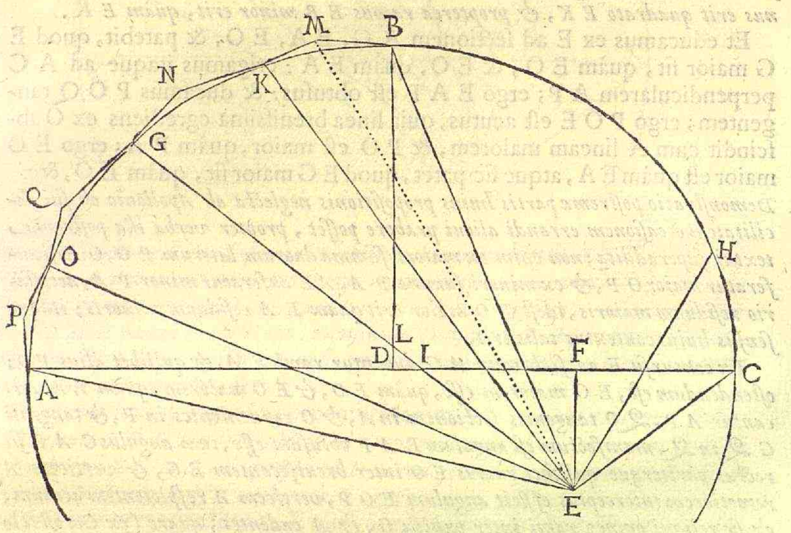
At adhuc non constat, ramum E C minimum esse prædictorum ramorum omnium, nisi priùs ostendatur, E C minorem esse quolibet ramo ad peripheriam A G educto: & hoc etiam ob sui facilitatem neglectum fuit ab Apollonio. Absoluetur tamen hac ratione.

Quoniam perpendicularis E F cadit inter C, & D, igitur A F maior est, quàm C F, & F E est communis circa angulos rectos in triangulis C F E, A F E, igitur C E minor est, quàm E A: estque E A minor quolibet alio E O inter A, & G cadente, igitur E C minor est omnium ramorum cadentium ad peripheriam A G, sed priùs minor ostensus fuit reliquis omnibus cadentibus ad peripheriam C B G; igitur ramus E C minimus est omnium secantium, quod erat ostendendum.

Notæ

Notæ in Propoſ. LXXIV.

a ERgo E F per centrum non tranſit, cadat ſuper C D, & quia producti ſunt ex E duo breuiſecantes; ergo C F excedit dimidium erecti, & E F æqualis eſt Trutinæ (52. ex 5.) patet itaque, vt antea demonſtrauimus, quod E G ſit maximus ramorum, & E C minimus, &c.



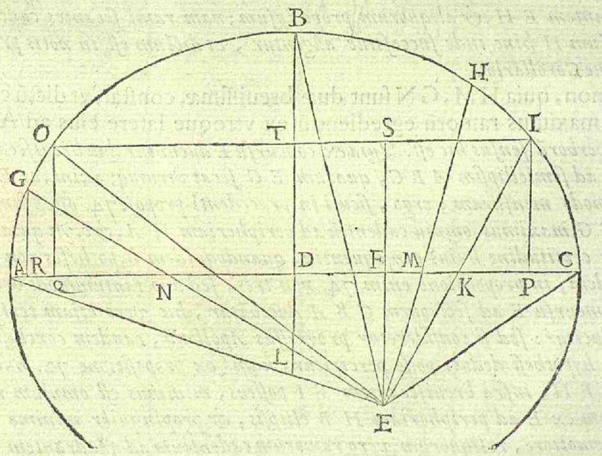
Quoniam in 11. huius oſtenſum eſt, quod ſemiaxis minor ellipſis eſt ramus breuiſsimus, ergo ſi incidentia perpendicularis E F ſuper axim A C, ideſt punctum F eſt centrum ellipſis educerentur ex concurſu E tres breuiſecantes, nimirum E H, E G, & E F producta, quæ eſſet axis minor ellipſis: hoc autem eſt contra hypotheſim, cum ducti ſint ex E duo breuiſecantes: ergo eorum vnus E H menſuram C F ſecat, quæ minor eſſe debet ſemiſſe axis maioris C D; igitur ex conuerſa propoſitione 50. huius, menſura C F maior erit ſemiſſe lateris recti, & (ex conuerſa propoſ. 52. huius) erit perpendicularis E F æqualis Trutinæ. Demonſtratio huius propoſitionis neglecta ab Apollonio, propterea quod eodem ferè modo, ac præcedens oſtendi poteſt, breuiſsimè perficietur in hunc modum.

Propoſ. 67. huius. *Quoniam à concurſu E vnicus tantum breuiſecans E H ad quadrantem C B ducitur; igitur C E minimus eſt omnium ramorum cadentium ad ſectionis peripheriam C B, & E C vertici B propinquior minor eſt remotiore E H, & E H minor, quàm E B: rurſus, quia ramorum cadentium ex E ad peripheriam* Ex 29. 30. huius. *B G vnus tantummodo breuiſecans E G conſtituit cum tangente N G angulum rectum,*

rectum, & reliqui omnes rami cadentes ſuper totum arcũ G B, conſtituunt cum ſuis tangentibus angulos acutos, reſpicientes verticem C; igitur quilibet ramus E B propinquior vertici C minor eſt quolibet remotiore ramo E K, & E K minor eſt remotiore E G: & propterea ramus E G maximus eſt omnium cadentium ad peripheriam C B G. Poſtremò, quia ramorum cadentium inter breuiſecantem E G, & remotiorem verticem A axis maioris, vnicus tantũ E G efficit cum ſua tangente angulum E G N rectum; reliqui vero omnes cadentes inter G, & A efficiunt cum ſuis tangentibus angulos, reſpicientes verticem A remotiorem, acutos; igitur (ex Corollario propoſ. 67. huius) ramus E G maior eſt quolibet ramo E O vertici A propinquiore, & E O maior eſt, quàm E A: quapropter breuiſecans E G vtrumque axim abſcindens maximus eſt omnium ex E cadentium ad ſemiperipheriam ellipſis C B A, & ramus E C, vt in præcedenti dictũ eſt, minimus erit omnium, atque propinquiores maximo ex eadem parte maiores erunt remotioribus, & cadentium ad peripheriam C B G minimo C E propinquiores, minores erunt remotioribus, quod erat oſtendendum. Lem. 12. Coroll. prop. 67. huius. 29. 30. huius. Lem. 12. huius.

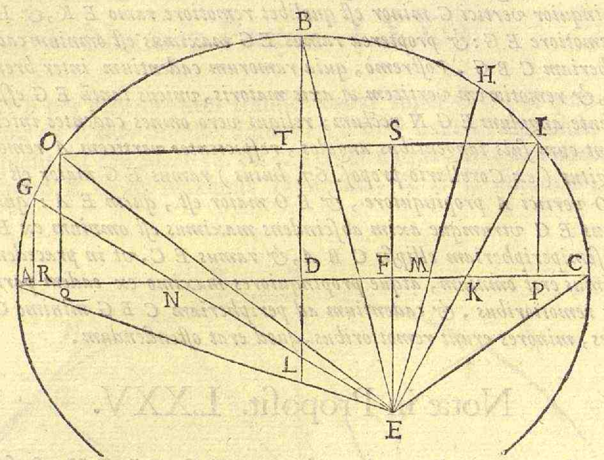
Notæ in Propoſit. LXXV.

a POſtea ducamus ex E tres breuiſecantes E G, E I, E H, & ſecent E I menſuram, & E G ſecet rectum in L, &c. *Ideſt: Poſtea ſi ex concurſu E ducti fuerint tres breuiſecantes E G, E I, E H; quorum duo E I, E H ſecent menſuram in K, & M: E G vero ſecet axim rectum in L, & axim maiorem A C in N. Dico, &c.*



b Quoniam I K, N M ſunt duæ breuiſſimæ conſtat, quod E I maximus ſit ramorum egredientium ad illius ſectionem (52. ex 5.) & reliquorum ramorum propinquior illi, maior eſt remotiore, &c. *Ideſt: Quia in quadrante elli-*

N



te ellipsis C B ducuntur à concursu E duo breuisecantes E I, E H; igitur (ex propositione 72. huius) erit breuisecans E I vertici A propinquior maximus omnium ramorum cadentium ex concursu E ad ellipsis peripheriam C H; & propinquior maximo E I maior erit remotiore, sed non omnium ramorũ cadentium ad quadrantem C B, sed eorum solummodo, qui inter verticem C, & infimum breuisecantem E H, & aliquorum propè ipsum; nam rami secantes cadentes propè punctum H hinc inde successiuè augentur, vt dictum est in notis propos. 67. in eiusque Corollario.

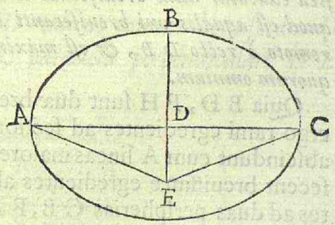
Nec non, quia H M, G N sunt duæ breuissimæ, constat, vt dictũ est, quod G E sit maximus ramorũ egredientiũ ex vtroque latere eius ad A H, &c. C
Quorũ verborũ sensus hic est. Quia ex concursu E ducuntur duæ breuisecantes E G & E H ad semiellipsim A B C, quarum E G secat vtrumq; axim, at E H secat tantummodo mensuram; ergo, sicuti in præcedenti propos. 74. ostensum est, erit ramus E G maximus omniũ cadentiũ ad peripheriam H A, &c. At quia dubitari posset de certitudine huius consequentiæ, quandoquidem hypotheses non sunt omnino eædem; in propositione enim 74. non tres, sed duo tantummodo breuisecantes ex concursu E ad sectionem C B A ducebãtur, hic vero etiam tertia breuisecans ducitur: sed si consideretur progressus Apollonij, eandem conclusionem ex vtraque hypothesi deduci posse percipitur; nam (ex propositione 72. huius) breuisecans E H, infra breuisecantem E I positus, minimus est omnium ramorum cadentium ex E ad peripheriam H B ellipsis, & propinquior minimo E H minor est remotiore, reliquorum vero ramorum cadentium ad quadrantem B A maximus est breuisecans E G, vt ostensum est in præcedenti proposit. 74. ex Lemmate 12. huius, & ex Corollario proposit. 67, atque propinquior ramus maximo E G eorum, qui ad quadrantem B A cadunt maior est remotiore; quapropter ramus E G maximus est omnium ramorum ex E ad ellipsis peripheriam H A cadentium.

Dico

d Dico etiam, quod E G maior sit, quàm E I, &c. *Idest: Ostendetur etiam, quod ramus E G maximus etiam sit omnium ramorũ cadentium ad peripheriam C H, propterea quod E G ostendetur maior E I maximo eorum, qui ad peripheriam C H duci possunt. Ducatur ex puncto I recta I O parallela axi maiori A C, quæ secabit axim minorem, & sectionem, cum punctum I cadat inter vertices C, & B duorum axium; secet igitur sectionem in O, coniungaturque E O, atque ex punctis I, O, G, E ducantur perpendiculares ad axim I P, O Q, G R, E F S, quæ secent axim in P, Q, R, F, & I O in S, & quia G N, &*
I K sunt breuissimæ; ergo D R ad R N, atque D P ad P K eandem proportio- 15. huius.
nem habent, nimirum eam, quàm habet latus transuersum ad rectum; est verò K F minor, quàm D K, atque R F maior, quàm D R; igitur F P ad P K minorem proportionem habet, quàm D P ad P K, seu quàm D R ad R N, & multo minorem, quàm F R ad R N; quare diuidendo F K ad K P minorem proportionem habebit, quàm F N ad N R, & propter parallelas F E, I P, & similitudinem triangulorum E K F, I K P est E F ad I P, vt F K ad K P; igitur E F ad I P minorem proportionem habet, quàm F N ad N R; sed propter similitudinem triangulorum E F N, G R N est E F ad G R, vt F N ad R N; igitur eadem E F ad I P minorem proportionem habet, quàm ad G R; & propterea I P, seu ei æqualis O Q (in parallegrammo rectangulo P O) maior erit,
quàm G R, & propterea punctum O recedit à puncto G versus B, ideoq; ramus 74. huius.
E G maximus, maior erit ramo E O, &c.

Notæ in Propos. LXXVI.

a SI autem non educatur ex concursu E ad rectum E B ellipsis A B C breuisecans præter transeuntem per centrum, vt E B, vtique erit maximus ramorum secantium egredientium ex concursu ad sectionem.



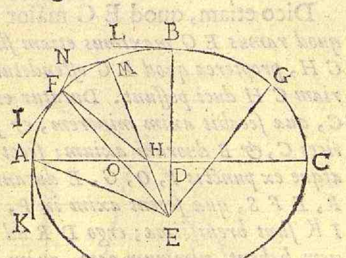
Si vero eductus fuerit ex illo alius breuisecans, ipse erit ramus maximus, &c. *Imperceptibilis est sensus huius textus, quia, præter phrasis Arabicæ difficultatem, nonnulla verba in textu desiderantur; itaq; sic legendum puto. Si ex concursu E in recto E B posito ellipsis A B C non educatur breuisecans præter E B transeuntem per centrum, erit E B maximus ramorum secantium ex concursu ad sectionem egredientiũ.*

Si vero ex illo educatur alius breuisecans, erit æqualis vni breuisecanti ex altera parte recti posito, & omnium reliquorum erit maximus: Si enim hæc extrema verba non opponerentur, propositio non esset vera, vt ostendetur.

b Quia breuissimæ egredientes ab extremitatibus reliquorum ramorum abscindunt cum A, vel B lineam maiorem, quàm secet ramus illius (49. ex 5.) demonstratum ergo est in lineis tangentibus ad extremitatem illius, quemadmodum antea, &c. *Mendose citatur quadragesima nona huius, debet potius legi 43. in qua ostensum est, quod quotiescunque ramus E B ad se-*

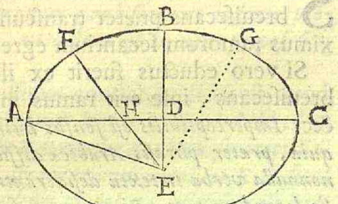
miaxim

miaxim minorem B D habet eandem, aut maiorem proportionem, quàm latus transuerſum A C ad eius latus rectum; tunc nullus alius ramus ad ſectionem A B C breuiſecans duci poteſt, & qualibet linea breuiſsima vt F H ducta ex puncto F ad axim A C cadit infra ramum E F ad partes centri, & propterea ſi per F ducatur



ex 29. 30. huius. *F I contingens ellipſin quilibet ramus E F efficiet cum tangente angulum E F I reſpicientem verticem A acutum: Similiter ſi ducatur A K contingens ſectionem in A coniungaturque E A, erit quoque angulus E A K acutus, & ducta B L contingente* ex 32. lib. 1. *ſectionem in B erit angulus E B L rectus; quapropter omnes rami ex concurſu E ad quadrantem A B ducti efficiunt cum ſuis tangentibus angulos reſpicientes verticem A acutos, & vnus tantummodo E B L eſt rectus; igitur ramorum ca-* Coroll. 67. huius. *dentium ex E ad quadrantem B A minimus eſt E A, & quilibet ramus E F propinquior vertici A minor eſt quolibet remotiore; & propterea E B erit maximus: ſimili modo E B maior erit quolibet ramo E G in quadrante B C exiſtente; Et hic eſt ſenſus, ni fallor illorum verborum;* demonſtrabitur in lineis tangentibus, quemadmodum antea oſtenſum eſt, &c.

Notæ in Propoſit. LXXVII.



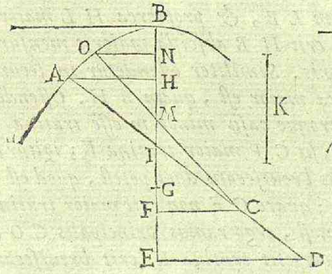
POſtea educatur E F, qui eſt maximus ramorum, &c. *Repono hic ſimiliter verba, quæ in textu deſiderantur; Poſtea educatur alius breuiſecans E F; Dico, quod eſt æqualis vni breuiſecanti E G æquè remoto à recto D B, & eſt maximus reliquorum omnium.*

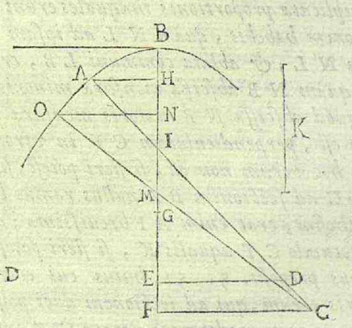
Quia B D, F H ſunt duæ breuiſſimæ; ergo rami egredientes ad ſectionem B F abſcindunt cum A lineas maiores, quàm ſecent breuiſſimæ egredientes ab eorum extremitatibus, & rami egredientes ad duas peripherias C B, F A abſcindunt cum A, vel C lineas minores (52. ex 5.) &c. *Quia in ellipſi ſemiaxis minor B D, & breuiſsima F H concurrunt in E; ergo quilibet ramus ex E ad peripheriam F B ductus cadit* Lem. 8. huius. *infra breuiſsimam ab eius termino ad axim A C ductam: ſimiliter, quia ramus E G æquè recedit ab axi D B, ac ramus E F; propterea, ne dum ramus F E æqualis erit ramo E G, ſed ſimiliter quilibet alius ramus incidens inter E B,* Ibidem. *& E G cadet infra breuiſsimam ab eius termino ad axim A C ductam verſus D, & rami cadentes ad peripherias A F, & C G cadunt ſupra breuiſsimas ab* Ibidem. *eorum terminis ad axim C A ductas ad partes A, & C.*

Conſtat itaque, vt dictum eſt de lineis tangentibus, quod E F ſit maximus ramorum ſecantium egredientium ex E ad A B C, quod erat oſtendendum, &c. *Quæ poſtrema verba ſic intelligi, ac corrigi debent. Quia quilibet ramus ex E ad A F ductus cadit ſupra breuiſsimam ad partes A ab eius* Lem. 8. huius. *termino ad axim C A ductam; igitur, vt multoties dictum eſt, conſtituit cum ſua tangente angulum reſpicientem verticem A acutum, ſicuti angulus E A K acutus quoque eſt, & omnium ramorum ad peripheriam A F cadentiũ tantummodo angulus E F I eſt rectus; igitur omnium ramorum ex E ad peripheriam A F cadentium maximus eſt F E remotiſsimus à vertice A, eſtque ramus E G* Coroll. Prop. 67. huius. *æqualis E F, & E G maximus eſt ramorum cadentium ex E ad peripheriam G C; igitur ramus E F maximus etiam eſt ramorum cadentium ad peripheriam G C: poſtea ducto quolibet ramo E M inter F, B, & M N tangente ſectionem in M, quæ conueniat cum tangente I F in N, quia E M, vt dictum eſt, cadit infra breuiſsimam ex M ad axim B A ductam, cum qua contingens N M angulum rectũ conſtituit, (ex 30. huius) ergo angulus E M N reſpiciens verticem A eſt obtuſus, & angulus E F N eſt rectus, cum F O ſit breuiſsima, igitur duo quadrata E F, F N maiora ſunt duobus quadratis E M, M N ſimul ſumptis, & ablatum quadratum M N ex minori ſumma maius eſt ablato quadrato N F, cum contingens N F vertici A maioris axis propinquior ſit; ergo quadratum* 70. huius. *E F maius ex quadrato E M, ideoque ramus E F maior erit quolibet ramo E M inter F, & B poſito. Non ſecus oſtendetur E M maior quàm E B; quare ramus E F maximus erit omnium cadentium ad peripheriam F B. Eodem modo ramus breuiſecans E G maximus erit omnium cadentium ad peripheriam G B; & propterea ramus E F maximus erit omnium ad peripheriam F B G cadentium; Quapropter ramus breuiſecans E F æqualis erit vni tantummodo E G æquè ab axi remoto, & maximus omnium ramorum ex concurſu E ad ſemiellipſim A B C cadentium, quod erat oſtendendum.*

Sicuti in prioribus propoſitionibus factum eſt, reperientur, quotnam rami inter ſe æquales à puncto concurſus ad coniſectionem duci poſſunt, qua occaſione afferam propoſitiones aliquas non iniucundas, quarum prima erit.

Si ad coniſectionem B A à concurſu D vnicus tantum breuiſecans D A duci poſsit, & ducatur quælibet F C parallela perpendiculari D E PROP. 7. Addit.





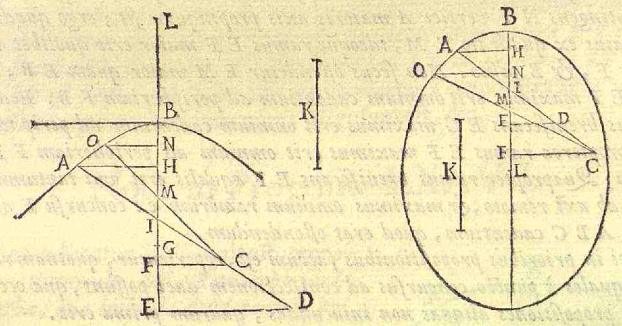
inter productionem breuiſsimæ, & axim intercepta quem ſecet in F, reperia-

periaturque Trutina K minoris, vel maioris mensuræ F B: dico perpendicularem C F minorem esse Trutina K.

Secentur primo in parabola abcisæ B H, & B N æquales trienti excessus inæqualium mensurarum supra semierectum (vt præcipitur in propositione 51. huius) manifestum est, abscissam B N minorem esse ipsa B H, quando B F minor est, quàm B E, & maior, quando B F superat ipsam B E; eo quod eorum triplæ, vna cum semierecto, idest mensura B F minor fuerat in primo casu, & maior in secundo, quàm mensura B E.

In hyperbola vero, & ellipsi fiat proportio rectæ H L ad semiaxim transuersum L B subtriplicata eius, quàm inuersæ L E segmentum L G homologum lateri transuerso habet ad semiaxim transuersum (ex præscripto proposit. 52. & 53. huius) pariterque fiat proportio N L ad L B subtriplicata eius quàm inuersæ minoris L F in primo casu, & maioris in secundo, segmentum homologum lateri transuerso habet ad L B.

Lem. 7. huius.



Quoniam in primo casu maius segmentum G L ad eandem L B habet maiorem proportionem, quàm minus segmentum ex L F dissectum; igitur earum subtriplicatæ proportiones inæquales erunt, videlicet H L ad L B maiorem proportionem habebit, quàm N L ad ipsam L B, & propterea H L maior erit, quàm N L, & ablata communi L B, erit H B abscissa maioris mensuræ maior, quàm N B abscissa mensuræ minoris. Similiter ostendetur in secundo casu, quod abscissa N B maioris mensuræ maior est, quàm B H. Ostendendum modo est, perpendicularem C F in vtroque casu minorem esse trutina K; Si enim hoc verum non est, si fieri potest, sit C F maior trutina K; igitur ex concursu C ad sectionem B A nullus ramus breuisecans duci potest, quod est contra hypothesim; erat enim A I breuissima; quare C F non erit maior trutina K. Sit secundo C F æqualis K, si fieri potest, ergo ramus principalis C O ductus legibus proposit. 51. 52. huius cui competit trutina K erit breuisecans singularis eorum, qui ad sectionem duci possunt, nec vllus alius, præter C O, breuisecans erit: cadit vero ramus C A infra, vel supra ramum C O, propterea quod abscissæ B H, & B N inæquales ostensæ sunt; igitur ramus C A diuersus à breuisecante singulari C O non erit breuisecans, quod est contra hypothesim;

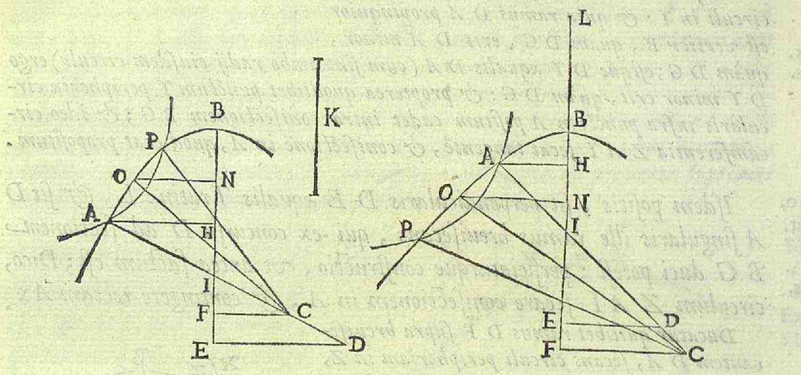
51. 52. huius.

non

non ergo perpendicularis C F æqualis erit Trutinæ K, sed prius, neque maior illa erat; igitur perpendicularis C F necessario minor erit Trutina K; quod erat ostendendum.

PROP. 8. Addit.

Iisdem positis, si in productione breuissimæ A I sumatur quodlibet punctum C citra terminum D perpendicularis D E, à puncto C duci poterit alter ramus breuisecans supra C A incedens; & si punctum C sumatur vltra punctum D poterit ex C duci alter ramus breuisecans infra ipsum C A.



Quoniam quælibet recta C F parallela perpendiculari D E interposita inter productionem breuissimæ A I, & axim minor est Trutina K nouæ mensuræ B F (ex præcedenti propos.) propterea ramus principalis C O cadit supra ipsum C A, quando B F minor est, quàm B E, & tunc quidem duci potest hyperbola ex puncto A circa asymptotos (vt in propositione 51. & 52. factum est) quæ producta occurret sectioni B A inter B, & O, vt in P, & coniuncto radio C P, erunt duo rami C A, & C P breuisecantes, quorum infimus est C A. Si vero punctum C sumatur vltra punctum D, tunc quidem mensura B F maior erit, quàm B E, & propterea abscissa N B maior, quàm H B, & ideo principalis ramus C O cadet infra ramum C A; & denuo facta eadem constructione proposit. 51. & 52. huius, erunt duo rami C P, & C A breuisecantes, quorũ supremus versus B erit C A, quod erat probandum.

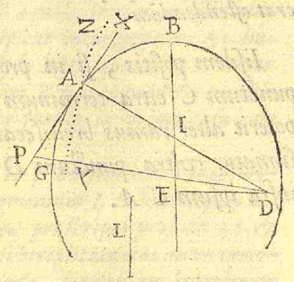
51. 52. 53. huius.

PROP. 9. Addit.

Sit conisectio, vel ellipsis portio quadrantis B A G, cuius axis B E, perpendicularis E D, cuiusque Trutina L sit minor perpendiculari D E, & centro D, interuallo cuiuslibet rami secantis D A circulus Z A Y describatur, & ex puncto A ducatur recta A X contingens sectionem:

nem:

nem: Dico, quod circumpherentia Z Y secat tangentem rectam lineam X A, & conisectionem B G in puncto A.



Quoniam perpendicularis D E ponitur maior trutina L; ergo quilibet ramus D A cadit

51. 52. huius. supra breuissimam ex puncto A ad axim B E ductam: efficit vero breuissima cum tangente

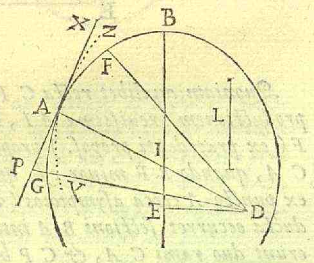
29. 30. huius. A X angulum rectum; ergo angulus D A X est acutus; & propterea recta A X cadit intra circulum A Z; sed A X cadit extra conisectio-

35. 36. lib. 1. nem B A, quàm contingit; ergo circumferentia Z A cadit extra sectionem B A, & extra tangentem A X: postea ducatur quilibet ramus D G infra ramum D A secans circumferentiã circuli in Y: & quia ramus D A propinquior est vertici B, quàm D G, erit D A minor,

64. 65. huius. quàm D G; estque D Y æqualis D A (cum sint ambo radij eiusdem circuli) ergo D Y minor erit, quàm D G: & propterea quodlibet punctum Y peripheriæ circularis infra punctum A positum cadet intra conisectionem B G; & ideo circumferentia Z A Y secat tangentẽ, & conisectionẽ in A, quod erat propositum.

PR. 10. Addit. Isdem positis, sit perpendicularis D E æqualis Trutinæ L, & sit D A singularis ille ramus breuisecans, qui ex concursu D ad sectionem

51. 52. huius. B G duci potest; perficiaturque constructio, vt antea factum est; Dico, circulum Z A Y secare conisectionem in A, & contingere rectam A X.



Ducatur quilibet ramus D F supra breuisecantem D A, secans circuli peripheriam in Z, & quilibet alius ramus D G infra D A secans eandem peripheriam in Y. Et quia ex concursu D ad sectionem B G vnicus tantum bre-

Ibidem. uisecans D A duci potest; igitur ramus D F

67. huius. propinquior vertici B minor est remotiore D A, & D A propinquior vertici B minor est remotiore D G: suntque rectæ D Z, D Y æquales eidem D A (cum sint radij eiusdem circuli) ergo D Z maior est, quàm D F, & D Y minor, quàm D G; & propterea quodlibet punctum Z circuli supra A sumptum cadit extra conisectionem B F A, & quodlibet infimum punctum Y eiusdem circuli cadit intra eandem conisectionem A G; quapropter circumferentia circuli Z A Y secat conisectionem B A G in A. Postea quia recta A X contingens sectionem in A perpendicularis est ad breuisecantem D A, cum I A sit breuissima; igitur recta linea X A, quæ perpendicu-

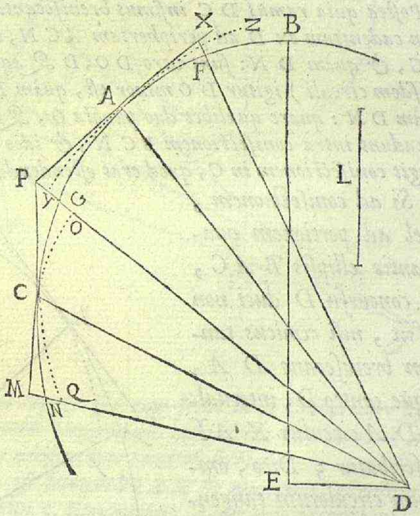
29. 30. huius. laris est ad radium D A, continget circulum Z A Y. Quapropter circulus Z A Y secant conisectionem B A G in A, & tangit eandem rectam lineam A X, quàm contingit sectio conica B A G, & in eodem puncto A, quod erat ostendendũ.

COROL-

COROLLARIVM.

Hinc constat, supremam circuli peripheriam A Z cadere in locum à tangente X A, & conisectionem B A contentum, infimam vero circuferentiam A Y cadere ne dum infra tangentem, sed etiam infra conisectionem A G; eoquod recta A X cadit extra circuli peripheriam A Z, quàm contingit in A, & eadem circumferentia A Z cadit extra sectionem A B, quàm secat in A, vt dictum est.

Mirabile quidem hoc videri poterit aliquibus, qui contingentiæ angulos, quos vocant, verè angulos esse censent; nam hic duæ circumferentiæ curuæ, conica nimirum B A G, & circularis Z A Y se mutuo secant in A, & tamen ambo tanguntur ab eadẽ recta linea A X in eodem puncto A, in quo illæ se mutuò secant. Vnde colligent etiam, quod anguli contingentiæ facti à conisectione B A G, & recta linea X A non sunt æquales inter se, quando punctum A in vertice axis non existit; nam duo anguli contingentiæ circumferentiæ circularis, & rectæ tangentis X A æquales sunt inter se: at angulus contingentiæ sectionis conicæ supremus respiciens verticem B maior est angulo contingentiæ circularis, vt dictũ est: infimus vero angulus contingentiæ à sectione conica, & eadem tangente contentus minor est eodem angulo contingentiæ circularis, & propterea supremus angulus contingentiæ sectionis conicæ maior erit inferiori.

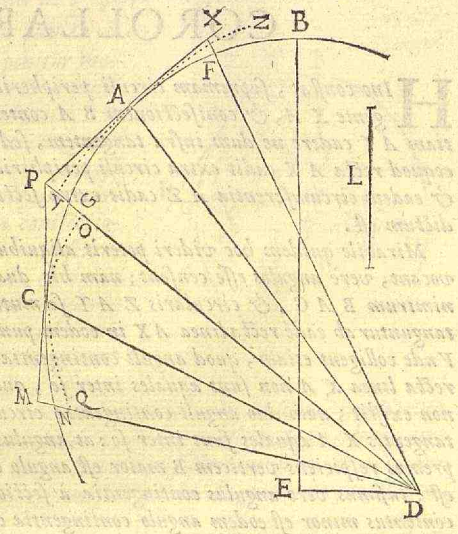


Sit perpendicularis D E minor trutina L, sintque D A, & D C duo illi rami, qui tantummodo breuisecantes esse possunt omnium ramorum ex concursu D ad sectionem B C cadentium; atque centro D, interuallo D A describatur circulus Z A Y; pariterque centro D, interuallo D C describatur circulus O C Q; ducanturque rectæ X P, M P contingentes conisectionem in A, & C. Dico, circulũ Z A Y contingere conisectionem in A, & extra ipsam cadere, at circulum O C Q contingere eandem conisectionem in C, & intra ipsam cadere. PROP. 11. Addit. Ex 51. 52. 53. huius.

Ducantur quilibet rami D F, D G supra, & infra breuisecantem D A, secantes circulum Z A Y in Z, & Y; pariterque ducantur quilibet rami D G,

O D N

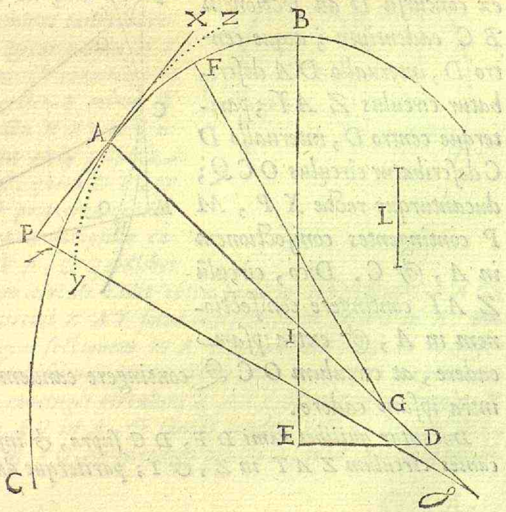
D N ſupra, & infra breuiſecantem D C, ſecantes circulum O C Q, in O, & Q, dummodo D G non ducatur infra D C in primo caſu, nec ſupra D A in ſecundo. Quoniam ramus D A ſupremus duorum breuiſecantium maximus eſt omnium ramorum cadentium ad peripheriam B A C; igitur D A maior erit, quàm D F, & quàm D G; ſunt verò D Z, & D Y æquales eidem D A (cum ſint radij eiuſdem circuli) ergo D Z maior eſt, quàm D F; pariterque D Y maior eſt quàm D G: & propterea duo quælibet puncta Z, Y eiuſdem circuli Z A Y cadunt extra coniſectionem B A G; & ideo circulus Z A Y tantummodo in puncto A coniſectionem extrinſecus tangit. 72. huius.



Poſtea quia ramus D C infimus breuiſecantium eſt minimus omnium ramorum cadentium ex D ad peripheriam A C N; ergo ramus D C minor eſt, quàm D G, & quàm D N: ſunt vero D O, D Q æquales eidem D C (cum ſint radij eiuſdem circuli) igitur D O minor eſt, quàm D G: pariterque D Q minor eſt, quàm D N: quare quælibet duo puncta O, Q circuli O C Q hinc inde à puncto C cadunt intra coniſectionem B C N, & ideo circulus O C Q intrinſecus contingit coniſectionem in C, quod erat oſtendendum. 72. huius.

PROP. 12. Addit.

Si ad coniſectionem, vel ad portionem quadrantis ellipſis B A C, ex concurſu D duci non poſsit, niſi vnicus tantum breuiſecans D A, atque centro D, interuallo D A circulus Z A Y deſcribatur; Dico, omnium circulorum tangentium eandem rectam lineam X A P (quam cõtingit quoque coniſectio in A) vnicum eſſe circulum



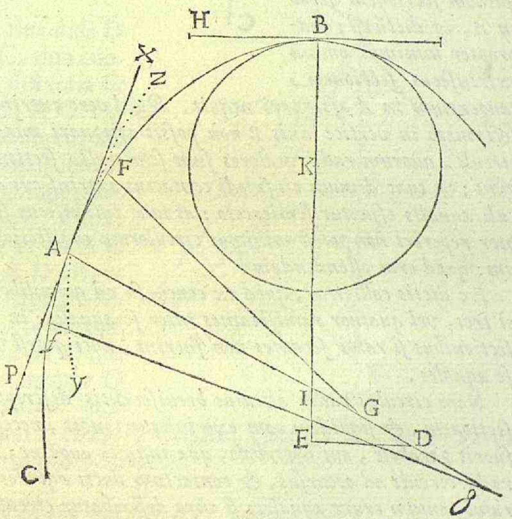
culum Z A Y, qui coniſectionem in puncto A ſecat.

Sumatur enim quodlibet punctum G in productione breuiſsimæ A I ſupra, vel infra punctum D: manifeſtum eſt (ex 8. præcedentium propoſit.) à puncto G duci poſſe duos breuiſecantes ramos, quorum A G erit infimus, ſi punctum G cadit ſupra punctum D, & tunc circulus radio G A deſcriptus continget coniſectionem intrinſecus in A: ſi vero punctum g cadat infra punctum D, tunc pariter ex g duo breuiſecantes duci poſſunt ad ſectionem, quorum ſupremus erit g A; & propterea circulus radio g A deſcriptus continget coniſectionem B A C extrinſecus in A; quapropter circulus radio D A deſcriptus (quem contingit eadem recta linea X A quæ tangebat ſectionem in A) vnicus erit, qui ſectionem B C ſecet in A, quod erat oſtendendum. 11. Additarũ. 8. Additarũ. 11. Additarũ.

PROP. 13. Addit.

Circulorum omnium intrinſecus tangentium coniſectionem non in axis vertice, aſsignari non poteſt maximus: tangentium vero intrinſecus ſectionem in termino axis maximus erit, cuius radius æqualis eſt ſemierecto.

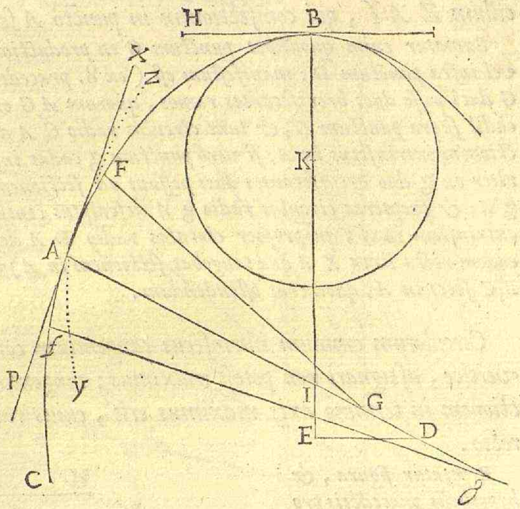
Repetatur figura, & hypotheſis præcedẽtis propoſitionis. Quoniã quilibet circulus radio G A minori, quàm D A deſcriptus ſemper intrinſecus tangit coniſectionem in A (vt in præcedẽti propoſitione dictum eſt) vbicumque ponatur centrum G ſupra punctũ D; neque augendo radium G A efficitur alius contactus circuli, & ſectionis, quàm intrinſecus, & tunc primo circulus deſinit intrinſecus tangere ſectionem in A, quando D A efficitur radius, ſcilicet quando non amplius intrinſecus ſectionem tangit, ſed eam ſecat in A; quapropter aſsignari non poteſt maximus circulorum tangentium intrinſecus ſectionem in A. Quod verò circulorum intrinſecus tangentium eandem ſectionem in vertice axis B, ille, cuius radius B K æqualis eſt ſemierecto B H ſit maximus, oſtenſum eſt à Maurolico propoſ: 5. 8. & 11. libri 5. Conicorum. Patet ergo propoſitum.



PROP. 14. Addit.

Iiſdem poſitis: dico circulorum omnium extrinſecus tangentium coniſectionem minimum aſsignari non poſſe.

11. Addit. *Sumpto in eadem figura quolibet puncto* g *infra punctum* D, *quoniam circulus radio* g *A descriptus contingit extrinsecus conisectionem in A, nec vnquam cessabit prædictus cõtactus extrinsecus, licet magis, ac magis in infinitum punctum* g *ipsi* D *propinquior fiat, & tunc demum cessat huiusmodi extrinsecus contactus, quando describitur circulus radio* D *A, qui quidem sectionem secat in A, vt dictũ est; quapropter minimus omniũ extrinsecus sectionem*



tangentium in A assignari nequit. Quod vero extrinsecus tangentium eandem sectionem in vertice axis B non possit assignari minimus, patet; nam omnes
Maurol. 4. 7. & 10. lib. 5. Conic. *circuli, quorum radij maiores sunt semierecto sectionis, eam extrinsecus tangunt; & tunc demum eiusmodi contactus extrinsecus cessat, quando radius circuli æqualis efficitur semierecto: at tunc intrinsecus sectionem tangit; quapropter reperiri non potest minimus circulorum conisectionem extrinsecus tangentium: quod erat ostendendum.*

Ex dictis colligitur, quod ex concursu ad quamlibet conisectionem possunt duci tres, vel quatuor ramisecantes inter se æquales: in ellipsi vero, & in reliquis sectionibus si rami secantes non fuerint, duci potest vnus, vel duo rami inter se æquales.

Nam circulus radio alicuius breuisecantis descriptus tangit, vel secat conisectionem, & siquidem eam extrinsecus tangit, necessario eandem bis secat, si fuerit parabole, aut hyperbole, quæ infinitè augẽtur, & dilatãtur; & propterea radij circuli ad occursus, & contactum ducti æquales sunt inter se; & ideo tres rami tantum erunt æquales: si vero describatur circulus, cuius centrum est concursus, radius vero minor est maximo, & maior minimo duorum breuisecantium: tunc quidem necessario circulus quatuor in punctis sectioni conicæ occurret: & propterea quatuor radij ad occursus ducti erunt inter se æquales.

At in ellipsi si concursus fiat circuli centrum, radius vero breuisecans maximus trium, qui in ea duci possunt, circulus prædicto radio descriptus continget quidem exterius ellipsim, neque deinceps vnquam ei occurret: & propterea ramus ille maximus erit vnicus, cum nullus alius ei æqualis duci possit in eadem ellipsi: si verò à concursu in productione axis ellipsis posito describatur circulus, cuius radius minor sit maximo ramo, sed maior vtroque terminato; tunc quidem circulus duobus in locis ellipsi occurret; & propterea duo tantum rami inter se æquales erunt; pari modo, quando à concursu tres breuisecantes ad ellipsin educun-

educuntur, tunc quidem circulus, cuius centrum est concursus, radius vero minor maximo breuisecantium, & maior duobus reliquis necessariò ellipsin duobus in locis secabit; & ideo duo tantummodo rami inter se æquales erunt.

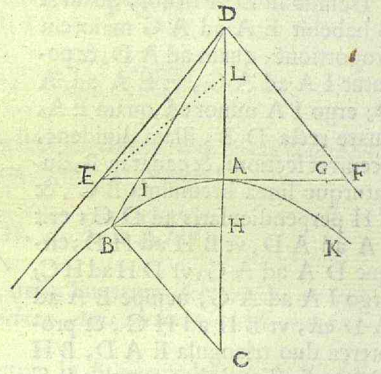
SECTIO DECIMAQVINTA

Continens Propos. XXXXI. XXXXII. XXXXIII. Apollonij.

PROPOSITIO XXXXI.

a IN hyperhola angulus contentus à linea breuissima, & à mensura minor est angulo compræhenso à linea distante cum cõtinente.

b Sit hyberbole A B, eius axis D C, linea breuissima B C, duo continentes D E, D F, & distantia sit A E, & dimidium erecti A G: Dico, angulum B C D minorem esse angulo D E A. Educamus itaque perdendicularem B H, & iungamus B D, quæ secet A E in I. Quia D A ad A G est, vt D H ad H C (14. ex 5.) & I A ad A D est, vt B H ad H D; ergo ex æqualitate I A ad A G, eandem proportionẽ habebit, quàm B H ad H C, & propterea E A ad A G, nempe D A ad distantiam A E maiorẽ proportionem habebit, quàm B H ad H C igitur angulus B C H minor est, quàm D E A, quod erat ostendendum. 9. huius.



PROPOSITO XXXXII.

a IN parabola lineæ breuissimæ productæ occurrunt sectioni ex vtraque parte.

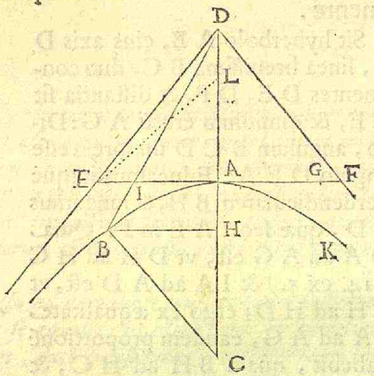
Quoniam breuissima est linea recta secans diametrum paraboles intra sectionem; & propterea sectioni occurret ex vtraque parte (28. ex pr.) 27. lib. 1. & hoc erat ostendendum.

PROP.

PROPOSITIO XXXXIII.

SI inclinatus axis hyperboles erectum non excedit, nulla linearum breuissimarum sectioni ex altera parte occurret: si verò maior illo fuerit, tunc breuissimarum linearum aliquæ occurrunt sectioni, aliquæ verò non occurrunt. a b

Sit priùs D A non maior, quàm A G: & quia D A ad A G eandē proportionem habet, quàm quadratum D A ad quadratum A E, erit D A non maior quàm A E; & propterea angulus D E A non erit maior angulo E D A: sed maior fuerat angulo B C H (41. ex 5.) ergo angulus E D A, nempe A D F maior est, quàm B C D, & propterea B C, D F non conueniunt ad partes C, F; igitur B C non occurrit sectioni ad partes K, A; eo quod si illam secaret, etiam ipsi D F occurreret (8. ex 2.) quare non occurrit sectioni in duobus punctis. c



Deinde sit D A maior, quàm A G habebit E A ad A G maiorem proportionē, quàm ad A D; & ponatur I A ad A G, vt E A ad A D; ergo I A minor est, quàm E A,
Secunda lib. 2. quare recta D B, illam diuidens, occurret sectioni, & cadat in B, ducaturque linea breuissima B C, & B H perpendicularis ad D C; erit I A ad A D, vt B H ad H D; estque D A ad A G, vt D H ad H C;
14. huius. ergo I A ad A G, nempe E A ad A D est, vt B H ad H C, & propterea duo triangula E A D, B H C sunt similia; igitur angulus B C H æqualis est E D A, nempe F D A; quare B C, D F sunt parallelæ,
13. lib. 2. nec possunt se se mutuo secare; ergo B C non occurret sectioni K A. Lineæ vero breuissimæ, quæ in peripheria A B cadunt, continent cum
Conuerf. 8. lib. 2. C A angulos minores angulo B C D (26. 27. ex 5.) vnde non occurrent ipsi D F, & propterea neque sectioni occurrent. At ille, qui cadit extra hanc sectionis peripheriam; si producatur continet cum C D angulum maiorem angulo B C D (26. 27. ex 5.) igitur productus occurrit D F, & occurrit sectioni A K: quod erat ostendendum.

Notæ in Propos. XXXXI.

ANgulus contentus à breuissima linea, & mensura minor est angulo contento à distante cum continente in sectione, &c. *Adijcio particulam*

ticulam in hyperbole, *quæ in textu desideratur. Vocat interpres Arabicus lineam distantem ipsam A E, quæ contingit hyperbolem in vertice axis A, & interponitur inter verticem A, & continentem, seu asymptoton D E.*

b Sit sectio, D C diameter illius, &c. *Legendum puto; Sit hyperbole A B eius axis D C. Postea quia D A, ad A G, seu latus transuersum ad rectum est, vt D H ad H C, atque I A ad A D est, vt B H ad H D (propter similitudinem triangulorum I A D, & B H D) ergo ex æqualitate ordinata I A ad A G est vt B H ad H C: deinde quia linea A E media proportionalis est inter semiaxim transuersum D A, & semierectum A G, cum quadratum ipsius A E quadrans sit figuræ quæ ad diametrum per A ductum constituitur; igitur E A ad A G erit, vt D A ad A E, est vero E A maior, quàm I A; igitur I A ad A G minorem proportionem habet, quàm E A ad A G, seu quàm D A ad A E: erat autem B H ad H C, vt I A ad A G: igitur B H ad H C minorem proportionem habet, quàm D A ad A E: fiat postea L A ad A E, vt B H ad H C circa angulos rectos A, H, coniungaturq; L E, manifestum est, L A minorem esse D A, & angulum A E L minorem esse angulo A E D: sed propter similitudinem triangulorum B H C, L A E est angulus C æqualis angulo A E L; & proptrea angulus A E D maior est angulo B C H.*

Ex 14. huius.

3. lib. 2.

Notæ in Propos. XXXXII.

a QVia est linea recta secans diametrum paraboles; &c. *Addo illam particulam* breuissimam, *quæ in textu desiderari videtur.*

Notæ in Proposit. XXXXIII.

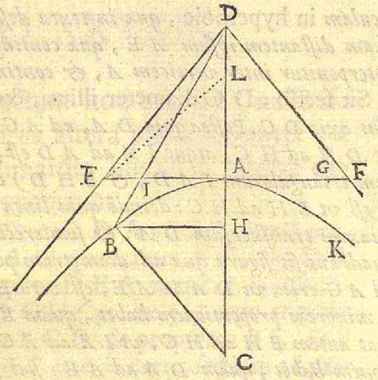
a INclinatum si non excedit erectum, nulla linearum, &c. *Addo, quæ euidenter deficiunt in textu, legi enim debet: Axis inclinatus idest transuersus si non excedit erectum, &c.*

b Et quia D A ad A G est vt quadratum D A ad quadratum A E, &c. *Eo quod quadratum A E æquale est quartæ parti figuræ, quæ ad duplam semiaxis D A applicatur, scilicet æquale est rectangulo D A G; igitur D A, A E, A G sunt continuæ proportionales: ponitur vero D A æqualis, aut minor, quàm A G; igitur D A æqualis, aut minor quoque erit, quàm A E; & propterea in triangulo D E A erit angulus D E A æqualis, aut maior angulo A D E, seu A D F (cum angulus continentiæ secetur bifariam ab axi) & prius erat angulus C minor angulo A E D; igitur angulus B C D minor erit alterno angulo F D C; vnde constat rectas lineas F D, C B concurrere posse, si vlterius producantur ad partes D, B; non autem ad partes C, & F.* 3. lib. 2. 41. huius.

c Quia si occurreret illi occurreret D F (7. ex 2.) secaretque sectionem in duobus punctis, &c. *Sensus huius textus talis est. Quoniam, vt ostensū est, recta B C infinite producta non occurrit asymptoto D F ad partes F C; igitur recta C B producta non secabit peripheriam hyperboles ad partes K; nam si ipsam secaret, secaret quoque asymptoton D F ad partes F, quod non ponitur. Ex his inferri debet conclusio principalis, nimirum, quod B C non occurrit sectioni duobus in punctis: & hac ratione textum alioqui corruptum emendaui.* 8. lib. 2. Ibidem.

Lineæ

Lineæ vero breuiſſimæ, quæ cadunt ad peripheriam ſectionis B A, continent angulos minores, quàm B C D, vtique non occurrunt D F, &c. *Ideſt: quia quælibet breuiſsima ex puncto peripheriæ A B ad axim ducta efficit angulum propin-* d
26. 27. huius. *quiorem vertici, minorem ipſo angulo C; & propterea quælibet breuiſsima ad peripheriam A B extenſa ſecabit ne-*
28. huius. *ceſſario ipſam B C vlterius productam ad partes C: ſed prius oſtenſa fuit B C parallela aſymptoto D F; igitur quælibet breuiſsima ad peripheriam A B educta ideſt inter parallelas poſita non occurret alteri æquidiſtantium D F ad partes F, ſed ad partes oppoſitas verſus*
Conuerſ. 8. lib. 2. *D; eo quod quælibet recta linea intra hyperbolam ducta non ſecat peripheriam ſectionis in ea parte, in qua continentem D F nõ ſecat; At quælibet alia breuiſsima*
26. 27. huius. *infra C B ducta, neceſſario efficiet ad axim angulum maiorem, quàm C; & pro-*
28. huius. *pterea vlterius producta ſecabit ipſam B C ad partes C; ſed quælibet breuiſsima extra parallelas poſita quæ ſecat vnam æquidiſtantium B C, ſecabit quoq; reliquam ad eaſdem partes F C; quare prius ſectioni occurret, vt dictum eſt.*

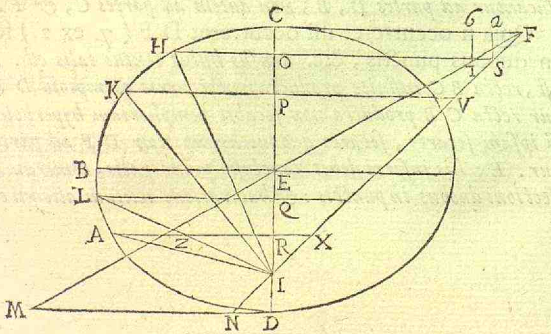


SECTIO DECIMASEXTA

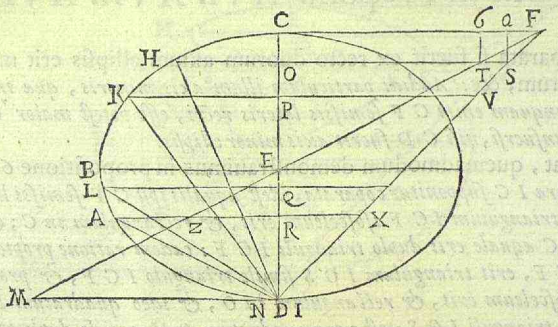
Continens XVI. XVII. XVIII. Propoſ. Apollonij.

SI menſura comparata ſumpta fuerit in axe recto minore ellipſis, erit maximus ramorum ab eius origine egredientium, & illi propinquior maior eſt remotiore: minimus vero ramorũ eſt differentia recti, & comparatæ, & illi propinquior, minor eſt remotiore, atque exceſſus quadrati comparatæ ſupra quadratum cuiuſcunque rami aſſignati æqualis eſt exemplari applicato ad abſciſſam illius rami, ſiue comparata ſit minor, aut æqualis, aut maior recto. a

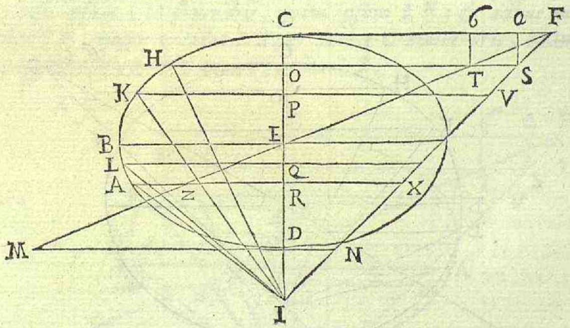
Sit D C rectus axis minor ſectionis ellipticæ A B C ſitque C I comparata, & rami I H, I K, I B, I L, I A, I D, & ſemiſſis erecti ſit C F, & centrum E, & edu-



educamus F E quouſque ſecet D M perpendicularem ad axim in M, & F I occurrat D M in N, & ducantur ad axim perpendiculares H O T S, K P V, B E, L Q, A R: & ſit in prima figura C I minor recto, in ſecun-
b da æqualis, in tertia vero maior. Conſtat, quemadmodum demonſtrauimus in propoſitione ſexta huius, quod quadratum I C æquale ſit duplo trianguli I C F; at quadratum O H duplum eſt trapezij O T F C (1. ex 5.) & quadratum I O duplum eſt trianguli O I S; ergo quadratum I C, nempe duplum trianguli I F C excedit quadratum I H duplo
c trianguli F T S, quod eſt æquale rectangulo T a: & conſtat, vti dictum



eſt, quod ſit exemplar applicatum ad O C; ergo quadratum I C excedit quadratum I H exemplari applicato ad O C abſciſſam ipſius I H. Patet etiam, quod quadratum I C excedit quadratum I K exemplari applica-
d to ad P C; idemque conſtat in I B; igitur I C maior eſt, quàm I H, & I H, quàm I K, & I K, quàm I B: poſtea, in figura prima, & tertia,



e quia triangulum F C E æquale eſt triangulo D E M; ergo quadratum I C æquale eſt duplo trianguli N F M cum duplo trianguli D I N, quadratum vero I D æquale eſt duplo trianguli D I N; igitur quadratum

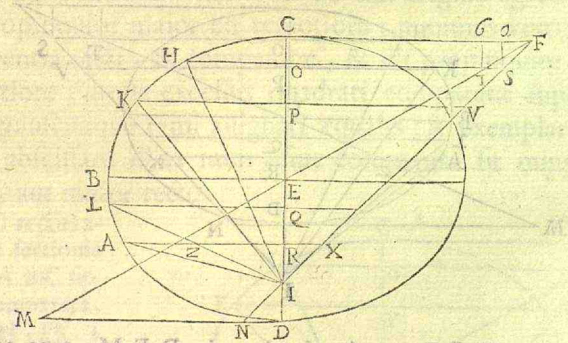
P ID

I D minus eſt, quàm quadratũ I C duplo trianguli N F M, quod æquale eſt exemplari applicato ad D C, & quadratum I R æquale eſt duplo trianguli I X R, & quadratum A R æquale eſt duplo trapezij R M (3. ex 5.) ergo quadratũ I A minus eſt, quàm quadratum I C duplo trianguli F Z X, quod æquale ex exemplari applicato ad C R (6. ex 5.) ſimiliter quadratum I L minus eſt, quàm quadratum I C exemplari applicato ad C Q; eſtque C D maior, quàm C R, & C R quàm C Q; ergo I A maior eſt, quàm I D, & I L, quàm I A; quod erat propoſitum.

Notæ in Propoſit. XVI. XVII. XVIII.

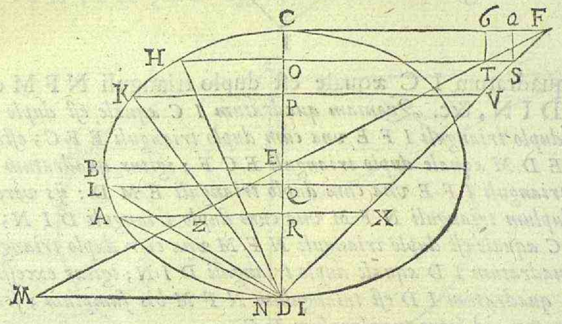
a COmparata ſi fuerit ex recto duorum axium ellipſis erit maximus ramorum, &c. *Addidi particulam illam axis minoris, quæ in textu deficiebat, nunquam enim C F ſemiſsis lateris recti, eſſe poteſt maior C E ſemiſſe lateris tranſuerſi, niſi C D fuerit axis minor ellipſis.*

b Conſtat, quemadmodum demonſtrauimus in propoſitione 6. &c. *Quoniã menſura I C ſupponitur cõparata, ideſt æqualis ipſi C F ſemiſsi lateris recti; propterea triangulum I C F iſoſceleum erit, & rectangulum in C; & ideo quadratum I C æquale erit duplo trianguli I C F: eadem ratione propter parallelas S O, & C F, erit triangulum I O S ſimile triangulo I C F, & propterea illud quoque iſoſceleum erit, & rectangulum in O, & ideo quadratum I O æquale* (1. huius.) *erit duplo trianguli I O S: eſt verò quadratum O H æquale duplo trapezij F T O C; igitur quadratum I H (quod eſt æquale duobus quadratis I O, O H circa angulum rectum O) æquale erit duplo trianguli I O S cum duplo trapezij F T O C, ſed hæc duo ſpatia minora ſunt duplo integri trianguli I C F, eſtque defectus duplum trianguli F T S, ſiue rectangulum S T b a; igitur duplum trianguli I C F, ſiue quadratum I C maius eſt quadrato I H, & exceſſus eſt rectangulum T a: quod vero rectangulum T a ſit exemplar demonſtrabitur modo, vt in ſexta propoſitione huius.*

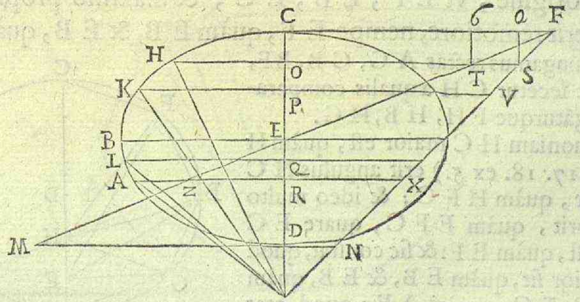


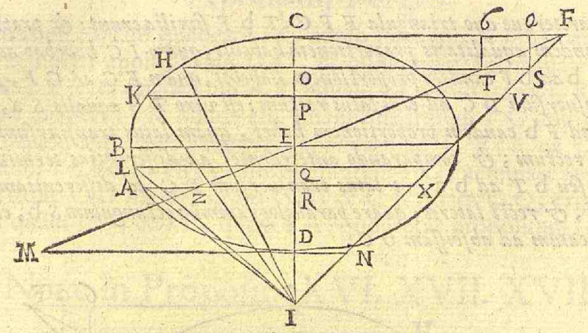
c Et conſtat, vt dictum eſt, quod ſit exemplar applicatum ad O C, &c. *Quoniam rectæ S a, T b, I C ſunt parallelæ, erunt triangula I C F, & S a F, ſimilia;*

ſimilia; pariterque duo triangula E F C, T b F ſimilia erunt; & propterea S a ad a F eandem æqualitatis proportionem habebit, quàm I C habebat ad C F, ſimiliter T b ad b F eandem proportionem habebit, quàm E C ad C F, ſeu quàm latus tranſuerſum D C ad eius latus rectum: eſt vero T b æqualis S a, ſeu a F; ergo F a ad F b eandem proportionem habet, quàm latus tranſuerſum D C ad eius latus rectum; & comparando antecedentes ad differentias terminorum, (Lem. 1. huius.) *erit F a, ſeu b T ad b a, vt latus tranſuerſum D C ad differentiam eiuſdem tranſuerſi, & recti lateris; quare parallelogrammũ rectangulum S b, erit exem-* (Defin. 9. huius.) *plar applicatum ad abſciſſam O C.*



d Igitur I C maior eſt, quàm I H, & I H, quàm I K, &c. *Eo quod abſciſſa O C minor eſt, quàm C P, & C P minor, quàm C E: ſuntque prædictæ abſciſſæ latera homologa exemplarium, quæ ad eaſdem abſciſſas applicantur; at-* (Defin. 9. huius.) *que prædicta exemplaria ſimilia ſunt inter ſe, cum circa angulos rectos latera habeant eandem proportionem, quàm latus tranſuerſum D C ad differentiam eiuſdem tranſuerſi, & recti lateris; quare exceſſus quadrati I C ſupra quadratum I H minus eſt exceſſu eiuſdem quadrati I C ſupra quadratum I K; & adhuc minus exceſſu quadrati I C ſupra quadratum I B, & propterea recta I C minori exceſſu ipſam I H ſuperabit, quàm ipſam I K; & adhuc minori exceſſu ſuperabit I K, quàm excedat I B; & ideo I C maior erit, quàm I H, & I H maior, quàm I K, & I K maior, quàm I B.*





Ergo quadratum I C æquale eſt duplo trianguli N F M cum duplo e trianguli D I N, &c. *Quoniam quadratum I C æquale eſt duplo trianguli I C F, ſeu duplo trianguli I F E vna cum duplo trianguli E F C; eſtque duplum trianguli E D M æquale duplo trianguli E C F; igitur quadratum I C æquale eſt duplo trianguli I F E vna cum duplo trianguli E M D: ijs vero triangulis æquatur duplum trianguli N F M vna cum duplo trianguli D I N; igitur quadratum I C æquale eſt duplo trianguli N F M vna cum duplo trianguli D I N: eſt vero quadratum I D æquale duplo trianguli D I N; igitur exceſſus quadrati I C ſupra quadratum I D eſt triangulum N F M bis ſumptum; ſcilicet exemplar applicatum ad latus tranſuerſum D C.*

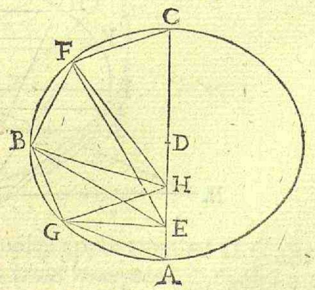
SECTIO DECIMASEPTIMA

Continens XIX. XX. XXI. XXII. XXIII. XXIV. & XXV. Propoſ. Apollonij.

PROPOSITIO XIX.

SI menſura E C ſumatur in axe minori ellipſis A B C, ſitque a maior comparata; erit maximus omniũ ramorũ egredientiũ ex ſua origine, vt E F, E B, E G; & maximo propinquior, maior erit remotiore, nempe E F, quàm E B, & E B, quàm E G.

Coniungamus rectas A G, G B, B F, b F C; & ſecetur C H æqualis comparatæ: iungãturque F H, H B, H G.

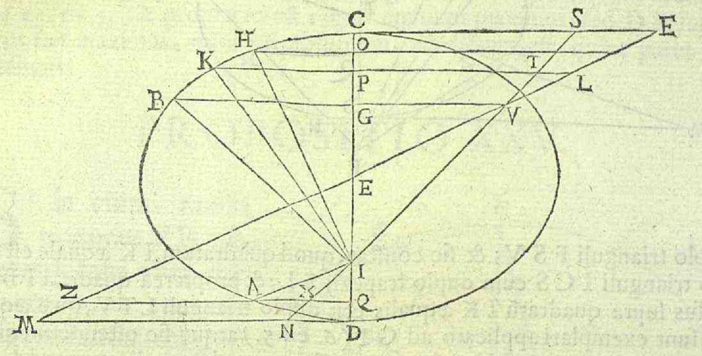


Et quoniam H C maior eſt, quàm H F, (16. 17. 18. ex 5.) erit angulus H C F minor, quàm H F C; & ideo multo minor erit, quàm E F C, quare E C maior eſt, quàm E F: & ſic conſtat, quod E F maior ſit, quàm E B, & E B, quàm E G, & E G, quàm A E; quod erat oſtendendum.

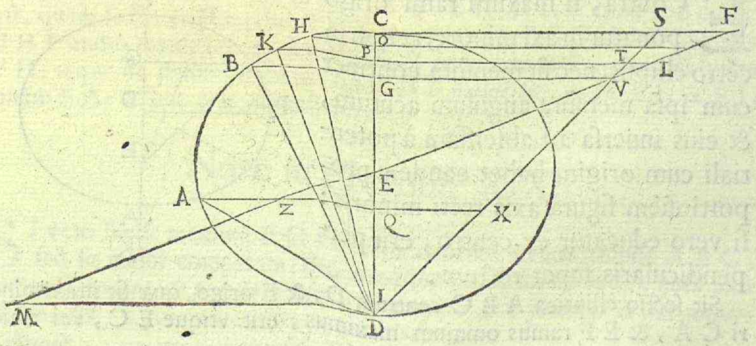
PROP.

PROPOSITIO XX. XXI. & XXII.

a SI in ellipſi A B C menſura I C in axe minori C D ſumpta minor fuerit comparata, C F, & maior dimidio axis E C, (perficiaturque figura, vt antea) dico, quod omnium ramorum I A, I B, I K, I H, I C egredientium ex origine I maximus

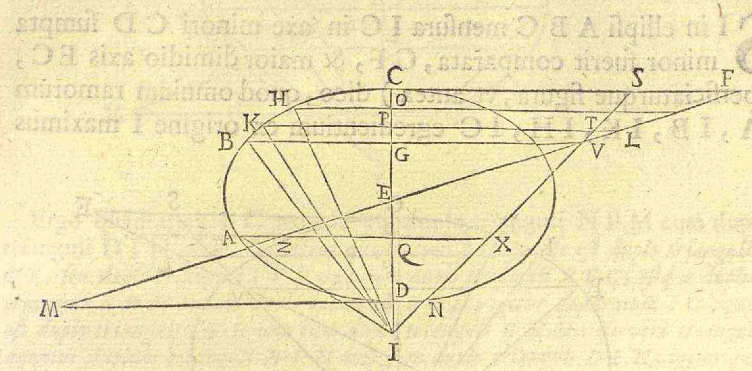


eſt I B, cuius potentialis B G abſcindit à menſura verſus originem rectam G I, ad quàm inuerſa E G eandem proportionem habet, quàm D C ad eius erectum; Et quadratum maximi I B ſuperat quadratum cuiuslibet alterius rami I K exemplari applicato ad G P differentiam eorum abſciſſarum.



Quo-

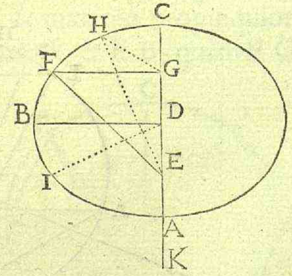
Quoniam proportio E G ad G I facta eſt , vt E C ad C F, nempè E G ad G V, erit G V æqualis G I ; & propterea quadratum G I æquale eſt duplo trianguli G I V, & quadratum G B æquale eſt duplo trapezij G F (1. ex 5.) ergo quadratum I B æquale eſt duplo trianguli I C S cum b



duplo trianguli F S V; & ſic conſtat, quod quadratum I K æquale eſt duplo trianguli I C S cum duplo trapezij S L; & propterea quadrati I B exceſſus ſupra quadratū I K æqualis erit duplo trianguli L T V, quæ æqualia ſunt exemplari applicato ad G P (6. ex 5.) atque ſic oſtendetur, quod I B potentia ſuperat I H; eſtque exceſſus exemplar applicatum ad G O, & ſuperat quoque I A poteſtate, eſtque exceſſus æqualis exemplari applicato ad G Q; eſt vero G O maior, quàm G P; ergo I B maior eſt quā I K, & quàm I H; & ſic oſtendetur, quod I B maior ſit, quàm I A; & hoc erat oſtendendum.

PROPOSITIO XXIII. & XXIV.

E Contra, ſi maximi rami origo ponatur in axi minore, at non in cētro ellipſis, nec ſit menſura continet cum ipſa menſura angulum acutum, & eius inuerſa ad abſciſſam à potentiali cum origine habet eandem proportionem figuræ axis recti minoris: ſi vero educatur ex centro, erit perpendicularis ſuper rectum. a



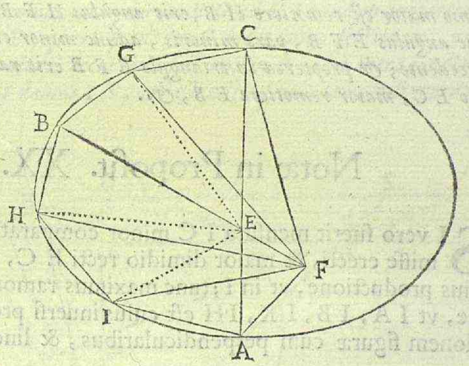
Sit ſectio elliptica A B C centrum D, & E origo, quæ ſit in axi minori C A, & E F ramus omnium maximus; erit vtique E C, vel maior ſemie- b

ſemierecto, aut æqualis, aut minor illo; ſed ſi eſſet æqualis, aut maior eſſet quoque E C maximus ramorum (16. 17. 18. 19. ex 5.) ergo C E minor eſt dimidio erecti, & ideo aliqua minor, quàm D C ad reſiduam vſq; ad E eandem proportionē habebit, quàm D C ad ſemiſſim erecti; & ſit D G ad G E, & ex G ad axim ducamus perpendicularem: hanc, dico, occurrere ſectioni in F; alioquin occurrat ei in H, & iungamus E H; igitur E H eſt maximus ramus (20. ex 5.) & propterea maior, quàm E F, qui maximus ſuppoſitus fuit, & hoc eſt abſurdum; igitur occúrrit ſectioni in F; & quia G eſt rectus angulus, erit F E G acutus. Si verò ramus maximus educatur *ex* cētro, vt D B erit perpendicularis ſuper A C; alioquin educatur D I perpēdicularis ad axim; igitur D I eſt ſemiſsis axis tranſuerſi (11. ex 5.) & propterea eſt ramus omnium maximus, ſed D B ſuppoſitus fuit maximus, quod eſt abſurdum, vti dictum eſt; quare patet propoſitum.

c (beside line 3) · d (beside line 10)

PROPOSITIO XXV.

a SI in ellipſi ramus maximus E B mēſuram ſecans vltra originem E, in axe eius minori exiſtentem, producatur ad F, fiet F B maximus omniū ramorum F G, F H, F I, ab eodem puncto, ad ſectionem A B C cadentium, & propinquior maximo maior eſt remotiore.



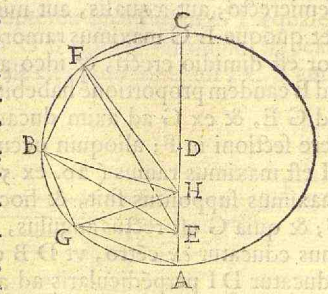
b Educamus B G, B H, H I, I A, E G, E H, E I; & quia E B maior eſt, quàm E H, erit angulus B H E maior, quàm E B H; igitur angulus B H F multo maior erit, quàm H B F, & propterea B F maior, eſt quàm F H; atque ſic demonſtrabitur, quod H F maior ſit, quàm F I, & F I, quàm F A; & hoc erat oſtendendum.

Notæ in Propoſit. XIX.

a SI vero fuerit menſura E C ex recto duorum axium ellipſis A B C, ſed ſit maior comparata, &c. *Similiter hic declarari debet, quod axis rectus ſit minor; & propterea lego: Si menſura E C ſumatur in axe minori ellipſis, &c.*

Nam

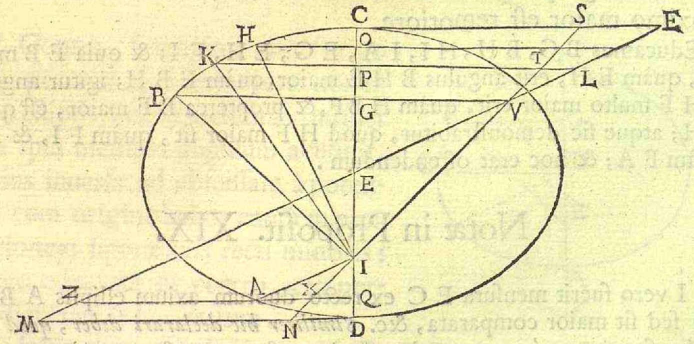
Nam si coniungamus A G, B G, B F, F C, &c. *Idest; secetur C H æqualis comparatæ, seu semissi lateris recti axis A C; quia mensura E C supposita est maior comparata, erit quoque E C maior, quàm C H, & propterea recta linea E F cadet infra H F; ideoque angulus C F E maior erit angulo C F H: eadem ratione angulus F B E maior erit angulo F B H, atque angulus B F E minor erit angulo B F H, & sic de reliquis, cumque C H sit æqualis comparatæ, & sit* b



16.17.18. huius. *maior C D semisse axis recti minoris, omnium ramorum ex origine H ad ellipsim C F B G, cadentium maximus erit H C; & propterea H C maior erit, quàm H F, & in triangulo H F C angulus H F C oppositus maiori lateri maior erit angulo C; estque ostensus angulus E F C maior angulo H F C; igitur in triangulo C E F erit angulus C F E maior angulo F C E; & propterea ramus* Ibidem. *E C maior erit, quàm E F: simili modo, quia ramus H F propinquior maximo maior est remotiore H B, erit angulus H F B minor angulo H B F: ideoque angulus E F B, pars minoris, adhuc minor erit angulo E B F, maiorem excedente; & propterea in triangulo E F B erit ramus E F propinquior maximo E C, maior remotiore E B, &c.*

Notæ in Proposit. XX. XXI. XXII.

SI vero fuerit mensura I C minor comparata, quæ sit C F, nempe semisse erecti, & maior dimidio recti E C, & origo sit in recto, aut in eius productione, vt in I; tunc maximus ramorum egredientium ex origine, vt I A, I B, I K, I H est cuius inuersi proportio E G (post absolutionem figuræ cum perpendicularibus, & lineis præcedentibus) ad ab- a

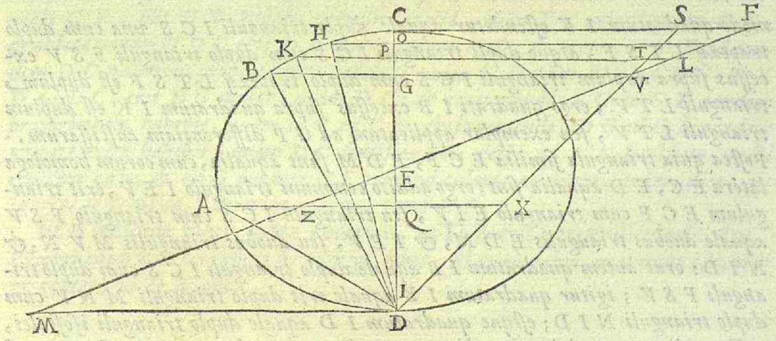


scissam eius potentialis ex mensura cum origine, vt I G est, vt proportio figuræ recti, vt D C ad erectum illius, & quadratum eius, nēpe quadratum

dratum

dratum maximi, qui est I B, superat quadratum cuiuslibet illorum exemplari applicato abscissionibus eorum potentialium, &c. *Sensus huius textus penè vix diuinari potest inter tot menda, & phrasis Arabicæ obscuritatem; puto tamen, eum esse, quem in textu apposui, vbi paucula verba immutaui, quæ desiderari videbantur, aliqua verò transposui, vt sensus continuari posset.*

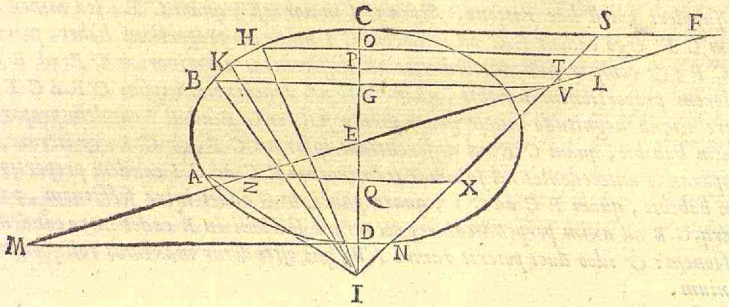
Cæterum animaduertendum est in hisce propositionibus, sicuti in 8. 9. & 10. huius libri supponi vt res manifesta intra sectionem duci posse à puncto originis ramum maximum, vel breuissimum, idest necessario reperiri debere ramum, cuius potentialis abscindit à mensura versus originem rectam lineam, ad quam inuersa eandem proportionem habeant quàm axis transuersus ad suum erectum: hoc autem sine demonstratione admittere nefas est. Ergo quod in textu desideratur suppleri potest hac ratione. Quia C I maior est, quàm C E, sed minor, quàm C F; ergo eadem E C ad minorem C I maiorem proportionē habet, quàm ad C F; & comparando antecedentes ad differentias terminorum C E ad E I maiorem proportionem habebit, quàm E C ad differentiam ipsius C F à C E; quare aliqua magnitudo minor quàm prima scilicet G E ad E I eandem proportionem habebit, quàm C E ad differentiam ipsarum C F, & C E: & iterum comparando antecedentes ad summas terminorum E G ad G I eandem proportionem habebit, quàm E C ad C F; quare punctum G cadet intra sectionem, pariterq; G B ad axim perpendicularis occurrens sectioni in B cadet intra eandem sectionem: & ideo duci poterit ramus I B, qui ostendetur maximus reliquorum omnium.



b Quoniam proportio G E ad E I facta est, vt E C ad C F, &c. *Nam vt axis D C ad eius erectum, seu vt semiaxis E C ad semierectum C F, ita facta est E G ad G I: sed propter parallelas G V, & F C: & similitudinem triangulorum E G V, E C F est E G ad G V, vt E C ad C F; & propterea eadem E G ad duas G V, & G I habebit eandem proportionem, & ideo I G æqualis erit G V, & triangulum I G V isosceleum, & rectangulum erit in G; quare quadratum I G duplum erit trianguli I G V: est vero quadratum B G æquale duplo trapezij G C F V; idest duplo trapezij G C S V, cum duplo trian-* 1. huius. *guli F S V; igitur quadratum I B (quod est æquale duobus quadratis I G, G B circa angulum rectum G) æquale est duplo trianguli I G V duplo trapezij G*

Q C S V

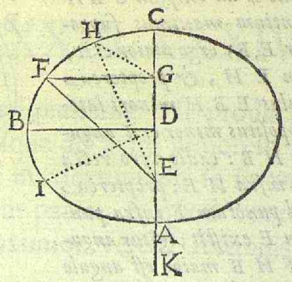
C S V cum duplo trianguli F S V; idest quadratum I B æquale est duplo trianguli I S C cum duplo trianguli F S V; & quoniam propter parallelas C S, & G V, triangulum I C S simile est isoscelio, & rectangulo triangulo I G V, erit, quadratum I C æquale duplo trianguli I C S isoscelei, & rectanguli in C; ergo excessus quadrati I B supra quadratum I C æquale est duplo trianguli F S V; est verò rectangulum, cuius basis F S, altitudo verò C G æquale duplo trianguli F S V; atque huiusmodi rectangulum est exemplar applicatum ad abscissam G C, vt in notis prop. 16. 17. & 18. litera c. ostensum est igitur quadrati I B excessus supra quadratum I C est exemplar applicatum ad abscissam G C: Simili



modo quadratum I K ostendetur æquale duplo trianguli I C S vna cum duplo trapezij L T S F; atque dupli trianguli I C S cum duplo trianguli F S V excessus supra duplum trianguli I C S cum duplo trapezij L T S F est duplum trianguli L T V; ergo quadrati I B excessus supra quadratum I K est duplum trianguli L T V, seu exemplar applicatum ad G P differentiam abscissarum. Postea quia triangula similia E C F, E D M sunt æqualia, cum eorum homologa latera E C, E D æqualia sint; ergo addito communi triangulo I E V, erit triangulum E C F cum triangulo E I V, seu triangulũ I C S cum triangulo F S V æquale duobus triangulis E D M, & I E V, seu duobus triangulis M V N, & N I D: erat autem quadratum I B æquale duplo trianguli I C S cum duplo trianguli F S V; igitur quadratum I B æquale erit duplo trianguli M N V cum duplo trianguli N I D; estque quadratum I D æquale duplo trianguli isoscelei, rectanguli I D N; igitur quadratum I B superat quadratum I D, estque excessus duplum trianguli M N V seu exemplar applicatum ad G D. Tandem quia quadratum I Q æquale est duplo trianguli isoscelei rectanguli I Q X, atque quadratum Q A æquale est duplo trapezij Q M; igitur quadratũ hypothenusæ I A æquale est duplo trianguli I D N cum duplo trapezij X N M Z; ergo excessus quadrati I A supra quadratnm I D æqualis est duplo trapezij X N M Z; excessus autem trianguli N M V supra trapezium N Z est triangulum X Z V; & erat quadrati I B excessus supra quadratum I D, triangulum ipsum M V N bis sumptum. Igitur quadrati I B excessus supra quadratum I A est duplum trianguli X Z V, seu exemplar applicatum ad G Q. Quod autem exemplaria æqualia sint prædictis triangulis bis sumptis, ostensum est in prop. 6. huius.

Notæ

Notæ in Propos. XXIII. XXIV.



a E Contra linea maxima, si non egrediatur ex centro, continet cum mẽsura angulum acutum, & proportio illius inuersæ ad abscissam eius potentialis ex mẽsura cum origine, est vt proportio figuræ recti. Si verò fuerit extra centrum, erit perpendicularis super rectum, &c. *Manifeste nõ nulla in textu Arabico deficiunt; aliqua verò immutari debent; alioquin propositio vera non esset, itaque legendum puto: E contra si maximi rami origo ponatur in axi minore, &c: Vt in textu habetur.*

b Sit sectio A B C elliptica, & E origo, & E F linea maxima, &c. *Addidi pariter in hac expositione verba, quæ deficiunt; nimirum: Sit centrum D, & origo E, quæ sit in axi minori A C.*

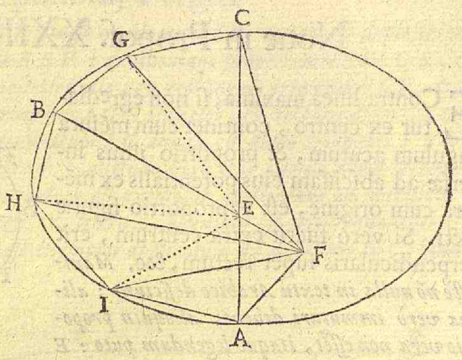
c Et ideo D C ad dimidium erecti est linea minor, quàm D C, & sit D G ad G E, &c. *Nonnulla adiungi debent huic textui corruptissimo, ne sint verba nil prorsus significantia, itaque sic legendum puto. Et ideo aliqua minor, quàm D C ad residuam vsque ad E eandem proportionem habebit, quàm D C ad semissem erecti; & sit D G ad G E, &c. Quæ verba breuissimè more Apollonij exposita sic confirmantur. Quia E C ostensa est minor dimidio erecti axis minoris C A, fiat C K æqualis dimidio erecti; erit E C minor quàm C K, & ablata communi D C erit D E minor, quàm K D; & propterea D E ad eandem D C minorem proportionem habebit, quàm K D: fiat E D ad D G, vt K D ad D C, erit D G minor, quàm D C: & componendo, E G ad G D eandem proportionem habebit, quàm K C ad C D, & inuertendo, D G ad G E eandem proportionem habebit, quàm D C semissis axis recti ad C K semissim erecti eiusdem axis; & ex G ducatur G F perpendicularis ad axim, quàm, dico, occurrere sectioni in F termino maximi rami E F.*

d Et si maxima fuerit extra centrum, vt D B erit perpendicularis, &c. *Textus euidenter corruptus sic corrigi debet. Si verò ramus maximus educatur ex centro, vt D B, &c.*

Notæ in Propos. XXXV.

a SI producatur vna linearum maximarum, vt E B ad latus illius originis E ad punctum F, fiet maxima linearum egredientium ab illo puncto F G, F H, F I, F A ad sectionem B I A in directum, & propinquior illi maior est remotiore, &c. *Immutaui nonnulla, quæ ad propositionis integritatem facere videbantur: vt in textu habetur.*

Q 2 Erit

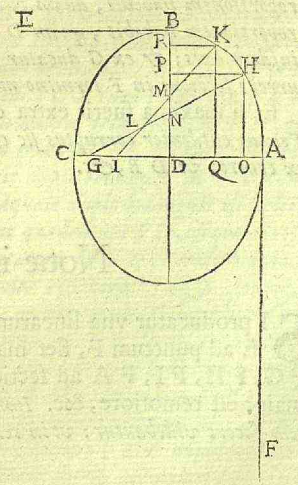


Erit angulus B H E maior, quàm E B H, &c. *Eo quod ramorum omnium ab origine E ad ellipsim C B H cadentium maximus supponitur E B; ergo maior erit, quàm E H, & propterea angulus E B H minori lateri oppositus minor erit angulo E H B: cadit vero recta H F infra H E; propterea quod punctum F infra punctum E existit; igitur angulus F H B maior est angulo E H B; & ideo angulus F H B multo maior erit angulo F B H; igitur ramus F B, maiorem angulum subtendens, maior erit, quàm F H, &c.* b

SECTIO DECIMAOCTAVA

Continens XXXII. XXXIII. XXXIV. XXXV. XXXVI. XXXVII. XXXVIII. XXXIX. XXXX. XXXXVII. XXXXVIII. Proposit. Apollonij.

PROPOSITIO XXXII.



IN ellipsi A B C rami cuiuslibet maximi G H vtrumque axim secantis portio N H inter axim maiorem, & sectionem intercepta, est linea breuissima. a

Producatur rectus axis minor A D vltra centrum D ad I, G, & ex I, G ad sectionem ducantur duo rami maximi G H, I K, qui secent transuersum B D in N, M, & sit B E dimidium erecti axis B D, & A F dimidium erecti axis A G; & educantur perpendiculares ad axes H O, H P, K Q, K R. Dico, N H breuissimum esse ramorum egredientium ex H. Quia G H est linea maxima, erit D A ad A F, nempe B E ad B D, vt D O ad O G (22. ex 5.) nempe N H ad H G, seu N P ad b

P D;

P D; ergo B E semissis erecti ad B D semissim transuersi est, vt N P ad P D, & ideo N H est breuissima linearum egredientium ex N (10. ex 5.) & sic ostendetur, quod si K I fuerit maximus, erit K M breuissima.

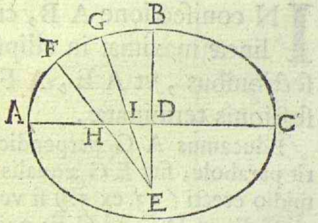
PROPOSITIO XXXIII. XXXIV.

a EContra ostendetur, quod duæ breuissimæ, si producantur ad partes suarum originum vsque ad axim minorem rectũ ellipsis, fient duo maximi; & lineæ maximæ mutuò se secant inter transuersum, & rectum in eadem parte, & quod continent cum mensura angulos, quorum proximior vertici sectiouis maior est.

b Quia D Q ad Q I est, vt D O ad O G, quia quælibet earum est, vt D A ad A F (22. ex 5.) diuidendo, & permutando, fiet D Q minor ad D O maiorem, vt D I ad D G; ergo D I minor est, quàm D G, & K Q maior, quàm H O; quare angulus I maior est, quàm G; igitur H G, K I, se mutuo secantes, conueniunt in L.

Et constat, quod occursus duarum breuissimarum (si producantur versus suam originem) erit intra angulum contentum à duabus medietatibus axium ellipsis B D, D C supra vnum eorum, nempe punctum L cadit intra angulum B D C. Quoniam breuissimæ N H, M K se mutuò secant, si producantur ad partes suæ originis (28. ex 5.) occurrent vtique extra B D, & intra A G (33. ex 5.) & hoc erat ostendendum.

PROPOSITIO XXXV.



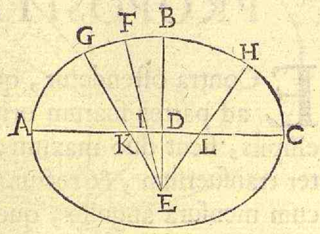
a SI per centrũ ellipsis transierit vna duarum breuissimarum, vtique rami egrediẽtes ab eorum occursu ad sectionis quadrantem alterius breuissimæ habebunt proprietates expositas in propositionibus 54. & 55.

In ellipsi A B C sit punctum E occursus duarum breuissimarum B D, C I, & centrum sectionis D: & ex E educamus E F, quæ secet transuersum axim in H. Dico, quod H F nõ est breuissima, & quod breuissima egrediens ex F abscindit ex sagitta A C cum A lineam maiorem, quàm A H. Quoniam G I est breuissima; igitur F H, si esset quoque breuissima, occurreret ipsi G I intra angulum A D E: sed non occurrit ei, nisi in E, 34. huius. ergo F H non est breuissima; & quia F E non cadit inter duas breuiscantes E B, E G; ergo breuissima, egrediens ex F, abscindit ex sagitta lineam maiorem, quàm A H (54. ex 5.) quod erat ostendendum.

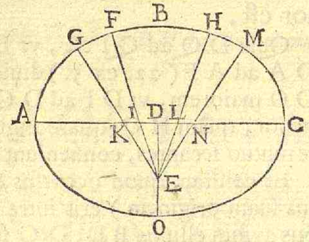
PROP.

PROPOSITIO XXXVI.

IN ſectione elliptica quatuor lineæ breuiſſimæ, vt B D, F I, G K, H L, non conueniunt omnes in vno puncto.



Alioquin ſit occurſus in E, & prius ſit B D perpendicularis ſuper A C, tranſiens per D centrum ſectionis; & quia E eſt occurſus duarum breuiſſimarum B D,
35. huius. F I, & B E tranſit per centrum; igitur G K non eſt linea breuiſſima, quod eſt contra hypotheſim. Si vero nullus eorũ tranſit per centrum, educamus per centrum D O perpendicularem ad A C; quare duæ breuiſſimæ F I, G K conueniunt intra angulum A D O (34. ex 5.) ſimiliter H L, M N breuiſſimæ occurrunt intra angulum C D O (34. ex 5.) ſed cõueniunt in E, quod eſt abſurdum; igitur quatuor lineæ breuiſſimæ non cõueniunt in vno puncto; quod erat oſtendendum.

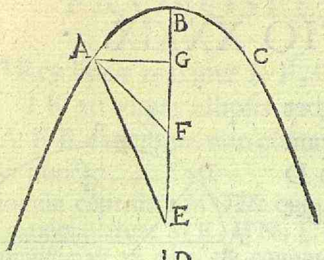


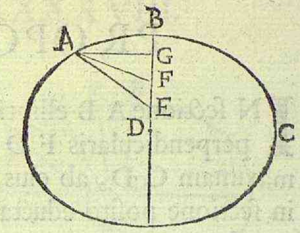
a

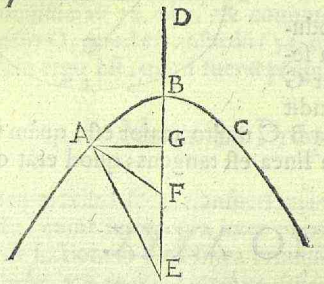
PROPOSITIO XXXVII. XLVI.

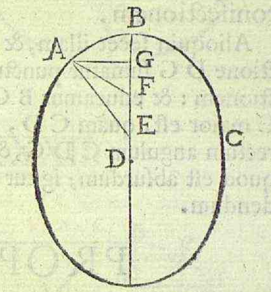
IN coniſectione A B, cuius centrum D duci non poſſunt duæ lineæ maximæ in ellipſi, neque duæbreuiſſimæ in omnibus ſectionibus, vt A E, A F ad vnum punctum A circumferentiæ ſectionis terminatæ.

Educamus A G perpendicularem ad axim B E. Si itaque ſectio fuerit parabole, fiet E G æqualis F G, quia quælibet earum eſt æqualis dimidio erecti (13. ex 5.) ſi vero fuerit hyperbole, aut ellipſis, fiet D G ad G E, vt D G ad G F; quia quælibet earum eſt, vt proportio figuræ (14. 15. ex 5.) igitur G F æqualis eſt G E, quod eſt abſurdum. Similiter ſi B G fuerit minor duarum axium ellipſis, & fuerint A E, A F rami maximi oſtendetur, quod G F æqualis ſit G E (23. ex 5.) Patet igitur, vt dictum eſt, quod ex vno puncto ſectionis educi non poſſunt ad axim illius duæ lineæ maximæ, neque breuiſſimæ, & hoc erat oſtendendum.





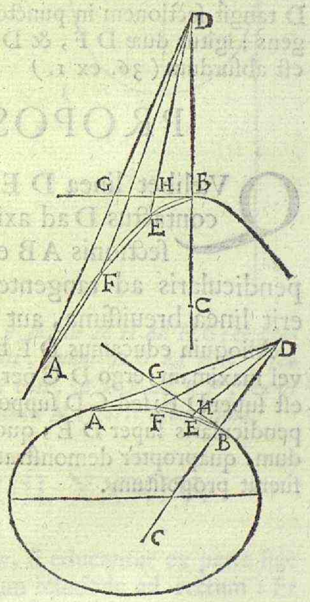




PROPOSITIO XXXVIII.

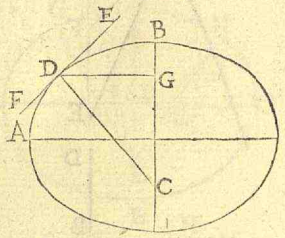
SI linea maxima, aut breuiſſima, vt C B, producatur extra ſectionem A B ad D, erit eius portio B D extra ſectionem abſciſſa minima omnium linearum D E, D F, D A egredientium ab illo puncto ad circumferentiam ſectionis: reliquarũ vero propinquior, illi minor eſt remotiore.

a Educatur B G, tangens ſectionem in B; erit D B minor, quàm D H; ergo multo minor eſt, quàm D E: & iungamus F E, F A, erit angulus F E D obtuſus, & propterea D E minor eſt, quàm D F, & ſimiliter D F minor, quàm D A; quod erat oſtendendum.



PROPOSITIO XXXIX.

IN sectione A B elliptica quælibet perpendicularis F D ad lineam maximam C D, ab eius termino D in sectione posito educta, continget conisectionem.



Alioquin secet illam, & in eius productione D G sumatur punctum G intra sectionem: & educamus B G C, igitur G C maior est, quàm C D, quia subtendit rectum angulum C D G, & propterea B C multo maior est, quàm C D, quod est absurdum; igitur educta illa linea est tangens; quod erat ostendendum. a

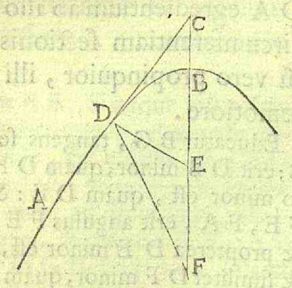
PROPOSITIO XXXX.

E Contra si fuerit F D tangens, erit perpendicularis super maximam D C.

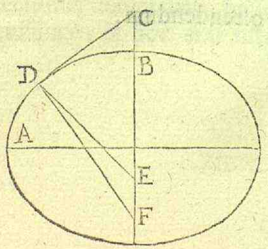
Alioquin educamus aliam E D perpendicularem super illam; ergo E D tangit sectionem in puncto D (39. ex 5.) sed F D supposita fuit tangens; igitur duæ D F, & D E tangunt sectionem in vno puncto, quod est absurdum (36. ex 1.)

PROPOSITIO XXXXVII.

QVælibet linea D E ex puncto contactus D ad axim alicuius sectionis A B educta perpendicularis ad tangentem D C, erit linea breuissima, aut maxima.



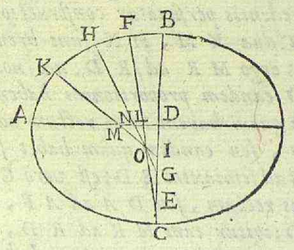
Ex 10. & 20. huius. Alioquin educamus D F breuissimam, vel maximam; ergo D C perpendicularis
40. huius. est super D F; sed C D supposita fuit perpendicularis super D E; quod est absurdum: quapropter demonstratũ est, quod fuerat propositum.



PROP.

PROPOSITIO XXXXVIII.

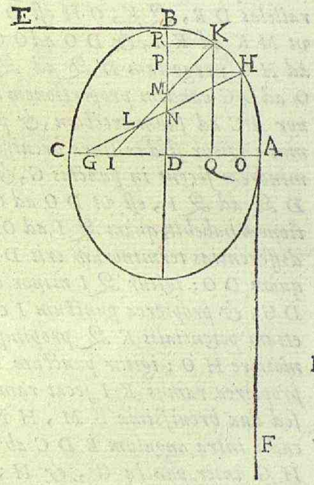
a TRes lineæ maximæ E F, G H, I K ad vnum ellipsis quadrãtem A F B cadentens non cōueniunt in vno puncto.



Alioquin cōueniant in O, & quia sunt lineæ maximæ erunt M K, H N, L F, lineæ breuissimæ (32. ex 5.) & conueniunt in puncto O; quod est absurdũ (54. ex 5.) ostensum ergo est, quod fuerat propositũ.

Notæ in Proposit. XXXII.

a LInea maxima secat transuersam in pũcto, cuius intercepta inter punctum illud, & sectionem, est linea breuissima, &c. *Verba, quæ in textu Arabico desiderantur supplenda censui, vt æquiuocationes tollerentur.*



b Quia G H est linea maxima, erit D A ad A F, nempe B E ad B D, &c. *Quia in 22. huius ostensum est, lineæ maximæ G H potentialem H O secare semiaxim minorẽ A D in O, vt sit D O ad O G in eadẽ proportione figuræ axis minoris A C; scilicet erit, vt D A semiaxis minor ad A F eius semierectum; sed vt A D ad A F, ita est B E semissis lateris recti axis transuersi ad B D* Ex 15. lib. 1. *semissem eiusdem transuersi; igitur D O ad O G eandem proportionem habebit, quàm E B ad B D; sed propter parallelas N D, H O, est N H ad H G, vt D O ad O G; pariterque propter parallelas D G, H P, erit N P ad P D, vt N H ad H G; & propterea N P ad P D eandem proportionem habebit, quàm D O ad O G, seu quàm E B ad B D; & permutando D P ad P N erit, vt D B ad B E, seu vt* 15. huius. *axis transuersus ad eius erectum; & propterea linea N H erit breuissima.*

Notæ in Proposit. XXXIII. XXXIV.

a E Contra ostendetur, quod duæ breuissimæ, si educantur ex parte suæ originis ad rectum, fient duo maximi cum relatione ad rectum: Et osten-

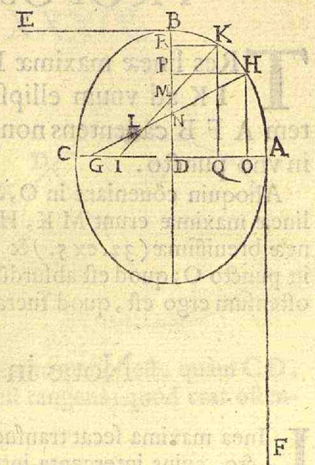
R osten-

ostendetur ex dictis, quod lineæ maximæ mutuò se secant inter diametrum, & rectum, &c. *Textũ corrigi debere manifestum est ex dictis superius* b

Quia D Q ad Q I est, vt D O ad O G, &c. *In eadem figura propositionis 32. præcedentis perficiatur constructio, vt priùs quia duæ K M, H N sunt breuissimæ li-*

Pr. 15. huius. *neæ; ergo M R ad R D, nec non N P ad P D eandem proportionem habent, scilicet eam quàm habent latus rectum ad transuersum, seu eandem quàm habet semierectus*

15. lib. 1. *E B ad semiaxim B D; est verò C A ad eius latus rectum, seu D A ad A F, vt E B ad B D; igitur tam M R ad R D, quàm N P ad P D eandem proportionem habent, quàm D A ad A F; sed propter parallelas C D, R K, P H, est M K ad K I, vt M R ad R D; pariterque N H ad H G eandem proportionẽ habet, quàm N P ad P D; atque propter parallelas D B, Q K, O H est D Q, ad Q I vt M K ad K I, & D O ad O G est vt N H ad H G; ergo tam D Q ad Q I, quàm D O ad O G eandem proportionem habent, quàm D A ad A F, seu quàm axis mi-*



20. 21. 22. huius. *nor A C ad suum erectum, & propterea tam K I, quàm H G est ramus maximus; igitur si duæ lineæ breuissimæ H G, & K I producantur quousque axim minorem secent in punctis G, & I efficientur rami omnium maximi. Postea quia D Q ad Q I, est vt D O ad O G; permutando D Q ad D O eandem proportionem habebit, quàm Q I ad O G; & permutando, & comparando antecedentes ad differentias terminorum erit D Q ad D I, vt D O ad D G: estque D Q minor quàm D O; igitur Q I minor est, quàm O G; pariterque D I minor est, quàm D G; & propterea punctum I cadit inter axim B D, & ramum H G; estque etiam potentialis K Q propinquior & parallela axi maiori, & ideo maior remotiore H O; igitur punctum K cadit inter axim B D, & ramum H G; & propterea ramus K I secat ramum H G in puncto L inter puncta H, & G:*

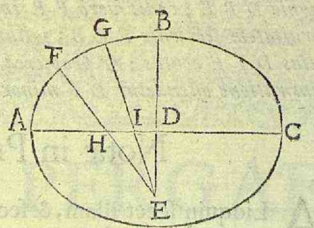
36. huius. *sed duæ breuissimæ K M, H N se secant vltra axim B D: igitur occursus L cadit intra angulum B D C ab axibus compræhensum. Tandem quia K I secat H G inter puncta G, & H; ergo efficit angulum externum K I A maiorem interno, & opposito G: & propterea ramus K I propinquior vertici B, quàm H G efficiet cum axe minore C A angulum A I K maiorem.*

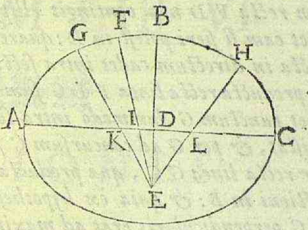
Notæ in Proposit. XXXV.

SI transeat per centrum ellipsis vna duarum breuissimarum; vtique rami, &c. *Hæc propositio parum differt à 54. & 55. huius, vbi ostensum est, quod si duo rami E B, E G breuisecantes ex eodem concursu E ad ellipsim A B ducuntur, quilibet alius ramus E F, extra breuisecantes positus, cadet supra breuissimam ex puncto F ad axim A C ductam: hic verò supponuntur duæ* a

breuissimæ B D, G I, quarum B D per centrũ transit, quæ productæ concurrunt in puncto E axis minoris, & concluditur, quod rami E F, portio F H, nedũ breuissima non est, sed supra ipsam breuissimã ex puncto F eductam cadit.

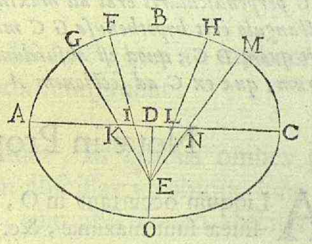
Sed duo hic notanda sunt. Primo, quod hæc prop. 35. non poterat postponi, nã vsum habet in 57. huius vbi malè citatur prop. 52. loco huius 35., vt ibidem insinuatum est. Secundo, quod hæc demonstratio non videtur omnino perfecta nam pendet ex prop. 34., & ex eius conuersa, quæ demonstrata non reperitur quare superuacanea non fuit noua demonstratio in Lemmat. 8. apposita.





Notæ in Prop. XXXVI.

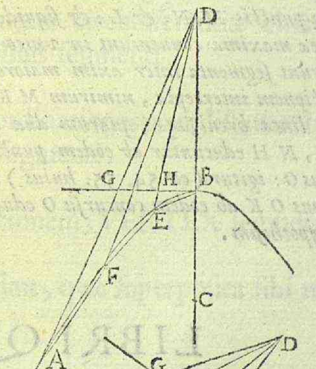
a SI verò nulla earum transit per centrũ, educamus D O, &c. *Si enim fuerint quatuor lineæ breuissimæ G K, F I, H L, M N, quarum nulla per centrum D transit, similiter ostendetur, quod non conueniunt in vno puncto E; nam ducto semiaxe minori D O necesse est, vt punctum E concursus duorũ breuisecantiũ E G, E F cadat intra angulũ A D O; pariterque idem punctum E concursus duorum breuisecantium E H, E M, cadet necessario intra angulum C D O; sed idem punctum E nequit duobus in locis reperiri, nimirũ intra angulum A D O, & intra angulum C D O, igitur non possunt ab eodẽ puncto educi ad ellipsim quatuor rami breuisecantes.*



34. huius. Ibidem.

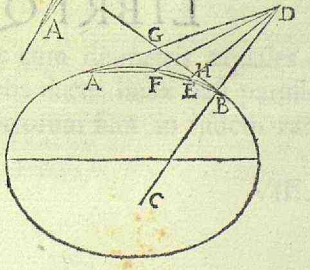
Notæ in Prop. XXXVIII.

a NAm si educamus B G tangentem erit B D minor quàm D H, &c. *Quoniam C B est linea breuissima, aut si maxima est, eius portio erit breuissima, & G B cõtingens sectionem in eius termino B perpendicularis ad B C; propterea in triangulo B D H latus H D, subtendens angulum rectum B, maius erit latere D B; est verò D E maior, quàm D H, eo quod punctum H contingentis B G cadit extra sectionem; igitur linea B D minor est, quàm D E, & propterea angulus D E B acutus erit, quare est minor obtuso*



32. huius.

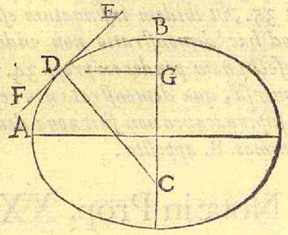
29. 30. huius.



angulo D B E; cadit verò F E infra rectam B E, quam secat in E, propter curuitatem sectionis F E B; igitur angulus D E F obtusus quoque erit, & angulus D F E acutus; & propterea recta linea D E minor erit, quàm D F; eadem ratione ostendetur D F minor, quàm D A.

Notæ in Proposit. XXXIX.

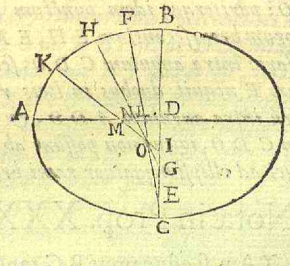
ALioquin secet illam, & secemus ex, & D G intra sectionem, &c. *Si enim recta F D non contingit ellipsim A B, secet eam si fieri potest in D: quare F D producta in directum cadet intra sectionem, & in producta recta linea F D G sumatur quodlibet punctum G dummodo intra sectionem existat, & per G ad concursum C coniungatur recta linea G C, quæ producta occurrat sectioni in B: & quia ex hypothesi recta F D G perpendicularis erat ad maximum ramum D C, ergo in triangulo D G C rectangulo erit hypothenusa G C maior quàm D C, & ideo B C multo maior erit quàm D C; quod est absurdum, supposita enim fuit D C omnium maxima earum, quæ ex C ad sectionem A B duci possunt.* a



Notæ in Proposit. XXXXVIII.

ALioquin occurrant in O, quia istæ lineæ sunt maximæ, &c. *Secant enim lineæ maximæ semiaxim maiorem D A in punctis M, N, & L: & siquidem tres lineæ maximæ conueniunt in vnico puncto O, erunt segmenta inter axim maiorem, & sectionem intercepta, nimirum M K, N H, L F lineæ breuissimæ; quarum duæ quæquè L F, N H educuntur ab eodem puncto concursus O: igitur (ex 54. 55. huius) tertius ramus O K ab eodem concursu O eductus non erit breuisecans; quod est contra hypothesim.* a

32. huius.



LIBRI QVINTI FINIS.

APOLLONII PERGAEI
CONICORVM LIB. VI.

DEFINITIONES.

I.

SEctiones ÆQVALES sunt, quæ ad inuicem superpositæ sibi mutuò congruunt.

II.

SIMILES verò sunt, in quibus omnes potentiales ad axium abscissas vtrobique sunt in ijsdem rationibus, tum abscissæ ad abscissas.

III.

Et linea, quæ subtendit segmentum circumferentiæ circuli, aut sectionis coni vocatur BASIS illius segmenti.

IV.

Et linea, quæ bifariam diuidit ordinationes æquidistantes basi illius, vocatur DIAMETER illius segmenti.

V.

Et eius terminus, qui est ad sectionem, VERTEX segmenti.

VI.

Et SEGMENTA ÆQVALIA sunt, quæ superposita sibi mutuò congruunt.

VII.

Et SIMILIA sunt, quorum bases cum diametris æquales angulos continent, & in eorum singulis ductæ lineæ basi parallelæ numero æquales ad abscissas diametrorum sunt in ijsdem rationibus tum abscisæ ad abscisas.

VIII.

VIII.

CONI SIMILES sunt, quorum axes æquè ad bases inclinati, ad diametros basium proportionales sunt.

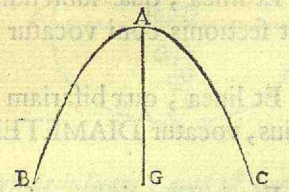
IX.

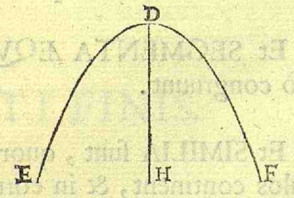
Et dicitur conus continere sectionem, & sectio in cono posita esse, si sectio tota fuerit in superficie coni, aut cadat in illa, si producatur ex parte basis.

N O T Æ.

DEfinitiones huius sexti libri ferè omnes sunt Appollonij, in paucis quidem alteratæ ab interprete Arabico: quod quidem constat testimonio Eutocij Ascalonitæ, qui in tertiam propositionem secundi æquiponderantium Archimedis affert definitionem similium portionum conicarum sectionum, traditam ab Apollonio in eius sexto libro: & sanè ordo doctrinæ exigebat, vt prius sectiones æquales, & similes definirentur, vt postea earum symptomata demonstrari possent: sed animaduertendum est, hactenus nomen sectionis conicæ significasse quamlibet indeterminatam portionem curuæ lineæ in coni superficie ortam ex sectione alicuius plani non per verticem coni ducti, non considerando terminos eius neque mensuram. Segmentum verò significat portionem aliquam sectionis conicæ determinatæ mensuræ, & certis finibus terminatam; at multoties significat superficiem à conisectione, & recta linea eam subtendente contenta. Igitur ad confusionem vitandam vocabo huiusmodi superficiem planam, Mixtam superficiē sectionis conicæ. Modò in relatis definitionibus prius quænam conisectiones vocari debeant inter se æquales exponit Apollonius.

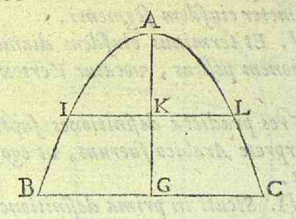
I. *Et primo; Si fuerint duæ quælibet conisectiones B A C, E D F, quarum axes A G, D H; vertices verò A, & D, & siquidem intelligatur sectio B A C superposita sectioni E D F, vt nimirum vertex A super verticem D cadat, atque axis A G super axim D H, atque pariter peripheriæ B A C, & E D F sibi mutuò congruant: tunc quidem vocantur duæ dictæ sectiones conicæ æquales inter se. Vbi notandum est, non oportere longitudinem curuæ B A C æqualem esse longitudini curuæ E D F; sicuti, vt duo anguli rectilinei dicantur æquales, & sibi mutuò congruentes, necesse non est, vt rectæ lineæ, angulos continentes, sint æquales longitudine, dummodo certum sit, quod lineæ ipsæ vlterius productæ semper sibi mutuò congruant; sic pariter peripheriæ conicarū sectionum A B, & D E, si vlterius producantur, semper sibi mutuò congruent.*

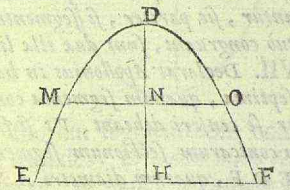




II. *In*

II. *Codex Arabicus habet.* Similes verò sunt, quarum proportio potentium in vna earum ad sua abscissa est eadem proportioni aliarum potentium ad sua abscissa, & proportio abscissarum in vna earum ad sua opposita abscissa eadem est. *Putabit forte quispiam, me nimis licentiosè transformasse potius, quàm emendasse textum in hac secunda definitione; sed is sciat velim, non meo arbitratu id fecisse sed ex præscripto eiusdem Apollonij pluribus in locis; non quidem in hisce compendiosissimis definitionibus, in quibus vna particula omissa, vel addita (vt passim cōtingit in codicibus vetustissimis) sensum omninò permutat; sed ijs in locis in quibus oratione continua exponit, & exemplis declarat germanum sensum huius secundæ definitionis, & septimæ subsequentis, vt suis in locis monebitur. Primo igitur suppleri debent particulæ* ad conterminas axium abscissas, *quæ in textu omnino subintelligi debent vt expresè declaratur in propos.* 11. 12. 15. & 16. *huius libri, quibus in locis semper in sectionibus similibus præcipitur vt abscissæ tantummodo in axibus sumantur, aut æquè sint inclinatæ ad conterminas potentiales. Secundò postrema verba* sunt in ijsdem rationibus tum abscissæ ad abscissas *possent retineri cū sensum definitionis non omnino intollerabilē reddant: & insuper in textu greco Eutocij repetantur, & eius sensus talis est. In conisectionibus B A C, E D F, quarum axes A G, D H si ductæ fuerint quotcunq; potentiales, seu ad axim applicatæ B C, E F, I L, M O occurrentes axibus in G, H, K, N hac lege, vt potentialis B C ad abscissam G A eandem proportionem habeat quàm potentialis E F ad abscissam H D, & potentialis I L ad abscissam K A sit, vt M O ad N D, & tandem abscissa G A ad K A sit, vt abscissa H D ad N D: & hoc verificetur in omnibus alijs potentialibus eadem lege ductis; tunc quidem duæ illæ sectiones similes appellantur iuxta Eutocij, & Mydorgij sententiam.*





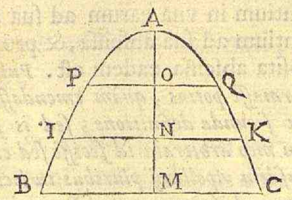
Ego contra puto, hanc expositionem neq. Apollonio, neq. veritati conciliari posse, vt ad propos. 12. ostendetur attamen existimo, defintionem hac ratione formari posse.

Similes conisectiones sunt, in quibus quælibet axium abscissæ erectis proportionales etiam ad conterminas potentiales eandē rationem habent: quæ omnino conformis est præcedenti definitioni, præterquam in postrema particula, vbi enim ait. Sunt in ijsdem rationibus tum abscissæ ad abscissas. *Legendum esset:* sunt in ijsdem rationibus tum abscissæ ad erecta. *Sed an hæc particula corrigi debeat, vel non, alij videant.*

III. *Si verò fuerit portio sectionis conicæ B A C, vel circunferentiæ circuli, atq. recta linea B C eam subtendat, & secet in duobus punctis B, & C, vocatur B C, Basis prædicti segmenti B A C.*

IV. *Et*

IV. *Et ſi in eodem ſegmento ducantur ordinatæ parallelæ baſi B C, atque recta linea A M ſecet omnes æquidiſtantes ipſi B C bifariam in punctis M, N, & O vocabitur A M: Diameter eiuſdem ſegmenti.*

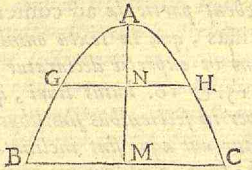


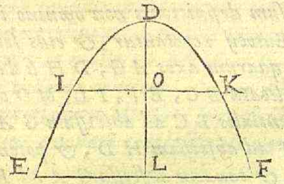
V. *Et terminus eiuſdem diametri A ad ſectionem poſitus, vocatur Vertex ſegmenti.*

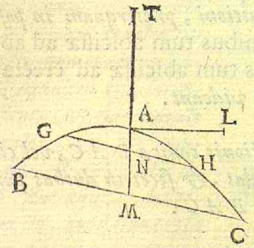
Tres prædictæ definitiones ſuperadditæ ab interprete Arabico fuerunt, vt ego puto, quandoquidem omnino neceſſariæ non ſunt.

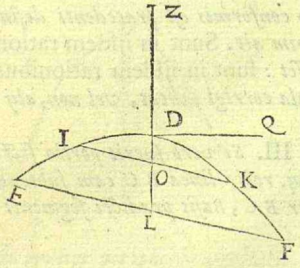
VI. *Sicuti in prima definitione ſectiones ſibi mutuò congruentes æquales vocabantur, ſic pariter, ſi ſegmentum B A C ſuperpoſitum ſegmento E D F ſibi mutuò congruant, ſunt duæ illæ lineæ curuæ æquales inter ſe.*

VII. *Declarat Apollonius in hac definitione ſeptima, quænam ſegmenta conica ſimilia inter ſe cenſeri debeant. Vt ſi fuerint duarum conicarum ſectionum ſegmenta B A C, & E D F, quarum diametri A M, & D L efficiant cum ordinatim applicatis, ſeu cum baſibus B C, & E F angulos æquales in M, & L, & in vnaquaque earum ductæ fuerint pares multitudines applicatarum, quæ ſint baſibus æquidiſtantes, vt G H, & I K, & in eis verificentur hæ conditiones, vt habeat B C ad abſciſſam M A eandem proportionem, quàm E F ad abſciſam L D, & G H ad abciſſam N A eandem proportionem habeat, quàm I K ad abciſam O D, & tandem abciſa M A ad abſciſſam A N eandem proportionem habeat, quàm abſciſa L D ad abſciſſam D O; tunc quidem vocat Apollonius duo ſegmenta B A C, & E D F ſimilia inter ſe. Et hic primo animaduertendum eſt, difinitionem ſegmentorum ſimilium relatam ab Eutocio Aſcalonita in 3. prop. lib. 2. æquipond. Archimedis, non eſſe integram: in ea enim deſiderantur illa verba,* quarum baſes cumdiametris continent angulos æquales, *ſine quibus definitio eſſet erronea, vt optime notat Mydorgius. Hoc autem ita eſſe verba textus Arabici aperte declarant, habent enim.* Et ſimilia ſunt quorum baſes continent cum diametris angulos rectos *legēdum æquales,*

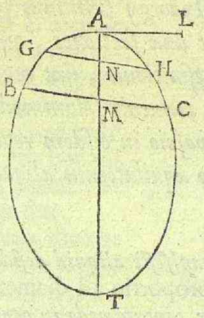


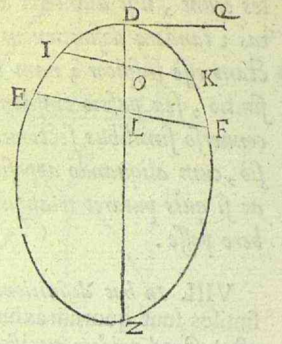






les, & educantur in quolibet eorum ordinationes ad ſuas baſes numero æquales, quarum proportio cum diametris eſt, vti diximus in ſectionibus ſimilibus. *Idem repetit in propoſ. 15. huius lib. rurſus in propoſ. 16. litera* a *inquit:* Et quod anguli à potentialibus, & abſciſſis contenti ſint æquales in duobus ſegmentis, erit ſegmentum H A G ſimile ſegmento I C K: &c. *& propoſ. 17. litera* c *ait:* & anguli comprehenſi à potentibus, & abſciſſis ſunt æquales; &c. propterea duo ſegmenta ſunt ſimilia; *Et in eadem propoſ. litera* d *dicit.* Quia propter ſimilitudinem duorum ſegmentorum continebunt potentes cum ſuis abſciſſis angulos æquales. *Et eodem modo ſemper loquitur Apollonius; quare dubitandum non eſt, in Eutocij definitione hæc eadem verba deſiderari.*





Immutaui poſtea verba ſubſequentia; nam ordinationes, ſeu ordinatim applicatæ ducuntur ad diametros, non ad baſes, & debent eſſe baſibus æquidiſtantes. Deinde breuitas affectata poſtremæ partis huius definitionis non Apollonio, ſed Arabico Interpreti tribui debet, nam eadem expreſſe, & extenſe declaratur in textu Eutocij his verbis. In quarum ſingulis ductis lineis baſi parallelis numero æqualibus, ſint ipſæ parallelæ, & baſes ad abſciſſas diametrorum partes ſumptas à verticibus in iiſdem rationibus, tum abſciſſe ipſæ ad abſciſſas. *In textu verò Arabico hæc non habentur expreſsè, ſicut in ſecunda definitione, quàm citat hiſce verbis.* Et educantur ex quolibet eorum ordinationes baſibus parallelæ numero æquales, quarum proportio cum diametris eſt, vti diximus in ſectionibus ſimilibus.

MONITVM.

AMOR veritatis, & muneris ſuſcepti ratio exigere videtur, vt definitiones ſectionum conicarum ſimilium, quæ circunferuntur, accuratius examinentur, ne (vt Mydorgij verbis vtar) à magnis nominibus (Eutocium dico, Commandinum, & Mydorgium) præiudicium diutius fiat veritati, hoc autem ad propoſ. 11. 12. huius lib. præſtabo. Interim monendus es Lector, in definitione ab Eutocio relata aliqua verba deficere (nimirum quod abſciſſæ in axibus, aut diametris æquè ad ordinatas inclinatis ſumantur) in definitionibus Commandini aliquod deſiderari, & eas merito re-

rito reiectas à Mydorgio fuisse, nam licet latera transuersa proportionalia sint lateribus rectis, non tamen duæ eiusdem nominis sectiones similes erunt, nisi diametri æquè inclinatæ sint ad ordinatim ad eas applicatas: tandem definitionem Mydorgij similium sectionum pariter imperfectam esse suspicor; nam licet duæ sectiones, quibus competit tradita definitio, seu passio eiusdem definitionis, sint reuera similes, non tamen è conuerso similibus sectionibus conuenit solummodo definitio, seu eius passio, cum aliquando apposita passio in eisdem reperiatur: quod perinde est, ac si quis putaret triangulum æquilaterum aliquando latera inæqualia habere posse.

VIII. *In hac definitione manifestè aliquid desideratur: inquit enim* (Coni similes sunt quorum axium proportio ad diametros suarum basium eadem est.) *Quod quidem verificatur tantummodo in conis rectis: at in scalenis debent necessario axes conorum efficere æquales inclinationes super bases: Quod quidem in sequentibus propositionibus manifestè ab Apollonio declaratur. Itaque textum hac ratione restitui debere puto. Coni similes sunt, quorum axes æque ad bases inclinati ad diametros basium proportionales sunt.*

IX. *Sectio genita in superficie coni à plano eum secante, non per verticem eius ducto dicitur in dicto cono posita, & contenta; & conus ille continere dicitur eandem sectionem: & licet conisectio exhibeatur extra conum; dicetur nihilominus contineri ab illo cono, in quo sectio illa accomodari potest, seu in quo ab aliquo plano secante effici potest in coni superficie eadem illa conisectio.*

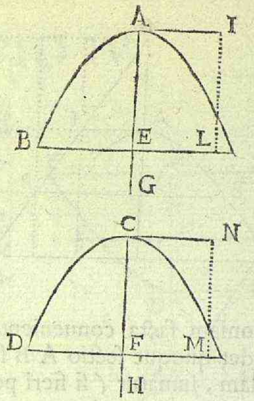
SECTIO PRIMA

Continens Proposit. I. II. IV. & X.

PROPOSITIO I.

QVælibet duæ sectiones parabolicæ A B, C D, si habuerint axium erectos A I, C N æquales: erunt inter se æquales. Si verò duæ illæ sectiones fuerint æquales, erunt axium erecta æqualia inter se. a

Quoniam superposita axi C H super axim A G, cadet sectio C D super sectionem A B: si enim cadere non concedatur super illam, signetur (si fieri potest) punctum eius D, extra sectionem A B cadens: & educatur D F perpendicularis ad axim; & perficiatur planum rectangulum F N, & ab axi A G secetur A E æqualis C F; & educatur ex E perpen- b

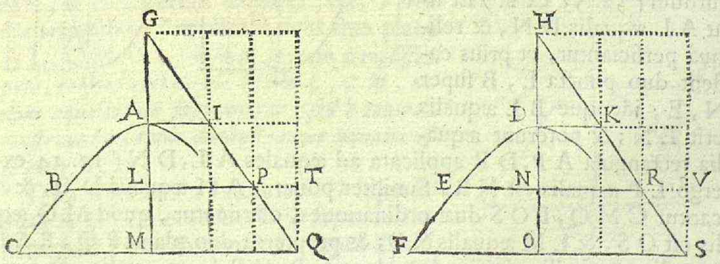


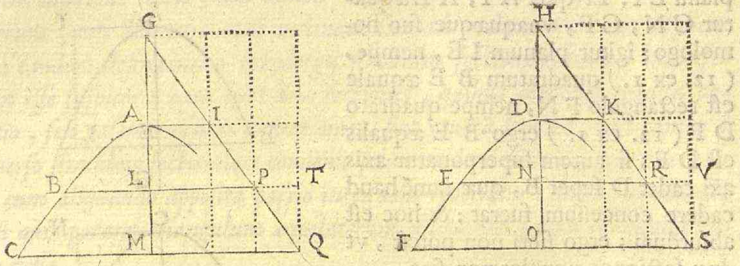
pespendicularis B E, & perficiatur planũ E I. Et quia A I, A E æquãtur C N, C F, vnaquæque suo homologo: igitur planum I E, nempe (12. ex 1.) quadratum B E æquale est rectangulo F N, nempe quadrato D F (12. ex 1.) ergo B E æqualis est D F; si autem superponatur axis axi cadet D super B, quæ tamẽ haud cadere concessum fuerat: & hoc est absurdum; ergo fieri non potest, vt duæ sectiones æquales non sint. 11. lib. 1. Ibidem.

c Præterea supponamus duas illas sectiones æquales esse inter se, & fiat F C æqualis E A, & educamus ad axes perpendiculares B E, D F, & perficiamus plana rectangula F N, E I. Quia sectio A B cadit super sectionem C D, & A E super C F cadet; alioquin essent in eadem parabola duo axes: ergo F cadit super E, & D super B, & propterea B E potens planum E I (12. ex 1.) æqualis erit D F potenti planum F N (12. ex 1.); ergo duo plana sunt æqualia; sed sunt applicata ad æquales F C, A E; igitur C N, A I erectæ æquales sunt. Et hoc erat ostendendum. 11. lib. 1. Ibidem.

PROPOSITIO II.

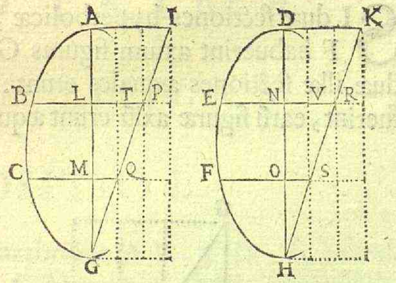
SI duæ sectiones hyperbolicæ, aut duæ ellipses A B C, D E F habuerint axium figuras G I, H K similes, & æquales; a duæ illæ sectiones æquales erunt. Si verò duæ sectiones æquales fuerint, earũ figuræ axiũ erunt æquales, similes, & similiter positæ.





Quoniam facta conuenienti superpositione axis A M super axim D O, cadet quoque sectio A B super sectionem D E: si enim non cadit super illam, sumatur (si fieri potest) eius punctum B, extra sectionem D E cadens; & producatur ad axim perpendicularis B L vsque ad P: & perficiatur planum A P applicatum comparatum; & secetur D N æqualis A L, & erigatur per N ad axim perpendicularis N E, & producatur vsque ad R, perficiendo planum D R applicatum comparatum; Et quia A I æqualis est D K, & A L æqualis D N: erit planum I L, æquale plano K N; cumque G I, H K sint duæ figuræ similes, & æquales, pariter- b
que I P, K R; ergo duo plana A P, D R sunt æqualia: & propterea E
12. 13. lib. 1. N, B L, quæ illa spatia possunt (13. 14. ex 1.) sunt æquales. Si autem superponatur axis axi cadet B L super E N, eoquod duo anguli N, & L sunt æquales; igitur B cadit super E, quod prius cadere non concedebatur: & hoc est absurdum. Quapropter sectio sectioni æqualis est.

Deinde ponamus duas sectiones æquales, vtique congruet sectio AB sectioni DE, & axis A L axi D N, quia si non cadit super illum, essent c
in hyperbola duo axes, & in ellipsi tres axes, quod est ab-
48. lib. 2. surdum (52. 53. ex 2.) Et fiat A L æqualis D N, & reliqua perficiantur, vt prius cadent duo puncta L, B super
N, E; ideoque B L æqualis d
erit E N; & poterunt æqua-
12. 13. lib. 1. lia rectangula A P, D R applicata ad æquales A L, D N (13. 14. ex 1.) ergo L P æqualis est N R. Similiter ponatur A M æqualis D O, & educantur C M Q, F O S duæ ordinationes, ostendetur, quod M Q æqualis est O S, & L M æqualis N O; & propterea duo plana P Q, R S sunt æqualia, & similia; igitur duo plana G P, H R sunt æqualia, & similia, & L P ostensa est æqualis N R: ergo G L æqualis est H N, & A L æqualis D N; & propterea G A æqualis est D H, & A I æqualis D K.



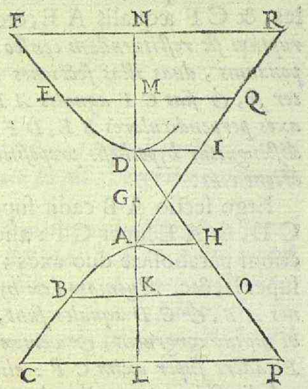
Quapro-

Quapropter duæ figuræ G I, H K sunt æquales, & similes. Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO IV.

a Simili modo demõstrabitur, quod duæ sectiones oppositæ sint similes, & æquales.

Eo quod axis inclinatus est communis, & erecti sunt æquales (16. ex 1.) & prot pterea earum figuræ æquales quoque sunt inter se. Et hoc erat propositum. 14. lib. 4.



b

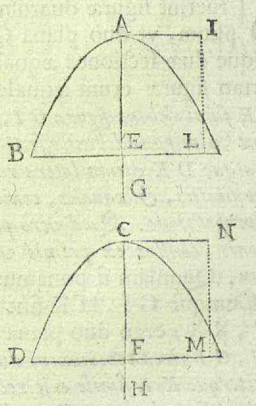
PROPOSITIO X.

a Pariter constat, quod si potentiales cum suis abscissis cõprehendant angulos æquales obliquos, eadem consequentur, quæ prius dicta sunt.

Et hoc erat propositum.

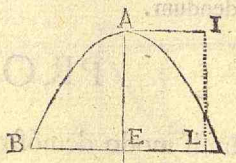
Notæ in Proposit. I.

a Qvælibet duæ sectiones parabolicæ, vt A B, C D, quarum relationes sunt duo plana A L, C M, & erecti earum A I, C N æquales. ipsæ quoque sunt æquales. Si verò duæ illæ sectiones fuerint æquales, vtique earum applicata, & erecti erunt æquales, &c. *Verba illa propositionis (* applicata sunt duo plana A L, C M, &c. *) casu in textum irrepsisse puto, eo quod rectangula illa A L, C M, nedum æqualia non supponuntur, sed è contra construuntur, atque demonstrantur æqualia esse inter se.*

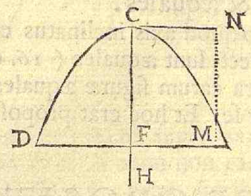


b Quia si ponamus sagittam C H super sagittã A G, cadet sectio C D super sectionem A B: si verò non cadit super illam, signemus super literam, in quam non cadit punctum D: &c. *Sic legendũ puto. Quoniam,*

niam, superposita axi C H super axim A G, &c. vt in textu habetur. Si enim axis C H super axim A G applicatur, ita vt vertices A, C coincidant, necessariò sectio C D cadet super sectionem A B alias assignari posset punctum eius D, extra sectionem A B cadens.



Præterea ponamus duas sectiones æquales, & C F æqualis A E, &c. *Textum corruptum sic restituendum censeo. Præterea supponamus, duas illas sectiones æquales esse inter se, & fiat C F æqualis A E, educamus ad axes perpendiculares B E, D F, &c. Sic enim distinguitur hypothesis propositionis à constructione eius.* c



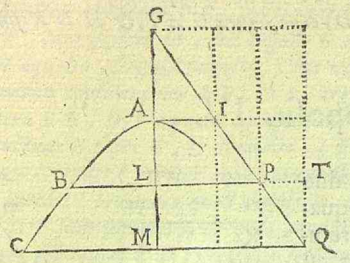
Ergo sectio A B cadit super sectionem C D, & A E super C F: alioqui essent sectioni parabolicæ duo axes; ergo F cadit super E, &c. *Quoniam (ex hypothesi) sectiones A B, & C D æquales sunt, facta intellectuali conuenienti superpositione, sibi mutuò congruent, & vertex A cadet super verticem C. Dico iam, axim A E cadere super axim C F: alioquin in eadem parabola, scilicet in duabus parabolis sibi congruentibus à communi vertice C, vel A, duo axes A E, & C F ducerentur: quod est impossibile. Quare axis A E cadit super axim C F.* d

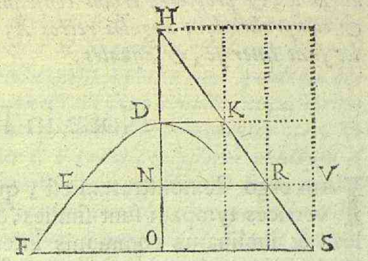
Notæ in Proposit. II.

SI fuerint figuræ duarum sectionem hyperbolicarum, aut duarum ellipsium, vt duo plana G I, H K in A B, D E similes, & æquales; vtique duæ sectiones æquales erunt: si vero duæ sectiones sint æquales earum figuræ erunt æquales, similes, &c. *In duabus sectionibus A B, & D E sumi debent figuræ G I, & H K, non qualescunque, sed illæ, quæ ad axes fiunt, nimirum debent esse G A, & H D axes inclinati, seu transuersi, & A I, atque D K eorum latera recta; tunc quidem, si figuræ axium G I, H K fuerint similes, & æquales, conicæ sectiones B A, D E æquales quoque ostenduntur in propositione. Quod verò particula illa (*axium*) desideretur in textu propositionis, constat ex primis verbis immediatè sequentis constructionis. Inquit enim.* Quoniam si ponamus axim A M super axim D O, &c. a

Cumque G I, H K sint duæ figuræ similes, & æquales, pariterque I P, K R; ergo duo plana A P, D R sunt æqualia, &c. *Quia rectangula I P, G I circa communem diametrum G I P consistunt, erunt inter se similia: pariterque K R simile erit rectangulo K H: quare duo rectangula I P, & K R similia sunt duobus rectangulis G I, H K inter se similibus; & ideo illa inter se quoque similia erunt, & habent latera homologa æqualia, illa nimirum, quæ opponuntur æqualibus abcissis A L, & D N, igitur rectangula P I, & R K* b

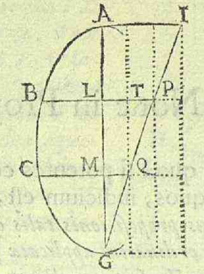
æqualia

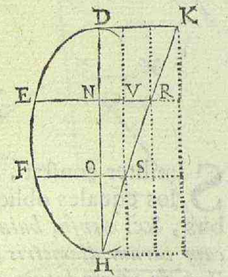




æqualia sunt inter se: sunt verò rectangula N K, & L I æqualia quoque (cum latera circa angulos rectos æqualia habeant, singula singulis) ergo duo rectangula A P, & D R æqualia sunt inter se.

c Quia, si non cadit super illum, essent sectioni hyperbolicæ duo axes, & in ellipsi tres axes, &c. *Quoniam æquales sectiones B A, E D sibi mutuò congruunt, & vertices A, & D coincidunt, siquidem axis A L non cadit super axim D N (cum ambo tamen axes sint) haberet vnica sectio, scilicet duæ sectiones congruentes, duos axes A L, & D N conuenientes in eodem puncto verticis, quod in hyperbola est impossibile; in ellipsi verò, in qua semper duo axes reperiuntur se se secantes in centro ad angulos rectos, reperietur tertius axis, ille nimirum, qui ab eodem vertice A ducitur in eadem sectione A B, & non coincidit cum axi A L.* 48. lib. 2.





d Ideoque B L æqualis est N E, & poterunt A P, D R, applicata ad A L, D N æqualia &c. *Quia quadrata æqualium B L, E N æqualia sunt rectangulis A P, D R; erunt illa æqualia, & eorum latera A L, D N facta sunt æqualia; igitur reliqua duo latera L P, N R æqualia quoque sunt. Simili modo ostendetur, quod M Q æqualis est O S, seù L T æqualis est N V, & L M, seu T Q æqualis est N O, seu V S; erant autem prius L P, N R æquales; igitur residuæ P T, & R V æquales erunt, sed quia T Q, & G L sunt parallelæ pariterque V S, & H N; ergo vt T P ad P L ita est Q T ad L G, simili modo vt V R ad R N ita est S V ad N H; habent verò duæ æquales T P, & V R ad duas æquales P L, & R N eandem proportionem, igitur duæ æquales Q T, & S V eandem proportionem habent ad L G, & N H, & propterea hæ erunt æquales, & ablatis æqualibus A L, D N, erunt reliquæ A G, & D H inter se æquales, & habet G A ad A I eandem proportionē, quàm Q T ad T P, seu quàm S V ad V R; pariterq; H D ad D K est vt S V ad V R (propter parallelas & similitudinē triangulorū) igitur vt G A ad A I ita erit H D*

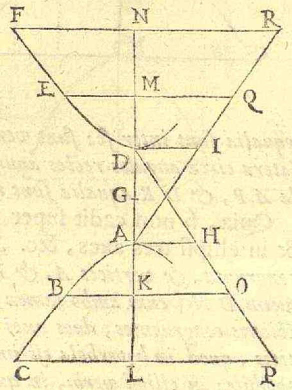
ad

ad D K, & propterea etiam consequentes A I, & D K æquales sunt inter se, & comprahendunt angulos rectos A, & D; ergo figuræ G A I, & H D K similes sunt inter se, & æquales.

Notæ in Proposit. IV.

a

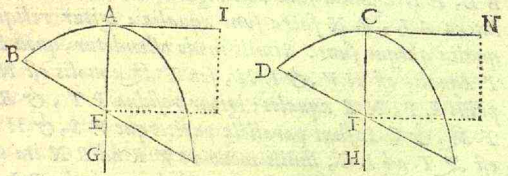
IAm ergo demonstratum est, quod duo vertices tympani sunt similes, & æquales, & inclinatus communis inter vtrumque verticem (16. ex 1.) ergo figura est communis, &c. *Hæc propositio est veluti Corollarium primæ partis secundæ propositionis in qua ostensum est, quod si duæ hyperbolæ habuerint axium figuras æquales, & similes, erunt quoque sectiones ipsæ æquales, & congruentes; habent verò sectiones oppositæ A B, & D E (quæ vocantur Vertices Tympani ab Arabico interprete) figuras D A H, & A D I axis D A æquales, & similes (vt in 14. primi libri demonstrauit Apollonius); ergo sectiones oppositæ æquales erunt inter se, & congruentes.*



Notæ in Proposit. X.

a

Similiter constat, quod si potentes contineant cum suis abscissis angulos equales obliquos, iudicium est, quod memorauimus in sectionibus, &c. *Sensus huius propositionis talis est. In duabus sectionibus conicis, si cum earum diametris ordinatim applicatæ contineant angulos æquales, non rectos, & earum latera recta sint æqualia in parabolis, in reliquis verò sectionibus latera recta, & transuersa æqualia, itaut figuræ ipsæ æquales sint; erunt sectiones ipsæ inter se æquales: & è conuerso, si sectiones æquales fuerint, habebunt latera æqualia earum diametrorum, cum quibus ordinatim applicatæ angulos æquales, non rectos continent.*



Demonstrationes non apponuntur ab Apollonio, quia ijsdem verbis omnino in eisdem figuris absolui possunt. Sint enim primo duæ parabolæ A B, & C D, atque earum diametri A G, & C H efficiant æquales angulos F, & E, cum ordinatim ductis D F, & B E, sintque latera recta A I, C N æqualia. Dico, sectiones

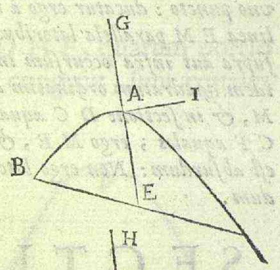
sectiones

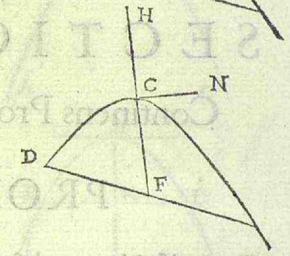
sectiones æquales esse. Sumatur quodlibet punctum B in sectione B A ducaturque ordinatim applicata B E, secturque C F æqualis A E, & ducatur ordinatim D F. Manifestum est, rectangula E A I, & F C N æqualia esse (cum latera sint æqualia, singula singulis); his verò rectangulis æqualia sunt quadrata ordinatim applicatarum B E, D F; ergo & quadrata sunt æqualia, atque eorum latera B E, D F æqualia quoque. Si igitur parabolæ superponantur ita, vt punctum E super F, & diameter A E super C F cadat, necessariò punctum A super C cadet (propter æqualitatem abscissarum) atque punctum B super punctũ D incidet (propterea quod anguli E, & F æquales sunt, pariterque rectæ B E, & D F sunt æquales), & quia quodlibet punctum B parabolæ A B cadit semper super sectionem C D; ergo duæ sectiones B A, & D C sibi mutuò congruunt, & ideo æquales sunt. Non secus conuersum huius propositionis demonstrari potest.

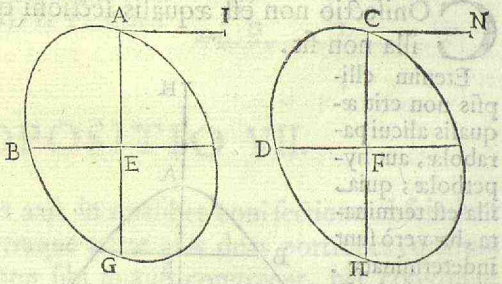
11.lib. 1.

Altera verò pars propositionis breuius demonstrabitur hac ratione. In duabus hyperbolis, aut ellipsibus efficiant ordinatim applicatæ B E, D F cum diametris A E, & C F angulos æquales, & non rectos; sintque transuersa latera G A, & H C æqualia, pariterque latera recta A I, & C N æqualia. Dico, sectiones B A, C D æquales esse. Sumatur quodlibet punctum B sectionis B A, ducaturque ad A E diametrum ordinatim applicata B E, seceturque C F æqualis abscissæ A E, ducaturque F D ad H C F diametrũ ordinatim applicata. Erit rectangulum G E A ad quadratum B E, vt latus transuersum G A ad rectum A I; pariterque rectangulum H F C ad quadratum F D erit, vt H C ad C N: habent verò duæ æquales G A, & H C eandem proportionem ad duas æquales A I, & C N; igitur rectangulum G E A ad quadratum B E eandem proportionem habebit, quam rectangulum H F C ad quadratum D F, sunt verò rectangula G E A, H F C æqualia inter se (quandoquidem eorum latera A E, C F facta sunt æqualia) quæ addita ipsis A G, & C H æqualibus efficiunt latera E G, & F H æqualia; ergo quadrata B E, & D F æqualia sunt inter se; & ideo ordinatim applicatæ B E, & D F æquales erunt. Quare facta, vt prius, intellectuali superpositione; nedum vertex A super C, sed etiam quodlibet punctum B sectionis A B super sectionem C D cadet; ideoque sectiones sibi mutuò congruent, & æquales erunt.

21.lib. 1.



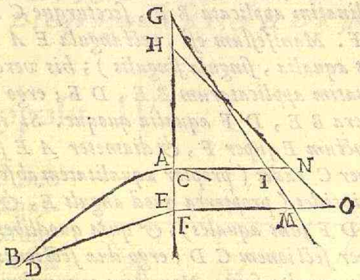




E conuerso, si sectiones B A, & C D æquales supponantur, sibi mutuò congruent,

T

gruent, & ideo à communi vertice A, ducta qualibet diametro A E, vel C F, ad quam ordinatim applicetur quælibet B E, seu D F in angulo non recto; sintque latera transuersa, & recta G A, A I, atque H C, C N. Dico, huiusmodi latera, & figuræ seu rectãgula G A I, H C N æqualia, & similia esse inter se, & sibi mutuò congruentia. Si enim hoc verum non est, eorum diametri G I, & H N similiter positæ, & subtendentes communem angulum A non coincident; & ideo æquidistantes erunt aut se mutuò secabunt in vno puncto: ducatur ergo à termino E alicuius ordinatim applicatæ B E recta linea E M parallela lateribus rectis A I, C N, ita vt secet diametros figurarum supra aut infra occursum in duobus punctis M, & O. Igitur in sectione A B idem quadratum ordinatim applicatæ B E, seu D F æquale erit rectangulo A E M, & in sectione D C æquale erit rectangulo C F O, suntque abscissæ A E, & C F æquales; ergo M E, & O F æquales inter se sunt: pars, & totum quod est absurdum: Non ergo latera figurarum inæqualia sunt. Quod erat ostendendum.



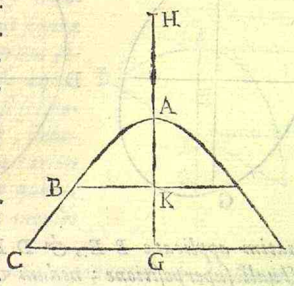
SECTIO SECVNDA

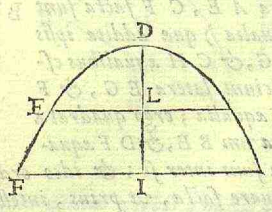
Continens Proposit. III. VI. VII. & IX.

PROPOSITIO III.

Conisectio non est æqualis sectioni quæ eiusdem generis cũ illa non sit. a

Etenim ellipsis non erit æqualis alicui parabolæ, aut hyperbolæ; quia illa est terminata, hæ verò sunt indeterminatæ. At parabola D E F, cuius axis D I non erit æqualis hyperbolæ A B C, cuius axis A G, & inclinatus A H. Quia si abscindantur A K, K G æquales D L, L I, & educamus ad axes perpendiculares B K, C G, E L, F I: Dico, quod sectio D F non est æqualis





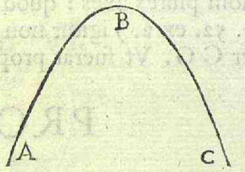
sectioni

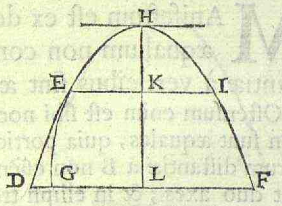
sectioni A C; quia si esset æqualis illi, facta superpositione, sibi mutuò
congruerent, & caderent puncta E, F, L, I, super B, C, G, K, & esset
F I æqualis C G, atque E L æqualis B K; ideoque quadratũ F I ad qua- 20.lib. 1.
dratum E L esset, vt D I ad D L (19. ex 1.) essetque quadratum C G
ad quadratum K B, vt A G ad K A, quod est absurdum; quia illius pro-
portio ad istam est, vt H G in G A ad H K in K A (20. ex 1.) Igitur 21.lib. 1.
sectio parabolica non est æqualis sectioni hyperbolæ, nec sectio aliqua
æqualis est sectioni, quæ non sit eiusdem generis; Et hoc erat osten-
dendum.

PROPOSITIO VI.

a Qvælibet duæ sectiones A B C, & D H F, quarum portio vnius superposita portioni alterius congruit, sunt æquales inter se.

Alioquin congruat portio B C portio-
ni E F, at non cadat portio A B super
D E, sed cadat in situ E G, & educamus
lineam tangentem duas sectiones in H, & 34.lib. 1.
educamus E I, D G F parallelas tangen-
ti; & ex H ad semipartitionem ipsius E I
ducatur H K, quæ occurrat D F in L.
Et quia H L secat bifariam lineam paral-
lelam tangenti ab eius termino ductæ;
ergo est diameter vniuersæ sectionis (5. 7.lib. 2.
ex 2.) quare bifariam secat vnamquan-
que ex D F, G F, & fiet D L æqualis G
L, quod est absurdum: igitur sectio A B
C tota congruit sectioni D H F. Quod
erat ostendendum.

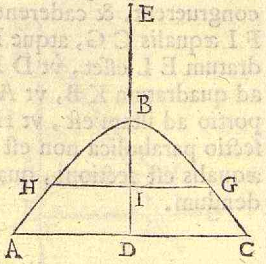


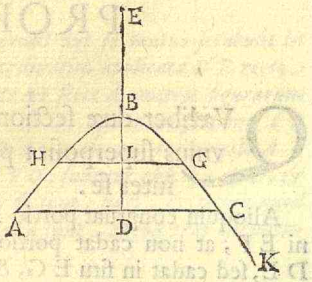


PROPOSITIO VII.

a Dvæ ordinationes axis in qualibet coni sectione abscindunt à sectione ex vtraque parte axis duas portiones, quarum si vna alteri superponatur sibi mutuò congruent, nec congruunt alicui aliæ portioni sectionis.

Sit coniſectio A B C, & eius axis B D, & ſumantur in ſectione puncta G, C, ab eis educãtur duæ ordinationes G H, C A occurrentes axi in I, D. Dico, quod B G congruit B H, & G C ipſi H A, & ſuperficies B D C ſuperficiei B D A, & ſegmentum B G C ſegmento B H A.
Quoniam axis B D bifariam diuidit G H, A C b
in I, D, vtique G I ipſi I H congruet, & D C ipſi D A, & duo puncta G, C ſuper duobus punctis H, A cadent, & portio ſectionis conicæ G C ſuper portionem H A, & G B ſuper H B: Et dico, quod portio H A non congruit alicui alteri portioni, quàm G C: ſi enim poſſibile eſt cõgruat portioni C K, & portio H B congruet portioni, quæ continuatur ipſi K C; ergo cadet B ex H B non ſuper B ex C G B; quia portio H B non eſt æqualis portioni C B; & propterea incidet axis B D in alium locum, eſſentque eidem ſectioni plures axes: quod eſt abſurdum;
48.lib. 2. (51. 52. ex 2.) igitur non cadit H A niſi ſuper C G. Vt fuerat propoſitum.





PROPOSITIO IX.

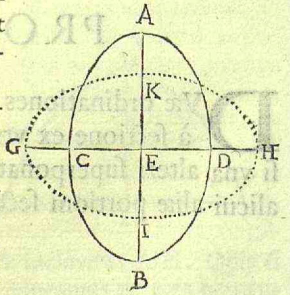
MAnifeſtum eſt ex demoſtratis, quod portiones ſectionum a
æqualium non congruunt ſibi inuicem, niſi earum diſtantiæ à verticibus ſint æquales.

Oſtenſum enim eſt ſibi non congruere, quarum diſtantiæ à verticibus non ſunt æquales, quia portio H A, ſi caderet ſuper portionem C K, & earum diſtantiæ à B non eſſent æquales, conſequitur, quod in hyperbola
48.lib. 2. ſint duo axes, & in ellipſi tres axes: quod eſt abſurdum (51. 52. 53. ex 2.)

Si autem in ellipſi cadit axis A E tranſuerſus ſuper axim rectum illius, vtique differunt b
inter ſe, & non ſibi inuicem congruunt ſectiones.

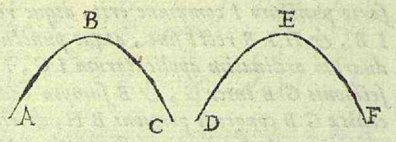
Conſtat etiam, quod in ſectionibus inæqualibus, vt A B C, D E F portio vnius earum non congruit portioni alterius.

Alioqui congruet B A ipſi D E, & congrueret etiam E F ipſi B C (6. ex 6.) eſſetque ſectio C B A æqualis ſectioni F E D: at ſuppoſuimus, non eſſe æquales, quod eſt abſurdum:



Ergo

ergo non congruit portio alicuius ſectionis portioni alterius ſectionis, cui æqualis non eſt. Et hoc erat oſtendendum.

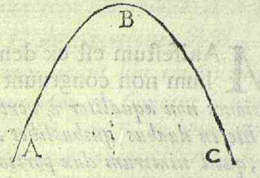


Notæ in Propoſit. III.

a ETenim ellipſis non eſt æqualis alicui hyperbolæ, &c. *Suppleri debet in textu verbum* (parabolæ) *dicendo. Etenim ellipſis non eſt æqualis alicui parabolæ, aut hyperbolæ, quia illa eſt determinata; hæ verò ſunt indeterminatæ, ſcilicet ellipſis eſt finita parabole verò, & hyperbole in infinitum extendi poſſunt, & propterea nulla ratione æquales oſtendentur.*

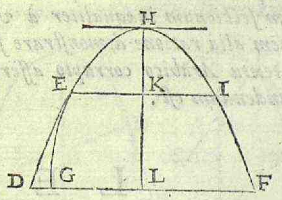
Notæ in Propoſit. VI.

a QVælibet duæ ſectiones A B C, D E F, quarum vnaquæque literarum ſuperpoſita literis alterius congruit; vtique ſunt æquales, &c. *Legendum puto. Quælibet duæ ſectiones A B C, & D E F, quarum portio vnius, alterius portioni ſuperpoſita congruit ſunt æquales inter ſe.*



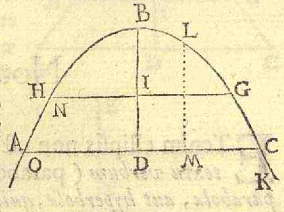
Notæ in Propoſit. VII.

a ORdinationes axis in qualibet hyperbolarum abſcindunt à ſectione ex vtraque parte axis duo ſegmenta, quæ, ſi cadit vnum ſuper alterum, ſibi mutuò congruunt, nec excedunt, nec deficiunt, nec congruunt alicui portioni ſectionis, &c. *Expungi debent verba aliqua huius textus ſuperuacanea, & aliqua adiungi, vt ſenſus continuus talis ſit. Duæ ordinationes axis in qualibet coniſectione abſcindunt à ſectione ex vtraque parte, axis duas portiones, quarum vna alteri ſuperpoſita ſibi mutuò congruent, nec cõgruunt alicui aliæ portioni ſectionis.*



b Quoniam axis B D bifariam diuidit G H, A C, &c. *Ex eo enim quod omnes applicatæ ad axim B D ſecantur bifariam ab illo,*

illo, & ad angulos rectos, si intelligatur superficies B I G, superposita superficiei B I H, itaut axis super axim cadat, atque vertex B sit communis necessario punctum I commune erit, atque recta I G cadet super I H, cum anguli G I B, & H I B recti sint, atque punctum G cadet in H, propter æqualitatem duarum ordinatim applicatarum I G, I H: eadem ratione quælibet alia puncta sectionis G B inter G, & B sumpta cadent super B H; & ideo portio sectionis conicæ G B congruet portioni B H, & eidem æqualis erit. Simili modo constat, portionem G C æqualem esse portioni H A, & sic superficies ipsæ. Quod verò portio H A non congruat alicui alteri segmento C K præter G C, constat ex eo, quod si portiones K C, & A H sibi mutuò congruunt, vt nimirum punctum C super H, & punctum K super A cadat: & concipiatur punctũ C idem ac N, & K idem ac O, & portio O N L æqualis immo eadem sectio K C B, & illius axis L M omnino idem ac axis B D: tunc quidem (ex precedenti prop. 6.) sectiones ipsæ A B, & K B, seu O L æquales erunt, & sibi mutuò congruentes: & propterea H B cadet super portionem maiorem C B seu ei æqualem N B L (cum H B æqualis ostensa sit ipsi G B) & ideo vertices B, & L duarum axium B D, & L M in duabus sectionibus A B, & K B seu O N L inæqualibus non conuenient: quapropter in duabus congruentibus, seu in eadem sectione duo axes B D, & L M existent, quod est absurdum, quia est contra propos. 48. libri 2.



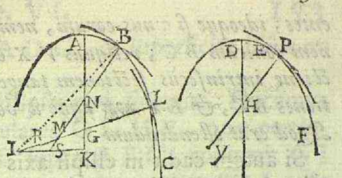
Notæ in Proposit. IX.

MAnifestum est ex demonstratis, quod portiones sectionum æqualium non congruunt, &c. *Sicuti in propos. 7. dictum est, quod duæ portiones non æqualiter à vertice axis distantes sibi mutuò congruere nō possunt, ita hic in duabus quibuslibet æqualibus conisectionibus idem verificari ostenditur, quod nimirum duæ portiones cuiuslibet sectionis conicæ, vel duarum æqualium sectionum inæqualiter à vertice axis distantes non sint congruentes. Hoc autem alia ratione demonstrare superuacaneum non erit, cum demonstratio, quæ in textu Arabico corrupto affertur non omnino sufficiens videatur, sed prius ostendendum est.* a

LEMMA I.

IN duabus æqualibus conisectionibus A B C, & D E F, quarum axes A G, D H describere duos circulos æquales contingentes conicas sectiones, quorum is, qui propinquior est vertici extrinsecus, reliquus verò intrinsecus sectionem tangat.

In

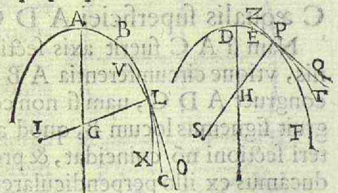


In sectione A B C ducatur ramus breuisecans singularis I L secans axem in G, sitque I punctum concursus perpendicularis I K, & breuisecantis; & à quolibet puncto B inter L, & verticem A ducatur alius ramus breuisecans B M, qui occurret L I vltra axim in M, & inter puncta G, & I; coniungaturque recta linea B I. Quoniam angulus L G A acutus est, erit angulus G M N internus, & oppositus in triangulo G M N minor illo, & ideo acutus, & propterea qui deinceps est angulus B M I erit obtusus, & ideo in triangulo I B M latus I B subtendens maximum angulum obtusum maius erit latera B M; sed ramus I L maior est, quàm I B, propterea quod remotior est à vertice A, igitur ramus I L maior erit, quàm B M: Secari ergo poterunt æquales rectæ lineæ L R, B S, quæ sint minores quidẽ, quàm I L, sed maiores, quàm M B; & describantur duo circuli, quorum radij sint S B, & R L æquales, atque centra sint S, & R; Manifestum est circulum, cuius radius B S contingere conisectionem A C in puncto B, & extrinsecùs incedere, propterea quod radius B S maior est maximo breuisecantium M B à concursu M educto; è contra circulus radio R L descriptus intrinsecùs continget eandem conisectionem in L cum ramus M L minor sit singulari breuisecante L I. Tandẽ in sectione D E F secetur axis abscissa D H æqualis A N, & in angulo D H P æquali angulo A N B ducatur radius Y H P, qui fiat æqualis S B, & cẽtro Y radio verò Y P circulus describatur. Et quia in sectionibus æqualibus abscissæ, breuisecantes, anguli ab eis contenti, & circuli descripti sunt æquales, & congruentes; igitur circulus radio Y P descriptus, contingit conisectionem D E F extrinsecùs; sicuti circulus radij S B tangebat sectionem A B C in B extrinsecùs. Vt erat propositum.

51. 52. 53. lib. 5.
28. lib. 5.
8. Addit. lib. 5.
13. 14. 15. lib. 5.
67. lib. 5.
Ex 12. Addit. lib. 5.
8. Addit. lib. 5.
Ibidem.

Hoc demonstrat o ostendetur, quod in duabus conisectionibus A B C, D E F æqualibus, quarum axes A G, D H duæ portiones B C, & E F non æquè ab axium verticibus remotæ non erunt sibi congruentes. PROP. 1. Addit.

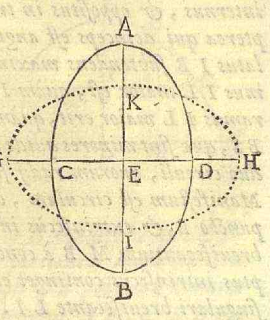
Si enim possibile est B C, & E F sibi mutuò congruant, & sumatur intermedium punctum commune, vel duo puncta coincidentia L, & P, & quia portiones B C, E F inæqualiter distant à verticibus, ergo puncta coincidentia L, P non erunt æquè à verticibus remota; sit ergo P propinquius vertici D, quàm est L vertici A, & per L, & P ducantur rectæ lineæ L O, P Q tangentes sectiones, & ex lẽmatæ præcedenti describantur duo circuli æquales Z P T, & V L X radijs I L & S P, quorum Z T extrinsecus tangat sectionẽ in P, & V X intrinsecus in L, cumque eorum radij I L, S P sint breuisecantes, erunt perpendiculares ad L O, P Q contingentes sectionem in L, & P; atque portiones B C, E F sibi mutuò congruunt, idest constituunt vnicam communem peripheriam, ergo rectæ lineæ L O, P Q contingentes eandem sectionem sibi mutuò congruent, pariterque breuisecantes æquales L I, P M ad illas perpendiculariter insistentes erunt congruentes quoque; & propterea circuli V X, Z T ab ijs radijs geniti erunt quoque congruentes,



33. 34. lib. 1.
29. 30. lib. 5.
35. 36. lib. 1.

entes; ideoque si vnus eorum, nempe Z T extrinsecùs tangit communem portionem conicam B C, reliquus V X extrinsecùs quoque eam tanget, sed ex constructione intrinsecùs sectionem tangebat, quod est absurdum: Non ergo duæ portiones B C, & E F non æquè à verticibus axium remotæ sibi mutuò congruent. Quod erat ostendendum.

Si autem cadit in ellipsi axis A C transuersus super axim rectum illius; vtique excedit illam, & non sibi mutuò congruunt sectiones, & quædam congruunt, &c. *Sensus est. Si intelligantur duæ ellipses, habentes axes transuersos A B, & G H æquales inter se, pariterque axes rectos C D, I K æquales: & axis A B transuersus vnius ponatur super I K axim rectum alterius; ita vt centra sibi mutuò congruant in E: tunc quidem, quia axes in ellipsi inæquales sunt (alias esset circulus) igitur extremitates axis transuersi A B non cadunt super extremitates axis recti K I, neque G, H cadunt super C, D; & ideo circumferentiæ ellipsium se se mutuò secant quatuor in locis, vt in libro 4. ostensum est.* b



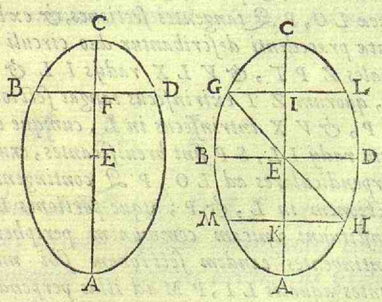
SECTIO TERTIA

Continens Proposit. V. & VIII.

PROPOSITIO V.

SI per centrum E ellipsis A B, C D transeat linea recta A C vsque ad sectionem; vtique bifariam diuidit superficiem sectionis, & circumferentiam illius, scilicet erit superficies A B C æqualis superficiei A D C.

Nam si A C fuerit axis sectionis, vtique circumferentia A B C congruet A D C, nam si non cōgruit signemus locum B, quod alteri sectioni nō coincidat, & producamus ex illo perpendicularem B F super A C vsque ad D. Ergo B D ordinata est ad C A, & propterea B F superposita cōgruet ipsi D F, & cadet B super D, quia B F æqualis est D F (8. ex 1.); sed non cadebat super illum; quod est absurdum. Igitur circumferentia



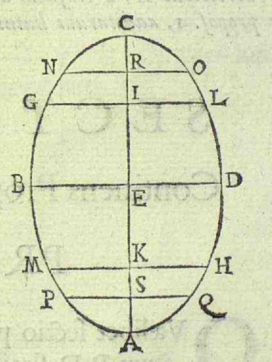
rentia A B C æqualis est circumferentiæ A D C, & superficies illius æqualis superficiei.

Iam linea G H transiens per centrum ellipsis non sit axis. Ducamus ex G, H super axim C A duas perpendiculares G I, H K, quæ pertingant ad L, M. Et quia si ponatur A D C super A B C, congruit G I super L I (7. ex 6.) & cadet G super L, quia G I æqualis est I L, & cadit circumferentia C G super circumferentiam C L; ergo superficies C I G æqualis est superficiei C I L: & quia B C D congruit B A D, & superficies superficiei, cadet C I super A K, & L I super K H, & circumferentia C L super circumferentiam A H (quia E I æqualis est E K) & superficies C I L congruit superficiei A K H; & propterea superficies A K H æqualis est G I C, & triangulum E G I æquale est triangulo E K H; igitur superficies A E H æqualis est superficiei G E C, & circumferentia A H æqualis est circumferentiæ G C, eritque circumferentia C D H, & superficies eius æqualis A B G, & superficiei illius. Quare G H transiens per centrum sectionis A B C D bifariam eam diuidit. Et hoc erat ostendendum.

PROPOSITIO VIII.

SImiliter constat, quod si ex quolibet quadrante ellipsis secentur circumferentiæ, per quarum extremitates rectæ lineæ coniunctæ sint ad eundem axim ordinatim applicatæ, & æquè à centro remotæ; vtique sunt congruentes, & æquales, nec alicui portioni eiusdem sectionis vna illarum æqualis est.

a Nam demonstrauimus, quod duæ superficies G I C, L I C sibi congruunt, nec non congruunt, duabus superficiebus H A K, M A K (5. ex 6.); & si eduxerimus duas ordinationes N O, P Q, quarum distantiæ à centro sint æquales, simili modo ostendetur, quod superficies N R C, O R C, A S Q, A S P sint congruentes (5. ex 6.) & quod circumferentiæ N C, C O, A Q, A P sint congruentes, remanebunt quatuor segmenta G N, L O, H Q, M P congruentia, & superficies quoque eorum congru-
b entes. Et insuper dico, quod quodlibet horum segmentorum non congruit alicui alio segmento; nam sequeretur, quod in eadem ellipsi sint tres axes, vti dictum est. Quare patet propositum.



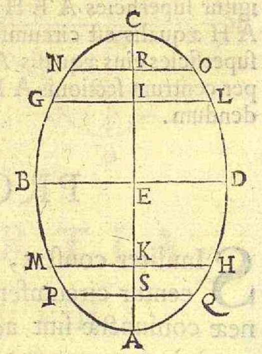
48. lib. 2.

Notæ in Proposit. V.

ATque B C D congruit B A D, & superficies superficiei, &c. *Quoniam in secunda figura B D est axis ellipsis per centrum E ductus; ergò vt in prima parte huius propositionis dictum est, sibi mutuò congruent semiellipses B C D, & B A D.* a

Notæ in Proposit. VIII.

NAm demonstrauimus, &c. *Expositio huius propositionis hæc erit. Sit ellipsis A B C D, cuius axes C A, & B D, & in quolibet eius quadrante signentur tales circumferentiæ N G, O L, H Q, M P, vt coniunctæ rectæ lineæ O N, G L, H M, Q P sint ad axim A C ordinatim applicatæ secantes eum in R, I, K, S; sintque binarum extremarum N O, P Q à centro E distantiæ æquales E R, E S, & binarum intermediarum L G, H M æquales à centro distantiæ E I, E K ostendendum est segmenta G N, L O, H Q, M P æqualia esse.* a



Et insuper dico, quod quodlibet horum segmentorum non congruet alicui alio segmento, &c. *Si enim in eodem, vel in duabus ellipsis quadrantibus sumantur segmenta G N, & M P non æque ab axis vertice B vel à verticibus A, C eiusdem axis remota, non erunt congruentia, vt deducitur ex propos. 1. additarum huius.* b

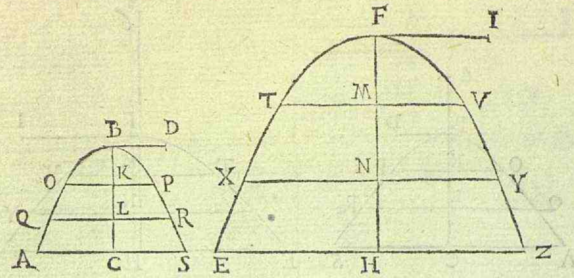
SECTIO QVARTA

Continens Proposit. XI. XII. XIII. & XIV.

PROPOSITIO XI.

QVælibet sectio parabolica, vt A B, cuius axis B C, & erectum B D similis est cuilibet sectioni parabolicæ, vt E F, cuius axis F H, & erectum F I.

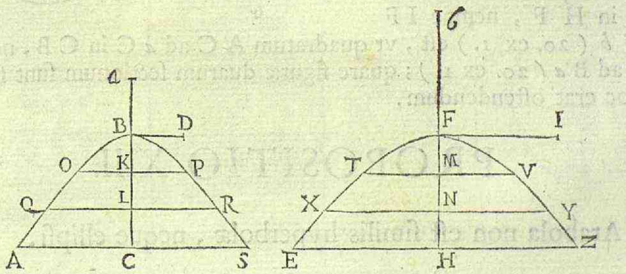
Pona-



Ponamus itaque C B ad B D, vt H F ad F I, & diuidantur tam B C, quàm F H in punctis K, L, M, N in eisdem rationibus, & educamus super eas ordinationes O P, Q R, A S, T V, X Y, E Z. Quia B C ad B D est vt H F ad F I, & A C est media proportionalis inter C B, B D Ex 11. lib. 1. (12. ex 1.) pariterque E H inter H F, F I (12. ex 1.) igitur A C ad C B est, vt E H ad H F, & A S dupla ipsius A C ad C B est, vt E Z ad a H F; cumque B C ad B L posita sit, vt H F ad F N, erit B D ad B L, vt I F ad F N; igitur Q R ad L B est vt X Y ad N F; atque sic ostendetur, quod O P ad K B est, vt T V ad M F, quare proportio ordinationum axis vnius sectionum ad sua abscissa est, vt proportio ordinationum alterius ad sua abscissa, & proportiones abscissarum vnius sectionis ad abscissa alterius sectionis eædem sunt. Quare sectio A B similis est sectioni E Defin. 2. huius. F. Quod erat ostendendum.

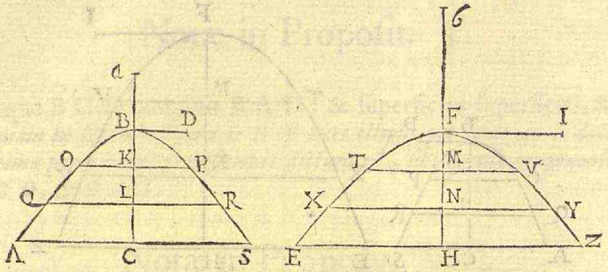
PROPOSITIO XII.

SI duarum hyperbolarum, aut ellipsium duæ axium figuræ fuerint similes, vtique sectiones similes erunt: Si verò fuerint sectiones similes, figuræ etiam similes erunt.



a Sint sectiones A B, E F, earum axes inclinati, vel transuersi B a, F b, & erecti earum B D, F I, & maneant signa, ordinationes, & proportiones
b eædem, quæ in præcedenti propositione. Quoniam figura sectionis

V 2 A B

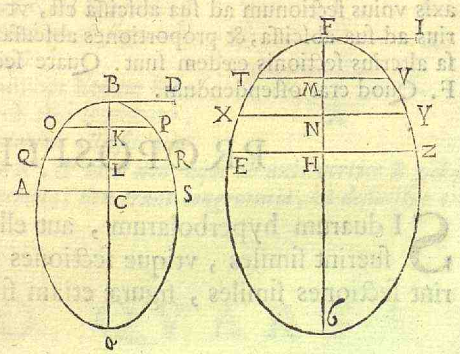


A B similis est figuræ sectionis E F, erit quadratum H E ad H b in H F, vt quadratum A C ad C a in C B; & b H in H F ad quadratum H F, vt a C in C B ad quadratum C B (nam posuimus H F ad F b, vt C B ad B a) ergo ex æqualitate, quadratũ E H ad quadratũ H F est, vt quadratum A C ad quadratum C B: & propterea E Z ad H F est vt A S ad C B; Atque sic ostendetur, quod X Y ad N F sit vt Q R ad L B, & T V ad M F sit vt O P ad K B; ergo proportiones ordinationum axis vnius earum ad sua abscissa sunt eædem rationibus aliarum ordinationum axis

Defin. 2. huius. ad sua abscissa, & alternatiuè. Quare duæ sectiones sunt similes.

E contra ostendetur, quod si duæ sectiones fuerint similes, earũ figuræ similes quo-

Ex def. 2. huius. que erunt. Quia est A C ad C B, vt E H ad H F, & eandem proportionem habent earum quadrata, atque quadratum H F ad H F in H b est, vt quadratum C B ad C B in C a (eo quod H F ad F b posita fuit, vt C B ad B a); ergo ex æqualitate quadratum E H ad b H in H F, nempe I F



C

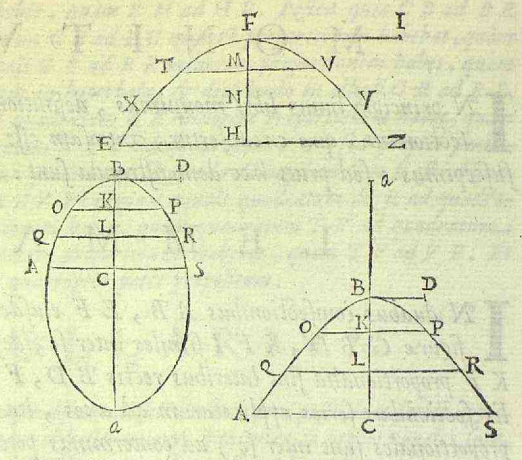
21.lib. 1. ad F b (20. ex 1.) est, vt quadratum A C ad a C in C B, nempe vt

Ibidem. D B ad B a (20. ex 1.); quare figuræ duarum sectionum sunt similes. Et hoc erat ostendendum.

PROPOSITIO XIII.

Parabola non est similis hyperbolæ, neque ellipsi.

Hyperbolæ, seu ellipsis A B sit axis B C, & inclinatus, seu transuersus a
B a, & E F sit sectio parabolæ, cuius axis F H. Dico, quod sectio E F non est similis sectioni A B hyperbolicæ, aut ellipticæ, alioquin sit similis ali-

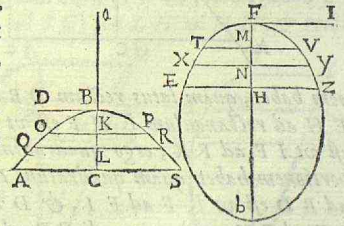


b lis alicui earum (si possibile est) ergo possumus educere in singulis sectionibus potentes, quæ habeant ad sua abscissa axium, easdẽ proportiones, & abscissæ inter se sint proportionales; sintque illæ V M, Y N, P K, R L. Quia Y N ad N F posita fuit, vt R L ad L B, & N F ad F M, vt L B ad B K, & F M ad M V, vt B K ad K P; ergo Y N ad M V in potentia, nempe N F ad M F (cum sectio sit parabola 19. ex 1.) nempe L B ad B K ex contructione erit, vt R L ad K P potentia, 20.lib. 1.
quæ eandem proportionem habent, quàm a L in L B ad a K in K B; 21.lib. 1.
quia sectio est hyperbolæ, aut ellipsis (20. ex 1.) quare a L in L B ad a K in K B est, vt L B ad B K; quare a L est æqualis a K: quod est absurdum. Igitur parabole non est similis vlli reliquarum sectionum. Et hoc erat probandum.

PROPOSITIO XIV.

Et sic ostendetur, quod hyperbolæ non est similis ellipsi.

a Alioquin sequitur, quod quadratum R L ad quadratum K P, nempe a L in L B ad a K in K B in hyperbola est, vt quadratum Y N ad quadratum M V, seu vt b N in N F ad b M in M F in ellipsi. His positis; quia L B ad B K posita fuit, vt N F ad M F; ergo a L ad a K eandem proportionem habet, quàm b N ad b M: & hoc est absurdum. Quare sectio A B non est similis E F; vt fuerat propositum.



21.lib. 1.

MONI-

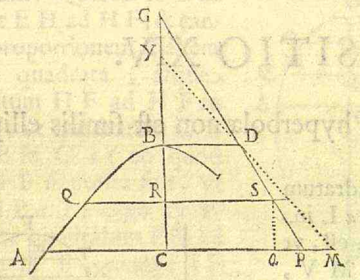
MONITVM.

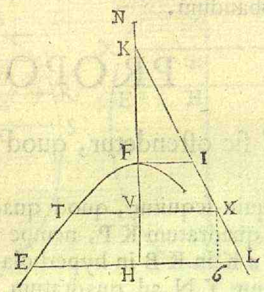
IN principio huius libri monuimus, definitionem similium conicarum sectionum, quæ circumfertur, vitiosam esse; quod hic ostendendum suscepimus: sed prius hæc demonstranda sunt.

LEMMA II.

IN duabus coniſectionibus A B, E F eiusdem nominis sint axium figuræ G B D, K F I similes inter se, idest transuersa latera G B, K F proportionalia sint lateribus rectis B D, F I: duci debent in singulis sectionibus series applicatarum ad axes, ita vt axium abscissæ (quæ proportionales sunt inter se) ad conterminas potentiales non sint in ijsdem rationibus.

Sumantur duæ abscissæ B C, F H, quarum C B ad B D habeat maiorem proportionem, quàm habet H F ad F I, & C B, H F secentur proportionaliter in R, V, & per ea puncta ducantur ad axes ordinatim applicatæ A C, E H, Q R, T V. Quoniam quadratum A C ad rectangulum G C B eandem proportio-





21. lib. 5. *nem habet, quàm latus rectum D B ad transuersum G B, pariterq; quadratum E H ad rectangulum K H F est vt I F ad F K; atq; D B ad B G ex hypothesi, est vt I F ad F K; ergo quadratum A C ad rectangulum G C B eandem proportionem habet quàm quadratum E H ad rectangulum K H F: & quia G B ad B D est vt K F ad F I, & D B ad B C minorem proportionẽ habet quàm I F ad F H, ergo ex æquali G B ad B C, minorem proportionem habet quàm K F ad F H, & componendo in hyperbola, & diuidendo in ellipsi G C ad C B seu rectangulum G C B ad quadratum B C minorem proportionẽ habebit quàm K H ad H F, seu quàm rectangulum K H F ad quadratum F H: erat autem quadratum A C ad rectangulum G C B vt quadratum E H ad rectangulum K H F; igitur ex æquali, quadratum A C, ad quadratum C B minorem proportionem habet quàm quadratum E H ad quadratum H F, & ideo A C ad C B minorem*

minorem proportionem habebit, quàm E H ad H F. Postea quia C B ad B R erat vt H F ad F V, & prius G B ad B C minorẽ proportionem habebat, quàm K F ad F H, ergo ex æquali G B ad B R minorem proportionem habet, quàm K F ad F V, & componendo in hyperbola, & diuidendo in ellipsi G R ad R B, seu rectangulum G R B ad quadratum B R minorem proportionem habet, quàm K V ad V F, seu rectangulum K V F ad quadratum V F; sed propter similitudinem figurarum, vt prius quadratum Q R ad rectangulum G R B est vt quadratũ T V ad rectangulum K V F; ergo ex æquali quadratum Q R ad quadratum R B minorem proportionem habet, quàm quadratum T V ad quadratum V F, & Q R ad R B minorem proportionem habebit, quàm T V ad V F. Et sic reliquæ omnes abscissæ: quapropter patet propositum.

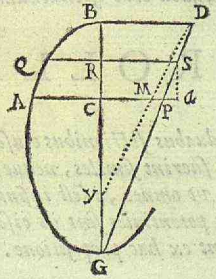
COROLLARIVM.

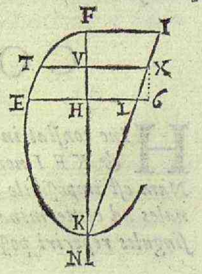
HInc constat in duabus similibus coniſectionibus duci posse duas series applicatarum ad axes, itaut abscissæ axium, quæ inter se proportionales sunt, ad suas potentiales non sint in ijsdem rationibus. Quandoquidẽ ex prima parte propositionis 12. quotiescunque axium figuræ similes sunt etiam sectiones ipsæ sunt similes.

LEMMA III.

IN ijsdem figuris habeat G B ad B D maiorem proportionem, quàm K F ad F I duci debent duæ ordinatim ad axes applicatæ, quæ ad conterminas abscissas eandem proportionem habeant.

Ducatur quælibet ordinata E H, producanturq; vt secet coniunctam K I in L, & vt D B ad B G ita fiat L H ad H N, atq; fiat G C ad B C, vt N H ad H F, ducaturque ordinata A C; quæ producta secet coniunctam G D in P. Dico A C, & E H esse quæsitas. Quoniam quadratum A C ad rectangulum G C 21. lib. 1. *B eandem proportionem habet, quàm D B ad B G, seu L H ad H N, & rectangulum G C B ad quadratum B C est vt G C ad C B, seu vt N H ad H F, ergo ex æqualitate quadratum A C ad quadratum C B est vt L H ad H F, seu vt rectangulum L H F ad quadratum H F; vel potius vt quadratum E H ad quadratum H F; ideoque A C ad C B erit vt E H ad H F. Quod erat propositum.*



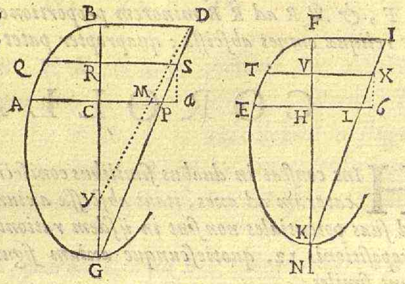


12. 13. lib. 1.

LEMMA IV.

LEMMA IV.

SI G B ad B D maiorem proportionem habuerit, quàm K F ad F I: Dico in singulis sectionibus reperiri non posse binas axium abscissas inter se proportionales, quæ ad conterminas potentiales sint in eisdem rationibus.



Si enim fieri potest, sit A C ad C B, vt E H ad H F, & Q R ad R B sit, vt T V ad V F, atque C B ad B R sit vt H F ad F V; coniungantur rectæ G D, K I quæ secent ordinatas in S, P, X, L; & secentur C a æqualis R S, & H b æqualis V X, suntq; æquidistantes; ergo coniungentes S a, R C æquales sunt, & parallelæ, & sic etiam coniungentes X b, & V H, quare quadratum A C, seu rectangulum P C B ad qua-
12. 13. lib. 1. *dratum C B eandem proportionem habet, quàm quadratum E H, seu rectangulum L H F ad quadratum H F; ideoque P C ad C B eandem proportionem habet, quàm L H ad H F; est verò C B ad B R, vt H F ad F V, & per conuersionem rationis C B ad C R est vt H F ad H V, ergo ex æquali C P ad C R est vt L H ad H V: Eodem modo ostendetur, quod S R, seu a C ad R C est, vt X V, seu b H ad V H; erat autem P C ad C R vt L H ad H V; ergo a P differentia ipsarum S R, P C ad G R, seu ad S a est vt b L differentia ipsarum X V, L H ad H V, seu ad X b; estque D B ad B G vt P a ad S a (propter parallelas a S, C G, & parallelas a P, & B D) pariterque I F ad F K est vt L b ad b X, ergo D B ad B G eandem proportionem habet, quàm I F ad F K; quod est contra hypothesim, non ergo binæ axium abscissæ inter se proportionales reperiri possunt in sectionibus A B, & E F, quæ ad conterminas potentiales sint in eisdem rationibus; quod erat ostendendum.*

COROLLARIVM.

HInc constat in duabus sectionibus eiusdem nominis si axium figuræ G B D, & K F I non fuerint similes, neque sectiones A B, & E F, similes esse. Nam est impossibile, vt omnes, idest infinitæ axium abscissæ inter se proportionales ad conterminas potentiales sint in eisdem rationibus, cum neque binæ in singulis reperiri possint ex hac propositione.

LEMMA V.

LEMMA V.

IN eisdem figuris rursus G B ad B D maiorem proportionem habeat, quàm K F ad F I: Dico quod minimè reperiri possunt axium abscissæ erectis proportionales, quæ habeant eandem rationem ad contermiñas potentiales.

Secentur quælibet abscissæ, B C, F H ita vt C B ad B D sit vt H F ad F I, & ducantur ordinatim ad axes applicatæ A C, E H, quæ productæ secent, coniunctas G D, K I in P, L, atque fiat Y B ad B D vt K F ad F I, iungaturque Y D secans A P in M. Manifestum est rectam C M inæqualem esse C P, (propterea quod Y B minor est, quàm G B, cum ad eandem B D minorem proportionem habeat, quàm G B, ideoque punctum Y, & recta Y D cadent intra triangulum G B D, & punctum M intra ipsum cadet, aut extra G D productam). Quoniam D B ad B Y est vt I F ad F K, & erat C B ad B D vt H F ad F I; ergo ex æquali C B ad B Y erit vt H F ad F K, & comparando terminorum summas in hyperbola, & differentias in ellipsi ad antecedentes, Y C ad C B erit vt K H ad H F; est verò M C ad C Y vt L H ad H K (eo quod triãgula M C Y, & L H K similia sunt triangulis similibus B D Y, I F K,) ergo ex æquali M C ad C B erit vt L H ad H F, & rectangulum M C B ad quadratum C B eandem proportionem habebit, quàm rectangulum L H F ad quadratũ H F; sed rectangulũ M C B æquale nõ est rectangulo P C B (cum M C ostensa sit inæqualis P C); ergo rectangulum P C B, seu quadratum A C ad quadratum 12. 13 lib. 1. *C B non eandem proportionem habet, quàm rectangulum L H F, seu quadratum E H ad quadratum H F; & propterea A C ad C B non eandem proportionem habebit quàm E H ad H F. Idem ostendetur in reliquis omnibus abscissis similiter positis. Quare patet propositum.*

COROLLARIVM I.

MAnifestum est in conisectionibus non similibus duci posse duas series applicatarum ad axes, itaut abscissæ similes, seu proportionales inter se ad cõterminas potentiales non sint in ijsdem rationibus.

COROLLARIVM II.

COlligitur pariter conuertendo, quod in duabus sectionibus eiusdem nominis si duæ series abscissarum similium in axibus positæ fuerint, & in vna serie abscissæ ad contermiñas potentiales maiorem proportionem habeant, quàm in altera serie, fieri potest vt figuræ axium non sint inter se similes: Quod verificatur saltem in casu præcedentis propositionis.

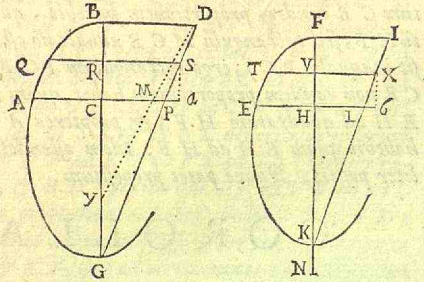
His præmissis, quoniam passio in definitione posita essentialiter conuenit definito est impossibile, vt eidem subiecto definito competant duæ passiones diuersæ, & inter se oppositæ, exempli gratia, fieri non potest, vt in triangulis similibus aliquando

X quando

quando anguli vnius inæquales sint angulis alterius, aut aliquando latera circa angulos æquales non sint proportionalia; ita in definitione Mydorgiana, quia coni sectiones dicuntur similes in quibus omnes axium abscissæ, quæ proportionales sunt inter se in ijsdem sunt rationibus ad conterminas potentiales, igitur eidem subiecto definito, idest in duabus sectionibus conicis similibus, est impossibile, vt reperiatur series aliqua infinitarum similium abscissarum in axibus, quæ ad conterminas potentiales non sint in ijsdem rationibus, & siquidem duæ passiones oppositæ eidem subiecto definito conueniant nulla earum erit eius passio essentialis, & ideo definitio bona non erit: vt exempli gratia quia in duobus similibus circulorum segmentis duo triangula inscripta possunt esse æquiangula, & etiam non æquiangula; ergo similitudo inscriptorum triangulorum non est passio essentialis segmentorum circularium similium inter se, & ideo non erit hæc bona definitio: Similia circulorũ segmenta sunt in quibus describi possunt duo triangula similia, *& ratio est, quia per definitionem nedum natura rei declaratur, & indicatur, sed etiam distinguitur, & diuersificatur à qualibet alia; & quoniam in sectionibus similibus reperiuntur duæ series similium abscissarum, quæ ad conterminas potentiales non sunt in ijsdem rationibus; & e contra ex definitione Mydorgij duæ series similium abscissarum, quæ ad conterminas potentiales sunt in ijsdem rationibus, essentialiter conueniunt definito; igitur hæ duæ oppositæ passiones conueniunt eidem subiecto definito, scilicet sectionibus similibus iuxta Mydorgij sententiam: quapropter tradita definitio sectionum similium vitiosa erit, & manca.*

Coroll. Lem. 2. huius.

Vt autem hoc clarius pateat exponantur duæ sectiones A B, E F eiusdem nominis, quarum axes B C, F H, & propositum primò sit demonstrare sectiones illas esse similes inter se; ergo ostendendum est passionem definitionis traditæ conuenire sectionibus A B, E F; quod nimirum similes axium abscissæ in ijsdem rationibus debent esse ad cõterminas potentiales, & quia in definitione nulla cautio, vel determinatio adhibetur, igitur sumi possunt quælibet axium abscissæ B C, F H, & hæc secari proportionaliter in R, V, & à punctis diuisionum duci possunt ad axes ordinatim applicatæ A C, E H, Q R, T V; & supponamus demonstratum esse, quod B C ad C A sit vt F H ad H E, pariterque vt B R ad R Q sit vt F V ad V T, tunc quidem ex vi definitionis deducitur, quod similes sint sectiones A B, & E F. At quia demonstrari potest in ijsdem sectionibus (sumendo abscissas B C, F H ad libitum, & proportionaliter diuidendo eas in R, & V) quod B C ad C A habet maiorem proportionem, quàm F H ad H E; pariterque B R ad R Q maiorem proportionẽ habeat, quàm F V ad V T, & sic semper; ergo non poterit deduci similitudo potius quàm non similitudo; ideoque definitio similium sectionum erit vitiosa, quandoquidem ex ea duæ contradictoriæ deducuntur.



ex Lem. 2. huius.

Coroll. 2. Lem. 5. huius.

Secundo loco supponantur duæ sectiones A B, & E F similes inter se, & propositum, sit demonstrare quod axium figuræ, seu rectangula G B D, & K F I

sint

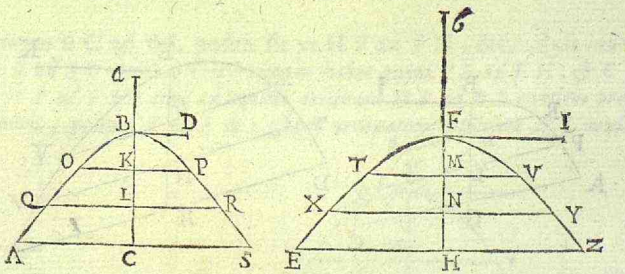
sint similia, quæ quidem, est propositio 3. *libri* 4. *Mydorgij, eiusque præparatio, seu constructio talis est (, & appono eius verba immutatis tantummodo literis figurarũ)* sint à sectione A B ordinatim ad axim B C applicatæ binæ quæque A C, Q R, & vt C B ad B R ita sit, H F ad F V, ordinatimque à sectione E F applicentur E H, T V *(subsequitur postea demonstratio sic.)* Quoniam igitur similes ponuntur sectiones A B, E F, & sunt H F, F V portiones portionibus C B, B R similes, *(idest proportionales)* vt B C ad C A, ita erit F H ad H E, & vt B R ad R Q, ita erit F V ad V T, &c.

Huiusmodi verba subtiliori trutina expendenda sunt. In præparatione, seu constructione assumit abscissas B C, & F H absque vlla lege, aut determinatione; ergo sumi possunt cuiuscunq; longitudinis: quare fieri potest vt C B ad latus rectum B D non habeat eandem proportionem quàm habet F H ad F I, & tunc licet C B, H F diuidantur proportionaliter, & ducantur potentiales, &c. A C ad C B habebit maiorem, aut minorem proportionem quàm E H ad H F, & pariter Q R ad R B non habebit eandem rationem, quàm T V ad V F, & sic vlterius in tota serie; sed ex hoc sequitur, quod possint esse figuræ axium inter se non similes; Mydorgius autem similes esse concludit; igitur ex eadem hypothesi, & ex eadem definitione deducitur, quod sectiones similes habent figuras axium similes inter se, & non similes, quod est impossibile; non igitur definitio à Mydorgio tradita legitima, & perfecta est: quod fuerat ostendendum.

Lem. 2. huius.

Coroll. 2. Lem. 5. huius.

Quod vero definitio à me reformata tribui possit Apollonio conijcitur præcipuè ex demonstratione secundæ partis propor. 12. *ibi enim ex hac suppositione, quod*

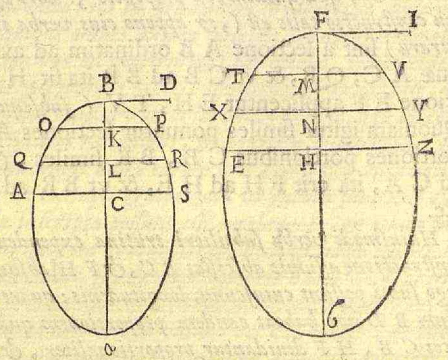


scilicet duæ sectiones A B, & E F sint similes deducit earum figuras similes esse. Ait enim: quia est A C ad C B vt E H ad H F, & eandem proportionẽ habent earum quadrata, atque quadratum H F ad rectangulum: F H *b* eandem proportionem habet quàm quadratum C B ad rectangulũ B C *a* (eo quod H F ad F *b* posita fuit vt C B ad B *a*) ergo, &c. *Modo si accuratè hæc verba perpendantur non poterit hic vsurpari vulgata definitio Eutocij, vel Mydorgij; nam cum sectiones A B, E F supponantur similes, ea tantummodo quæ in definitione similium sectionum perhibentur concedi possunt, & nihil amplius; igitur si in definitione non includitur particula illa [abscissæ H F, C B ad erecta, vel transuersa latera F* b, *B* a *sint proportionalia] delirantis po-*

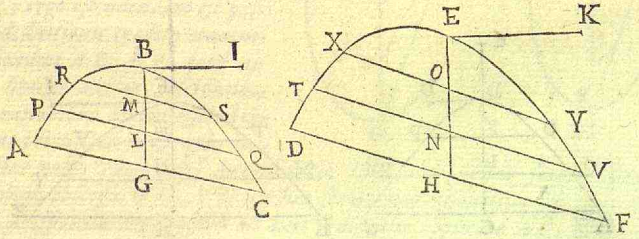
X 2

tis po-

tis potius, quàm demonstrantis esset dicere. Eo quod H F, ad F *b* posita fuit vt C B ad B *a*; *vbi nam, aut quando hoc suppositum est, si in definitione non continetur? Nec suspicari potest casu hæc verba in textu irrepsisse, cum in alijs locis repetantur, & ab eis pendeat tota demonstratio; igitur in definitione vulgata addenda est illa particula,* abscissæ sint in eadem ratione ad erecta;

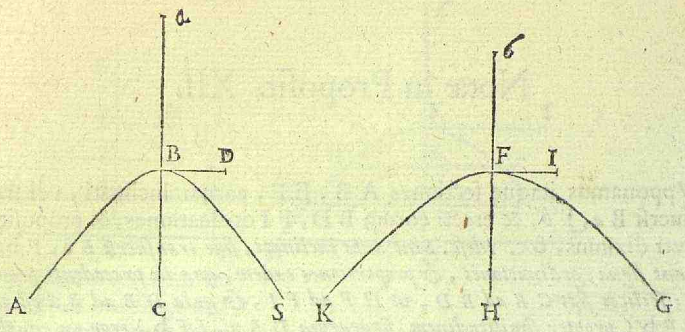


Rursus in propos. 11. & 1. parte 12. quando conclusio demonstrationis est quod sectiones A B, E F similes sint: tunc quidem quia tenetur ostendere Apollonius definitionem traditam conuenire sectionibus A B, E F, non assumit incautè abscissas homologas C B, H F, sed ait in 11. propositione ponamus C B ad B D vt H F ad F I, *& in 12. inquit,* nam posuimus H F ad F *b* vt C B ad B *a*, &c. *Postea in propositione 16. litera a:* ergo M A ad A P, *idest abscissa ad erectum* est vt O C ad C Q, *seu vt homologa abscissa ad latus rectum*, & angulus O æqualis est M: patet igitur, vt diximus in 11. ex 6. quod si, &c. *Ex quibus locis satis apertè colligitur (ni fallor) id quod supra rationibus non leuibus insinuaui, quod abscissæ proportionales esse debent erectis in sectionibus similibus.*



Sed hic animaduertendum est, eandem definitionem non posse æquè aptari sectionibus conicis, atque segmentis conicis similibus, vt perperam censuit Mydorgius: nam in segmentis conicis similibus A B C, & D E F diametrorum æquè ad bases inclinatarum abscissæ homologæ ex sui natura determinatæ sunt, quandoquidem non possunt esse maiores, neque minores quàm G B, & H E, quæ inter bases A C, & D F segmentorum conicorum, & vertices B, E intercipiuntur; at si in conicis sectionibus A B S, & K F G sint axes transuersis a *B, &* b *F ad sua latera recta B D, & F I in eadem proportione, tunc quidem similes erunt curuæ lineæ A B S, & K F G, quæ possunt habere indeterminatas, & multiplices longitudines, immo possunt in infinitum prolongari, si fuerint parabolæ* Propos. 12. huius. lib. 1.

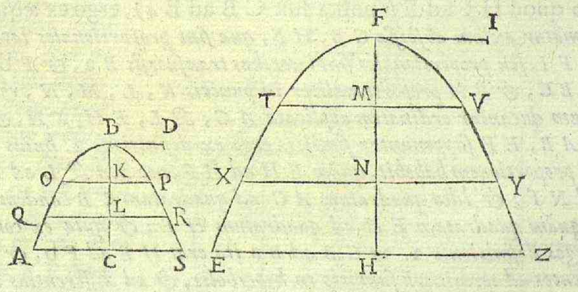
vel



vel hyperbolæ, nec habent bases, à quibus circumscribantur, igitur in sectionibus similibus A B, & G F homologæ axium abscissæ B C, F H non supponuntur iam dissectæ, & determinatæ; quare possunt esse cuiuscunque mensuræ, & habere possunt eandem, & non eandem proportionem ad conterminas potentiales; & ideo ad vitandam incertitudinem adiungi debet determinatio, quod prædictæ homologæ abscissæ B C, F H proportionales sint lateribus rectis B D, F I, at in segmentis, seu portionibus sectionum conicarum similium inutilis omnino esset illa determinatio. An verò hæc mea sententia omninò reijci debeat alijs iudicandū relinquo.

Notæ in Proposit. XI.

a CVmque B C ad B L posita sit vt H F ad F N, &c. *Quia inuertendo D B ad B C eandem proportionem habet quàm I F ad F H, & C B ad B L est vt H F ad F N; ergo ex æquali ordinata D B ad B L eandem proportionem habebit, quàm I F ad F N; estque ordinatim applicata Q L media pro-*



portionalis inter abscissam B L, & latus rectum B D (cum in parabola quadratum Q L æquale sit rectangulo L B D) pariterque X N media proportionalis est inter F N, & I F; ergo Q L ad L B est vt X N ad N F, & antecedentium duplæ, scilicet Q R ad L B, atque X Y ad N F in eadem ratione erunt. Non secus ostendetur O P ad K B vt T V ad M F. 11. lib. 1.

Notæ

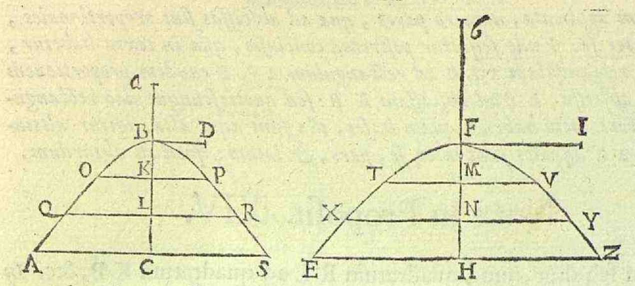
Notæ in Proposit. XII.

SVpponamus itaque sectiones A B, E F, earum inclinati, vel transuersi B *a*, F *b*, & erecti eorum B D, F I ordinationes, & propositiones, vti diximus, &c. *Idest. Sint axes inclinati, siue transuersi B* a, *F* b, *& maneant signa, ordinationes, & proportiones eædem, quæ in præcedenti propositione; scilicet fiat C B ad B D, vt H F ad F I, & quia D B ad B* a *est vt I F ad F* b *(propter similitudinem figurarum D B* a, *I F* b *) ergo ex æquali C B ad B* a *erit vt H F ad F* b*; & comparando antecedentes ad summas terminorum in hyperbola, & ad differentias in ellipsi erit B C ad C* a *vt F H ad H* b*: postea diuidantur tam B C, quàm F H in ijsdem rationibus in punctis K, L, M, N, & educantur ordinatim applicatæ, seu æquidistantes basibus O P, Q R, A S, T V, X Y, E Z.* a

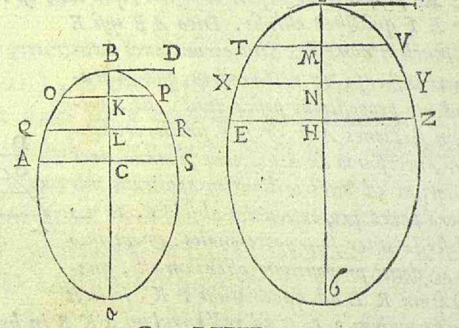
Quoniam figura sectionis A B similis est figuræ sectionis E F erit quadratum H E ad H *b* in H F, vt quadratum A C ad C *a* in C B, & *b* H in H F ad quadratum H F, vt C *a* in C B ad quadratnm C B (nam posuimus H F ad F *b*, vt C B ad B *a*, &c.) *Quouiam in figuris, seu rectangulis similibus D B* a, *& I F* b *habet D B ad B* a *eandem proportionem, quàm* b
21. lib. 1. *I F ad F* b, *& vt D B ad B* a, *ita est quadratum A C ad rectangulum B C* a, *pariterque vt I F ad F* b *ita est quadratum E H ad rectangulũ F H* b *sed (sicut in præcedenti nota dictum est) C* a *ad C B, seu rectangulum B C* a *ad quadratum C B eandem proportionem habet, quàm H* b *ad H F, seu quàm rectangulum F H* b *ad quadratum F H; igitur ex æqualitate quadratum A C ad quadratum C B eandem proportionem habet, quàm quadratum E H ad quadratum H F.*

Atque quadratum H F ad H F in H *b* est vt quadratum C B ad B C in C *a* (eo quod H F ad F *b* posita fuit C B ad B *a*), ergo ex æqualitate, &c. *Idest sumãtur axium abscissæ C B, H F, quæ sint proportionales lateribus rectis B D, & F I, seu proportionales sint lateribus transuersis B* a, *& F* b, *& secetur abscissæ B C, & F H proportionaliter in punctis K, L, M, N, & per puncta diuisionum ducantur ordinatim applicatæ A C, Q L, E H, X N, &c. Quia sectiones A B, E F supponuntur similes; ergo ex definitione 2. huius A C ad C B eandem proportionem habebit, quàm E H ad H F, nec non Q L ad L B erit vt X N ad N F; & ideo quadratum A C ad quadratum C B eandem proportionẽ habet, quàm quadratum E H ad quadratum H F; & quia ex constructione iuxta leges definitionis 2. vt C B ad B* a *ita erat H F ad F* b, *& comparando antecedentes ad terminorũ summas in hyperbolis, & ad differentias in ellipsibus, habebit B C ad C* a, *seu quadratum B C ad rectangulum B C* a *eandẽ proportionem quàm F H habet ad H* b, *seu quàm quadratum F H habet ad rectangulum F H* b*; ergo ex æqualitate quadratum A C ad rectangulum B C* a *eãdem proportionem habet, quàm quadratum E H ad rectangulum F H* b*; est verò latus rectum D B ad latus transuersum B* a, *vt quadratum AC ad rectangulum* c

B C a,



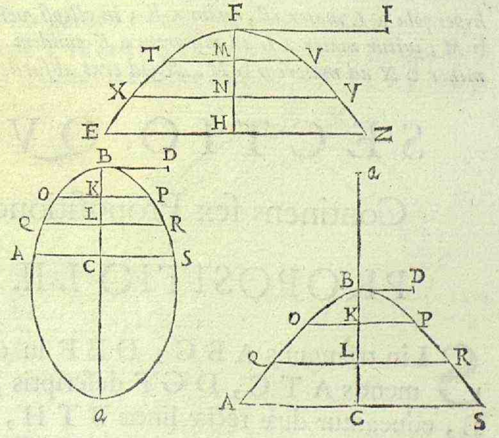
B C a, *pariterque latus rectum I F ad transuersum F* b *est vt quadratum E H ad rectangulum F H* b, *igitur D B ad B* a *eandem proportionem habebit quàm I F ad F* b, *& ideo figuræ axium similes erunt.* 21. lib. 1.



Notæ in Proposit. XIII.

a SInt axes earum B C, & inclinatus, seu transuersus B *a*, &c. *Addidi verba, quæ in expositione propositionis deficiunt: Hyperbole, seu ellipsis A B sit axis B C, & inclinatus, seu transuersus B* a, *& E F sit parabole, cuius axis F H, &c.*

b Alioquin sit (si possibile est) similis vni earum, & minima similis earum figuræ, quæ non sunt similes suis figuris: deinde possumus producere in singulis sectionibus potentes, &c. *Non nulla verba ex hoc textu expunxi vt superuacanea eiusq; sensus hic est. Si enim parabolæ E F similis est hyperbolæ, aut ellipsi A B (ex definitione similium figurarum) duci possunt in vnaquaque duarum similium sectionum ordina-*



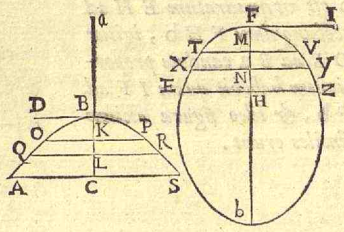
Defin. 2.

natim

natim ad axium applicatæ, numero pares, quæ ad abscissas sint proportionales; tum abscissæ inter se: Vnde sequitur postrema conclusio, quæ in textu habetur, quod nimirum rectangulum a *L B ad rectangulum* a *K B eandem proportionem habeat, quàm abscissa, L B ad abscissam K B: sed quotiescunque duo rectangula eandem proportionem habent, quàm bases, illa sunt æque alta: igitur altitudines* a *L, &* a *K æquales sunt inter se, pars, & totum: quod est absurdum.*

Notæ in Proposit. XIV.

ALioquin sequitur, quod quadratum R L ad quadratum K P, &c. *In* a
propositione deficit expositio, quæ talis est. Sit A B qualibet hyperbole, & E F qualibet ellipsis. Dico A B ipsi E F similem non esse. Sint eorum axes latera transuersa, & recta eadem, quæ in præcedenti propositione posita sunt. Et siquidem sectiones A B, & E F similes credantur, necessario ex definitione secunda, duci poterunt ad axes ordinatim applicatæ numero pares proportionales abscissis, tum abscissæ inter se proportionales: & vt in præcedenti propositione ostensum est, quadratum R L ad quadratum P K, scilicet



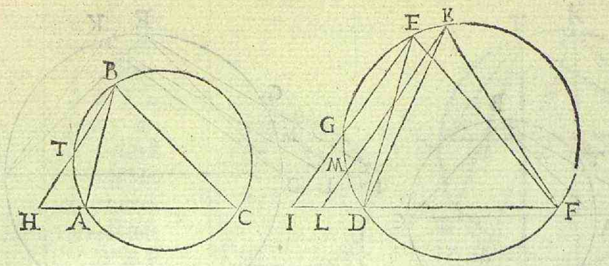
21. lib. 1. *rectangulum* a *L B ad rectangulum* a *K B in hyperbola eandem proportionem*
Ibidem. *habebit, quàm quadratum Y N ad quadratum V M, seu quàm rectangulum* b *N F ad rectangulum* b *M F in ellipsi, ergo rectangulum* a *L B ad rectangulum* a *K B eandem proportionem habet, quàm rectangulum* b *N F ad rectangulum* b *M F: sed eorundem rectangulorum bases proportionales sunt, eo quod L B ad B K erat vt N F ad F M; igitur eorundem altitudines proportionales erunt, scilicet* a *L ad* a *K eandem proportionem habebit, quàm* b *N ad* b *M, sed in hyperqola* a *L maior est, quàm* a *K; in ellipsi verò contra* b *N minor est, quã* b *M; igitur maior* a *L ad minorem* a *K eandem proportionem habebit, quàm minor* b *N ad maiorem* b *M. Quod erat absurdum.*

SECTIO QVINTA

Continens sex Propositiones Præmissas,

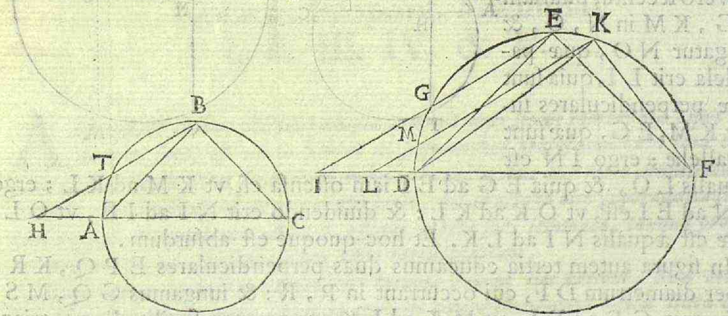
PROPOSITIO I. II. III. IV. & V.

SI in triangulis A B C, D E F in duobus circulorum segmentis A T C, D G F descriptis, à duobus angulis B, E, educantur duæ rectæ lineæ B T H, E G I efficientes cum basibus A C, D F duos angulos H, I æquales (incidentes in 1
prima



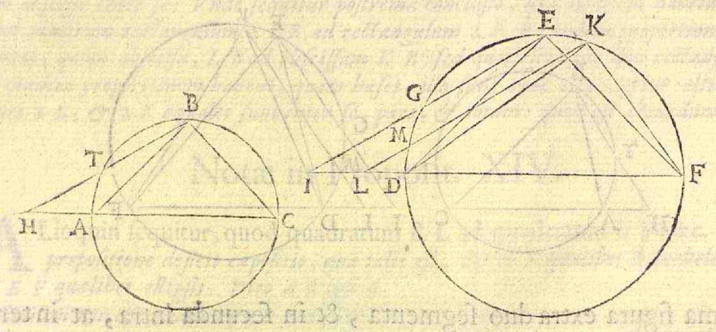
prima figura extra duo segmenta, & in secunda intra, at in tertia intra duos semicirculos), & fuerit proportio plani rectanguli ex portionibus lineæ basis inter angulum prouenientem, &
2 duos angulos reliquos trianguli, nempe A H in H C ad quadratum interceptæ inter prouenientem angulum, & circuli peripheriam, nempe ad quadratum H B in quolibet casu eadem sit, quàm D I in I F ad quadratum I E, vel H A in H C ad quadratum H T sit, vt D I in I F ad quadratum I G; sintque duo priores anguli, inter se æquales, & prouenientes extra duo triangula positi: vel duo priores recti, & prouenientes intra
3 duos angulos non sint recti; aut duo priores non recti, & pro-
4 uenientes recti intra duo triangula: vel duo priores diuersæ,
5 aut eiusdem speciei, sed duæ lineæ efficiant duos angulos æquales cum lateribus duorum triangulorum subtendentibus angulos prouenientes: vtique duo priora triangula sunt similia.

Quia C H in H A; nempe T H in H B ad quadratum H B, quod est, vt H T ad H B eandem proportionem habet, quàm D I in I F, nempe

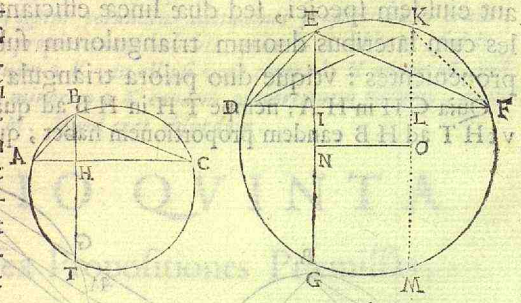


G I in I E ad quadratum I E, quod est vt I G ad I E, erit B H ad H T, vt E I ad I G; similiter, & eorum quadrata; ostendetur igitur ex æqualitate,

 litate,



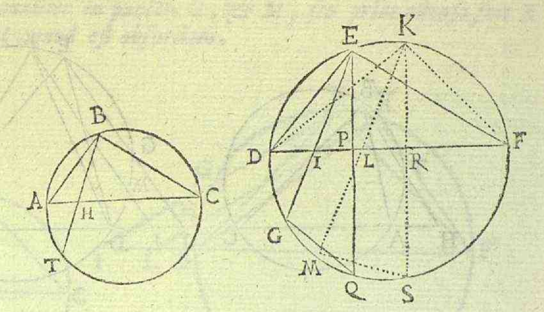
litare, quod ſi fuerit A H in H C ad quadratum H B, vt D I in I F ad quadratum I E, quod A H in H C ad quadratum H T ſit etiam, vt I D in I F ad quadratum I G. Dico iam, quod triangulum A B C ſimile eſt triangulo D E F. Si enim hoc verum non eſt, non erit angulus A æqualis vni duorum angulorum D, vel F: ſitque angulus D maior, quàm A, & fiat angulus K D F æqualis A, iungaturque F K; quia angulus K, veluti E, eſt æqualis angulo B; ſimilia erunt triangula A B C, D K F, & educamus K L parallelam E I: quare K L F ſimile quoque erit B H C b
ideoque H A ad H B eſt vt D L ad L K, & H C ad H B, vt F L ad L K; igitur H A in H C, nempe B H in H T ad quadratum H B, quod eſt, vt H T ad H B, quæ oſtenſa eſt, vt I G ad I E, erit vt D L in L F, nẽpe K L in L M ad quadratum K L: & propterea M L ad L K erit vt G I ad I E in omnibus figuris; & hoc eſt abſurdũ in prima figura: in ſecunda verò ſecentur bifariam E G, K M in N, O, & iungatur N O, quæ parallela erit L I, quia ſunt duæ perpendiculares ſuper K M, E G, quæ ſunt parallelæ; ergo I N eſt c
d



æqualis L O, & quia E G ad E I iam oſtenſa eſt vt K M ad K L; ergo E N ad E I eſt, vt O K ad K L: & diuidendo erit N I ad I E, vt O L, quæ eſt æqualis N I ad L K. Et hoc quoque eſt abſurdum.

In figura autem tertia educamus duas perpendiculares E P Q, K R S e
ſuper diametrum D F, cui occurrant in P, R: & iungamus G Q, M S, quia erat G E ad E I, vt M K ad L K, & propter ſimilitudinem triangulorum I E P, K L R, E I ad E P eſt, vt L K ad K R, atque E P ad E Q eſt, vt R K ad K S, & angulus G E Q æqualis eſt M K S; ergo E G

Q ſimile eſt M K S, quare angulus G æqualis eſt angulo M, & propterea peripheriæ E F Q, & K F S, quibus inſiſtunt, æquales erunt, quod eſt abſurdũ: eſt enim E F Q maior, quàm K F S; ergo duo triãgula A B C, D E F in omnibus figuris ſunt ſimilia. Quod erat oſtendendum.



PROPOSITIO Præmiſſa VI.

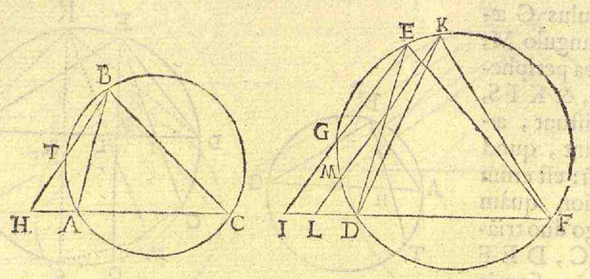
a DEinde ſint duo anguli B, E qualeſcunque; ſed angulus A B H, vel C B H æqualis angulo D E I, aut F E I: & ſupponantur reliqua omnia iam dicta.

Quia proportio C H in H A ad quadratum H B ſuppoſita eſt, vt F I in I D ad quadratum I E, & H C, vel H A ad H B eſt, vt F I, vel D I ad I E; erit etiam H A ad H B, vt I D ad I E, & duo anguli H, I ſunt æquales; igitur triangulum H B A, aut H B C ſimile eſt triangulo E D I, aut E F I, quare duo triangula A B C, D E F ſimilia ſunt; Et hoc erat oſtendendum.

Notæ in Propoſit. Præmiſſas I. II. III. IV. & V.

AFferuntur in hac ſectione aliquæ propoſitiones ſimul coaceruatæ, quæ lemmaticæ ſunt, & vſum habent in ſequentibus propoſitionibus; ſanè conijcitur ex hoc titulo PRAEMISSAE rubeis characteribus inſcripto, huiuſmodi lẽmata Textui Apollonij ab Arabico Interprete, vel ab aliquo alio ſuperaddita fuiſſe; licet Pappus Alexandrinus libro 7. afferat eadem ferè lemmata, tanquã propria, & conferentia ad Apollonij ſexti libri intelligentiam.

Poteſt tamen propoſitio vniuerſalis breuius exponi hac ratione. Si à verticibus duorum triangulorum à duobus circulis compræhenſorum rectæ lineæ ductæ efficiant cum baſibus angulos æquales; atque eorundem ſegmentorum inter baſim, & peripheriam interceptorum quadrata ad rectangula ſub factis ſegmentis ba-



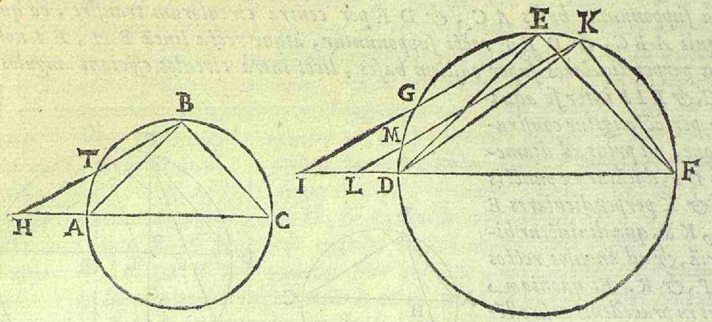
ſium eandem proportionem habeant, fuerintque anguli verticales inter ſe æquales, vel qui à lateribus, & à vertice ductis continentur, ſint æquales: ſemper triangula erunt ſimilia.

Dico iam, quod triangulum A B C ſimile eſt triangulo D E F, ſi enim hoc verum non eſt, ſit angulus D maior, quàm angulus A, &c. *Textus alterari debuit, nam duo triangula B A C, & E D F ponuntur non ſimilia, & propterea æquiangula non erunt, ſcilicet non habebunt duos angulos æquales duobus angulis alterius trianguli; ſed ex hypotheſi anguli verticales A B C, & D E F æquales erant; ergo angulus B A C non erit æqualis angulo E D F, neque angulo E F D; alias dicta triangula eſſent æquiangula, & ſimilia, quod non ponitur; igitur neceſſe eſt, vt angulus A non ſit æqualis vni duorum angulorum D, vel F, poſtea rectangulorum A H C, & D I F tam latus A H ipſius H C non ſit maius, quàm D I ipſius I F, & ad punctũ D fiat angulus F D K æqualis angulo A.* a

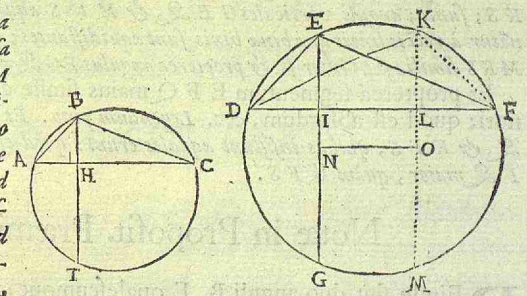
Quare K L F ſimile quoq; erit B H C, &c. *Quoniã angulus F D K æqualis eſt factus angulo C A B, & angulus F K D ſeu ei æqualis F E D eſt ipſi angulo A B C æqualis (cum in ſimilibus circulorum ſegmentis exiſtant), igitur in triangulis F K D, & C B A tertius angulus K F D æqualis erit tertio angulo C; & propter parallelas K L, E I eſt angulus D L K æqualis angulo D I E; eſt verò angulus A H B ex hypotheſi æqualis eidem angulo D I E; ergò angulus D L K æqualis eſt angulo A H B, & F L K æqualis angulo C H B: at oſtenſus fuit angulus K F L æqualis angulo B C H; ergò angulo C B H æqualis eſt angulus F K L; ideoque triangula C B H, & F K L ſimilia erunt. Pariterq; duo triangula B A H, & K D L ſimilia erunt, cum angulus L æqualis ſit angulo H, & angulus K D L æqualis ſit interno B A H.* b

Et hoc eſt abſurdum in prima figura, &c. *Quoniam ſunt rectæ lineæ in circulo applicatæ K M, E G parallelæ inter ſe; ergo coniunctæ rectæ lineæ E K, G M parallelæ erunt inter ſe, aut conuenient extra circulum cum diametro bifariam, & ad angulos rectos diuidente applicatas E G, K M; ſed eadem rectæ lineæ G M ſecat trianguli baſim F A I intra circulũ, aut extra ipſum inter puncta I, A, & F; (propterea quod angulus E I F conſtituitur à duabus in circulo applicatis extra ipſum concurrentibus); ergò tres coniunctæ rectæ lineæ K E, M G, & I L, nec ſunt omnes inter ſe parallelæ, nec in vno puncto cõueniunt, & propterea E I, & K L, ſectæ* c

ſectæ non erunt proportionaliter in punctis G, & M, ſed prius oſtenſa fuit E I ad I G vt K L ad L M; quod eſt abſurdum.



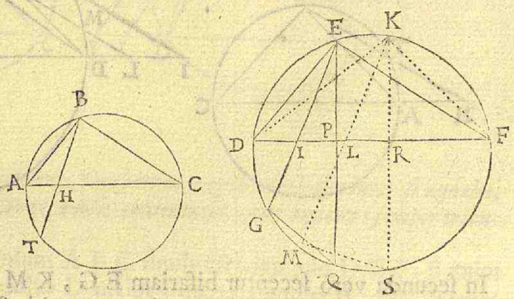
d In ſecunda verò ſecentur bifariam E G, K M in N O, &c. *Sunt enim in tertio caſu K M, & E G perpendiculares ad baſim D F; igitur ſi ſecentur bifariam in O, & N coniuncta recta linea N O diameter circuli erit, quandoquidem diuidit bifariam duas equidiſtantes in circulo applicatas; & ideo eas ſecat ad angulos rectos, ſicuti D F eaſdem perpendiculariter ſecabat; & propterea I N O L parallelogrammum erit, cuius latera oppoſita N I, & O L æqualia erunt. Poſtea quia oſtenſa fuit I G ad I E, vt L M ad L K; ergo ſummæ terminorum ad conſequentes proportionales erunt; ſcilicet G E ad E I erit vt M K ad K L, & antecedentiũ ſemiſſes N E ad E I, vt O K ad K L: & diuidendo, duæ æquales N I, O L eandem proportionem habebunt ad I E, & L K; ideoq; I E æqualis eſt L K. Et quoniã triangulum A B H ſimile eſt triangulo D K L; ergo A H ad H B eandem proportionem habet, quàm D L ad L K; eſtque triangulum B H C ſimile triangulo K L F; ergo B H ad H C eſt vt K L ad L F, & ex æqualitate vt A H ad H C ita eſt D L ad L F; erat autem ſegmentum A H non maius ſegmento H C; ergo D L maius non erit ſegmento L F; ſed erat ſegmentum D I non maius ſegmento I F, igitur duo ſegmenta D I, & D L non ſunt maiora, ideſt non ſunt maiora medietate totius D F, ſed diameter parallela ipſis K M, & E G ſecat D F bifariam; ergo K M, E G ad eaſdem partes diametri cadunt verſus D, & ſunt inter ſe parallelæ; ergo inæqualiter à centro diſtant; ideoque inæquales erunt inter ſe, & earum meditates N E, O K inæquales erunt; & ablatis æqualibus N I,*



Lem. 1.

I, O L remanebunt I E, L K inæquales: Quod est absurdum: ostensæ enim fuerunt prius æquales inter se.

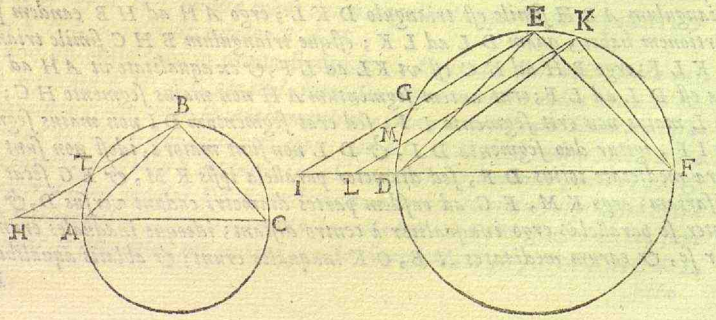
In figura autem tertia ducamus duas perpendiculares, &c. *In quarto casu supponuntur bases A C, & D F per centra circulorum transire, eo quod anguli A B C, & D E F recti supponuntur, atque rectæ lineæ B H, E I non sunt perpendiculares super easdem bases, licet intra circulos efficiant angulos B H C, & E I F inter se æquales: perfecta igitur constructione, vt prius ad diametrũ D F, ducatur ex punctis E, & K perpendiculares E Q, K S, quæ diuidẽtur bifariã, & ad angulos rectos in P, & R. Et quoniam (vt in præcedenti casu ostẽsum est) G E ad E I eandem proportionem habet, quàm M K ad K L, cumque latera I E, L K sint parallela, pariterque P E, & K R æquidistent, atque bases I P, L R in directum posita sint, erunt triangula I E P, & L K R æquiangula, & similia: & propterea I E ad E P erit, vt L K ad K R: est verò P E ad eius duplam E Q, vt R K ad eius duplam K S (cum diameter secet eas bifariam, quas perpendiculariter prius secabat) ergo, ex æquali ordinata, erit G E ad E Q, vt M K ad K S; suntq; anguli verticales G E Q, & M K S æquales, propterea quod continetur à rectis lineis quæ binæ binis sunt æquidistantes; ergo triangula G E Q, & M K S similia sunt inter se: & propterea angulus E G Q æqualis erit angulo K M S.* e



Et propterea segmentum E F Q maius simile erit segmento K F S minori: quod est absurdum, &c. *Legendum puto. Et propterea peripheriæ E F Q, & K F S, quibus insistunt æquales erunt: quod est absurdum. Est enim E F Q maior, quàm K F S.* f

Notæ in Proposit. Præmiss. VI.

DEinde sint duo anguli B, E qualescumque; sed angulus A B H, vel C B H æqualis angulo D E I vel F E I, & conditiones, vti dixi- a



mus, &c. *Expositio, atque demonstratio huius propositionis obscura est propter nimiam eius breuitatem: itaque duo eius casus distingui debent hac ratione. In duobus triangulis A B C, D E F supponantur anguli H, & I æquales, pariterque anguli H B A, I E D æquales inter se; ideoque duo triangula A B H, & D E I similia erunt, & propterea A H ad H B eandem proportionem habebit, quàm D I ad I E; sed ex vniuersali hypothesi rectangulum C A H ad quadratum H B eandem proportionem habet, quàm rectangulum F I D ad quadratum I E, & componuntur proportiones rectangulorum ad quadrata iam dicta ex rationibus laterum circa angulos æquales H, & I, suntque ostensæ proportiones A H ad H B, atque D I ad I E eædem inter se; igitur reliquæ componentes proportiones, scilicet C H ad H B, atque F I ad I E eædem quoque erunt inter se, & comprehendunt angulos æquales H, & I; igitur triangula C H B, & F I E similia sunt inter se: & propterea angulus B C A æqualis erit angulo E F D, sed anguli B A C, & E D F æquales sunt inter se, quia eorum consequentes æquales erant in triangulis æquiangulis B A H, & E D I, igitur duo triangula B A C, & E D F æquiangula, & similia inter se erunt.*

Simili modo si supponantur anguli C B H, & F E I æquales, cum anguli H, & I æquales sint, erunt triangula B C H, & E F I similia inter se, & vt prius, ostendentur quoque triangula ablata B A H, E D I æquiangula, & similia inter se (propterea quod circa angulos æquales H, & I habent latera proportionalia); & ideo residua triangula C A B, & F D E erunt quoque similia, vt propositum fuerat.

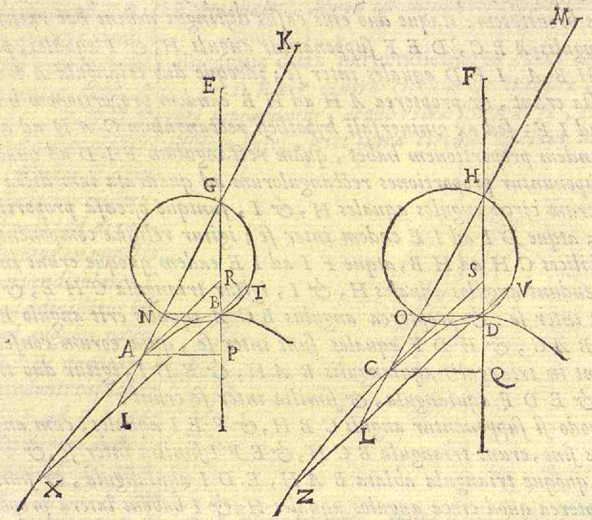
SECTIO SEXTA

Continens Proposit. XV. XVI. & XVII.

PROPOSITIO XV.

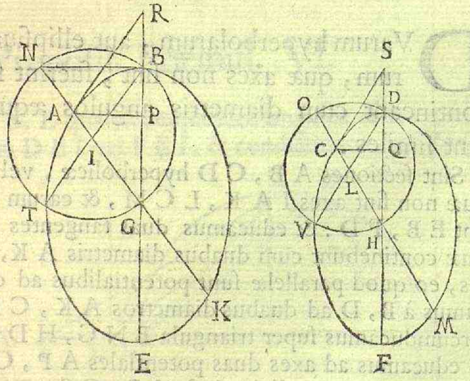
DVarum hyperbolarum, aut ellipsium, si figuræ diametrorum, quæ axes non sint, fuerint similes, atque potentes contineant cum diametris angulos æquales: vtique sectiones sunt similes.

Sint sectiones A B, C D hyperbolicæ, vel ellipticæ earum diametri, quæ non sint axes I A K, L C M, & earum centra G, H, & duo axes sint E B, F D: & educamus duas tangentes A R, C S ad duos axes, quæ continebunt cum duabus diametris A K, C M duos angulos æquales, eo quod parallelæ sunt potentialibus ad diametros eductis; & educamus à B, D ad duabus diametros A K, C M tangentes B N, D O, & circumducamus super triangula B N G, H D O duos circulos, & ex A, C educamus ad axes duas potentiales A P, C Q, & per B, D ducamus I B T, L D V parallelas ipsis A R, C S, quæ secent duos circulos in B,
b T, D, V: eritque G I in I N, scilicet ei æquale T I in I B ad quadratum



tum potentialis I B, vt H L in L O, ſeu L V in L D ad quadratum L D, eò quod quælibet ex dictis proportionibus eadem eſt proportioni fi-
37.lib. 1. guræ K A, & M C (39. ex 1.), ergo T I ad I B eſt, vt V L ad L D, & angulus I, qui æqualis eſt ipſi R A G æqualis eſt angulo L, qui æqualis
Propoſ. 2. præmiſſ. eſt S C H; igitur angulus G æqualis etiam eſt angulo H: & propterea G A R ſimile eſt H C S, & pariter G A P, H C Q ſunt ſimilia, quia P, Q ſunt recti, vnde A P R, C Q S ſunt etiã ſimilia, & proportio vniuſcuiuſq; eorum, nempe G P, P R ad P A, eſt, vt proportio H Q, S Q ad C Q; igitur G P in PR ad quadratum P A, nempe B E ad erectum illius (39. ex 1.) eſt vt H Q in Q S ad quadratum C Q, nempe D F ad erectum
37. lib. 1. illius (39. ex 1.); igitur figuræ duorum axiũ ſunt ſimiles, & duæ ſectiones ſimiles ſunt (12. ex 6.(ſed oportet in ellipſi, vt duæ diametri, ideoque duo axes ſint ſimul aut tranſuerſi, aut ſimul recti. Et hoc erat propoſitum.

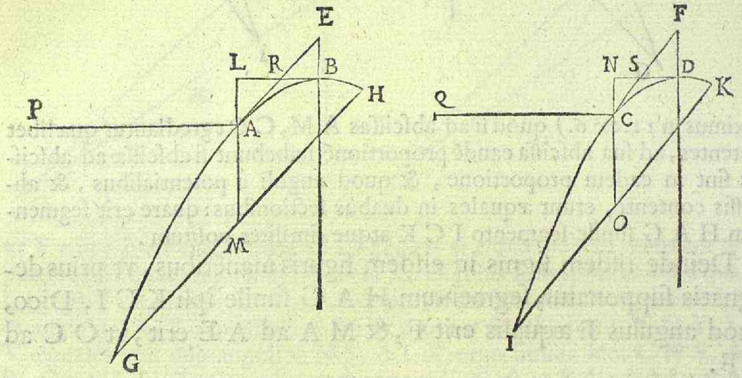
C



PROPO-

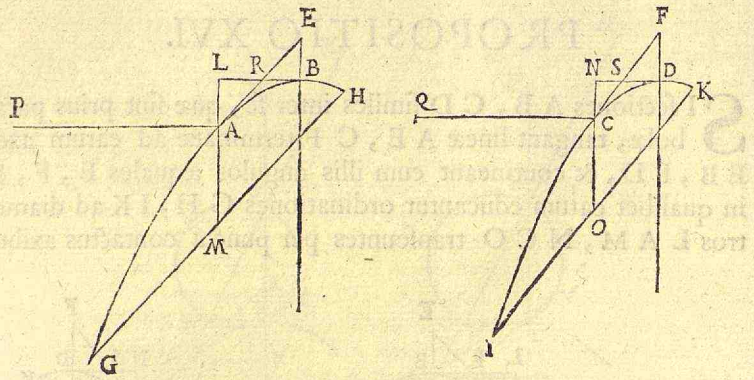
PROPOSITIO XVI.

SI ſectiones A B, C D ſimiles inter ſe, quæ ſint prius parabolæ, tangant lineæ A E, C F terminatæ ad earum axes E B, F D, & contineant cum illis angulos æquales E, F, & in qualibet earum educantur ordinationes G H, I K ad diametros L A M, N C O tranſeuntes per puncta contactus axibus



æquidiſtantes, & fuerit proportio ſuarum abſciſſarum A M, C O ad lineas tangentes A E, C F eadem; vtique ordinationes abſcindent ex ſectionibus ſimilia ſegmenta, & ſimiliter poſita, vt G A H, I C K. Si verò ordinationes ſecuerint ſimilia ſegmenta; vtique ſectiones ſimiles erunt, & abſciſſarum ad lineas tangentes proportio erit eadem, atque lineæ tangentes continebunt cum axibus angulos æquales.

Educamus enim duas B L, D N ſuper duos axes B E, F D perpendiculares, quæ tangent ſectiones in B, D: & ponamus A P ad duplam A 32. lib. 1.
E, vt R A aſſumpta ad A L ei ſimilem, nec non C Q ad duplam C F, vt aſſumpta S C ad C N; igitur P A, Q C ſunt erecti duarum diametrorum L M, N O (52. ex 1.) ergo G M poteſt P A in A M, (12. ex 1.) 49 lib. 1.
& ſimiliter I O poteſt O C in C Q, (12. ex 1.) & propter æquidiſtan- 11.lib. 1. Ibidem.
tiam E B, L A, atque F D, C N ſunt ſimilia E R B, R L A, atque D S F, S N C; & duo anguli E, F ſuppoſiti ſunt æquales; igitur angulus R A L æqualis eſt S C N, & N, L ſunt recti; quare R A ad A L, nempe P A ad duplam A E eſt, vt S C ad N C, nempe vt Q C ad duplam C F, & M A ad A E ſuppoſita eſt, vt O C ad C F: ergo M A ad A P
a eſt, vt O C ad C Q, & angulus O æqualis eſt M. Oſtendetur igitur (vt



diximus in 11. ex 6.) quod si ad abscissas A M, C O egrediantur quælibet potentes, ad sua abscissa eandẽ proportionẽ habebunt si abscissæ ad abscissas sint in eadem proportione, & quod anguli à potentialibus, & abscissis contenti, erunt æquales in duabus sectionibus: quare erit segmentum H A G simile segmento I C K atque similiter positum.

Defin. 7. huius.

Deinde ijsdem signis in eisdem figuris manẽtibus, vt prius designatis supponatur, segmentum H A G simile ipsi K C I. Dico, quod angulus E æqualis erit F, & M A ad A E erit, vt O C ad C F.

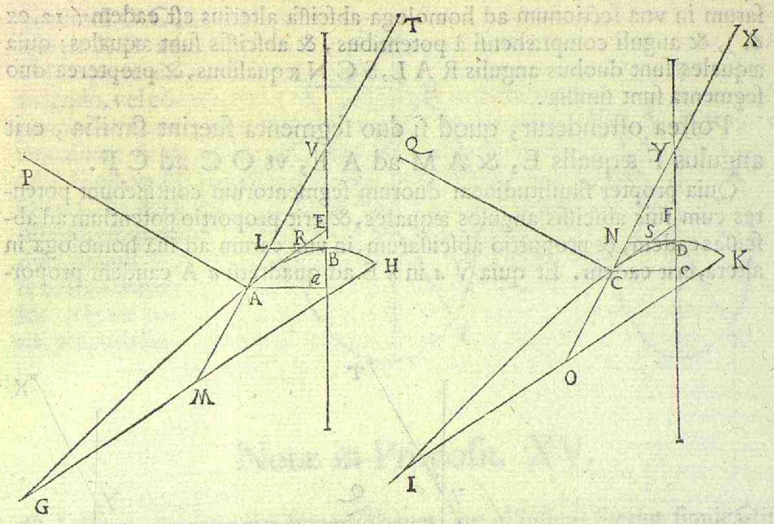
Defin. 7.

Quoniam duo segmenta sunt similia erit angulus O æqualis M, & duo anguli E A L, F C N illis æquales, sunt quoque inter se æquales; ergo duo anguli F, E, qui illis æquales sunt, erunt inter se æquales, eoquod A E, C F parallelæ sunt G H, I K, & anguli N, L sunt recti; ergo duo
49. lib. 1. triangula proportionis sunt similia, ideoque R A ad A L, nempe P A ad
11. lib. 1. duplam A E est, vt C S ad C N, nempe Q C ad duplam C F: & quia G M potest P A in A M (12. ex 1.) & similiter I O potest Q C in C O; b
ergo P A ad G M est, vt Q C ad O I, & G M ad M A est, vt I O ad O C; quia duo segmenta sunt similia, & E A ad A M est, vt C F ad C O: & iam ostensum est, quod duo anguli E, F sunt æquales. Et hoc erat ostendendum.

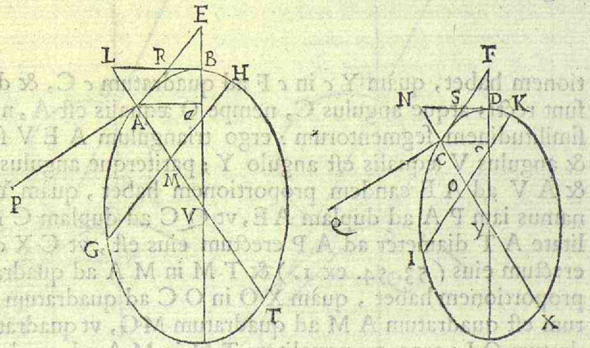
PROPOSITIO XVII.

DEinde sectiones sint hyperbolicæ, aut ellipticæ, & reliqua supponantur, vt prius. a

Educamus C c perpendicularẽ super axim D F, & A a perpendicularem super axim B E; atque V, Y sint duo centra. Ergo (propter similitudinem duarum sectionum) erit V a in a E ad quadratum A a potentis, vt Y c



vt Y c in c F ad quadratum C c (39. ex 1.) quæ habent eandem pro- 37. lib. 1.
portionem, quàm figuræ axis habent, & angulus F suppositus est æqualis 12. huius.
b E: ergò Y c C simile est V a A: & propterea angulus Y æqualis est V, 6. præmis.
& angulus F C Y æqualis E A V: & propter similitudinem N D Y, L B huius.
V æquales sunt duo anguli C N S, A L R; ergo similia sunt C N S, A L R. Quare C S assumpta ad ei coniugatam C N est vt R A ad A L: & ponamus C Q ad duplam C F, vt C S ad C N, nec non A P ad duplam A E, vt A R ad A L; igitur Q C, A P sunt erecti duarum diametrorum
C Y X, A V T (53. 54. ex 1.) sed C F ad C X duplam ipsius C Y est 50. lib. 1.
vt A E ad A T duplam ipsius A V, propter similitudinem C F Y, A E V: ergo ex æqualitate Q C ad C X diametrum inclinatam, seu transuersam
c est vt A P ad A T; & propterea figuræ earundem diametrorum sunt similes, & quia C O ad C F supposita est, vt A M ad A E: ergo ex æqualitate Q C ad C O est, vt P A ad A M: Quare potentes ad duo eius abscissa C O, A M, à quibus diuidũtur bifariam, eãdem proportionem habent: & proportio abscis-

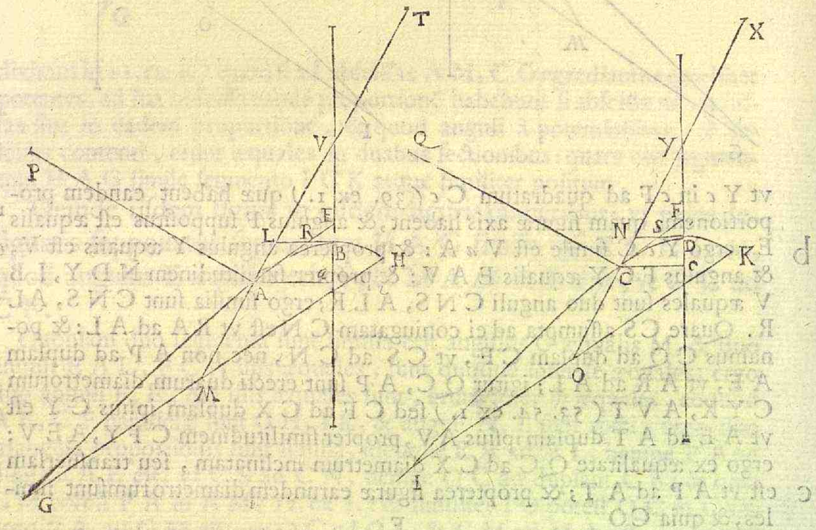


sarum

ſarum in vna ſectionum ad homologa abſciſſa alterius eſt eadem (12. ex 6.), & anguli compræhenſi à potentibus, & abſciſſis ſunt æquales; quia æquales ſunt duobus angulis R A L, S C N æqualibus, & propterea duo
Defin. 7. huius. ſegmenta ſunt ſimilia.

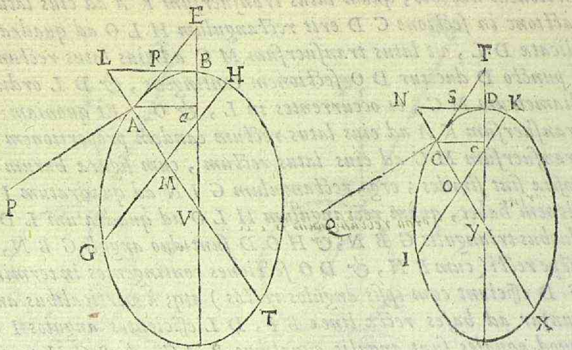
Poſtea oſtendetur, quod ſi duo ſegmenta fuerint ſimilia, erit angulus F æqualis E, & A M ad A E, vt O C ad C F.

Quia propter ſimilitudinem duorum ſegmentorum continebunt poten- d
Defin. 7. huius. tes cum ſuis abſciſſis angulos æquales, & erit proportio potentium ad abſciſſas eadem, & proportio abſciſſarum, in vna earum ad ſua homologa in altera, erit eadem. Et quia V *a* in *a* E ad quadratũ *a* A eandem propor-



tionem habet, quàm Y *c* in *c* F ad quadratum *c* C, & duo anguli *a*, & *c* ſunt recti; atque angulus C, nempe O æqualis eſt A, nempe M, propter ſimilitudinem ſegmentorum: ergo triangulum A E V ſimile eſt C F Y, & angulus V æqualis eſt angulo Y; pariterque angulus E æqualis eſt F, & A V ad A E eandem proportionem habet, quàm Y C ad C F. Ponamus iam P A ad duplam A E, vt Q C ad duplam C F; ergo ex æqualitate A T diameter ad A P erectum eius eſt, vt C X diameter ad C Q
21. lib. 1. erectum eius (53. 54. ex 1.) & T M in M A ad quadratum M G eandē proportionem habet, quàm X O in O C ad quadratum O I: at ſuppoſitum eſt quadratum A M ad quadratum M G, vt quadratum C O ad quadratum O I; ergo ex æqualitate T M in M A ad quadratum A M, nempe T M ad M A, eandem proportionem habet, quàm X O in O C ad qua-

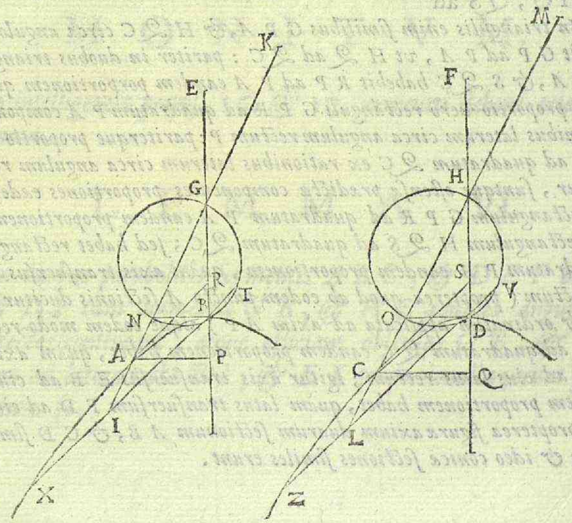
quadratũ O C, nempe X O ad O C; quare diuidendo, vel cõponendo, & ex æqualitate A M ad A E eſt vt C O ad C F: & iã oſtenſũ eſt, quod duo anguli F, & E ſunt æquales. Quare patet propoſitum.



Notæ in Propoſit. XV.

a SI figuræ diametrorum hyperbolarum, aut ellipſium fuerint ſimiles diſſimilium axium, & potentes illarum diametrorum contineant ſimul angulos rectos, vtique ſectiones ſimiles ſunt, &c. *Textus mendoſus huius propoſitionis ex ſubſequenti expoſitione, & demonſtratione corrigi debuit.*

b Et G I in I N æquale ipſi T I in I B ad quadratum I B potentis eſt, vt H L in L O æquale ipſi V L in L D ad quadratum L D; quia, &c. *Quoniam à puncto B ſectionis A B ad diametrum K A I ducuntur ordinatim applicata B I, & B N contingens ſectionem in B ſecantes diametrum in I, & N; igitur rectangulum G I N ad quadratum ordinatim applicatæ I B eandem pro-* 37. lib. 1.



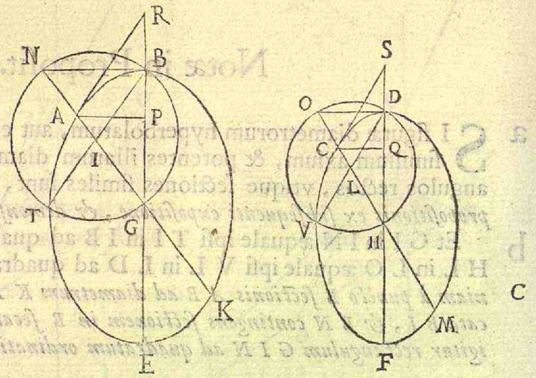
por-

portionem habebit, quàm latus tranſuerſum K A ad eius latus rectum: eadem ratione in ſectione C D erit rectangulum H L O ad quadratum ordinatim applicatæ D L, vt latus tranſuerſum M C ad eius latus rectum; propterea quod à puncto D ducitur D O ſectionem contingens, & D L ordinatim applicata ad diametrum M C, ei occurrentes in L, & O. Et quoniam ex hypotheſi latus tranſuerſum K A ad eius latus rectum eandem proportionem habet, quàm latus tranſuerſum M C ad eius latus rectum, cum figuræ harum diametrorum ſuppoſitæ ſint ſimiles; ergo rectangulum G I N ad quadratum I B eandem proportionem habet, quàm rectangulum H L O ad quadratum L D: deinde quia in duobus triangulis G B N, & H O D ſunt duo anguli G B N, & H D O æquales,

Conuerſ. *nẽpe recti (cum B N, & D O ſectiones contingentes in terminis axium E B, &*

32. lib. 1. *F D efficiant cum ipſis angulos rectos) atq; à verticalibus angulis B, & D ducuntur ad baſes rectæ lineæ B I, D L efficientes angulos I, & L æquales, eo quod æquales ſunt angulis æqualibus R A G, & S C H propter æquidiſtantiam linearum B I, A R, atque linearum D L, S C, & inſuper rectangulum G I N ad quadratum I B eandem proportionem habet, quàm rectangulum H L O ad quadratum L D;*

Propoſ. 2. premiſſ. *igitur triangula G B N, & H D O ſimilia ſunt inter ſe; & propterea angulus G æqualis erit angulo H.*



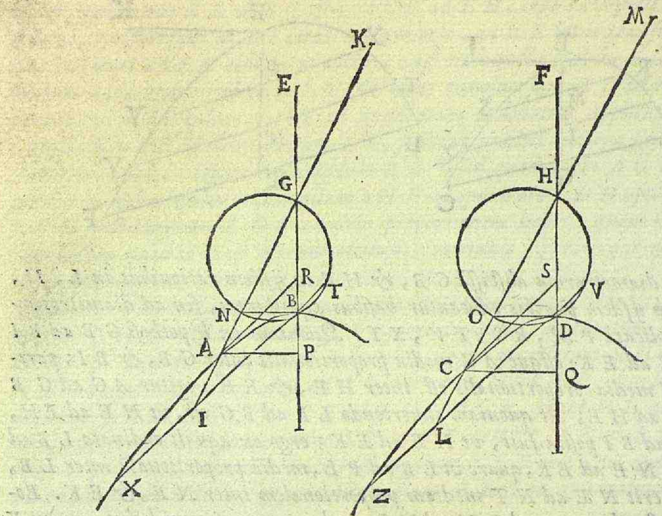
Et proportio vniuſcuiuſque eorum, nempe G P, P R ad P A eſt, vt proportio H Q, Q S ad C O; &c. *In triangulis enim ſimilibus G P A, & H Q C circa angulos rectos P, & Q erit G P ad P A, vt H Q ad Q C: pariter in duobus triangulis ſimilibus R P A, & S Q C habebit R P ad P A eandem porportionem quàm, S Q ad Q C; proportio verò rectanguli G P R ad quadratum P A componitur ex iiſdem rationibus laterum circa angulum rectum P: pariterque proportio rectanguli H Q S ad quadratum Q C ex rationibus laterum circa angulum rectum Q componitur, ſuntque oſtenſæ prædictæ componentes proportiones eædem inter ſe; igitur rectangulum G P R ad quadratum P A eandem proportionem habebit, quàm rectangulum H Q S ad quadratum Q C; ſed habet rectangulum G*

37. lib. 1. *P R ad quadratum P A eandem proportionem, quàm axis tranſuerſus E B ad eius latus rectum (propterea quod ab eodem puncto A ſectionis ducitur contin-*

Ibidem. *gens A R, & ordinatim applicata ad axim A P) atque eodem modo rectangulum H Q S ad quadratum Q C eandem proportionem habet, quàm axis tranſuerſus F D ad eius latus rectum; igitur axis tranſuerſus E B ad eius latus rectum eandem proportionem habet, quàm latus tranſuerſum F D ad eius latus rectum; & propterea figuræ axium duarum ſectionum A B, & C D ſimiles in-*

12. huius. *ter ſe erunt; & ideo conicæ ſectiones ſimiles erunt.*

Sed



Sed oportet in ellipſi, vt duo axes ſint ſimul, aut tranſuerſi, aut rectiſimul, &c. *Addidi verba, quæ videntur in textu deficere. Sed oportet in ellipſi, vt duæ diametri, ideòque duo axes ſint ſimul, aut tranſuerſi, aut ſimul recti. Licet enim multoties diametri coniugatæ ellipſium æquales eſſe poſſint, nihilominus eæ ſumi debent, quæ ad eaſdem partes reſpiciunt axes tranſuerſos, alias conſtructio, atque demonſtratio nou ſequeretur, vt manifeſtum eſt.*

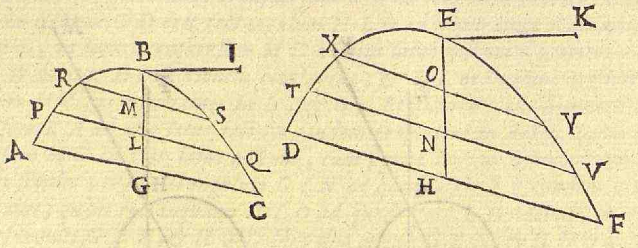
M O N I T V M.

P*Ro intelligentia propoſ. 16. & 17. præmitti debent tria hæc lemmata.*

L E M M A VI.

S*I in duobus parabolicis ſegmentis A B C, & D E F baſes A C, & D F cum diametris G B, & H E æquales angulos G, & H non rectos contineant, atque efficiant abſciſſas G B, & H E diametrorum ad latera recta B I, & E K proportionalia; erunt ſegmenta ſimilia inter ſe.*

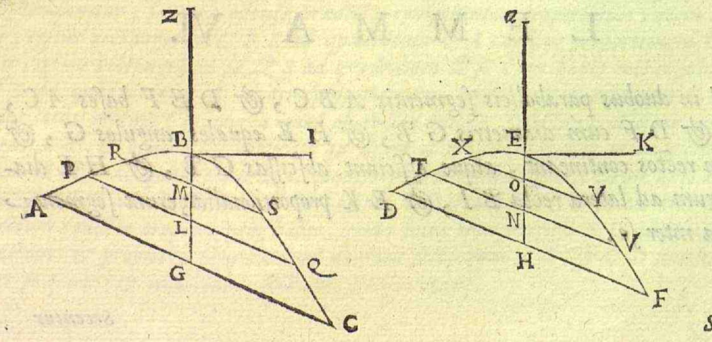
Secentur



Secentur diametrorum abſciſſæ G B, & H E in ijſdem rationibus in L, M, N, O, & ab ijſdem punctis educantur baſibus æquiſtantes, ſeu ad diametros ordinatim applicatæ P Q, R S, T V, X Y. Quoniam ex hypotheſi G B ad B I
11. lib. 1. *eſt, vt H E ad E K; eſtque A G media proportionalis inter G B, & B I; pariterque D H media proportionalis eſt inter H E, & E K; igitur A G ad G B eſt, vt D H ad H E; Et quoniam inuertendo L B ad B G eſt, vt N E ad E H, atque B G ad B I poſita fuit, vt H E ad E K; ergo ex æquali ordinata L B ad B I erit, vt N E ad E K, quare vt L B ad P L, mediã proportionalẽ inter L B, & I B, ita erit N E ad N T mediam proportionalem inter N E, & E K. Eodem modo oſtendetur, quod R M ad M B eandem proportionem habet, quàm X O ad O E: & hoc ſemper continget in quibuslibet alijs diuiſionibus proportionalibus abſciſſarum, ſuntque anguli G, & H æquales; igitur ſegmenta A B C, &*
Defin. 7. huius. *D E F ſimilia ſunt inter ſe. Quod erat oſtendendum.*

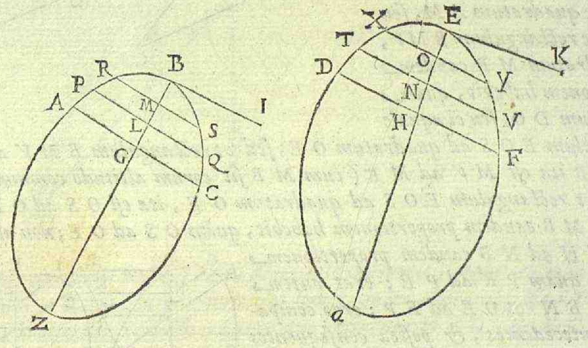
LEMMA VII.

SI in duobus ſegmentis A B C, & D E F hyperbolicis, aut ellipticis, baſes A C, & D F cum diametris G B, & H E, æquales angulos G, & H obliquos continentes, efficiant abſciſſas G B, & H E proportionales lateribus rectis B I, & E K, atque tranſuerſis B Z, & E a, erunt ſegmenta ſimilia inter ſe.



Sece-

Secentur abſciſſæ G B, & H E in ijſdem rationibus, ducanturque ordinatim applicatæ vt in precedenti factum eſt. Quoniam G B ad B I eſt, vt H E ad E K, & inuertendo Z B ad B G eſt, vt a E ad E H, ergo ex æquali ordinata Z B latus tranſuerſum ad B I latus rectum erit, vt a E latus tranſuerſum alterius ſectionis ad E K eius latus rectum: eſt verò rectangulum Z G B ad quadratum ordinatim applicatæ G A, vt latus tranſuerſum Z B ad rectum B I; pariterque rectangulum a H E ad quadratum ordinatim applicatæ D H, vt tranſuerſum a E ad latus rectum E K, ſuntque prædicta latera figurarum oſtenſa proportionalia; igitur rectangulum Z G B ad quadratum A G eandem proportionem habet, quàm rectangulum a H E ad quadratum D H; ſed quadratum B G ad rectangulum Z G B eandem proportionem habet, quàm G B ad G Z (propterea quod G B eſt illorum altitudo communis) pariterque quadratum E H ad rectangulum a H E eſt, vt H E ad H a, ſeu vt G B ad G Z; igitur quadratum G B ad rectangulum Z G B eandem proportionem habebit, quàm quadratum E H ad rectangulum a H E; quare ex æquali quadratum G B ad quadratum G A eandem proportionem habebit, quàm quadratum E H ad quadratũ H D; ideoque inuertendo A G ad G B erit vt D H ad H E. Rurſus, quia inuertendo L B ad B G eſt vt N E ad E H; ſed G B, atque H E ad latera tranſuerſa proportionalia ſunt; igitur L B ad B Z erit vt N E ad E a; & propterea, vt prius quadratum L B ad rectangulum Z L B erit, vt quadratum E N ad rectangulum a N E; eſtque rectangulum Z L B ad quadratum ordinatim



applicatæ P L, vt rectangulum a N E ad quadratum T N, (ſcilicet vt latera tranſuerſa ad recta, quæ proportionalia oſtenſa ſunt); igitur ex æquali ordinata quadratũ B L ad quadratum P L eandem proportionẽ habebit, quàm quadratũ E N ad quadratum T N; quare vt prius dictum eſt, P L ad L B eandem proportionem habebit, quàm T N ad N E; & hoc ſemper continget in reliquis omnibus diuiſionibus abſciſſarum in eiſdem rationibus ſectis; ſuntque anguli G, & H æquales inter ſe, licet non recti; igitur (ex definitione 7.) ſegmenta A B C, & D E F ſimilia ſunt inter ſe. Quod erat oſtendendum.

LEMMA VIII.

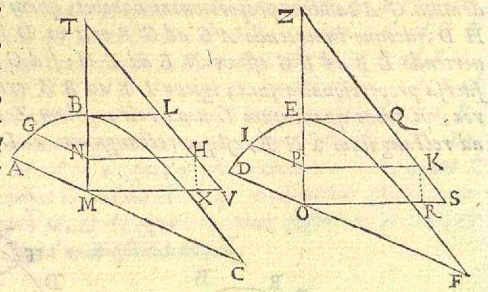
SI duo hyperbolica, aut elliptica segmenta A B C, D E F fuerint similia, quorum bases A C, D F efficiant cum diametrorum abscissis B M, E O angulos æquales M, & O; sintque eorum transuersa latera T B, Z E, recta vero B L, E Q. Dico figuras eorum; siue rectangula T B L, & Z E Q similia esse.

Secentur segmentorum abscissæ M B, O E proportionaliter in N, P, & per ea puncta ducantur ordinatim ad diametros applicatæ G N, I P æquidistantes basibus, efficientes abscissas B N, E P, coniunganturq; duæ rectæ lineæ T L, Z Q secantes rectas lineas N H, M V, P K, O S æquidistantes lateribus rectis B L, E Q in punctis H, V, K, S, atque à punctis H, & K ducantur rectæ lineæ H X, K R parallelæ diametris occurrentes ipsis M V, O S in X,

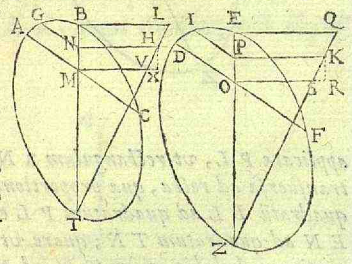
Defin. 7. huius. *& R. Quoniam segmenta supponuntur similia erit A M ad M B, vt D O ad O E, & G N ad N B erit vt I P ad P E, atque quadratum A M, seu*

12. 13. lib. 1. *ei æquale rectangulum B M V, ad quadratum M B eandem proportionem habebit, quàm*

Ibidem. *quadratum D O, seu ei æquale rectangulum E O S ad quadratum O E; sed vt rectangulum B M V ad quadratum M B ita est M V ad M B (cum M B sit eorum altitudo communis) pariterque vt rectangulum E O S ad quadratum O E, ita est O S ad O E; quare M V ad M B eandem proportionem habebit, quàm O S ad O E; non aliter ostendetur N H ad N B eandem proportionem habere, quàm P K ad P E: erat autem*



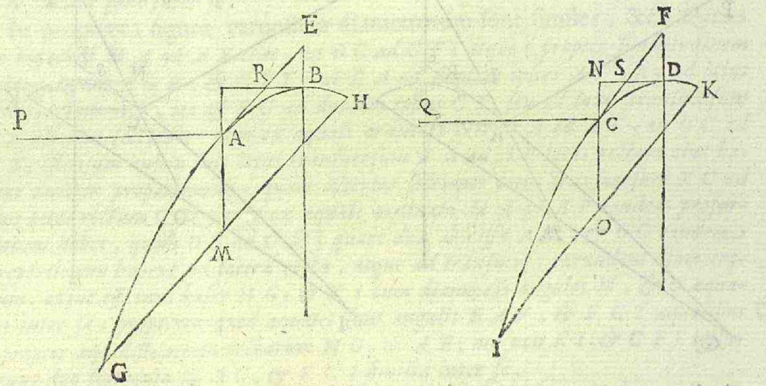
Lem. 1. lib. 5. *M B ad B N vt O E ad E P; ergo comparando antecedentes, & postea consequentes ad differentias terminorum erit B M ad M N vt E O ad O P; atque B N ad N M eandem proportionem habebit, quàm E P ad P O. Quare ex æquali V M ad M N erit vt S O ad O P, atque H N ad N M erit vt K P ad P O; & differentia ipsarum V M & H N idest X V ad M N, seu ad X H eandem proportionem habebit, quàm differentia ipsarum S O, & K P, idest S R ad O P, seu ad R K; quapropter V X ad X H erit vt S R ad R K; sed quia X V, L B inter se, nec non X H, & B T sunt parallelæ, atq; etiam S R, Q E inter se, nec nõ R K, & E Z sunt æquidistantes; erunt triangula V X H, & L B T simi-*



T similia, pariterque triangula S R K, & Q E Z inter se similia; ideoque erit L B ad B T vt V X ad X H, pariterque Q E ad E Z erit vt S R ad R K; erat autem prius V X ad X H, vt S R ad R K; igitur L B ad B T eandem proportionem habebit, quàm Q E ad E Z; & propterea circa rectos angulos B, E, figuræ sectionum similes erunt inter se. Quod erat ostendendum.

Notæ in Proposit. XVI.

a ERgo M A ad A P est vt O C ad C Q, & angulus O æqualis est M, ostendetur (vt diximus in 11. ex 6.) quod, &c. *Sequitur enim ex æqualitate ordinata, quod M A ad A P eandem proportionem habet, quàm O C ad C Q, cumque sint duo segmenta parabolica H A G, & K C I, quorũ diametri A M, & C O efficiunt cum basibus G H, & K I angulos M, & O æquales inter se (cum sint æquales angulis R A L, & S C N æqualibus à contingentibus*

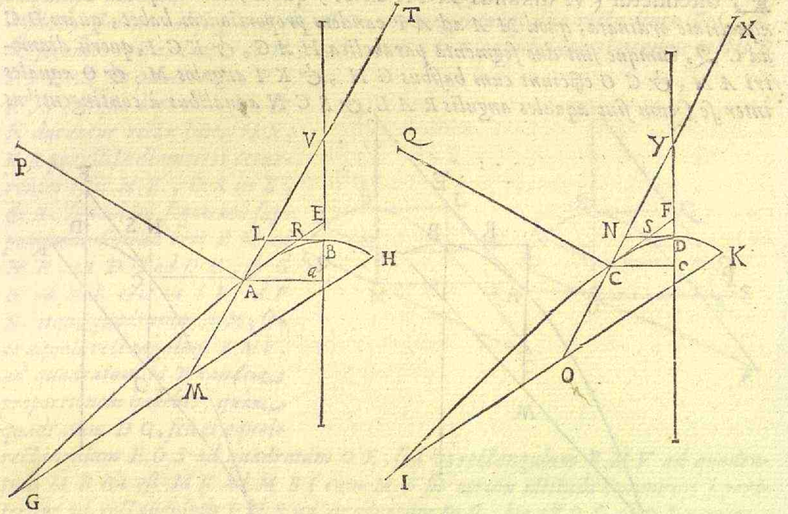


verticalibus parallelis basibus, & à diametris contentis) atque abscissa M A ad latus rectum A P eandem proportionem habet, quàm altera abscissa O C ad C Q latus rectum alterius sectionis; igitur duo segmenta H A G, & K C I similia Lem. 6. huius. *sunt inter se.*

b Et quia G M potest A P in A M, & similiter I O potest C Q in C O; ergo P A ad G M est, vt C Q ad I O, & G M ad M A est, vt I O ad O C; quia duo segmenta sunt similia, & E A ad A M, est vt F C ad C O; &c. *Sensus huius textus confusi, talis est. Quia segmenta H A G, &* Defin.7. huius. *K C I similia supponuntur erit A M ad M G, vt C O ad O I, & quadratum A M ad quadratum M G erit vt quadratum C O ad quadratum O I; est verò* 11. lib. 1. *rectangulum P A M æquale quadrato G M; pariterque rectangulum Q C O est æquale quadrato I O; igitur quadratum A M ad rectangulum P A M eandem proportionem habet, quàm quadratum C O ad rectangulum Q C O; & propterea M A ad A P eandem proportionem habebit, quàm C O ad C Q; sed prius ostensa fuit P A ad A E, vt Q C ad C F; igitur ex æquali ordinata erit M A* *ad A E, vt O C ad C F, ſuntque anguli E, & F æquales, vt dictum eſt. Et hoc erat propoſitum.*

Notæ in Propoſit. XVII.

DEinde ſint ſectiones hyperbolicæ, aut ellipticæ, & reliqua in ſuo ſtatu, &c. *Ideſt. Supponantur ſectiones hyperbolicæ, vel ellipticæ A B, & C D ſimiles inter ſe, ſcilicet figuræ axium V B, & Y D ſint ſimiles inter ſe, atque à verticibus A, & C duarum diametrorum A M, & C O ductæ ſint re-* a

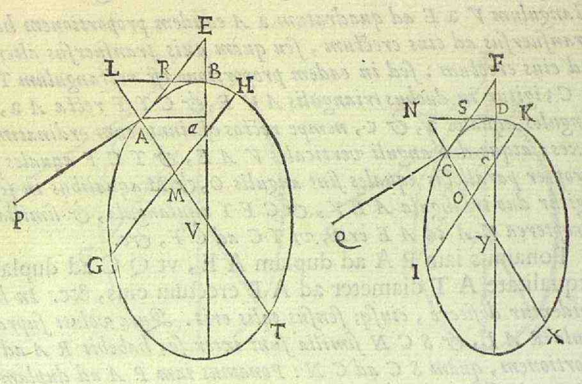


ctæ lineæ contingentes A E, & C F, efficientes cum axibus angulos A E B, & C F D æquales, ſintque H G, & K I ordinatim ad diametros applicatæ, ſcilicet æquidiſtantes contingentibus verticalibus; & habeat abſciſſa M A ad portionem contingentis A E eandem proportionem, quàm abſciſſa O C habet ad portionem contingentis C F; Dico ſegmenta H A G, & K C I ſimilia eſſe inter ſe.

Ergo Y c C ſimile eſt V a A, &c. *Quoniam duæ ordinatim ad axes applicatæ A a, & C c perpendiculares ſunt ad axes, erunt in triangulis A a E, & C c F duo anguli a, & c recti: atque ex hypotheſi duo reliqui anguli E, & F æquales quoque ſunt; igitur tertius angulus a A E æqualis eſt tertio angulo c C F, cumque in duobus triangulis V A E, atque Y C F ab eorum verticibus A, & C ducuntur ad baſes V E, & Y F duæ rectæ lineæ A a, & C c continentes cum baſibus angulos æquales, nempe rectos, & rectangulum V a E ad quadratum a A eandem proportionem habet, quàm rectangulum Y c F ad quadratum c C, vt in textu oſtenſum eſt: atq; duo anguli a A E, & c C F æquales oſtenſi ſunt inter ſe; igitur erunt triangula V A E, & Y C F ſimilia inter ſe; ergo angulus V æqualis eſt angulo Y, atque angulus E A V æqualis erit angulo F C Y;* b

ex 37. lib. 1. Propof. 6. præmiff.

Y: poſtea, quia B L, & D N contingunt ſectiones in verticibus axium efficient angulos V B L, & Y D N rectos, cumque duo anguli V, & Y oſtenſi ſint æquales, in triangulis V B L, Y D N, anguli V L B, & Y N D æquales erunt inter ſe, & qui deinceps A L R, & C N S ſunt æquales inter ſe; & ideo triangula A R L, & C S N ſimilia ſunt inter ſe. Conuerſ. 32. lib. 1.

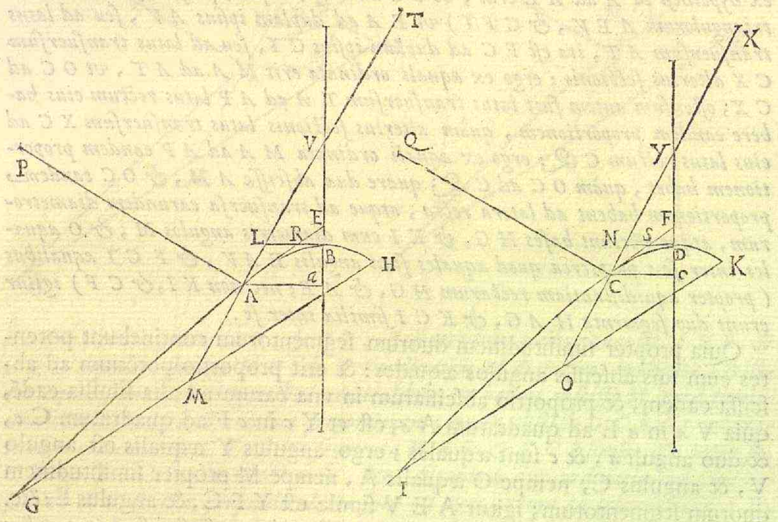


c Et propterea figuræ earundem diametrorum ſunt ſimiles, &c. *Quia ex hypotheſi M A ad A E erat, vt O C ad C F; atque (propter ſimilitudinem triangulorum A E V, & C F Y) vt E A ad duplam ipſius A V, ſeu ad latus tranſuerſum A T, ita eſt F C ad duplam ipſius C Y, ſeu ad latus tranſuerſum C X alterius ſectionis; ergo ex æquali ordinata erit M A ad A T, vt O C ad C X; oſtenſum autem fuit latus tranſuerſum T A ad A P latus rectum eius habere eandem proportionem, quàm alterius ſectionis latus tranſuerſum X C ad eius latus rectum C Q; ergo ex æquali ordinata M A ad A P eandem proportionem habet, quàm O C ad C Q; quare duæ abſciſſæ A M, & O C eandem proportionem habent ad latera recta, atque ad tranſuerſa earundem diametrorum, atque efficiunt baſes H G, & K I cum diametris angulos M, & O æquales inter ſe: propterea quod æquales ſunt angulis E A V, & F C Y æqualibus* Defin. 7. huius. *(propter æquidiſtantiam rectarum H G, & A E; nec non K I, & C F) igitur erunt duo ſegmenta H A G, & K C I ſimilia inter ſe.*

d Quia propter ſimilitudinem duorum ſegmentorum continebunt potentes cum ſuis abſciſſis angulos æquales: & erit proportio potētium ad abſciſſa eadem, & proportio abſciſſarum in vna earum ad alia ſimilia eadē, quia V a in a E ad quadratum A a, eſt vt Y c in c F ad quadratum C c, & duo anguli a, & c ſunt æquales; ergo angulus Y æqualis eſt angulo V, & angulus C, nempe O æqualis A, nempe M propter ſimilitudinem duorum ſegmentorum; igitur A E V ſimile eſt Y F C, & angulus E; &c. *In hoc textu nonnulla verba deficiunt, aliqua verò tranſpoſita ſunt, vt nullus ſenſus colligi poſſit: tamen eum reſtitui poſſe cenſeo vt ibidem videre eſt. Quoniam duo ſegmenta H A G, & K C I ſupponuntur ſimilia efficient diametri A M, & C O cum baſibus G H, & K I angulos M, & O æquales, licet non rectos;* Lem. 8. huius. *eruntque figuræ earumdem diametrorum ſimiles inter ſe: & propterea habebit T A ad eius erectum eandem proportionem, quàm X C ad eius latus rectum;* 15. huius. *igitur ſectiones A B, & C D ſimiles ſunt, ideſt ductis axibus V B, & Y D* 47. lib. 2. *erunt figuræ axium ſimiles inter ſe: ducuntur verò à punctis A, & C ad axes* 12. huius. *ordinatim applicati A a, & C c, atque contingentes A E, & C F; igitur rectangu-* 37. lib. 1.

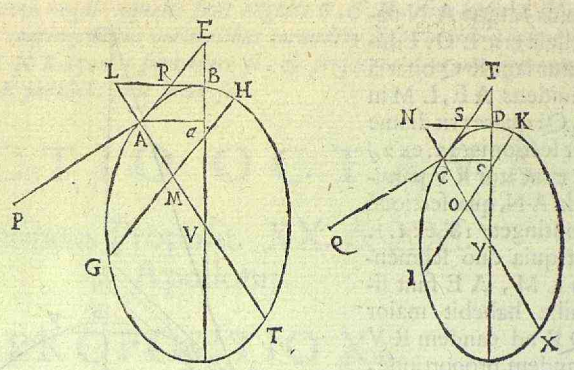
ctangulum V a *E ad quadratum* a *A eandem proportionem habebit, quàm axis transuersus ad eius erectum, seu quàm axis transuersus alterius sectionis C D ad eius erectum: sed in eadem proportione est rectangulum Y* c *F ad quadratũ*
37. lib. 1. c *C; igitur in duobus triangulis A V E, & C Y F rectæ A* a, *& C* c *cũ basibus angulos æquales* a, *&* c, *nempe rectos efficiunt, cum ordinatim applicatæ sint ad axes; atque duo anguli verticales V A E, & Y C F æquales sint inter se, cum propter parallelas æquales sint angulis O, & M æqualibus in segmentis similibus;*
Propos. 7. præmiss. *igitur duo triangula A E V, & C F Y æquiangula, & similia sunt inter se: & propterea V A ad A E erit, vt Y C ad C F, &c.*

Ponamus iam P A ad duplam A E, vt Q C ad duplam C F: ergo ex æqualitate A T diameter ad A P erectum eius, &c. *In hoc textu nonnulla videntur deficere, eiusq; sensus talis erit. Quia veluti supra dictum est, triãgula R A L, & S C N similia sunt inter se, habebit R A ad A L eandem proportionem, quàm S C ad C N: Ponamus iam P A ad duplam A E, vt R A ad A L, & Q C ad duplam C F, vt S C ad C N, erunt A P, & C Q latera re-*
50 lib. 1. Lem. 8. *cta diametrorum A M, & O C; sed earundem diametrorum figuræ ostensæ sunt similes; igitur latus transuersum A T ad A P erectum eius est, vt latus tranuersum X C ad C Q erectum eius. Et quia vt latus transuersum ad rectum* e



21.lib. 1. *ita est rectangulum T M A ad quadratum M G, & similiter rectangulum X O C ad quadratum O I eandem proportionem habebit, quàm latus transuersum ad rectum, scilicet eandem, quàm habent latera figurarũ earundẽ diametrorũ; igitur rectangulum T M A ad quadratum M G eandem proportionẽ habebit, quàm rectangulum X O C ad quadratum O I; habet verò M G ad M A eandem proportionem, quàm I O ad O C propter similitudinem segmentorum; ergo quadratum G M ad quadratum M A erit vt quadratum I O ad quadratum O C: & propterea ex æquali ordinata rectangulum T M A ad quadratum M A, seu T M ad A M*

ad A M eandem proportionem habebit, quàm X O C ad quadratum O C, seu eandẽ, quàm habet X O ad C O, & comparando consequẽtes ad differẽtias terminorum M A ad A T eandem proportionem habebit, quàm O C ad C X: erat antẽ prius T A ad A E, vt X C ad C F; igitur ex æquali M A ad A E erit, vt O C ad C F, & fuerunt ostensi anguli E, & F æquales. Quod erat ostendendum.

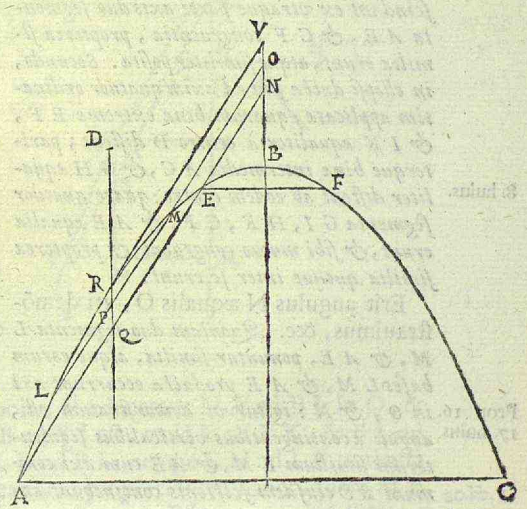


SECTIO SEPTIMA

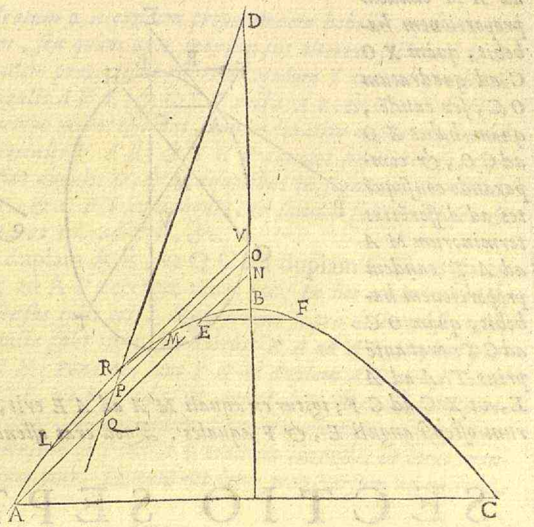
Continens Proposit. XVIII. & XIX.

CVIuslibet sectionis A B C duo segmenta C F, A E cadentia inter duas ordinationes A C, E F ad vtrasque partes axis B V sunt inter se similia, & similiter posita, nec sunt similia alteri segmento (nisi in ellipsi, in qua quatuor segmenta memorata in propositione 8. sunt æqualia, similia, & similiter posita, quæ alteri segmẽto similia nõ sunt.

a Quoniam vnumquodque eorum alteri congruit, nec non cõgruunt duo segmenta GI, KH in ellipsi (7. 8. ex 6.) at non sunt similia alteri segmento: si enim hoc fieri potest, sit segmentum L M simile segmento F C. Et quia F C congruit A E. Ergo duo segmenta L M, A E sunt similia, producamus A E, L M
b quousque occurrant axi in N, O, erit angulus N æqualis O (vti demonstrauimus in 16. & 17. huius



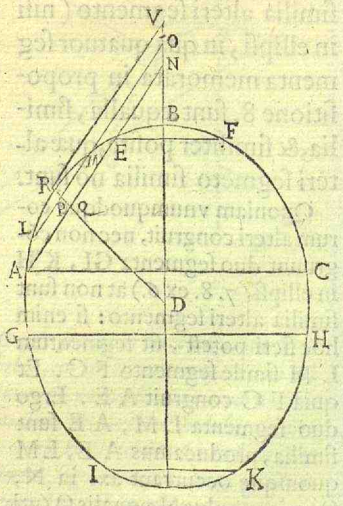
huius) atque A N parallela erit L O. Educatur iam R Q bifariã diuidens A E, L M in P, Q: quare erit diame-
28. lib. 2. ter sectionis (32. ex 2.) & educatur R V parallela A N, quæ sectionẽ
17. lib. 1. continget (18. ex 1.). Et quia duo segmenta L M, A E sunt si-
16. 17. huius. milia habebit maior Q R ad eandem R V eandem proportionẽ, quàm habet minor R P; quod est absurdum. Quare non sunt similia duo segmenta A E, C F alteri segmento. Quod erat ostendendum.



Notæ in Proposit. XVIII. & XIX.

QVuoniam vnumquodque eorum alteri congruit, nec non congruunt duo segmenta G I, K H in ellipsi (7. 8. ex 6.) at non sunt similia a
alteri segmento, &c. Idest. *Sit prius sectio A B C parabole, vel*
7. huius. *hyperbole. Quoniam duæ A C, & E F ordinatim ad axim B D applicatæ abscindunt ex vtraque parte axis duo segmenta A E, & C F congruentia, propterea similia erunt, atque similiter posita. Secundo, in ellipsi ductæ sint ad axim quatuor ordinatim applicatæ, quarum binæ extremæ E F, & I K æqualiter à centro D distent; pariterque binæ intermediæ A C, & G H æqua-*
8. huius. *liter distent ab eodem centro: quare quatuor segmenta G I, H K, C F, & A E æqualia erunt, & sibi mutuo congruent, & propterea similia quoque inter se erunt.*

Erit angulus N æqualis O, vti demõstrauimus, &c. *Quoniam duo segmenta L* b
M, & A E, ponuntur similia, atque eorum bases L M, & A E productæ occurrunt axi
Prop. 16. 17. huius. *in O, & N: igitur vt demonstratum est, anguli à contingentibus verticalibus segmentorum similium L M, & A E cum axi communi B D eiusdem sectionis continebunt an-*



gulos

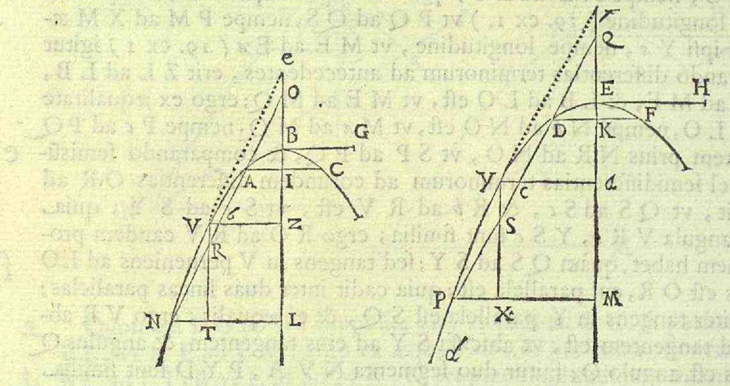
gulos æquales; ij verò anguli æquales sunt angulis O, & N, cum bases L M, & A E parallelæ sint contingentibus verticalibus eorundem segmentorum; igitur anguli L O B, & A N B æquales sunt inter se; & propterea duorum segmentorũ bases L M, & A E parallelæ sunt inter se.

SECTIO OCTAVA

Continens Proposit. XX. & XXI. Apollonij.

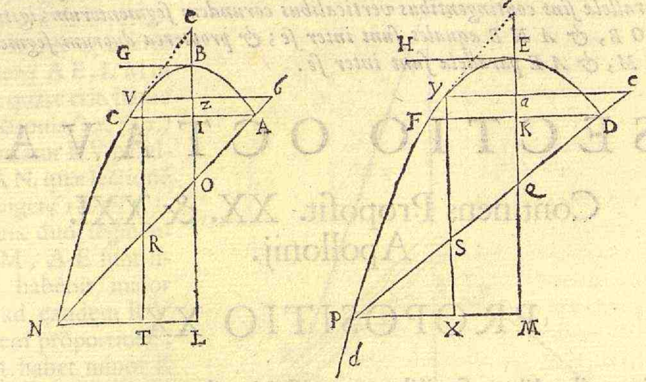
PROPOSITIO XX.

a SI in quibuslibet similibus conisectionibus A B C, & D E F ductæ fuerint ad axes B O, E Q ordinatim applicatæ A C, D F, N L, P M, quarum illæ, quæ ad easdem partes verticum B, & E ducuntur efficiant abscissas erectis proportionales, scilicet I B ad B G sit, vt K E ad E H, nec non L B ad B G, vt M E ad E H: Dico segmenta facta ab ordinatis similiter positis esse inter se similia, ac similiter posita, scilicet N A ipsi P D, atque A B ipsi D E, nec non N B ipsi P E.



b Sintque primò sectiones parabolæ; & educamus N A ad B L in O, & P D ad M E in Q. Et quia G B ad B I est, vt H E ad E K, & B L ad B G est vt M E ad E H; ergo L B ad B I, nempe L N ad I A potentia (19. ex 1.) nempe L N ad O I eandem proportionem habet, quàm M E 20. lib. 1.

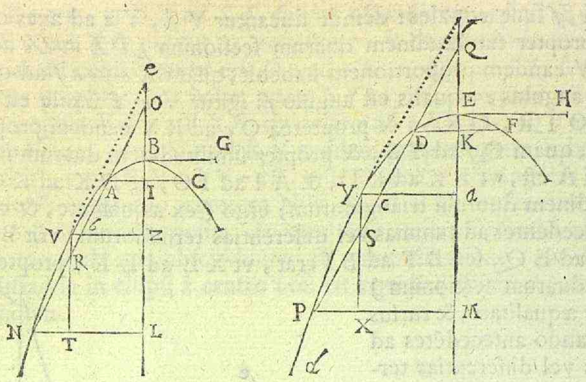
Bb ad E K,



ad E K, nempe P M ad D K potentia, nempe M Q ad Q K, & per conuersionem rationis O L ad L I erit, vt Q M ad M K: estque I L ad L B, vt K M ad M E; ergo O L ad L B est, vt Q M ad M E, & L B ad L N
Defin. 2. est, vt E M ad M P (propter similitudinem duarum sectionum) ergo ex c
æqualitate O L ad L N erit, vt Q M ad M P; suntque M, & L duo anguli recti; ergo N L O simile est P M Q; & per R, S semipartitiones ipsarum N A, D P ducamus ipsas T V, X Y parallelas duobus axibus, & ex duobus punctis V, Y, educamus perpendiculares V Z, Y *a* super duos axes. Et quia N O ad O A est, vt P Q ad Q D comparando antecedẽ- d
tes ad semisses differentiarum terminorum vel ad semisummas eorũ fiet N O ad R O, nempe N L ad L T, quæ est æqualis ipsi V Z, nempe L B ad B Z longitudine (19. ex 1.) vt P Q ad Q S, nempe P M ad X M æ-
20. lib. 1. qualem ipsi Y *a*, nempe longitudine, vt M E ad E *a* (19. ex 1) igitur comparando differentias terminorum ad antecedentes, erit Z L ad L B, vt *a* M ad M E, & L B ad L O est, vt M E ad M Q; ergo ex æqualitate
Ibidem. L Z ad L O, nempe N *b* ad N O est, vt M *a* ad M Q, nempe P *c* ad P Q erat autem prius N R ad N O, vt S P ad P Q, & comparando semisũ- e
mas, vel semidifferentias terminorum ad eorundem differentias O R ad R *b* erit, vt Q S ad S *c*, & R *b* ad R V est, vt S *c* ad S Y; quia duo triangula V R *b*, Y S *c* sunt similia; ergo R O ad R V eandem proportionem habet, quàm Q S ad S Y; sed tangens in V perueniens ad L O f
æqualis est O R, cui parallela est; quia cadit inter duas lineas parallelas; & similiter tangens in Y parallela est S Q, & ei æqualis; ergo V R abscissa ad tangentem est, vt abscissa S Y ad eius tangentem, & angulus Q æqualis est angulo O; igitur duo segmenta N V A, P Y D sunt similia (16. ex 6.) & pariter duo segmenta A B C, D E F, atque duo segmen- g
ta N B, P E sunt similia inter se, & similiter posita.

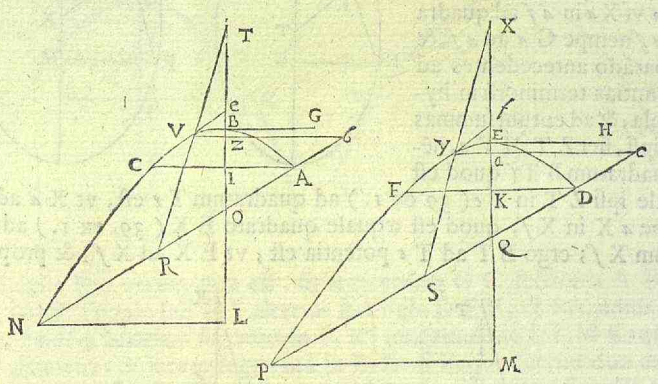
Deinde ponamus aliud segmentum P *d*. Dico non esse simile alicui h
prædictorum segmentorum, quia non abscinduntur à duabus ordinationibus vnius axis (18. ex 6.). Et hoc erat ostendendum.

PROP.



PROPOSITIO XXI.

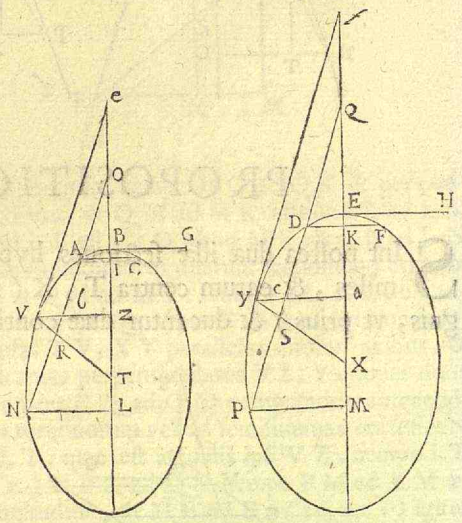
SInt postea duæ illæ sectiones hyperbolicæ, & ellipticæ similes, & earum centra T, X (remanentibus lineis, & signis, vt prius) & ducantur duæ contingentes V *e*, & Y *f*.



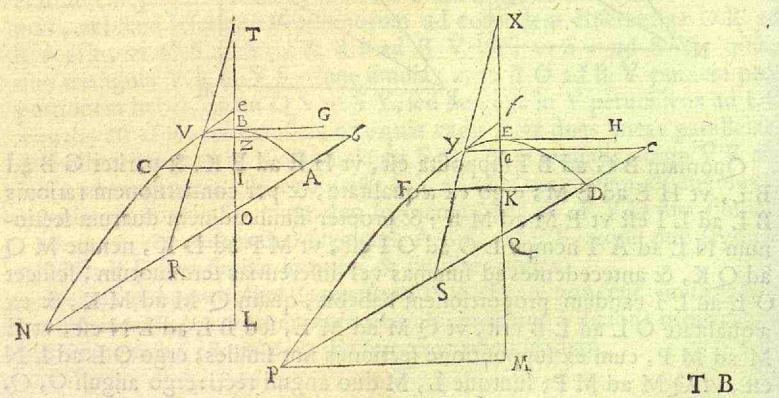
a Quoniam B G ad B I supposita est, vt H E ad E K, & pariter G B ad B L, vt H E ad E M; ergo ex æqualitate, & per conuersionem rationis
b B L ad L I est vt E M ad M K; & propter similitudinem duarum sectionum N L ad A I nempe L O ad O I est, vt M P ad D K, nempe M Q ad Q K, & antecedentes ad summas vel differentias terminorum, scilicet Lem. 1. lib. 5.
c O L ad L I eandem proportionem habebit, quàm Q M ad M K, & ex æqualitate O L ad L B erit, vt Q M ad M E, sed B L ad L N est, vt E M ad M P, cum ex suppositione sectiones sint similes; ergo O L ad L N est, vt Q M ad M P; suntque L, M duo anguli recti; ergo anguli O, Q

Bb 2 nempe

nempe *e*, *f* ſunt æquales: deinde ducantur V Z, Y *a* ad axes ordinatæ ; d
ergo (propter ſimilitudinem duarum ſectionum) T Z in Z *e* ad quadratum Z V eandem proportionem habebit, quàm X *a* in *a f* ad quadratum
Propoſ. 6. *a* Y, & angulus *e* æqualis eſt angulo *f*; igitur V *e* T ſimile eſt Y *f* X, &
premiſſ. pariter O T R, Q X S ; & propterea O *e* ad R V eandem proportionem habebit, quàm Q *f* ad Y S, & propter ſimilitudinem duarum ſectionum B I ad I A eſt, vt E K ad K D, & A I ad I O, vt D K ad K Q propter
Lem. 1. ſimilitudinem duorum triangulorum; ergo (ex æqualitate, & comparan-
lib. 5. do antecedentes ad ſummas vel differentias terminorum) erit B I ad B O, e
vt E K ad E Q, ſed B T ad B I erat, vt X E ad E K (propter ſimilitudinem duarum ſectionum) ergo ex æqualitate, & rurſus comparando antecedẽtes ad
Ibidem. ſummas vel differentias terminorum B T ad T O erit, vt X E ad X Q, cumque T
37. lib. 1. Z in Z *e* ad quadratum V Z ſit vt X *a* in *a f* ad quadratum *a* Y (39. ex 1.) & quadratum V Z ad quadratum Z *e* eſt, vt quadratum *a* Y ad quadratũ *a f* erit T Z in Z *e*, ad quadratũ Z *e*, nempe T Z ad Z *e* vt X *a* in *a f* ad quadratum *a f* nempe G *a* ad *a f*, & comparãdo antecedentes ad differnntias terminorũ in hyperbola, & ad eorum ſummas in ellipſi, fiet Z T ad T *e*, nẽpe quadratum B T (quod eſt f



37. lib. 1. æquale ipſi Z T in T *e* (39 ex 1.) ad quadratnm T *e* eſt, vt X *a* ad X *f*, nempe *a* X in X *f*, quod eſt æquale quadrato E X (39. ex 1.) ad qua-
Ibidem. dratum X *f*; ergo B T ad T *e* potentia eſt, vt E X ad X *f*; & propterea

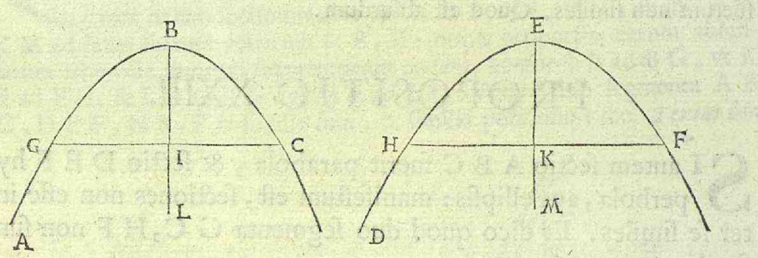


T B

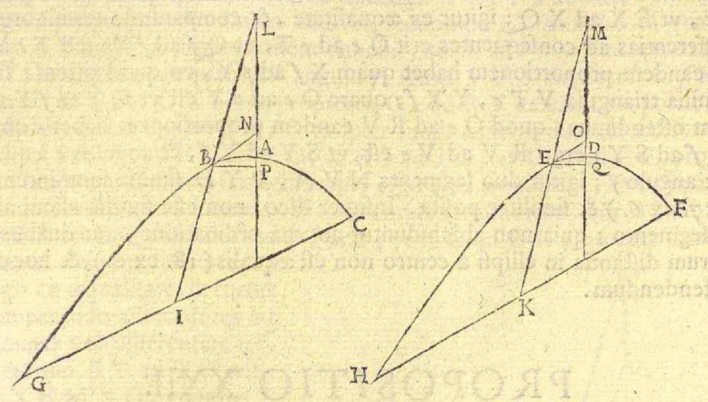
T B ad T *e* erit, vt E X ad X *f*; & iam oſtendimus, quod B T ad T O eſt, vt E X ad X Q; igitur ex æqualitate, & comparando terminorum differentias ad conſequentes erit O *e* ad *e* T, vt Q *f* ad *f* X; ſed T *e* ad *e* Lem. 1.
V eandem proportionem habet quàm X *f* ad *f* Y, eo quod oſtenſa ſunt lib. 5.
ſimilia triangula V T *e*, Y X *f*; quare O *e* ad *e* V eſt vt Q *f* ad *f* Y ; & iam oſtendimus, quod O *e* ad R V eandem proportionem habet, quàm Q *f* ad S Y ; ergo R V ad V *e* eſt, vt S Y ad Y *f*, & angulus *e* æqualis eſt angulo *f*; igitur duo ſegmenta N V A, P Y D ſimilia ſunt inter ſe (17. ex 6.) & ſimiliter poſita. Inſuper dico, non eſſe ſimilia alicui alteri ſegmento ; quia non abſcinduntur ab vna ordinatione, aut duabus, & earum diſtantia in ellipſi à centro non eſt æqualis (18. ex 6.), & hoc erat oſtendendum.

PROPOSITIO XXII.

SEctionum non ſimilium A B C, D E F vnum ſegmentum vnius non eſt ſimile alicui ſegmento alterius.



Si enim hoc verum non eſt, ſit ſegmentum G C ſectionis A B C (ſi fieri poteſt) ſimile ipſi H F alterius ſectionis D E F, & iungamus G C,
H F, eaſdẽq; bifariam ſecemus in I, K; iungamuſque L I, M K; quæ ſint 44. lib. 2.
duæ diametri, & ſecent ſegmenta in B, E: ſi itaque fuerint duo axes, cũ
duo ſegmenta ſint ſimilia, vtique egrederentur in eorum ſingulis ordina- Defin. 7.
tiones ad duos axes, numero æquales, continentes cum axibus angulos huius.
rectos, & proportiones ordinationum ad ſua abſciſſa in qualibet earum
a eſſent eædem, ac abſciſſæ ad abſciſſas proportionales quoque eſſent. Et Defin. 2.
propterea duæ ſectiones A B C, D E F ſimiles erunt, ſed iam ſuppoſitæ huius.
fuerunt non ſimiles ; quod eſt abſurdum. Si verò I L, M K non fuerint axes, educamus ex B, E ad duos axes L P, M Q duas perpendiculares
b B P, E Q, & duas tangentes B N, & E O: itaque (propter ſimilitudinẽ duorum ſegmentorum) ſimilia erunt B N L, E O M ; & pariter L B P, M E Q; atque quadratum B P ad L B in P N, nempe in eadem proportione



37.lib. 1. tione figuræ diametri A L (40. ex 1.) erit vt quadratum E Q ad M Q
Ibidem. in O Q, nempe in eadem proportione figuræ diametri D M (40. ex 1.) quapropter duæ proportiones figurarum earundem sectionum sunt eædem inter se; & propterea duæ sectiones sunt similes (12. ex 6.) at suppositæ fuerunt non similes. Quod est absurdum.

PROPOSITIO XXIII.

13. huius. SI autem sectio A B C fuerit parabola, & sectio D E F hyperbola, aut ellipsis: manifestum est, sectiones non esse inter se similes. Et dico quod duo segmenta G C, H F non sunt similia.

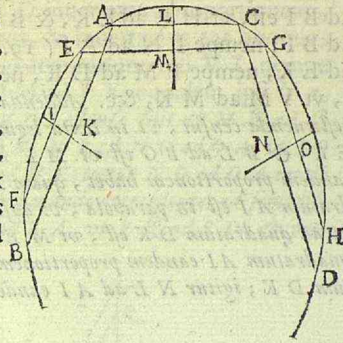
Si enim similia essent haberent conditiones similitudinis, quod est impossibile, quemadmodum ostensum est in omnibus sectionibus ad propositionem 13. si vero vna earum fuerit hyperbole, altera verò ellipsis, idipsum ostensum est ad propositionem 14. Et hoc erat propositum. a

PROPOSITIO XXIV.

CVIuslibet conisectionis A C D portio B A C D non erit arcus circuli.

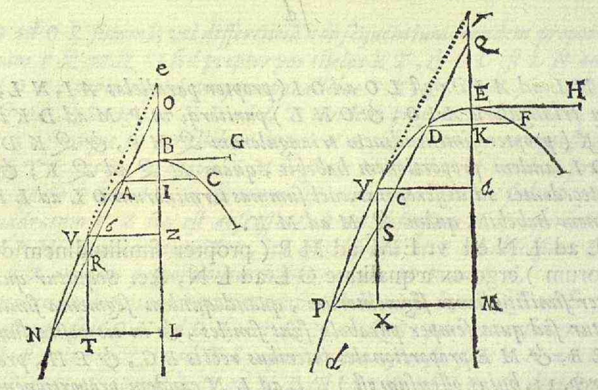
Si enim hoc verum non est educamus in illa chordas A B, C D, A C, quarum nulla alteri sit parallela: & educamus E F parallelam A B, & E G parallelam A C, atque G H parallelam C D, & per singularum duarum æquidistantium semipartitiones iungamus K I, L M, N O, quæ quidem

dem lineæ perpendiculares sunt ad prædictas chordas, suntque etiam diametri sectionis, ergo I K, L M, N O sunt axes, nec sibi in directum coincidunt; quia chordæ primo eductæ inter se parallelæ non erant: hoc autem est absurdum, quia in qualibet sectione reperiri non possunt plures, quàm duo axes (52. ex 2.); ergo fieri non potest, vt sectionis conicæ portio sit arcus circuli. Quod erat ostendendum. 48.lib. 2.



Notæ in Proposit. XX.

a QVodlibet duorum segmentorum, vt A B C, D E F in duobus segmentis similibus, vt N A C, P D F abscissa sint ab ordinatis duorum axium sectionum, vt A C, D F, N L, P M, A M, A S, K M ad latus suarum verticum vt B, E; sitque proportio earum abscissarum ad erecta duorum segmentorum eadem, nempe I B ad B G, vt K E ad E H, & L B ad B G, vt M E ad E H: vtique duo segmenta A B C, D E F, N B, P E similia sunt, & similia positione: &c. *Textus hic*

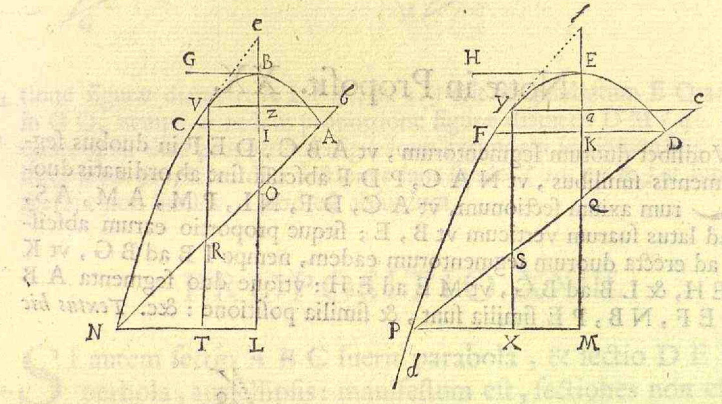


adeo corruptus est, vt ne Apollonius quidem, si reuiuisceret, sensum ex verbis tam inconcinnis, & non coherentibus elicere posset. Itaque diuinando eam esse veram lectionem censeo; quàm in textu apposui.

Educa-

Educamus itaque N A ad O ex B L, & P D ad Q ex M E, quia B G ad B I est, vt H E ad E K, & B G ad B L est vt H E ad E M; ergo L B ad B I, nempe L N ad A I (19. ex 1. (nempe L O ad O I est vt M E ad E K, nempe P M ad D K, nempe M Q ad Q K; & contra O L ad L I, vt V M ad M K, &c. *Addenda non nulla verba, quæ deficiunt, & reliqua restituenda censui, vt in textu leguntur. Quoniam B G ad B I est vt H E ad E K, & B L ad B G est vt M E ad E H; ergo, ex æqualitate, L B ad B I eandem proportionem habet, quàm M E ad E K, sed quadratum N L ad qua-* b

20. lib. 1. *dratum A I est in parabola, vt abscissa L B ad B I; pariterque quadratum P M ad quadratum D K est, vt M E ad E K: & propterea quadratum N L ad quadratum A I eandem proportionem habebit quàm quadratum P M ad quadratum D K; igitur N L ad A I eandem proportionem habebit, quàm P M ad D*



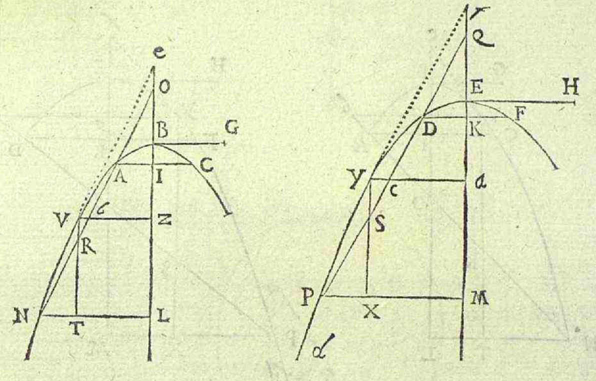
K; sed vt N L ad A I ita est L O ad O I (propter parallelas A I, N L, & similitudinem triangulorũ A I O, & O N L) pariterq; vt P M ad D K ita est M Q ad Q K (propter similitudinem triangulorum Q M P, & Q K D) igitur L O ad O I eandem proportionem habebit, quàm M Q ad Q K; & comparando antecedentes ad differentias, vel summas terminorum O L ad L I eandem proportionem habebit, quàm Q M ad M K.

Et B L ad L N est vt E M ad M P (propter similitudinem duorum segmentorum) ergo ex æqualitate O L ad L N, &c. *Sequitur quidem hoc non propter similitudinem segmentorum, quandoquidem segmenta similia non supponuntur sed quia semper parabolæ sunt similes, & in eis positæ sunt axium* c

11. huius. *abscissæ L B, & M E proportionales lateribus rectis B G, & E H, propterea (vt in prop. 11. huius ostensum est) B L ad L N eandem proportionem habebit quàm E M ad M P; sed prius L B ad B I erat vt M E ad E K, ergo comparãdo differentias terminorum ad antecedentes erit I L ad L B vt K M ad M E, estq; ostensa O L ad L I vt Q M ad M K, ergo ex æquali ordinata O L ad L B erit vt Q M ad M E.*

Et

d Et quia N O ad O A est vt P Q ad Q D inuertamus proportionem, deinde bifariam secemus duas tertias partes, & inuertamus eas quoque fiet N O ad O R, nempe N L ad L T in eadem ratione ipsi V Z, nempe L B ad B Z, vt D Q ad Q T, nempe P M ad P X æqualem ipsi Y *a*, nempe M E ad E *a*, &c. *Quoniam L O ad O I ostensa fuit vt M Q ad Q K, & propter parallelas I A, L N, nec non D K, M P est N O ad O A, vt L O ad O I; pariterq; P Q ad Q D est vt M Q ad Q K; igitur N O ad O A eandẽ proportionẽ habet, quàm P Q ad Q D, & comparando antecedentes ad semidifferentias, vel semisũmas terminorũ erit N O ad R A, vt P Q ad S D: & pro-*



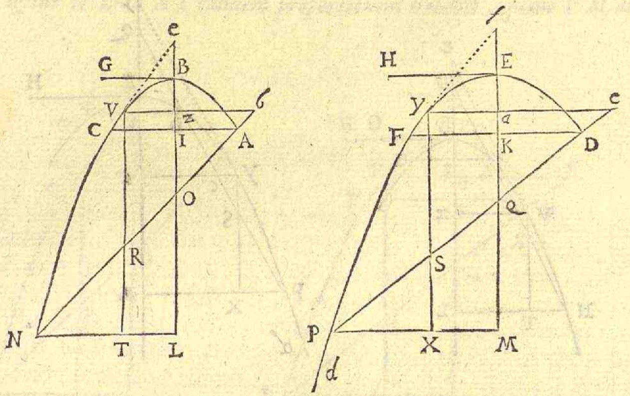
pterea N O ad O R summã, vel differentiã consequentium eandem proportionem habebit, quàm P Q ad Q S; sed propter parallelas R T, & O L est L N ad T L, vt N O ad O R: pariterque (propter parallelas S X, & Q M) est P M ad X M, vt P Q ad Q S; igitur N L ad L T eandem proportionem habet, quàm P M ad M X: suntque in parallelogrammis V L, & Y M latera opposita æqualia V Z ipsi T L, atque a Y ipsi X M; igitur N L ad V Z eandem proportionem habet, quàm P M ad Y a, *& ita erunt earum quadrata; sed vt quadratũ* 20. lib. 1.
N L ad quadratum V Z ita est abscissa L B ad abscissam B Z, pariterque vt quadratum P M ad quadratum Y a, *ita est abscissa M E ad abscissam E* a; *ergo L B ad B Z eandem proportionem habet, quàm M E ad E* a.

e Et occurrere faciamus par pari remanet O R ad R *b*, vt Q S ad S *c*, &c. *Quoniam ostensa fuit O N ad O R, vt Q P ad Q S, per conuersionem rationis O N ad N R erit vt Q P ad P S; pariterque ostensa fuit* b *N ad N O, vt* c *P ad P Q; ergo ex æquali* b *N ad N R est vt* c *P ad S P, & diuidendo* b *R ad R N erit vt* c *S ad S P; sed erat inuertendo R N ad N O, vt S P ad P Q; quare comparando antecedentes ad differentias terminorum erit N R ad R O vt P S ad S Q; ideoq; rursus ex æqualitate* b *R ad R O erit vt* c *S ad S Q; estq; V R ad R* b *vt Y S ad S* c *(eo quod triangula V R* b, *& Y S* c *sunt similia triangulis similibus O N L, & Q M P propter æquidistantes) ergo ex æquali ordinata V R ad R O eandem proportionem habet, quàm Y S ad S Q.*

Sed

f Sed tangens in V perueniens ad L O, &c. *Si enim ex punctis Y, V ducantur V* e, *& Y* f *tangentes parabolas, & producantur quousque secent axes in* e, *&* f *efficientur duo parallelogramma V* e *O R, & Y* f *Q S, in quibus tãgentes V* e, *& Y* f *efficientur æquales ipsis O R, & Q S: & propterea inuertendo R V abscissa ad contingentem V* e *æqualem ipsi R O eandem proportionem habebit, quàm abscissa S Y ad contingentem Y* f *æqualem ipsi S Q, atque efficiunt prædictæ contingentes cum axibus angulos* e, f *æquales ipsis O, & Q æqualibus propter parallelas; igitur segmenta N V A, & P Y D similia sunt inter se.*

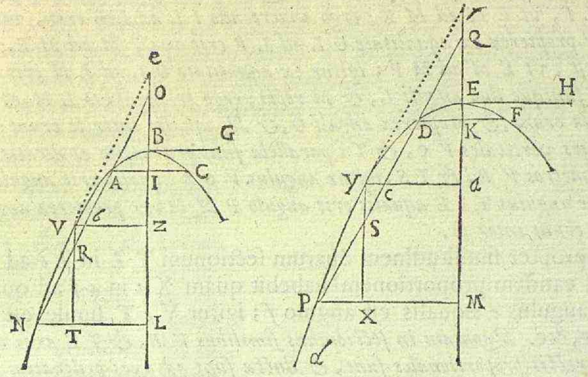
Prop. 16. huius.



g Et pariter duo segmenta A B C, D E F, atque duo segmenta N B, P E sunt similia inter se, & similiter posita, &c. *Hoc manifestum est, si enim coniungantur rectæ lineæ N C, & P F, & bifariam diuidantur, atque ducantur diametri, &c, vti fecimus in sectione N A, ostendetur similiter (ex eadem 16. propositione) segmenta N C, P F similia esse inter se. Non secus si coniungantur rectæ lineæ N B, & P E, & bifariam diuidantur, atque ducantur diametri, & reliqua perficiantur, vt prius, ostendentur eodem modo, segmẽta N B, & P E similia inter se.*

h Deinde ponamus segmentũ P *d*; quia non abscindunt illa duæ ordinationes vnius axis (18. ex 6.), & hoc erat, &c. *Sed legendum puto vt in textu apparet. & horum verborũ sensus erit; fieri non potest, vt segmentũ P* d *sit simile ipsi N A, vel N B, propterea quod in sectione P F segmenta P* d *vni tantummodo portioni simile est (præter quàm in ellipsi), & ambo intercipi debent à duabus ordinatim applicatis ad axim E Q: & propterea segmenta P D, vel P E non erunt similia ipsi P* d, *& quia N A ostensum est simile P D, pariterque N B ostensum est simile P E; igitur segmentum P* d *simile non est, neque N A, neque segmento N B; quod erat ostendundum.*

NOTE



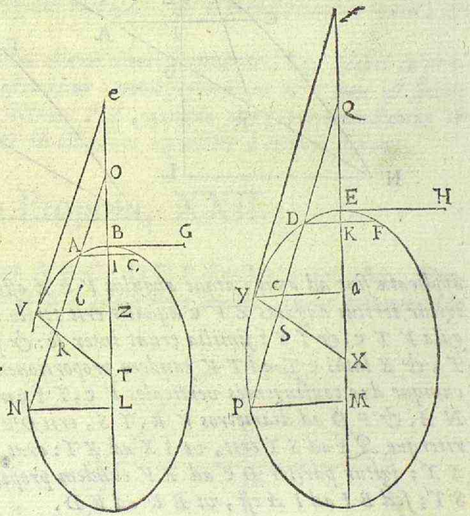
Notæ in Proposit. XXI.

a QVoniam G B ad B I, supposita est vt H E ad E K, &c. *Quia L B ad B G ex hypothesi erat, vt M E ad E H, & inuertendo G B ad B I erat vt H E ad E K; ergo ex æqualitate L B ad B I erit vt M E ad E K; & per conuersionem rationis B L ad L I erit vt E M ad M K.*

b Et propter similitudinem duarum sectionum N L ad A I, nempe L O ad O I est, vt P M ad F K, nempe M Q ad Q K, &c. *Quoniam duæ sectiones N B, & P E similes suppositæ sunt, & axiũ abscissæ L B, M E, nec non I B, K E ad latera recta B G, & H E proportionales sunt; igitur N L ad A I eandem proportionem habebit, quàm P M ad D K: & quia triangula N L O, & A I O similia sunt propter parallelas N L, & I A, pariterque triangula P M Q, & D K Q similia sunt; igitur L O ad O I erit vt N L ad I A; pariterque M Q ad Q K erit vt P M ad D K, seu vt N L ad A I: & propterea L O ad O I erit vt M Q ad Q K.*

ex 12. huius.

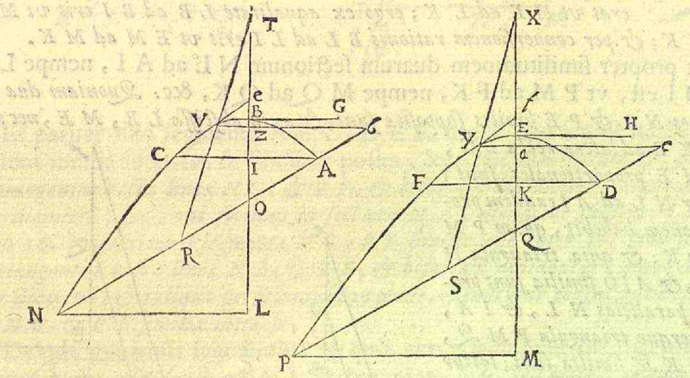
c Et ex æqualitate L O ad L B erit vt Q M ad M E, sed L B ad L N est vt M E ad M P, cum ex suppositione sectiones sint similes, &c.



Quo-

Quoniam O L ad L I ostensa fuit, vt Q M ad M K; atque prius ostensa fuit B L ad L I, vt E M ad M K; ergo inuertendo I L ad L B erit, vt K M ad M E; & propterea ex æqualitate O L ad L B erit vt Q M ad M E; sed B L
ex 12. huius. *ad L N est, vt E M ad M P; igitur ex æqualitate O L ad L N erit vt Q M ad M P; suntque duo anguli L, & M recti; ergo triangula O L N, & Q M P æquiangula erunt; & propterea anguli O, & Q æquales inter se erunt; sed quia contingentes verticales V e, & Y f parallelæ sunt ordinatim applicatis N A, P D ad diametros V R, & Y S; igitur angulus V e B æqualis erit angulo N O L; pariterque angulus Y f E æqualis erit angulo P Q M; & propterea anguli e, & f æquales erunt inter se.*

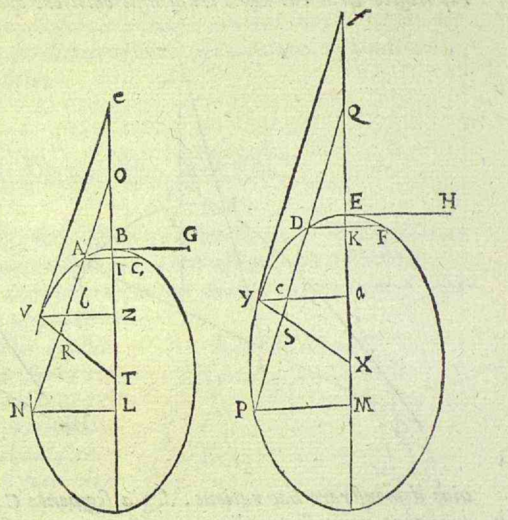
Ergo propter similitudinem duarum sectionum T Z in Z *e* ad quadratum Z V eandem proportionem habebit quàm X *a* in *a f* ad quadratum *a* Y, & angulus *e* æqualis est angulo *f*; igitur V *e* T simile est Y *f* X, d
12. huius. & pariter, &c. *Quoniam in sectionibus similibus V B, & Y E axes transuersi lateribus rectis proportionales sunt, & ductæ sunt ad axes ordinatim applicatæ*
37. lib. 1. *V Z, Y a, & contingentes V e, Y f, estque rectangulum T Z e ad quadratum Z V, vt latus transuersum ad rectum, pariterque rectangulum X a f ad quadratum a Y, vt axis transuersus ad erectum; igitur rectangulū T Z e ad quadratum Z V eandem proportionem habet, quàm rectangulum X a f ad quadratum a Y, & à verticibus V, Y duorum triangulorum V e T, & Y f X ductæ sunt ad bases rectæ lineæ V Z, Y a efficientes angulos rectos, cum ordinatim*



applicatæ sint ad axes; atque angulus V e Z ostensus est æqualis angulo Y f a,
Propos. 6. præmiss. *igitur tertius angulus Z V e æqualis erit tertio angulo a Y f; & ideo duo triãgula V T e, & Y X f similia erunt inter se: & propterea circa angulos æquales T, & X latus e T ad T V eandem proportionem habebit, quàm f X ad X Y: cumque duæ contingentes verticales V e, Y f parallelæ sint ordinatim applicatis N A, & P D ad diametros V R, Y S, erit O e ad R V, vt e T ad T V; pariterque Q f ad S Y erit, vt f X ad X Y: erat autem e T ad T V, vt f X ad*
12. huius. *X Y; igitur pariter O e ad R V eandem proportionem habebit, quàm Q f ad S Y; sed B I ad I A est, vt E K ad K D.*

Sed

e Sed B T ad B I erat vt X E ad E K propter similitudinem duarum sectionum, &c. *Quoniam ex hypothesi abscissa axis I B ad latus rectum B G erat vt abscissa K E ad latus rectum E H; & propter similitudinem sectionum* 12. huius. *latera erecta G B, & H E ad axes transuersos, & ideo ad eorum semisses T B & E X eandem proportionem habebunt; ergo ex æquali I B ad B T erit vt K E ad E X, & inuertendo T B ad B I erit vt X E ad E K. Sed libet aliam expositionem afferre Apollonij principijs cõuenientiorē. Quia ex definitione 2. huius libri legitime interpretata, & sicuti cõstat ex 12. prop. huius. In sectionibus similibus non qualibet axium abscissæ ad conterminas potentiales habent eandem rationem; sed illæ tantummodo, quæ figuræ lateribus proportionales sunt: itaq; in sectionibus similibus A B, D E vt qualibet axium, abscissæ B I, E K ad conterminas potentiales I A, K D sint proportionales, necesse est, vt eædem I B, & E K lateribus figurarum B T, E X proportionales sint.*

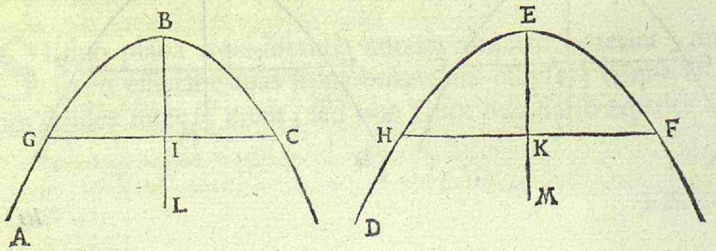


f Et quadratum V Z ad quadratum Z *e* est, vt quadratum *a* Y ad quadratum *a f*, &c. *Ostensa enim fuerunt duo triangula V Z e, & Y a f similia inter se; & ideo latera circa angulos rectos Z, & a proportionalia erunt; & pariter eorum quadrata.*

g Insuper dico non esse similia alicui alteri segmento, &c. *Sicuti in præcedenti propositione factum est ostendetur, quod segmentum N C non est simile alicui alio segmento in altera sectione P E, quando non comprehenduntur ab ordinatim ad axes applicatis, & in ellipsibus æqualiter à centris distant.*

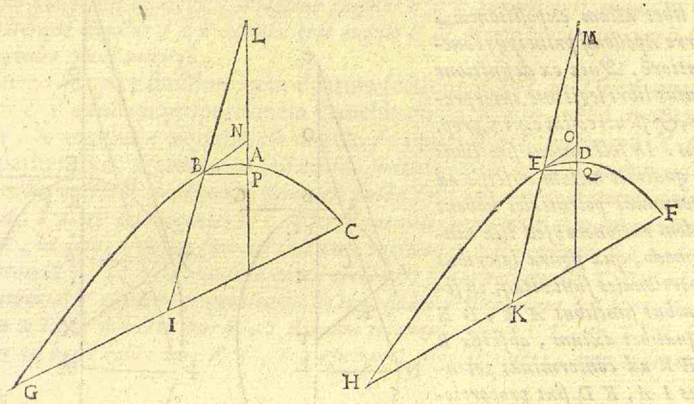
Notæ in Proposit. XXII.

ET propterea duo sectiones A B C, D E F similes erunt, &c. *Quoniam segmenta G B C, & H E F posita sunt similia, erunt diametrorum* Lem. 8. huius.



ex 11. 12. huius. *ſeu axium (in hoc caſu) L B, & M E ſiguræ ſimiles inter ſe; & ideò ſectiones A B C, & D E F ſimiles erunt.*

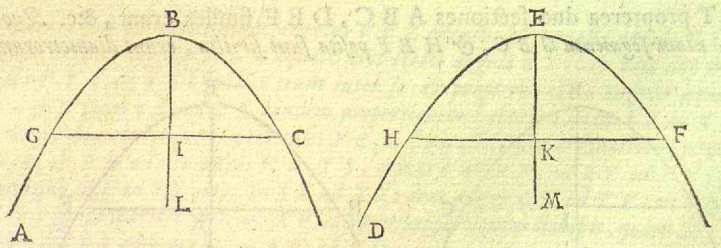
Itaque propter ſimilitudinem duorum ſegmẽtorum ſimlia erunt B N L, E O M, & pariter L B P, & M E Q atque quadratum B P ad L P in P N nempe, &c. *Huius ſecundæ partis demonſtrationem, quàm non ſinceram Paraphraſtes Arabicus nobis tranſmiſit omittere opere pretium erit, eandemq; bre-* b



uius demonſtrare hac ratione. Quia ſegmenta C B G, & F E H ſimilia ponun-
Lem. 8. huius. *tur; ergo erunt figuræ diametrorum B I, E K ſimiles inter ſe in angulis I, K æqualibus, & ſectiones ipſæ C B G, & F E H ſimiles inter ſe erunt; quod eſt*
Prop. 15. huius. *contra hypotheſin.*

Notæ in Propoſit. XXIII.

SI enim ſimilia eſſent haberent conditiones ſimilitudinis, quod eſt impoſſibile, &c. *Si enim concedantur ſegmenta G B C in parabola, & H E* a
Defin. 7. huius. *F in hyperbole, vel ellipſi, ſimilia inter ſe; igitur in vnaquaque earũ duci poſſent ad diametros ordinatim applicatæ numero æquales, efficientes angulos æqua-*



les

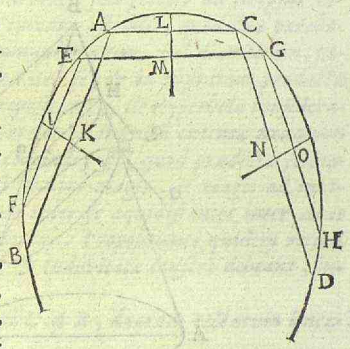
les cum diametris, quæ abſciſſis ſint proportionales, & abſciſſæ quoque inter ſe. Vnde ſequitur, quod portiones eiuſdem diametri E K à centro M ad omnes ordinatim ad diametros applicatas ſint æquales inter ſe, vt oſtenſum eſt in propoſitione 13. huius: quod eſt impoſſibile.

Quando verò ſectio A C eſt hyperbole, ac ſectio D F eſt ellipſis, ſimiliter, vt in 14. propoſitione huius, oſtendetur; quo abſciſſæ in hyperbola, & ellipſi ſint proportionales; & propterea omnes habebunt rationes maioris inæqualitatis, aut omnes habebunt, proportiones inæqualitatis minoris, quod tamen in prædicta 14. propoſitione impoſſibile eſſe oſtenditur.

Notæ in Propoſit. XXIV.

a SI enim hoc verum non eſt, &c. *Quod quælibet portio B A D ſectionis conicæ A B G nullo pacto circumferentia circuli eſſe poſſit ſic oſtendetur.*

Quia in circulo rectæ lineæ diuidentes bifariam duas parallelas inter ſe ſunt neceſſariò diametri circuli, qui perpendiculariter ſecant prædictas parallelas applicatas; igitur ſi curua linea B G D fuerit circuli peripheria rectæ lineæ K I, L M, & N O diametri circuli, erunt perpendiculares ad ordinatim applicatas æquidiſtantes inter ſe; ſed quia etiam A B G ſupponitur ſectio conica, erunt K I, L M, N O axes prædictæ ſectionis conicæ eo quod bifariam, & ad angulos rectos diuidunt ordinatim applicatas. Rurſus quia prædictæ ordinatim applicatæ non ſunt omnes inter ſe parallelæ, eo quod ex constructione applicatæ A B, A C, C D non fuerunt ductæ æquidiſtantes; igitur tres axes I K, L M, N O indirectum non coincidunt; quare in ſectione conica B A G reperiri poſſent tres axes; quod eſt impoſſibile. 48. lib. 2.



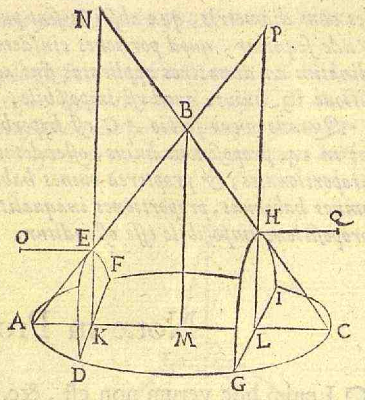
SECTIO NONA

Continens Propoſit. XXV.

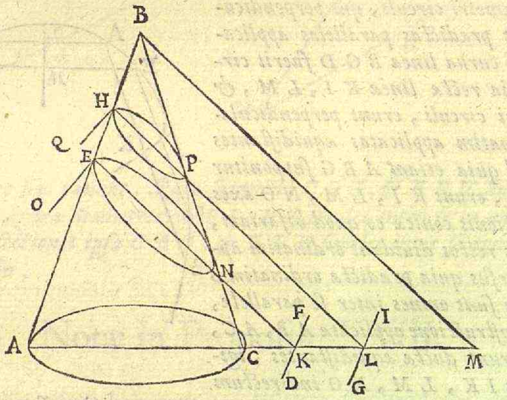
b SI duo plana æquidiſtantia conum aliquem ſecuerint, atque in eo efficiant duas hyperbolas, aut ellipſes; vtique ſectiones ſimiles inter ſe erunt, ſed non erunt neceſſariò æquales.

Efficiant

Efficiant duo plana parallela D E N F, G H P I in basim coni A C duas rectas lineas D F, G I, & planum per axim coni ductum efficiat triangulum A B C perpendiculare ad duo illa plana parallela; quæ ab illo secentur in E K, H L. Erunt D F, I G perpendiculares ad A C, & educamus B M parallelam ipsis E K, H L; & vt quadratum B M ad A M in M C; ita ponatur N E ad E O, & ita P H fiat ad H Q, erunt 12. 13. lib. 1. N E, P H inclinata duarũ sectionũ F E D, I H G, aut eorum transuersæ; igitur O E, H Q erunt eorum b



12. huius. erecta, & propterea figuræ duarum sectionũ sunt similes; igitur duæ sectio-



2. & 10. huius. nes similes sunt. Et si quidem fuerint N E, P H æquales; ipsæ quoque æquales erunt, alias non; Et hoc erat propositum.

Notæ in Proposit. XXV.

SI abscindant conum aliquem duo plana parallela prouenient duæ sectiones hyperbolicæ, vel quia duæ sectiones sunt similes, &c. *Quæ, immutanda censui vt in textu videre est.* a

Sint abscissiones duorum planorum æquidistantium cum basi I G, F D, & secet conum planum transiens per eius axim, &c. *Addidi verba, quæ in textu desiderantur, quæ expositionem perficiunt. Animaduertendum est, hanc propositionem conuertibilem non esse; licet enim plana parallela in eodem cono efficiant sectiones similes, verum non est, quod quotiescunque in eodem cono duæ* b

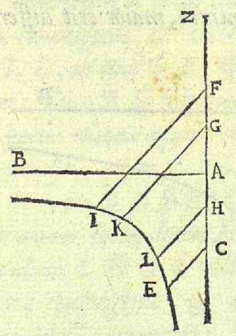
sectionee

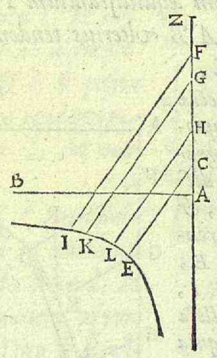
sectiones sunt æquales, vel similes inter se, tunc quidem earum plana sunt æquidistantia: Sicuti enim in eodem cono scaleno designari possunt circuli æquales subcontrariè positi, sic etiam reliquæ conisectiones subcontrariè constitutæ effici possunt æquales, & similes inter se: hæc autem, sicuti etiam quamplurima videri possunt in libris neotericorum.

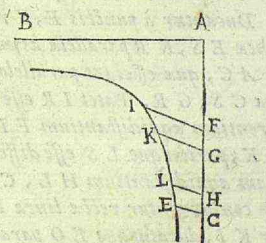
Sed non alienum erit à nostro instituto hic paucis considerare passiones, & descriptiones sectionum conicarum similium, vel æqualium, quæ æquidistantes, seu asymptoticæ vocantur. Et licet hæ ab alijs inuentæ, & traditæ sint, non nulla tamen noua in medium afferam: non enim rerum nouitas ex subiecti nouitate tantummodò arguitur, imo de subiecto antiquo possunt nouæ speculationes afferri, atque corrigi, & cõpleri ea, quæ apicem perfectionis non attingunt, & hæc quidem omnia noua dici poterunt, & possunt, & debent zelo veritatis euulgari, nec propterea prædecessorum nominibus, ant inuentionibus iniuria infertur.

Primus itaque omnium (quod sciam) Pappus Alexandrinus libro septimo collectionum Mathematicarum propositione 208. lemmate sexto in quintum librum Apollonij, considerauit concentricas hyperbolas inter se similes, eundẽ axim habentes, ad easdem partes cauas inter se se non concurrere, sed semper ad se ipsas vicinius accedere. Postea Gregorius à Santo Vincentio ostendit, quod duæ parabolæ inter se æquales, similiter positæ circa communem axim, vel diametrum, pariter nunquàm conueniunt, & parallelæ sunt inter se, & in infinitum productæ semper magis ad inuicem accedunt; atque proposit. 139. de Hyperbola considerauit duas hyperbolas æquales, & similes, quæ pariter in infinitũ extensæ nunquàm conueniunt, & simul cum Pappo putat, rite concludi posse, quod prædictæ sectiones, in infinitum extensæ, sint asymptoti, & semper magis, ac magis ad inuicem appropinquentur ex eo, quod rectæ lineæ inter se æquidistantes inter duas sectiones interceptæ, successiuè semper diminuantur. Propositiones quidem reconditæ, & scitu iucundæ, sed an æquè certæ, & indubitatæ censeri debeant, inquiremus, aliquibus tamen præmissis. Parab. pr. 344.

In qualibet hyperbola I E, cuius asymptoti C A B, duarum rectarum linea- DEFINITIO Addita.

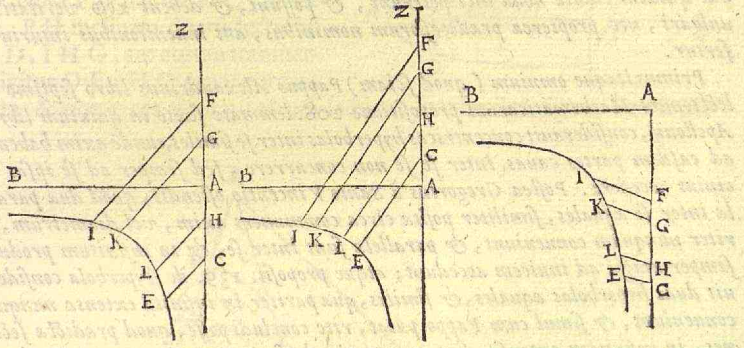






rum F I, G K inter se æquidistantium, ab vna asymptoto A C ad hyperbolen eductarum, sit F I propinquior centro, quàm G K, quando ambo cadunt infra centrum A ad partes C; vel F I magis à centro recedat, quando ambo cadunt *vltra centrum in eadem asymptoti productione A Z; aut F I supra, & G K infra centrum A existat: In quolibet casu dicetur, F I vlterius tendere ad partes centri, vel asymptoti A B, quàm G K.*

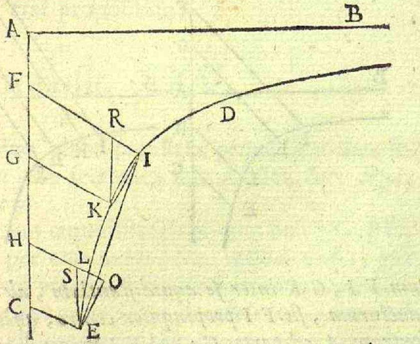
Non secus si ab eadem asymptoto A C educantur quatuor rectæ lineæ inter se æquidistantes F I, G K, H L, C E, quarum duæ priores F I, G K, centro propinquiores sint, quando omnes infra centrum A collocantur; vel magis à centro recedant, quando omnes in productione A Z existunt; aut certe duæ F I, G K supra centrum, & H L, C E infra centrum existant: Tunc similiter in quolibet casu dicentur rectæ lineæ F I, G K vlterius tendere ad partes centri, & asympoti A B, quàm duæ aliæ H L, C E.



PROP. 2. Addit.

Si in vna asymptoto A C, hyperboles D E sumantur duo segmenta æqualia F G, H C, & à punctis diuisionum ducantur quatuor rectæ lineæ F I, G K, H L, C E parallelæ inter se, vsque ad hyperbolen: Dico quod differentia duarum æquidistantium F I, G K ad partes centri, & alterius asymptoti A B vlterius tendentium, maior erit differentia reliquarum H L, C E.

Ducantur à punctis E, K rectæ lineæ E S, K R parallelæ asymptoto A C, quæ efficiant parallelogrāma C S, G R. Patet I R esse differentiam æquidistantium F I, & G K; pariterque L S esse differentiam æquidistantium H L, C E; & coniungantur rectæ lineæ E I, & K I, ducaturque E O parallela I K, secans H L in O. Et quia recta linea E I cadit intra curuam sectionem conicam E K I, & punctum K eiusdem conicæ sectionis



inter

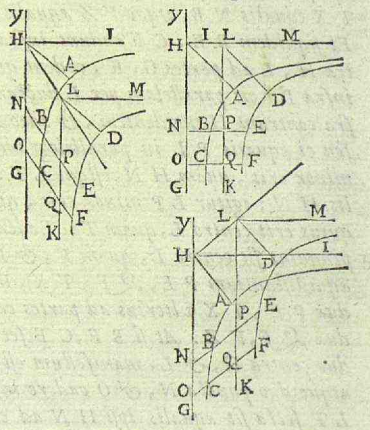
inter E, & I existit; ergo recta linea I K posita intra conicū segmentum E K I supra eius basim E I cadit; & ideo ei parallela E O cadit infra eandem segmenti conici basim E I, & propterea occurret ipsi H L intra conisectionem, & infra punctum L in sectione positum, vt in O; & ideo O S maior erit, quàm S L. Et quoniam S E, & R K sunt inter se parallelæ (quia eidem A C æquidistant) pariterque E O, & K I factæ sunt parallelæ, atque S O, & R I (ex hypothesi) æquidistantes erant; igitur duo triangula E S O, & K R I similia sunt inter se, & eorū latera homologa E S, & K R æqualia sunt inter se (quia in parallelogrāmis C S, & G R latera E S, R K æqualia sunt oppositis C H, G F inter se æqualibus, ex hypothesi) igitur reliqua latera homologa S O, & R I æqualia sunt inter se; & propterea R I differentia æquidistantium F I, G K ad partes centri A, & asymptoti A B vlterius tendentium, maior erit, quàm S L, quæ portio est ipsius S O, & est differentia æquidistantium H L, & C E alterius segmenti H C. Quod erat ostendendum.

Ex constructione, & demonstratione huius propositionis colligitur, quod si à duobus punctis eiusdem asymptoti A C ad hyperbolen ducantur duæ rectæ lineæ inter se parallelæ; illa, quæ ad partes centri A, & asymptoti A B vlterius tendit, maior est reliqua. Nam recta linea K R, asymptoto A C parallela cadit extra sectionem, & ideo secat interceptam parallelam F I, quæ erit maior, quàm F R, seu G K; igitur F I ad partes centri A vlterius tendens maior est qualibet alia parallela G K ad partes oppositas tendente. Eadem ratione F I maior erit quàm H L, & H L maior, quàm C E. Vnde patet propositum. COROLLAR.

Si fuerint duæ hyperbolæ A B, & D E æquales, & similes ad easdem partes cauæ, quarum centra H, & L, & asymptoti G H I, & K L M, nec non axes A H, & D L sint parallelæ inter se, & rectæ lineæ B E, & C F ab hyperbolis interceptæ parallelæ fuerint rectæ H L centra coniungenti; erunt B E, & C F æquales ipsi H L, & inter se. PROP. 3. Addit.

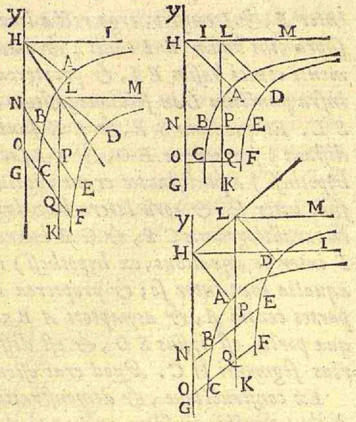
Si autem parallelæ sint alicui rectæ lineæ L f diuidenti angulum K L H contentum à recta linea L H centra coniungente, & interiore asymptoto L K, in qua B E, & C F positæ sunt: Dico B E vlterius tendentem ad partes reliquæ asymptoti L M maiorem esse, quàm C F.

Si vero B E, & C F parallelæ sint alicui rectæ lineæ H g diuidenti angulum L H G à recta linea L H centra coniungente, & eadem asymptoto H G contentum: Dico B E vlterius tendentē ad partes reliquæ asymptoti H I minorem esse, quàm C F.



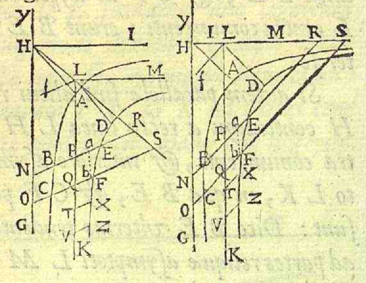
 Rectæ

Rectæ lineæ parallelæ B E, C F secent æquidistantes asymptotos H G, L K in punctis N, O, P, Q. Debent autem conisectiones in eodem plano collocari sicuti aliæ omnes, quæ in sequentibus propositionibus 4. 5. 6. 7. 8. & 9. *vsurpantur semper in vno plano positæ intelligi debent.*



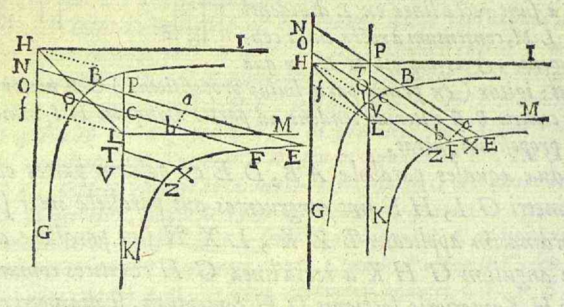
Et primo duæ rectæ B E, C F parallelæ sint rectæ lineæ H L centra coniungenti. Quoniam hyperbolæ A B, D E æquales sunt, & congruentes; atque æquidistantes asymptoti H N, L P æque inclinantur ad æquales semiaxes transuersos H A, & L D; & segmenta asymptotorum H N, L P æqualia sunt in parallelogrammo H P, nec non duo anguli H N B, & L P E æquales sunt inter se, propter parallelas asymptotos: igitur duæ figuræ A H N B A, & D L P E D æquales erunt, & congruentes: quapropter interpositæ rectæ lineæ N B & P E congruẽtes, & æquales erunt; & addita vel ablata communi B P, erit N P æqualis B E: est verò N P æqualis H L, eo quod H P parallelogrammum est; igitur intercepta B E æqualis est rectæ lineæ H L centra coniungenti. Eadem ratione quælibet alia intercepta C F parallela ipsi H L eidem æqualis ostendetur: quapropter duæ interceptæ æquidistantes B E, & C F inter se æquales erunt.

Secundo B E, C F parallelæ sint alicui rectæ lineæ L f diuidenti angulum K L H; ideoque P L f N, & Q L f O parallelogramma erunt: secetur L T æqualis H N, atque L V æqualis H O; ducanturque T X, V Z parallelæ ipsis N B, O C secantes reliquam hyperbolen in X, Z; eritque (vt in prima parte ostensum est) T X æqualis N B, atque V Z æqualis O C. Et siquidem B E, C F cadunt infra centra H, L ad partes G, K, cadent quoque infra L f eis parallelam per L ductam infra centrum H incidentem, & ideo N f, seu ei æqualis P L in parallelogrãmo P f minor erit, quàm H N; estque L T æqualis H N; igitur L P minor erit, quàm L T; & propterea punctum P propinquius erit centro L, quàm T: Eadem ratione ostendetur, quod punctum Q propinquius sit centro L, quàm V, & P propinquius centro quàm Q; ergo quatuor Def. add. *æquidistantium P E, Q F, T X, V Z cadentium infra centrum ad partes K, duæ P E, T X vlterius ad partes centri, vel asymptoti L M tendunt, quàm duæ Q F, V Z. At si B E, C F secent rectã lineam centra coniungentem inter duo centra H, & L, manifestum est puncta P, & Q cadere supra centrum L, atque duo puncta N, & O cadere infra centrum H alterius hyperboles, cumque L T secta sit æqualis ipsi H N ad easdem partes; pariterque L V æqualis ipsi*



H O

H O cadent puncta T, & V infra centrum L; & P vlterius tendit quàm Q ad partes eiusdem centri L. igitur in tali casu quatuor æquidistantium duæ P E, T X vlterius tendent ad partes centri, & asymptoti L M, quàm duæ aliæ æquidistantes Q F, V Z. Quando verò B E, & C F cadunt vltra centra H, & L in productionibus æquidistantium asymptotorum G H, K L: quia N P cadit Def. add.

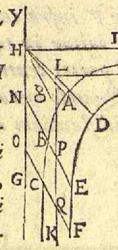


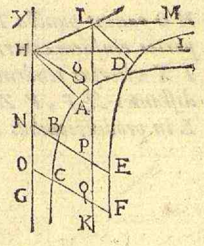
supra, & L f infra centrũ H, ergo in parallelogrammo P f recta N f, seu ei æqualis L P maior erit quàm N H: facta autem fuit L T æqualis H N; igitur L T minor est, quàm L P; Eadem ratione L V minor erit, quàm L Q, atque P vlterius tendit quàm Q ad partes centri L, & ab ijsdem punctis cadentibus supra centrum L in productione asymptoti K L ducuntur quatuor rectæ lineæ inter se æquidistantes vsque ad hyperbolen D Z; igitur duæ P E, T X vl- Ibidem. *terius tendunt ad partes centri, vel asymptoti L M, quàm duæ Q F, V Z. Secetur postea P* a *æqualis N B, atque Q* b *æqualis O C. Et quia T X æqualis ostensa fuit N B erit P* a *æqualis ipsi T X; estque P E maior quàm T X;* Coroll. *propterea quod illa vlterius tendit ad partes cẽtri L, quàm T X; igitur P E ma-* Propos. 2. *ior erit, quàm P* a, *& earum differentia erit E* a. *Simili modo ostendetur Q* addit. b *æqualis V Z, & minor quàm Q F, quarum differentia F* b: *cumque Q P æqualis sit ipsi N O, propterea quod sunt latera opposita eiusdem parallelogrammi; igitur T V, quæ ostensa fuit æqualis O N erit quoque æqualis Q P, & sũpta communiter Q T erit Q V æqualis T P, atque à terminis æqualium segmentorum eiusdem asymptoti L K ducuntur vsque ad hyperbolen E Z quatuor rectæ lineæ inter se æquidistantes, & earum binæ P E, T X vlterius tendunt ad partes centri, & asymptoti L M, quàm binæ Q F, V Z; igitur differentia* Propos. 2. *priorum, scilicet E* a *maior erit posteriorum differentia F* b; *estque B* a *æqua-* addit. *lis N P, propterea quod æqualibus N B, & P* a *ponitur communiter B P; pariterque O Q æqualis est C* b; *suntque N P, & O Q æquales inter se, nempe latera opposita eiusdem parallelogrammi; igitur B* a, *& C* b *æquales sunt inter se: ijs verò adduntur excessus inæquales E* a, *F* b *efficietur E B vlterius tendens ad partes asymptoti H I maior, quàm F C. Quod erat primum.*

Tertio ijsdem positis N E, O F sint parallelæ alicui rectæ lineæ H g *diuidẽti angulum L H G, & propterea extensæ productionem asymptoti M L secabunt,*

&

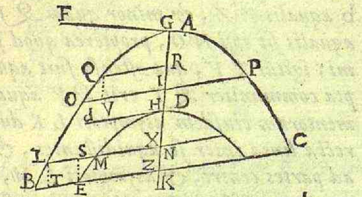
& parallelæ erunt alicui rectæ lineæ ex L Y diuidenti angulum H L M, eo quod parallelæ erāt rectæ H g diuidenti angulum L H G, & prius B E vlterius, quàm C F tendebat ad partes asymptoti H I; ergo è contra C F vlterius tendet ad partes asymptoti H G, & educitur ab asymptoto L M producta, & parallelæ sunt rectæ lineæ ex L diuidenti angulū H L M, contentum à recta linea centra coniungente, & asymptoto M L, in qua

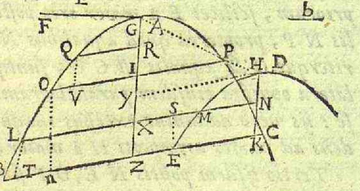




illæ cadunt; igitur (ex prima parte huius propositionis) C F maior erit, quàm B E; & è contra B E vlterius tendens ad partes asymptoti H I, minor erit, quā C F; vt propositum fuerat.

PROP. 4. Addit. Sint duæ æquales parabolæ A B, D E ad easdem partes cauæ, quarum diametri G I, H K sint congruentes aut parallelæ inter se, nec nō ad eas ordinatim applicatæ B Z K, L X N sint parallelæ alicui rectæ diuidenti angulum G H K à recta linea G H vertices coniungenti, & diametro H K interioris sectionis D H contentum, si diametri congruentes non fuerint. Dico quod, B E, L M portiones applicatarum à sectionibus ad easdem partes interceptæ, semper magis diminuentur, quo magis à verticibus recedunt; efficienturque minores quacumque recta linea proposita, si diametri sunt congruentes: si verò sunt parallelæ nunquam minores erunt portione ordinatæ inter diametros intercepta. At si parallelæ fuerint alicui rectæ lineæ diuidenti angulum H G I à recta G H, & diametro I G exterioris sectionis A G contentum, semper magis augentur, sed erunt semper minores ea quæ à diametris intercipitur. Vel si fuerint parallelæ diametris non congruentibus, semper magis augentur, quo magis à concursu recedunt.





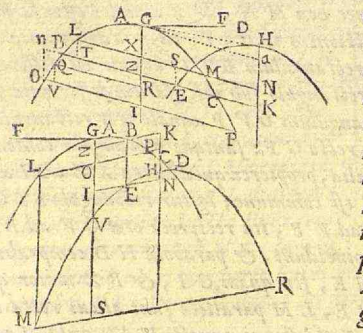
Sit F G latus rectum diametri G I in parabola G B, ordinatim applicatæ B E K, & L M N secent diametrum G I in X, Z, & diametrum H K in N, K, & secetur abscissa G I æqualis H K, & G R æqualis H N; ideoque R I æqualis erit N K, seu X Z (propterea quod in parallelogrammo N Z opposita latera æqualia sunt) ducan-
ex 10. ex 21. huius. turque ordinatæ O I, Q R, quæ erunt æquales, & congruentes ipsis E K, M N propter æqualitatem sectionum, & abscissarū similium diametrorum; ducanturque à punctis E, L, Q rectæ lineæ E S, L T, Q V parallelæ diametris occurrentes ipsis B E, & O I in S, T, V; manifestum est S M æqua-

æqualem esse O V, eo quod in parallelogrammis Q I, & S K latera opposita sunt æqualia, & ipsæ ordinatæ E K O I; nec non M N, Q R æquales ostensæ sunt: Deinde producantur, B E, O I ad sectionem in C, P; Et quia differentia quadratorum B Z, L X, seu T Z, idest rectangulum B T C æquale est differentiæ ex 11. lib. 1. rectangulorum Z G F, & X G F seu rectangulo sub abscissarum differentia X Z, & latere recto G F. Simili modo rectangulum O V P æquale erit rectangulo sub abscissarum differentia R I, & latere recto G F: suntque rectangula contenta sub X Z, G F, & sub R I, G F æqualia, propterea quod latera X Z, R I æqualia ostensa sunt, & latus rectum G F est commune; igitur rectangula B T C, & O V P æqualia sunt; ideoque vt T C ad V P, ita reciprocè erit O V ad B T. Et primo quia diametri G Z, H K coincidunt, & parabolæ H D compræhenditur ab A G: erit G Z maior quàm H K, seu quàm G I, & B Z maior quàm E K, & L X quàm M N. Si verò B E, L M parallelæ sunt alicui rectæ lineæ H Y diuidenti angulum G H K; ergo Y Z, seu ei æqualis H K, vel G I minor erit, quàm G Z. Eadem ratione G X maior erit, quàm G R; quare ordinatim applicata B Z maior erit, quàm O I, & Z C maior, quàm I P; pariterque L X, seu T Z maior erit, quàm Q R, seu V I; ideoque T C maior erit, quàm V P: erat autem O V ad B T reciprocè, vt T C ad V P; ergo O V, seu ei æqualis S M maior erit, quàm B T: ijs verò addantur æquales L S, T E, quæ in parallelogrammo S T sunt latera opposita, igitur L M, maior erit quàm B E.

Deinde quando diametri G I, H K sibi mutuo congruunt sit b minor qualibet data recta linea, & à vertice H ducatur H d cuius quadratū æquale sit rectangulo H G F, & fiat vt b ad H d, ita H d ad aliam rectam lineam æqualem C E; atq; vt H d ad semissem sūmæ C E, & b potentia, ita fiat longitudine H G ad G K, ducaturque B K C ordinatim applicata ad diametrum G I. Quoniam quadra- 11. lib. 1. tum E K æquale est parallelogrammo H K, G F (propterea quod parabolæ sunt æquales, & diametri similes) & ijs addantur inter se æqualia quadratum d H, & rectangulum H G F, erunt duo quadrata E K, & d H simul sumpta æqualia rectāgulo K G F, seu quadrato B Z; quare differentia quadratorū B K, & E K, idest rectanguli B E C æqualis erit quadrato d H; & propterea d H media proportionalis est inter C E, B E, sed facta fuit media proportionalis inter C E, & b; Ergo B E æqualis est b; ideoque B E minor est qualibet recta linea data. Quando verò diametri G Z, H K sunt æquidistantes, ijsdem positis ducatur O n parallela diametris secans B E in n. Quia n Z est æqualis O I. & erat E K æqualis O I, ergo n Z, & E K æquales sunt, & addita, vel ablata communi Z E erit n E æqualis Z K; & propterea qualibet intercepta B E maior erit in secundo casu, & minor in tertio, quàm n E, seu Z K à diametris comprahensa.

Tertio quando B E, L M parallelæ sunt alicui rectæ G a diuidenti angulum H G I, erit K a, seu ei æqualis G Z minor, quàm H K, seu quàm G I, atq; vt prius rectangula B T C, & O V P æqualia erunt, & eorum latera reciprocè proportionalia, estque S M æqualis minori O V, ergo S M minor erit quàm B T; & additis æqualibus L S, & T E, erit L M minor quàm B E.

Tandem sint interceptæ B E, L M parallelæ G V, H C portionibus interceptarum diametrorum non congruentium, & à terminis B, E, L, M, ducantur ad diametros ordinatim applicatæ, eas secantes in Z, K, I, N, O, S, & sectiones in P, & R; & cadat B E inter duas diametros. Quoniam punctum B cadit



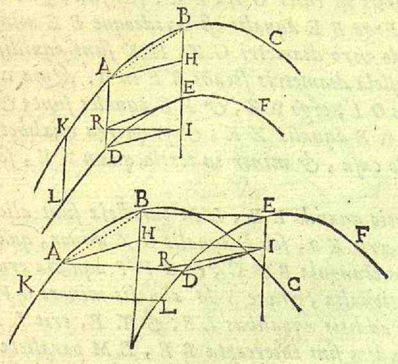
B cadit inter verticem G, & punctum C eiusdem parabolæ G C; igitur Z B K ordinatim applicata ad diametrum G I necessario secabit diametrum G I intra sectionem in Z, & producta occurret K N extra eandem in K. Non secus ostendetur, quod E N I ordinatim applicata ad diametrum H N, punctum N cadit intra, & I extra eandem sectionem H E, & propterea recta C H minor erit, quàm K N, seu B E ei æqualis in parallelogrammo E K; pariterque Z I, seu ei æqualis B E minor erit, quàm G V. Cadat postea L M extra duas diametros ad easdem partes. Quoniam in parallelogrammo L S latera L O, M S æqualia sunt; estque S R maior quàm M S, seu quàm O L; ergo (vt in prima parte 11. lib. 1. *huius propositionis ostensum est) rectangulum M S R, seu rectangulum sub S V, & latere recto G F maius erit quadrato L O, seu rectãgulo O G F, & propterea S V maior erit, quàm O G, & addita communi O V; erit O S, seu ei æqualis L M, in parallellogrammo L S, maior quàm G V. Quod erat ostendendum.*

SCHOLIUM.

Idem omnino verificari in ellipsibus demonstrari facile posset, quod breuitati studens libens omitto.

PROP. 5. Addit.

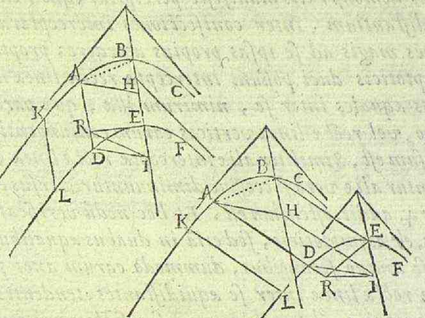
Si fuerint duæ quælibet conisectiones A B C, D E F æquales, & similes ad easdemque partes cauæ, quarum diametri B H, E I (æquè inclinatæ ad ordinatim ad eas applicatas) æquidistantes sint inter se, vel congruentes; & ducantur quælibet rectæ lineæ A D, K L à sectionibus interceptæ, parallelæ rectæ lineæ B E vertices coniungenti: erunt illæ æquales inter se.

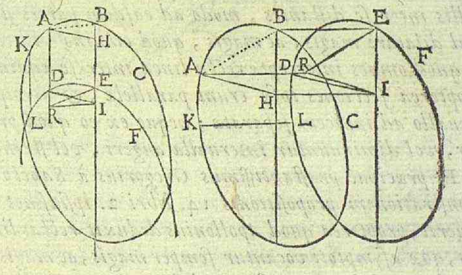


Si enim hoc verum non est, sit A D si fieri potest maior, aut minor, quàm B E, & secetur A R æqualis B E: patet punctum R cadere intra, aut extra sectionem D E (sed in eius plano cum sectiones in eodem plano existant) iunganturque rectæ lineæ A B, E R, quæ æquales erunt, & parallelæ inter se, cum sint coniungentes æqualium, & æquidistantium B E, & A R. Postea ducatur A H ordinatim applicata ad diametrum B H efficiens abscissam H B; seceturque abscissa E I in altera sectione æqualis B H; iunganturque H I, I D, & I R. Et quoniam B H,

E I

E I sunt æquales, & parallelæ; ergo H I æqualis erit, & parallela ipsi B E (vel quia additur communis H E, vel propter parallelogrammum B I) sed prius A R æqualis erat, & parallela eidem B E; igitur A R, & H I æquales sunt inter se, & æquidistantes; ideoque coniungentes A H, R I erunt æquales, & parallelæ; suntque anguli A H B, & R I E æquales inter se, cum ab æqualibus lateribus in triangulis A B H, & R E I æquilateris inter se contineantur; ergo R I ordinatim quoque applicata est ad diametrum E I; atque in sectionibus æqualibus abscissæ B H, E I diametrorum similium, scilicet æque inclinatarum ad suas ordinatas æquales sunt inter se; nec non ordinatæ A H, I R æquales sunt ostensæ; igitur sicut punctum A in sectione A B cadit, ita punctum R in sectione E D existit; ex 10. huius. *sed positus fuit intra, aut extra ipsam, quod est absurdũ: Non igitur recta linea A D maior, aut minor esse potest, quàm B E; ideoque ei quælibet alia intercepta K L æqualis omnino erit. Simili ratiocinio ostendetur æquidistans ipsi B E eidem æqualis; quapropter interceptæ A D, K L, & B E æquales erunt inter se: Quod erat ostendendum.*

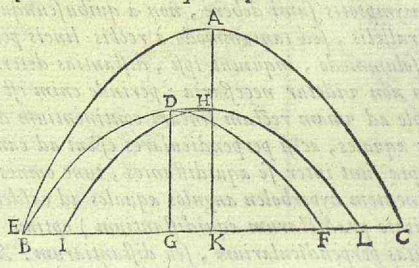




SCHOLIUM.

Si duæ parabolæ B A C, F D E æquales ad easdem partes cauæ, constitutæ fuerint circa axes A K, D G æquidistantes, & non congruentes se mutuo secabunt.

Ex vertice D axis G D ducatur D H perpendicularis ad axim A K, eum secans in H, & describatur alia parabola I H L æqualis prioribus B A, vel E D, cuius axis sit K H, & vertex H, & sicuti in propositione 4. additarum factum est, reperiatur B F C ordinatim ad axes applicata secans parabolas in E, B, I, & axes in G, K, ita vt intercepta B I æqualis sit D H, seu G K, quæ in parallelogrammo D K ei æqualis est. Quoniã parabolæ E D, & I H æqua-



Ee les

ex prop. 1. huius. les ſunt, & axium abſciſſæ D G, H K æquales cum ſint latera oppoſita parallelogrammi D K; ergo ordinatim ad axes applicatæ E G, & I K æquales ſunt, & ablata communi I G, erit E I æqualis G K, ſeu D H; erat autem intercepta B I æqualis eidem D H; igitur B I erit æqualis E I; & propterea punctum E Maurol. 27. lib. 5. Conic. parabolæ E D F cadet ſuper punctum B parabolæ B A C; ergo duæ parabolæ B A C, & E D F conueniunt in vno puncto, & in eo ſe mutuo tangere non poſſunt; igitur ſe mutuo ſecant. Quare patet propoſitum.

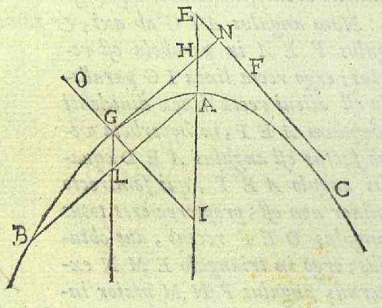
His demonſtratis manifeſtè percipitur, quod ex ſucceſſiua diminutione rectarũ æquidiſtantium, inter coniſectiones interceptarum, deduci non poteſt, coniſectiones magis ad ſe ipſas propius accedere; propterea quod in ijſdem ſectionibus aſymptoticis duci poſſunt interceptæ rectæ lineæ inter ſe æquidiſtantes, quæ ſint omnes æquales inter ſe, nimirum illæ, quæ parallelæ ſunt alicui communi diametro, vel rectæ lineæ vertices earum coniungenti, vt in propoſitione 5. additarũ oſtenſum eſt. Similiter aliæ interceptæ rectæ lineæ, inter ſe æquidiſtantes ſucceſſiuè augentur aliæ verò ſucceſſiuè diminuuntur verſus eaſdem partes, vt in propoſitione 3. & 4. addit. oſtenſum eſt. Et hoc nedũ verificatur in ſectionibus non congruentibus, & asymptoticis, ſed etiã in duabus æqualibus, & inter ſe ſimilibus ſectionibus ſe mutuo ſecantibus, dummodo earum axes paralleli ſint, in ijs enim interceptæ rectæ lineæ inter ſe æquidiſtantes, tendentes ad eaſdem partes, etiam illæ, quæ proprius ad punctum occurſus ſectionum conicarum accedunt, poſſunt diminui, pariterque inter ſe æquales eſſe, & quod mirum eſt poſſunt ſemper magis augeri. Si igitur æquidiſtantes interceptæ ſunt menſuræ diſtantiarũ duarum ſectionum, eædem coniſectiones cenſeri debent modo parallelæ, & æqualibus interuallis inter ſe diſtantes, modo ad eaſdem partes ſtringi, & coanguſtari, & ſimul dilatari magis, ac magis, quod omnino videtur abſurdum. Non igitur ex eo quod omnes interceptæ rectæ lineæ inter ſe æquidiſtantes ſunt æquales inter ſe; propterea ſectiones ipſæ erunt parallelæ, & asymptoticæ, & ſemper æquali interuallo ad inuicem ſeparatæ; neque ex eo quod prædictæ parallelæ magis augẽtur, vel diminuuntur interualla augeri, vel ſtringi cenſendum eſt.

Et præcipuè præſtantiſſimus Gregorius à Sancto Vincentio neſcio an iure demonſtrationem propoſitionis 14. libri 2. ipſiuſmet Apollonij inſufficientem reputauerit, propterea quod Apollonius deduxit rectas lineas hyperbolen compræhendẽtes, quæ aſymptoti vocantur ſemper magis, ac magis ſectioni viciniores fieri ex eo quod rectæ lineæ inter ſe æquidiſtãtes, interceptæ inter rectas asymptotos vocatas, & hyperbolen contentam ſucceſſiuè ſemper magis, ac magis diminuantur; & è contra aſſeruit cum Cardano, & quodam Rabino Moſe diſtantiam hyperbolæ à rectis asymptotis ſumi debere, non à quibuſcunque rectis lineis interceptis inter ſe parallelis, ſed tantummodo à rectis lineis perpendicularibus ad aſymptotos, quæ ſolummodo, inquiunt ipſi, diſtantias determinant; at reuera hæc animaduerſio non videtur neceſſaria: perinde enim eſt conſiderare rectas lineas ab hyperbole ad vnam rectam lineam continentium ductas, quæ efficiat cum illa angulos æquales, ac ſi perpendiculares eſſent ad eandem: at quando rectæ lineæ interceptæ ſunt inter ſe æquidiſtantes, tunc omnes efficiunt ſuper rectam lineam continentem hyperbolen angulos æquales ad eaſdem partes; & propterça (ex inæqualitate prædictarum æquidiſtantium) optimè concluditur cum Apollonio inæqualitas perpendicularium, ſeu diſtantiarum. Quando verò conſiderantur duæ lineæ curuæ veluti ſunt duæ parabolæ, vel duæ hyperbolæ, vel ellipſes, tunc qui-

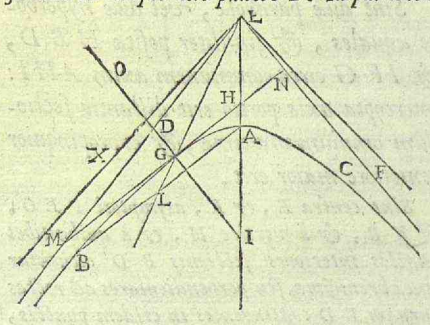
dem

dem nulla ratione rectæ lineæ inter ſe æquidiſtantes, inter curuas interceptæ determinare poſſunt prædictarum curuarum diſtantias; quandoquidem inæqualiter ſemper inclinantur ad quamlibet prædictarum curuarum, & rectæ lineæ interceptæ, quæ ſunt perpendiculares ad vnam ipſarum, non erunt inter ſe æquidiſtantes. Et quia, vt dictum eſt, prædictæ perpendiculares ſunt diſtantiarum legitimæ menſuræ, nunquàm concludi poteſt certo, quod prædictæ ſectiones ſint æquidiſtantes. vel ſibi ipſis ſucceſſiuè viciniores fiant, niſi conſiderentur rectæ lineæ interceptæ ad vnam ſectionum perpendiculares: quod quidem hucuſque quod ſciam factum non eſt, neque forſan huiuſmodi ſpeculatio inuentu facilis erit, aut iniucunda.

In parabola, vel hyperbola A B C ad eius axim E A I ducere ramum breuiſſimum æquidiſtantem alicui rectæ lineæ E F, quæ oportet, PROP. 6. Addit. vt efficiat cum axi ad partes ſectionis angulum A E F acutum, ſed in hyperbola ſit minor ſemiſſe vnius recti, & angulus F E X ab vna aſymptoto, & recta linea E F contentus ſit acutus.



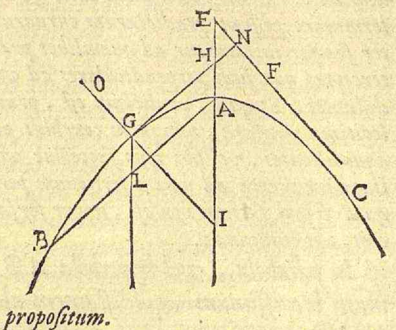
Fiat angulus A E D æqualis angulo A E F, & ex vertice A ducatur recta linea A B efficiens angulum I A B, qui ſimul cum angulo A E F vnum rectum angulũ compleat; ſed in hyperbola, quia vterq; angulus X E A, & A E F deficit à ſemirecto erũt ambo minores ſumma præcedentium, ſcilicet vno angulo recto; ergo ablato cõmuni angulo A E F, erit angulus I A B maior angulo A E X. Poſtea, quia tam A E F, quàm A E D minor eſt ſemiſſe vnius anguli recti, & A E F cum angulo I A B vnum rectum angulum complent; ergo angulus I A B maior erit angulo D E A: & propterea recta linea A B producta neceſſario ſecabit vtramque rectam lineam E D, & E X asymptotum extra ſectionem cadentem ad partes D, X; ideoque A B hyperbolen ſecabit in aliquo alio puncto B. In parabola verò, quia recta linea A B axim ſecat in vertice A non ad angulos rectos (cum anguli I A B, & A E F rectum compleant) ergo A B 17. 27. lib. 1. ſectioni occurrit in duobus punctis. Secetur iam A B bifariam in L, & per L ducatur diameter ſectionis L G ſectioni occurrens in G, & per G ducatur contingens G 35. 36. lib. 1. H, ſeu parallela A B ſecans axim 5. lib. 2. in H, & per G ducatur I G O perpendicularis ad G H. Dico I G problema efficere. Quoniam pro-



pter

pter parallelas G H, B A, est angulus G H A, seu E H N æqualis angulo B A I; sed anguli B A I, & A E F vnicum rectum complent; ergo duo anguli N H E, & N E H simul sumpti vni recto æquales sunt, & propterea in triangulo E N H reliquus angulus N rectus erit: erat quoque angulus

31.lib.5. *I G H rectus; igitur I G (qui est ramus breuissimus cum sit perpendicularis ad tangentem G H) est æquidistans rectæ lineæ E F; quod erat propositum.*

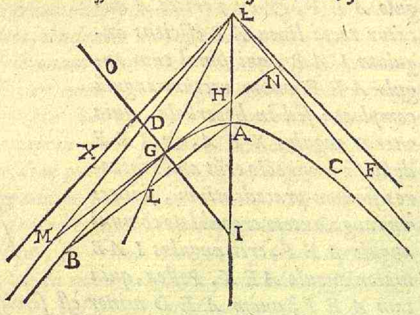


SCHOLIVM. *Facile deducitur, quod si angulus A E F fuerit rectus in parabola, & non fuerit semirecto minor in hyperbole facta eadem constructione quilibet ramus breuissimus I G æquidistans erit rectæ lineæ diuidenti angulũ A E F.*

Nam angulus A I G ab axi, & ramo breuissimo contentus est acutus, sed an-

13.14.15. lib. 5. *gulus F E A in parabola est rectus; ergo recta linea I G parallela est alicui rectæ lineæ diuidenti angulum A E F, in hyperbola verò factus est angulus A E D æqualis angulo A E F, qui semirecto minor non est; propterea erit totus angulus D E F rectus, aut obtusus; ergo in triangulo E M N externus angulus F N M maior interno, & opposito angulo E recto,*

31. lib. 5. *vel obtuso, erit quoque obtusus, & angulus I G N rectus est; igitur I G, F N se vicissim secabunt vltra punctum E, & ideo I G parallela erit rectæ lineæ diuidenti angulum A E F. Quod erat ostendendum.*

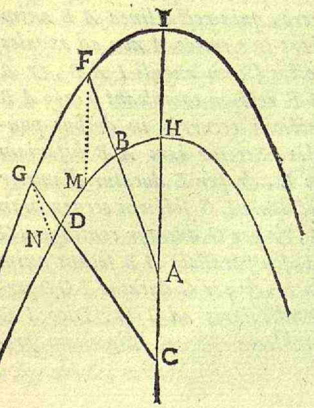


PROP.7. Addit. Sint duæ parabolæ, vel duæ hyperbolæ æquales, & similiter positæ H B D, & I F G circa communem axim A H I: intercepta axis portio erit distantia sectionum omnium maxima, & ei propinquior remotiore maior erit.

Sint centra E, & K, asymptoti P E O, Q K R, & à vertice H, & à quibuslibet

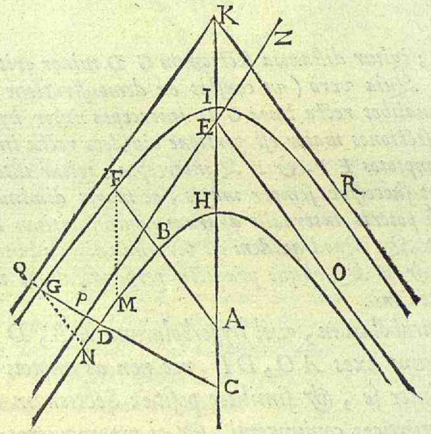
8.9.10.30. lib. 5. *punctis interiores sectionis B D eleuentur lineæ breuissimæ, seu perpendiculares ad rectas curuam B D contingentes in eisdem punctis, quæ sint H A, B A, & D C, quæ secent reliquam sectionem in punctis I, F, & G.*

Manife-



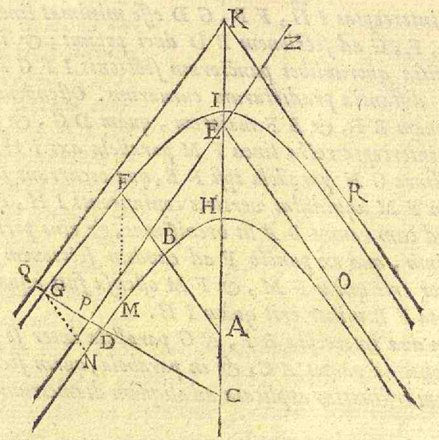
Manifestum est interceptas I H, F B, G D esse minimas linearum rectarum, quæ à punctis I, F, G ad sectionem B D duci possunt; & ideo eædem intercepta erunt distantiæ quorunlibet punctorum sectionis I F G à sectione B D: & propterea erunt distantiæ prædictarum curuarum. Ostendendum modo est H I maiorem esse, quàm B F, & B F maiorem, quàm D G, & sic semper. Ducatur à puncto F intercepta recta linea F M parallela axi I H, atque à puncto G ducatur recta linea G N parallela ipsi F B, quæ occurrant sectioni B D in M, N. Et quoniam F M æquidistat vertices coniungenti I H, erit intercepta F M æqualis I H, sed cum ramus B A sit breuissimus, & eius portio F B erit quoque breuissima omnium, quæ ex puncto F ad eandem sectionem B H duci possunt; quare B F minor erit quàm F M, & F M ostensa fuit æqualis I H; igitur distantia intercepta F B minor erit quàm I H. 38.lib.5. 5.addit. huus. 38.lib.5.

Secundò quia duæ interceptæ B F, N G parallelæ inter se productæ occurrunt axi intra sectiones ad partes A C, & in parabola, quàm secabunt in binis punctis, erunt saltem ordinatim applicatæ ad aliquàm diametrum: in hyperbolis verò 27.lib.1.



parallelæ erunt rectæ lineæ diuidenti angulum P E K à recta linea E K centra coniungente, & E P interiore asymptoto contentum; propterea tam in parabolis, quàm in hyperbolis intercepta B F, quæ vlterius tendit ad partes reliquæ asymptoti E O maior erit intercepta N G; sed quia G D est linea breuissima omnium, quæ ad sectienem H D duci possunt, cum sit portio breuissimæ D C, quæ perpendicularis est ad rectam contingentem in D, igitur G D minor erit, quàm G N; estque G N ostensa minor, quàm F B; ergo G D minor erit, quàm F B. 3.&4. addit. 38.lib.5.

In parabolis autem, quia duci potest aliqua recta linea, vt N G parallela cuilibet interceptæ B F; itaut sit N G minor quacunque recta linea data (quando nimirum ad aliquam diametrum ordinatim sunt applicatæ, scilicet, quando vna ipsarum, puta B F occurrat axi intra sectiones; quod quidem necessario eueniet, quando B A est ramus breuissimus) estque ramus breuissimus D G minor Prop.4. addit. 27.lib.1.

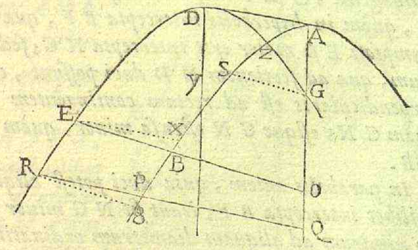


nor eadem G N; igitur distantia sectionum G D minor erit quacunque recta linea proposita. Quia verò (vt constat ex demonstratione casus 2. propos. 3. addit. huius) quælibet recta linea G D intercepta inter hyperbolas conueniens cum axi intra sectiones maior est portione eiusdem rectæ lineæ C D G inter æquidistantes asymptotos E P, & K Q intercepta; igitur interuallum inter duas hyperbolas, licet successiuè semper magis, ac magis diminuatur, nunquàm tamen minor effici poterit interuallo duarum æquidistantium hyperbolas continentium E P, & K Q; Quod quidem est perpendiculare ad vtramque rectam continentem E P, & K Q; estque prædicta perpendicularis minima omnium interceptarum inter eas.

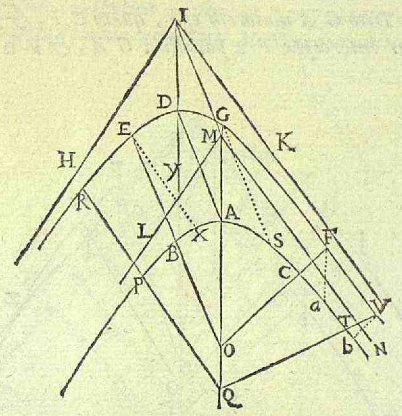
PROP. 8. Addit.

Duarum parabolarum, vel hyperbolarum A B, D E æqualium, & similium, quarum axes A O, D Y, nec non asymptoti H I K, L M N sint parallelæ inter se, & similiter positæ: Sectionum distantia maxima parallela erit vertices coniungenti, & ei propinquiores ex vtraq; parte maiores sunt remotioribus vsq; ad concursum: si verò distantiam maximam non habent semper augentur quo magis à concursu recedunt.

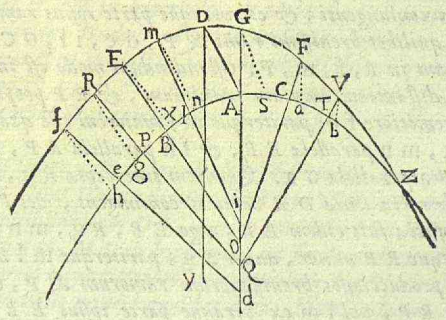
Cadat concursus sectionum Z inter axes A G, & D Y, & asymptoti I K, M N coincidant, aut sibi sint viciniores, quàm I H, M L. Et primò angulus Y D A ab axe Y D, & D A vertices coniungente contentus semirecto minor non sit in hyperbola, sitque rectus in parabola, & vltra concursum Z, ad partes axis D Y, & asymptotorum magis dissitorum H I, L M: sumantur in comprætensa sectione A B quælibet puncta, B, P, à quibus ad axim



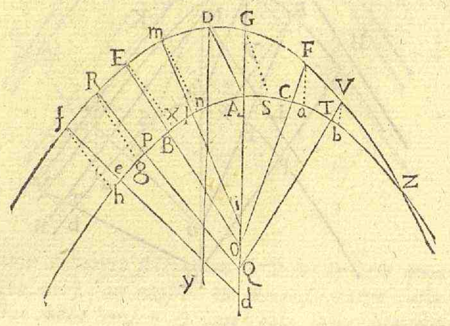
ad axim ducantur rami breuissimi O B, Q P præter axim A O, & secent externam curuam in G, E, R, & occursui Z, vel communi asymptoto I M N, 8.9. & 10. lib. 5.



aut vicinioribus asymptotis I K, M N sit A G propinquior, quàm E B, & E B propinquior, quàm R P: Ostendendum est curuarum distantiam A G minorem esse, quàm B E, & B E, quàm P R. Ducantur interceptæ G S parallela E B, & E X parallela R P. Et quia in parabola angulus Y D A rectus supponitur, SCHOLIVM. & in hyperbola non est minor semirecto, ergo quilibet ramus breuissimus E B, Prop. 6. addit. vel R P æquidistans erit rectæ lineæ diuidenti angulum A D Y in parabola, & angulum M I H in hyperbola; sed duarum parallelarum E B, G S, vel R P, E X est G S vertici propinquior, vel vlterius tendit ad partes asymptoti I K, quàm E B; ergo G S minor est, quàm E B; estque G A minor, quàm G S, quia Prop. 3.4. addit. 7. & 38. lib. 5. illa est portio, vel productio lineæ breuissimæ O A; igitur G A adhuc minor erit



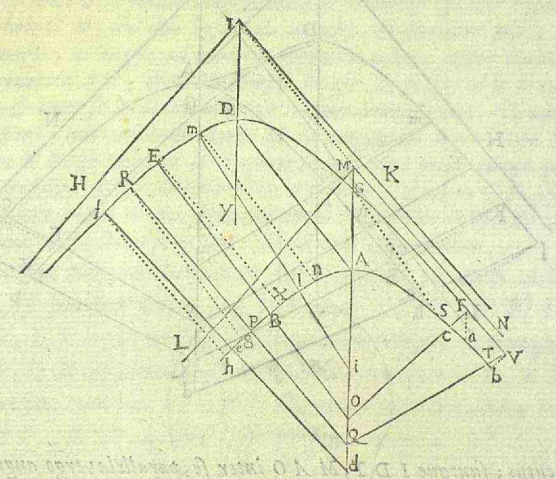
quàm E B. Eadem ratione E B minor ostendetur, quàm R P. Postea si occursus Z cadit extra duos axes, inter axim A G, & occursum aut ad partes asymptotorum protorum coincidentium, vel propinquiorum, ad oppositas partes citra axim G A, sumantur duo puncta C, T, & ab eis ducantur ad axim rami breuissimi O C, Q T secantes externam sectionem in F, V, & ab occursu, vel communi asymptoto, vel ab asymptotis vicinioribus I K, M N magis recedat A G, quàm C F, & C F, quàm T V; Dico G A maiorem esse, quam C F, & C F maiorem, quàm T V. Ducantur interceptæ F a parallela G A, & V b parallela C F.



Postr.pars
pr. 4. add. Et quia in parabola F a propinquior est occursui sectionum, & parallela est dia-
huius. metro G A; at in hyperbola F a parallela est axi G A, vel D Y diuidenti an-
Pars 3. gulum M I H, & F a vlterius tendit ad partes asymptoti I K, quàm G A; ergo
prop. 3. F a minor est, quàm G A: estque C F productio rami breuissimi minor quàm
addit. F a; ergo A G maior erit, quàm C F. Eodem ratiocinio ostendetur C F maior,
huius. quàm T V.
38. lib. 5.

Secundò angulus Y D A sit acutus in parabolis, at in hyperbolis minor se-
mirecto, & M I H ab asymptoto I H, & recta linea centra coniungente con-
Propos. 6. tentus sit acutus: Manifestum est duci posse ramum breuissimum, vt O B ad se-
addit. ctionem interiorem A B, qui parallelus sit rectæ lineæ D A vertices coniungenti,
huius. vel I M centra coniungenti; & ex vtraque parte ipsius rami O B præter axim
8. 9. & 10. A G ducantur quilibet breuissimi rami Q P, d e, i l, O C, qui secent exter-
lib. 5. nam peripheriam in R, f, m, F. Ostendendum modò est in eisdem conisectio-
nibus E B esse distantiam omnium maximam, & R P propinquiorem maximæ
maiorem esse remotiore f e; pariterque m l maiorem esse quàm G A. Ducantur
interceptæ R g, m n parallelæ E B, & f h parallela R P, nec non G S paral-
lela m l, & F a parallela G a. Quoniam interceptæ R g, m n parallelæ sunt
Propos. 5. eidem E B, & recta linea D A vertices coniungens, vel I M centra coniun-
addit. gens parallela facta fuit eidem E B; ergo E B, R g, m n erunt omnes inter
huius.
38. lib. 5. se æquales; estque R P minor, quam R g; pariterque m l minor, quàm m n,
quia illæ sunt productiones breuissimorum ramorum Q P, & i l; igitur quæ-
libet distantia R P, vel l m ex vtraque parte ipsius E B sumpta minor est,
quàm E B; ideoque E B erit omnium maxima. Deinde quia O B parallela est
A D, vel M I, & rami breuissimi O B, Q P se secant vltra axim A O; ergo
38. lib. 5. recta linea R P Q producta secabit quoque reliquam parallelarum D A, vel
I M

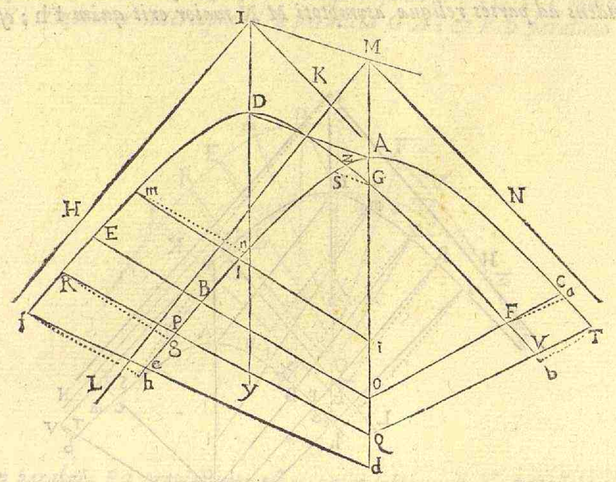
I M ad partes O A M; ideoque interceptæ R P, f h parallelæ erunt alicui re-
ctæ lineæ diuidenti angulum D A O ab axe interioris parabolæ, & vertices
coniungente contentum, vel angulum I M L ab asymptoto interioris hyperbolæ,
& centra coniungente contentum; igitur R P propinquior verticibus, vel vlte-
rius tendens ad partes reliquæ asymptoti M N maior erit quàm f h; estque f h 34. addit.



maior f e quæ est productio rami breuissimi; ergo distãtia R P propinquior maximæ 38. lib. 5.
E B maior erit, quàm f e. E contra quia breuissimus ramus i l m cadit inter
duas parallelas E B, & D A, & secat ramũ breuissimum E B ad partes O i; 28. lib. 5.
ergo l m occurrit A D, vel M I ad partes D, vel I; ideoque intercepta m l,
& ei parallela G S erunt æquidistantes alicui rectæ lineæ diuidenti angulum Y
D A, in parabolis, vel H I M in hyperbolis: & propterea G S propinquior ver- 34. addit.
tici parabolæ, vel vlterius tendens ad partes reliquæ asymptoti M N minor
erit, quàm m l; estque G A productio rami breuissimi minor quàm G S; ergo 38. lib. 5.
m l maior erit, quàm G A; & sic vlterius G A maior erit C F, quando oc-
cursus Z sectionum cadit vltra interceptam F C ad partes T V; vt in prima
parte ostensum est.

Iisdem manentibus: dico postea, quod vltra distantiam maximam E B ad partes R P, distantiæ, licet semper diminuantur non efficiuntur minores interuallo diametrorum æquidistantium D Y, A O in parabolis, vel interuallo asymptotorum collateralium I H, M L in hyperbolis, vt facile deducitur ex 3. & 4. additarum. At ad partes asymptotorum congruentium hyperbolæ ad se se ipsas propius accedunt, interuallo minori quolibet dato: Nam in locum ab hyperbole B A C, & asymptoto M N contentum extenditur altera hyperbole E D F; sed distantia hyperbolæ B A C ab asymptoto M N efficitur minor qualibet data; igitur distantia hyperbolæ D G F comprehensæ ab hyperbole intercipiente minor erit qualibet data distantia.

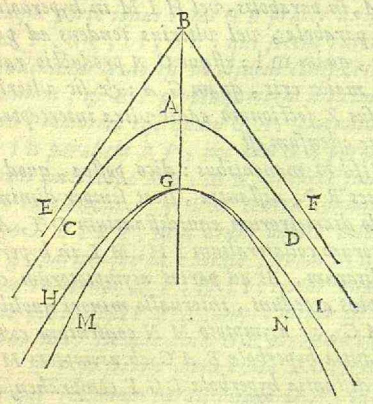
Tandem ijsdem positis ducantur ex altera parte concursus Z rami breuissimi O C, Q T, qui efficiant distantias F C, T V. Dico F C propinquiorem concursui Z minorem esse, quàm T V. Quoniam angulus Y D A, vel Y I M supponitur acutus; suntque I D Y, M A O inter se, parallelæ; ergo angulus D A O, vel I M O, & multò magis I M N erit obtusus; sed quilibet ramus breuissimus



13. 14. lib. 5. *Q V T parallelus F a efficit cum axi A O angulũ acutũ; igitur ramus breuissimus Q T, & ei parallelus F a sunt æquidistantes alicui rectæ lineæ diuidenti angulum D A O, vel I M N; ideoque F a propinquior concursui, vel vlterius tendens ad partes reliquæ asymptoti I H minor est, quàm T V;* Propos. 3. & 4. add. *estque F C minor quàm F a (quia illa est portio rami breuissimi) ergo F C minor est, quàm T V. Quod erat propositum.* 12. lib. 5.

PROP. 9. Addit.

In duabus hyperbolis C A D, H G I similibus, concentricis, & similiter positis circa communem axim B A G, idest consistant circa cõmunes asymptotos E B F: Dico sectionum C A D, H G I interualla sẽper minui, quo magis ab axis vertice recedunt; atque effici posse minora interuallo quolibet dato.



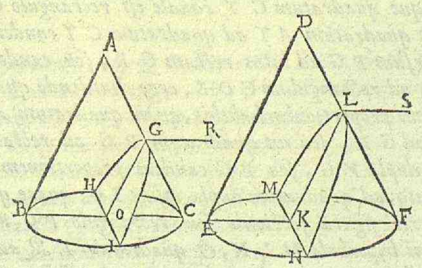
12. huius. & ex 53. lib. 1. *Describatur hyperbole M G N æqualis, similis, & similiter posita*

ipsi

ipsi C A D circa communem axim A G. Et quoniam hyperbolæ H G I semiaxis transuersus B G maior est transuerso semiaxe B A, hyperboles C A D, pariterquè latus rectum illius maius erit huius latere recto (cum latera figurarum sint proportionalia in hyperbolis similibus:) 12. huius. *igitur hyperbole H G I maior est hyperbola M G N (quod ab alijs ostensum est), & consistunt circa communẽ axim A G, & vertex G est communis; igitur hyperbole H G I comprǽhendit hyperbolen M G N; & ideo hyperbole H G I cadit inter duas hyperbolas G M, & A C: & propterea hyperbole G H multo magis successiuè vicinior efficitur hyperbolæ A C, quàm hyperbole G M; sed duæ hyperbolæ æquales, & similiter positæ A C, & G M semper magis, ac magis ad inuicem approximantur,* Propos. 7. addit. *igitur multo magis hyperbolæ concentricæ A C, & G H semper magis, ac magis ad se se ipsas appropinquantur, & inter se non conuenient vt Pappus demonstrauit.* lib. 7. prop. 208. *Tandem, quoniã lineæ breuissimæ, quæ perpendicularis est ad tangentem hyperbolem G H portio ab asymptoto E B, & sectione H G comprǽhensa effici potest minor quacunque recta linea proposita;* 29. 30. lib. 5. *cadit verò hyperbole A C inter sectionem G H, & continentem B E;* Propos. 4. lib. 2. *igitur multo magis distantia inter hyperbolas G H, & A C minor erit quacunque recta linea proposita. Quod erat ostendendum.*

PROP. 10. Add.

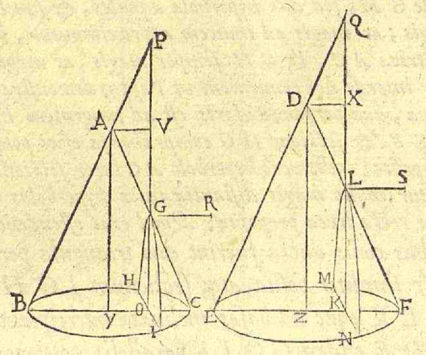
Si in duobus conis ducta fuerint duo triangula per axes A B C, D E F similia, & similiter posita, atq; sectionum I G H, & N L M diametri G O, L K æque ad bases inclinatæ intercipiant cũ triangulorum lateribus A B, D E eisdem G O, L K parallelis, portiones O B, K E æquales; vel cum axibus conorum A Y, D Z diametris æquidistantibus intercipiant portiones O Y, K Z æquales, & efficiant angulos A Y C, D Z F æquales: erunt conicæ sectiones inter se æquales, & in qualibet earum duplum interceptæ poterit figuram sectionis.



Primò in parabolis, quia triangula A B C, D E F sunt similia, erit B C ad C A vt E F ad F D, & G O, L K sunt parallelæ homologis A B, D E; ergo O C ad C G, & B O ad G A eandem proportionem habebunt, quàm B C ad C A, seu eandem, quàm habet E F ad F D; estque E K ad L D vt E F ad F D; ergo B O ad G A est vt E K ad L D; suntque B O, E K æquales;

igitur

igitur G A æqualis est L D: & quia in triangulis similibus rectangulum B A
11. lib. 1. *C ad quadratum B C, seu A G ad latus rectum G R eandem proportionem habet; quàm rectangulum E D F ad quadratum E F, seu quàm D L habet ad latus rectum L S; igitur A G ad G R erit vt D L ad L S; suntq; A G, D L ostensæ æquales ergo G R, & L S latera recta æqualia sunt, & diametri sectionum efficiunt angulos G O H, L K M æquales; ergo parabolæ H G I, & M L N æquales sunt inter se.* Prop. 10. huius.

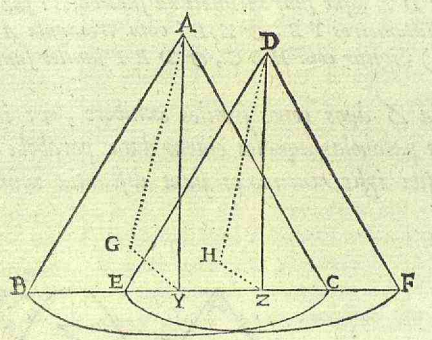


In hyperbolis verò, quoniam P G parallela est axi A Υ, & A V parallela est basi B C, & latera P B, & A C sunt communia; igitur P V ad V A est vt A Υ ad Υ B, & G V ad V A est vt Υ A ad Υ C: habet verò eadem A Υ ad æquales Υ B, Υ C eandem rationem ergò P V, & G V ad eandem V A habent eandem proportionem, & ideo P V æqualis est V G, atq; punctum V erit centrum sectionis, & quadratum A Υ æquale erit quadrato V O (propter parallelogrammum V Υ), & quadratum V O æquale est rectangulo P O G cum quadrato V G; pariterque quadratum C Υ æquale est rectangulo C O B cum quadrato O Υ, & habet quadratum A Υ ad quadratum C Υ eandem proportionem,
21. lib. 1. *quàm latus transuersum P G ad latus rectum G R, seu eandem, quàm habet rectangulum P O G ad rectangulum C O B, ergo diuidendo quadratum V G ad quadratũ O Υ eandem proportionem habebit, quàm quadratum A Υ ad quadratũ Υ C, seu vt P G ad G R, seu vt quadratum P G ad rectangulum P G R, & ideo quadratum duplæ V G, seu P G eandem proportionem habebit ad rectangulum P G R, atq; ad quadratum duplæ ipsius Υ O; quare quadratum duplæ ipsius O Υ æquale erit figuræ sectionis seu rectangulo P G R. Eodem modo ostendetur X centrum hyperbolæ M L N, & quadratum L Q ad quadratum duple K Z esse vt quadratum D Z ad quadratum Z F, seu vt Q L ad L S, & ideo quadratum duplæ ipsius K Z æquale erit figuræ sectionis, seu rectangulo Q L S. Tandem, quia propter similitudinem triangulorum per axes, sunt anguli C, F æquales, & anguli Υ, Z pariter æquales (cum ex hypothesi diametri G O, L K parallelæ axibus A Υ, D Z efficiant angulos G O C, L K F æquales); ergo A Υ ad Υ C erit vt D Z ad Z F, & earum quadrata etiam proportionalia erunt; sed P G ad G R est vt quadratum A Υ ad quadratum Υ C, atque Q L ad*

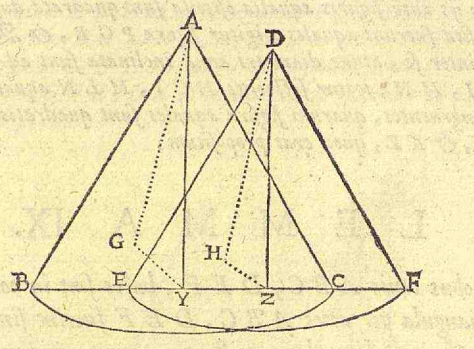
ad L S est vt quadratum D Z ad quadratum Z F; igitur P G ad G R eandem proportionem habet, quàm Q L ad L S, & propterea figuræ sectionem ex 12. huius. *erunt similes; ijs autẽ figuris æqualia ostensa sunt quadrata duplciũ O Υ, & K Z, quæ suppositæ fuerunt æquales; igitur figuræ P G R, & Q L S similes, & æquales sunt inter se, atque diametri æquè inclinatæ sunt ad ordinatim ad eas applicatas H I, M N; igitur sectiones H G I, M L N æquales sunt inter se,* Prop. 10. huius. *similes, & congruentes, quarum figuræ æquales sunt quadratis duplicium interceptarum O Υ, & K Z, quod erat propositum.*

LEMMA IX.

SI in duobus conis A B C, D E F, bases sint in eodem plano, & duo triangula per axes A B C, D E F fuerint similia, & similiter posita, & in eodem plano existentia, erunt coni similes inter se.

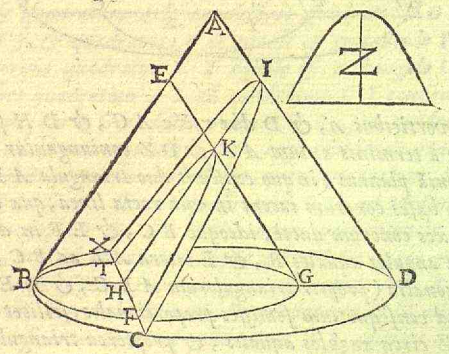


Ducantur à verticibus A, & D duæ rectæ A G, & D H perpendiculares ad bases conorũ, & à terminis axium A Υ, & D Z coniungantur rectæ lineæ Υ G, & Z H. Quoniã planum, in quo existunt duo triangula A B C, D E F secat planum, in quo bases conorum iacent in vna recta linea, quæ basis est vtriusque trianguli per axes conorum ducti; ideoque B C, & E F in directum constitutæ erunt, & circa angulos æquales B, & E latera A B ad B C, atque D E ad E F sunt proportionalia (propter triangulorum A B C, & D E F similitudinem) erunt quoque ad consequẽtium semisses proportionales, scilicet A B ad B Υ erit, vt D E ad E Z circa angulos æquales, & propterea triangula A B Υ, & D E Z similia erunt: & ideo duo anguli B Υ A, & E Z D, externus interno, æquales erunt inter se; igitur Υ A, & Z D in eodem plano existentes, parallelæ erunt inter se; sunt quoque A G, D H inter se parallelæ (cum sint perpendiculares ad idem planum basium) ergo duo anguli Υ A G, & Z D H æquales sunt inter se; atquè anguli G, & H æquales sunt, nempe recti; igitur in triangulis A Υ G, & D Z H, duo postremi anguli A Υ G, & D Z H æquales sunt inter



inter se: hi autem anguli inclinationes sunt axium conorum ad suas bases; igitur axes A Y, & D Z æque sunt inclinati ad suas bases: suntque proportionales ad basium semidiametros Y B, & Z E (cum triangula A B Y, D E Z similia ostensa sint); igitur coni A B C, & D E F similes sunt inter se. Quod erat ostendendum. Defin. 8. huius.

PROP. 11. Addit. *Data parabola Z duos conos similes exhibere, vt idem planum efficiat in eis duas parabolas æquales eidem datæ parabolæ, quæ asymptoticæ sint, & sibi ipsis viciniores fiant distantia minore quacunque data.*



In quolibet plano fiat angulus I H C æqualis angulo inclinationis diametri, & basis parabolæ Z, & per H C extenso alio quolibet plano ducatur in eo B H G perpendicularis ad X H C; & fiat quodlibet triangulum H G K, & vt quadratum H G ad rectangulum H K G, ita fiat latus rectum parabolæ Z ad pro-

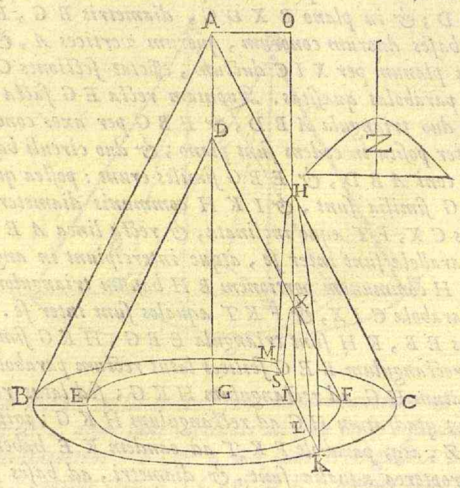
ductionem

ductionem K E, & ab E ducatur A E B parallela I H, quæ secet G H in B: postea producatur H K, vt cumq; in I, & per I ducatur A I D parallela E G, quæ secet B G in D; & in plano B X D C, diametris B G, B D, fiant duo circuli, qui sint bases duorum conorum, quorum vertices A, & E, & in eorum superficiebus planum per X I C ductum, efficiat sectiones C I X, & F K T. Dico eas esse parabolas quæsitas. Quoniam recta E G facta est parallela ipsi A D; igitur duo triangula A B D, & E B G per axes conorum ducta similia, & similiter posita in eodem sunt plano; & duo circuli basium in eodem sunt plano; ergo coni A B D, & E B G similes erunt: postea quia triangula Lem. 9. huius. *A B D, & E B G similia sunt, & I K H communis diameter sectionum ad coincidentes bases C X, F T æque inclinata, & recta linea A E B à verticibus conorum ducta parallelæ sunt inter se, atque intercipiunt in angulis æqualibus A B H, & E B H communem portionem B H basium triangulorum similium per axes; ergo parabolæ C I X, & F K T æquales sunt inter se.* Prop. 10. addit. *Secundò, quia propter parallelas E B, K H sunt triangula E B G, H K G similia; ergo quadratum E G ad rectangulum B E G scilicet latus rectum parabolæ F K T ad K* 11. lib. 1. *E est, vt quadratum H G ad rectangulum H K G; sed latus rectum parabolæ Z ad K E fuit vt qtadratum H G ad rectangulum H K G; igitur duo latera recta, parabole Z, atq; parabole F K T ad eandem K E habent eandem proportionem, & propterea æqualia sunt, & diametri, ad bases æque inclinatæ sunt ex constructione; igitur parabole F K T, & ei æqualis C I X erit æqua-* Prop. 10. huius. *lis eidem parabolæ Z. Tertiò quia sectionum plano, & communi diametro I K H æquidistat cummune lateris A E B, in quo duo coni se se contingunt; ergo latus A E B nunquàm occurret plano C I X: sed duæ superficies conicæ tantummodò se se tangunt in latere A E B, & reliquis omnibus in locis separatæ sunt; igitur duæ parabolæ C I X, F K T in illo plano positæ per contactum A E B non transeunte, & extensæ in duabus conicis superficiebus nunquàm conuenientibus, erunt asymptoticæ. Quartò quia duæ parabolæ C I X, F K T æquales sunt, & similiter positæ circa communem diametrum I K H; ergo earum distantiæ semper magis, ac magis diminuuntur quousque sint minores qualibet* Propos. 7. addit. *recta linea data. Quod erat faciendum.*

PROP. 12. Addit. *Data hyperbola Z duos conos similes exhibere, vt idem planum in eis efficiat duas hyperbolas æquales, & similes datæ, quæ asymptoticæ sint, & sibi ipsis semper viciniores fiant, non tamen interuallo minore recta linea data.*

In quolibet plano fiat angulus H I M æqualis angulo inclinationis diametri, & basis datæ hyperboles Z, & per M I extenso quolibet alio plano ducatur in eo B I C perpendicularis ad M I K; & sumpto quolibet puncto O in recta linea I H producta, ducatur à puncto O in plano per O I B extenso recta linea O A parallela ipsi B I, & secetur O A æqualis semissi potentis figuram sectionis Z, cuius rectum latus ad transuersum eandem proportionem habeat quàm quadratum A O ad quadratum O H; atque à puncto A ducatur recta linea A D G parallela ipsi H I, & coniungatur A H, quæ secent rectam lineam G I in punctis G, & C, & secetur recta linea G B æqualis G C iungaturq; A B, & à quolibet puncto D in recta A G sumpto ducatur in eodem plano A B C duæ rectæ lineæ D E, & D F parallelæ lateribus A B, & A C; eruntque triangula

A B C,



A B C, & D E F similia, & similiter posita: postea in plano per B C, M K ducto, diametris B C, & E F, fiant duo circuli B K C, E L F, qui sint bases duorum conorum, quorum vertices sint A, & D, & in eorum superficiebus planum per H I, M K ductum efficiat sectiones K H M, & L X S: Dico eas esse quæsitas. Quoniam duo triangula A B C, D E F similia, & similiter posita in eodem sunt plano, pariterquè duo circuli basium in vno plano existunt;

Lem. 9. huius.

ergo duo coni A B C, & D E F similes erunt; postea quia triangula A B C, & D E F similia sunt, & communis sectionum diameter H X I æque inclinatur ad coincidentes bases M K, S L, & axi communi A D G æquidistat, & in angulis æqualibus intercipiunt G I communem portionem basium triangulorum

Prop. 10. add.

similium per axes; igitur hyperbolæ K H M, & L X S æquales sunt, & similes inter se, & earum figuris æqualia sunt quadrata ex dupla interceptæ G I descripta. Secundò quia (propter parallelas A O, & B C) triangula H O A, & A G C similia sunt; igitur quadratum A G ad quadratum G C, seu ad rectangulum B G C eandem proportionem habebit, quàm quadratum H O ad quadratum O A, seu quàm latus transuersum ad rectum figuræ Z; sed vt quadra-

12. lib. 1.

tum A G ad rectangulum B G C, ita est latus transuersum ad rectum hyperboles K H M; igitur duæ hyperbolæ Z, & K H M, habent figurarum latera porportionalia; suntq; prædictæ figuræ æquales cum sint æquales quadratis ex duplis ipsarum A O, & interceptæ G I: quæ sunt æquales in parallelogrammo G

10. 12. huius.

O, & habent angulos à diametris, & basibus contenti, æquales inter se: erunt hyperbolæ K H M, & Z æquales, & similes inter se: & propterea sectio L X S, quæ similis, & æqualis ostensa est ipsi K H M, erit quoque æqualis, & similis eidem sectioni Z. Tertiò, quia in duobus conis similibus, & similiter positis circa communem axim A D G, superficies nunquàm conueniunt, propterea quod latera A B, & D E, à quibus generantur in tota reuolutione inter se

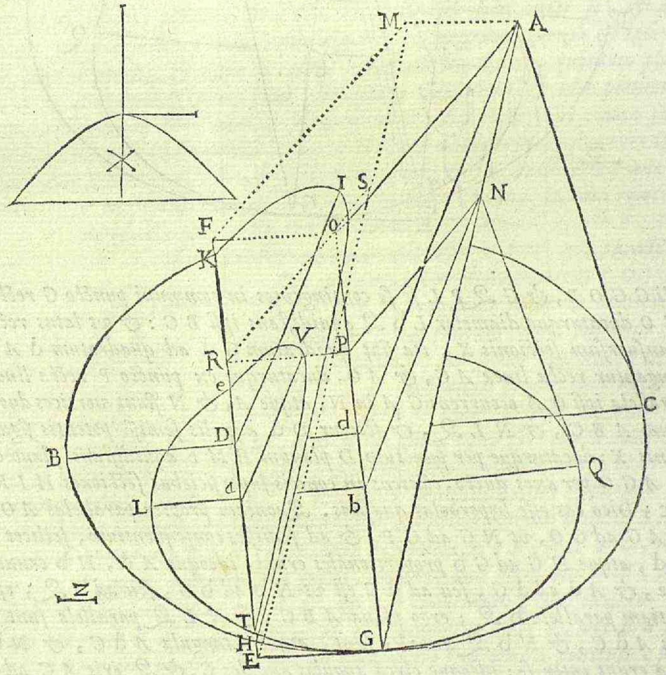
parallela

parallela conseruantur; igitur duæ sectiones K H M, & L X S, existentes in eodem plano secante duas superficies, quæ licet in infinitum producantur vbique separatæ sunt, erunt asymptoticæ. Quartò, quia duæ hyperbolæ H K M, & L X S sunt æquales, similes, & similiter positæ circa communem diametrum H X I, earum distantiæ semper magis, ac magis diminuuntur; nunquam tamen minores effici possunt interuallo duarum æquidistantium, hyperbolas continentium. Et hoc erat propositum.

Prop. 7. addit.

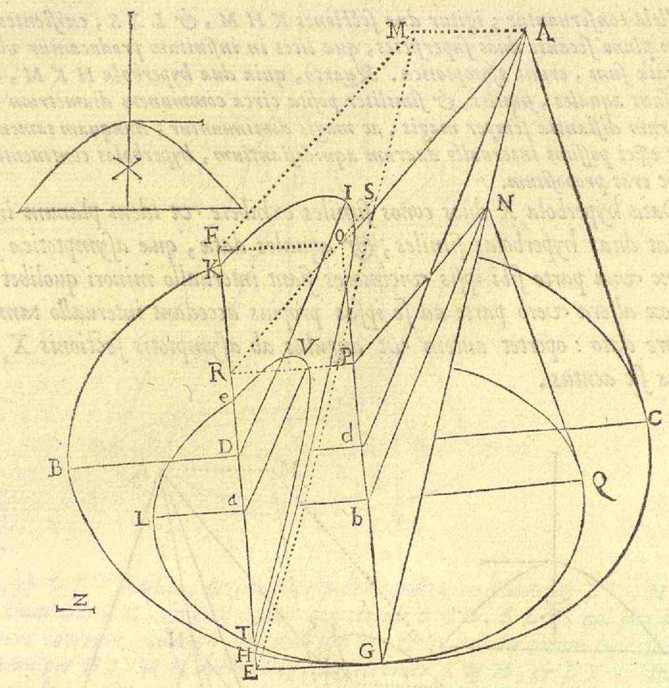
PROP. 13. Addit.

Data hyperbola X duos conos similes exhibere vt idem planum in eis efficiat duas hyperbolas similes, & æquales datæ, quæ asymptoticæ sint, & ex vna parte sibi ipsis viciniores fiant interuallo minori quolibet dato: ex altera verò parte ad se ipsas propius accedant interuallo tamen maiore dato: oportet autem vt angulus ab asymptotis sectionis X contentus sit acutus.



In quolibet plano fiat angulus A d O æqualis angulo inclinationis diametri, & basis hyperbolæ X; & per O d extenso quolibet alio plano, ducatur in eo recta linea B d C perpendicularis ad O d G, & sumpto quolibet alio puncto b in recta linea G O in plano per B G C O ducto, centris d, & b describantur duo

Gg circuli



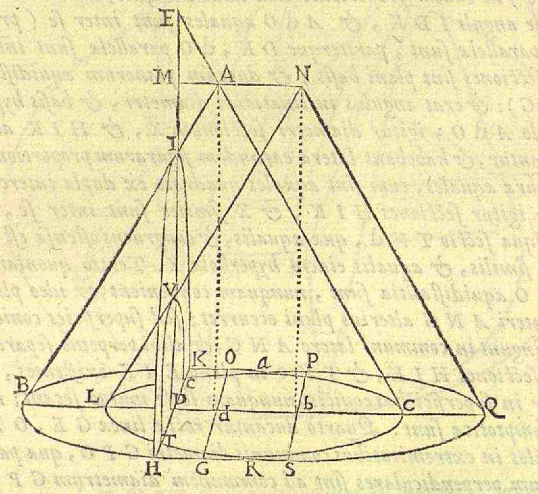
circuli G C O B, & G Q P L se se contingentes in communi puncto G rectæ lineæ G O ducaturque diameter L b Q æquidistans ipsi B C: & vt latus rectum ad transuersum sectionis X, ita fiat quadratum G d ad quadratum d A; & coniungantur rectæ lineæ A G, & A O, ducaturque ex puncto P recta linea P N parallela ipsi O A occurrens G A in N, atque A, & N fiant vertices duorum conorum A B C, & N L Q, & secetur D d æqualis semissi potentis figuram sectionis X; ducaturque per punctum D planum E M F æquidistans plano communi A G O per axes ducto, efficiens in conicis superficiebus sectiones H I K, & T V c; Dico eas esse hyperbolas quæsitas. Quoniam propter parallelas A O, N P est A G ad G O, vt N G ad G P, & ad semisses consequentium, scilicet A G ad G d, atque N G ad G b proportionales erunt, ideoque A d, N b erunt parallelæ, & A d ad d G, seu ad d C est vt N b ad b G, seu ad b Q; estque d C etiam parallela b Q; ergo plana A B C, & N L Q parallela sunt, & anguli A d C, & N b Q æquales sunt, atque triangula A d C, & N b Q similia erunt inter se; ideoque circa angulos æquales C, & Q erit A C ad C d, vt N Q ad Q b, & ad consequentium duplas, scilicet A C ad C B, atq; N Q ad Q L proportionales erunt; & propterea triangula A B C, & N L Q similia erunt, & similiter posita, & inter se parallela; ergo efficient in duobus planis A O G, & M E F inter se æquidistantibus sectionũ diametros I D, & V a parallelas conorũ axibus A d, & N b, & inter se; quare constituent cum sectionũ basibus coinci-

coincidentibus angulos æquales I D H, & V a T & cum ipsis D d, & a b etiã
parallelis inter se continebunt angulos æquales I D d, & V a b, eruntque in-
terceptæ D d, a b æquales (cum sint latera opposita parallelogrammi D b); Prop. 10. addit. huius.
igitur hyperbole H I K, & T V e æquales sunt inter se, & similes atq; earum
figuris æqualia sunt quadrata ex duplis interceptarum D d, & a b. Et quia
triangula A G O, N G P sunt similia in eodem plano, suntque pariter duo cir-
culi basium in vno plano extensi; igitur coni A B C, & N L Q similes sunt Lem. 9. huius.
inter se. Secundò quia vt quadratum A d ad rectangulum G d O, seu ad re-
ctangulum B d C ita est latus transuersum ad rectum sectionis H I K, & (ex
constructione) in eadem proportione erat latus transuersum ad rectum hyperbo-
les X, atque anguli I D K, & A d O æquales sunt inter se (propterea quod
D I, d A parallelæ sunt, pariterque D K, d O parallelæ sunt inter se, cum
communes sectiones sint plani basis, & duorum planorum æquidistantium K I
H, & O A G): & erat angulus inclinationis diametri, & basis hyperbolæ X æ-
qualis angulo A d O; igitur diametri sectionum X, & H I K ad suas bases
æque inclinantur, & habebant latera earundem figurarum proportionalia; suntq;
prædictæ figuræ æquales, cum sint æquales quadrato ex dupla interceptæ D d vt
dictum est: igitur sectiones H I K, & X similes sunt inter se, & æquales; 10. 12. huius.
ideoque reliqua sectio T V d, quæ æqualis, & congruens ostensa est ipsi H I K,
erit quoque similis, & æqualis eidem hyperbolæ X. Tertiò quoniam plana H I
K, & G A O æquidistantia sunt, nunquam conuenient; & ideo planum H I K
nunquam lateri A N G alterius plani occurret; sed superficies conicæ se se tan-
tummodo tangunt in communi latere A N G, & alibi perpetuo separatæ incedunt;
igitur duæ sectiones H I K, & T V e in plano E I K existentes, quæ infinitè
producuntur in superficiebus conicis, nunquam se se mutuo secant; igitur sectio-
nes ipsæ asymptoticæ sunt. Quartò ducantur rectæ lineæ G E, O F, P R tan-
gentes circulos in extremitatibus communis diametri G P O, quæ parallelæ erunt
inter se (cum perpendiculares sint ad communem diametrum G P O): postea
producantur plana E G A, F O A, R P N tangentia conos in lateribus G A,
O A, & P N, & extendantur quousque secent planum conicæ sectionis H I K in
rectis lineis E S M, F M, R S. Et quoniam duo plana æquidistantia G A O,
et E M F efficiunt in eodem plano E G A, vtrumque conum contingente, duas
rectas lineas G A, E M æquidistantes inter se: pari ratione in plano tangente
F O A erunt rectæ lineæ F M, et O A parallelæ inter se: simili modo in plano
R P N erunt P N, et R S inter se æquidistantes, cumque A O, et N P paral-
lelæ sint, erunt quoque F M, et R S inter se æquidistantes; suntque E M, et
M F asymptoti continentes hyperbolen E I K pariterq; rectæ lineæ E S, S R sunt Maurol. lib. 3. de lin. horar. ca. 6. 7.
asymptoti hyperboles T V e: quare duæ hyperbolæ H I K, et T V e, similes ei-
dem X, et æquales, & similiter positæ, quarum duæ asymptoti F M, R S æqui-
distantes sunt; reliquæ verò E M, & E S coincidunt (cum existant in eodem
plano tangente E A), & angulus ab eis contentus E M F, vel E S R est acu-
tus (cum æqualis sit acuto angulo ab asymptotis sectionis X contento, propter si-
militudinẽ sectionũ, vt ab alijs ostensum est): poterit ergo duci ramus breuissimus Propos. 6. addit. huius.
in sectione T V e ad partes V e qui æquidistãs sit rectæ lineæ V I vertices sectionũ
coniungenti: eritque illius breuissimæ portio inter sectiones comprahensa distantia
omniũ maxima; & propterea interualla sectionũ ad vtrasq; partes maximæ distã- Propos. 8. addit. huius.
tiæ successiuè diminuuntur, & ad partes æquidistantiũ asymptotorũ F M, R S dimi-

nuuntur

nuuntur quidem; sed non efficiuntur minora interuallo quo parallelæ asymptoti distant inter se; ex altera verò parte perueniri potest ad interuallum minus quolibet dato. Et hoc erat faciendum.

PROP. 14. Add. *Data hyperbola eadem X præcedentis propositionis describere duos similes conos, vt idem planum in eis efficiat duas hyperbolas similes datæ sectioni, quæ asymptoticæ sint, & ex vtraque parte sibi ipsis viciniores fiant interuallo minori quolibet dato.*



In quolibet plano fiat angulus A d G æqualis angulo inclinationis diametri, & basis hyperbolæ datæ X, & per G d extenso quolibet alio plano, ducatur in eo recta linea B d C perpendicularis ad G d O, & sumpto quolibet alio puncto b in recta linea B C in plano per B G O extenso, centris d, & b, describatur duo circuli inter se æquales G C O B, & S Q P L se se secantes in duobus punctis R, a: atq; vt latus rectum ad transuersum sectionis datæ X, ita fiat quadratũ G d ad quadratũ d A, & ducatur recta linea A N M parallela ipsi B C, quæ secet b N æquidistantẽ d A in N, & coniungantur rectæ lineæ A B, A C, N L, N Q, & fiant A, & N vertices duorũ conorũ A B C, N L Q, & in eorũ superficiebus planum M c T æquidistans planis A G O, & N S P efficiat sectiones H I K, & T V c, quarum diametri D V I genitæ à triangulis A B C, & N L Q per axes in eodem plano existentibus sunt æquidistantes axibus conorum A d, N b, propter planorum æquidistantiam: Dico, eas esse hyperbolas quæsitas. Quoniam (propter æquidistantiam oppositarum linearum) est spatium A b parallelogrammum; igitur conorum axes A d, N b æquales sunt inter se, & æquè inclinantur ad communem rectam lineam B C (propter æquidistantiam earundem A d, N b); suntque æqualium circulorum radij d B, d C, b L, b Q æquales inter se; igitur triangula A B C, N L Q similia sunt inter se, & similiter

ter posita in eodem plano; suntquè etiam duo circuli basium in vno plano extensi; igitur coni A B C, & N L Q similes sunt inter se; & quoniam, vt latus Lem. 9. huius. *transuersum ad rectum sectionis datæ X, ita est quadratum A d ad quadratum radij G d, & ita est latus transuersum ad rectum sectionis H I K; pariterque vt quadratum N b ad quadratum radij L b ita est latus transuersum ad rectũ hyperbolæ T V c; Et quadrata axium ad quadrata radiorum baseos eandem proportionem habet ideo latus transuersum ad rectum sectionis H I K eandem proportionem habebit, quàm latus transuersum ad rectum alterius sectionis T V c, seu eandem, quàm habet latus transuersum ad rectum datæ sectionis X; atque diametri I V D, & diameter sectionis X æquè inclinantur ad bases, vt dictum est; igitur duæ sectiones H I K, & T V c, nedum datæ hyperbolæ X;* Prop. 12. huius. *sed etiam inter se similes sunt. Secundò quoniam duæ peripheriæ circulorum basium circa communem diametrum B C Q se se mutuo secant in duobus punctis R, & a, quæ necessario cadunt inter duas circulorum diametros G O, S P perpendiculares ad communem diametrum B C Q; igitur superficies conorum vicissim se secant semper inter duo triangula, per conorum axes A G O, & N S P, in reliquis autem locis separatæ sunt; planum verò efficiens sectiones H I K, T V c cadit nõ inter axes A d, & N b; igitur duæ sectiones H I K, & T V c existentes in duabus conicis superficiebus, non se secantibus, nunquàm conuenient, & asymptoticæ erunt. Tertiò quoniam recta linea N A M per vertices conorum ducta parallela est communi basi B Q triangulorum per axes, & secat diametrum communem D V I in M: ergo (sicuti ostensum est in prop. 10. addit. huius) erit punctum M centrum sectionis H I K, atq; centrum alterius sectionis T V c; ergo duæ sectiones H I K, & T V c similes sunt inter se, concentricæ, & similiter positæ circa communem diametrum D V I; igitur se-* Propos. 9. addit. huius. *ctionum interualla semper magis, ac magis in infinitum minuuntur, & reperiri possunt minora quolibet interuallo dato. Et hoc erat ostendendum.*

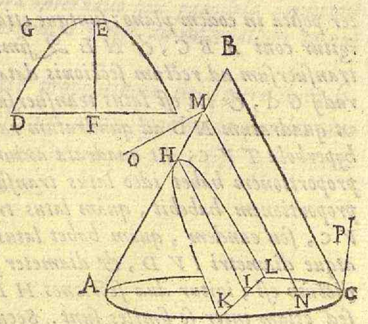
SECTIO DECIMA

Continens Proposit. XXVI. XXVII. & XXVIII.

PROPOSITIO XXVI.

IN cono recto, cuius triangulum per axim sit A B C reperire sectionem datæ parabolæ D E æqualem, cuius axis E F, & erectum E G.

Vt qua-



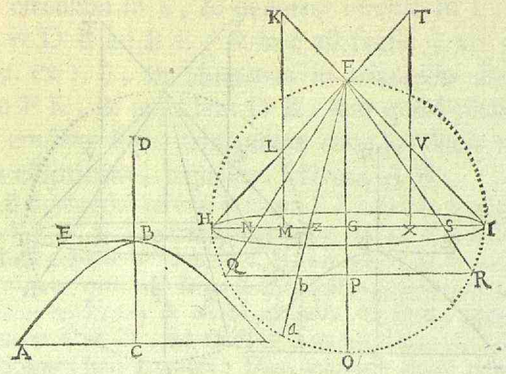
Vt quadratum A C ad C B in B A, ita ponatur E G ad B H: & educamus H I parallelam B C, & extendatur per H I planum eleuatum super triangulum A B C ad angulos rectos efficiens in cono sectionem K H L. Dico eam æqualem esse sectioni D E. Quia quadratum A C ad C B in B A est, vt E G ad B H; ergo potentes eductæ ad axim H I in sectione K H L possunt applicata contenta ab abscissis illarum potentium, & ab E G; quare E G erit erectum sectionis a
K H, & idem etiam est erectum sectionis D E; ergo duo erecta duarum sectionum sunt æqualia, & propterea sectiones æquales sunt (1. ex 6.)

Et dico, quod in cono A B C reperiri non potest sectio alia parabolica, cuius vertex sit super A B, quæ eidem D E sit æqualis. Si enim hoc est possibile, sit axis illius sectionis M N, qui quidem cadet in triangulo A B C; quia conus est rectus, & erectum illius sit M O; atq; M O ad M B erit, vt G E ad B H; estque B H maior, quàm B M; ergo M O b
ex conu. Prop. 1. huius. minor est, quàm G E; quare sectio, cuius axis est M N non est æqualis sectioni D E; & tamen supposita fuit æqualis illi, quod est absurdum. Quare patet propositum.

PROPOSITIO XXVII.

SIt deinde hyperbole A B, cuius axis C D, inclinatus B D, & erectus B E; atque quadratum axis F G dati coni recti F H I ad quadratum G H semidiametri basis eius, non habeat maiorem proportionem, quàm habet figura, scilicet quàm habet D B ad B E. a

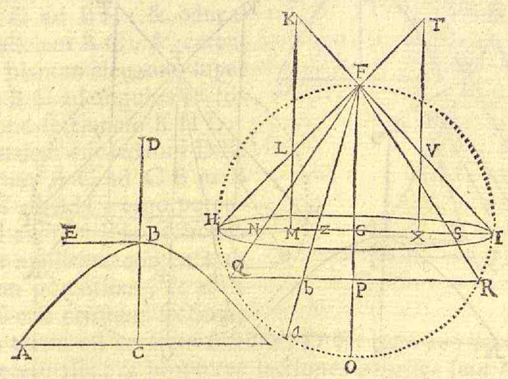
Sit prius proportio eadem, & producamus I F ad K; & ducamus K L subtendentem angulum H F K, quæ parallela sit ipsi F G, & æqualis existat ipsi D B; & per K L planum extendatur eleuatum ad angulos rectos super planum trianguli H F I, quod efficiet in superficie conica sectionem hyperbolicam, cuius axis erit L M, & inclinatus K L. Et quia
12. lib. 1. F G parallela est K L, erit quadratum F G ad G I in G H, vt K L inclinatus ad illius erectum, siue vt D B ad B E; facta autem fuit K L æ-
2. huius. qualis D B; ergo erectus inclinati K L æqualis est B E; & propterea sectio, cuius axis est L M æqualis est sectioni A B. Nec reperiri poterit in cono H F I alia sectio hyperbolica, cuius vertex sit super H F, quæ æqualis sit A B; quia, si reperiri posset esset illius axis in plano trianguli H F I, & eius inclinatus, subtendens angulum H F K æqualis esset D B, nec tamen esset K L, neque ipsi æquidistans (eo quod, si æquidistaret b
ipsi



ipsi K L, non esset eidem æqualis.) His positis si educatur ex F linea ipsi parallela cadet inter F G, F H, aut inter F I, F G; sitque F N; igitur 12. lib. 1.
quadratum F N ad I N in N H est, vt D B ad B E: quod est absurdum; quia quadratum F N maius est, quàm quadratum F G, & N H in N I minus est, quàm quadratum G H.

Postea habeat quadratum F G ad quadratum G H minorem proportionem quàm habet D B ad B E; & circumscribamus circa triangulum H F I circulum; & producamus F G quousque occurrat circuli circumferentiæ in O; ergo quadratum F G ad quadratum G H, nempe ad F G in G O habet minorem proportionem, quàm D B ad B E: & ponamus F G ad G P, vt D B ad B E; & per P ducamus P Q parallellam H I; & coniungamus F R, F Q; quæ occurrant H I in S, N: quare D B ad B E est, vt F G ad G P, quæ est, vt F N ad N Q; nempe vt quadratum F N ad F N in N Q æquale ipsi I N in N H, atque vt quadratum F S ad F S in S R, nempe vt quadratum F S ad I S in S H; & edu-
c camus T V, K L, quæ subtendant duos angulos H F K, I F T, & sint
d parallelæ ipsis F N, & F S, & æquales ipsi D B; igitur duo plana per K L, T V extensa super triangulum H F I ad angulos rectos eleuata, producunt in cono H F I sectiones hyperbolicas, quarum axes L M, V X, & inclinati ipsarum L K, T V, & singuli earum ad suos erectos eandem proportionem habent, quàm D B ad B E, & propterea figuræ sectionum 2. huius.
similes sunt, & æquales, ideoque sectiones, quarum axes sunt L M, V X sunt æquales sectioni A B.

e Nec reperitur sectio præter iam dictas, cuius vertex sit super aliquam duarum linearum H F, F I, & sit æqualis sectioni A B. Quia si reperiri posset, caderet eius axis in planum trianguli H F I, illiusque axi educatur parallela F Z a, quæ non cadet super F R, neque super F Q, eritq; quadratum F Z ad I Z in Z H, quod est æquale ipsi F Z in Z a, nempe F Z ad Z a eandem proportionem haberet, quàm D B ad B E; sed D B ad B E est, vt F G ad G P, nempe F Z ad Z b; ergo proportio F Z
ad

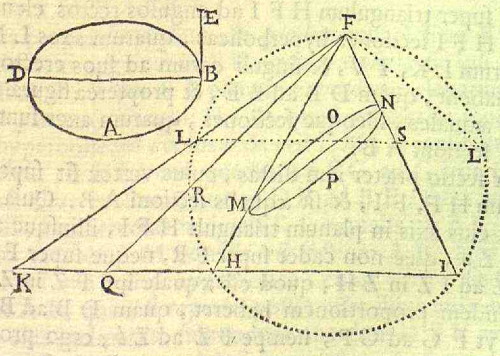


ad Z b, & ad Z a est eadem; & propterea Z b æqualis est Z a; quod est absurdum.

Ponamus iam quadratum F G ad G H in G I maiorem proportionem habere, quàm D B ad B E. Dico in cono H F I exhiberi non posse sectionem æqualem hyperbolæ A B. Si enim exhiberi posset illius axi aliqua parallela reperiretur vt F N: & quadratum F N ad I N in N H maiorem proportionem habens, quàm quadratum F G ad quadratum G H, erit vt D B ad B E; quæ minor est proportione quadrati F G ad quadratum G H: quod est absurdum. Non ergo reperitur in cono H F I sectio æqualis hyperbolæ A B. Et hoc erat ostendendum.

PROPOSITIO XXVIII.

Sit iam sectio elliptica A B, cuius axis transuersus B D, & erectus illius B E, & circa coni triangulum H F I descri- a

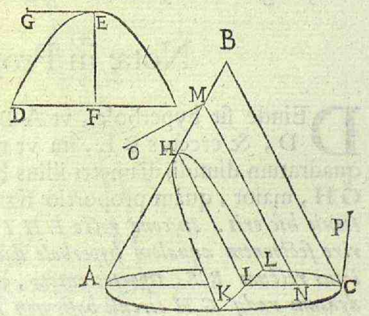


bamus

bamus circulum, & ex F ducamus lineam ad H I, occurrentem ipsi extra circulum in K, & occurrat circulo in L, itaut sit F K ad K L, vt D B ad B E (& hoc est facile, vti demonstraui-
b mus in 59. ex 1.), & educamus in triangulo chordam M N
c parallelam F K, & æqualem D B; Aio quod planum transiens per M N erectum super triangulum coni producit in cono H F I sectionem ellipticam, æqualem sectioni A B.

Quia D B transuersus ad eius erectum B E eandem proportionem habebat, quàm F K ad K L, nempe quàm quadratum F K habet ad F K in K L, quod est æquale ipsi I K in K H; estque vt M N parallela ipsi F K 13.lib.1.
ad illius erectum; quare D B ad B E eandem proportionem habet, quàm M N ad illius erectum; & M N æqualis est D B; igitur figuræ dua-
d rum sectionum A B D, M O N P sunt æquales, & similes, & ideo 2. huius.
duæ illæ sectiones sunt æquales. Dico insuper, quod non reperitur in
e cono H F I vlla alia sectio elliptica, habens verticem super F I, cuius axis non æquidistet alicui duarum F L K, quæ æqualis sit eidem B A D. Quia si possibile esset, ostenderetur axis eius cadere in planum trianguli H F I, quia sectio est elliptica, & æqualis sectioni A B, vtiq; eius axis occurret F I, F H, & æqualis est D B; cumque vertex illius sit super F I, non cadet axis eius super M N, nec ipsi erit parallelus; & ideo educta F Q parallela axi eius non cadet F Q super F K, & secabit arcum F H in R; eritque proportio axis illius sectionis ad eius erectum, nempe 13.lib.1.
quadratum F Q ad I Q in Q H, quod est æquale ipsi Q F in Q R, nempe vt F Q ad Q R, ità erit D B ad B E, quæ eandem proportionem ha-
f bet quàm F K ad K L, & diuidendo permutandoq; F R maior subtensa ad minorem F L eandem proportionem habebit, quàm R Q minor intercepta ad maiorem K L; quod est absurdum: non ergo reperitur in cono H F I sectio elliptica, verticem habens in F I, quæ sit æqualis sectioni A B, præter superius expositam. Et hoc erat propositum.

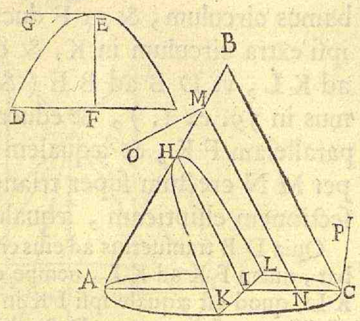
Notæ in Proposit. XXVI.



a Ergo potentes egredientes ex sectione L H K ad axim H I poterunt applicatum, quod continet abscissum illius potentis cum G E; ergo G E est erectus sectionis L H; & est etiã erectus sectionis D E; igitur duo applicata duarum sectionũ sunt æqualia, & ideo sectio D E congruit sectioni K H L, & propterea æquales sunt, &c. *Ex eo quod quadratum A C basis trianguli per axim coni recti ad rectangulum C B A, sub eius lateribus con-*

Hh *con-*

contentum, habet eandẽ rationem, quam G E ad H B, sufficienter deducitur, quod
11. lib. 1. *G E sit latus rectum tàm parabolæ L H K, quàm D E; & ideo erit parabole L*
Propos. 1. huius. *H æqualis D E. Non igitur necesse est, vt rectangula sub abscissis, & lateribus rectis æqualibus ostendãtur æqualia inter se, & inde eliciatur æqualitas, & congruentia sectionum. Quapropter casu illa verba in Codice Arabico irrepsisse puto.*



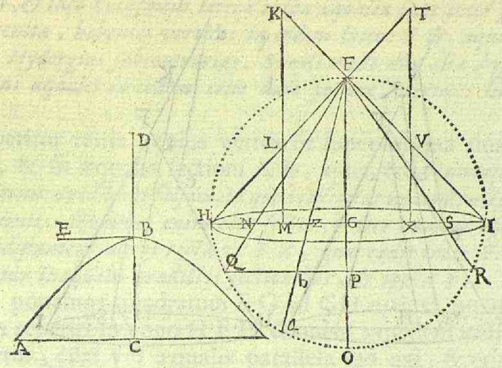
Et dico, quod non reperiatur in sectione A B C alia sectio parabolica; b
quia si reperiretur, &c. *Verba, quæ in hoc textu addidi ex serie demonstrationis facile colliguntur: Sed animaduertendum est, quod ne dum in cono recto, sed in quolibet cono scaleno quomodolibet per axim secetur triangulo A B C, designari potest in eius superficie parabole æqualis datæ D E.*

Ducatur C P contingens circulum basis in C, & in parabola D E ducatur
51. lib. 2. *diameter E F, & contingens verticalis, quæ contineat angulum F E G æqualem angulo B C P; sitque G E latus rectum diametri F E; atque vt quadratum C A ad rectangulum C B A, ita fiat G E ad H B, & per H extendatur planum L H K æquidistans plano per B C P ducto. Dico sectionem L H K esse parabolen quæsitam. Quia plana æquidistantia L H K, & B C P efficiunt in circulo basis rectas P C, L K inter se parallelas, & in plano A B C efficiunt rectas H I, B C inter se parallelas; ergo anguli B C P, & H I L æquales sunt, sed in parabola D E diameter E F efficit cum ordinatis ad eam applicatis angulos*
Conu. 46. lib. 1. *æquales F E G, scilicet ei, qui cum tangente verticali constituit, seu angulo B C P; ergo duarum sectionum L H K, & D E, diametri H I, & E F æque sunt inclinatæ ad suas bases, cumquè latus rectum parabolæ L H K ad H B sit, vt quadratum C A ad rectangulum C B A, seu vt G E ad H B; igitur duo latera recta similium diametrorum I H, & F E ad H B eandem proportionem habent; & ideo æqualia sunt inter se; quare sectiones ipsæ æquales, & congruen-*
10. huius. *tes erunt. Quod erat ostendendum.*

Multoties in eodem cono duæ parabolæ æquales subcontrariæ duci possunt, vt Mydorgius demonstrauit.

Notæ in Proposit. XXVII.

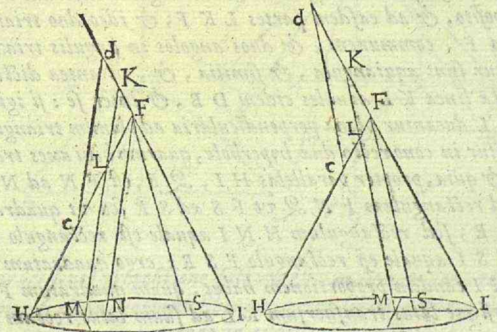
DEinde sit hyperbole, vt A B, & axis illius C D, & inclinatus B D, & erectus B E, ita vt non sit proportio quadrati axis coni ad quadratum dimidij diametri illius basis, vt quadratum F G ad quadratum G H, maior, quàm proportio figuræ sectionis: &c. *Sensus huius propositionis hic erit. In cono recto F H I, cuius triangulum per axim H F I reperire sectionem æqualem hyperbole datæ A B, cuius transuersus axis D B, & latus rectum B E. Oportet autem, vt quadratum F G axis dati coni ad quadratum radij G H circuli basis non habeant maiorem proportionem, quàm habent* a



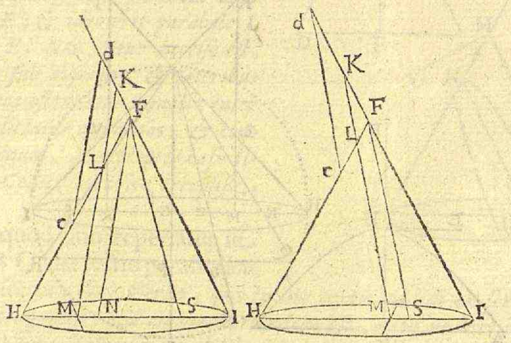
bent figuræ latera, scilicet, quàm habet D B ad B E. At quomodo duci debeat subtensa K L quæ æqualis sit ipsi D B, & parallela alteri F G, ostendetur inferius.

b Et non reperitur in cono H F I alia sectio hyperbolica super F H, & æqualis A B, &c. *Addidi verba quæ ad huius textus integritatem facere videbantur.*

c Et educamus T V, K L, quæ subtendant duos angulos L F K, I F T, & sint parallelæ ipsis F N, F S, & æquales D B, &c. *Quomodo autem hoc fieri possit modo ostendemus. Sumatur in recta linea H F quodlibet punctum* c *inter F, & H; atque à puncto* c *ducatur recta linea* c d *parallela ipsi F N, vel F S, quæ secet productionem alterius lateris I F in* d, *& quàm proportionem habet* c d *ad D B, eandem habeat C F ad F L, & per punctum L ducatur recta L K parallela ipsi* c d. *Manifestum est* c d *ad L K eandem proportionem habere, quàm* c *F ad F L, seu quàm* c d *ad B D; & ideo K L æqualis erit B D, & subtendit angulum L F K, estque parallela ipsi* c d, *seu ipsi F N, vel F S. Et hoc erat faciendum.*



 Igitur



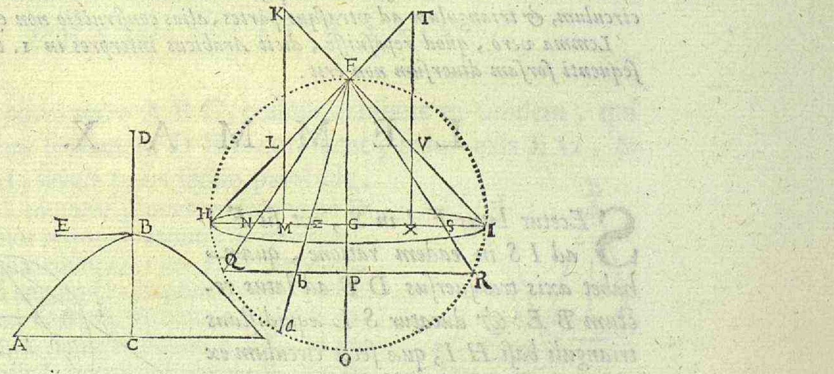
Igitur duo plana transeuntia per K L, T V eleuata super triangulum H F I ad angulos rectos producunt in cono H F I duas sectiones hyperbolicas, quarum axes L M, V X, & inclinati ipsarum L K, V T, & singuli eorum ad suos erectos sunt, vt D B ad B E; ergo figuræ trium sectionum sunt similes, & æquales; & propterea duæ sectiones, quarum axes sunt L M, V X sunt æquales sectioni A B, &c. d *Ex textu mendoso expungi debent superuacanea aliqua verba, sicut in contextu habetur. Non enim verum est, quod duæ tantummodo hyperbolæ æquales eidem A B duci possunt in cono recto H F I, vertices habentes in lateribus H F, & F I, sed quatuor inter se æquales esse possunt; nam super latus F H duci possunt duæ hyperbolæ, quarum axes transuersi K L æquales sint ipsi B D, & æquidistantes sint rectis lineis F N, & F S. Quod sic ostendetur. Quoniam recta linea Q R ducta est parallela ipsi H I erunt duo arcus circuli intercepti H Q, I R æquales inter se; & ideo duo anguli ad peripheriam H F Q, & I F R æquales erunt inter se; posita autem fuit K L æqualis, & parallela ipsi F N; igitur duo anguli alterni K L F, & H F N æquales sunt inter se: pari ratione; quia reliqua K L ducta est parallela ipsi F S, erit angulus externus S F I æqualis interno, & opposito, & ad easdem partes L K F; & ideo duo triangula L F K habent angulum F, communem, & duos angulos in singulis triangulis K, & L æquales; igitur sunt æquiangula, & similia, &, vt antea dictum est, fieri possunt duæ rectæ lineæ K L æquales eidem D B, & inter se: si igitur per duas rectas lineas K L ducantur plana perpendicularia ad planum trianguli per axim H F I, efficientur in cono recto duæ hyperbolæ, quarum bini axes transuersi K L sunt æquales: & quia, propter parallelas H I, Q R, est F N ad N Q seu quadratum F N ad rectangulum F N Q vt F S ad S R seu vt quadratum F S ad rectangum F S R; sed rectangulum H N I æquale est rectangulo F N Q, & rectangulum H S I æquale est rectangulo F S R: ergo quadratum F N ad rectangulum H N I eandem proportionem habet; quàm quadratum F S ad rectã-*
12. lib. 1. *gulum H S I; estque latus transuersum K L ad suum latus rectum, vt quadra-*
Ibidem. *tum F N ad rectangulum H N I, pariterque latus transuersum K L alterius sectionis ad suum latus rectum est vt quadratum F S ad rectangulum H S I:*

igitur

igitur duo æqualia latera transuersa K L ad sua latera recta eandem proportionem habent, & ideo huiusmodi latera recta æqualia sunt inter se; ideoque duæ hyperbolæ genitæ, habentes vertices in eodem latere F H, æquales sunt inter se, 10. huius.
quas vocat Mydorgius subcontrarias. Simili modo duæ aliæ hyperbolæ inter se, & prioribus æquales in eodem cono duci possunt, vertices habentes in latere F I.

e Nec reperitur tertia, cuius vertex sit super aliqua duarum linearum H F, F I, & sit æqualis sectioni A B, quia, &c. *Immutaui particulam, quæ propositionem reddebat falsam, id quod colligitur ex constructione, & progressu demonstrationis: Quælibet enim alia sectio, præter quatuor assignatas, habebit axem æquidistantem alicui rectæ vt F Z, quæ cadit inter F N, & F S; & hæc ostendetur inæqualis prædictis sectionibus, & ipsi A B.*

f Deinde ponamus quadratum F G ad G H maius, quàm D B ad B E. Dico, non reperiri in cono H F I sectionem æqualem sectioni A B: nam, si reperiretur, esset vel æqualis parallela suo axi, & erit quadratum N F ad I N in N H, &c. *Legendum esse vt in textu dixi constat ex progressu totius propositionis. Iam facili negotio demonstratio perfici potest, nam axis F G minor est quàm F N, quæ subtendit angulum rectum G, quadratum vero G H semissius totius H I maius est rectangulo I N H, sub inæqualibus segmentis contentum; propterea quadratum F N ad rectangulum I N H maiorem proportionem habebit, quàm quadratum G F ad quadratum G H: estque D B ad*
B E, vt quadratum F N ad rectangulum I N H; propterea quod F N paral- 12. lib. 1.
lela est axi illius sectionis, quæ posita fuit æqualis A B; igitur D B ad B E maiorem proportionem habet, quàm quadratum F G ad quadratum G H; quod est contra hypothesin: habebat enim quadratum F G ad quadratum G H maiorem proportionem, quàm D B ad B E. Non ergo reperitur in cono; &c.

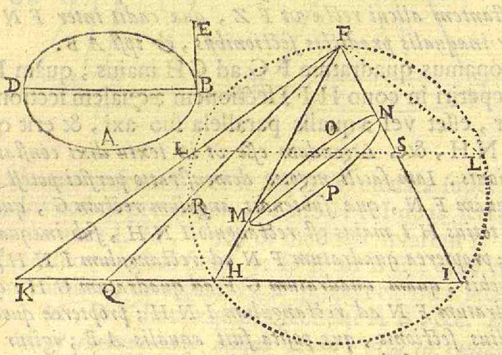


Sicuti in præcedenti propositione factum est, nedum in cono recto, sed etiam in quolibet cono scaleno, quomodolibet per axim sectio à triangulo H F I determinari posset, quando, & quomodo in eo designari posset sectio æqualis datæ hyperbolæ A B. Quod ab alijs factum est.

Notæ

Notæ in Proposit. XXVIII.

DEinde sit sectio elliptica, vt A B, & axis eius transuersus B D, & erectus illius B E; & sit triãgulum coni H F I, & circumducamus circa illum circulum, & educamus ex F lineam F L K occurrentem ipsi extra circulum in K; & occurrat circulo in L ita vt sit F K ad K L, vt D B ad B E; & est facile (vti demonstrauimus in 59. ex 1.), &c. a

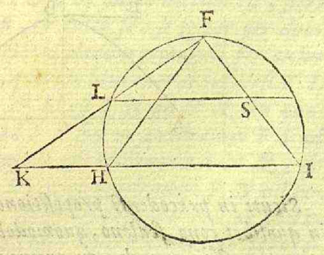


Sensus propositionis hic erit. In cono recto, cuius triangulum per axim H F I reperire sectionem æqualem datæ ellipsi A B, cuius axis transuersus D B, & latus rectum B E. In constructione postea duci debet recta linea F L K extra circulum, & triangulum ad vtrasque partes, alias constructio non esset perfecta.

Lemma verò, quod reposuisse, dicit Arabicus interpres in 1. libro, ab hoc sequenti forsam diuersum non erit.

L E M M A X.

SEcetur latus F I in S, vt sit F I ad I S in eadem ratione, quàm habet axis transuersus D B ad latus rectum B E: & ducatur S L æquidistans trianguli basi H I, quæ secet circulum ex vtraque parte in L, & coniungantur rectæ lineæ F L, producanturque quousque secent basim H I in punctis K.



Quoniam in triangulo F I K ducitur recta linea S L æquidistans basi I K, erit F I ad

erit

I S, vt F K ad K L: sed erat D B ad B E, vt F I ad I S; igitur F K ad K L eandem proportionem habebit: quàm D B ad D E.

b Et educamus in triangulo chordam M N parallelam K F, & æqualem D B, &c. *Non vna, sed duplex recta linea M N duci potest parallela cuilibet duarum F K, quæ interius subtendat angulum verticis F trianguli H F I per axim ducti. Et potest etiam effici M N æqualis ipsi D B, vt in expositione præcedentis propositionis ostensum est.*

c Itaque planum, transiens per M N, producit in cono H F I sectionem ellipticam æqualem sectioni A B; quia, &c. *Addidi verba, quæ in textu desiderantur, vt sensus perfectus sit.*

d Ergo duæ illæ sectiones sunt æquales, &c. *Concipi debet sectio N O M P, duplex, quia nimirum duæ sectiones sub contrariæ, æquales sunt, vt facile cum Mydorgio ostendi potest.*

e Et dico, quod non reperiatur in cono H F I sectio elliptica, habens verticem super F I; quia si possibile esset, &c. *Textus valde corruptus exposito modo restitui debere constat ex progressu demonstrationis.*

f Et diuidendo F R maior ad minorem R Q est vt F L minor ad maiorem K L, &c. *Supplendæ fuerunt particulæ aliquæ ad tollendam equiuocationem.*

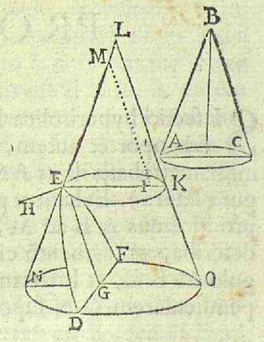
SECTIO VNDECIMA

Continens Proposit. XXIX. XXX. & XXXI.

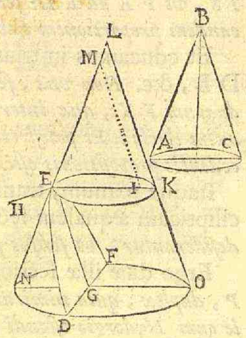
PROPOSITIO XXIX.

DAto cono recto A B C, conum exhibere ei similem, qui datam sectionem D E F contineat, cuius axis E G, & erectus E H; sitque prius sectio parabole.

Super E G educatur planum ad sectionem D E F ad angulos rectos eleuatum, in quo ducatur E I K, quæ contineat cum E G angulum æqualem ipsi angulo C: & ponamus E H ad E K, vt A C ad C B, & faciamus super E K triangulum E L K simile triangulo A B C, vt angulus verticalis L æqualis sit angulo B. Faciamus etiam conum, cuius vertex sit L, eiusque basis circulus, cuius diameter sit E K, qui sit eleuatus super triangulum E L K ad angulos rectos: erit igitur angulus E K L æqualis ipsi C, a



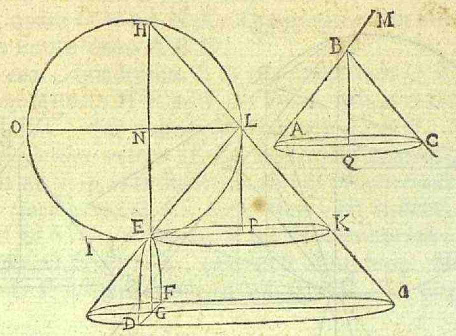
sed



ſed angulus K E G factus fuit etiam eidẽ æqua- b
lis ; igitur L K , quod eſt latus trianguli per a-
xim coni tranſeuntis , parallelum erit ipſi E G : c
& propterea planum , in quo eſt ſectio D E F
producit in cono ſectionem parabolicam ; &
quia A C ad C B eſt , vt H E ad E K, & vt E d
K ad K L; igitur H E ad E L (quæ eſt æqualis
ipſi K L) eandem proportionem habet , quàm
quadratum E K ad quadratum K L , nempe ad
11. lib. 1. K L in L E: quapropter H E eſt erectus ſectio-
nis prouenientis in cono, ſed eſt etiam erectus
ſectionis D E F ; igitur D E F exiſtit in ſuperfi-
Def. 8. huius. cie coni, cuius vertex eſt L , qui ſimilis eſt co-
no A B C ; eo quod triangulum A B C ſimi-
le eſt triangulo E L K. Dico etiam, quod ſectio D E F contineri non
poteſt ab aliquo alio cono , ſimili cono A B C , cuius vertex ſit ex eadẽ e
parte ſectionis præter conum iam exhibitum . Nam (ſi poſſibile eſt) ſit
conus habens verticem M , & triangulum eius erectum ſit ſuper planum
ſectionis D E F , & communis ſectio illius, & coni ſectionis erit axis eius;
eſtque E G illius axis ; ergo hæc eſt abſciſſio communis eorundem pla-
norum ; ſed eſt E G abſciſſio communis plani ſectionis , & plani trianguli
K E L , ſuper quod eſt etiam erectum ; igitur duo triangula E L K, E M
Def. 8. I ſunt in eodem plano , & angulus L æqualis eſt M (propter ſimilitudinẽ
duorum conorum); ergo E M eſt indirectum ipſi E L , & educta E K ad f
Def. 9. I ſectio D E F continebitur in cono, cuius vertex eſt M : ſi autem pona-
mus proportionem lineæ alicuius ad E M , eandem quàm habet quadra-
11. lib. 1. tum E I ad I M in M E , linea illa eſſet erectus ſectionis D E F ; ſed H
E erat erectus ſectionis D E F ; igitur H E eſt illa linea , hæc autem ad
E L eandem proportionem habebat , quàm quadratum E K ad K L in
L E ; ergo quadratum E K ad K L in L E eandem proportionem habet,
quàm quadratũ E I ad I M in M E ; igitur H E ad E M , & ad E L ean-
dem proportionem habet : quod eſt abſurdum. Non ergo in aliquo alio
cono ſectio contineri poteſt , vt diximus. Et hoc erat propoſitum.

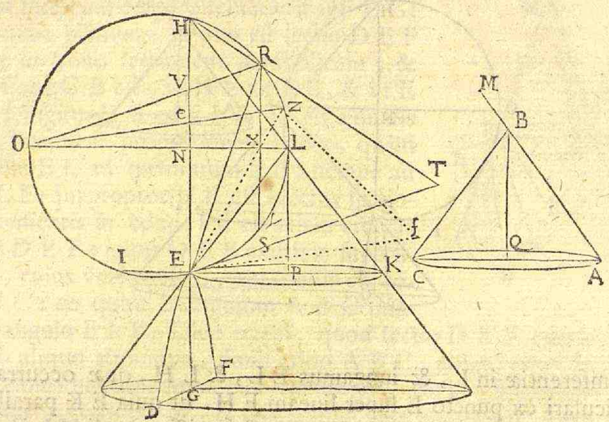
PROPOSITIO XXX.

SI ſectio hyperbolica D E F, cuius axis E G inclinatus E H, & erectus a
E I (oportet autem, vt quadratum axis B Q coni recti ad quadratũ ſe-
midiametri baſis illius A Q non maiorẽ proportionẽ habeat, quàm habent ſi-
guræ latera). Et habeat prius eandem proportionẽ, quàm H E ad E I, &
producamus A B ad M, & ſuper H E in plano erecto ad ſectionẽ D E F
deſcribamus ſegmentũ circuli E L H, quod capiat angulum æqualem an-
gulo M B C, & bifariam ſecemus arcum E O H in O, & educamus per-
pendicularem O N ſuper H E ; & producamus illam, quouſque occur-



rat circumferentiæ in L , & iungamus E L , & L H , quæ occurrat in K
perpendiculari ex puncto E ſuper lineam E H. Et quia E K parallela eſt
L O erit angulus K æqualis H L O , qui eſt ſemiſſis anguli H L E, & hic
eſt æqualis duobus angulis K, K E L ; igitur ſunt æquales; quare K L E
eſt æquicrus, & angulus K L E æqualis eſt A B C; quia angulus H L E
c æqualis eſt M B C ; quapropter K L E ſimile eſt A B C , quia æqualia
crura etiam habet ! Si autem ponamus K L E triangulum coni, cuius
vertex L , & planum illius trianguli erectum ad planum D E F ; vtique
planum ſectionis producit in cono hyperbolen , cuius axis E G , inclina-
tus E H ; eo quod ſi educamus L P , B Q perpendiculares in duobus
triangulis , habebit quadratum B Q ad C Q in Q A (quod eſt vt H E
ad E I) eandem proportionem , quàm quadratum L P ad P K in P E :
quare potentes æductæ in illa ſectione ad axim E G , poterunt compa-
rata, applicata ad E I erectum; ſed potentes, eductæ in ſectione D E F, 12. lib. 1.
poſſunt quoque illa applicata ; ergo ſectio D E F æqualis eſt ſectioni ,
prouenienti in cono , cuius vertex eſt L , & exiſtit in eodem plano , ha-
betque eundem axim : quare conus , cuius vertex L continet ſectionem Defin. 9.
D E F, & eſt ſimilis cono A B C.

Dico rurſus , quod nullus alius conus ſimilis cono A B C , cuius ver-
tex ſit in ea parte , in qua eſt L , præter iam dictum , continebit hanc
d eandem ſectionem. Si enim hoc verum non eſt , contineat illam alius
conus ſimilis cono A B C, cuius vertex R in plano L E G ; atque latera
illius ſint E R , R T . Quia angulus E R T æqualis eſt E L K, & eorum
conſequentes æquales inter ſe in eodem circuli ſegmento E L H exiſtent,
eo quod T R producta occurrit axi tranſuerſo E H in H , & iungamus R
O, & ex E educamus E T, quæ ſit parallela coniunctæ rectæ lineæ O R;
vnde angulus O R H æqualis eſt O R E) propter æqualitatem arcuum
ſuorum, & ſunt æquales duobus angulis R T E , R E T , ergo E R T eſt
æquicrus , & angulus T R E æqualis eſt A B C : educatur iam R S pa-
rallela H E , tunc quadratum R S ad T S in S E eandem proportionem
habebit , quàm E H inclinatus ſectionis D E F ad E I erectum illius ; eo
quod ſectionem D E F continet conus , cuius vertex eſt R ; ſed H E ad



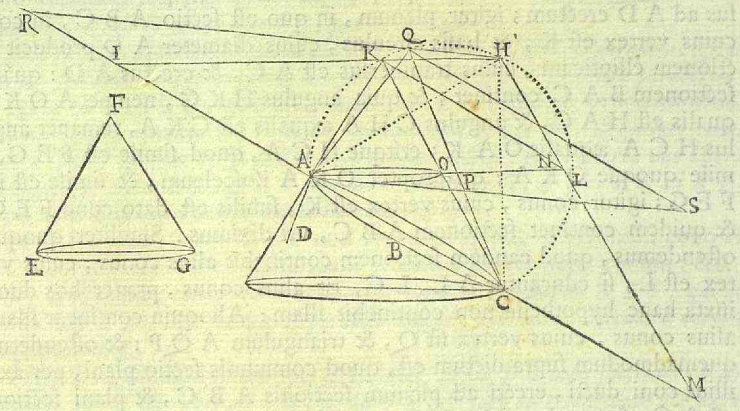
E I eandem proportionẽ habet, quàm quadratum B Q ad C Q in Q A:
estq; C Q æqualis Q A, atq; T S æqualis S E, & T S ad S E eandẽ pro- e
portionẽ habet, quã T R ad R H, seu quàm E V ad V H; igitur E V æqua-
lis est V H; quod est absurdum; propterea quo L O diameter, quæ ad illã
perpendicularis est, bifariam secat eam in N. Ostensum igitur est, non repe-
riri conum alium continentem sectionem D E F, præter superius exposi-
tum. Tandem supponamus, quadratum B Q ad quadratum Q A habere
minorem proportionem, quàm E H ad E I. Patet quadratum L P, nẽ- f
pe N E, seu O N in N L ad quadratum E P, nempe ad quadratum N
L, scilicet O N ad N L habere minorem proportionem, quàm H E ad
E I: ponamus iam O N ad N X, vt H E ad E I, & per X ducamus R
X Y parallelam H E, & iungamus E R, O R, & H R producatur ad T
quousque secet E T parallelam ipsi O R. Ostendetur (quemadmodum g
supra dictum est) quod E T R, B A C sunt isoscelia, & similia. Et quia
E H ad E I est vt O N ad N X; nempe vt O V ad V R, nempe vt O V
in V R, quod est æquale ipsi E V in V H ad quadratum V R; hæc au-
tem proportio componitur ex E V, nempe S R ad V R, nempe ad E S,
& ex proportione V H ad V R, nempe S R ad S T, ex quibus compo-
nitur proportio quadrati R S ad S T in S E; igitur quadratum R S ad E
S in S T eandẽ proportionem habet, quàm H E ad E I; & propterea
planum sectionis D E F in cono, cuius vertex est R, & illius trianguli
latera R E, R T, producit sectionem hyperbolicam, cuius inclinatus est
E H, & erectus E I; quare conus cuius vertex est R, continet sectionẽ D E
F, nec non continet illam alius conus, huic cono similis, cuius vertex
est Y; & hi duo coni sunt similes cono A B C, nec continet illam ter-
tius alius conus, qui similis sit cono A B C, nam (si hoc fieri possibile
est) contineat illam alius conus, cuius vertex Z, & punctum verticis
illius incidet in arcum E L H, & iungamus O Z, quæ secet H E in *e*: h
Inde

Inde demonstrabitur, quod H E ad E I habebit necessario eandem pro-
portionem, quàm O *e* ad *e* Z; quod est absurdum, quia haberet eandem
proportionem, quàm O N ad N X. Quapropter non continet illam ter-
tius alius conus similis cono A B C.

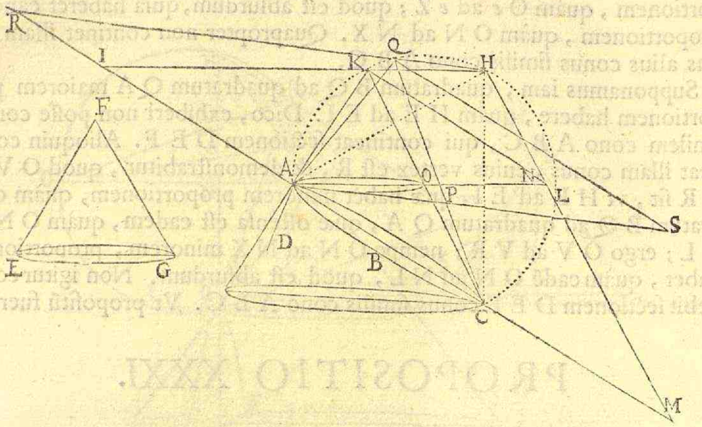
Supponamus iam, quadratum B Q ad quadratum Q A maiorem pro-
portionem habere, quàm H E ad E I. Dico, exhiberi non posse conum
i similem cono A B C, qui contineat sectionem D E F. Alioquin conti-
neat illam conus, cuius vertex est R, & demonstrabitur, quod O V ad
V R sit, vt H E ad E I, quæ habet minorem proportionem, quàm qua-
dratum B Q ad quadratum Q A, quæ ostensa est eadem, quàm O N ad
N L; ergo O V ad V R; nempe O N ad N X minorem, proportionem
habet, quàm eadẽ O N ad N L, quod est absurdum. Non igitur conti-
nebit sectionem D E F conus similis cono A B C. Vt propositũ fuerat.

PROPOSITIO XXXI.

a Sit tandem sectio elliptica A B C, eiusque transuersus axis A C, &
erectus A D, & in plano perpendiculariter erecto ad sectionis pla-
num A B C, fiat super A C segmentum circuli, quod capiat angulum



æqualem angulo F, eumque bifariam diuidamus in H, & iungamus A H, Lem. 10. huius.
C H, & ex H educamus H I, quæ secet circulum in K, & occurrat sub-
tensæ extra circulum in I; sitque H I ad I K, vt A C ad A D: & e-
ducamus H L M easdem conditiones habens; & iungamus C K, A K,
ducaturque K N parallela A C, & A N parallela H I, quæ secet K C
b in O. Quia H I in I K (quod est æquale ipsi C I in A I ad quadratum
I K) est vt A C ed A D; & proportio C I in A I ad quadratum I K
componitur ex ratione C I ad I K, nempe K N ad N O (propter simili-
tudinem



tudinem duorum triangulorum), & ex ratione A I, nempe K N ad I K, nempe ad A N (propter parallelas), & ex his duabus proportionibus componitur proportio quadrati K N ad A N in N O; ergo quadratum K N ad A N in N O eandem proportionem habet, quàm A C transuersus ad A D erectum; igitur planum, in quo est sectio A B C, in cono cuius vertex est K, & basis circulus, cuius diameter A O producit se-
13. & 54. lib. 1. ctionem ellipticam, cuius transuersus est A C, & erectus A D: quare
Defin. 9. huius. sectionem B A C continet; & quia angulus H K C, nempe A O K æ- c
qualis est H A C, & angulus C H A æqualis est C K A, remanet angulus H C A æqualis O A K; eritque H C A, quod simile est F E G, simile quoque O K A; quapropter O K A isosceleum, & simile est ipsi
Defin. 8. huus. F E G; igitur conus, cuius vertex est K, similis est dato cono F E G, & quidem continet sectionem A B C, vti diximus. Similiter quoque ostendemus, quod eandem sectionem continebit alius conus, cuius vertex est L, si educantur A L, L C. Et alius conus, præter hos duos, iuxta hanc hypothesin non continebit illam: Alioquin contineat illam d
alius conus, cuius vertex sit Q, & triangulum A Q P: & ostendetur, quemadmodum supra dictum est, quod communis sectio plani, per axim illius coni ducti, erecti ad planum sectionis A B C, & plani sectionis est A C, & quod punctum verticis illius coni sit in circumferentia segmenti A H C, & sit Q, ducamus per H Q rectam H R, & iungamus C Q, A Q, & educamus A S parallelam H Q R, & Q S parallelam A C, erit Q A P triangulum illius coni, & est isosceleum, erit quadratum Q S ad A S in S P, vt C R in R A; quod est æquale ipsi H R in R Q ad quadratum R Q, nempe H R ad R Q; ergo H R ad R Q est, vt A C e
ad A D, quæ est, vt H I ad I K; ergo diuidendo permutandoq; H K maior ad H Q minorem, eandem proportionem habebit, quàm K I minor ad R Q maiorem: & hoc est absurdum. Non ergo reperiri potest tertius conus, continens sectionem B A C. Et hoc erat ostendendum.

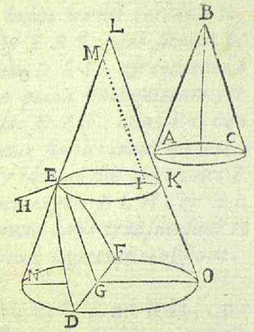
Notę

Notæ in Proposit. XXIX.

a ET faciamus super E K triangulum simile triangulo A B C, &c. *Nimirum, fiat angulus K E L æqualis angulo A, & angulus L fiat æqualis angulo B.*

b Ergo L K, quæ est latus trianguli transeuntis per axim E G parallelũ est E G, &c. *Legi debet, vt in textu videre est. Hoc constat ex constructione; nam duo anguli alterni G E K, , & L K E æquales sunt eidem angulo C.*

c Et propterea planum, in quo est sectio D E F producit in cono sectionem parabolicam, &c. *Quoniam planum circuli, cuius diameter E K perpendiculare est ad planum trianguli L E K: igitur si ducatur planum N F O æquidistans circulo E K secans planum D E F in recta linea D G F, erit quoque circulus, & perpendicularis ad planum triãguli per axim L E K: sed ex constructione planum D E F perpendiculare quoque erat ad idem triangulum per axim E L K; igitur D F communis sectio eorundem planorum perpendicularis quoque erit ad idem planum L N O, & efficiet angulos rectos cum diametro circuli N O, & cum E G, quæ in eodẽ plano existunt, & cũ illo conueniunt in puncto G; suntq; E G, & L O parallelæ: igitur* 11. lib. 1. *planum sectionis D E F producit necessariò in cono L N O producto parabolam.*



d Igitur H E ad E L, quæ est æqualis ipsi L K eamdem proportionem habet, quàm quadratum E K ad quadratum K L, &c. *Quoniam conus L E K similis est cono recto A B C erit quoque rectus: & propterea duo latera trianguli per axim E L, & L K æqualia erunt inter se, & ideo E K ad K L, atque ad E L eandem proportionem habebit, &c.*

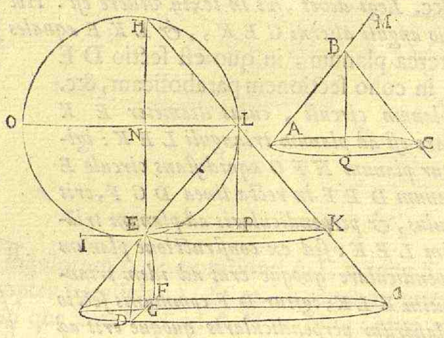
e Et dico, quod sectio D E F non reperitur in alio cono simili cono A B C, cuius vertex sit ex parte plani sectionis præter hunc conum, &c. *Idest. Nullus alius conus rectus continebit eandem parabolam D E F, qui sit similis cono A B C, & vertex E parabole magis, aut minus recedat à vertice coni, quàm E L.*

f Ergo E M est indirectum ipsi E L, &c. *Quia D G basis sectionis conicæ perpendicularis esse debet ad G O, & ad G E, & ideo ad triangulum per axim vtriusque coni recti L E K, & M E I; & conueniunt plana eorundem triangulorum in E G axi conicæ sectionis geniti ab eis; ergo dicta triangula in eodem plano existunt per rectas E G, & G O ducto; & in vtroque cono triangulorum per axes latera L K, & M I parallela sunt eidem axi E G paraboles: ergo L K, M I parallelæ sunt inter se, & anguli L, & M æquales sunt propter similitudinem triangulorum per axes in conis similibus: igitur L E, & M E sunt quoq; parallelæ, & conueniunt in E vertice paraboles; ergo in directum sunt constitutæ.*

Notæ

Notæ in Proposit. XXX.

ITa vt non sit proportio quadrati axis coni, B Q ad quadratum semidiametri basis illius vt C Q minor proportione figuræ sectionis, &c. a
Rursus datus sit conus rectus A B C, cuius axis B Q semidiameter circuli ba-



sis sit C Q, exhiberi aebet alius conus similis dato, qui datam hyperbolen D E F contineat; oportet autem, vt quadratum axis coni B Q ad quadratum semidiametri illius Q A non babeat maiorem proportionem, quàm habet axis transuersus H E ad latus rectum E I.

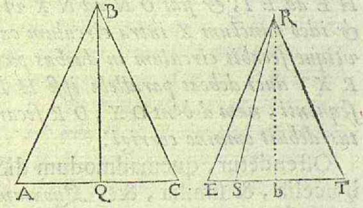
Et producamus L H ad E I occurret in K perpendiculari rectæ ad pun- b
ctum E linea H, &c. *Idest si ducatur recta linea E K in plano circuli H L E perpendicularis ad H E, seu parallela ipsi L N coniuncta recta linea H L secabit reliquam æquidistantium E K in K.*

Quapropter K L E simile est A B C, quia æquicrus etiam est: si au- c
tem ponamus K L E triangulum coni, cuius vertex L, & planum trianguli illius erectum ad planum D E F; vtique planum, quod est in sectione producit in cono sectionẽ hyperbolicã, cuius axis E G, & inclinatus E H, &c. *Quoniam in duobus triangulis A B C, & E L K sunt anguli verticales B, & L æquales inter se, cũ externi M B C, & H L E æquales facti sint; & angulus H L N æqualis sit interno, & opposito K, & angulus N L E æqualis est alterno angulo L E K propter parallelas N L, E K, & quilibet eorũ est medietas externi anguli H L E; ergo angulus K æqualis erit angulo L E K, & triangulũ L E K erit isosceliũ, sed triangulum A B C per axim coni recti ductum est quoque isoscelium; igitur duo anguli supra basim A, & C æquales sunt inter se; erant autem prius verticales anguli B, & L æquales; igitur triangula A B C, & E L K æquiangula, & similia sunt. Ducatur postea recta linea L P perpendicularis ad basim E K, quæ eam secabit bifariam in P, & ducatur planum per E K perpendiculare ad planum E L K, & in eo diametro E K fiat circulus, qui sit basis coni, cuius vertex L, & ducatur planum F D a æquidistans plano circuli E K; efficietur*
alius

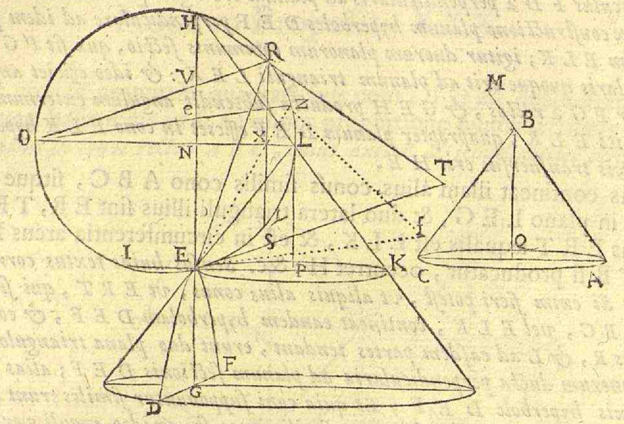
alius circulus F D a perpendicularis ad planum trianguli per axim L E K; erat autem ex constructione planum hyperboles D E F perpendiculare ad idem planum per axim E L K; igitur duorum planorum communis sectio, quæ sit F G D perpendicularis quoque erit ad planum trianguli L E K: & ideo efficiet angulos F G E, & F G a rectos, & G E H producta subtendit angulum externum trianguli conici E L K; quapropter planum D E F efficiet in cono E L K hyperbolen, cuius axis transuersus erit H E.

d Alias eontineat illam alius conus similis cono A B C, sitque vertex
eius R in plano L E G, & duo latera trianguli illius sint E R, T R; ergo angulus E R T æqualis est E L K, & est in circumferentia arcus E L H; ergo T R si producatur, occurret H: &c. *Sensus huius textus corrupti talis est: Si enim fieri potest, vt aliquis alius conus, vt E R T, qui similis sit cono A B C, vel E L K, contineat eandem hyperbolam D E F, & conorum vertices R, & L ad easdem partes tendant, erunt duo plana triangulorum per axes conorum ducta perpendicularia ad planum sectionis D E F; alias E G non esset axis hyperbole D E F; Et quia coni supponuntur similes erunt quoque*
triangula per axes E L K, & E R T similia inter se; & ideo anguli verticales E ex Def. 8.
L K, & E R T æquales inter se erunt, atque subsequentes anguli E L H, & E R H æquales quoque inter se erunt, & subtendunt commune latus transuersum H E; igitur duo anguli E L H, & E R H in eodem circuli segmento consistunt. Textus igitur corrigi debebat vt dictum est.

e Atque T S æqualis est ipsi E, & T S ad S E est, vt T R ad R H, quæ
est vt E V ad V N; ergo E V æqualis est V H, &c. *In duobus triangulis isoscelijs inter se similibus A B C, & E R T ab æqualibus angulis verticalibus A B C, & E R T ducuntur rectæ lineæ B Q, R S secantes bases in Q, & S: estque quadratum R S ad rectangulum E S T, vt quadratum B Q ad rectangulum A Q C, & secatur A C bifariam in Q; ostendendum est E T in duas partes æquales in S quoque secari. Si enim hoc verum non est E T in alio puncto bifariam diuidetur vt in* b *iungaturquè R* b. *Quoniam à verticibus triangulorum A B C, & R E T isoscelium ducuntur rectæ lineæ B Q, R* b *diuidentes bases bifariam in Q,* b*, ergo anguli ad Q, &* b *sunt recti, & erant anguli A, & E æquales (propter similitudinem eorundem triangulorum) igitur triangula A B Q, & E R* b *similia sunt, ideoq; B Q ad Q A erit vt R* b *ad* b *E, & quadratũ B Q ad quadratum Q A erit vt quadratũ R* b *ad quadratũ* b *E; erat autem quadratum R S ad rectangulum E S T vt quadratum B Q ad quadratum Q A; ergo quadratum R* b *ad quadratum* b *E eandem proportionem habet, quàm quadratum R S ad rectangulum E S T; estque quadratum R* b *minus quadrato R S (cum perpendicularis R* b *minor sit quàm R S) quarè quadratum ex* b *E semisse totius E T minus erit rectangulo E S T sub segmentis inæqualibus eiusdem E T contento; quod est absurdum: quarè necessario E T bifariam secatur in S. Postea propter parallela R S, & H E, vt T S ad S E ita erit T R ad R H; & propter parallelas R V, & E T erit E V ad V H, vt T R ad R H, seu T S ad S E: ostensa autem fuit T S æqualis S E; igitur E*



V æqua-



V æqualis eſt V H, quod eſt abſurdum.

Patet quadratum L P nempe N E, ſeu O N in N L ad quadratum E P, nempe ad quadratum N L, ſcilicet O N ad N L habere minorem proportionem, quàm H E ad E I: ponamus iam O N ad Z X, vt H E ad E I; & per X ducamus X R, & iungamus E R, &c. *Suppoſita conſtructione prioris caſus, quandò conus rectus E L K factus eſt ſimilis cono A B C quadratum L P ad quadratum E P habebat eandem proportionem, quàm O N ad N L, ſeu quàm quadratum B Q ad quadratum Q A: modò in hac altera ſuppoſitione conceditur quadratum B Q ad quadratum Q A habere minorem proportionem, quàm E H ad E I; igitur O N ad N L minorem proportionem habebit, quàm H E ad E I; & fiat O N ad N X vt H E ad E I, erit N X minor quàm N L, & ideo punctum X intra circulum cadet, & per X ducta R X Y parallelæ H E; vtique ſecabit circulum in duobus punctis, vt in R, & Y. Quod verò recta R X Y duci debeat parallela ipſi H E, non quomodocunque, patet ex contextu ſequenti, nam debent O X, O R ſecari in N, & V proportionaliter, quarè textus debuit omnino corrigi.* f

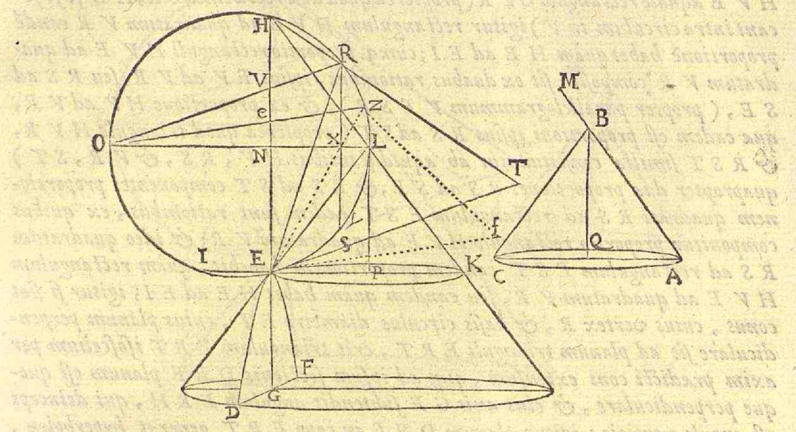
Oſtendetur, quemadmodum dictum eſt, quod E T R, & A B C ſunt iſoſcelia, & ſimilia, &c. *Quoniam arcus circuli E O, & O H æquales ſunt inter ſe ex conſtructione, erunt anguli E R O, & O R H æquales inter ſe, & propter parallelas O R, & E T eſt angulus O R E æqualis alterno T E R; atquè externus H R O æqualis eſt interno, & oppoſito R T E; igitur duo anguli R E T, & R T E æquales ſunt inter ſe; & propterea triangulum E R T erit iſoſcelium. Rurſus quia duo anguli E L H, E R H in eodem circuli ſegmento conſtituti æquales ſunt inter ſe, & erat ex conſtructione angulus M B C æqualis angulo H L E; igitur anguli H R E, & M B C æquales ſunt inter ſe, & ideo conſequentes anguli verticales E R T, & A B C æquales erunt inter ſe, eſt quoque triangulum A B C per axim coni recti iſoſcelium igitur duo triangula E R T, & A B C ſimilia ſunt inter ſe. Et quia vt dictum eſt O N ad N X eandem proportionem habet, quàm H E ad E I, atque propter parallelas V N, & R X eſt O V ad V R vt O N ad N X, & ſumpta cõmuni altitudine V R erit rectan-* g

rectangulum O V R ad quadratum V R, vt H E ad E I: eſt verò rectangulum H V E æquale rectangulo O V R (propterea quod duæ rectæ lineæ O R, H E ſe ſe ſecant intra circulum in V) igitur rectangulum H V E ad quadratum V R eandẽ proportionẽ habet quàm H E ad E I; cumq; proportio rectanguli H V E ad quadratum V R compoſita ſit ex duabus rationibus, ipſius E V ad V R, ſeu R S ad S E, (propter parallelogrammum V E S R), & ex proportione H V ad V R, quæ eadem eſt proportioni ipſius R S ad S T (propterea quod triangula H V R, & R S T ſimilia conſtituuntur ab æquidiſtantibus H V, R S, & V R, S T) quapropter duæ proportiones R S ad S E, & R S ad S T componentes proportionem quadrati R S ad rectangulum E S T eædem ſunt rationibus, ex quibus componitur proportio rectanguli H V E ad quadratum V R; & ideo quadratum R S ad rectangulum E S T eandem proportionem habebit, quàm rectangulum H V E ad quadratum V R, ſeu eandem quàm habet H E ad E I; igitur ſi fiat conus, cuius vertex R, & baſis circulus diametro E T, cuius planum perpendiculare ſit ad planum trianguli E R T, erit triangulum E R T iſoſcelium per axim prædicti coni extenſum, atq; ad ipſum ſectionis D E F planum eſt quoque perpendiculare, & eius axis G E ſubtendit angulum E R H, qui deinceps eſt angulo verticis; igitur planum D E F in cono E R T generat hyperbolen, cuius axis inclinatus eſt E H, & erectus E I: & propterea conus E R T comprehendit hyperbolen D E F. Rurſus ſi recta R X producatur quouſque ſecet peripheriam circuli L E ex altera parte in puncto Y; atque denuò coniungantur rectæ lineæ E Y, & H Y, quæ extendatur quouſquè conueniat cum recta linea ex puncto E parallela ipſi O Y in puncto aliquo, quod concipiatur eſſe d*; fieri poterit alius conus (cuius vertex Y, baſis circulus diametro E* d *erectus ad planum trianguli) ſimilis cono E R T, ſiue A B C: Oſtendetur ſicuti modo dictum eſt, quod idem planum H D F efficiet in cono Y* d *E eandem hyperbolen D E F.*

h Inde demonſtrabitur quod E H ad E I neceſſe eſt, vt habeat eandem proportionem, quàm O *e* ad *e* Z: & hoc eſt abſurdum, &c. *quia conus Z E* f *continet hyperbolen D E F neceſſariò eius axis tranſuerſus E H ſubtendet angulum H Z E, qui deinceps eſt anguli verticis trianguli per axim; & propter ſimilitudinẽ conorũ rectorum, ſunt triangula per axes A B C, E R T, & E Z* f *ſimilia inter ſe, & anguli verticales B, Z, & R æquales erunt inter ſe; ideo conſequentes anguli M B C, & H R E, nec non H Z E æquales erunt inter ſe, & ſubtenduntur ab eadem recta linea H E; ergo in eodem circuli ſegmento conſiſtunt: & propterea punctum Z in circuli peripheria H Z E cadit. Poſtea (vt in propoſitione 53. primi libri, & in hac eadem propoſitione demonſtrauit Apollonius) conſtat quod H E ad E I habet eandem proportionem, quàm O* e *ad* e *Z; & prius O V ad V R erat vt H E ad E I; ergo O V ad V R eãdem proportionem habet quàm O* e *ad* e *Z; ſed quia punctum Z non cadit in R, neque in Y alias conus E Z* f *non eſſet alius à præcedentibus E R T, & E Y* d*; ergo O* e *ad* e *Z non habet eandem proportionem, quàm O V ad V R, quod eſt abſurdum.*

i Et demonſtrabitur quod O V ad V R ſit vt H E ad E I, &c. *Repetatur denuo conſtructio primi caſus huius propoſitionis, vt fiat conus rectus L E K ſimilis cono A B C, tunc quidem quadratum L P ad quadratum E P habebit eandem proportionem, quàm O N ad N L, ſeu quàm quadratum B Q ad qua-*

Kk



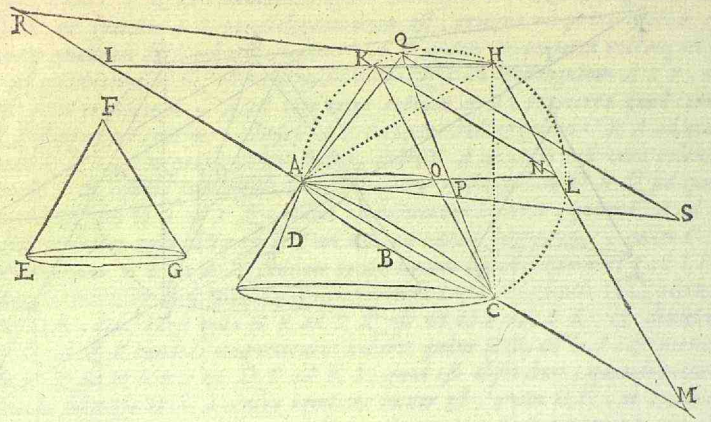
quadratum Q A; sed in hac postrema suppositione conceditur quadratum B Q ad quadratum Q A habere maiorem proportionem, quàm H E ad E I; igitur O N ad N L maiorem proportionem habebit, quàm H E ad E I; sed quia conus E R T ponitur continere sectionem D E F: habebit O V ad V R eandem proportionem, quàm H E ad E I (vt ex 53. primi deducitur, & in hac propositione denuò factum est): igitur O N ad N L maiorem proportionem habebit quàm O V ad V R; ostensa autem fuit O N ad N X, vt O V ad V R; ergo O N ad N L maiorem proportionem habebit, quàm O N ad N X: quod est absurdum, nam N X minor est, quàm N L.

Notæ in Proposit. XXXI.

DEinde sit sectio elliptica A B C, & transuersa illius A C, & erectus A D, & circunducamus super A C in plano erecto ad sectionis planum A B C segmentum circuli, quod capiat angulum æqualem angulo F: &c. *Rursus conus exhiberi debet similis cono dato E F G, qui datam ellipsim A B C contineat, sitque axis transuersus ellipsis C A, eiusque latus rectum A D.* a

Quia H I in I K, quod est æquale ipsi C I in I A, ad quadratum I A est, vt A C ad A D, & C I in A I ad quadratum I K nempe K N ad N O propter similitudinem duorum triangulorum, & ex A I, nempe N K ad I K nempe A N vt parallelas constituamus lineas, & ex his duabus proportionibus componitur proportio quadrati N K ad A N in N O, &c. *Sensus huius textus valdè corrupti hic est. Quia ex constructione H I ad I K erat vt C A ad A D, & sumpta communi altitudine I K, erit rectangu-* b

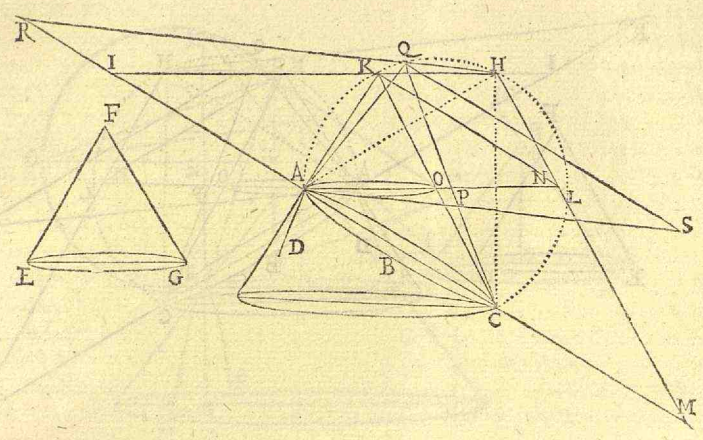
lum



lum H I K ad quadratum I K, vt H I ad I K seu vt C A ad A D; estque rectangulum C I A æquale rectangulo H I K; igitur rectangulum C I A ad quadratum I K eandem proportionem habet, quàm C A ad A D; componitur verò proportio rectanguli C I A ad quadratum I K ex duabus proportionibus laterum C I ad I K, & A I ad I K: & propter parallelas N O, I K, atque K N, & C I, & latus commune C O K duo triangula C I K, & K O N similia sunt; igitur K N ad N O est, vt C I ad I K; & quia in parallelogrammo I N latera opposita sunt æqualia K N ad N A eandem proportionem habebit quàm A I ad I K; quapropter duæ rationes K N ad N O, & K N ad N A componunt proportionem quadrati K N ad rectangulum A N O, quæ eadem est proportioni rectanguli C I A ad quadratum I K; & propterea quadratum K N ad rectangulum A N O eandem proportionem habebit, quàm A G ad A D. Si igitur fiat conus, cuius vertex K basis circulus diametro A O descriptus, cuius planum perpendiculare sit ad planum A K C; atque per rectam A C æquidistantem ipsi K N planum ducatur perpendiculare ad idem planum A K C generabitur ellipsis, cuius axis transuersus erit A C, & latus rectum A D. Textus igitur corrigi debere ex dictis manifestum est.

c Et quia angulus H K C nempe A O K æqualis est H A C, & angulus C H A æqualis est C K A remanet angulus H C A æqualis O A K erit H C A simile F E G simile quoque O K A; ergo, &c. *Quoniam ex constructione segmentum A H C capax est anguli æqualis angulo F erit angulus A H C æqualis angulo F; & quia peripheria A H C secta est bifariam in H; ergo subtensa latera A H, & H C æqualia sunt: & propterea triangulum A H C isoscelium, & simile erit triangulo E F G; propterea quod anguli verticales æquales sunt inter se; sunt verò duo anguli A H C, & A K C in eodem circuli segmento; ergo æquales sunt inter se; pariterque duo anguli C A H, & C K H in eodem circuli segmento constituti, æquales sunt inter se, & propter paralle-*

Kk 2 *las*



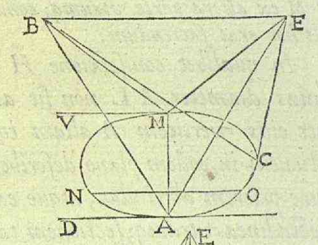
las A O, K H sunt anguli alterni A O K, & H K O æquales inter se; igitur angulus A O K æqualis erit angulo C A H; & propterea in duobus triangulis K A O, & H C A tertius angulus A C H æqualis erit tertio angulo K A O, & propterea triangulum K A O isoscelium, & simile erit triangulo H A C, siue F G E; igitur conus, cuius vertex K basis circulus A O perpendicularis ad planum trianguli A K O erit conus rectus, & similis cono E F G dato.

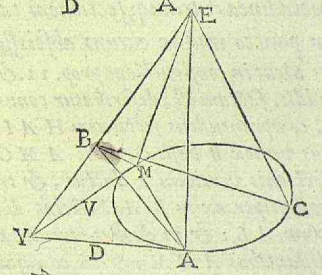
Alioquin contineat illum conus alius, cuius vertex sit Q, & triangulum Q A P, & ostendetur quemadmodum dictum est, quod planum transiens per axim illius coni erectum ad planum sectionis A B C sectio communis cum plano sectionis est A C, & quod punctum verticis illius coni sit in circumferentia segmenti A H C, &c. *Quia supponitur, quod conus Q A P similis cono E F G contineat ellipsim A B C, cuius axis transuersus C A, & latus rectum A D; igitur triangulum per axim coni ductum Q A P, nedum simile erit triangulo E F G, sed etiam perpendiculare erit ad planum ellipsis A B C, & propterea consistet in plano circularis segmenti A H C pariter erecti ad planum A B C, per idem axim A C extensum, & est angulus A Q C æqualis angulo verticali F propter similitudinem duorum triangulorum, & ex constructione primæ partis huius propositionis, est segmentum A H C capax anguli æqualis angulo F; secaturque bifariam in H; igitur angulus A Q C æqualis ipsi F in peripheria segmenti A H C existit. Ducatur postea Q S parallela lateri transuerso ellipsis A C, quæ secet basim trianguli per axim Q A P productam in S, & à puncto H bipartitæ diuisionis segmenti A H C coniungatur recta linea H Q producaturq; quousq; occurrat rectæ lineæ C A in R. Quoniã duo anguli A H C, & A Q C in eodẽ circuli segmento constituti æquales sunt inter se; pariterq; duo anguli C A H, & C Q H in eodẽ circuli segmento existentes sunt æquales, & est angulus A P Q æqualis angulo P A Q in triangulo isoscelio Q A P; & angulus P A Q æqualis angulo C A H in triangulis similibus; igitur angulus A P Q æqualis est alterno angulo P Q H; & propterea recta* d

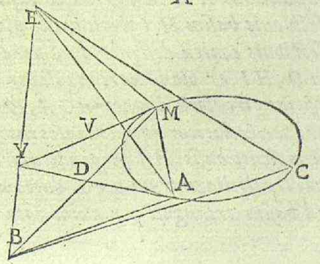
recta linea H R parallela est ipsi A S; & erat prius Q S parallela ipsi C R, & recta linea C P Q est communis; igitur triangula C R Q, & Q S P similia sunt, & spatium R S parallelogrammum est; eritque vt prius dictum est proportio quadrati Q S ad rectangulum A S P eadem proportioni rectanguli C R A ad quadratum R Q; est verò quadratum Q S ad rectangulum A S P, vt ellipsis axis transuersus C A ad eius latus rectum A D, propterea quod conus A Q P supponitur continere ellipsim A B C; igitur rectangulum C R A ad quadratum R Q eandem proportionem habet, quàm C A ad A D; est verò rectangulum H R Q æquale rectangulo C R A; igitur rectangulum H R Q ad quadratum R Q seu H R ad R Q eandem proportionem habebit, quàm C A ad A D; sed in priori casu facta est H I ad I K in eadem proportione, quàm C A ad A D; igitur H R ad R Q eandem proportionem habebit quàm H I ad I K.

e Ergo diuidendo HK maior ad minorem KI erit vt minor HQ ad maiorem QR, &c. *Idest quia H R ad R Q est vt H I ad I K, & diuidendo H Q ad Q R eandem proportionem habebit quàm H K ad K I, & permutando H Q ad H K erit vt Q R ad K I: quod est absurdum; quandoquidem in circulo subtensa H Q à centro remotior minor est, quàm H K, at exterius comprehensa Q R maior est, quàm K I. Quapropter fieri non potest, vt aliquis alius conus A Q P præter iam dictos contineat ellipsim A B C, & sit similis dato cono E F G. Textus ergo confusus corrigi debebat.*

Ad propositionem 77. libri quinti egi de contactibus circulorum, & sectionum conicarum, eorumque admirabilia symptomata à nemine adhuc quod sciam excogitata patefeci, non tamen prædicta disceptatio omnino perfecta, & absoluta fuit: itaque iuxta loci exigentiam hic afferam coronidis loco eiusdem doctrinæ complementum.





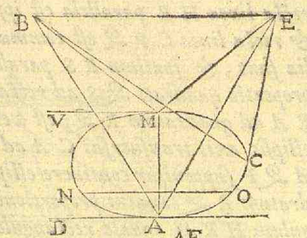


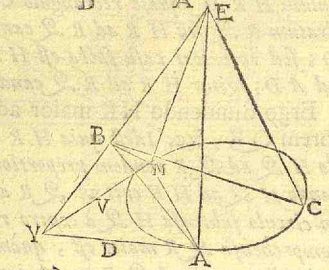
PROP. 15. Addit.

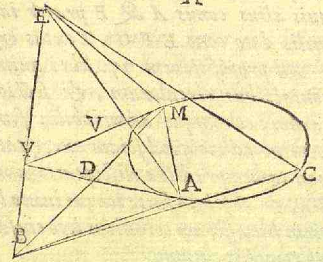
Per rectam lineam coniungentem vertices duorum conorum eandem basim habentium ducere duo plana vtrumque conum tangentia: oportet autem rectam lineam vertices coniungentem extra peripheriam circuli communis basis cadere.

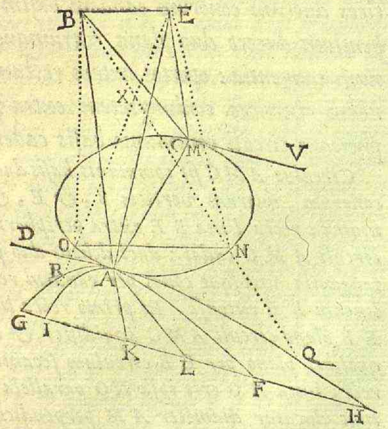
Circulus A M C sit communis basis duorum conorum, quorum vertices B, & E, & coniuncta recta linea B E extra peripheriam circuli A M C cadat: duci debent duo plana tangentia vtrosque conos per eandem rectam lineam B E extensam. Et primo recta linea E B plano circuli A M C æquidistet, & ducto quolibet plano per E B circulum secante in recta linea N O erit ipsa N O parallela E B; tunc ducatur diameter A M perpendicularis ad N O, & per A, & M ducantur A D, M V tangentes circulum, siue perpendiculares ad idem

idem diametrum M A; erunt igitur tangentes A D, & M V parallelæ eidem N O, erat autem E B parallela ipſi N O; igitur duæ circulum tangentes A B, & M V parallelæ ſunt idem E B; & propterea A D, & E B in eodem ſunt plano, vtrumque conum tangente, cum per vertices E, & B ducatur, & per A D baſis circulum tangentem. Eadem ratione M V, & E B in eodem plano vtrumque conum tangente exiſtent. Si verò recta E B plano circuli non æquidiſtat producta alicubi planum eiuſdem circuli ſecabit extra circulum ipſum, vt in Y, & tunc quidem à puncto Y extra circulum poſito ducantur duæ contingentes Y A, & Y M. Manifeſtum eſt, rectas lineas A Y, B E in eodem plano iacere: tranſit verò prædictum planum per vertices B, & E duorum conorum, atque per Y A tangentem circulum baſis communis; igitur planum A E B vtrumque conum contingit. Eodem modo planum E B M ex altera parte vtrumq; conum tanget. Et hoc erat faciendum.









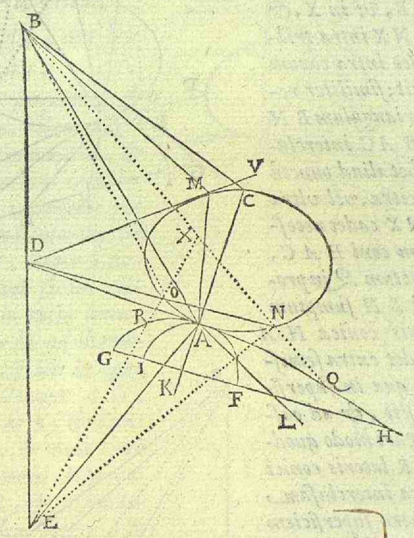
PROP. 16. Addit

In qualibet coniſectione H A I cuius diameter A L non ſit axis, per eius verticem A aliam coniſectionem in eodem plano deſcribere, quæ priorem abſcindat, atque eadem recta linea vtramq; ſectionem tangat in puncto mutuæ earum abſciſſionis.

Sicut in conſtructione prop. 11. & 12. addit. factum eſt, deſcribatur conus B A C comprehendens ſectionem H A I, cuius vertex B baſis circulus A M C per ſectionis verticem A ductus, & triangulum per axim B A C efficiat diametrum A L: & in duobus circulis æquidiſtantibus A C M, & in eo, qui per ſectionis baſim H I ducitur idē planum ſectionis conicæ deſignet duas parallelas A D, H I, & planum trianguli per axim efficiat circulorū diametros C A, & eum, qui per L ducitur æquidiſtantes inter ſe: ergo ſicuti baſis H I perpendicularis eſt ad circuli diametrum per L ductam, ſeu ad baſim trianguli per axim, ita D A

perpen-

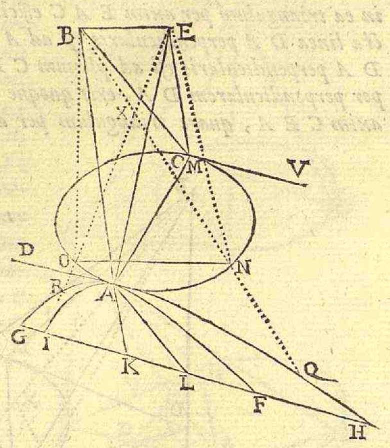
perpendicularis eſt ad circuli diametrum C A, & propterea A D, planorum H A I, & A C M communis ſectio, tanget circulum A C, & ideo ſuperficiem ipſam conicam, & ſectionem in ea exiſtentem continget; & diameter A L non erit perpendicularis ad tangentem, ſeu ordinatim applicatam A D per verticem A, alias A L eſſet axis, quod non ponitur. Deinde in plano D A B ex A ducatur recta linea A E perpendicularis ad A D ſupra, vel infra circulum, & vertice quolibet puncto E ſumpto in recta linea A E, & baſi circulo A C M fiat alter conus E A C, in cuius ſuperficie planū D A H I deſignet ſectionē F A G, & in ea triangulum per axim E A C efficiat diametrum A K: Et quia eadem recta linea D A perpendicularis eſt ad A C, atque ad A E ſe ſecantes in A; ergo D A perpendicularis eſt ad planum C E A, atque planum D A C extenſum per perpendicularem D A, erit quoque perpendiculare ad planum trianguli per axim C E A, quare triangulum per axim efficiet diametrum A K, quæ erit

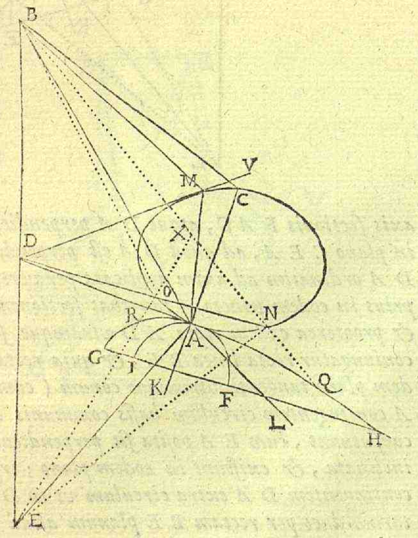


axis ſectionis F A G, atque D A perpendicularis erit ad axim A K exiſtentem in plano C E A, ad quod D A eſt perpendicularis, & cum ea conuenit: quare D A ordinatim ad axim applicata per verticem A tanget ſectionem F A G, quæ 32.lib. 1.
prius in eodem puncto A tangebat ſectionem H A I in eodem plano exiſtentem; & propterea eadem recta A D vtramque ſectionem tangit in puncto A. Poſtea coniungatur recta linea B E, & quia rectæ lineæ B A, A D, A E ſunt in eodem plano tangente vtrumque conum (cum per vertices B, & E, atque per D A contingentem circulum baſis communis ducatur) & E A, & B A angulum conſtituunt, cum E A poſita ſit perpendicularis ad D A, at B A ad eandem ſit inclinata, & exiſtunt in eodem plano; ergo recta B E parallela eſt, aut ſecat contingentem D A extra circulum vt in D. Poterit igitur ex propoſ. 15. additarum duci per rectam B E planum aliud B E M V vtrumq; conum contingens,

& per

& per rectam B E extendatur aliud planum E N O B inter duo plana contingentia prope verticem A vbicumq; cadens, quod ſecet vtrumque conum, & circulum baſis in recta linea N O, & ſuperficies duorum conorum in lateribus B N Q, E N, B O, E O R, quarum B N occurret ſemiſectioni A H in quolibet eius puncto Q prope verticem A, eo quod portio A H, & peripheria A N C excepto puncto eius A totæ inter duo plana conos tangentia intercipiuntur, & eadem ratione E O occurret ſemiſectioni A G in quolibet eius puncto R vltra verticem A ad partes G. Et quoniam in eodem plano trianguli E N B (ſcilicet plani B N O E ſecantis vtrumque conum) à puncto E ducitur recta linea E O intra angulum N E B; ergo vlterius producta ſecabit latus B N ſubtendentem angulum N E B inter puncta N, & B, vt in X, & propterea recta linea N X intra triãgulum E N O, & ideo intra conum E A C intercepta erit; ſimiliter recta linea O X intra triangulum B N O, & intra conum B A C interclusa erit: quare quodlibet aliud punctũ Q lateris conici B N citra, vel vltra interclusã portionẽ N X cadet neceſſario extra ſuperficiem coni E A C, & ideo quodlibet punctum Q in productione lateris coni B N ſumptum & in ſemiſſe ſectionis conicæ H A prope verticem A cadet extra ſemiſſem ſectionis F A, quæ in ſuperficie coni E A C exiſtit, & ad eaſdem partes vergit. Pari modo quodlibet aliud punctum R lateris conici E O citra, vel vltra interclusam portionẽ X O cadet extra ſuperficiem coni B A C, & ideo quodlibet punctũ R ſumptum in medietate ſectionis conicæ A G prope verticem A cadet extra medietatem ſectionis A I, quæ in ſuperficie coni B A C exiſtit, & ad eaſdem partes vergit. Igitur ſectio H A I abſcindit coniſectionem F A G in vertice communi A, vbi ambo tanguntur ab eadem recta linea A D. Quod erat faciendum.



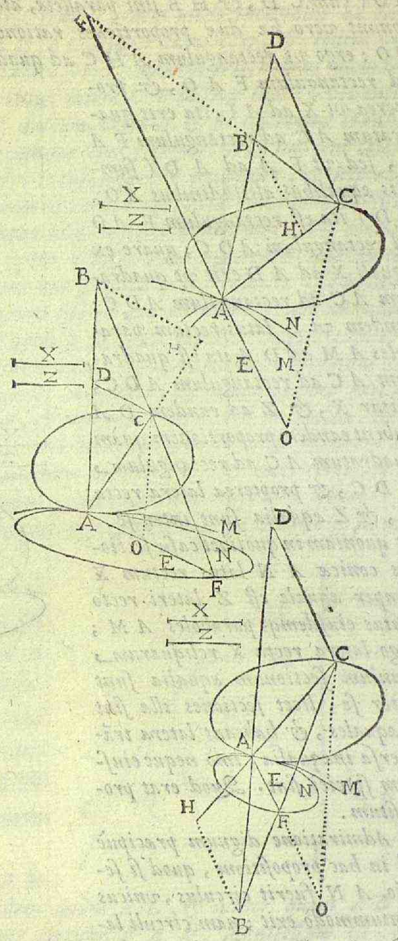


Si

PROP. 17. Addit.

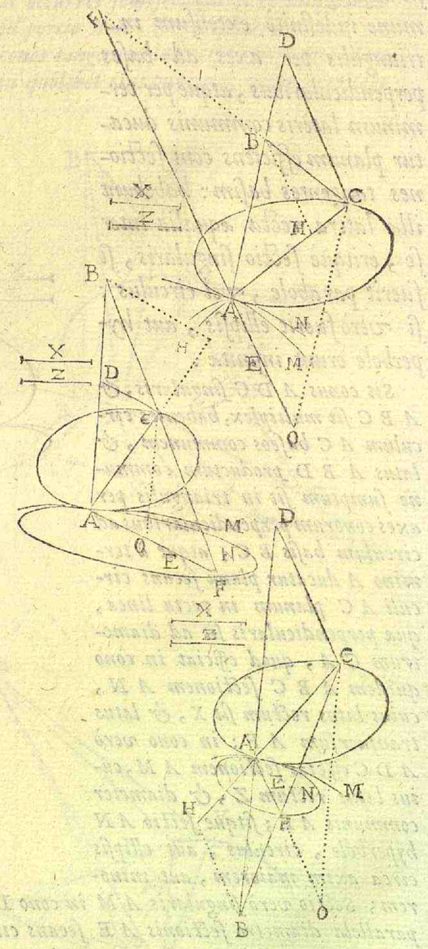
Si fuerint quotcunque coni ſuper circulum communem baſis deſcripti, habentes latus commune indefinitè extenſum in triangulis per axes ad baſes perpendicularibus, atque per terminum lateris communis ducatur planum efficiens coni ſectiones tangentes baſim: habebunt illæ latera recta æqualia inter ſe, eritquè ſectio ſingularis, ſi fuerit parabole, vel circulus: ſi verò fuerit ellipſis, aut hyperbole erunt infinitæ.

Sit conus A D C ſingularis, & A B C ſit multiplex, habentes circulum A C baſeos communem, & latus A B D productum commune ſumptum ſit in triangulis per axes conorum perpendicularibus ad circulum baſis B C, atque à termino A ducatur planũ ſecans circuli A C planum in recta linea, quæ perpendicularis ſit ad diametrum C A, quod efficiat in cono quidem A B C ſectionem A N, cuius latus rectum ſit X, & latus tranſuerſum A F: in cono verò A D C efficiat ſectionem A M, cuius latus rectum Z, & diameter communis A E; ſitque ſectio A N hyperbole, circulus, aut ellipſis circa axim maiorem, aut minorem; Sectio verò ſingularis A M in cono D A C ſit parabole, & ducatur B H parallela diametro ſectionis A E ſecans circuli diametrum A C in H: & ducatur C O parallela D A ſecans A E in O. Dico latus rectum Z paraboles A M æquale eſſe lateri recto X cuiuſlibet alterius ſectionis A N; & ſupponantur tres parabolæ A M inter ſe æquales earumq; latera recta Z æqualia, quæ in tribus figuris apponẽtur, vt confuſio euitetur. Quoniam vt latus rectum X ad tranſuerſum A F ſectionis A N, ita eſt rectangulum A H C ad quadratum B H: 12. & 13 lib. 1.
hæc verò proportio componitur ex ratione C H ad H B, & ex ratione A H ad H B: eſtque C A ad A F, vt C H ad H B (propter parallelas F A, H B, & ſimilitudinem triangulorum) & vt A H ad H B, ita eſt A C ad C D, ſeu ad



L l A O

A O (cum C D, & H B ſint parallelæ, atque D O ſit parallelogrammum) componunt verò hæ duæ proportiones rationem quadrati C A ad rectangulum F A O : ergo vt rectangulum A H C ad quadratum H B ; ita eſt quadratum C A ad rectangulum F A O, & propterea vt X ad A F, ita erit quadratum A C ad rectangulum F A O, ſed vt F A ad A D (ſumptis æqualibus altitudinibus A O, C D) ita eſt rectangulum F A O ad rectangulum A D C ; quare ex æquali X ad A D erit vt quadratum A C ad rectangulum A D C ; tandem vt Z latus rectum paraboles A M ad D A ita eſt quadratum A C ad rectangulum A D C ; igitur X, & Z ad eandem D A habent eandem proportionem quàm quadratum A C ad rectangulum A D C, & propterea latera recta X, & Z æqualia ſunt inter ſe. 11. lib. 1.



Et quoniam in quolibet caſu ſectionis conicæ A N latus rectum X ſemper æquale eſt Z lateri recto vnius eiuſdemq; paraboles A M ; ergo latera recta X reliquarum omnium ſectionum æqualia ſunt inter ſe, licet ſectiones illæ ſint inæquales, & habeant latera tranſuerſa inæqualia, imò neque eiuſdem ſpeciei ſint. Quod erat propoſitum.

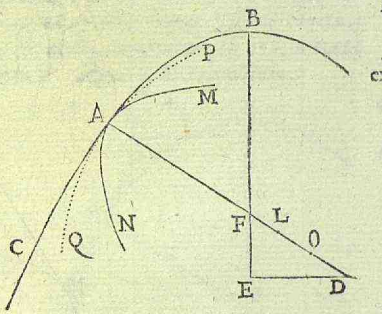
Admiratione dignum præcipuè eſt in hac propoſitione, quod ſi ſectio A N fuerit circulus, vnicus tantummodò erit ; nam circuli latus rectum X æquale erit eius diametro, ſeu axi tranſuerſo A F ; eſtque ſemper latus rectum eiuſdem menſuræ, vt oſtenſum eſt ; igitur circuli diameter F A idem ſemper erit ; & propterea circulus, qui à tali plano generari poteſt ſingularis erit, nimirum ille, qui in vnico cono A B C efficit triangula per axim ſimilia, & ſubcontraria B A C, & B F A. Manifeſtum quoq; eſt parabolem A M ſingularem eſſe, nam ſupponitur idem circulus baſis A C, & in plano per axim coni cõmune latus A D B ſemper eoſdẽ angulos D A E, & D A C efficere conceditur ; igitur vt ſectio A M ſit parabole neceſſariò recta à puncto C duci debet parallela diametro paraboles A E ; cum ergo in triangulo per axim D A C detur baſis A C inuariabilis quia circulus vnicus ſupponitur eiuſ-

què

què anguli D, & D A C ; dabitur quoq; eius ſpecies ſemper eadem, immo triãgulum per axim inuariabile erit, qui ſemper eodem modo inclinatur ad circulum baſis C A : & propterea conus D A C ſemper idem erit, & eodem modo ſectus, vnde ſectio paraboles A M eadem ſemper omnino erit, habens idem latus rectum Z. In hyperbole verò, aut ellipſi latera C B poſſunt ſupra, vel infra C D parallelam ipſi A E à puncto C ductam, extendi, & ſic efficientur tranſuerſa latera A F inæqualia inter ſe, cumque coni ſectiones A N habeant latera recta X æqualia inter ſe, latera verò tranſuerſa A F inæqualia, & hyperbolarum commune latus rectum habentium illa maior eſt, cuius axis tranſuerſus eſt minor : & duarum ellipſium commune latus rectum habentium, illa maior eſt cuius axis tranſuerſus eſt maior ; igitur ellipſes, aut hyperbole, quæ in conis prædicta lege conſtructis deſcribuntur non ſingulares ſed infinitæ eſſe poſſunt. Maurol. 2. lib. 5. Conic.
Vbi notandum eſt, quod ellipſes poſſunt eſſe eæ quæ ad maiores, aut ad minores axes adiacent. Pari modo conſtat quod ſi in conis ſuperius expoſitis fiant ſectiones conicæ conſtituentur ad eundem axim quinque ſectiones commune latus rectum habentes ſe ſe in eodem vertice tangentes, & earum intima erit ellipſis, quæ ad axim minorem adiacet, & non erit vnica, ſed multiplex, & omnes cadent intra circulum, circulus verò intra ellipſim ad axim maiorem accomodatam cadet, hæc verò intra parabolen conſtituetur, & inter circulum, & parabolen infinitæ ellipſes ſe in eodem puncto verticis tangentes collocari poſſunt. Tandem parabole comprahendetur ab infinitis alijs hyperbolis ſe ſe in eodem puncto tangentibus. Maurol. prop. 28. lib. 5. Conic.

PROP. 18. Addit. ex 51. 52. lib. 5.

Si in qualibet coniſectione B A C ducatur breuiſecans ſingularis D A, tunc quælibet alia coniſectio M A N, cuius axis ſit eadem breuiſecans, & A L ſemiſſis erecti eius minor ſit eadem ſingulari breuiſecante A D. Dico ſectionem M A N interius contingere priorem ſectionem B A C in A.



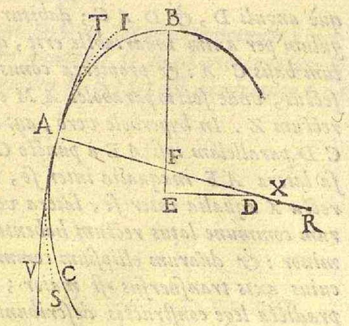
Quia A L minor eſt, quàm A D ſumi poterit recta A O maior quidem quàm A L, & minor quàm A D, & centro O interuallo O A deſcribatur circulus P A Q. Manifeſtum eſt, quod circulus P A Q ſectionem M A N exterius continget in A, at circulus P A Q interius priorem ſectionem B A C tanget, vt oſtenſum eſt, igitur coni ſectio M A N continget ſectionem B A C interius in A. Quod erat oſtendendum. Maurol. pr. 4. 7. 10. 14. lib. 5. Conic. Prop. 12. addit. lib. 5.

PROP. 19. Add.

Iiſdem poſitis ſi ſectionis T A V, cuius axis A D ſemiſſis eius erecti fuerit A R maior quàm D A, quæ eſt ſingularis breuiſecans ſectionis B A C. Dico, quod T A V exterius contingit ſectionem B A C in A.

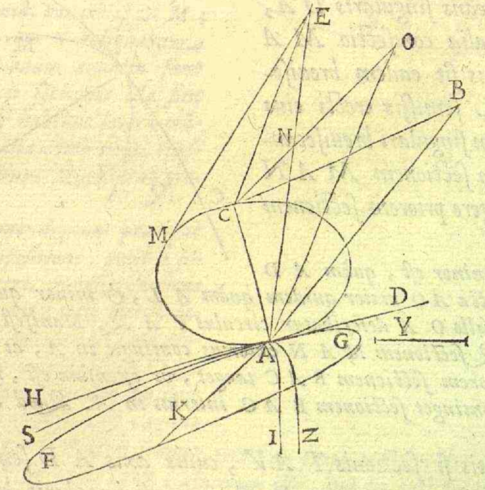
 Quo-

Quoniam A R maior ponitur quã A D sumi poterit recta A X minor quidem, quàm A R, sed maior quã A D, & centro X interuallo X A
ex pr. 14. addit. lib. 5. *describatur circulus I A S. Patet (ex demonstratis superius) circulum I S extrinsecus tangere conisectionem*
Maurol. pr. 3. 6. 9. 13. lib. 5. Conic. *B A C; at sectio T V extrinsecus circulum I S tangit in eodem puncto verticis A, ergo sectio T V extrinsecus tangit conisectionem B A C in eodem puncto A. Quod erat ostendendum.*



PROP. 20. Addit. ex 16. addit. huius.

Si in eodem plano circulus F A G secuerit conisectionem H A I in puncto A quod non sit vertex axis eius, atque eadem recta linea D A contingat circulum, & sectionem in eodem puncto A; Dico quod quælibet alia conisectio S A Z in eodem plano cum illis posita cuius axis sit idem circuli diameter A K habens Y semissem lateris recti axis æqualẽ radio circuli F A G: secabit quoque eandem conisectionem H A I in eodem puncto A, atque continget eandem rectam lineam A D in A.



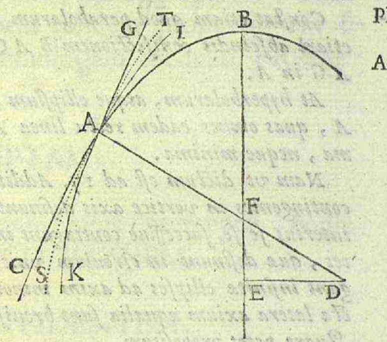
Describantur (vt in 16. additarum huius libri factum est) duo coni A B C, Scalenus comprehendens sectionem H A I, & conus rectus E A C comprehendens circularem subcontrariam sectionem F A G, quorum basis communis sit

circulus

circulus A M C, ita vt idem planum per vertices conorum B, & E, & per A D contingentem eundem circulum basis extensum tangat vtrumque conum in lateribus A B, & A E. Postea si S A Z optatur parabole ducatur in plano A E C ex C recta C N parallela A K axi sectionis F A G; si verò S A Z desideratur hyperbole, aut ellipsis producatur axis A K in directum extra aut intra sectionem, & in recta linea K A O secetur portio A O æqualis lateri transuerso sectionis S A Z, coniungaturque recta linea C O, secans E A in N (eo quod axis K A in plano A E C erecto ad circulũ A M C, existit) & vertice N fiat alter conus N C A. Manifestum est in cono recto E A C designari ab eodem plano D A K circulum F A G, at in cono recto N A C efficietur alia sectio conica circa communem axim A K, quæ se se mutuo, & eandem rectam
lineam D A tangent, in communi vertice A, atque circuli F A G, & sectio- Prop. 17. addit. huius.
nis genitæ in cono N A C duo latera recta erunt æqualia, & propterea sectionis genitæ in cono N A C semilatus rectum æquale erit radio circuli Y seu dimidio erecti sectionis H A I, & si habuerit latus transuersum erit æquale A O; ergo sectio genita in cono N A C, & sectio S A Z circa communem axim A K habent latus rectum commune duplum ipsius Y, & etiam commune latus
transuersum A O: Quare sectio genita in cono N A C, & S A Z æquales sunt 10. huius.
inter se, & congruentes; quapropter idem planum D A K, quod efficit in cono Scaleno B A C sectionem H A I, designat quoque in cono recto N A C sectionem S A Z: habent verò hi duo coni circulum basis communem, & idem planum per contingentem A D, & per vertices B, & N ductum vtrumque conum tangit; igitur (vt demonstratum est in 16. Addit. huius) sectio conica S A Z abscindet aliam sectionem H A I, & ambæ tangentur ab eadem recta linea D A in eodem puncto mutuæ abscissionis A. Quod erat propositum.

PROP. 21. Addit.

Si in qualibet conisectione B A C ducatur breuisecans singularis D A, & quælibet alia conisectio I A K, cuius axis sit D A, atque semissis lateris recti axis sectionis I A K sit æqualis breuisecanti D A. Dico, sectionem I A K contingere eandem rectam lineam G A, quàm tangit sectio B A C, & abscindere reliquam conisectionem in eodem puncto A.

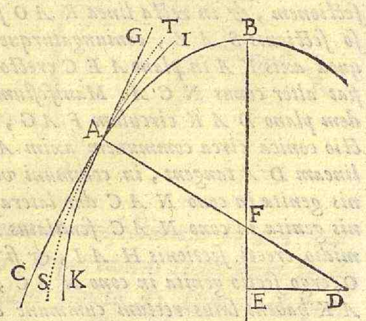


Describatur centro D interuallo D A circulus T A S constat (ex prop. 10. additarum libri quinti) circulum T A S secare conisectionem B A C in A, cumque circa eundem axim D A ponantur circulus T A S, atque conisectio I A K, cuius lateris recti semissis æ-
qualis est D A radio circuli T A S, ergo conisectio I A K abscindit conisectio- 20. addit. huius.
nem B A C in eodem puncto A, in quo secatur à circulo T A S, & tanguntur ab eadem contingente G A in puncto A. Quod erat, &c.

Sectionum

PROP. 22. Addit.

Sectionum conicarum circa axim communem positarum datam coni sectionem abscindentium non in eius vertice, quas omnes eadem recta linea contingat, erunt singulares tantummodo parabolæ, & circulus, ellipses verò, & hyperbole erunt infinitæ.



Quoniam circa communem axim D A constitui possunt parabolæ, circulus, Prop. 17. addit. huius. *infinitæ hyperbolæ, & infinitæ ellipses habentes semilatus rectum axis æquale singulari breuisecanti D A in sectione* Prop. 21. addit. huius. *conica B A C educto, & hæ omnes abscindunt conisectionem B A C in A. Ergo patet propositum.*

Hinc colligitur dari non posse conisectionem minimam extrinsecus tangentium, neque maximam intrinsecus tãgentium eandem conisectionem in puncto A extra verticem axis posito.

Nam quælibet conisectio, cuius semie- Prop. 18. addit. huius. *rectum axis minus est breuisecante singulari D A intrinsecus tangit sectionem B A C in A, & si semierectum maius fuerit eadem D A extrinsecus eandem* Prop. 19. addit. huius. *sectionem B A C continget, neque vnquam cessant prædicti contactus extrinseci, vel intrinseci quousque semierectum axis efficitur æquale breuisecanti D* Prop. 21. addit. huius. *A: at tunc non amplius contingit, sed secat eam in A. Quare patet propositum.*

Constat etiam quod parabolarum vnica tantummodò, & circulorum vnicus etiam abscindit conisectionem B A C in A, & contingit eandem contingentem A G in A.

At hyperbolarum, atque ellipsium abscindentium eandem sectionem B A C in A, quas omnes eadem recta linea A G tangit in A non potest assignari maxima, neque minima.

Nam vt dictum est ad 17. Additarum huius libri infinitæ hyperbolæ se se contingentes in vertice axis desinunt in parabolam vnicam, & post parabolam interius se se successiuè contingunt infinitæ ellipses ad axim maiorem adiacentes, quæ desinunt in circulum vnicum, ac post circulum interius eum contingunt infinitæ ellipses ad axim minorem adiacentes, quarum omnium semierecta latera axium æqualia sunt breuisecanti singulari D A datæ sectionis B A C. Quare patet propositum.

LIBRI SEXTI FINIS.

APOLLONII PERGAEI

CONICORVM LIB. VII.

DEFINITIONES.

I.

SI diuidatur inclinatum secundum proportionem figuræ, aut addatur vni axium ellipsis lineã, earumque differentia, aut aggregatum ad eandem lineam habeat eandem proportionem figuræ: vocabo homologam inclinati PRÆSECTAM.

II.

Et homologam erecti INTERCEPTAM.

III.

Atque punctum, quod est extremum ipsius interceptæ, & diametri: vocabo TERMINVM COMMVNEM.

IV.

Reliquum verò TERMINVM DIVIDENTEM.

V.

Et differentiam, vel summam lateris, & interceptæ: vocabo INTERCEPTAM COMPARATAM.

VI.

Differentiam verò, aut summam lateris, & præsectę: vocabo PRÆSECTAM COMPARATAM: hoc autem latus refertur ad diametrum, quæ bifariam diuidit lineam coniungentem verticem sectionis, & terminum potentis huius lateris: reliquæ

reliquæ verò lineæ referuntur ad hoc latus.

VII.

Insuper vocabo duas diametros coniugatas, & æquales in ellipsi, ÆQVALES.

Et si quidem ad vtrasque partes axis sectionis duæ diametri educantur, quæ ad sua erecta eandem proportionem habeant, vtique vocabo eas ÆQVALES.

VIII.

Diametros verò æquales ad vtrasque partes duarum axium ellipsis cadentes, voco Homologas illius axis: suntque homologæ diametri in ellipsi transuersa ad transuersam, & rectã ad rectam.

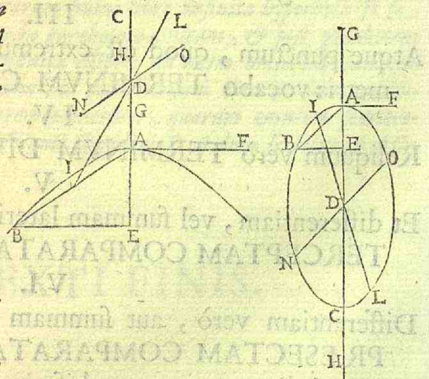
N O T Æ.

I. *Prima definitio breuissimè exponi potest hac ratione. Si axis transuersus interius in hyperbola diuidatur, aut exterius in ellipsi, secundum proportionem figuræ, segmentum homologum axis transuersi vocabo Præsectum, vt si fuerit hyperbole, vel ellipsis A B, cuius axis transuersus A C, centrum D, latus rectũ A F, & in hyperbola secetur C A inter vertices A, & C; in ellipsi verò secetur exterius in puncto G, ita vt summa, vel differentia ipsarum G A, & axis C A, idest C G ad G A habeat proportionem figuræ scilicet eandem, quàm habet latus transuersum C A ad latus rectum A F; tunc quidem vocatur recta linea C G Præsecta.*

II. *Atque G A vocatur Intercepta.*

III. *Punctum verò A extremum interceptæ G A, & diametri C A vocabitur terminus communis duarum linearum, scilicet axis C A, & additæ, vel ablatæ A G.*

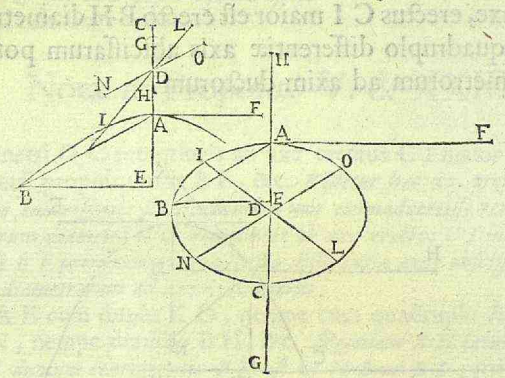
IV. *Punctum verò G, in quo axis A C interius, vel exterius diuiditur secundum proportionem figuræ vocatur terminus diuidens; Si verò secetur C H æqualis A G vocabitur etiã C H intercepta, & A H præsectã, atque C terminus communis, & H terminus diuidens.*



V. *Si diameter I L secuerit bifariam subtensam A B à sectionis vertice A eductam, atque à termino B ducatur B E perpendicularis ad axim eum secans in E, tunc quidem axis segmentum C E ab opposito vertice C ductum, vocat interpres Latus. Postea summam in prima ellipsi, & differentiam in reliquis figuris lateris C E, & interceptæ H C, nimirum ipsam lineam H E, vocat Interceptam comparatam.*

VI. *Et lateris C E, & præsectæ G C differentia in tribus prioribus figuris, & summa in figura quarta, idest G E, vocatur Præsecta comparata.*

VII. *Ducantur in ellipsi A B C duæ diametri coniugatæ I L, & N O, quæ inter se sint æquales. Vel transuersa I L ad eius latus rectum eandem proportionem habeat, quàm eius coniugata N O ad suum latus rectum; tunc quidem vocat pariter diametros coniugatas I L, N O AEquales.*

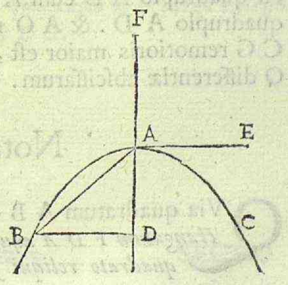


SECTIO PRIMA

Continens Proposit. I. V. & XXIII. Apollonij.

PROPOSITIO I.

Si in parabola A B à termino axis A D educatur recta linea A B subtendens segmentum sectionis A B, & ab eius termino ducatur B D ad axim perpendicularis; vtiquè illa chorda poterit eius abscissam D A in aggregatum abscissæ, & erecti.

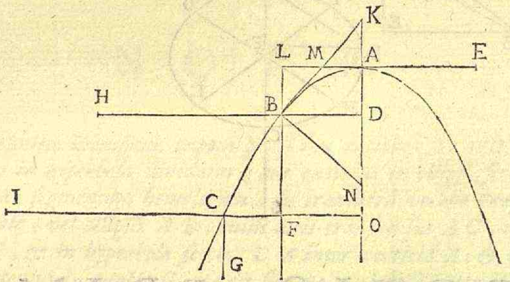


a Fiat A F æqualis erecto A E. Quia quadratum A B est æquale quadrato D A cum

cum quadrato D B, quod eſt æquale ipſi A D in A F; igitur eſt æquale ipſi F D in D A. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO V. & XXIII.

IN parabola A B C cuiuſcumque diametri B F erectus B H excedit axis A D erectum A E quadruplo abciſſæ A D potentis à termino illius diametri ad axim ductæ 23. & diametri C G, re- a
motioris ab axe, erectus C I maior eſt erecto B H diametri propinquioris B F quadruplo differentiæ axis abſciſſarum potentium à terminis diametrorum ad axim ductorum.

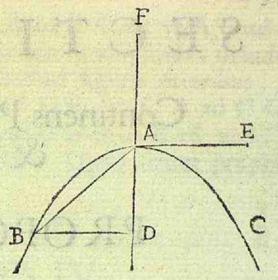


Educamus A L, B K tangentes in A, B, & B N perpendicularem ad
11. lib. 1. B K, erit K D in D N æquale quadrato D B, quod eſt æquale ipſi A E in A D; ergo K D ad D A eandem proportionem habet, quàm A E ad
35. lib. 1. D N: eſtque D K dupla ipſius A D (37. ex 1.) igitur A E eſt dupla ipſius D N; quarè A E cum duplo D K, nempe cum quadruplo A D eſt b
æqualis duplo K N, nempe B H (eo quod N K ad B K tangentem eandem proportionem habet, quàm aſſumpta M B ad B L coniugatam (57.
44. lib. 1. ex 1.) (propter ſimilitudinem duorum triangulorum); ergo B H æqualis eſt quadruplo A D cum A E; quarè erectus diametri B F excedit A E quadruplo A D. & A O maior eſt, quàm A D; ergo erectus diametri c
C G remotioris maior eſt, quàm erectus B F proximioris quadruplo D O differentiæ abſciſſarum. Et hoc erat oſtendendum.

Notæ in Propoſit. I.

QVia quadratum A B eſt æquale quadrato D A, &c. *Quoniam re-* a
ctangulum F D A æquale eſt rectangulo F A D ſubſegmentis vna cum quadrato reliqui ſegmenti D A; eſtque latus rectum A E æquale A F;

A F; igitur rectangulum F D A æquale eſt rectangulo D A E vna cum quadrato D A; 11. lib. 1.
ſed quadratum ordinatim ad axim applicatæ B D æquale eſt rectangulo D A E ſub abſciſſa & latere recto contento; igitur rectangulum F D A æquale eſt duobus quadratis B D, & D A: eſtquè quadratum A B ſubtendentis rectum angulum D æquale duobus quadratis B D, & D A; igitur quadratum ſubtenſæ A B æquale eſt rectangulo A D E ſub abſciſſa D A, & ſub D F, quæ æqualis eſt eidem abſciſſæ cum latere recto.



Notæ in Propoſit. V. & XXIII.

a ET diametri G C remotioris ab axe erectus C I maior eſt erecto B H diametri propinquioris B F, &c. *Videtur hæc 23. propoſitio deficiens; cum omnino inueriſimile ſit Apollonium non animaduertiſſe rem adeo facilem; quod nimirum diametri G C remotioris ab axe erectus C I maior ſit erecto B H diametri B F proximioris quadruplo differentiæ axis abſciſſarum potentium à terminis diametrorum ad axim ductorum.*

b Quare A E cum duplo K D, nempe cum quadruplo A D eſt æqualis duplo K N, nempe dimidio B H, &c. *Quoniam B H latus rectum diame-* 49. lib. 1.
tri B F ad duplum contingentis B K eſt vt M B ad B L, ſed (propter æquidiſtantes, & ſimilitudinem triangulorum L B M, & K N B) vt M B ad B L, ita eſt duplum N K ad duplum K B; ergo latus rectum B H æquale eſt duplo K N; ſed prius oſtenſum eſt quod D A æqualis eſt medietati ipſius D K, & 35. lib. 1.
D N æqualis medietati ipſius A E; igitur duplum K N æquale eſt duplo K D, ſeu quadruplo A D cum duplo D N, ſeu cum A E.

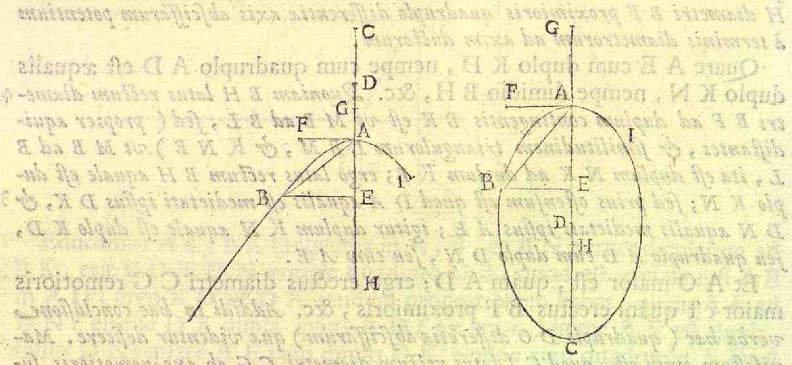
c Et A O maior eſt, quàm A D; ergo erectus diametri C G remotioris maior eſt quàm erectus B F proximioris, &c. *Addidi in hac concluſione verba hæc (quadruplo D O differẽtiæ abſciſſarum) quæ videntur deficere. Manifeſtum enim eſt, quod C I latus rectum diametri C G ab axe remotioris ſuperat latus rectum B H diametri F B axi propinquioris quadruplo D O differentiæ abſciſſarum axis ab ordinatis à verticibus earũdem diametrorum ductis; nam B H æqualis oſtenſa eſt E A vna cum quadruplo A D, eademque ratione C I æqualis eſt eidem axis lateri recto E A cum quadruplo A O; ergo exceſſus C I ſupra B H erit æqualis quadruplo differentiæ D O.*

SECTIO SECVNDA

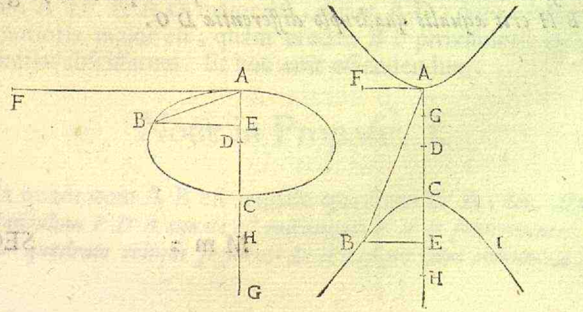
Continens Proposit. II. III. IV. VI. & VII. Apollonij.

PROPOSITIO II. & III.

SI in sectione A B à termino cõmuni A vtriuslibet interceptæ a
educatur linea recta A B vsq; ad sectionem, atquè ab eius termino B ad axim A E ducatur perpendicularis B E; erit quadratum A B ad rectangulum contentum à rectis lineis inter perpendicularis incidentiam, & terminos interceptæ, nempe A E in G E habebit eandem proportionem, quàm habet inclinatus, siuè transuersus A C ad præsectam C G.



Sit itaque A F erectus A C, & ponamus A E in E H æquale quadrato B E; igitur A E in E H ad A E in E C, nempe H E ad E C est vt

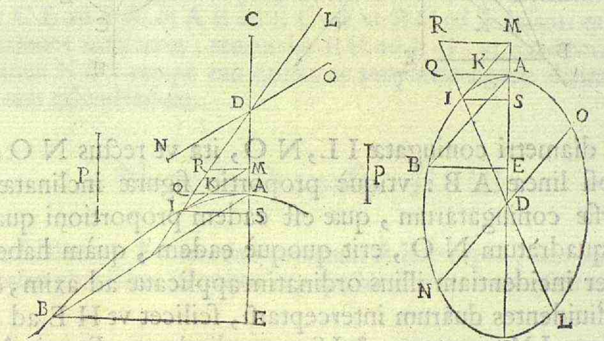


A F

b A F ad A C, & vt A G ad G C; ergo H E ad E C est vt A G ad G C; & componendo in hyperbolis, & diuidendo in ellipsibus, deinde comparando homologorum differentias in duabus figuris prioribus, & summas homologorum in reliquis, fiet A H ad G E, vt C A ad C G; ergo A H in A E; nempe quadratum A B ad G E in A E est vt C A inclinatus, siue transuersus ad C G præsectam. Quod fuerat propositum.

PROPOSITIO IV.

a SI hyperbolen, aut ellipsin A B tangat recta linea I M in I, & occurrat axi A C in M; vtique ipsius I M quadratum ad quadratum semidiametri N D coniugatæ ipsi I L habebit eãdem proportionem, quàm axis contenta M S ad eius inuersam S D.

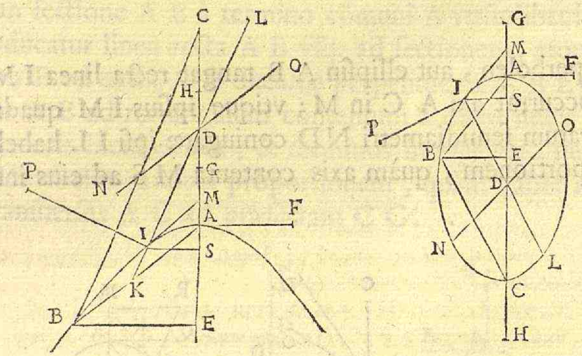


Educantur A Q, M R perpendiculares ad axim vsque ad I L, ponaturque linea P, quæ ad I M eandem proportionem habeat, quàm K I ad Q I, seu eandem, quàm habet M I ad I R; Ergo P est semissis erecti 50. lib. 1.
diametri I L (52. ex 1.) atque D N dimidium coniugatæ diametri N O poterit P in I D, atque I M poterit P in I R; & ideo I R ad I D, nempe M S contenta ad S D inuersam eandem proportionem habet, quã quadratum tangentis I M ad quadratum N D semissis coniugatæ ipsius I L. Et hoc erat propositum.

PROP.

PROPOSITIO VI. & VII.

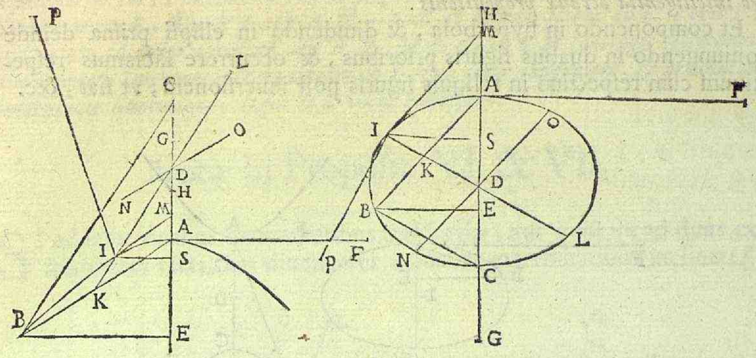
SI in hyperbole, aut ellipsi addantur axi transuerso, vel au- a
ferantur ab inclinato duæ interceptæ A G, C H ab eius terminis A, C, atque à vertice sectionis A educatur recta linea A B ad terminum alicuius potentialis B E, & per centrum D



ducatur diametri coniugatæ I L, N O, ita vt rectus N O æquidistet ipsi lineæ A B: vtiquè proportio figuræ inclinatæ, vel transuersæ coniugatarum, quæ est eadem proportioni quadrati I L ad quadratum N O, erit quoquè eadem, quàm habent lineæ inter incidentiam illius ordinatim applicatæ ad axim, & terminos diuidentes duarum interceptarũ, scilicet vt H E ad E G.

b Educamus I M tangentem, & I S perpendicularem. Et quia A D est æqualis D C, & A K æqualis K B (eo quod I L cum sit coniugata N O bifariam diuidit A B) erit C B parallela ipsi I D, & propterea M S ad S D, nempè A E ad E C (propter similitudinem triangulorum) est vt quadratum I M ad quadratum N D (4. ex 7.) & quadratum I D ad quadratum I M est vt quadratum C B ad quadratum B A (propter similitudinem triangulorum); ergo proportio quadrati I D ad quadratum N D est composita ex ratione A E ad E C, & ex ratione quadrati C B ad quadratum B A; sed proportio quadrati C B ad quadratum B A est composita ex ratione quadrati C B ad C E in E H, & ex ratione C E in E H ad A E in E G, & ex ratione A E in E G ad quadratum A B; est vero quadratum C B ad C E in E H, vt C A ad A H (3. ex 7.) atquè A E in E G ad quadratum A B est vt G C ad C A (2. ex 7.), & proportio C E in E H ad A E in E G, componitur ex ratione C E ad A E, & ex

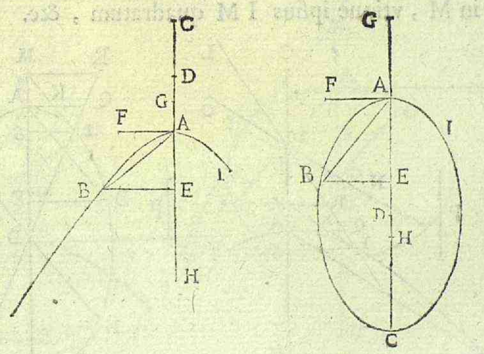
H E



H E ad E G; igitur proportio quadrati I D ad quadratum N D composita est ex proportione C A ad A H, & ex G C ad C A, atque ex C E ad E A, & A E ad E C, & tandem ex H E ad E G; sed C A ad A H, & G C ad C A componunt proportionem C A ad ei æqualem A C: similiter C E ad E A, & A E ad E C est vt E C ad se ipsam: quare si hæ proportiones auferantur, remanebit E H ad E G, vt quadratum I D ad quadratum N D: nempe erit eadem ac proportio figuræ diametri I L. Quod erat ostendendum.

Notæ in Proposit. II. III.

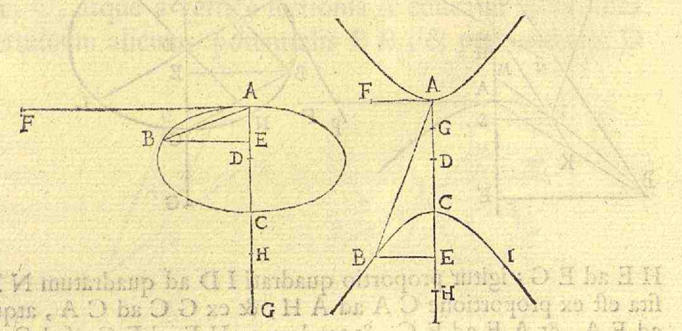
a SI in sectione A B à termino communi A interceptæ, &c. *Addidi particulam* vtriuslibet *interceptæ vt propositio efficiatur vniuersalis comprahen-*



tum

dens quartum casum in postrema figura, quàm superaddidi, vti necessariam pro intelligentia octauæ propositionis.

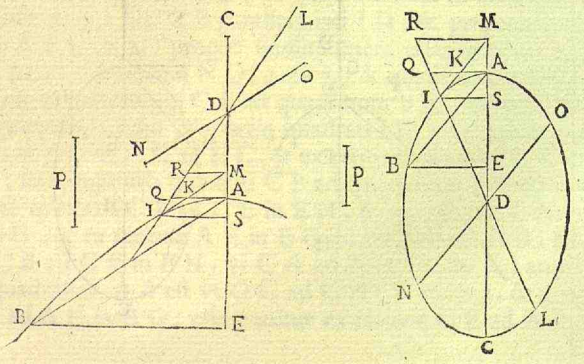
Et componendo in hyperbola, & diuidendo in ellipsi prima deindè coniungendo in duabus figuris prioribus, & occurrere faciamus respectiuum cum respectiuo in reliquis figuris post inuersionem, vt fiat, &c. b



Idest componendo in hyperbolis, & in ellipsibus comparando differentias terminorum ad consequentes, deindè comparando homologorum differentias in duabus figuris prioribus, & sumas in reliquis, tunc enim A H ad G E est, vt A C ad C G, & sumpta communi altitudine E A, erit tectangulum H A E ad rectangulum G E A, vt A C ad C G. Sed rectangulum H A E æquale est quadrato A E vna cum rectangulo H E A, cui æquale est quadratum B E, ergo quadratum A B æquale est rectangulo H A E (propterea quod A B subtendit angulum rectum E in triangulo B A E) quare quadratũ A B ad rectangulum A G E eandem proportionẽ habet quàm C A ad C G.

Notæ in Proposit. IV.

SI hyperbolen, aut ellipsim A B tangat recta linea I M, & occurrat axi A C in M, vtique ipsius I M quadratum, &c. *Suppleri debet* a

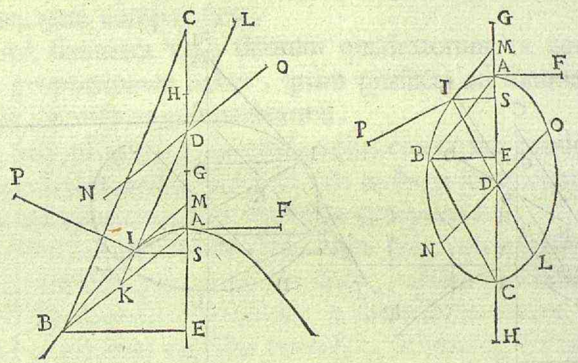


constru-

constructio, quæ deficit in hac propositione, vt nimirum sensus continuatus sit à punctis M, A, I educatur ad axim perpẽdiculares M R, A Q, & I S secãtes diametros in R, Q, & S, & A Q, I M se mutuò secent in K, erit I S ordinatim ad axim applicata, & A Q, sicuti etiam I M contingit sectionem. vocat autem Interpres rectam lineam M S, quæ inter tangentem, & ordinatam interijcitur Contentam, atque D S vocat Inuersam.

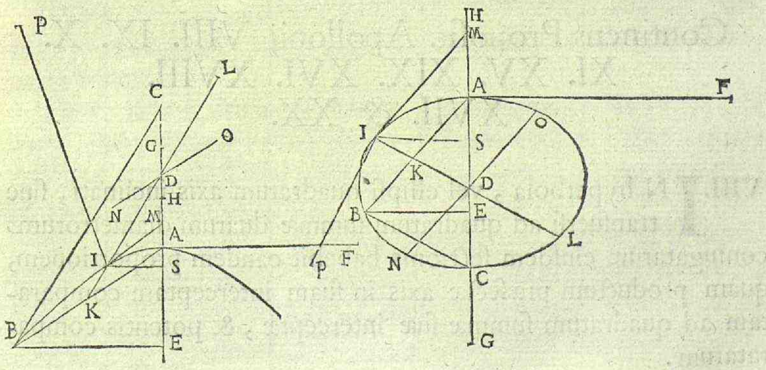
Notæ in Proposit. VI. & VII.

a SI addatur duabus extremitatibus transuersæ, aut insistant ad duas extremitates recti, aut diminuatur à duabus extremitatibus inclinati A,



& C duo intercepta, &c. *Expungo verba apposititia. Aut insistat ad duas extremitates recti; quæ sensum perturbant.*

b Educamus I M tangentem, & I S perpendicularem. Et quia A D est æqualis D C, &c. *Idest Educamus I M contingentem sectionem in I, quæ*

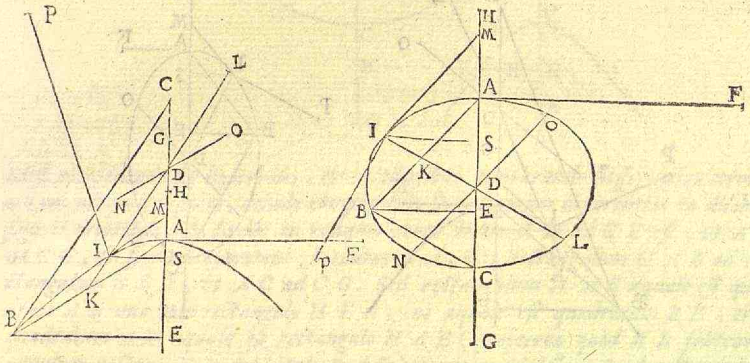


secet

secet axim in M, & I S ad axim perpendicularem, seu ordinatim applicatam, eum secans in S. Et quia trianguli A C B duo latera A C, A B secantur proportionaliter, scilicet bifariam in D, & K; ergo I D parallela est basi C B: estquè tangens I M parallela ipsi B A, cum ambo ad diametrum I L sint ordinatim applicatæ; pariterquè I S parallela est B E (cum sint ad axim perpendiculares) igitur triangula M I S, A B E similia erunt; pariterquè triangula D I S, C B E erunt similia: & ideo M S ad S I erit vt A E ad E B, & S I ad S D erit, vt B E ad E C: quarè ex æquali ordinata M S ad S D eandem proportionem habebit, quàm A E ad E C: estquè quadratum I M ad quadratum N D, vt M S ad S D; ergo quadratum I M ad quadratum N D est, vt A E ad E C, &c.

Prop. 5. lib. 2.

Prop. 4. huius.



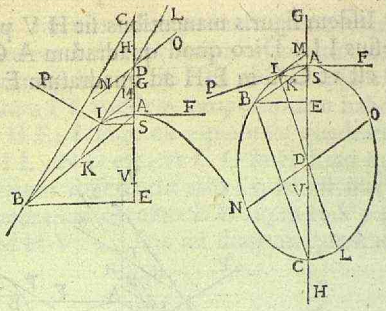
SECTIO TERTIA

Continens Proposit. Apollonij VIII. IX. X. XI. XV. XIX. XVI. XVIII. XVII. & XX.

VIII. IN hyperbola, vel ellipsi quadratum axis inclinati, siue transuersi ad quadratum summæ duarum diametrorum coniugatarum eiusdem sectionis habebit eandem proportionem, quàm productum præsectæ axis in suam interceptam comparatam ad quadratum summæ suæ interceptæ, & potentis comparatarum.

IX. Vel

IX. Vel ad quadratum differêtiæ coniugatarum eãdem proportionem habet, quàm productum præsectæ in suam interceptam comparatam ad quadratum differentiæ interceptæ, & potentis comparatarum.



X. Vel ad rectangulum sub duabus coniugatis contentum eandem proportionem habet, quàm præsecta axis ad suam potentem comparatam.

XI. Ad summam verò duorum quadratorum ex coniugatis eandem proportionem habet, quàm præsecta ad summam præsectæ, & interceptæ comparatarum.

XV. Sed ad quadratum erecti vnius coniugatæ eandem proportionem habet, quàm præsecta axis in suam interceptam comparatam ad quadratum suæ præsectæ comparatæ.

XIX. Sed ad quadratum differentiæ vnius coniugatarum, & eius erecti eandem proportionem habet, quàm productum præsectę axis illi diametro homologę in suam interceptam comparatam ad quadratum excessus præsectæ, & interceptæ comparatarum.

XVI. Ad quadratum verò summæ inclinatæ diametri, & eius erecti eandem proportionem habet, quàm præsecta axis in suam interceptam comparatam ad quadratum summæ interceptæ, & præsectæ comparatarum.

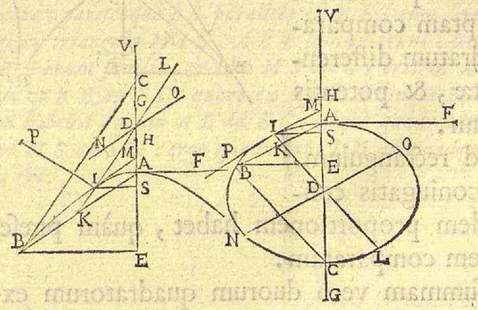
XVIII. Sed ad figuram inclinatæ vnius coniugatarum eandem proportionem habet, quàm axis præsecta ad præsectam comparatam.

XVII. Et ad summam duorum quadratorum inclinatæ, & erecti vnius coniugatarum eandem proportionem habet, quàm præsecta in interceptam comparatam ad duo quadrata præsectæ, & interceptæ comparatarum.

XX. Et tandem ad excessum duorum quadratorum laterum figuræ inclinatæ duarum coniugatarum eandem proportionem habet, quàm productum præsectæ in interceptam comparatã ad excessum quadratorum præsectæ, & interceptæ comparatarum.

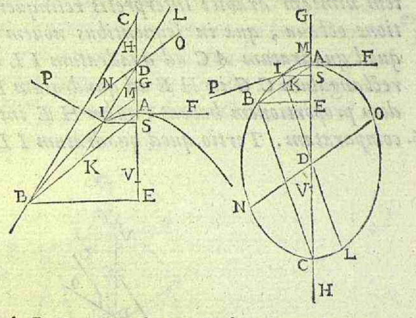
 Iisdem

Iisdem figuris manentibus sit H V potens comparata, & I P sit erectũ a
ipsius I L. Dico quod quadratum A C ad quadratum summæ I L, & N
O est vt C G in E H ad quadratum E H V. Quia quadratũ A D æquale



37.lib.1. est S D in D M (39. ex 1.) ergo S D in D M ad quadratum I D, nempe E C in C A ad quadratum C B (propter similitudinem triangulorũ) b
est vt quadratum A D ad quadratum I D, nempe vt quadratum A C ad quadratum I L: estque quadratum C B ad C E in E H, vt C A ad A H, seu ad C G (2. 3. ex 7.) ideft vt A C in C E ad C G in C E, & permutando; igitur A C in C E ad quadratum C B, quod habebat (vt ostensum est) eandem proportionem, quàm quadratum A C ad quadratum I L, erit vt G C in C E ad C E in E H, nempe vt C G ad E H, seu C G in E H ad quadratum E H; igitur quadratum A C ad quadratum I L eandem proportionem habet, quàm C G in E H ad quadratum E H. Et quadratum I L ad quadratum N O, seu L I ad I P est vt H E ad E G (6. 7. ex 7.) scilicet vt quadratum E H ad H E in E G, quod æquale suppositum fuit quadrato H V; Ideoque I L ad N O eandem proportionem habebit, quàm E H ad H V; quapropter quadratum I L, siue ad quadratum summæ ipsarum I L, N O est vt quadratum H E ad quadratum E H V; siue ad quadratum differentiæ I L, & N O erit vt quadratum E H ad quadratum differentiæ E H, & H V, siue ad I L in N O habebit eandem proportionem, quàm E H ad H V; siue ad duo quadrata I L, N O eandem proportionem habebit, quàm E H ad summam E H, E G; eo quod quadratum I L ad quadratum N O est vt E H ad E G; siue insuper ad quadratum I P eandem proportionem habebit, quàm quadratum E H ad quadratum E G; vel potius ad quadratum differentiæ I L, & I P erit vt quadratum E H ad quadratum differentiæ E H, & E G, vel rursus ad quadratum rectæ lineæ ex L I, & I P compositæ, erit vt quadratum H E ad quadratum summæ duarum H E, E G, atque ad L I in I P eandem proportionem habebit, quàm H E ad E G; vel ad quadratum ipsius L I cum quadrato I P habebit eandem proportionem, quàm quadratum H E ad duo quadrata

drata H E, & ipsius E G, siue ad differentiam duorum quadratorum L I, & ipsius I P eandem proportionem habebit, quàm quadratum H E ad differentiam duorum quadratorum H E, & E G. Et iam ostensum est quod quadratum A C ad quadratum I L eandem proportionem habet, quàm C G in H E ad quadratum H E; 8. ergo ex æqualitate quadratum A C, siue ad quadratum summæ I L, N O est, vt C G in H E ad quadratum E H V; 9. siue ad quadratum differentiæ eius, quæ est inter I
c
d L, N O est vt C G in H E ad quadratum excessus E H supra H V: 10. siue ad I L in N O erit, vt C G ad H V: 11. siue ad duorum quadratorum I L, N O summam, erit vt
e
f C G ad summam G E, E H; 12. siue ad quadratum I P erit, vt C G in H E ad quadratum E G:
g 13. siue ad quadratum differentiæ L I, I P erit, vt C G in E H ad quadratum differentiæ H E, E G: 14. siue ad quadratum
h ex recta linea æquali sũmæ duarum L I, I P, erit vt C G in E H ad quadratum ex recta linea composita ex H E, E G:
i 15. siue ad L I in I P erit vt C G ad G E: 16. siue ad duo quadrata ex
k L I, & ex I P erit vt C G in E H ad duo quadrata E G, & E H: 17.
l siue ad differentiam duorum quadratorum ex L I, & ex I P erit vt C G in E H ad differentiam duorum quadratorum ex H E, & ex E G. Et hoc erat propositum.



Notæ in Proposit. VIII.

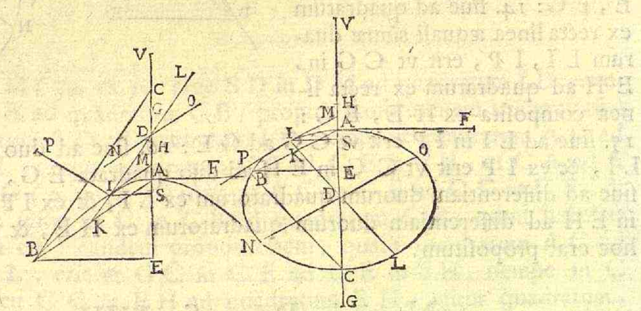
a Iisdem figuris manentibus sit H V potens comparata, &c. *Præter definitiones superius expositas hic duæ aliæ declarari debent, ignotum enim est quid nam nomine Figuræ comparatæ, & Potentis comparatæ intelligi debeat. Itaq; rectangulum sub præsecta comparata, & intercepta comparata contentum, ideft rectangulum H E G vocatur Figura comparata: & si quadratum rectæ lineæ H V æquale fuerit rectangulo H E G vocatur H V Potens comparata.*

b Ergo S D in D M ad quadratum D I, nempe E C in C A ad quadratũ C E, &c. *Æqualia enim spatia, scilicet rectangulũ S D M, & quadratũ* 37.lib.1.
D A ad idem quadratum I D habent eandem proportionem; sed quia triangula M I D, & A B C similia sunt, propterea quod latera homologa sunt parallela inter se; paríterque triangula D S I, & C E B sunt similia, vt ostensum est in 6. & 7. huius; ergo S D ad D I erit vt E C ad C B, atque M D ad D I est vt A C ad C B erunt compositæ proportiones eædem inter se, scilicet rectangulum S D M ad quadratum D I eandem proportionem habebit, quàm rectangulum E C A ad quadratum C B; quare vt quadratum A D ad quadratum D I, seu vt quadruplum ad quadruplum, scilicet vt quadratum A C ad quadratum I L, eo quod A D, & I D semisses sunt diametrorum A C, I L.

Notæ

Notæ in Proposit. IX.

c SIue ad quadratum differentiæ eius, quæ eſt inter I L, N O eſt vt C G in H E ad quadratum E H, H V, &c. *Licet nouem ſubſequentes propoſitiones facile ex octaua deducantur, nequeunt tamen omnes ſimul conglobatæ vnico hauſtu deuorari; itaque opere pretium erit aliquantisper breuitatem nimiam Arabici Interpretis relinquere. Tria demonſtrata ſunt in propoſitione octaua, quæ in ſequentibus nouem propoſitionibus vſum habent. Primò quod quadratum A C ad quadratum I L eandem proportionem habeat, quàm rectangulum C G in H E ad quudratum H E. Secundò quod I L ad N O eandem proportionem habeat, quàm H E intercepta comparata ad H V potentem comparatam. Tertio quod quadratum I L ad quadratum N O, ſeu L I ad eius* 15. & 16. lib. 1.

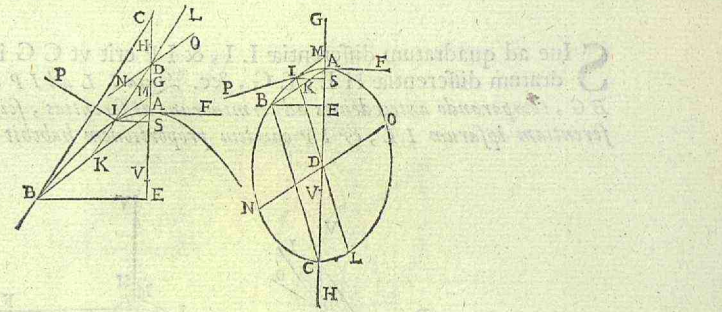


latus rectum I P, ſit vt H E ad E G, vel vt quadratum H E ad rectangulum H E G, vel ad quadratū H V. Modo propoſitio nona ſic demonſtrabitur. Quia I L ad N O eandem rationem habet quàm H E ad H V, erunt antecedentes ad differentias terminorum proportionales, ideſt I L ad differentiam ipſarum I L, & N O eandem proportionem habebit, quàm H E ad differentiam ipſarum E H, & H V: atquè quadratum I L ad quadratum ex differentia ipſarum I L, & N O deſcriptum eandem proportionem habebit, quàm quadratum H E ad quadratum ex differentia ipſarum E H, & H V deſcriptum: erat autem qua- 8. huius. *dratum A C ad quadratum I L, vt rectangulum C G in H E ad quadratum E H; ergo ex æquali ordinata quadratum A C ad quadratum ex differentia ipſarum I L, & N O deſcriptum eandem proportionem habebit, quàm rectangulum C G in H E ad quadratum ex differentia ipſarum E H, & H V.*

Notæ

Notæ in Proposit. X.

d SIue ad I L in N O erit vt C G ad H V, &c. *Quia I L ad N O habebat eandem proportionem, quàm E H ad H V poſitis communibus altitudinibus I L, & E H habebit quadratum I L ad rectangulum I L in N O eandē proportionem, quàm quadratum E H ad rectangulum E H in H V; ſed quadratum A C ad quadratum I L habebat eandem proportionem, quàm rectangulum C G in E H ad quadratum E H;* ex prop. 8. huius. *ergo ex æqualitate quadratum A C ad rectangulum ſub I L in N O eandem proportionem habet, quàm rectangulum C G in H E ad rectangulum E H in H V, ſiue quàm habet C G, ad H V.*



Notæ in Proposit. XI.

e SIue ad duorum quadratorum I L, N O ſummam erit vt C G ad ſummam G E, & E H, &c. *Quia quadratum I L ad quadratum N O erat, vt H E ad E G, antecedentes ad ſummas terminorum erunt proportionales, ſcilicet quadratum I L ad quadratum I L ſimul cum quadrato N O eandem proportionem habebit, quàm H E ad ſummam ipſarum H E, & E G;* Prop. 8. huius. *erat autem quadratum C A ad quadratum I L, vt C G ad E H; ergo ex æqualitate quadratum A C ad quadrata ex I L, & ex N O ſimul ſumpta eandem proportionem habebit, quàm C G, vel H A ad ſummam ipſarum H E, & G E.*

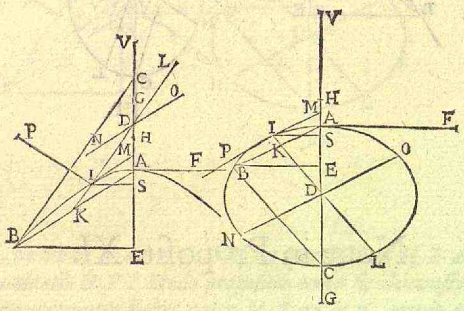
Notæ

Notæ in Proposit. XV.

SIue ad quadratum I P erit vt C G in E H ad quadratum E G, &c. f
Quoniam I L ad I P erat vt H E ad E G; ergo quadratum I L ad quadratum I P erit vt quadratum H E ad quadratum E G; erat autem quadratum A C ad quadratum I L, vt rectangulum C G, seu A H in H E ad quadratum E H; igitur ex æqualitate quadratum A C ad quadratum I P candem proportionem habebit, quàm rectangulum A H E ad quadratum G E.

Notæ in Proposit. XIX.

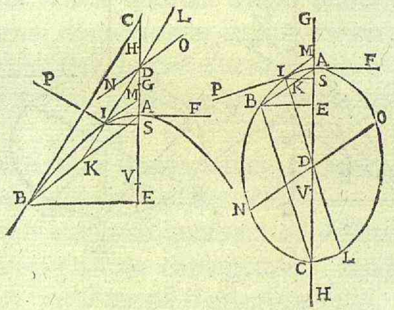
SIue ad quadratum differentiæ L I, & I P erit vt C G in E H ad quadratum differentiæ H E, E G, &c. g *Quia I L ad I P erat vt H E ad E G, comparando antecedentes ad terminorum differentias, scilicet I L ad differentiam ipsarum I L, & I P eandem proportionem habebit, quàm E H ad*



differentiam ipsarum E H, & E G, & quadratum I L ad quadratum ex differentia ipsarum I L, & I P descriptum eandem proportionem habebit, quàm quadratum H E ad quadratum ex differentia ipsarum H E, & G E descriptũ: erat autem quadratum C A ad quadratum I L, vt rectangulum A H E ad quadratum H E; ergo ex æqualitate quadratum A C ad quadratum ex differentia ipsarum I L, & I P eandem proportionem habebit, quàm rectangulum A H E ad quadratum ex differentia ipsarum H E, & E G.

Notæ in Proposit. XVI.

h SIue ad quadratum ex recta linea æquali summæ duarum I L, & I P erit, vt C G in H E ad quadratum ex recta linea composita ex H E, E G, &c. *Quia I L ad I P erat vt H E ad E G comparando, antecedentes ad summas terminorum, erit I L ad I L, & I P simul sumptas, vt H E ad H E, & E G simul sumptas, & quadratum I L ad quadratum ex summa ipsarum I L, & I P descriptum, erit vt quadratum H E ad quadratum ex summa duarum H E, & E G descriptum; & erat prius quadratum A C ad quadratum I L, vt rectangulum A H E ad quadratum H E; igitur ex æqualitate quadratum A C ad quadratum ex summa ipsarum I L, & I P descriptum eãdem proportionem habebit, quàm rectangulum A H E ad quadratum ex summa ipsarum H E, & E G descriptum.*

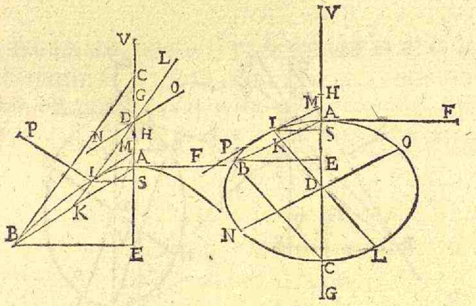


Notæ in Proposit. XVIII.

i SIue ad I L in I P erit, vt C G in G E, &c. *Quia I L ad I P est vt H E ad G E positis communibus altitudinibus I L, H E habebit quadratum I L ad rectangulum sub I L, & I P eandem proportionem, quàm quadratum H E ad rectangulum H E G: sed quadratum A C ad quadratum I L eandem proportionem habebat, quàm rectangulum A H E ad quadratum H E; ergo ex æqualitate quadratum A C ad rectangulum L I P eandem proportionem habebit quàm rectangulum A H E ad rectangulum H E G, seu vt A H, vel C G ad G E.*

Notæ in Proposit. XVII.

SIue ad duo quadrata ex I L, & I P erit, vt C G in E H ad duo quadrata E G, & E H, &c. *Quoniam I L ad I P erat vt H E ad E G, & quadratum I L ad quadratum I P erit vt quadratum H E ad quadratum E G: & comparando antecedentes ad terminorũ summas quadratum I L ad quadratum I L vna cum quadrato I P habebit eandem proportionem, quàm quadratum H E ad summam quadrati H E cum quadrato E G: sed prius quadratum A C ad quadratum I L erat vt rectangulum A H E ad quadratum H E; igitur quadratum A C ad summam quadrati I L cum quadrato I P eãdem proportionem habebit quàm rectangulum A H E ad quadratum E G vna cum quadrato E H.* k



Notæ in Proposit. XX.

SIue ad differentiam duorum quadratorum I L, I P erit, vt C G in H E ad differentiam duorum quadratorum ex H E, & ex E G, &c. l *Quoniam vt dictum est quadratum I L ad quadratum I P eandem proportionẽ habet, quàm quadratum H E ad quadratum G E, & comparando antecedentes ad terminorum differentias quadratum I P ad differentiam quadrati I L à quadrato I P eandem proportionem habebit, quàm quadratum H E ad differentiam inter quadratum H E, & quadratum E G: estque quadratum C A ad quadratum I L, vt rectangulum A H E ad quadratũ H E; ergo ex æquali quadratum A C ad quadratorum ex I L, & ex I P differentiam eandem proportionem habebit, quàm rectangulum A H E ad quadratorum ex E G, & ex E H differentiam.*

SECTIO QVARTA

Continens Proposit. Apollonij XII. XIII. XXIX. XVII. XXII. XXX. XIV. &XXV.

XII. XIII. XXV. DIfferentia quadratorum duorum axium hyperboles æqualis est differentiæ quadratorum quarumlibet duarum diametrorum coniugatarum.

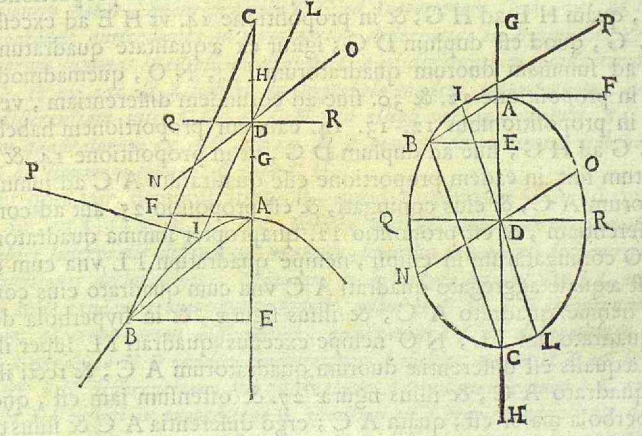
XXVIIII. Nempe differẽtiæ inter quadrata, à figuris earumdẽ diametrorum æquales sunt.

XXVII. Et differentia duorum axium maior est differentia quarumlibet duarum diametrorum coniugatarum.

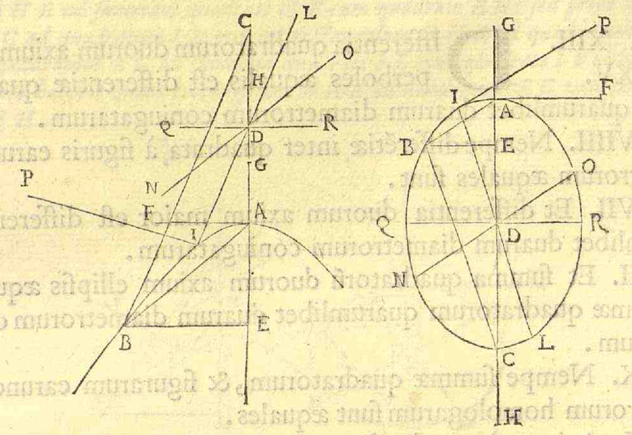
XXII. Et summa quadratorũ duorum axium ellipsis æqualis est summæ quadratorum quarumlibet duarum diametrorum coniugatarum.

XXX. Nempe summæ quadratorum, & figurarum earundem diametrorum homologarum sunt æquales.

XIIII. Axis verò transuersi quadratũ ad differentiam quadratorum duarum diametrorum coniugatarum eandem proportionem habet, quàm præsecta ad duplam inuersæ.

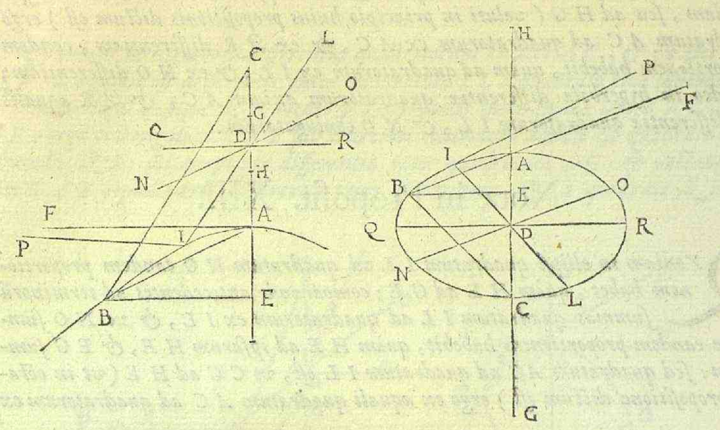


In eisdem figuris, quia quadratum A C ad quadratum sui coniugati a
ex Def. 1. & 2. (in propositione 12. 13. 25.) nempe C A ad A F erectum ipsius est, vt Præsecta C G ad Interceptam G A, siue ad C H; ergo quadratum A C in hyperbola ad differentiam quadratorum axium ipsius, & in ellipsi ad eorundem summam eandem proportionem habet, quàm C G ad H G. Demonstratum autem prius fuit, quadratum C A ad quadratum b
I L eandem proportionem habere, quàm C G ad H E, & quadratum



6. & 7. huius. I L ad quadratum N O eandem proportionem habet, quàm H E ad E G; Insuper quudratum I L ad summam quadratorum I L, N O in ellipsi, aut ad eorundem differentiam in hyperbola eandem proportionem habebit, quàm H E ad H G; & in propositione 14. vt H E ad excessum H E, E G, quod est duplum D G; igitur ex æqualitate quadratum A C, siue ad summam duorum quadratorum I L, N O, quemadmodum habetur in propositione 22. & 30. siue ad eorundem differentiam, veluti habetur in propositionibus 12. 13. 14. eandem proportionem habebit, quàm C G ad H G, siue ad duplum D G, vt in propositione 14. & demonstratum fuit in eadem proportione esse quadratum A C ad summam quadratorum A C, & eius coniugati, & est propositio 25. aut ad eorundem differentiam, & est propositio 12. quapropter summa quadratorum I L, N O coniugatarum in ellipsi, nempe quadratum I L vna cum eius figura est æquale aggregato quadrati A C vna cum quadrato eius coniugati 30. nempe quadrato A C, & illius figuræ, & in hyperbola differentia quadratorum I L, N O nempe excessus quadrati I L super illius figuram æqualis est differentiæ duorum quadratorum A C, & recti illius nempe quadrato A C, & illius figuræ 27. & ostensum iam est, quod I c
L in hyperbola maior est, quàm A C; ergo differentia A C & illius coniugati maior quàm differentia I L, & N O: atquè sic ostendetur, quod dif-

differentia I L, & N O maior sit, quàm differentia quarumlibet duarum coniugatarum ab axi remotiorum. Et hoc erat ostendendum.



Notæ in Proposit. XII.

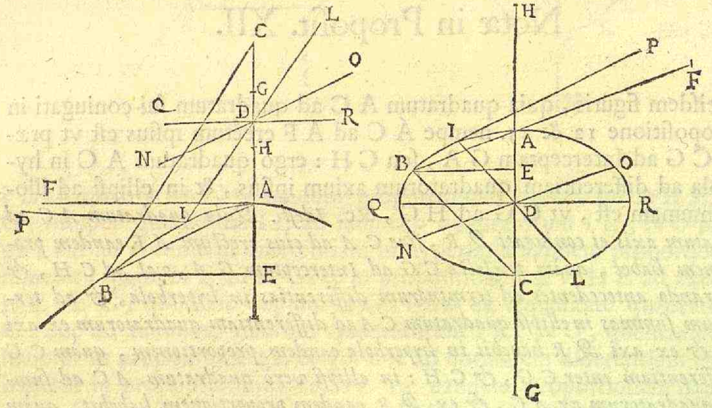
a IN eisdem figuris, quia quadratum A C ad quadratum sui coniugati in propositione 12. & 25. nempe A C ad A F erectum ipsius est vt præsecta C G ad Interceptam G A, seu C H: ergo quadratum A C in hyperbola ad differentiam quadratorum axium ipsius, & in ellipsi ad illorum snmmam est, vt C G ad H G, &c. *Idest. Quia quadratum A C ad quadratum axis ei coniugati Q R, siue C A ad eius erectum A F eandem proportionem habet, quàm præsecta C G ad Interceptam G A, vel ad C H, &* Defin. 1. & 2. huius. *comparando antecedentes ad terminorum differentias in hyperbola, & ad terminorum summas in ellipsi, quadratum C A ad differentiam quadratorum ex axi A C, & ex axi Q R habebit in hyperbola eandem proportionem, quàm C G ad differentiam inter C G, & C H: in ellipsi verò quadratum A C ad summam quadratorum ex A C, & ex Q R eandem proportionem habebit, quàm C G ad summam ipsius C G cum C H.*

b Et quia iam demonstratum est, quod quadratum C A ad quadratum I L sit, vt C G ad E H, &c. *Relicta abstrusa complicatione propositionum Arabici Interpretis distinctiori methodo, sicuti in præcedenti sectione factum est propositiones declarabimus. Quoniam in hyperbola quadratum I L ad quadratum N O eandem proportionem habet, quàm H E ad E G comparando antecedentes ad terminorum differentias, quadratum I L ad differentiam quadrati I L à quadrato N O eandem proportionem habebit, quàm H E ad ipsarum H E, & E G differentiam; sed quadratum A C ad quadratum I L est vt C G ad H E (veluti in propositione 8. ostensum est) ergo ex æqualitate quadratum A C ad quadratorum ex I L, & ex N O differentiam eandem proportionem habebit,* 6. huius.

habebit, quàm C G ad ipsarum H E, & E G differentiam, seu ad H G: sed in eadem hyperbola quadratum A C ad quadratorum A C, & Q R differentiam eandem proportionem habet, quàm C G ad ipsarum C G, & C H differentiam, seu ad H G (veluti in principio huius propositionis dictum est) ergo quadratum A C ad quadratorum ex A C, & ex Q R differentiam, eandem proportionem habebit, quàm ad quadratorum ex I L, & ex N O differentiam; & ideo in hyperbola differentiæ quadratorum axium A C, & Q R æqualis est differentiæ quadratorum I L, & N O coniugatarum.

Notæ in Proposit. XIII.

7. huius. QVoniam in ellipsi quadratum I L ad quadratum N O eandem proportionem habet, quàm H E ad G E; comparando antecedentes ad terminorũ summas quadratum I L ad quadratorum ex I L, & ex N O summam eandem proportionem habebit, quàm H E ad ipsarum H E, & E G summam: sed quadratum A C ad quadratum I L est, vt C G ad H E (vt in octaua propositione dictum est) ergo ex æquali quadratum A C ad quadratorum ex

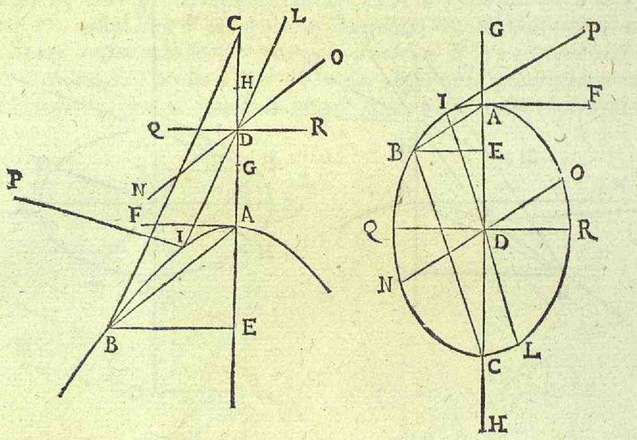


I L, & ex N O summam eandem proportionem habebit, quàm C G ad summam ipsarum H E, & E G, seu ad G H: sed in principio præcedentis notæ ostensum est, quod in ellipsi quadratum A C ad quadratorum ex A C, & ex Q R summam eandem proportionem habet, quàm C G ad summam ipsarum C G, & C H, seu ad G H: quarè quadratum A C eãdem proportionem habet ad summam quadratorum ex C A, & ex Q R, quàm ad summam quadratorum ex I L, & ex N O; & propterea in ellipsi quadrata duorum axium A C, & Q R simul sumpta æqualia sunt quadratis duarum coniugatarum diametrorum I L, & N O simul sumptis.

Notæ

Notæ in Proposit. XXIX.

QVoniam in hyperbola differentia quadratorum ex axi A C, & ex axi Q R æqualis est differentiæ inter quadratum I L à quadrato eius coniugatæ N O; estque Q R media proportionalis inter figuræ latera A C, & A F; ergo rectangulum C A F sub extremis contentum æquale est quadrato intermediæ Q R: Et propterea differentia inter quadratum A C, & rectangulum C A F æqualis erit differentiæ inter quadratum A C à quadrato Q R. 12. huius. 16. lib. 1.



Pari ratione erit differentia quadrati I L à rectangulo L I P æqualis differentiæ quadrati I L à quadrato N O; & propterea in hyperbole differentia quadrati axis A C à rectangulo sub figuræ lateribus contentum C A F æqualis est differentiæ quadrati diametri I L à rectangulo L I P sub lateribus figuræ eius.

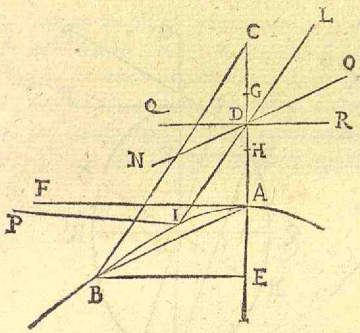
Notæ in Proposit. XXX.

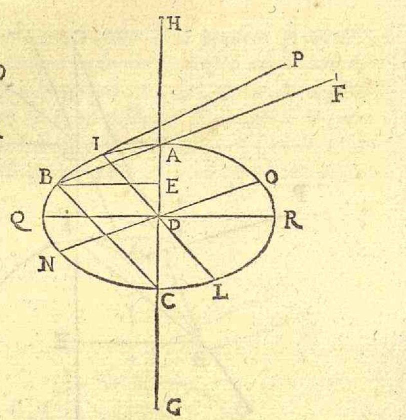
QVoniam in ellipsi quadratorum ex A C, & ex Q R summa æqualis est summæ quadratorum ex I L, & ex N O: estque rectangulum C A F æquale quadrato Q R, & rectangulum L I P æquale quadrato N O (vt in præcedenti nota dictum est) igitur in ellipsi quadratum axis A C, & rectangulum C A F sub eius lateribus cõtentum simul sumpta æqualia sunt quadrato ex I L cum rectangulo figuræ eius L I P. Prop. 13. huius. ex 15. lib. 1.

Notæ

Notæ in Proposit. XIV. & XXV.

QVoniam nedum in hyperbola, ſed etiam in ellipſi quadratum A C ad ſummam quadratorum ex I L, & ex N O eandem proportionem habet, quã A H ad ſummam ipſarum H E, & E G, atque quadratorum ex I L, & ex N O ſumma ad eorundem quadratorum differentiam eandem proportionem habet, quàm ipſarum H E, & E G ſumma ad earundem differentiam;

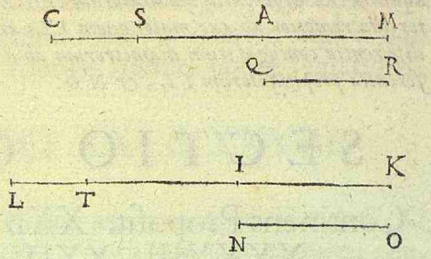




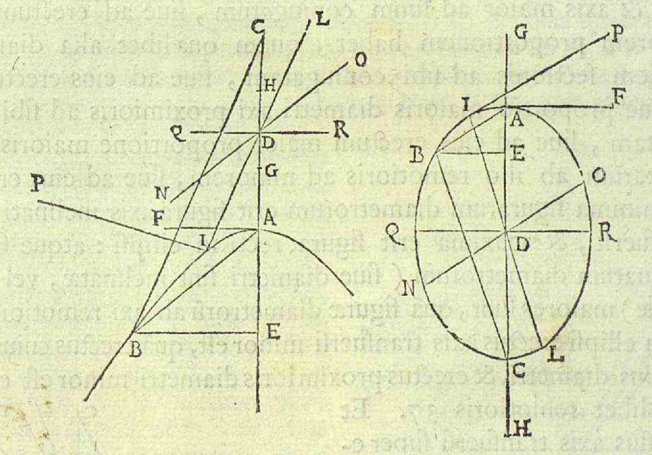
ergo ex æquali quadratum A C ad quadratorum ex I L, & ex N O differentiam eandem proportionem habet, quàm C G, ſiue H A ad ipſarum H E, & E G differentiam; ſed in ellipſi ipſarum H E, & E G differentia æqualis eſt duplo E D; igitur in ellipſi quadratum A C ad quadratorum ex I L, & ex N O differentiam eandem proportionem habebit, quàm præſecta C G ad duplum inuerſæ E D.

Notæ in Proposit. XXVII.

ET oſtenſum iam eſt, quod I L in hyperbola maior eſt, quàm A C; ergo differentia A C, & illius coniugati maior eſt, quàm differentia homologorum ſuorum à ſuis coniugatis, & differentia proximioris homologi ad ſuam coniugatam maior eſt differentia remotioris à ſua coniugata, &c. *Hoc autem ſic demonſtrabitur. In diametris A C, & I L producatur A M æqualis Q R, & I K æqualis N O, & ab ijſdem ſecentur A S æqualis Q R, & I T æqualis N O. Quoniam M S bifariam ſecatur in A, & ei indirectum*



indirectum additur S C, erit rectangulum M C S cum quadrato ex A S, ſeu ex Q R æquale quadrato ipſius A C; ergo rectangulum M C S æquale eſt differentiæ quadrati A C à quadrato Q R: pari ratione rectangulum K L T vna cum quadrato N O æquale erit quadrato I L: ergo ſimiliter rectangulum K L T æquale eſt differentiæ quadratorum ex I L, & ex N O; eſtquè quadratum I L maius quadrato A C, cum diameter I L in hyperbola maior ſit, quàm axis C A; igitur rectangulum K L T vna cum quadrato N O maius erit rectangulo M C S vna cum quadrato Q R: eſt verò rectangulum M C S æquale rectangulo K L T (cum ſint differentiæ quadratorum ex con- Prop. 12. huius. *iugatis diametris, quæ in hyperbola oſtenſæ ſunt æquales); ergo quadratum N*



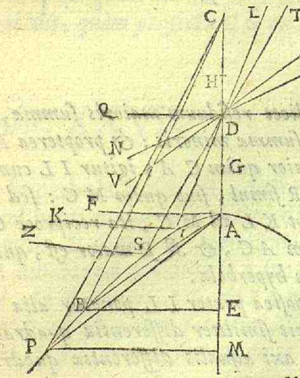
O, ſcilicet reſiduum maioris ſummæ, maius erit quadrato Q R, quod eſt reſiduum ſummæ minoris: & propterea N O maior erit, quàm Q R: erat autem I L maior quàm C A; igitur I L cum N O, ſeu K L maior erit, quàm A C, & Q R ſimul, ſiue quàm M C: ſed in rectangulis M C S, & K L T æqualibus, vt K L ad M C, ita reciprocè C S ad L T; igitur C S, ſeu differentia ipſarum A C, & Q R maior eſt, quàm L T, ſeu differentia ipſarum I L, & N O in hyperbola.

Si poſtea præter I L ponatur alia diameter ab axe remotior cum ſua coniugata erit ſimiliter differentia quadratorum ex diametris coniugatis remotioribus ab axi æqualis differentiæ quadratorum axium A C, & Q R, & ideo *æqualis erit differentiæ quadratorum ex I L, & ex N O; estque pariter diameter illa remotior ab axe maior quàm I L; ergo simili ratiocinio ostendetur, quod differentia coniugatarum diametrorum ab axe remotiorum minor est, quàm differentia propinquiorum I L, & N O.*

SECTIO QVINTA

Continens Proposit. XXI. XXVIII. XXXXII. XXXXIII. XXIV. & XXXVII.

AXes hyperboles si fuerint æquales, tunc quælibet diametri coniugatæ in illa sectione æquales sunt 21. si verò fuerit 28. vnus duorum axium in hyperbola, aut ellipsi maior, a
tunc eius diameter homologa maior erit sua coniugata, quousquè ad duas æquales diametros coniugatas in ellipsi perueniatur, & axis maior ad suum coniugatum, siuè ad erectum eius maiorem proportionem habet, quàm quælibet alia diameter eiusdem sectionis ad sibi coniugatam, siue ad eius erectum; eritque proportio maioris diametri axi proximioris ad sibi coniugatam, siue ad eius erectum maior proportione maioris coniugatarum ab illo remotioris ad minorem, siue ad eius erectũ. Et minima figurarum diametrorum erit figura axis inclinati, siue transuersi, & maxima erit figura recti in ellipsi: atque figuræ reliquarum diametrorum (siue diametri sint inclinatæ, vel transuersæ) maiores sunt, quã figuræ diametrorũ ab axi remotiorũ 24. Et in ellipsi erectus axis transuersi minor est, quã erectus cuiuslibet alterius diametri, & erectus proximioris diametri minor est erecto cuiuslibet remotioris 37. Et excessus axis transuersi super eius coniugatum maior est, quã excessus homologarum diametrorum, super suas coniugatas, & excessus proximioris homologæ super suam coniugatam maior est, quàm excessus remotioris super eius coniugatã. Et differentia duorum laterum figuræ axis maior est, quàm



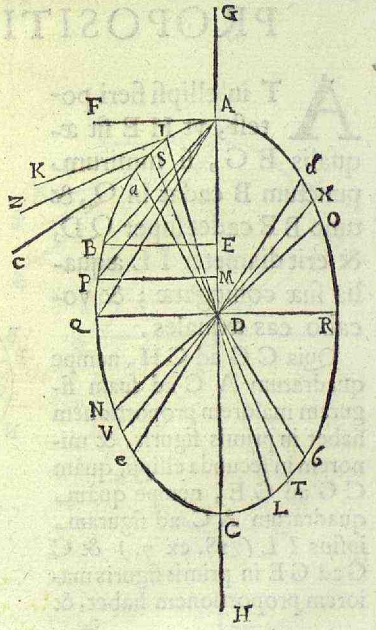
diffe-

differentia duorum laterum figuræ sui homologi; pariterque proximioris axi homologi differentia duorum laterum figuræ eius maior est, quàm differentia duorum laterum figuræ remotioris.

PROPOSITIO XXI. & XXVIII.

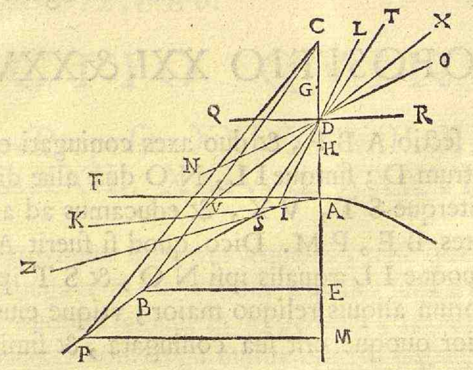
SIt itaque sectio A B P, & duo axes coniugati eius A C, Q R, centrum D; sintque I L, N O duæ aliæ diametri coniugatæ; pariterque S T, V X, & educamus ad axim C A M perpendiculares B E, P M. Dico quod si fuerit A C æqualis Q R; erit quoque I L æqualis ipsi N O, & S T ipsi V X. Si verò fuerit eorum aliquis reliquo maior, vtique eius homologa diameter maior quoque erit sua coniugata, & similiter in reliquis propositionibus.

Sit prius alter axis A C maior in prima figura, sed Q R in secunda; sintque A G, C H duæ interceptæ diametri A C. Et quia quadratum A C ad quadratum Q R, nempe A C ad eius erectum est vt A H ad H C, seu ad A G; & habet H A ad A G maiorem proportionem in prima ex Def. 1.
figura, & minorem in secunda, quàm H E ad E G, quæ ostensa est huius.
(6. 7. ex 7.) vt quadratum I L ad quadratum N O, nempe I L ad eius erectum. Et similiter proportio illa maior, aut minor est, quàm H M ad M G, quæ est vt quadratum S T ad quadratum V X; igitur A C ad Q R, siue ad erectum ipsius A C in prima maiorem proportionem habet, & in secunda minorem, quàm I L ad N O, siue ad erectum ipsius I L, siue quàm S T ad V X, vel ad erectum ipsius S T; sed quia H E ad E G in prima figura maiorem proportionem, & in secunda minorem, quàm H M ad M G habebit I L ad N O maiorem proportionem in prima, & minorem in secunda, quàm S T ad V X, cumque H E in prima figura sit maior, & in secunda minor, quàm E G, pariterque H M, quàm M G, erit I L in prima maior, & in secunda minor, quàm N O, similiterque S T, quàm V X.



Deinde

XXI. Deinde sit A C æqualis Q R in hyperbola fiet A C æqualis erecto, & conuenient duo puncta H, & G in puncto D, eritque A C ad



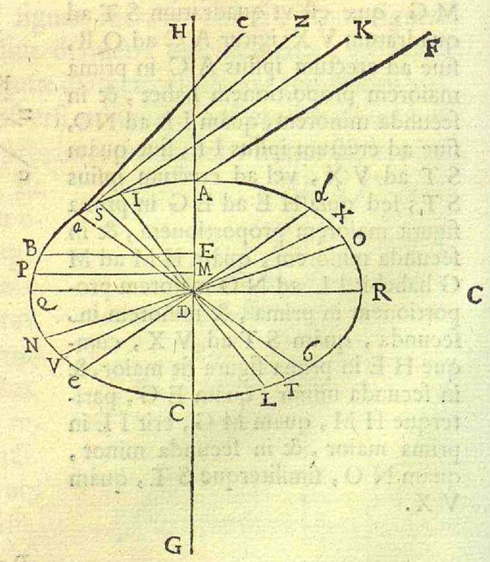
Q R vt A D ad se ipsam, siue vt A C ad se ipsam, quæ est vt D E ad se ipsam, & hæc ostensa est, vt quadratum I L ad quadratum N O; igitur I L, & N O sunt æquales, & sic demonstrabitur, quod S T, V X sunt æquales, & hoc erat propositum.

Prop. 6. huius.

PROPOSITIO XXVI

AT in ellipsi fieri potest, vt H E sit æqualis E G, si nimirum punctum B cadat in Q, & tunc B E cadet super Q D, & erit diameter I L æqualis suæ coniugatæ; & vocabo eas æquales.

Quia C G ad C H, nempe quadratum A C ad suam figuram maiorem proportionem habet in primis figuris, & minorem in secunda ellipsi, quàm C G ad G E, nempe quàm quadratum A C ad figuram ipsius I L (18. ex 7.) & C G ad G E in primis figuris maiorem proportionem habet, & in

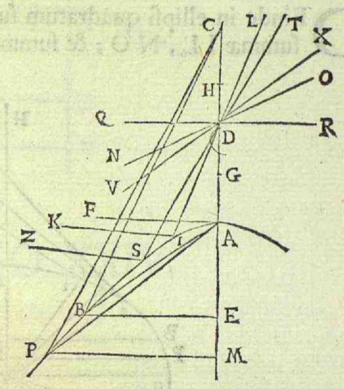


in secunda ellipsi minorem, quàm C G ad G M, nempe quàm quadratum A C ad figuram ipsius S T (18. ex 7.) ergo figura ipsius A C est minor; in secunda verò maior quàm figura ipsius I L; & similiter figura ipsius I L maior, aut minor est figura S T. Et hoc est propositum.

PROPOSITIO XXXXII.

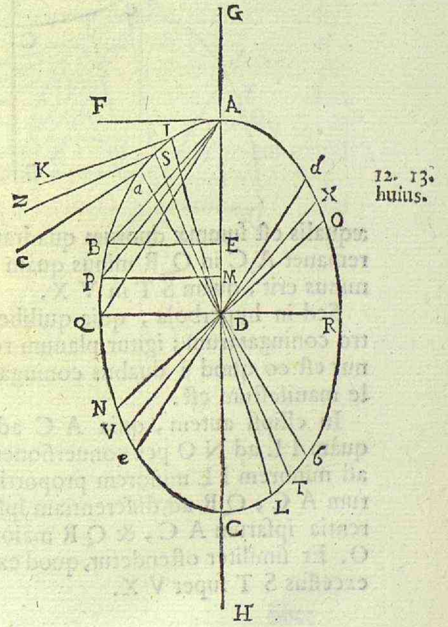
IN hyperbole, & ellipsi summa duorum axium minor est summa quarumlibet duarum cõiugatarum diametrorum eiusdẽ sectionis.

XXXXIII. Et planum ab eis contentũ minus est plano à duabus coniugatis contento, & planum à proximioribus axi coniugatis contentum minus est plano à remotioribus contento.



Iisdem figuris manentibus, quia in hyperbole A C minor est quàm I L, & I L, quàm S T; & siquidem A C æqualis fuerit Q R, erit quoque I L æqualis N O, & S T æqualis V X (21. ex 7.) ergo summa ipsorum A C, Q R minor est, quã summa I L, N O, & quàm S T, V X: si verò A C non fuerit æqualis ipsi Q R, vtique differentia duorum quadratorum A C, Q R æqualis erit differentiæ quadratorum I L, N O: & propterea summa ipsorum A C, Q R minor erit, quàm summa I L, N O: & hæc summa ex hac eadem demonstratione minor etiam erit, quàm summa duarum S T, V X. At in ellipsi; quia A C ad Q R maiorem proportionem habet, quàm I L ad N O (28. ex 7.) habebit quadratum ex summa A C, Q R ad earundem duarum summam quadratorum maiorem proportionem, quàm quadratum summæ I L, N O ad quadratorum sum-

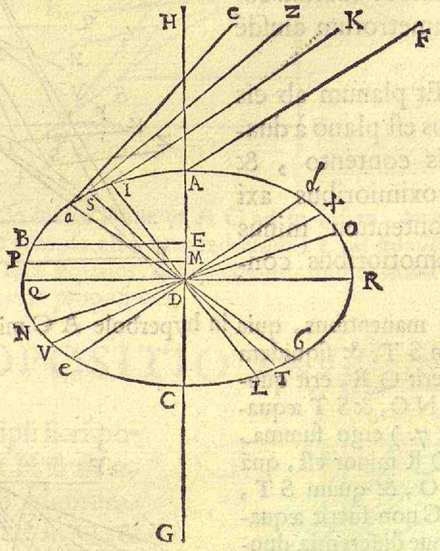
12. 13. huius.



ſummam earundem: & ſumma duorum quadratorum ipſarum æqualis eſt ſummæ duorum quadratorum A C, Q R (22. ex 7.) ergo ſumma A C, Q R minor eſt, quàm ſumma I L, N O, atque ſic oſtendetur, quod sũma I L, N O minor eſt, quàm ſumma S T, V X. Quod erat propoſitũ.

PROPOSITIO XXXXIII.

DEinde in ellipſi quadratum ſummæ A C, Q R minus eſt quadrato ſummæ I L, N O; & ſumma duorum quadratorum A C, Q R

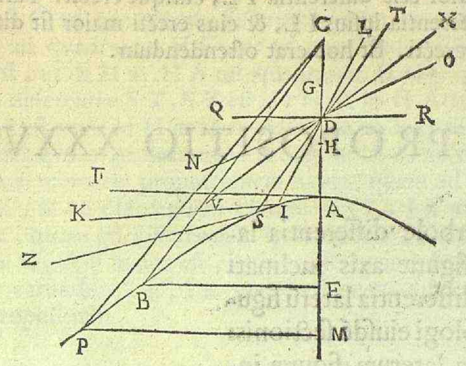


æqualis eſt ſummæ duorum quadratorum I L, N O (22. ex 7.) igitur remanet A C in Q R minus quàm I L in N O, & ſimiliter I L in N O minus erit, quàm S T in V X. f

Sed in hyperbola, quia quilibet axium minor eſt homologa diametro coniugatarum; igitur planum rectangulum ab axibus contentum minus eſt eo quod à duabus coniugatis continetur hoc igitur in hyperbole manifeſtum eſt.

In ellipſi autem, quia A C ad Q R maiorem proportionem habet; g quàm I L ad N O per conuerſionem rationis, & permutando maior A C ad minorem I L minorem proportionem habebit, quàm differentia ipſarum A C, Q R ad differentiam ipſarum I L & N O; & propterea differentia ipſarum A C, & Q R maior erit differentia reliquarum I L, & N O. Et ſimiliter oſtendetur, quod exceſſus I L ſuper N O maior ſit, quàm exceſſus S T ſuper V X.

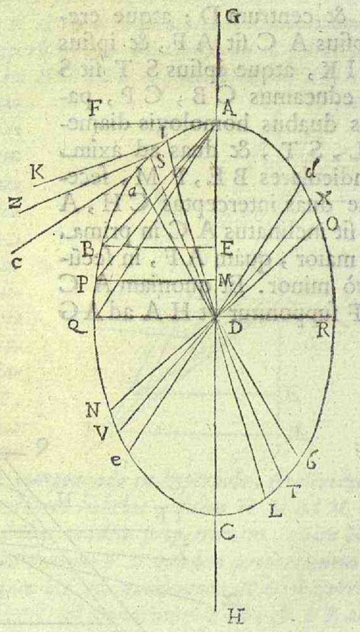
PROP.



PROPOSITIO XXIV.

ET quia in ellipſi quadratum Q R, nempe figura axis A C minor eſt in prima, & maior in ſecunda ellipſi, qdàm quadratum N O, nempe quã figura I L (28. ex 7.) eſtque A C maior in prima, & minor in ſecunda figura quàm I L; igitur
h erectum ipſius A C minus eſt in prima figura, & maius in ſecunda, quàm erectum I L. Et ſic oſtendetur, quod erectum ipſius I L maius ſit, ſiue minus, quàm erectum S T.

Et quia erectum ipſius A C minus eſt in prima ellipſi, & maius in ſecunda, quàm erectum ipſius I L, & A C maior eſt in prima, & minor in ſecunda figura quàm I L, igitur differentia A C, eiuſq; erecti, quæ ſunt duo latera figuræ A C, in quo-

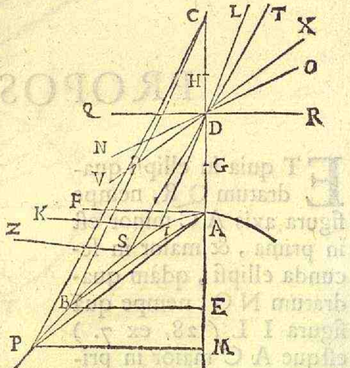


libet

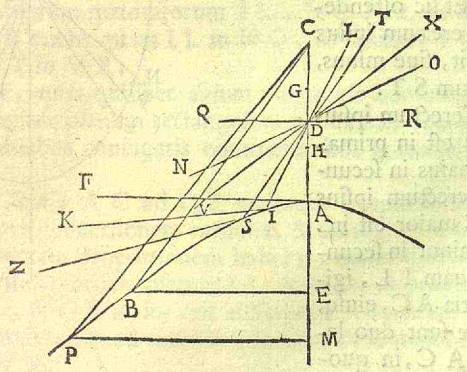
libet casu maior erit differentia I L, eiusque erecti. Pari modo ostendetur quod differentia ipsius I L, & eius erecti maior sit differentia ipsius S T, eiusque erecti. Et hoc erat ostendendum.

PROPOSITIO XXXVII.

IN hyperbole differentia laterum figuræ axis inclinati maior est differentia laterũ figuræ sui homologi eiusdẽ sectionis: & differẽtia laterum figuræ inclinati proximioris axi maior est differentia laterum figuræ inclinati ab illo remotioris.



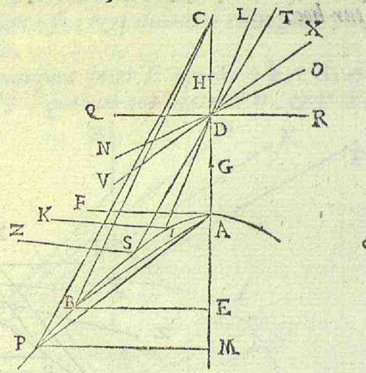
In hyperbole A B P sit axis C A, & I L, S T sit duæ aliæ diametri, & centrum D; atque erectus ipsius A C sit A F, & ipsius I L sit I K, atque ipsius S T sit S Z: & educamus C B, C P, parallelas duabus homologis diametris I L, S T, & duas ad axim perpendiculares B E, P M, secemusque duas interceptas C H, A G, & sit inclinatus A C in prima figura maior, quàm A F, in secũda verò minor. Et quoniam A C ad A F supponitur vt H A ad A G



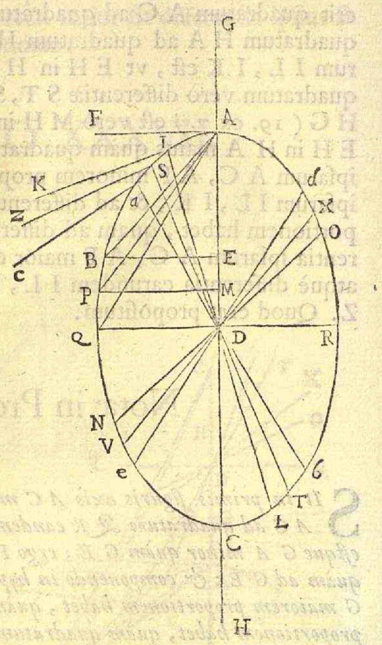
erit quadratum A C ad quadratum differentiæ ipsarum A C, A F, vt quadratum H A ad quadratum H G, at ad quadratum differentiæ ipsarum I L, I K est, vt E H in H A ad quadratum H G (19. ex 7.) ad quadratum verò differentiæ S T, S Z est, vt H M in H A ad quadratum H G (19. ex 7.) est verò M H in H A maius quàm E H in H A, atque E H in H A maius quàm quadratum H A; igitur A C ad differentiam ipsarum A C, A F minorem proportionem habet, quàm ad differentiam ipsarum I L, I K, & ad differentiam earundem I L, I K minorem proportionem habet, quam ad differentiam ipsarum S T, S Z; igitur differentia ipsarum A C, A F maior est, quàm differentia ipsarum I L, I K, atquè differentia earundem I L, I K maior est quàm differentia S T, S Z. Quod erat propositum.

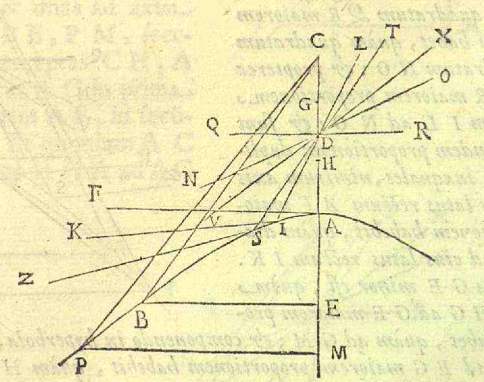
Notæ in Proposit. XXVIII.

SIt in primis figuris axis A C maior, quàm axis Q R. Quia quadratum A C ad quadratum Q R eandem proportionem habet, quàm H A ad A G: ex 15. 16. lib. 1. *estque G A minor quàm G E; ergo H G ad G A maiorem proportionem habet* Defin. 1. huius. *quàm ad G E: & componendo in hyperbola, & diuidendo in ellipsi H A ad A G maiorem proportionem habet, quàm H E ad E G; sed H E ad E G eandem* 6. & 7. huius. *proportionem habet, quàm quadratum I L ad quadratum N O; ergo quadratum A C ad quadratum Q R maiorem proportionem habet, quàm quadratum I L ad quadratum N O: & propterea A C ad Q R maiorem proportionem habet, quàm I L ad N O: & sunt quoquè earundem proportionum duplicatæ pariter inæquales, nimirum axis A C ad eius latus rectum A F maiorem proportionem habebit, quàm diameter I L ad eius latus rectum I K.* ex 15. 16. huius. *Secundò quia G E minor est, quàm G M; ergo H G ad G E maiorem proportionem habet, quàm ad G M; & componendo in hyperbola, & diuidendo in ellipsi H E ad E G maiorem proportionem habebit, quàm H M ad M G, & quadratum I L ad quadratum N O habet eandem proportionem, quàm H E ad E G; nec non quadratum S T ad quadratum V X eandem proportionem habet, quàm H M ad M G;* 6. & 7. huius. *ergo quadratum I L ad quadratum N O maiorem proportionem habet, quàm quadratum S T ad quadratum V X, & I L ad N O maiorem proportionem habebit, quàm S T ad V X, & earundem proportionum duplicatæ inæquales quoque erunt, scilicet I L ad eius latus rectum maiorem proportionem habebit, quàm S T ad eius latus rectum. Deindè in secundis figuris sit axis A C minor quàm Q R. Quia H A minor est, quàm H E;*



nec non H E minor quàm H M ergo H A ad eandem H G minorem proportionem habebit, quàm H E, & comparando antecedentes, ad terminorum
Lem. 2. lib. 5. *summas vel ad differentias H A ad A G minorem proportionem habet, quàm H E ad E G, & similiter H E ad E G minorem proportionem habet, quàm H*
ex 15. 16. lib. 1. *M ad M G: est verò quadratum A C*
Defin. 1. huius. *ad quadratum Q R, vt H A ad A G, & quadratum I L ad quadratum N O,*
Prop. 7. huius. *vt H E ad E G; pariterquè quadratum S T ad quadratum V X est, vt H M ad M G; & ideo A C ad Q R minorem proportionem habebit, quàm I L ad N O, & I L ad N O minorem proportionem habebit, quàm S T ad V X; &*
ex 15. 16. lib. 1. *similiter earundem proportionum duplicatæ eodem ordine inæquales erunt, scilicet AC ad eius latus rectum minorem proportionem habebit quàm I L ad eius rectum latus, &c. Ad perfectionem partis secundæ propositionis 28. requiritur hoc.*



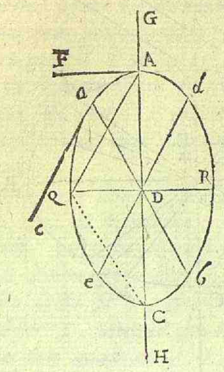


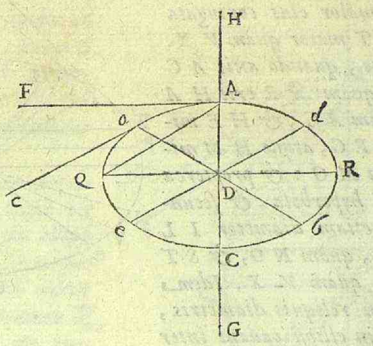
LEMMA I.

IN ellipsi cuius axes inæquales sunt, duas diametros coniugatas inter se æquales reperire.

In

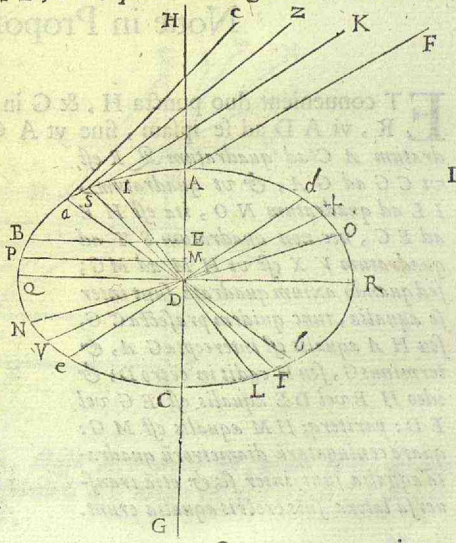
In eadem figura coniungatur recta linea A Q terminos axium coniungens, & per centrum huic parallela sit e d, perq; idem centrum, & semipartitionem





applicatæ A Q ducatur diameter a b: Dico diametros coniugatas a b, & e d æquales esse inter se. Quoniam à termino Q ordinatim applicatæ A Q ad diametrum a b ducitur ad axim perpendicularis Q D cadens in centrum D; ergo Prop. 7. huius.
H D ad D G eandem proportionem habet, quàm quadratum diametri a b ad quadratum eius coniugatæ c d; suntquè H D, & G D æquales inter se, cum semiaxes, atquè interceptæ sint æquales inter se; ergo diametri coniugatæ a b, & c d æquales erunt inter se hoc præmisso.

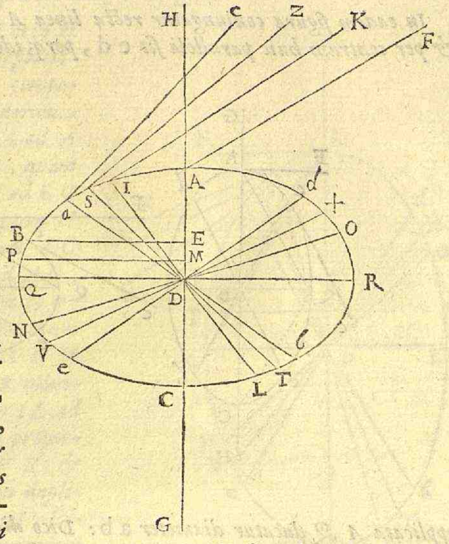
Reperiantur in ellipsi duæ diametri coniugatæ inter se æquales a b, e d, & inter a, & A ponantur diametri I L, S T, quarum coniugatæ N O, & V X, & ducatur reliquæ rectæ lineæ, vt prius factum est, & ponatur primo loco axis A C maior quàm Q R: Dico I L maiorem esse ipsa N O, & S T maiorem V X. Quia quadratum A C ad quadratum Q R eandem proportionem habet, quàm H A ad A G, & quadratum I L ad quadratum N O eandem proportionem habet, quàm H E ad E G; pariterquè quadratum S T ad quadratum V X eandem proportionem habet, quàm H M ad M G; sed in prima hyperbola, & prima ellipsi H A maior est, quàm A G, & H E maior, quã E G, atquè H M maior, quàm M G; igitur quadratum I L ma-



Defin. 1. huius.

Prop. 7. huius.

 ius



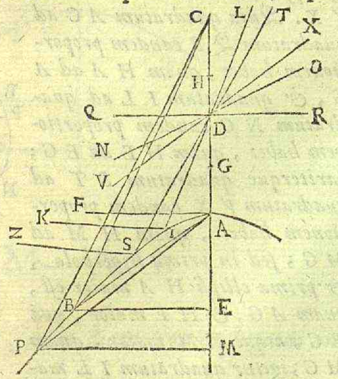
ius est quadrato N O, & quadratum S T maius quadrato V X; ideoque quando axis A C maior est, quàm Q R, erit diameter I L maior eius coniugata N O, & S T maior quàm V X. Pari ratione, quando axis A C minor est, quàm Q R erit H A minor, quàm A G, & H E minor, quàm E G, atque H M minor, quàm M G: & propterea in secunda hyperbola, & secunda ellipsi etiam diameter I L minor erit, quàm N O, & S T minor erit quàm V X. Idem contingit in reliquis diametris, dummodò in ellipsi cadant inter A, & a, nam a b est æqualis suæ coniugatæ e d: & vltra punctum a ad partes Q diametri cadentes minores sunt suis coniugatis in prima ellipsi, & maiores in secunda, cum propinquiores sint axi Q R.

Si verò fuerit vnus duorum axium in hyperbola aut ellipsi maior, tunc eius homologa diameter coniugata maior est, &c. *Non nulla in hoc textu deficiunt; non enim omnes diametri in ellipsi sunt inæquales vt in Lemmate 1. ostensum est, & ideo textus corrigi debuit.* a

Notæ in Proposit. XXI.

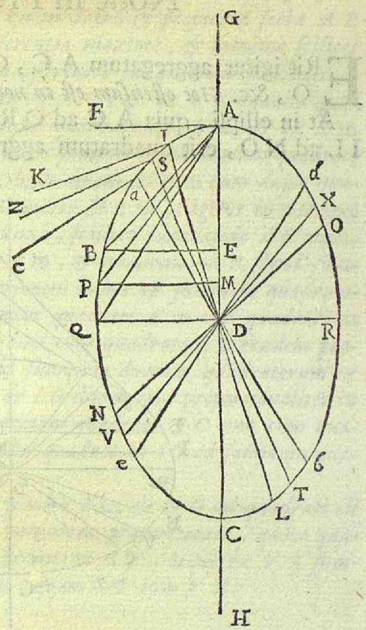
ET conuenient duo puncta H, & G in puncto D; eritque A C ad Q R, vt A D ad se ipsam, siue vt A C ad se ipsam, &c. *Quia quadratum A C ad quadratum Q R est vt C G ad G A, & vt quadratum I L ad quadratum N O, ita est H E ad E G, nec non quadratum S T ad quadratum V X est vt H M ad M G; sed quando axium quadrata sunt inter se æqualia, tunc quidem præfecta C G, seu H A æqualis est interceptæ G A, & terminus G, seu H cadit in cētro D; & ideo H E vel D E æqualis est E G vel E D: pariterq; H M æqualis est M G: quarè coniugatarũ diametrorũ quadrata æqualia sunt inter se; & etiã transuersa latera suis erectis æqualia erunt.* b

Defin. 1. Prop. 7. huius.



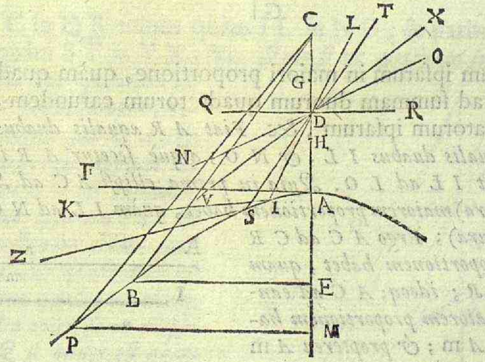
Quia

C Quia C G ad A G, nempe quadratum A C ad suam figuram in maiori, & in figura secunda ellipsi in minori proportione, &c. *Idest. In prima, & secunda figura hyperboles, & in prima figura ellipsis habet C G ad G A maiorem proportionem, quàm ad G E, eo quod G E maior est, quàm G A: at in secunda figura ellipsis proportio minor est; quia G E minor est, quã A G. Propositum verò aliter ostendetur hac ratione.*



Quoniam ex demonstratis in nota propos. 27. in hyperbola, atque ex propositione 11. libri quinti in ellipsi erit axis minor, & rectus Q R minor diametro recta N O, & N O minor remotiore V X, ideoque quadratum Q R minus erit quadrato N O, & quadratum N O minus quàm quadratum V X: est verò figura, seu rectangulum C A F sub extremis contentum æquale quadrato Q R ex media proportionali inter illas descriptum: pariterque rectangulum L I K æquale est quadrato diametri ei coniugatæ N O, nec non rectangulum T S Z æquale erit quadrato V X, ergo rectangulum C A F minus est rectangulo L I K, atque rectangulum L I K minus est rectangulo T

15. lib. 1.



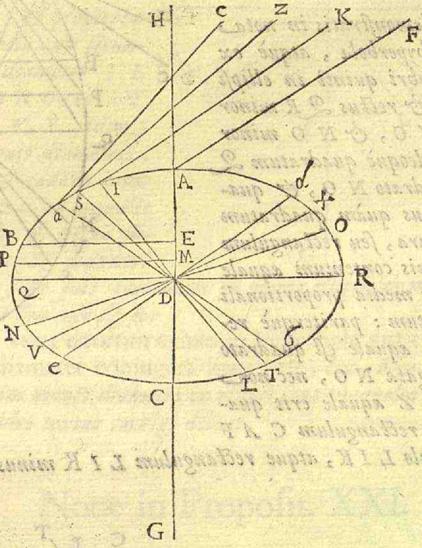
S Z. E contra in ellipsi secunda. Quia Q R maior est, quàm N O, & hæc maior, quàm V X; ergo rectangulum C A F maius est rectangulo L I K, & hoc maius erit rectangulo T S Z.

Notæ

Notæ in Proposit. XXXXII.

ERit igitur aggregatum A C, Q R minus quàm aggregatum I L, N O, &c. *Hoc ostensum est in nota proposit. 27. huius.* d

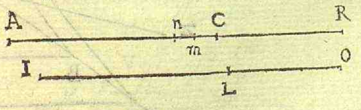
At in ellipsi, quia A C ad Q R maiorem proportionem habet, quàm I L ad N O, erit quadratum aggregati A C, Q R ad summam duorum e

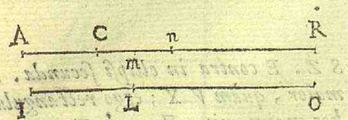


quadratorum ipsarum in maiori proportione, quàm quadratum aggregati I L, N O ad summam duorum quadratorum earundem, & summa duorum quadratorum ipsarum, &c. *Fiat A R æqualis duabus A C & Q R, I O fiat æqualis duabus I L, & N O; atquè secetur A R in* m, *vt sit A* m *ad* m *R, vt I L ad L O. Quia in prima ellipsi A C ad Q R, vel ad C R (in hac figura) maiorem proportionem habet, quàm I L ad N O, seu ad L O (in præsenti figura); Ergo A C ad C R maiorem proportionem habet, quàm A* m *ad* m *R; ideoq; A C ad eandem A R maiorem proportionem habebit quàm A* m; *& propterea A* m *minor erit, quàm A C: sed A* m *maior est quàm M R, eo quod I L priori homologa maior est, quàm L O; at in secunda ellipsi A C ad C R minorem proportionem habet, quàm*

Prop. 21. huius.

Lem. 2. lib. 5.





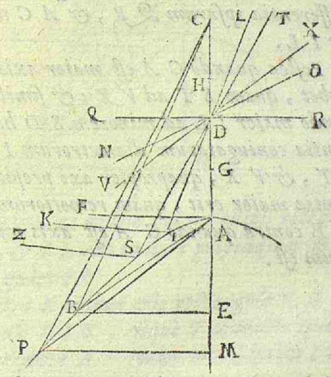
I L ad L O, seu quàm A m *ad* m *R; & A C ad eandem A R minorem proportionem habet quàm A* m; *ideoque A C minor erit, quàm A* m, *& A* m *minor quàm* m *R, sicuti I L minor est, quàm L O; & propterea secta A R bifariam in* n *in vtroq; casu C* n *semidifferentia maximè, & minimè scilicet A C, & C R maior erit, quàm* m n *semidifferentia inæqualium intermediarum A* m, *& R* m: *suntque duo quadrata ex A C, & ex C R æqualia quadratis ex R* n, *& ex C* n *bis sumptis, atquè quadrata ex A* m, *& ex R* m *æqualia sunt quadratis ex R* n, *& ex* m n *bis sumptis, sed duplum quadrati* n *C cum duplo quadrati* n *R maiora sunt duplo quadrati* n m *cum duplo quadrati* n *R (cum* n *R sit communis, &* n *C maior sit* n m*); igitur in vtroque casu duo quadrata ex maxima, & ex minima, scilicet quadratum A C vna cum quadrato C R maiora sunt quadrato A* m, *& quadrato* m *R simul sumptis: & quadratum A R minorem proportionem habet ad summam quadratorum ex A C, & ex C R, quàm ad summam quadrati A* m, *& quadrati* m *R; sed quadratum I O ad quadratum I L vna cum quadrato L O eandem proportionem habet, quàm quadratum A R ad summam duorum quadratorum ex A* m, *& ex* m *R (propterea quod A R, & I O diuiduntur proportionaliter in* m, *& L): igitur quadratum A R ad summam quadrati A C vna cum quadrato C R minorem proportionem habet, quàm quadratum I O ad summam quadrati I L cum quadrato L O.*

Lem. 2. lib. 5.

Non secus ostendetur, quod quadratum summæ I L, & N O ad quadrati ex I L, & quadrati ex N O summam habet minorem proportionem, quàm quadratum summæ S T, & V X ad quadratorum ex S T, atquè ex V X summam: & ideo I L cum N O minores erunt, quàm S T cum V X. ex 22. huius.

Notæ in Proposit. XXXXIII.

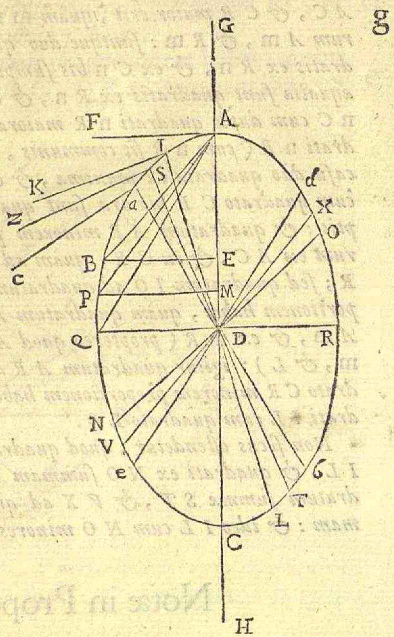
f REmanet A C in Q R minus quàm I L in N O, & pariter I L in N O minus quàm S T in V X, &c. *Quia si ex quadrato summæ A C, & Q R auferantur duo quadrata ex C A, & ex Q R simul sumpta, remanent duo rectangula sub C A, & Q R contenta: pariterque duplum rectanguli ex I L in N O est residuum quadrati ex summa ipsarum I L, & N O descripti, postquàm ablata sunt quadratum ex I L, & quadratum ex N O simul; sed bina quadrata vtrinq; ablata sunt æqualia inter se in ellipsi; & summa A C, Q R minor est quàm summa I L, N O; Ergo duplum rectanguli sub C A & sub Q R minus est duplo rectanguli I L in N O, & rectangulum sub A C, & Q R minus est rectangulo sub I L, & N O.*



Prop. 22. huius.

Prop. 42. huius.

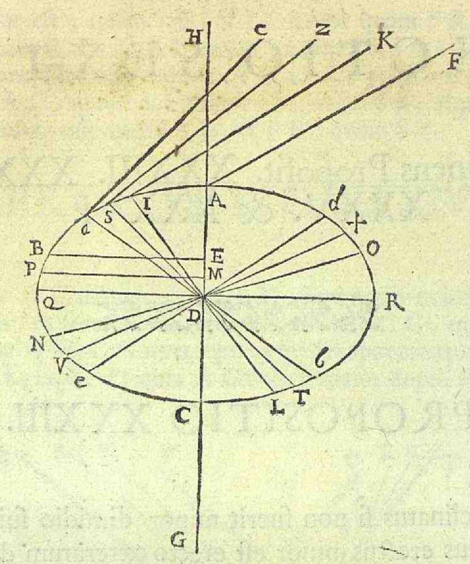
Qvia A C ad Q R maiorem proportionem habet, quàm I L ad N O post cõuersionem rationis, & permutationem A C maior ad I L, minorem, habebit proportionem minorem, quàm excessus A C super Q R ad excessum I L super N O, &c. *Hoc quidem verum est in ellipsi, (veluti dictum est ad propos. 28. huius) quandò maior axis est A C, sed quandò A C est minor, atque A C ad Q R minorem proportionem habet, quàm I L ad N O, operæ pretium erit, demonstrare, quod tunc etiam differentia axium A C, & Q R maior sit differentia diametrorum I L, & N O. Quoniam existente C A minore, quàm Q R (ex 28. huius) A C ad Q R minorem proportionem habet, quàm I L ad N O; & inuertendo Q R ad A C maiorem proportionem habebit, quàm N O ad I L, & per conuersionẽ rationis Q R ad differentiam ipsarum Q R, & A C minorem proportionem habebit, quàm N O ad differentiam ipsarum N O, & I L; & permutando Q R maior ad minorem N O habebit proportionem minorem, quàm differentia ipsarum Q R, & A C ad differentiam ipsarum N O, & I L: & propterea differentia ipsarum Q R, & A C maior erit, quàm differentia ipsarum N O, & I L.* g



28. huius. *Postea quandò C A est maior axis, tunc I L ad N O maiorem proportionem habet, quàm S T ad V X; & similiter per conuersionem rationis, & permutando maior I L ad minorem S D habebit minorem proportionem, quàm differentia coniugatarum diametrorum I L, & N O ad differentiam coniugatarum S T, & V X, quapropter axi propinquiorum diametrorum I L, & N O differentia maior erit, quàm remotiorum coniugatarum S T, & V X differentia.*

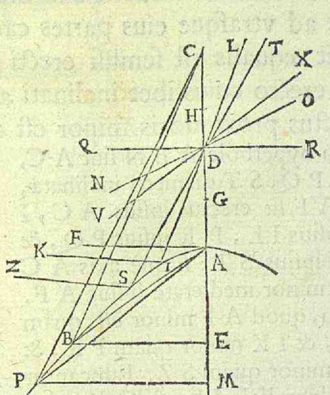
E contra quandò C A est axis minor idem concludetur, vti paulo ante factum est.

Notæ



Notæ in Proposit. XXIV.

h Igitur erectum ipsius A C minus est in prima, & maius in secunda, quàm I L, & sic ostendetur, quod erectum ipsius I L maius sit, siue minus quàm erectum S T, &c. *Quoniam in prima ellipsi rectangulum C A F minus est rectangulo L I K; ergo A C ad I L minorem proportionem habet reciproce, quàm I K ad A F; quare I K ad aliquam aliam quantitatem maiorem, quàm A F eandem proportionem habebit, quàm A C ad I L; estquè A C maior quàm I L in prima ellipsi; ergo multò magis I K maior erit quàm A F. Pari ratione in eadem prima ellipsi rectangulum L I K minus est rectangulo T S Z, & I L axi maiori propinquior maior est, quàm S T; ergo S Z maior erit, quàm I K.* Prop. 28. huius.



E contra in secunda ellipsi rectangulum L I K minus erit rectangulo C A F; & rectangulum T S Z minus erit rectangulo L I K; estquè T S maior quàm I L, & I L maior, quàm A C; igitur reciprocè A F maior erit, quàm I K, & I K maior, quàm S Z. Ibidem.

Rr SECTIO

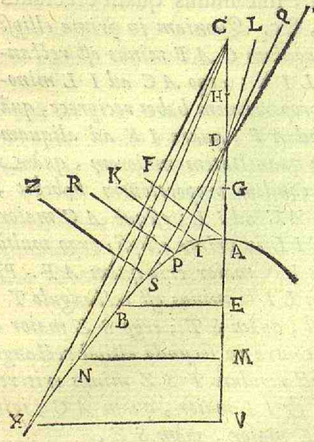
SECTIO SEXTA

Continens Proposit. XXXIII. XXXIV. XXXV. & XXXVI.

PROPOSITIO XXXIII.

Axis inclinatus si non fuerit minor dimidio sui erecti, vtique eius erectus minor est erecto cæterarum diametrorum inclinatarum eiusdem sectionis, & axi proximioris inclinati erectus minor est, quàm erectus remotioris.

XXXV. Et si fuerit axis inclinatus minor dimidio erecti, vtique ad vtrasque eius partes cadent duæ inclinatæ, quarum quælibet æqualis est semissi erecti ipsius, atque eius erectus minor est erecto cuiuslibet inclinati ad vtrasque partes eius positæ, & erectus proximioris minor est erecto remotioris.



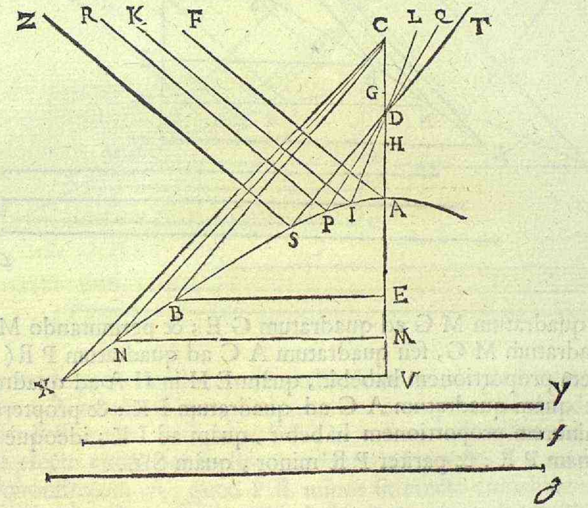
In hyperbole A B N sint A C, I L, P Q, S T diametri inclinatæ, & A F sit erectus ipsius A C, I K ipsius I L, P R ipsius P Q, & S Z ipsius S T: sitquè axis A C non minor medietate ipsius A F. Dico, quod A F minor est, quàm I K, & I K minor quàm P R, & P R minor quàm S Z. Educantur C B parallela I L, & C N ipsi P Q, & C X ipsi S T: & ducantur B E, N M, X V perpendiculares ad axim C A E. Quoniam si A C æqualis est ipsi A F, etiam I L æqualis est ipsi I K (21. ex 7.) & P Q ipsi P R; estque A C minor quàm I L, & I L, quàm P Q; ergo

ex 38. lib. 5.

ergo A F minor est, quàm I K, & I K minor quàm P R. Si verò A C maior est, quàm A F esset I L maior, quàm I K: & I L ad I K minorem proportionem habebit, quàm A C ad A F (28. ex 7.) & I L maior est quàm A C; igitur A F minor est, quàm I K: atquè similiter patebit I K minorem esse quàm P R, & P R, quàm S Z. 21. huius.

PROPOSITIO XXXIV.

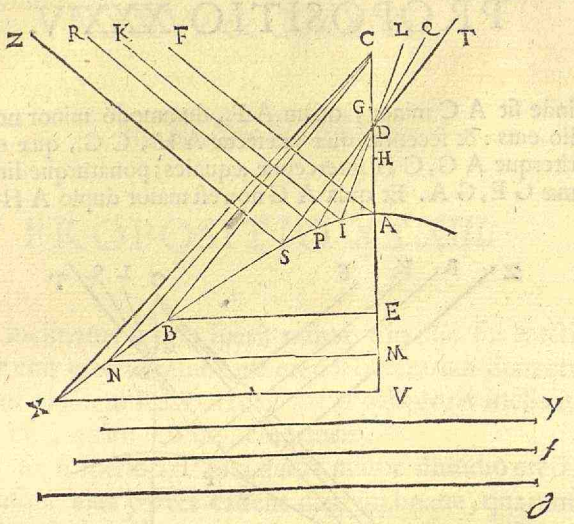
Deinde sit A C minor, quàm A F, dummodò minor non sit dimidio eius: & secentur duæ præsectæ A H, C G, quæ erunt æquales; pariterque A G, C H interceptæ æquales; ponaturque linea y æqualis summæ G E, G A. Et quia A G non est maior duplo A H, & y maior



est duplo A G, erit y in A H maius, quàm quadratũ A G; igitur y in A E ad y in A H, nempe E A ad A H minorem proportionẽ habebit, quã y in A E ad quadratum A G; ideoquè E H ad H A, nẽpe E H in H A ad quadratum A H minorẽ proportionẽ habebit, quàm y, seu eidem æquales E G, G A in A E, cum quadrato A G (quæ sunt æqualia quadrato G E) ad quadratum A G; ergo E H in H A ad quadratum E G, seu (vt ostensum est in 15. ex 7.) quadratum A C ad quadratum I K minorem proportionem habebit, quàm quadratum A H ad quadratũ A G, seu quã quadratum A C ad quadratum A F. Igitur A C ad I K minorem proportionem habet, quàm ad A F; & propterea A F minor est quàm I K.

 Simili

Simili modo oſtendetur quod I K minor ſit, quàm P R: etenim ſi ponatur linea f æqualis ſummæ M G, G E: cum G E non ſit maior duplo E H, & f maior ſit duplo G E; igitur f in E H maius eſt quadrato G E. Poſtea oſtendetur (quemadmodum antea dictum eſt) quod M H ad H E, nempe M H in H A ad E H in H A minorem proportionem habet



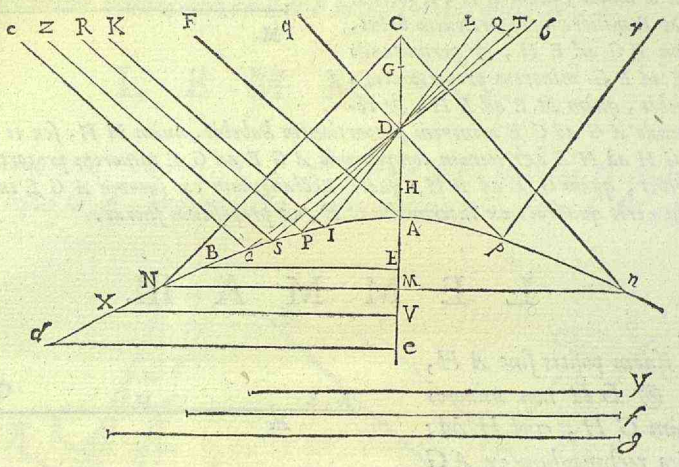
quàm quadratum M G ad quadratum G E; & permutando M H in H A ad quadratum M G, ſeu quadratum A C ad quadratum P R (15. ex 7.) minorem proportionem habebit, quàm E H in H A ad quadratum G E, nempe quàm quadratum A C ad quadratum I K: & propterea A C ad P R minorem proportionem habebit, quàm ad I K; ideoquè I K minor eſt, quàm P R: & pariter P R minor, quàm S Z.

PROPOSITIO XXXV. & XXXVI.

SIt poſtea A C minor dimidio A F; erit A G maior duplo A H, & ideo H G maior eſt, quàm H A: ponatur iam H M æqualis H G, ducaturque ad axim perpendicularis N M; iungaturque N C, & educatur diameter P Q parallela N C. Et quia M H medietas eſt ipſius M G, erit P Q dimidium ipſius P R (*6. ex 7.*) Inter duas diametros P Q, A C ducatur diameter I L, & C B ei parallela, & ad axim perpendicularis B E. Quoniam M H in H E minus eſt quadrato H G; addito communi

producto

producto ex G E, & G H in E H, erit M H in H E cum E G, atquè G H in H E, nempe ſumma M G, G E, quæ eſt æqualis ipſi f in E H minus erit, quàm quadratum H G cum aggregato E G, G H in E H, quæ ſunt æqualia quadrato G E; igitur f in E H minus eſt quadrato E G. Poſtea vti prius dictum eſt oſtendetur, quod quadratum A C ad quadratum P R maiorem proportionem habet, quàm ad quadratum I K: & propterea P R minor eſt, quàm I K. Non aliter oſtendetur quod I K minor ſit, quàm A F. Ponatur poſtea diameter S T extra locum inter P Q, A C compræhenſum, ducaturque C X ei parallela, & ad axim perpendicularis X V. Igitur V H M maius erit quàm quadratum H G,



& eodem modo procedendo, tandem oſtendetur quod quadratum A C ad quadratum S Z minorem proportionem habet, quàm ad quadratum P R, & ideo P R minor erit quàm S Z. Non ſecus oſtendetur quod S Z minor eſt erecto cuiuſlibet inclinati cadentis ad partem S T extra illam. Itaque demonſtratum eſt, quod P R minor ſit erecto cuiuſlibet diametri ſectionis cadentis ad vtraſque partes ipſius P Q verſus A, & X, & erecti proximiores diametro P Q minores ſunt remotioribus. Et hoc erat propoſitum.

In Sectionem VI.

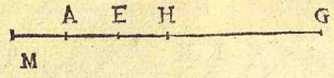
IN Expoſitione ſequentium Propoſitionum difficultas, quæ à nimia prolixitate oritur, ineuitabilis eſt, niſi Methodus in textu ſeruata aliquantiſper relinquatur: propterea non nulla lemmata præmittam, ex quibus ſemel demonſtratis caſus omnes ſequentium propoſitionum facillime, & breuiſſime deducuntur.

Lemma

LEMMA II.

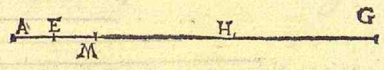
SI recta linea H G producatur in A & E, ita vt A H, pariterque E H, non maior sit H G: Dico rectangulum ex A G E summa inæqualium segmentorum in E H intermediam sectionem, minus esse quadrato ex segmento intermedio minore E G.

Fiat H M æqualis H G, & quia A E æqualis, aut minor est, quàm M E; & E G maior, quàm E H, ergo A E ad M E minorem proportionem babet, quàm E G ad E H, & permutando A E ad E G minorem proportionem habebit, quàm M E ad E H, & cõponendo A G ad G E minorem proportionem habebit, quàm M H, seu ei æqualis G H ad H E, & iterum componendo A G E ad G E minorem proportionem habebit, quàm G E ad E H: quare Rectangulum ex summa A G E in H E minus erit quadrato ex intermedia G E, vt propositum fuerat.



LEMMA III.

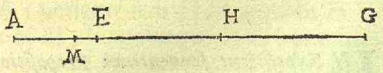
IIsdem positis sint A H, & E H non minores quàm G H, vel H M: Dico rectangulum ex A G E in E H maius esse quadrato ex E G.



Quia A G maior est quàm E G, & G H non maior ipsa H E, ergo A G ad G E maiorem proportionem habet, quàm G H ad H E, & componendo A G E ad E G maiorem proportionem habebit, quàm G E ad E H, & ideo rectangulum ex A G E in E H maius erit quadrato ex G E.

LEMMA IV.

IIsdem positis sit A H maior, sed E H minor eadem M H semisse totius M G: Dico quod si proportio ipsius A G ad G E fuerit eadem rationi G H ad H E, erit



rectan-

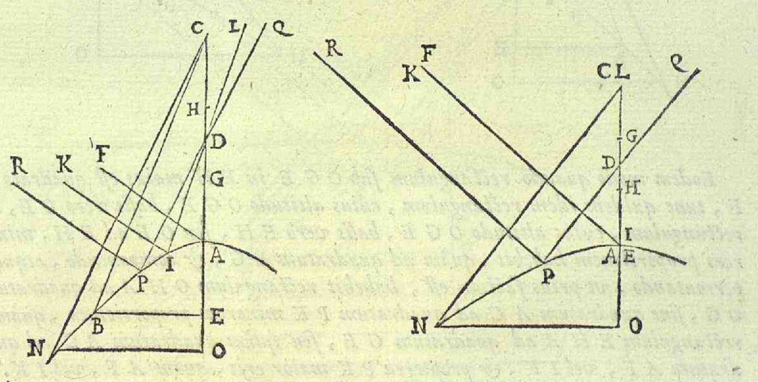
rectangulum sub A G E in E H æquale quadrato ex G E, & si proportio illa maior fuerit, erit quoque rectangulum maius quadrato; & si illa proportio minor fuerit, Rectangulum quadrato minus erit.

Et primo, quia A G ad G E ponitur vt G H ad H E; componendo A G E ad G E, erit vt G E ad E H, & rectangulum sub extremis contentum, nimirum sub A G E in E H, æquale erit quadrato ex intermedia G E.

Secundo, si A G ad G E maiorem proportionem habuerit, quàm G H ad H E, componendo A G E ad G E maiorem proportionem habebit, quàm G E ad E H, & ideo Rectangulum sub A G E in E H maius erit quadrato ex G E. pari ratione si A G ad G E minorem proportionem habuerit, quàm G H ad H E, ostendetur Rectangulum ex A G E in E H minus quadrato G E.

LEMMA V.

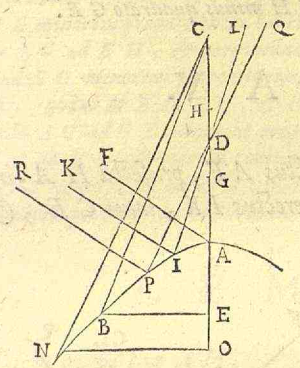
IN hyperbola, cuius axis C A, & erectus A F, præsecta H A, intercepta G A, diameter L I, cuius erectus I K, latus C E, &

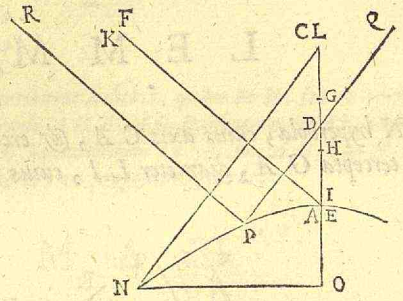


diameter Q P, cuius erectus P R, latus C O: Dico quod erectus P R ab ipso erecto I K, vel ab A F atque rectangulum sub O G E in G H ab ipso quadrato G E, vel rectangulum ex O G A in A H ab ipso quadrato G A, vna deficiunt, vel vna æqualia sunt, aut vna excedunt.

Et primo ponatur rectangulum sub O G E in E H æquale quadrato E G, ergo idem rectangulum sub O G E in E O ad rectangulum sub E G O in E H, seu E O ad E H eandem proportionem habet, quàm ad quadratum G E, & propterea E O ad E H erit vt rectangulum sub E G O in E O ad quadratum E G,

G E, & componendo O H ad E H, seu rectangulum O H A ad rectangulum E H A, erit vt rectangulum sub G E, & G O in O E vna cum quadrato E G, seu vt quadratum ex O G ad quadratum ex G E, & permutando rectangulum A H O ad quadratum O G, erit vt rectangulum E H A ad quadratum G E, sed vt rectangulum O H A ad quadratum O G, ita est quadratum A C ad
15. huius. *quadratum P K,*
ex Def. & *& vt rectangulum E H A ad quadratnm ex G E, seu vt*
15. huius. *quadratum A C ad quadratum A F, vel ex I K; quapropter idem quadratum A C ad quadratum ex P K, atque ad quadratum ex A F vel I K eandem proportionem habet, & ideo quadrata ipsa æqualia sunt, & eorum latera P K; & A F, vel I K pariter æqualia erunt.*





Eodem modo quando rectangulum sub O G E in E H maius est quadrato G E, tunc quidem idem rectangulum, cuius altitudo O G E, basis vero O E, ad rectangulum, cuius altitudo O G E, basis verò E H, seu O E ad E H, minorem proportionem habebit, quàm ad quadratum E G, & componendo, atque permutando, vt prius factum est, habebit rectangulum O H A ad quadratum O G, siue quadratum A C ad quadratum P K minorem proportionem, quàm
15. huius. *rectangulum E H A ad quadratum G E, seu quàm quadratum A C ad quadratum A F, vel I K, & propterea P K maior erit, quàm A F, vel I K.*

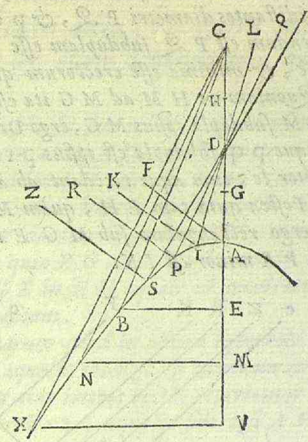
Quando verò rectangulum sub E G O in E H minus est quadrato E G, tunc quidem ostendetur eodem progressu quadratum P K minus esse quadrato A F, vel I K, quod erat propositum.

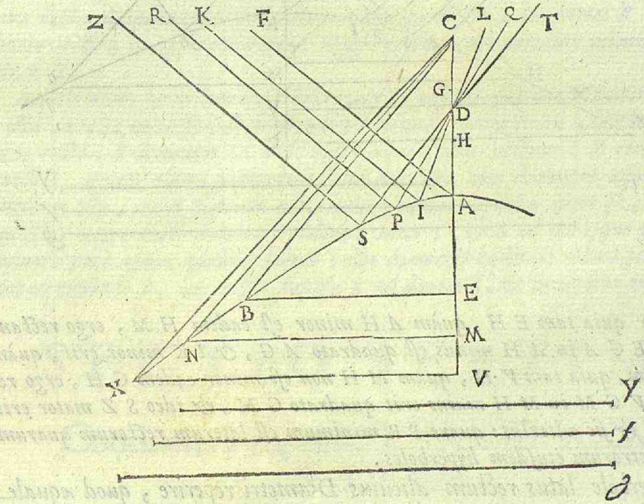
Notæ in Propos. XXXIII. & XXXIV.

Def. 2. huius. *QVoniam ex hypotesi C A minor non est medietate ipsius A F, estque A H ad A G, vt C A, ad A F, ergo A H maior, aut æqualis est medietati ipsius A G, & ideo A H maior, aut æqualis est residuo H G, quare E H,*

E H, atque eius portio A H non minores sunt eadem G H; ergo rectangulum sub E G A in A H maius erit quadrato A G, atque I K maior erit quàm A F. Lem. 3. huius. Lem. 5.

Simili modo, quia tam M H, quam E H excedunt ipsam G H, erit rectangulum sub M G E in E H maius quadrato A G, atque P R maior, quam I K. Lem. 3. huius. Lem. 5. huius.

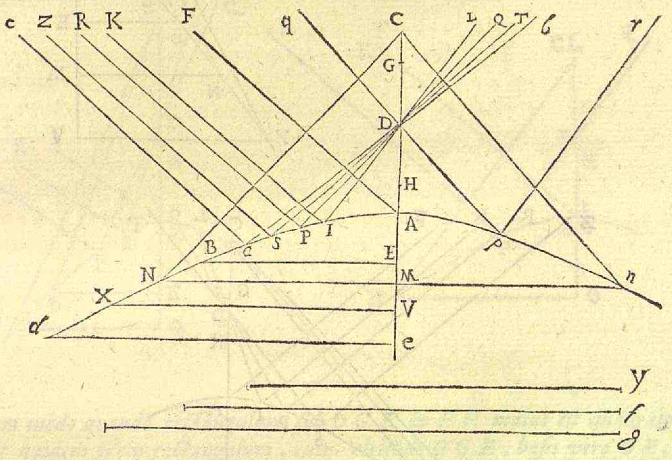




Notæ in Proposit. XXXV.

QVia ex hypotesi axis A C minor est semi A F, erit A H minor medietate ipsius A G, & ideo A H minor erit H G: fiat igitur M H æqualis HG, & per M (quæ intra sectionẽ cadet) ad axim ordinatim applicata duca-

ducatur N n occurrens sectioni in N, & n, à quibus iungantur N C, n C, & eis æquidistantes diametri P Q, & p q extendantur, quarũ erecta P R, & p r. Ostendendum est P Q subduplam esse ipsius P R, atq; P R, & p r æquales esse inter se, & minima esse erectorum quarumlibet Diametrorum eiusdem sectio-
Prop. 6. huius. *nis. Quoniam vt H M ad M G ita est P Q ad P R, & p q ad p r, erat autem H M subdupla ipsius M G, ergo Diameter P Q subdupla est erecti eius P R, pariterque p q subdupla est ipsius p r: atque Diametri P Q, & p q æquales sunt inter se, cum æque recedant ab axi A C, atque earum commune latus sit C M. Postea quia tam E H, quàm M H maiores non sunt eadem H M, vel*
Lem. 2. huius. *G H, ergo rectangulum sub M G E in E H minus est quadrato E G, & ex lem. 5. P R minor est I K.*



Lem. 2. & 5. hui. *Similiter quia tam E H, quàm A H minor est eadem H M, ergo rectangulum sub E G A in A H minus est quadrato A G, & I K minor erit, quàm A F. tandem, quia tam V H, quam M H non est minor eadem G H, ergo re-*
Lem. 3. *ctangulum V G M in M H maius erit quadrato G M, & ideo S Z maior erit,*
Lem. 5. *quàm P R, & sic vlterius: quare P R minimum est laterum rectorum quarumlibet Diametrorum eiusdem hyperboles.*

PROP. 1. Addit. *In hyperbole latus rectum alicuius Diametri reperire, quod æquale sit lateri recto axis; sed oportet, vt axis transuersus A C minor sit medietate eius erecti A F.*

ex 35. hu. *Reperiatur Diameter P Q, quæ subdupla sit eius erecti P R, sitque C M latus, & fiat e G ad G A, vt M H ad H A, & ducatur ordinatim applicata ad axim e d, coniungaturque recta d C, & extendatur diameter a b parallela ipsi d C, cuius latus rectum sit a c. Dico a c æquale esse A F: quia e G*
Lem. 4. huius. *ad G A facta fuit vt M H, siue G H ad H A, ergo rectangulum sub e G A in*
Lem. 5. huius. *A H æquale est quadrato G A, ideoque erectum a c æquale erit erecto A F, quod erat propositum.*

Dato

Dato latere recto I K diametri hyperboles I L reperire latus rectum alterius Diametri, quod æquale sit lateri recto I K: oportet autem, vt Diameter I L cadat inter axim, & aliam Diametrum, quæ subdupla sit sui erecti. PROP. 2. Addit.

Reperiatur Diameter Q P, quæ subdupla sit sui erecti P R, eiusque latus ex 35. hu.
sit M C; ergo ex hypothesi I L cadet inter axim A C, & Diametrum P Q, & propterea terminus E lateris C E cadet inter A, & M, igitur reperiri poterit V G, quæ ad G E eandem proportionem habeat, quàm maior M H ad minorem H E, & vt prius, lateris C V ducatur diameter S T, cuius latus rectum S Z: dico S Z æquale esse I K: quia V G ad G E est, vt M H, seu Lem. 4. huius.
G H ad H E, ergo rectangulum sub V G E in E H æquale est quadrato G E,
ideoque S Z æquale I K; quod erat propositum. Lem. 5. huius.

Deducitur ex prima propositione additarum quod in aliqua hyperbola reperiri possunt tria diametrorum latera recta æqualia inter se; si nimirum in hyperbola, cuius axis C A minor sit medietate eius lateris recti, reperiantur vtrinque duæ diametri b a, quarum latera recta a c æqualia sint ipsi A F; tunc quidem tria illa latera recta æqualia erunt inter se: reliqua verò latera recta diametrorum cadentium inter A, & a maiora erunt latere recto A F; & la-
tera recta diametrorum cadentium vltra punctum a ad partes B maiora sunt ex 35. huius.
latere recto a c, propterea quod magis recedunt ab omnium minimo latere recto P R.

Simili modo in eadem hyperbola reperiri possunt quatuor diametrorum latera recta æqualia inter se, si nimirum ex secunda propositione additarum dato latere recto I K diametri I L reperiatur æquale latus rectum S Z alterius diametri S T, & ex altera parte axis ducantur duæ aliæ diametri æquè ab axi remotæ ac illæ, erunt quatuor recta latera earum æqualia inter se, & maiora quolibet latere recto diametri cadentis inter I, & S ad vtrasque partes axis: minora verò erunt quolibet latere recto diametri cadentis vltra punctum I ad partes verticis A, vel infra puncta S ad partes a, vt deducitur ex 35. huius.

SECTIO SEPTIMA

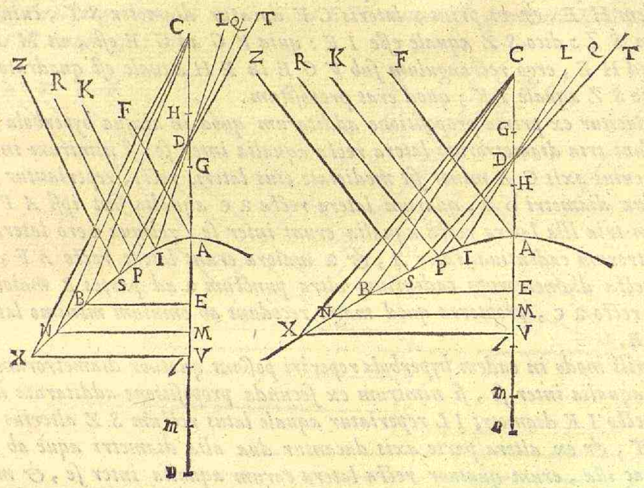
Continens Proposit. XXXVIII. XXXIX. & XXXX.

PROPOSITIO XXXVIII.

IN hyperbole axis inclinatus si non fuerit minor triente erecti ipsius, erunt duo latera figuræ axis minora, quàm duo latera figuræ cuiuslibet inclinatæ coniugatarum, quæ in eadem sectione consistunt, & duo latera figuræ inclinati proximioris axi minora sunt, quàm duo latera figuræ remotioris inclinati.

 Si

Si verò fuerit axis minor parte tertia sui erecti assignari poterunt ad vtrasque eius partes duo æquales diametri, quarum quælibet pars tertia sit sui erecti, atque duo latera figuræ eiusdem minora sunt duobus lateribus figuræ cuiuslibet alterius diametri ad vtrasque eius partes in eadem sectione cadentis: & duo latera figuræ diametri ei propinquiores minora sunt duobus lateribus figuræ remotioris.



In eadem figura supponatur prius hyperboles axis A C non minor suo erecto, erit P Q maior quàm A C, & S T maior quàm P Q: ideoquè erectus ipsius A C minor erit erecto ipsius P Q (33. ex 7.), & erectus ipsius P Q minor est erecto ipsius S T; igitur duo latera figuræ A C minora sunt, quàm duo latera figuræ P Q, & duo latera figuræ P Q minora, quàm duo latera figuræ S T.

PROPOSITIO XXXIX.

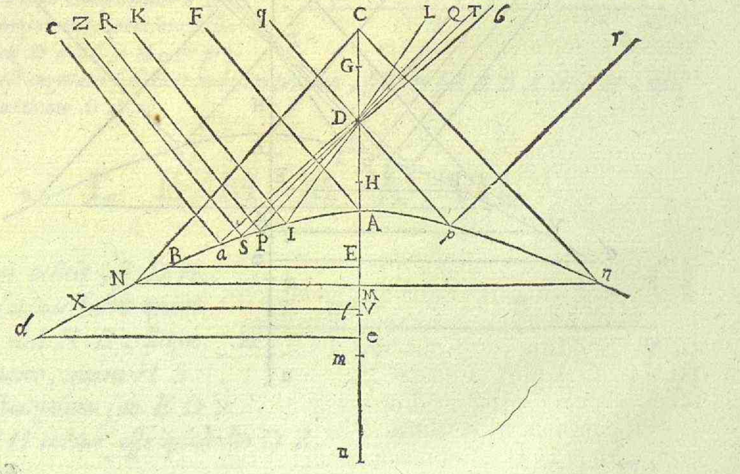
Deindè sit A C minor quàm A F, sed non sit minor tertia parte eius; igitur A H non erit minor tertia parte ipsius H C: & propterea non est minor quadrante ipsius A C; ideoque C A in A H non est minus quarta parte quadrati A C; quare C A in A M quater sumptum ad C A in A H quater, nempe M A ad A H non habet maiorem proportionem, quàm quadruplum ipsius A C in A M ad quadratum A C. Et ponamus M *m* æqualem M A, componendo M H, ad H A, nempe M H in H A ad quadratum H A non habebit maiorem proportionem, a

tionem,

tionem, quàm C M in M A quater sumptum vna cum quadrato C A, nempe quàm quadratum C *m* ad quadratum A C; ideoque M H in H A ad quadrarum H A minorem proportionem habet quàm quadratum C *m* ad quadratum A C. Et permutando M H in H A ad quadratum C *m*, seu ad quadratum ex summa ipsarum G M; & M H, ad quod habet eandem proportionem quàm quadratum C A ad quadratum summæ P Q, & P R (17. ex 7.) habebit minorem proportionem, quàm quadratum A H ad quadratum A C, seu quàm quadratum A C ad quadratum summæ ipsarum A C, & A F; igitur summa ipsarum A C, & A F minor est quàm summa ipsarum P Q, & P R. Et quia M H maior est quarta parte summæ ipsarum M G, & M H; ergo quadruplum C *m* in M H maius est quadrato C *m*, & ponatur V *u* æqualis A V; igitur quadruplũ V M in C *m* ad quadruplum M H in C *m*, scilicet V M ad M H minorem proportionem habebit, quàm quadruplum V M in C *m* ad quadratum C *m*: & componendo V H ad H M, nempe V H in H A ad M H in H A minorem proportionem habebit, quàm V M in C *m* quater sumptum, vel *u m* in *m* C bis sumptum cum quadrato C *m* (eo quod *u m* dupla est ipsius V M quæ omnia simul ad idem quadratum C *m* minorem proportionem habet, quàm quadratum C *u*. Ergo V H in H A ad quadratum C *u*, scilicet quadratum A C ad quadratum summæ ipsarum S T, & S Z (17. ex 7.) minorem proportionem habet quàm M H in H A ad quadratum C *m*, seu qnàm quadratum A C ad quadratum summæ ipsarum P Q, P R (17. ex 7.) quapropter P Q, & P R simul sumptæ minores sunt, quàm S T, & S Z simul sumptæ.

PROPOSITIO XXXX.

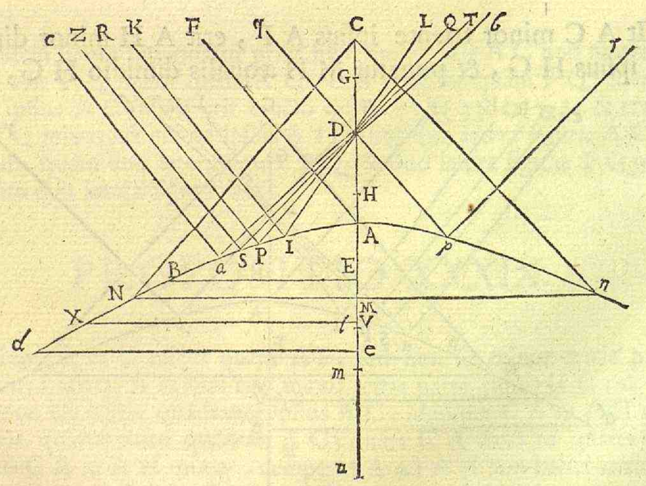
Sit A C minor triente ipsius A F, erit A H minor dimidio ipsius H G, & ponatur M H æqualis dimidio H G, & du-



camus

camus perpendicularem, & diametrum. Dico, quod P Q æqualis eſt trienti ipſius P R.

Educamus inter P Q, A C diametrum I L, & educamus C B ei æquidiſtantem, & perpendicularem B E, & ſecemus E l æqualem E A erit ſumma ipſarum G E, & E H æqualis C l; eſtque H E minor quàm M H, quæ quarta pars eſt ipſius C m; ergo ſumma ipſarum M G, H E in M H quater ſumptum minus eſt quadrato C m: auferatur communiter M G, H E in M E quater ſumptum remanebit quadruplum ſummæ M G, H E in H E minus quàm quadratum C l (quia M G, H E ſimul ſumptæ, nempe M C vna cum A E in M E quater ſumptum æquale eſt quadrato l m; quod eſt duplum M E, & aggregatum C E, A E, nempe C l in l m bis ſumptum) igitur aggregatum M G, & H E in M E quater ſumptum ad aggregatum M G, H E in H E quater ſumptum, nempe G E ad H E maiorem proportionem habebit, quàm ad quadratum l C. & componendo M H ad H E, ſeu M H in H A ad E H in H A habebit maiorem proportionem, quàm M G, H E in M E quater ſumptum cum quadrato l C (quæ æqualia ſunt quadrato C m) ad quadratum l C: & permutando erit M H in H A ad quadratum C m, nempe ad quadratum ſummæ ipſarum M G, & M H, ſeu quadratum A C ad quadratum ſummæ ipſarum P Q, P R (17. ex 7.) maiorem proportionem habebit, quàm E H in H A ad quadratum l C (quod eſt æquale quadrato ſummæ ipſarum G E, E H) quod erit vt quadratum A C ad quadratum aggregati ipſarum I L, I K: quapropter A C ad duo latera figuræ P Q maiorem proportionem habet, quàm ad duo latera figuræ I L. Et propterea duo latera figuræ P Q minora ſunt, quàm duo latera



figuræ

figuræ I L. Simili modo eſtendetur, quod duo latera figuræ I L minora ſunt, quàm duo latera figuræ A C.

Educamus poſtea C X extra ſegmentum A N; & educamus diametrũ S T ei parallelam, & ad axim perpendicularem X V, erit aggregatum G V, M H in M H quater ſumptum maius quàm quadratum C m; & addamus communiter aggregatum M H, G V in M H quater ſumptum; oſtendetur vt antea, quod duo latera figuræ S T maiora ſunt, quàm duo latera figuræ P Q.

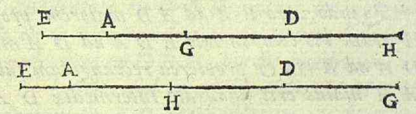
Oſtendetur quoque in reliquis diametris cadentibus ad vtraſque partes ipſius P Q in eadem ſectione, quod duo latera figuræ diametri ipſi P Q proximioris minora ſunt, quàm duo latera figuræ remotioris.

In Sectionem VII. Propoſit: XXXVIII. XXXIX. & XXXX.

LEMMA VI.

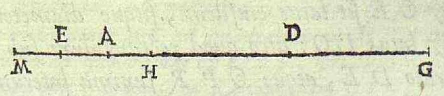
SI recta linea H G biſariam ſecta in D producatur vtcumque ad A, & E, ita vt D H non maior ſit quàm H E, vel H A, & E D maior ſit, quàm D A: dico rectangulum ſub E D A in H A maius eſſe quadrato D A.

Quia E D maior ad minorem D A habet maiorem proportionem, quàm D H non maior ipſa H A, ad H A, ergo componendo E D A ad D A maiorem proportionem habet, quàm D A ad A H, & propterea rectangulum ſub extremis contentum, ſcilicet ſub E D A in A H, maius eſt quadrato D A.



LEMMA VII.

ISdem poſitis, ſi D H non minor fuerit quàm H A, vel H E, ſitque H E maior, quàm H A: dico rectangulam ſub E D A in A H minus eſſe quadrato D A.

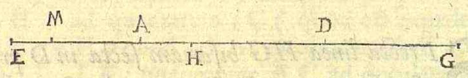


Fiat

Fiat H M æqualis maiori H D, erit E A differentia minimæ H A, & intermediæ H E minor, quàm M A, quæ est differentia maximæ M H, & minimæ H A, & A D maior est quàm A H, ergo E A ad M A minorem proportionem habet, quàm D A ad A H, & permutando E A ad A D habebit minorem proportionem, quàm M A ad A H, & componendo E D ad D A minorem proportionem habebit, quàm M H, siue D H ad A H, & iterum componendo E D A ad D A minorem proportionem habebit, quàm eadem D A ad A H, & propterea rectangulum sub E D A in A H minus erit quadrato D A.

LEMMA VIII.

Isdem positis si D H maior fuerit, quàm A H sed minor quàm E H, fueritque proportio E A ad A D eadem proportioni M A ad A H, dico rectangulum sub E D A in A H æquale esse quadrato D A: si verò proportio illa maior fuerit, vel minor rectangulum similiter quadrato maius, vel minus erit.



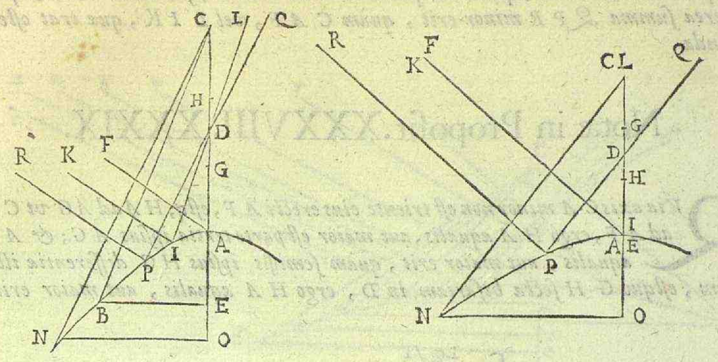
Quia E A ad A D ponitur vt M A ad A H, componendo E D ad D A, erit vt M H, seu D H ad H A, & iterum componendo E D A ad D A, erit vt D A ad A H, & propterea rectangulum sub E D A in A H æquale erit quadrato D A.

Quando verò E A ad A D maiorem proportionem habet, quàm M A ad A H, tunc bis componendo E D A ad D A maiorem proportionem habebit, quàm D A ad A H, & propterea rectangulum sub extremis; scilicet sub E D A in A H maius erit quadrato intermediæ D A: non secus quando E A ad A D minorem peoportionem habet, quàm M A ad A H, ostendetur rectangulum sub E D A in A H minus quadrato ex D A.

LEMMA IX.

In hyperbola, cuius axis A C, erectus A F, præsecta H A, intercepta G A, centrum D, diameter I L, eiusque erectus I K, & C E sit latus eiusdem, sitque diameter Q P, cuius erectus P R, & latus L O: dico quod rectangulum sub O D E in E H ab ipso quadrato D E, atque Q P R summa laterum figuræ Diametri P Q ab L I K summa laterum figuræ I L, vel ab ipsa C A F summa laterum figuræ axis, vna deficiunt, vel vna æqualia sunt, aut vna excedunt.

Et



Et primo rectangulum sub O D E in E H æquale sit quadrato D E, ergo ad hæc duo spatia æqualia eandem proportionem habebit idem rectangulum sub E D O in O E, sed vt rectangulum sub E D O in O E ad rectangulum sub E D O in E H, ita est O E ad E H, (propterea quod æquales altitudines habent), igitur vt O E ad E H, ita est rectangulum sub E D O in O E ad quadratum D E, & componendo O H ad E H, siue rectangulum O H A ad rectangulum E H A eandem proportionē habebit, quàm rectangulum sub E D O in O E vna cum quadrato D E, seu quàm quadratum D O ad quadratum D E, vel potius vt quadratum ex dupla D O ad quadratum ex dupla D E, nempe vt quadratum ex G O H ad quadratum ex G E H, quare permutando rectangulum O H A ad quadratum ex G O H eandem proportionem habebit, quàm rectangulum ex E H A ad quadratum ex G E H, seu vt quadratum ex Prop. 16. huius.
A C ad quadratum ex C A F, vel ex L I K; sed vt rectangulum A H O ad quadratum ex G O H, ita est quadratum ex A C ad quadratum ex Q P R: Ibidem.
quare idem quadratum A C eandem proportionem habet ad quadratum ex Q P R, quàm ad quadratum ex C A F, vel ex I K L, & propterea quadrata ipsa æqualia sunt, & summa laterum Q P R æqualis est summæ laterum C A F, vel I L K.

Secundo sit rectanguli sub E D O in E H maius quadrato D E, tunc quidem idem rectangulum sub E D O in O E ad rectangulum sub O D E in E H minorem proportionē habebit, quàm ad quadratum ex D E, seu O E ad E H minorem proportionem habebit, quàm ad quadratum ex D E; & componendo sumpta eadem altitudine H A, quadruplicando postrema quadrata, & permutando, & ex 16. huius, idem quadratum A C ad quadratum ex Q P R minorem proportionem habebit, quàm ad quadratum ex C A F, vel ex L I K, & propterea summa Q P R maior erit, quàm C A F, seu quàm L I K.

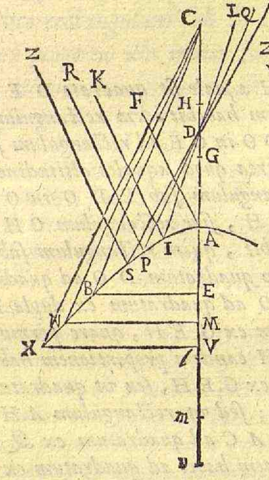
Tertio sit rectangulum sub E D O in E H minus quadrato D E, patet quod idem rectangulum sub E D O in O E ad rectangulum sub E D O in E H, seu O E ad E H maiorem proportionem habet, quàm ad quadratum D E, & componendo ductis prioribus terminis in A H, quadruplicando postrema quadrata, permu-

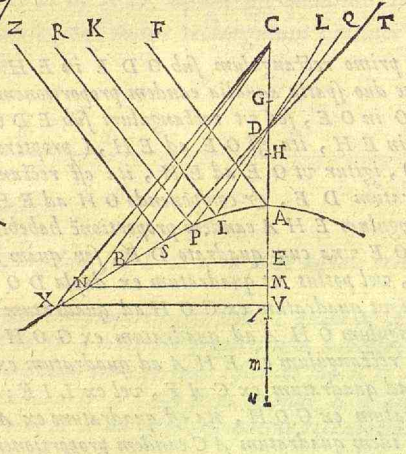
 permu-

permutando vt prius, idem quadratum A C ad quadratum ex Q P R, maiorem proportionem habebit, quàm ad quadratum ex C A F, seu ex L I K, & propterea summa Q P R minor erit, quàm C A F, vel L I K, quæ erat ostendenda.

Notæ in Proposit. XXXVIII. XXXIX.

Quia axis C A minor non est triente eius erecti A F, estq; H A ad A G vt C A ad A F, ergo H A æqualis, aut maior est parte tertia ipsius A G; & A H æqualis, aut maior erit, quàm semissis ipsius H G differentiæ illarum, estque G H secta bifariam in D, ergo H A æqualis, aut maior erit,





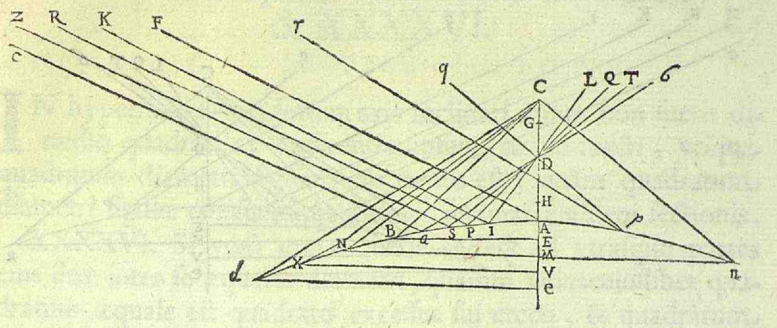
Lem. 6. *quàm D H, estque H E maior quàm H A, ergo pariter H E maior est, quàm D H, quare rectangulum sub E D A in A H maius erit quadrato D A, atque*
Lem. 9. *summa laterum figuræ L I K maior, quàm summa laterum figuræ axis C A F.*
Similiter quia H M maior est, quàm H E, erit quoque H M maior, quàm D H, & propterea ex lemma 6. & 9. summa Q P R maior erit, quàm summa L I K.

Notæ in Proposit. XXXX.

Quia C A minor est triente ipsius A F, estque H A ad A G vt C A ad A F, ergo H A minor est tertia parte ipsius A G, & minor semisse diffe-

rentiæ

rentiæ H G, & ideo H A minor erit, quàm H D: secari ergo poterit H M æqualis D H, quæ maior erit, quàm A H, ducaturq; per M ad axim ordinatim applicata N M n occurrens sectioni in punctis N n, à quibus iungatur C N, & C



n, iisdemque æquidistantes ducantur duæ diametri P Q, & p q, quarum latera recta P R, & p r. Ostendendum est P Q sui erecti P R, atque p q sui erecti p r subtriplam esse, sed duo figuræ latera P Q, P R æqualia esse alterius figuræ lateribus p q, p r, & insuper P Q, P R minima esse laterum figuræ cuiuslibet alterius diametri eiusdem sectionis, & latera figurarum minimis proximiora, esse minora lateribus figurarum remotiorum. PROP. Addit. ex 40. huius.

Quia H M ad M G eandem proportionem habet quàm P Q ad P R, vel p q ad p r, estque H M subtripla ipsius M G (cum M H facta sit æqualis H D) ergo P Q ipsius P R, pariterque p q ipsius p r subtripla est: & sunt latera figuræ Q P R æqualia lateribus q p r alterius figuræ, cum diametri Q P, & q p æquè recedant ab axi, & habeant latus commune C M. Prop. 6. huius.

Quod verò summa laterum figuræ Q P R minima sit reliquarum summarũ laterum figuræ cuiuslibet diametri sic ostendetur.

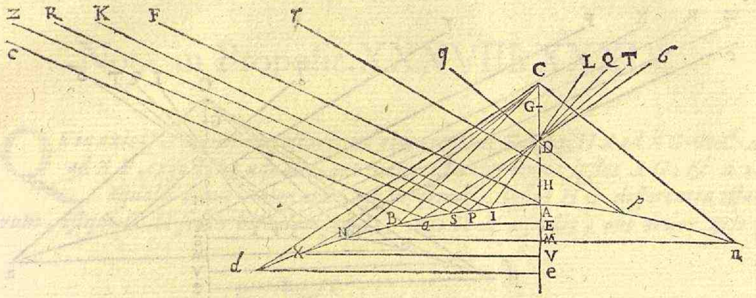
Quia A H, & E H minora sunt, quàm H M, siue D H, ergo rectangulum sub E D A in A H minus est quadrato D A, & summa L I K minor est summa C A F. Lem. 7. Lem. 9.

Pariter quia M H æqualia est H D, & H E minor eadem, ergo ambo non erunt maiores eadem D H, ergo rectangulum sub M D E in E H minus erit quadrato D E, atque summa Q P R minor erit, quàm L I K. Lem. 7. Lem. 9.

Rursus quia V H maior, est quàm M H, seu quàm D H, erunt illæ non minores eadem D H, ergo rectangulum sub V D M in H M maius erit quadrato D M, atque summa T S Z maior erit, quàm summa Q P R. Lem. 6. Lem. 9.

In hyperbola reperire diametrum, cuius figuræ latera æqualia sint lateribus figuræ axis: oportet autem vt axis A C minor sit triente erecti eius. Reperiatur diameter P Q subtripla erecti eius P R, eiusque latus sit C M, & fiat e A ad A D, vt M A ad A H, & lateris C e ducatur diameter a b, cuius erectus a c. Dico hanc esse diametrum quæsitam: quia e A ad A D eandem proportionem habet, quàm M A ad A H, erit rectangulum sub e D A in A H PROP. 3. Addit. ex 40. huius.

Lem. 8. Lem. 9. *æquale quadrato D A, & summa laterum* b a c *æqualis erit laterum figuræ axis summæ C A F.*



PROP. 4. Addit. *In eadem hyperbola data diametro I L reperire aliam diametrum, ita vt eius figuræ latera æqualia sint lateribus figuræ datæ diametri I L: oportet autem vt I L cadat inter axim, & diametrum P Q subtriplam eius erecti. Sit* ex 40. huius. *C E latus diametri I L, & C M, sit latus diametri P Q, & quia punctum E cadit inter M, & A, erit H E minor, quàm H M, vel D H: fiat V E* Lem. 8. *ad E D, vt M E ad E H, ergo rectangulum sub V D E in E H æquale erit quadrato E D, & ex lemma 9. summa laterum T S Z æqualis erit summæ laterum L I K; quod erat propositum.*

Facile colligitur ex 3. additarum, quod in hyperbola cuius axis subtripla sit erecti eius assignari possunt tres summæ laterum figurarum trium Diametrorum quæ æquales sint inter se. Ex 4. verò additarum in eadem Hyperbola assignari, possunt quatuor summæ laterum figurarum quatuor diametrorum, quæ æquales sint inter se.

Deinde sit A C minor, quàm A F, sed non sit minor eius triplo, ergo A H non erit minor triplo H C, &c. *Textus mendosus omnino corrigi debuit, nam ex contextu sequenti deducitur A C non tripla minor, sed minor parte tertia supponi debere ipsius A F.* a

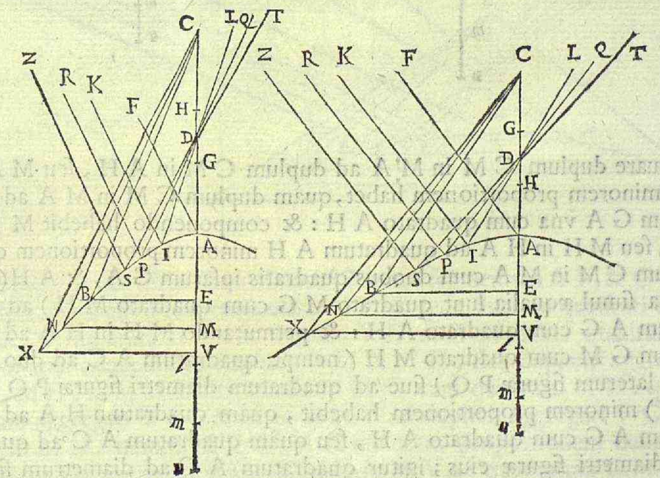
SECTIO

SECTIO OCTAVA

Continens Proposit. XXXXIIII. XXXXV. & XXXXVI.

IN hyperbole si quadratum axis inclinati minus non fuerit dimidio quadrati ex differentia ipsius, & sui erecti, vtique quadratum diametri figuræ eius minus est, quàm quadratum diametri figuræ cuiuscumque alterius inclinati eiusdem sectionis.

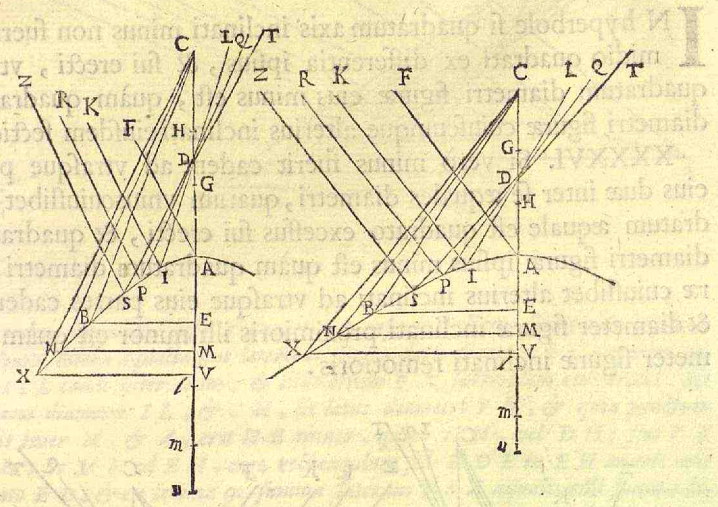
XXXXVI. Si verò minus fuerit cadent ad vtrasque partes eius duæ inter se æquales diametri, quarum vniuscuiuslibet quadratum æquale est quadrato excessus sui erecti, & quadratum diametri figuræ ipsius minus est quàm quadratum diametri figuræ cuiuslibet alterius inclinati ad vtrasque eius partes cadentis: & diameter figuræ inclinati proximioris illi minor est quàm diameter figuræ inclinati remotioris.



Iisdem figuris manentibus supponatur prius A C non minor quàm A F; ergo P Q non erit minor quàm P R (28. ex 7.) & duo quadrata A C, A F nempe diameter figuræ A C minor est quàm diameter figuræ P Q; & Demonst. prop. 44.

Q; & pariter diameter figuræ P Q minor est, quàm diameter figuræ S T. Sit iam A C minor quàm A F, & eius quadratum non minus dimidio quadrati excessus ipsius A F super A C. Et quia A C ad A F eandem proportionem habet, quàm A H ad A G; ergo duplum quadrati A H non est minus quadrato H G; ergo M H in H A bis sumptum maius est quadrato H G, & addatur communiter duplum G A in A H fiet duplum summæ G A, M H, vel C M in A H maius quàm duplum G A in A H cum quadrato H G, seu quàm quadratum G A cum quadrato A

Demonst. prop. 45.

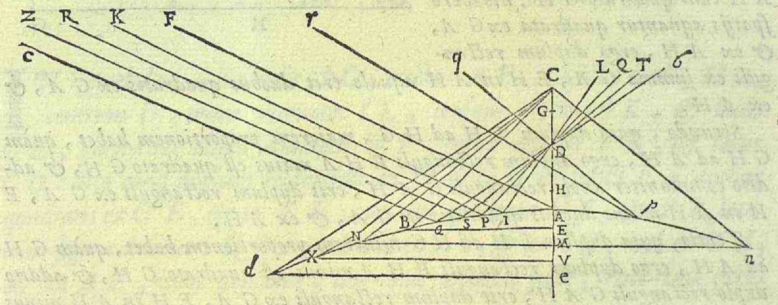


H: quare duplum C M in M A ad duplum C M in A H, seu M A ad A H minorem proportionem habet, quàm duplum C M in M A ad quadratum G A vna cum quadrato A H: & componendo habebit M H ad H A, seu M H in H A ad quadratum A H minorem proportionem quàm duplum C M in M A cum duobus quadratis ipsarum G A, & A H (quæ omnia simul æqualia sunt quadrato M G cum quadrato M H) ad quadratum A G cum quadrato A H: & permutando M H in H A ad quadratum G M cum quadrato M H (nempe quadratum A C ad duo quadrata laterum figuræ P Q) siue ad quadratum diametri figuræ P Q (17. ex 7.) minorem proportionem habebit, quàm quadratum H A ad quadratum A G cum quadrato A H, seu quàm quadratum A C ad quadratum diametri figuræ eius; igitur quadratum A C ad diametrum figuræ P Q minorem proportionem habet, quàm ad diametrum figuræ A C: & ideo diameter figuræ P Q maior erit diametro figuræ A C. Præterea, quia duplum quadrati M H maius est quadrato H G; ergo V H in M H bis maius erit, quàm quadratum H G: & ostendetur (quemadmodum diximus) quod diameter figuræ S T maior sit quàm diameter figuræ P Q.

PROP.

PROPOSITIO XXXXVI.

Sit postea quadratum A C minus dimidio quadrati ex differentia ipsarum C A, & A F; erit duplum quadrati A H minus quadrato H G & ponamus duplum quadrati M H æquale quadrato H G: & educamus ad axim perpendicularem N M, & iungamus N C; & ducamus diametrum P Q parallelã ipsi N C, erit H M ad M G, vt P Q ad P R, & pro- 6. huius.
a pterea quadratum P Q dimidium erit quadrati excessus ipsius P R; ergo P Q est vna æqualium: ponatur insuper inter A, & P diameter I L, & constructio perficiatur, vt prius. Et quia duplum quadrati M H æquale est quadrato H G, erit duplùm M H in H E minus quadrato H G, & ponatur communiter duplum G E in E H; igitur duplum aggregati M G in E H minus est quadrato G E cum quadrato E H; & ostendetur quemadmodum diximus antea, quod quadratum diametri figuræ P Q minus sit quadrato diametri figuræ I L; & quadratum diametri figuræ I L minus sit quadrato diametri figure A C.



Deindè ducatur diameter inclinata S T extra segmentum A P, & C X ei parallela, & ad axim perpendicularis X V: & quia duplum quadrati M H æquale est quadrato H G erit duplum V H in H M maius quadrato H G: ponatur communiter duplum G M in M H, fiet duplum aggregati V G, M H, in M H maius quadrato M G cum quadrato M H: quare duplum aggregati V G, & M H in M V ad duplum aggregati V G, & M H in M H, nempe M V ad M H minorem proportionem habebit, quàm duplum aggregati V G, & M H in M V ad quadratum G M cum quadrato M H: & componendo ostendetur (quemadmodum antea dictum est) quod quadratum A C ad diametrum figuræ P Q maiorem proportionem habeat, quàm ad diametrum figuræ S T. Eadem prorsus cõtingent in reliquis omnibus diametris. Quapropter diameter figuræ P Q minor est diametro figuræ cuiuslibet diametri ad vtrasque eius partes in eadem sectione existente. Quod erat ostendendum.

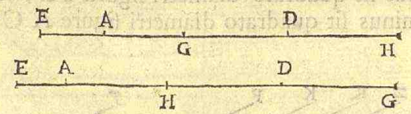
In

In Sectionem VIII. Proposit. XXXXIIII. XXXXV. & XXXXVI.

LEMMA X.

SI rectæ lineæ G H bifariam sectæ in D addantur segmenta H A, & H E atque proportio dupli E H ad H G eadem fuerit proportioni G H ad H A: dico duplum rectanguli ex G A, & H E in H A æquale esse quadratis ex G A, & ex A H: si verò proportio illa maior fuerit, erit quoque rectangulum maius quadratis: si verò proportio fuerit minor, rectangulum minus erit quadratis.

Primo quia si duplum E H ad H G, est vt G H ad H A, ergo duplum rectanguli E H A æquale erit quadrato G H, & addatur communiter duplum rectanguli G A H, erit duplum rectanguli ex summa G A, & E H in A H æquale duplo rectanguli G A H cum quadrato G H; his verò spatijs æquantur quadrata ex G A, & ex A H, ergo duplum rectanguli ex summa G A, E H in A H æquale erit duobus quadratis ex G A, & ex A H.

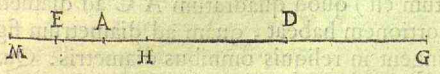


Secundo, quia duplum E H ad H G, maiorem proportionem habet, quàm G H ad A H, ergo duplum rectanguli E H A maius est quadrato G H, & addito communiter duplo rectanguli G A H, erit duplum rectanguli ex G A, E H in A H maius duobus quadratis ex G A, & ex A H.

Tertio, quia duplum E H ad H G minorem proportionem habet, quàm G H ad A H, ergo duplum rectanguli E H A minus est quadrato G H, & addito duplo rectanguli G A H, erit duplum rectanguli ex G A, E H in A H minus quadratis ex G A, & ex A H.

LEMMA XI.

SI recta linea G H secetur exterius in A, E, & sit eadem G H differentia nedum segmentorum G E, & E H, sed etiam duorum segmentorum G A, & A H: dico quod quadrata ex maximo, & ex vno intermediorum segmentorum, scilicet ex G E, & ex E H æqualia sunt quadratis ex reliquo intermediorum, & ex minimo segmento, scilicet ex G A, & ex A H vna cum duplo rectâ-

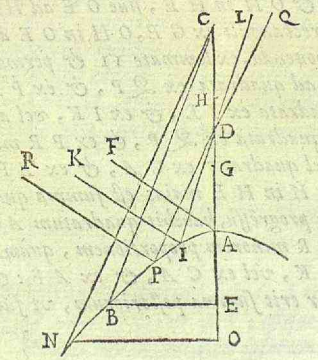


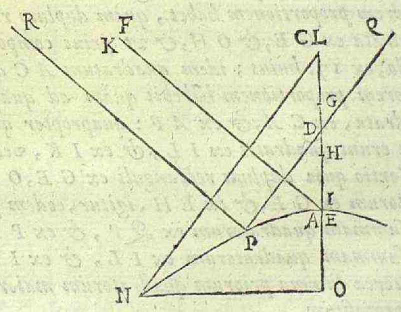
guli ex summa extremorum, vel intermediorum in differentiam minimorum segmentorum, scilicet ex G A cum H E in E A.

Quia duplum rectanguli G A H cum duplo rectanguli G A E æquatur duplo rectanguli sub G A in H E, addito cõmuniter duplo rectanguli H E A erit duplum rectanguli G E H æquale duplo rectanguli G A H cum duplo rectanguli ex summa G A, H E in E A; & addito communi quadrato G H, erit duplum rectanguli G E H cum quadrato G H, scilicet duo quadrata ex G E, & ex E H, erunt æqualia illis omnibus spatijs, scilicet duplo rectanguli ex summa G A, H E in E A cum duplo rectanguli G A H simul cum quadrato ex G H: sed duplo rectanguli G A H cum quadrato G H æqualia sunt duo quadrata ex G A, & ex A H, ergo duo quadrata ex G E, & ex E H æqualia erunt quadratis ex G A, & ex A H cum duplo rectanguli ex G A, & H E in E A, quod erat ostendendum.

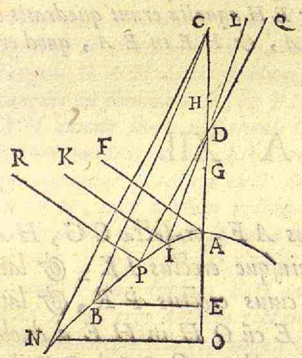
LEMMA XII.

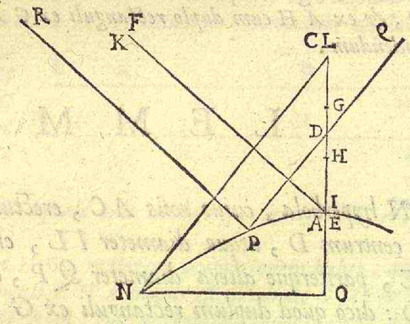
IN hyperbola, cuius axis A C, erectus A F, præsectæ C G, H A, centrum D, atque diameter I L, eiusque erectus I K, & latus C E, pariterque altera diameter Q P, cuius erectus P R, & latus C O: dico quod duplum rectanguli ex G E cũ O H in H E à duobus quadratis ex G E, & ex E H; nec non quadrata Q P, & P R laterum figuræ diametri Q P à quadratis ex L I, & ex I K, vel ex C A, & ex A F, vna deficiunt, aut vna æqualia sunt, vel vna excedunt.





Quia duplum rectanguli ex G E, O H in H E æquale est quadratis ex G E & ex E H, ergo idem rectangulum, cuius altitudo G E, & O H, basis verò O E bis sumptum ad duplum rectanguli, cuius altitudo G E, O H, basis verò H E, seu O E ad H E eandem proportionem habet, quàm duplum rectanguli ex G E, & O H in O E ad quadrata ex G E, & ex E H: quare componen-
Lem. 11. huius. *do O H ad E H, seu O H A ad E H A eandem proportionem habebit, quàm duo quadrata ex G O, & ex O H ad duo quadrata ex G E, & ex E H, &*
17. huius. *permutando O H A ad quadrata ex G O, & ex O H, seu quadratum ex A C ad quadrata ex Q P, & ex P R eandem proportionem habebit, quàm rectan-*
Ibidem. *gulũ E H A ad quadrata ex G E, & ex E H, seu erit vt quadratum A C ad quadrata ex I L, & ex I K, vel ad quadrata ex C A & ex A F: quare duo quadrata ex Q P, & ex R P æqualia sunt duobus quadratis ex I L, & ex I K, vel ex C A, & A F.*





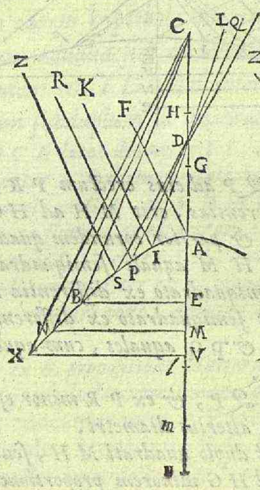
Secundo quia duplum rectanguli ex G E, O H in H E minus ponitur quadratis ex G E, & ex E H, igitur idem spatium scilicet duplum rectanguli ex G E, & O H in O E ad duplum rectanguli ex G E, & O H in H E, siue O E ad H E maiorem proportionem habet, quàm duplum rectanguli ex G E, O H in O E ad quadrata ex G E, & O H, & vt prius componendo, ex lemmate 11. & permutando, ex 17. huius; idem quadratum A C ad quadrata ex Q P, & ex P R maiorem proportionem habebit quàm ad quadrata ex I L, & ex I K, vel ad quadrata, ex C A, & ex A F: quapropter quadrata ex Q P, & ex P R minora erunt quadratis ex I L, & ex I K, vel quadratis ex C A, & ex A F.

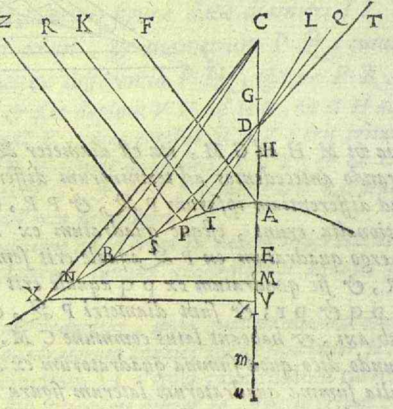
Tertio quia duplum rectanguli ex G E, O H in H E maius est summa quadratorum ex G E, & ex E H, igitur, eodem progressu, habebit quadratum A C ad summam quadratorum ex Q P, & ex P R minorem proportionem, quàm ad summam quadratorum ex I L, & ex I K, vel ex C A, & ex A F: & propterea summa priorum quadratorum maior erit summa posteriorum, vt fuerat propositum.

Notæ

Notæ in Proposit. XXXXIV. & XXXXV.

Q*uia C A maior est, quàm A F, vel si minor est quadratum ex C A, minor non est dimidio quadrati ex differentia C A, & A F, estque H A ad A G vt A C ad A F, & H A ad G H, vt A C ad differentiam ipsarum A C, A F, ergo quadratum H A ad dimidium quadrati G H erit vt quadratum A C ad dimidium quadrati ex differentia ipsarum A C, & A F, quare quadratum ex H A minor non erit semisse quadrati H G, ideoq;*





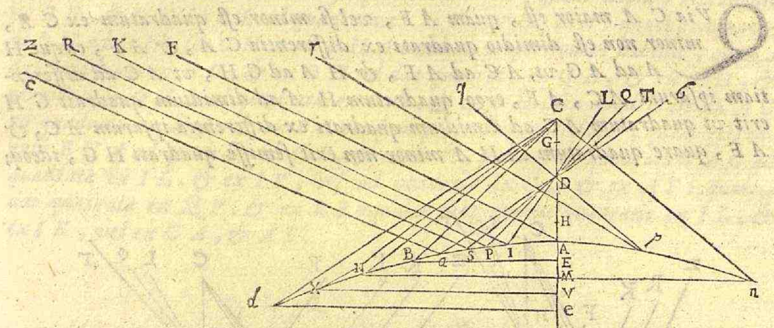
duplum quadrati A H minor non erit quadrato H G, estque duplum rectanguli E H A, vel M H E maius duplo quadrati A H, seu maius quadrato H G; propterea duplum E H ad H G maiorem proportionem habebit, quàm G H Lem. 10.
ad H A, ideoque duplum rectanguli ex G A, H A in A H maius erit quadra- Lem. 12.
tis ex G A, & ex A H, & insuper summa quadratorum ex I L, & ex I K maior erit, quàm summa quadratorum ex C A, & A F.

Notæ in Proposit. XXXXVI.

Q*uia quadratum axis C A minus est semisse quadrati ex differentia ipsarum A C, & A F, estque H A ad A G, vt C A ad A F, atque G H est differentia ipsarum A H, & A G, igitur quadratum ex A H*

 minus

minus est semisse quadrati G H: fiat iam quadratum ex M H æquale semiquadrato ex G H, & lateris C M fiant duo diametri Q P, & q p, eorumque erecta sint P R, & p r: dico ductas diametros æquales esse, & quadratum ex P Q æquale esse quadrato ex differentia ipsarum P Q, & P R.



ex 6. hu. *Quia vt M H ad G M, ita est diameter Q P ad eius erectum P R, ergo comparando antecedentes ad terminorum differentias, erit M H ad H G, vt P Q ad differentiam ipsarum P Q, & P R, & pariter eorundem quadrata proportionalia erunt, estque quadratum ex H M æquale semiquadrato ex G H, ergo quadratum ex P Q æquale erit semiquadrato ex differentia P Q, & P R, & sic quadratum ex p q æquale erit semiquadrato ex differentia ipsarum p q & p r; & sunt diametri P Q, & p q æquales, cum æquè recedant ab axi, & habeant latus commune C M.*

Secundo dico quod summa quadratorum ex Q P, & ex P R minor est qualibet alia summa quadratorum laterum figuræ alterius diametri.

Quia duplum rectanguli M H E minus est duplo quadrati M H, seu singulari quadrato ex G H, ergo duplum M H ad H G minorem proportionem habet, quàm G H ad H E, ergo duplum rectanguli ex G E, & M H in E H Lem. 10. huius. *minus erit summa quadratorum ex G E, & ex E H & propterea summa qua-* Lem. 12. huius. *dratorum ex Q P, & ex P R minor erit summa quadratorum ex I L, & ex I K.*

Tertio, quia duplum rectanguli ex E H A minus est duplo quadrati M H, seu singulari quadrato ex G H, ergo duplum E H ad H G minorem proportio- Lem. 10. huius. *nem habet, quàm G H ad H A, ergo duplum rectanguli ex G A, E H in A H* Lem. 12. huius. *minus erit summa quadratorum ex G A, & ex A H: quare summa quadratorum ex I L, & ex I K minor erit, quàm quadratorum summa ex A C, & ex A F.*

Quarto quia duplum rectanguli V H M maius est duplo quadrati ex M H, seu singulari quadrato ex G H, ergo duplum V H ad H G maiorem proportio- Lem. 10. huius. *nem habet, quàm H G ad H M, & propterea duplum rectanguli ex G M, & V H in M H maius erit summa quadratorum ex G M, & ex M H, & ideo* Lem. 12. huius. *summa quadratorum ex T S, & S Z maior erit quadratorum summa ex Q P, & ex P R, & sic de reliquis: quare summa quadratorum ex Q P, & ex P R minima est omnium, vt fuit propositum.*

In

In hyperbola reperire diametrum, cuius figuræ duo quadrata laterum æqualia sint quadratis laterum figuræ axis: oportet autem vt quadratum axis C A minus sit semiquadrato ex differentia laterum figuræ eius C A, & A F. PROP. 5. Addit.

Quia ex hypothesi quadratum axis A C minus est semiquadrato ex differentia laterum figuræ A C, A F, vt in nota proposit. 46. dictum est, quadratum ex A H minus est semiquadrato ex G H: fiat duplum e H ad H G, vt G H ad H A, & lateris C e ducatur diameter b a, cuius erectus c a, ergo duplum Lem. 10. huius. *rectanguli ex summa G A, e H in A H æquale est summæ quadratorum ex G A,* Lem. 12. huius. *& ex A H, & summa quadratorum ex a b, & ex a c æqualis erit quadratorum summæ ex A C, & ex A F, quod erat ostendendum.*

In eadem hyperbola diametrum reperire, cuius figuræ duo quadrata laterum æqualia sint quadratis laterum figuræ datæ diametri I L: oportet autem vt I L cadat inter axim, & diametrum P Q, cuius quadratum subduplum sit quadrati ex differentia P Q, & ex P R. PROP. 6. Addit.

Sit C E latus diametri I L, & fiat duplum V H ad H G, vt G H ad H E, & ponatur S T diameter lateris C V, cuius erectus sit S Z: erit igitur duplũ Lem. 10. *rectanguli ex G E, & V H in E H æquale quadratis ex G E, & ex E H, & propterea summa quadratorum ex T S, & ex S Z æqualis erit quadratorum* Lem. 12. huius. *summæ ex L I, & ex I K, quod erat propositum.*

Deducitur pariter ex 5. propositione additarum in eadem hyperbola tres diametros reperiri posse, quarum laterum summæ quadratorum æquales sint inter se.

Et ex 6. propositione additarum deducitur, quod quatuor diametrorum eiusdem hyperbolæ laterum summæ quadratorum æquales esse possunt inter se.

a Et educamus inter A P inclinatam I L: quia quadruplum quadrati M H æquale est quadrato H G, &c. *Suppleri debent ea, quæ deficiunt, alioqui constructio imperfecta esset: duci igitur debet C B parallela diametro I L, quæ occurrat sectioni ad punctum B, à quo ad axim perpendicularis ducatur B E secans axim in E.*

SECTIO NONA

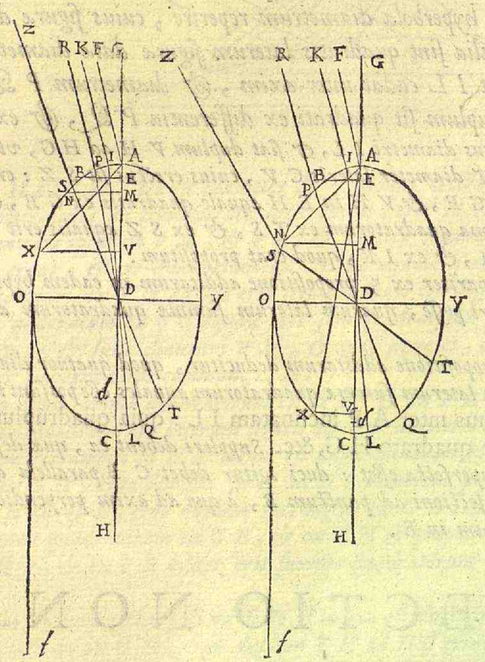
Continens Proposit. XXXXI. XXXXVII. & XXXXVIII.

a IN ellipsi duo latera figuræ maioris axis transuersi minora sunt duobus lateribus figuræ cuiuslibet alterius diametri, & duo latera figuræ diametri axi maiori proximioris minora sunt duobus lateribus figuræ diametri remotioris.

XXXXVII.

XXXXVII. Si verò duplum quadrati A C maius non fuerit quadrato ex ſumma duorum laterum ſuæ figuræ; vtique quadratum diametri ſuæ figuræ minus erit quadrato diametri figuræ cuiuſlibet alterius diametri eiuſdem ſectionis, & quadratum diametri figuræ proximioris axi minus erit quadrato diametri figuræ remotioris.

XXXXVIII. Si autem duplum quadrati axis tranſuerſi maius fuerit quadrato ex ſumma duorum laterum ſuæ figuræ, æquidem reperientur ad vtraſque eius partes duæ diametri æquales, & cu-



iuſlibet earum quadratum bis ſumptum æquale erit quadrato ex ſumma duorum laterum ſuæ figuræ; & quadratum diametri ſuæ figuræ minus eſt quadrato diametri figuræ alterius cuiuſcunque diametri exiſtentis in eodem quadrante eiuſdem ſectionis; & diameter figuræ proximioris minor eſt diametro figuræ remotioris.

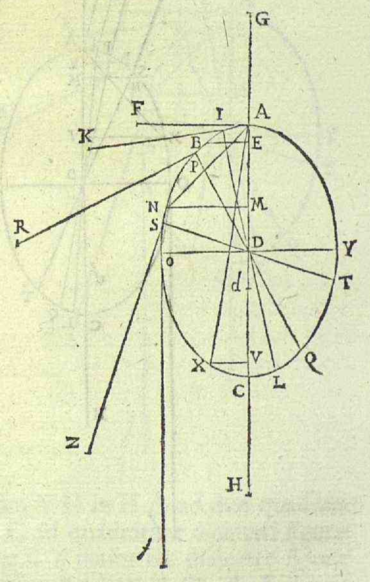
PROP.

PROPOSITIO XXXXI.

IN ellipſi A B C ſit A C axis maior, & *y* O minor, & ſint P Q, & S T duæ aliæ diametri, ſitque A F erectus ipſius A C, & P R erectus ipſius P Q, & O *f* ipſius *y* O. Dico quod C F minor eſt, quàm Q R, & Q R, quàm T Z, & T Z, quàm *y f*.

Ducantur A N, A X ordinatim applicatæ ad diametros P Q, S T, & duæ ad axim perpendiculares N M, X V, & interceptæ A G, C H. b Quia quadratum A C ad quadratum *y* O, nempe A C ad A F eandem proportionem habet, quàm C G ad G A, ſeu ad C H habebit quadratum C A ad quadratum C F ſummæ ipſius C A, eiuſque erecti eandem proportionem, quàm quadratum C G, nempe C G in A H ad quadratum G H: & quadratum A C ad quadratum *y* O eandem proportionem habet, quàm G C in C H ad quadratum C H: eſtquè quadratum *y* O ad quadratum ſummæ *y f*, vt quadratum C H ad quadratum H G; ergo quadratum A C ad quadratum *y f* eſt, vt C G in C H minorem ad quadratum H G; ſed quadratum A C ad quadratum C F eandem proportionem habet, quàm G C in maiorem A H ad quadratum G H; igitur A C ad C F maiorem proportionem habet, quàm ad *y f*: & propterea C F ſumma A C, & erecti illius minor eſt, quàm *y f*, quæ eſt ſumma *y* O, & erecti illius. Et quoniam C G in M H, quod minus eſt, quàm C G in A H ad quadratum H G eandem proportionem habet, quàm quadratum A C ad quadratum Q R ſummæ diametri, & erecti ipſius P Q (16. ex 7.) quare quadratum A C ad quadratnm C F maiorem proportionem babebit, quàm ad quadratum Q R, & propterea C F minor erit, quàm Q R. Et quoniam C G in V H ad quadratum H G eſt vt quadratum A C ad quadratum T Z ad quàm ordinatim applicatur A X (16. ex 7.) erit C F minor quàm T Z: cumque C G in H M ad quadratum H G maiorem proportionem habeat, quàm G C in V H ad quadratum idipſum H G habebit quadratum

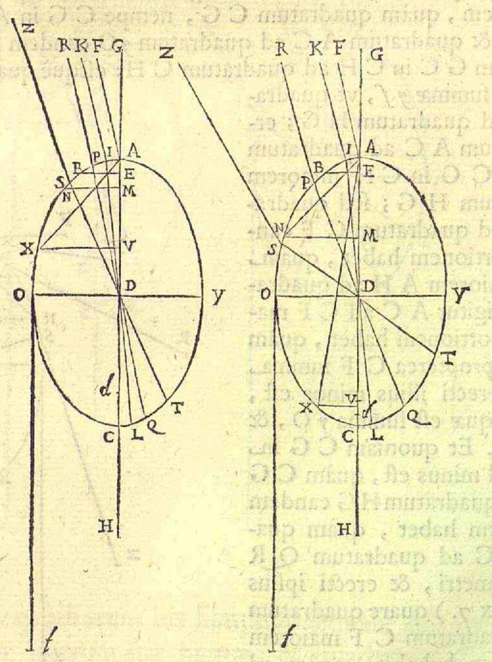
Defin. 1. huius.



tum A C ad quadratum Q R maiorem proportionem quàm ad quadratũ T Z. Et pariter oſtendetur, quod quadratum A C ad quadratum T Z maiorem proportionem habet, quàm ad quadratum *y f*; quapropter C F minor eſt quàm Q R, & Q R minor, quàm T Z, & T Z minor, quàm *y f*. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO XXXXVII.

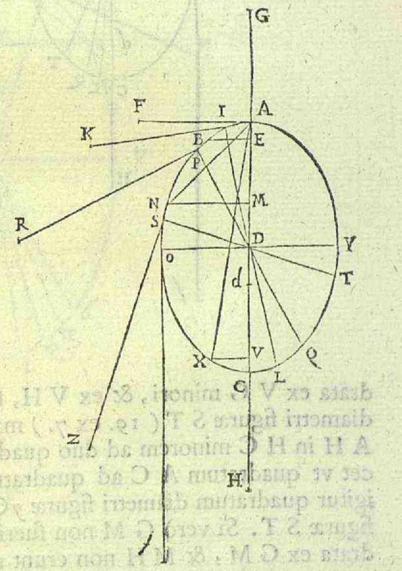
IN eadem figura ſi duplum quadrati A C maius non fuerit quadrato ſummæ C F. Dico, quod diameter figuræ eius minor eſt diametro figuræ Q P R, & diameter figuræ Q P R minor eſt diametro figuræ T S Z.



Quoniam duplum quadrati A C non excedit quadratum ſummæ C A F; ergo duplum quadrati C G, nempe G C in A H bis ſumptum non excedit quadratum H G, & propterea C G in H M bis ſumptum minus eſt quadrato H G: tollatur communiter duplum M G in H M remanebit

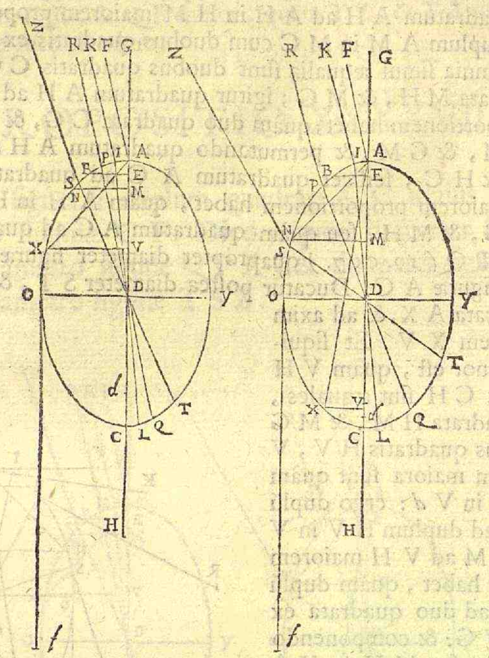
duplum

duplum H M in C M minus duobus quadratis ex M H, & ex G M: & propterea A M in M C bis ſumptum ad H M in M C bis ſumptum, nẽpe A M ad M H habebit maiorem proportionem, quam duplum A M in M C ad duo quadrata ex H M, & ex G M: & componendo A H ad H M, ſeu quadratum A H ad A H in H M maiorem proportionem habebit quàm duplum A M in M C cum duobus quadratis ex H M, & ex M G (quæ omnia ſimul æqualia ſunt duobus quadratis C G, & H C) ad duo quadrata M H, & M G; igitur quadratum A H ad A H in H M maiorem proportionem habet, quàm duo quadrata C G, & C H ad duo quadrata H M, & G M, & permutando quadratum A H ad duo quadrata C G, & H C, ſcilicet quadratum A C ad quadratum diametri figuræ eius maiorem proportionem habet, quàm A H in H M ad duo quadrata M G, & M H, ſeu quàm quadratum A C ad quadratum diametri figuræ P Q (19. ex 7.) quapropter diameter figuræ P Q maior eſt diametro figuræ A C. Ducatur poſtea diameter S T, & ad eam ordinatim applicata A X, & ad axim perpendicularem X V. Et ſiquidem G M minor eſt, quàm V H cum A G, & C H ſint æquales, erunt duo quadrata H M, & M G maiora duobus quadratis H V, V G: hæc autem maiora ſunt quàm duplum V H in V *d*: ergo duplũ M V in V *d* ad duplum H V in V *d*, nempe V M ad V H maiorem proportionem habet, quàm duplũ M V in V *d* ad duo quadrata ex V H, & ex V G: & componendo M H ad H V, ſeu M H in H A ad V H in H A maiorem proportionem habebit, quàm duplum M V in V *d* cum duobus quadratis ex V H, & ex V G, quæ omnia ſimul ſunt vt duo quadrata M H, & M G ad duo quadrata V H, & V G: & permutando M H in H A ad duo quadrata H M, & G M, ſeu vt quadratum A C ad quadratum diametri figuræ P Q (19. ex 7.) maiorem proportionem habebit, quàm V H in H A ad duo quadrata V H, & V G, ſeu quàm quadratum A C ad quadratum diametri figuræ S T (19. ex 7.) quare diameter figuræ S T maior eſt diametro figuræ P Q. Poſtea quia *y* O eſt media proportionalis inter A C, & A F erit quadratum A C ad quadratum *y* O, vt A C ad A F, nempe vt C G ad C H, ſeu vt C G in C H ad quadratum C H, & quadratum *y* O ad ſummam quadratorum *y* O, & O *f*, nempe ad quadratum diametri ſuæ figuræ eſt vt quadratum H C ad quadratum C G cum quadrato H C: quare ex



X x æquali-

æqualitate quadratum A C ad quadratum diametri figuræ y O eandem proportionem habet, quàm C G, ſeu A H in H C ad duo quadrata ipſius C G, atque ipſius C H: igitur A H in H V maiorem ad duo qua-

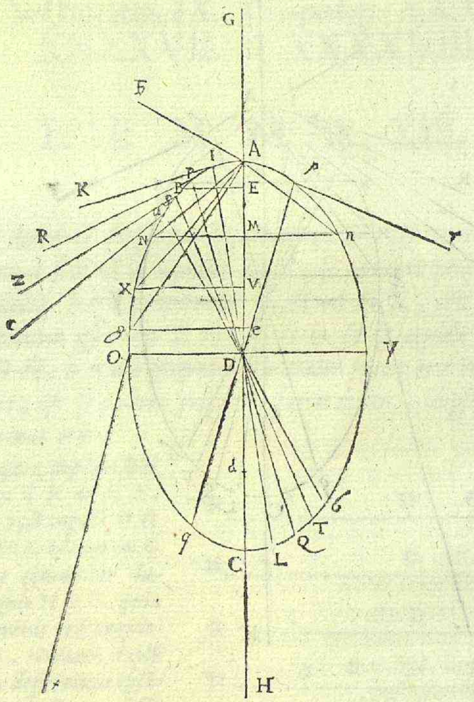


drata ex V G minori, & ex V H, ſeu vt quadratum A C ad quadratum diametri figuræ S T (19. ex 7.) maiorem proportionem habebit, quàm A H in H C minorem ad duo quadrata ex G C, & C H maiora, ſcilicet vt quadratum A C ad quadratum diametri figuræ y O (19. ex 7.); igitur quadratum diametri figuræ y O maior eſt quàm quadratum diametri figuræ S T. Si verò G M non fuerit minor quàm V H; vtique duo quadrata ex G M, & M H non erunt maiora duobus quadratis ex V G, & ex V H: at A H in M H ad duo quadrata ex G M, & ex M H, nempe quadratum A C ad quadratum diametri figuræ P Q habebit maiorem proportionem, quàm A H ad H V ad duo quadrata ex V H, & ex V G, ſcilicet vt quadratum A C ad quadratum diametri figuræ S T; igitur diameter figuræ S T maior eſt diametro figuræ P Q. Eadem prorſus oſtendentur, quando punctum V cadit vltra punctum D ad partes A inter puncta D, & M. Et hoc erat propoſitum.

PROP.

PROPOSITIO XXXXVIII.

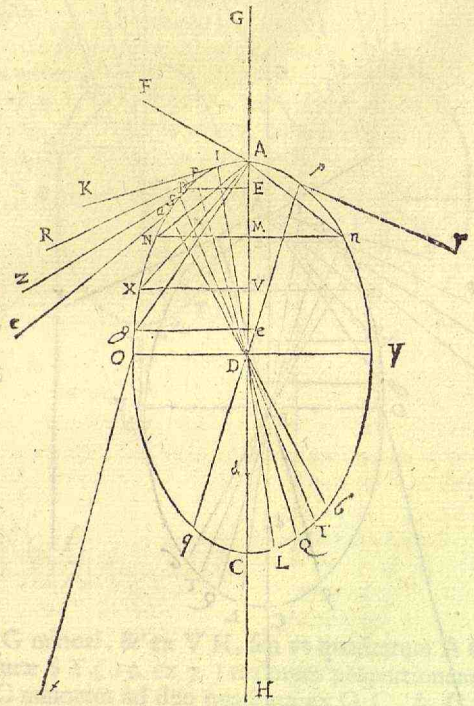
Sit iam duplum quadrati A C maius quadrato C A F, erit duplum quadrati A H maius quadrato G H; ponatur duplum quadrati H M æquale quadrato G H: & ducatur ad axim perpendicularis M N; iun-



gaturque A N, eiuſque diameter P Q extendatur, erit H M ad M G, vt P Q ad P R (7. ex 7.); ergo, & quadratum H M ad quadratum H G erit, vt quadratum P Q ad quadratum P R, & quadratum H M ad duo quadrata ex H M, & ex M G eandem proportionẽ habebit, quàm quadratum P Q ad quadratum diametri ſuæ figuræ: educatur poſtea diameter I L inter A, & B, & erectum illius ſit I K ad quàm ordinatim ducta ſit A B, & ad axim perpendicularis ſit B E erit quadratum M H, nec non G H in H D æquale dimidio quadrati H G; igitur G H ad M

Xx 2 Herit

H erit vt M H ad H D: & comparando homologorum differentias erit M G ad M D, vt G H ad H M: & propterea duplum G H in M D, seu quadruplum H D in D M est æquale duplo G M in M H: & propterea duplum G M in M H maius erit quàm duplum G E in M H; ponatur communiter duplum E M in H M cum quadruplo quadrati M D, & fiat D *d* æqualis D M, fiet duplum E *d* in M H maius quadrato H M cum



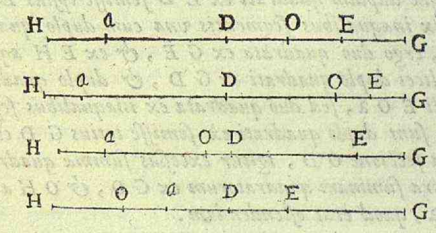
quadrato M G; igitur *d* E in E M bis sumptum ad duplum E *d* in M H, nempe E M ad M H minorem proportionem habebit, quàm duplum *d* E in E M ad duo quadrata ex M G, & ex M H: & componendo E H ad M H, seu E H in H A ad M H in H A minorem proportionem habebit, quàm duplum *d* E in E M vna cum quadratis ex M H, & ex M G, quæ æqualia sunt duobus quadratis H E, & G E ad duo quadrata ex M G, & ex H M. Et sic pariter ostendetur, quod quadratum H A ad H E in H A minorem proportionem habebit, quàm duo quadrata ex H A, & ex A G ad duo quadrata ex H E, & ex E G. Atque demonstrabitur quemadmodum antea dictum est, quod quadratum diametri figu-

trī figuræ P Q minus est quadrato diametri figuræ I L, & quadratum diametri figuræ I L minus est quadrato diametri figuræ A C. Ponãtur postea diametri S T, & *y* O vltra diametrum P Q, sitque A X ordinatim applicata ad diametrum S T, & V X ad axim perpendicularis sit, ostendetur (quemadmodum in præcedentibus dictum est) quod diameter figuræ P Q minor sit diametro figuræ S T, & diameter figuræ S T minor sit diametro figuræ *y* O, vbicunque secet ad axim perpendicularis X V ipsam A C. Et hoc erat ostendendum.

In Sectionem IX. Proposit. XXXXI. XXXXVII. & XXXXVIII.

L E M M A. XIII.

SI recta linea G H secetur bifariam in D, & non bifariam in O, E, atque fiat G a *æqualis H E; si quidem proportio dupli O H ad H G eadem fuerit proportioni G H ad H E, erit duplum rectanguli ex differentia ipsarum E H, G O in H O æquale quadratis ex G O, & ex O H: si verò proportio illa maior fuerit erit rectangulum maius quadratis; & si eadem proportio fuerit minor, idipsum rectangulum quadratis minus erit.*



Et primo quia duplum O H ad H G est vt G H ad H E, ergo duplum rectanguli O H E æquale erit quadrato ex G H; auferatur cõmuniter duplum rectanguli H O G, quia H O est communis rectangulorum altitudo, remanet duplũ rectanguli ex differentia ipsarum E H, G O, seu ex differentia ipsarum G a*, & G O in H O, seu remanet duplum rectanguli* a *O H æquale quadrato H G minus duplo rectanguli G O H: huic verò differentiæ æqualia sunt duo quadrata ex G O, & ex H O, ergo duplum rectanguli* a *O H æquale est summæ quadratorum ex G O, & ex O H.*

Secundo, quia duplum O H ad H G maiorem proportionem habet, quàm G H ad H E, ergo duplum rectanguli O H E maius erit quadrato G H, & ablato communiter duplo rectanguli G O H erit duplum rectanguli ex differentia ipsarum E H, & G O in H O maius, quàm summa quadratorum ex G O, & ex H O.

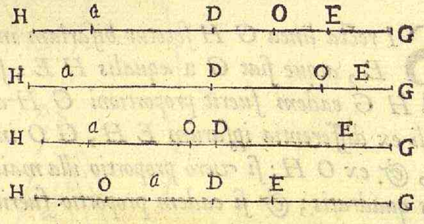
Tertio

Tertio si duplum O H ad H G minorem proportionem habuerit, quàm G H ad H E, eodem progressu ostendetur, quod duplum rectanguli ex differentia ipsarum E H, & G O in H O minus est quadratis ex G O, & ex H O, quod erat propositum.

LEMMA XIV.

I*Isdem positis sit G E minimum segmentorum, dico quod duo quadrata ex E H, & ex G E, scilicet ex maximo, & minimo segmentorum æqualia sunt duobus quadratis ex O H, & ex G O intermedijs segmentis vna cum duplo rectanguli sub differentijs minimæ G E à duabus intermedijs G O, & H O.*

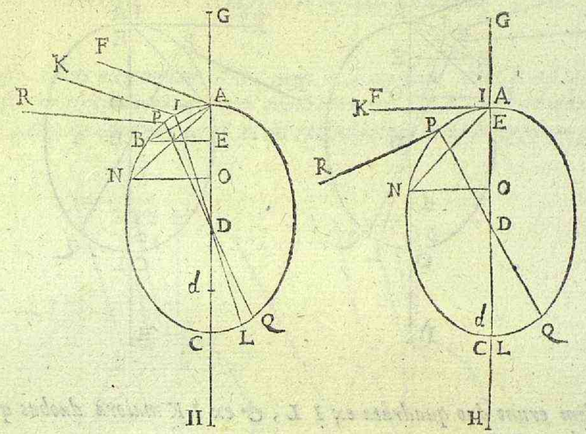
Fiat H a æqualis G E, ergo O a erit differentia ipsarum E H, & G E, sicuti O E est differentia ipsarum G O, & G E. Et quia duo quadrata ex maximo, & ex minimo segmentorum, scilicet ex H E, & ex E G æqualia sunt duplo quadrati ex G D semisse totius, cũ duplo quadrati ex E D intermedia sectione;



estque duplum quadrati ex E D semisse ipsius E a æquale duplo rectanguli E O a ex inæqualibus segmentis vna cum duplo quadrati ex intermedia sectione O D, ergo duo quadrata ex G E, & ex E H æqualia sunt his omnibus spatijs, scilicet duplo quadrati ex G D, & duplo quadrati ex D O cum duplo rectanguli E O a, sed duo quadrata ex inæqualibus segmentis G O, & ex O H æqualia sunt duplo quadrati ex semisse totius G D cum duplo quadrati ex intermedia sectione O D, igitur excessus summæ quadratorum ex G E, & ex E H, supra summam quadratorum ex G O, & O H æqualis est duplo rectanguli ex E O a, quod erat ostendendum.

LEMMA XV.

I*N ellypsi, cuius axis A C, erectus A F, diameter I L, eiusq; erectus I K, & latus C E, & similiter altera diameter Q P, cuius erectus P R, & latus C O: dico quod duplum rectanguli ex differentia ipsarum E H, G O, in H O à duobus quadratis ex G O, & ex O H, atque aggregatum quadratorum laterum I L, & I K figuræ diametri I L ab aggregato quadratorum laterum P Q, & P R figuræ alterius diametri, vna deficiunt, aut vna æqualia sunt, vel vna excedunt.*

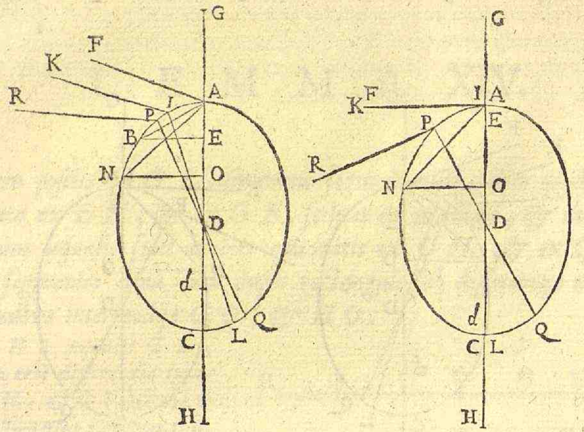


Fiat O d differentia ipsarum E H, & G O, & primo quia duplum rectanguli ex d O H æquale est quadratis ex G O, & ex H O, ergo duplum rectanguli d O E ad duplum rectanguli d O H, seu O E ad H O eandem proportionem habet, quàm duplum rectanguli d O E ad duo quadrata ex G O, & ex H O, & componendo, erit E H ad H O, seu rectangulum E H A ad rectangulum O H A vt duo quadrata ex G E, & ex E H ad duo quadrata ex G O, & ex H O, & permutando rectangulum E H A ad quadrata ex G E, & ex E H, seu quadratum ex A C ad quadrata ex I L, & ex I K, vel ad quadrata ex A C, & ex A F eandem proportionem habebit, quàm rectangulum O H A ad quadrata ex G O, & ex H O, vel quadratum A C ad duo quadrata ex P Q, & ex P R, quapropter duo quadrata ex I L, & ex I K, seu ex A C, & A F æqualia erunt duobus quadratis ex P Q, & ex P R. Lem. 14. huius. 17. huius. Ibidem.

Secundo sit duplum rectanguli d O H minus quadratis ex G O, & ex H O. duplum rectanguli d O E ad duplum rectanguli d O H, seu O E ad H O habebit maiorem proportionem, quàm duplum rectanguli d O E ad duo quadrata ex G O, & ex H O, & rursus componendo ex lem. 2. lib. 5. & ex lem. 14. & permutando, atque ex 17. proposit. huius habebit idem quadratum A C ad duo quadrata ex I L, & ex I K maiorem proportionem, quàm ad duo quadrata ex P Q, & ex P R: quapropter duo quadrata ex I L, & ex I K minora erunt duobus quadratis ex P Q, & ex P R.

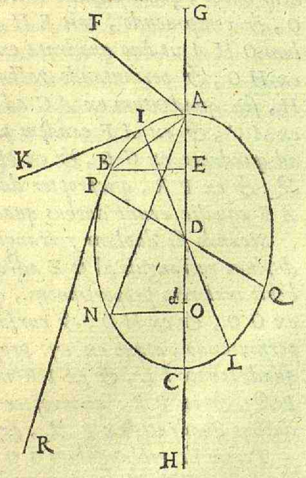
Tertio sit rectangulum d O H maius duobus quadratis ex G O, & ex H O. duplum rectanguli ex d O E ad duplum rectanguli d O H, seu O E ad H O habebit

bebit minorem proportionem, quàm duplum rectanguli d O E ad duo quadrata ex G O, & ex O H, & componendo ex lem. 14. *permutando, & ex* 17. *huius, tandem erunt duo quadrata ex I L, & ex I K maiora duobus quadratis ex P Q, & ex P R.*



SI in ellypsi termini E, O laterum C E, C O, diametrorum I L, & P Q cadant hinc inde à centro D, sitque D O maior quàm D E, dico quod quadrata ex P Q, & ex P R maiora sunt quadratis ex I L, & ex I K.

Quia O H minor est, quàm E H, sed duo quadrata ex G O maximo, & O H minimo segmentorum eiusdem rectæ lineæ G H maiora sunt duobus quadratis ex G E, & ex E H intermedijs segmentis; ergo O H ad E H, minor ad maiorem seu rectangulum O H A ad rectangulum E H A minorem proportionem habet, quàm maior summa quadratorum ex G O, & ex O H ad minorem summam quadratorum ex G E, & ex E H, & permutando rectangulum O H A ad duo quadrata ex G O, & ex O H, seu quadratum 17. huius. *A C ad duo quadrata ex P Q, & ex P R*

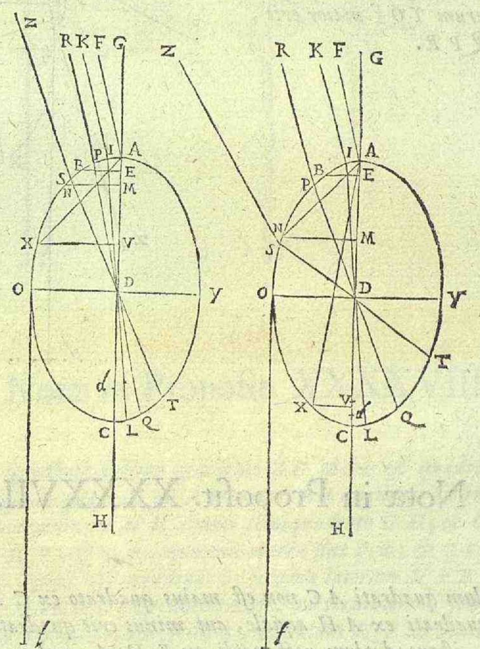


minorem

minorem proportionem habebit, quàm rectangulum E H A ad duo quadrata ex G E, & ex E H, seu quàm quadratum A C ad duo quadrata ex I L, & 17. huius. *ex I K: igitur duo quadrata ex P Q, & ex P R maiora sunt duobus quadratis ex I L, & ex I K, quod erat ostendendum.*

Notæ in Proposit. XXXXI.

IN ellypsi, cuius axis maior A C, quia rectangulum A H E ad quadratum H G est, vt quadratum A C ad quadratum ex L I K, vel ad quadratum Prop. 16. huius. *ex C A F, atq; quadratum ex G H ad rectangulum A H M eandem proportio-*

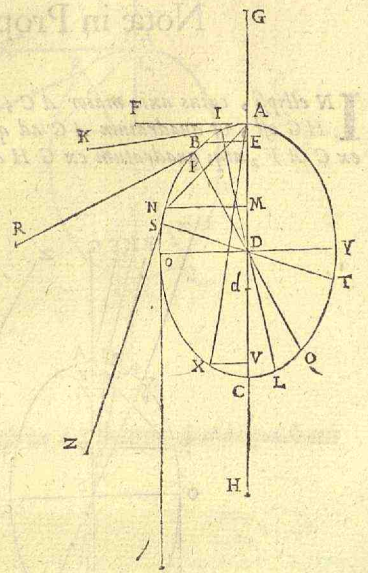


nem habet, quàm quadratum ex Q P R ad quadratum A C, igitur ex æquali perturbata rectangulum A H E maius ad minus rectangulum A H M eandem proportionem habet, quàm quadratum ex Q P R ad quadratum ex L I K, vel ad quadratum ex C A F: estque rectangulum A H E maius rectangulo A H M, ergo quadratũ ex summa Q P R maius est quadrato ex summa L I K, & propterea linearũ sũma Q P R maior erit, quàm sũma L I K, vel quàm summa

ma

ma C A F. Tandem quia rectangulum A H M ad quadratum ex summa H M G eandem proportionem habet, quàm quadratum A C ad quadratum ex Q P R, sed quadratum ex H C G ad rectangulum ex A H C eandem proportionẽ habet, quàm quadratum ex sũma Y O f ad quadratum A C, (eo quod H C est intercepta comparata diametri Y O, cum Y O secet bifariam ad eam ordinatim applicatam A C, atque ab eodem puncto C perpendicularis ad axim ducta cadat super idem punctum C), igitur ex æquali perturbata rectangulum A H M maius ad minus rectangulum ex A H C eandem proportionem habet, quàm quadratum ex summa Y O f ad quadratum ex summa Q P R, & propterea summa laterum Y O f maior erit, quàm summa Q P R.

ex 16. huius.
Ibidem.

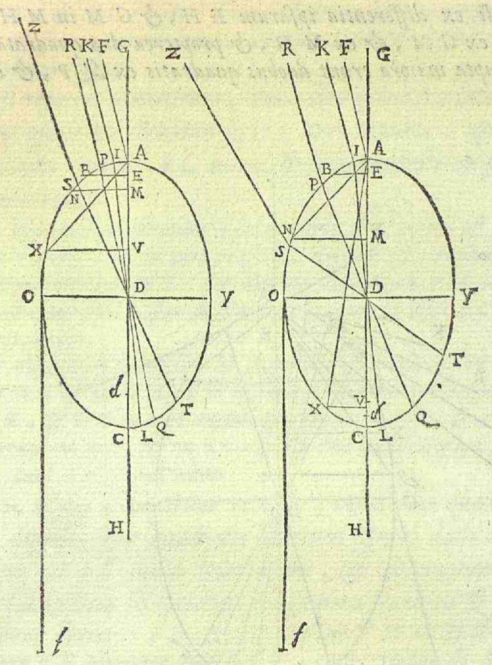


Notæ in Proposit. XXXXVII.

QVia duplum quadrati A C non est maius quadrato ex C A F, ergo duplum quadrati ex A H æquale, aut minus erit quadrato ex summa G H, estque duplum rectanguli ex E H A, vel ex E H M minus duplo quadrati A H, igitur minus quoque erit quadrato ex G H, igitur duplum M H ad G H minorem proportionem habet, quàm G H ad E H, ergo duplum rectanguli ex differentia ipsarum E H G M in M H minus est duobus quadratis ex G M, & ex H M: quare duo quadrata ex I L, & ex I K minora erunt duobus quadratis ex Q P, & ex P R, & sic duo quadrata ex Q P, & ex P R minora sunt duobus quadratis ex T S, & ex S Z.

Lem. 13. huius.
Lem. 15. huius.

Notæ



Notæ in Proposit. XXXXVIII.

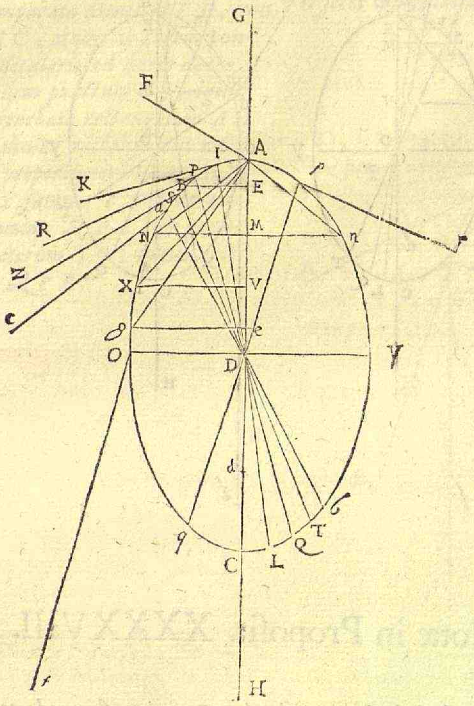
QVia ex hypothesi duplum quadrati A C maius est quadrato ex C A F, ergo duplum quadrati ex A H maius erit quadrato ex H G. Fiat igitur quadratum ex M H æquale semiquadrato G H, & lateris C M fiant duæ diametri Q P, & q p, quarum erecta sint P R, & p r: Dico duplum quadrati Q P æquale esse quadrato ex summa laterum Q P R: Quia Q P ad P R est vt H M ad M G, & antecedentes ad terminorum summas, & eorum quadrata proportionalia erunt, scilicet quadratum Q P ad quadratum ex Q P R eandem proportionem habebit, quàm quadratum ex M H ad quadratum ex H G: erat autem quadratum M H subduplum quadrati ex H G, igitur quadratum ex P Q subduplum est quadrati ex Q P R. Eadem ratione quadratum ex q p subduplum erit quadrati ex q p r, & diametri Q P, & q p æquales erunt, cum æque recedant ab axi, & habeant commune latus C M.

Prop. 7. huius.

Postea quia punctum E cadit inter M, & A, erit duplum rectanguli M H E maius duplo quadrati ex M H, seu maius quadrato G H, & propterea duplum M H ad H G maiorem proportionem habebit, quàm G H ad H E, ergo

duplum

Lem. 13. *duplum rectanguli ex differentia ipſarum E H, & G M in M H maius erit*
Lem. 15. huius. *duobus quadratis ex G M, & ex M H, & propterea duo quadrata ex I L, & ex I K ſimul ſumpta maiora erunt duobus quadratis ex Q P, & ex P R.*



Similiter duplum rectanguli E H A maius erit quadrato ex G H, & propterea duplum E H ad H G maiorem proportionem habebit, quàm G H ad H
Lem. 13. huius. *A, & ideo duplum rectanguli ex differentia ipſarum A H, & G E in E H maius erit duobus quadratis ex G E, & ex E H: igitur duo quadrata ex C A,*
Lem. 15. huius. *& A F maiora erunt duobus quadratis ex I L, & ex I K.*

Rurſus quia V H minor eſt, quàm M H erit duplum rectanguli V H M minus duplo quadrati M H, ſeu minus quadrato G H, igitur duplum V H ad
Lem. 13. huius. *H G minorem proportionem habet, quàm G H ad H M, & propterea duplum rectanguli ex differentia ipſarum M H, & G V in V H minus erit duobus*
Lem. 15. huius. *quadratis ex G V, & ex V H, & propterea duo quadrata ex Q P, & ex P R minora erunt duobus quadratis ex T S, & ex S Z: ſi verò D V maior fue-*
Lem. 16. huius. *rit quàm D M, erunt duo quadrata ex Q P, & ex P R minora duobus quadratis*

dratis ex T S, & S Z: igitur ſumma duorum quadratorum ex Q P, & ex P R minor eſt ſumma quadratorum duorum laterum figuræ cuiuſlibet alterius diametri eiuſdem ellipſis.

In ellipſi reperire diametrum, cuius duo quadrata laterum figuræ eius æqualia ſint quadratis laterum figuræ axis maioris: oportet autem vt quadratum axis maioris A C maius ſit ſemiquadrato ex ſumma laterum C A F figuræ eius. PROP. 7. Addit.

Quia ex hypotheſi quadratum axis maioris A C maius eſt ſemiquadrato ex ſumma C A F, ergo, vt in nota prop. 48. dictum eſt, duplum quadrati ex A H maius eſt quadrato ex H G; fiat duplum rectanguli e *H A æquale quadrato ex G H, & lateris C* e *fiat diameter* a b *cuius erectus* a c. *Dico hanc eſſe diametrum quæſitam.*

Quoniam duplum rectanguli e *H A æquale eſt quadrato ex G H, ergo duplum* e *H ad H G eſt vt G H ad H A, eritq; duplum rectanguli ex differentia* Lem. 13.
ipſarum A H, & G e *in* e *H æquale quadratis ex G* e*, & ex* e *H, & ſum-* Lem. 15.
ma quadratorum ex b a, *& ex* a c *æqualis erit quadratorum ſummæ ex A C, & ex A F, quod erat oſtendendum.*

In eadem ellypſi diametrum reperire, cuius duo quadrata laterum figuræ eius æqualia ſint quadratis laterum figuræ datæ diametri I L: oportet autem vt I L cadat inter axim, & diametrum P Q, cuius quadratum ſubduplum ſit quadrati ex ſumma laterum Q P R. PROP. 8. Addit.

Sit C E latus diametri I L, & fiat duplum V H ad H G, vt G H ad H
E, & ponatur S T diameter lateris C V, cuius erectus ſit S Z: erit igitur Lem. 13. huius.
duplum rectanguli ex differentia ipſarum E H, & G V in V H æquale qua- Lem. 15. huius.
dratis ex G V, & ex V H, ideoque ſumma quadratorum ex L I, & ex I K æqualis erit quadratorum ſummæ ex T S, & S Z, quod propoſitum fuerat.

Colligitur ſimiliter ex 7. propoſit. additarum, quod in vna ellypſi tres diametri reperiri poſſunt, quarum ſummæ quadratorum laterum æquales ſint inter ſe: & ex 8. propoſit. additarum deducitur, quod quatuor diametrorum eiuſdem ellypſis laterum ſummæ quadratorum æquales poſſunt eſſe inter ſe, ſed oportet vt quadratum axis maioris datæ ellypſis maius ſit, quàm dimidium quadrati ex ſumma laterum figuræ axis C A F.

a Duo latera figuræ axis tranſuerſi minora ſunt duobus lateribus figuræ cæterarum diametrorum, & duo latera figuræ diametri axi proximioris minora ſunt duobus lateribus figuræ remotioris, &c. *Addidi ea, quæ deficere videbantur in hoc textu.*

b Iiſdem figuris manentibus cum ſuis ſignis oſtendatur quod duplum quadrati A C, ſi non exceſſerit F, quod diameter eſt illius figuræ minor, quàm diameter figuræ I L, & diameter figuræ I L, quàm diameter figuræ P Q, &c. *Legendum puto vt in textu apparet.*

c Et ſic oſtendetur quod ſi punctum V inciderit ſuper D A, & oſtendetur D, & M, &c. *Legendum puto, vt in textu videre eſt.*

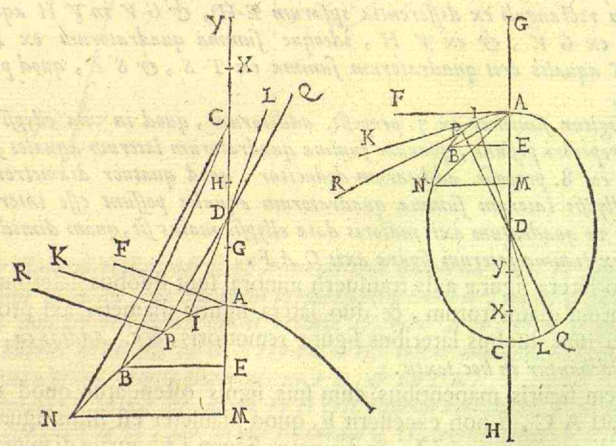
SECTIO

SECTIO DECIMA

Continens Proposit. XXXXIX. XXXXX. & XXXXXI.

XXXXXI. IN hyperbola, & ellipsi, si axis transuersus minor fuerit suo erecto, differentia quadratorum duorum laterum figuræ axis eius maior est, quàm differentia quadratorum laterum figuræ cuiuslibet alterius diametri ei homologæ. Et differentia quadratorum laterum figure homologæ proximioris axi sempēr maior est in hyperbola, quàm differentia quadratorum laterum figuræ remotioris: at in ellypsi quousque diameter transuersa æqualis non fiat suo erecto. a

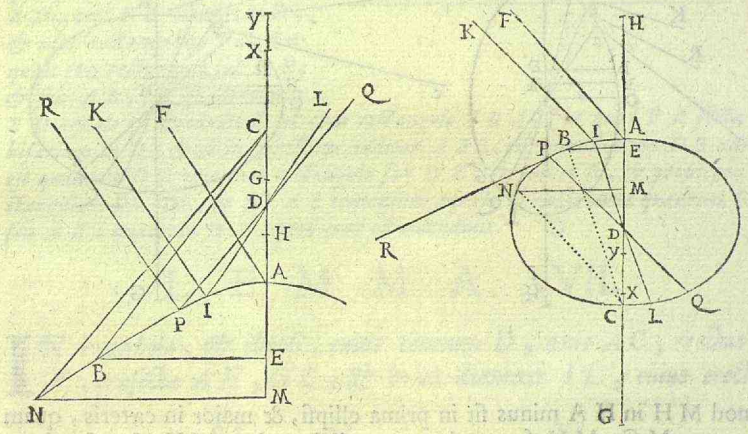
XXXXX. Et in hyperbola differentia quadrati axis inclinati ab eius figura minor erit semidifferentia quadratorum duorum laterum figuræ sui homologi.



XXXXIX. Si verò in hyperbole axis inclinatus maior fuerit suo erecto, vtique differentia quadratorum duorum laterum figuræ axis minor erit differentia quadratorum laterum figuræ alterius

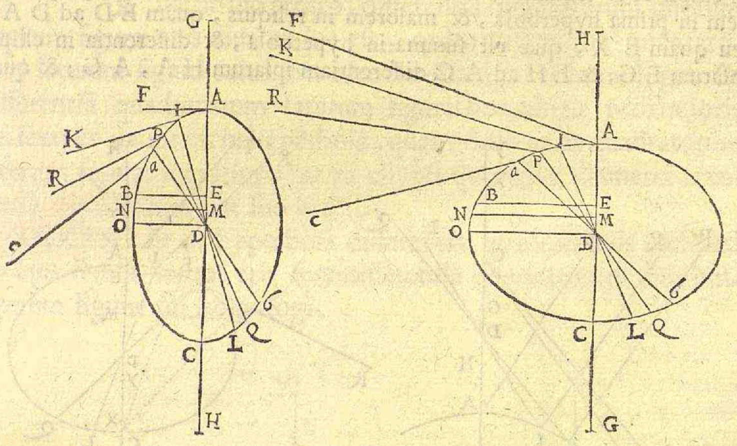
terius homologæ diametri, atque differentia quadrati axis ab eius figura maior erit semidifferentia quadratorum duorum laterum figuræ suæ homologæ, & minor erit integra differentia eorundem quadratorum.

In sectione A B N sit axis A C maior in figura prima, & in secunda minor, sintquè I L, P Q duæ aliæ diametri, quæ in ellipsi cadant inter
b axim, & vnā æqualium; ducanturque duæ ordinationes A B, A N ad diametros I L, P Q, & duas ad axim perpendiculares B E, N M; sitque A F erectus ipsius A C, & A G, C H duæ interceptæ: ponaturque
c in ellipsi X D æqualis E D, habebit E H ad H A minorem proportionem in prima hyperbola, & maiorem in reliquis, quàm E D ad D A, seu quàm E X, quæ est summa in hyperbola, & differentia in ellipsi ipsarum E G, & E H ad A C differentiam ipsarum H A, A G; & qua-



dratum A C in omnibus figuris ad differentiam quadratorum A C, & A F eandem proportionem habet, quàm quadratum A H ad differentiam duorum quadratorum A H, & G A: atque E H ad H A minorem proportionem habet in duabus primis figuris, & maiorem proportionem in duabus secundis, quàm E G ad G A, comparando homologorum summas, erit E H ad H A, vt E H cum E G ad H A cum G A, nempe aggregatum E H, E G in earundem differentiam ad aggregatum H A, A G in earundem differentiam, quod est æquale differentiæ duorum quadratorum E H, E G; nempe quadratum A C ad differentiam quadratorum duorum laterum figuræ I L minorem proportionem habet (in prima ellipsi), & maiorem (in secunda) quàm quadratum A H ad aggregatum H A, A G in earundem differentiam, quod est æquale differentiæ quadratorum H A, A G, nempe quadratum A C ad differentiam quadratorum

dratorum duorum laterum figuræ eius; igitur quadratum A C ad differentiam quadratorum duorum laterum figuræ I L minorem proportionem habet, in prima ellipsi, & maiorem in reliquis, quam ad differentiam quadratorum duorum laterum figuræ A C; ergo differentia quadratorum duorum laterum figuræ A C minor est in prima ellipsi, & maior in cæteris, quàm differentia quadratorum duorum laterum figuræ I L. Præterea M H ad H E minorem proportionem, aut maiorem habet, quàm M G ad G E: & ponamus in ellipsi Y D æqualem D M, ostendeturquè



quod M H in H A minus sit in prima ellipsi, & maior in cæteris, quàm duarum M G, M H summa in earum differentiam M Y: & ostendetur quemadmodum dictum est, quod differentia quadratorum duorum laterum figuræ I L maior est, quàm differentia quadratorum duorum laterum figuræ P Q.

Deinde in hyperbola ponamus I K erectum ipsius I L, erit differentia quadratorum duarum I L, I K (quæ est æqualis K L in summam L I, I K) maior illa, quàm I L in L K, quod est æquale differentiæ quadrari I L, & eius figuræ, nempe differentiæ quadrati A C, & eius figuræ (29. ex 7.) & non est maior in prima, quàm duplum, & in secunda maior duplo, & hoc est propositum.

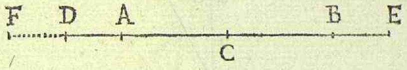
In Se-

In Sectionem X. Proposit. XXXXIX. XXXXX. & XXXXXI.

LEMMA XVI.

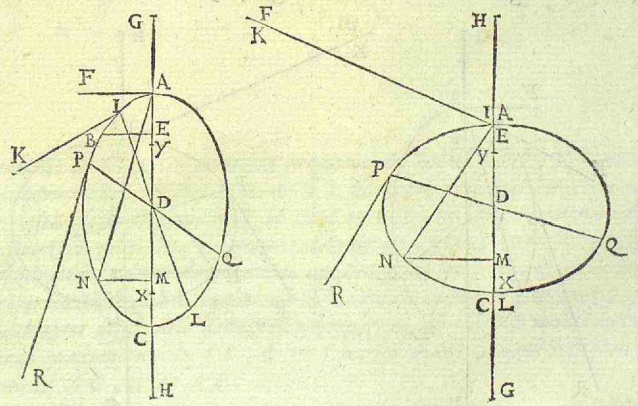
SI rectæ lineæ A B bifariam sectæ in C vtrinque addantur æquales portiones A D, & B E, dico rectangulum sub tota D E, & sub intermedia A B æquale esse differentiæ quadratorum ex A E, & ex A D.

Apponatur F D æqualis D A, vel B E: & quia F D æqualis est B E addita communi B D, erit F B æqualis D E, & ideo rectangulum F B A æquale erit rectangulo sub D E, & sub A B, sed quadratum B D æquale est quadrato D A cum rectangulo F B A, (eo quod F A secta est bifariam in D, & ei in directum additur A B), ergo quadratum D B æquale est quadrato D A vna cum rectangulo sub D E, & sub A B, & propterea rectangulum sub D E, & sub A B contentum æquale est differentiæ quadrati B D, seu A E à quadrato D A, quod erat ostendendum.



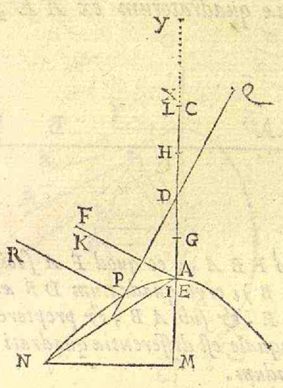
LEMMA XVII.

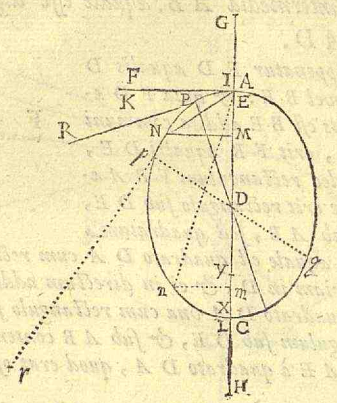
IN hyperbola, & ellypsi, cuius centrum D, axis A C, erectus A F, præsectæ A H, G C, & in ea diameter I L, cuius erectus



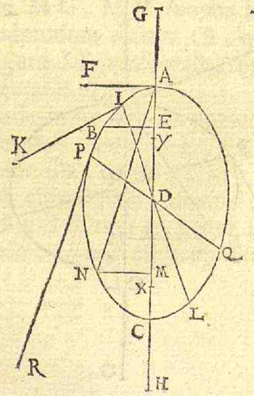
 I K,

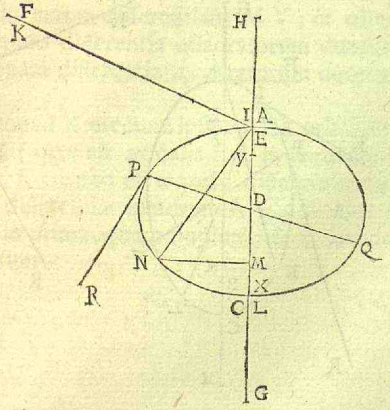
I K, & latus C E, pariterque diameter Q P, cuius erectus P R, eiusque latus C M, si fuerit proportio ipsius H M ad M D eadem proportioni H E ad D E, vel eadem proportioni H A ad D A, erit differentia quadratorum ex lateribus Q P, & ex P R figuræ diametri Q P æqualis differentiæ quadratorum ex lateribus figuræ diametri I L, vel A C: si verò proportio illa minor fuerit erit prior differentia quadratorum maior reliqua, & si illa proportio maior fuerit, erit prima quadratorum differentia minor reliqua.





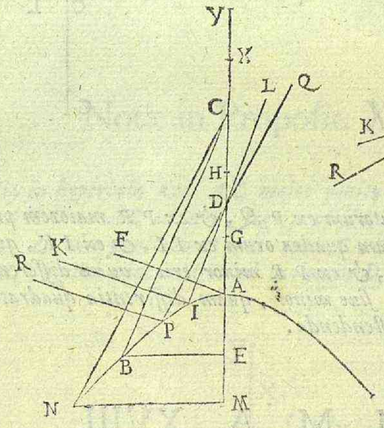
Fiat D X æqualis D E, & D Y æqualis D M, & primo quia H M ad M D est vt H E ad D E, permutando M H ad H E erit vt D M ad D E, seu vt duplũ M Y ad duplum E X, & sumptis altitudinibus H A, & G H erit rectangulum M H A ad rectangulum E H A vt rectangulum sub Y M, & G H ad rectan-

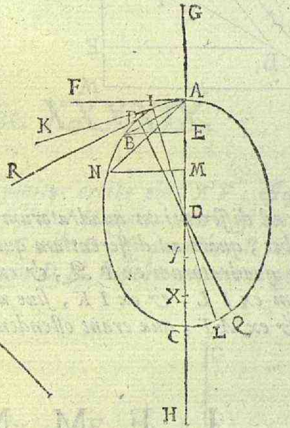




gulum sub E X, & G H, & permutando rectangulum M H A ad rectangulum sub Y M, & G H, seu ad differentiam quadratorum ex H M, & ex M G eandem proportionem habebit, quàm rectangulum E H A ad rectangulum sub E X, & sub G H, seu ad differentiam quadratorum ex H E, & ex E G: est verò quadratum A C ad differentiam quadratorum ex P Q, & ex P R, vt rectangulum M H A ad differentiam quadratorum ex H M, & ex M G, pariterque idem quadratum A C ad differentiã quadratorum ex I L, & ex I K est, vt rectangulum E H A ad differentiam quadratorum ex H E, & ex E G, igitur idem quadratum A C ad differentiam quadratorum ex P Q, & ex P R eandem proportionem habet, quàm ad differentiam quadratorum ex I L, & ex I K, & propterea differentia quadratorum ex Q P, & ex P R æqualis est quadratorum differentiæ ex I L, & ex I K, siue æqualis est quadratorum differentiæ ex A C, & ex A F.

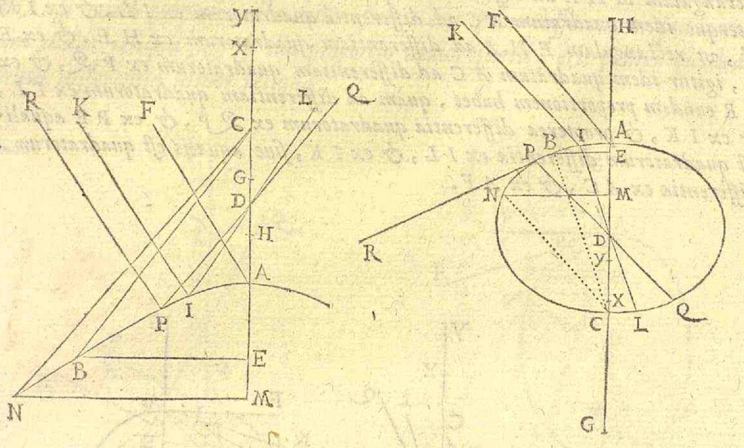
Lem. 16. huius.
Ibidem.
Prop. 20. huius.
Ibidem.





Secundo H M ad M D minorem proportionem habeat, quàm H E ad D E, vt prius permutando habebit H M ad H E minorem proportionem, quàm D M ad D E, seu quàm duplum M Y ad duplum E X, & sumptis communibus altitudinibus H A ad G H, & permutando ex lem. 16. & proposit. 20. huius, idem quadratum A C ad differentiam quadratorum ex P Q, & ex P R minorem proportionem habebit, quàm ad differentiam quadratorum ex I L, & ex I K, quapropter differentia quadratorum ex P Q, & ex P R maior erit, quàm differentia quadratorum ex I L, & ex I K, seu maior, quàm differentia quadratorum ex A C, & ex A F.

Tertio habeat H M ad M D maiorem proportionem quàm H E ad D E: vt prius permutando, sumptis communibus altitudinibus H A, & G H, & denuo permutando ex lem. 16. & prop. 20. huius, sequitur quod idem quadratum



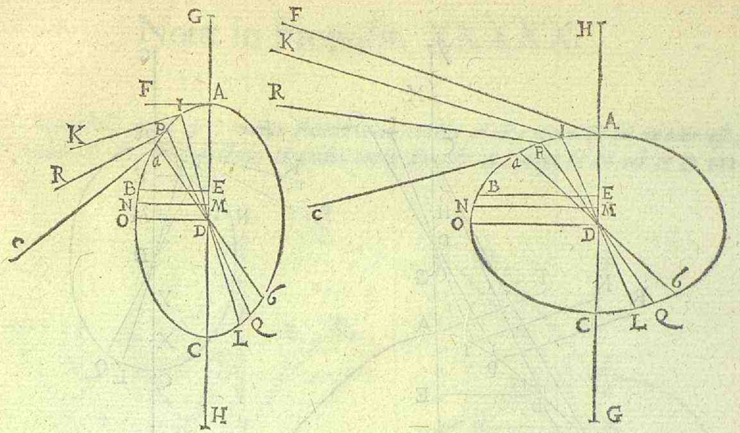
ex A C ad differentiam quadratorum ex P Q, & ex P R maiorem proportionem habet, quàm ad differentiam quadratorum ex I L, & ex I K, quare differentia quadratorum ex P Q, & ex P R minor erit, quàm differentia quadratorum ex I L, & ex I K, siue minor, quàm differentia quadratorum ex A C, & ex A F, quæ erant ostendenda.

L E M M A XVIII.

IN *ellipsi si diameter* a b *bifariam secuerit rectam lineam A O terminos axium coniungentem, erit* a b *æqualis suo erecto* a c.

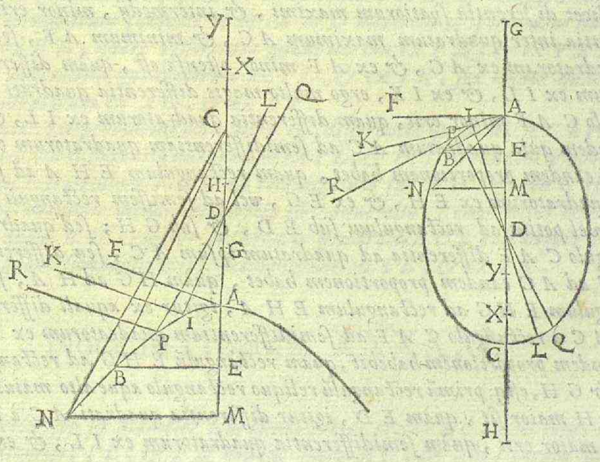
Quia axis A C bifariam diuiditur in centro D ab axi O D perpendiculari ad axim A C, quæ educitur à termino O ipsius A O ordinatim applicatæ ad
Prop. 7 huius. *diametrum* a b, *habebit diameter* a b *ad eius erectũ* a c *eandem proportionem æqualitatis quàm habet H D ad D G, igitur diameter* a b *æqualis est eius lateri recto* a c, *quod erat propositum.*

Notæ

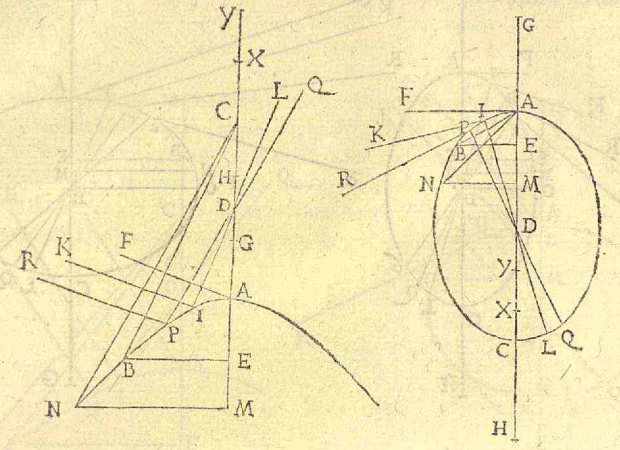


Notæ in Proposit. XXXXIX.

QVia in hyperbola axis A C maior ponitur erecto eius A F, estque A H ad H C vt A C ad A F, ergo præsecta A H maior portio est totius C A, & ideo punctum H cadit inter C, & D, & punctum E cadit inter M, & D, igitur eadem H D ad maiorem D M habebit minorem proportio-*



enm



nem , quàm ad minorem D E , & componendo H M ad M D minorem proportionem habebit , quàm H E ad E D, & ideo differentia quadratorum ex P Q, Lem. 17. huius. & ex P R maior erit , quàm differentia quadratorum ex I L , & ex I K , seu maior quàm differentia quadratorum ex A C , & ex A F.

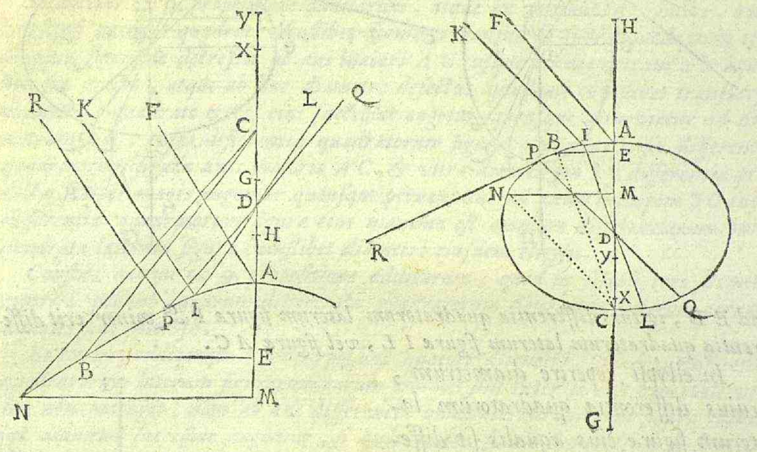
Rursus quia rectangulum C A F maius est quadrato A F , (propterea quod rectangulum illud medium proportionale est inter maius quadratum ex A C , & quadratum minus ex A F) , ergo differentia quadrati A C à rectangulo C A F , scilicet differentia spatiorum maximi , & intermedij , minor erit , quàm differentia inter quadratum maximum A C , & minimum A F , sed differentia quadratorum ex A C , & ex A F minor ostensa est , quàm differentia quadratorum ex I L , & ex I K , ergo multo magis differentia quadrati A C à rectangulo C A F minor erit, quàm differentia quadratorum ex I L, & ex I K.

Tandem quia quadratum A C ad semidifferentiam quadratorum ex I L, & Prop. 20. huius. *ex I K eandem proportionem habet , quàm rectangulum E H A ad semidifferentiam quadratorum ex E H , & ex E G , vel ad semissem rectanguli ex E X in* Lem. 16. huius. *G H , vel potius ad rectangulum sub E D , & sub G H ; sed quadrati A C à rectangulo C A F differentia ad quadratum ipsum A C , seu differentia A C , & A F ad A C eandem proportionem habet , quàm H G ad H A , seu quàm* ex Def. 2. huius. *rectangulum E H G ad rectangulum E H A , igitur ex æquali differentia quadrati A C à rectangulo C A F ad semidifferentiam quadratorum ex I L, & ex I K eandem proportionem habebit , quàm rectangulũ E H G ad rectangulum sub E D, & G H, estq; primũ rectangulũ reliquo rectangulo æquè alto maius , cum eius basis E H maior sit , quàm E D , igitur differentia quadrati A C à rectangulo C A F maior erit , quàm semidifferentia quadratorum ex I L , & ex I K.*

Notæ

Notæ in Proposit. XXXXX.

SI hyperbole axis A C minor fuerit eius erecto A F , quia H M maior est , quàm H E , & punctum H cadit inter D , & A , ergo H M ad H D ma-



iorem proportionem habebit , quàm H E ad eandem H D, & comparando antecedentes ad terminorum summas H M ad M D maiorem proportionem habebit, quàm H E ad E D , quare differentia quadratorum ex P Q, & ex P R minor Lem. 17. huius. *erit , quàm differentta quadratorum ex I L , & ex I K , seu minor quàm differentia quadratorum ex A C , & ex A F.*

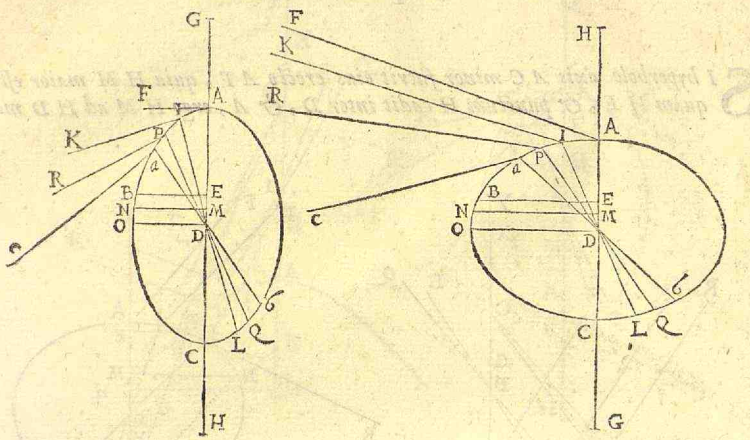
Postea, quia vt in precedenti nota dictũ est, differentia quadrati A C à rectangulo C A F ad semidifferentiã quadratorũ ex I L, & ex I K eandem proportionẽ habet , quàm rectangulum E H G ad rectangulum sub E D , & sub G H , estque illud rectangulum minus rectangulo isto æquè alto , (cum illius basis E H minor sit , quàm E D) , igitur differentia quadrati A C à rectangulo C A F minor est , quàm semidifferentia quadratorum ex I L , & ex I K.

Notæ in Proposit. XXXXXI.

IN qualibet ellypsi sit diameter a b æqualis eius erecto a c , eius latus erit C D , & diametri I L , & P Q cadant inter A C , & a b , earum laterum ex Lem. 18. huius.

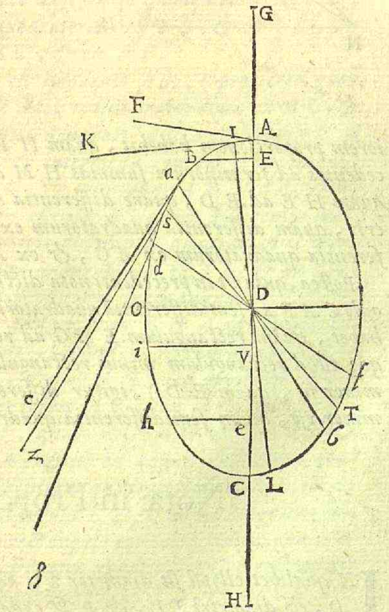
C E , &

C E, & C M, termini E, & M cadent inter D, & A, & M cadat inter E & D, propterea M H ad M D maiorem proportionem habebit, quàm H E



Lem. 17. huius. *ad E D, igitur differentia quadratorum laterum figuræ P Q minor erit differentia quadratorum laterum figuræ I L, vel figuræ A C.*

PROP. 9. Addit. *In ellypsi reperire diametrum, cuius differentia quadratorum laterum figuræ eius æqualis sit differentiæ quadratorum laterum figuræ axis maioris A C:*



Secetur H D in e, *vt H* e *ad* e *D eandem proportionem habeat, quàm H A ad A D, & ex puncto* e *educatur ad axim perpendicularis* e h *occurrens sectioni in* h, *& coniungatur* a h, *quàm bifariam secet diameter* f d, *cuius erectus* d g: *dico diametrum* f d *esse quæsitam. Quia H* e *ad* e *D eandem proportionem habet, quàm H*
Lem. 17. huius. *A ad A D, ergo differentia quadratorum ex* f d, *& ex* d g *æqualis est differentiæ quadratorum ex A C, & ex A F, quod erat propositum.*

PROP. 10. Addit. *In ellypsi reperire diametrum, cuius differentia quadratorum laterum eius figuræ æqualis sit differentiæ quadratorum laterum figuræ*

datæ

datæ diametri I L: oportet autem vt data diameter cadat inter axim maiorem A C, & diametrum a b *æqualem suo erecto* a c.

Sit C E latus diametri I L, & diuidatur H D in V, vt habeat H V ad V D eandem proportionem, quàm H E habet ad E D, & ducta vt prius ad axim perpendiculari V X occurrens sectioni in X, & coniuncta A X, quam bifariam secet diameter T S, cuius erectus S Z; dico hanc esse quæsitam. Quoniam H V ad V D eandem proportionem habet, quàm H E ad E D, igitur differentia quadratorum ex T S, & ex S Z æqualis est differentiæ quadratorum ex I L, & ex I K, quod propositum fuerat. Lem. 17. huius.

Deducitur ex 9. propositione additarum, atque ex proposit. 51. huius, quod in ellypsi excessus quadrati cuiuslibet diametri transuersæ supra quadratum erecti eius successiue decrescit ab axi maiori A C vsque ad diametrum a b *æqualem suo erecto, atque ab hac diametro defectus quadrati cuiuslibet transuersæ diametri à quadrato erecti eius successiue augetur, quousque perueniatur ad diametrum* f d, *cuius differentia quadratorum figuræ eius æqualis sit differentiæ* ex Prop.
quadratorum figuræ axis maioris A C, & vltra diametrum f d *differentiæ præ-* 50. huius.
dictæ semper magis augentur quousque perueniatur ad axim minorem Y O cuius differentia quadratorum figuræ eius maxima est omnium differentiarum inter quadrata laterum figuræ cuiuslibet diametri eiusdem ellypsis.

Constat quoque ex 9. propositione additarum, quod in ellypsi tres diametri reperiri possunt, quarum differentia quadratorum figurarum laterum earum æquales sint inter se.

Et ex 10. additarum reperiri possunt quatuor diametri, quarum differentiæ quadratorum laterum figurarum earum æquales sint inter se: in hyperbole verò hoc non contingit, nam ab axi differentiæ quadratorum laterum figuræ cuiusli- ex Prop. 49. huius.
bet diametri successiue augentur, si axis maior fuerit suo erecto, at si minor ex Prop.
fuerit prædictæ differentiæ quadratorum successiue diminuuntur. 50. huius.

a Differentia (8. 15.) duorum quadratorum duorum laterum figuræ axis maior est in hyperbola (51.), & ellypsi, quàm differentia quadratorum duorum laterum figuræ homologæ diametri sectionis, & differentia homologi proximioris axi maior est differentia homologi remotioris: hoc autem si axis in hyperbola minor fuerit suo erecto (49.); si verò fuerit maior oppositum pronunciandum est (50.), & differentia quadrati axis inclinati, & figuræ eius minor est semidifferentia quadratorum duorum laterũ figuræ sui homologi, si axis inclinatus minor est suo erecto (49.) si verò fuerit maior excessus axis maior erit dimidio excessus quadratorum duorum laterum figuræ homologi, & minor quàm tota, &c. *Legendum puto: in qualibet ellypsi, &c. vt in textu apparet.*

b Et sit P Q in ellypsi vna . . . ., & educamus A B, A N, &c. *Repleui lacunam, vt in textu videre est.*

c Ergo E H ad H A minor est quàm E D ad D A, nempe E X excessus E G, E H ad A C excessum H A, A G, & quadratum A C in omnibus figuris ad differentiam duorum quadratorum A G, A F, vt quadratum A H ad differentiam duorum quadratorũ A G, & E H ad H A minor in duabus primis, & maior in duabus secundis, quàm E G ad G A, & iungamus ergo E H ad H A, nempe E H ad H A, quàm aggrega-

Aaa tum

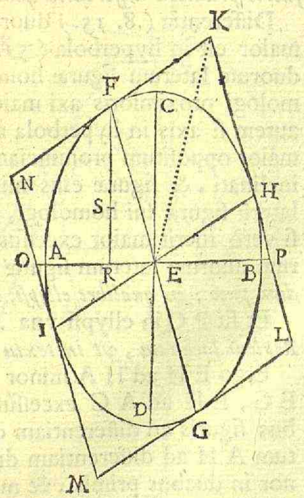
tum E H, E G in suum excessum ad aggregatum H A, E G in suum excessum æqualis excessui duorum quadratorum E H, E G, nempe quadratum A C ad excessum quadratorum duorum laterum figuræ I L minor in prima ellypsi, & maior in secunda, quàm quadratum A H ad aggregatum H A, A G in eorum excessu æqualis, &c. *Hæc omnia corrigi debuisse nemo negabit, atque hinc manifestum est non pauca in textu arabico desiderari, cum propositio 51. vera non sit absque determinationibus superius expositis.*

SECTIO VNDECIMA

Continens Proposit. XXXII. & XXXI. Apollonij.

IN ellypsi, & sectionibus coniugatis parallelogrammum sub axibus contentum æquale est parallelogrammo à quibuscunque duabus coniugatis diametris comprehenso, si eorum anguli æquales fuerint angulis ad centrum contentis à coniugatis diametris. a

Sint duo axes A B, C D in ellipsi A C B D, siue in sectionibus coniugatis A, B, C, D, & sint F G, I H aliæ duæ coniugatæ diametri, & ducantur per puncta F, I, G, H, lineæ tangentes conisectiones, quæ sibi mutuo occurrant ad puncta K, L, M, N: & producatur A B ex vtraque parte vsque ad tangentes, easque secet in O, P, & sit centrum E. Dico quod A B in C D æquale est spatio parallelogrammo M K: sit itaque F R perpendicularis ad A B; & ponamus S R mediam proportionalem inter O R, R E.

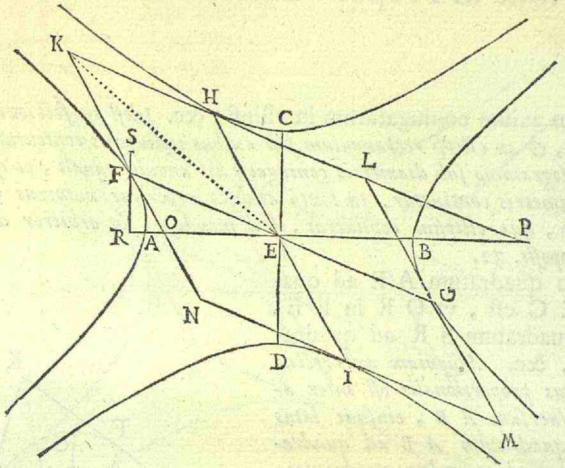


b

Et quia quadratum A E ad quadratum E C eandem proportionem habet, quàm O R in R E, nempe quàm quadratum S R ad quadratum F R (37. ex 1.) erit A E ad E C nempe quadratum A E ad A E in E C, vt S R ad F R, nempe S R in O E ad F R in O E, & permutando erit quadratum A E, nempe R E in O E (39. ex 1.)

ad

c ad S R in O E, vt A E in E C ad F R in O E, & quadratum O F ad quadratum E H, nempe triangulum E O F ad triangulum E H P (24. ex 2.) propter similitudinem duorum triangulorum est, vt O R ad R E



(4. ex 7.), & spatium parallelogrammum E K medium proportionale est inter duplum trianguli E O F, & duplum trianguli E H P; & S R media proportionalis est inter O R, & R E, erit duplum trianguli E O F ad parallelogrammum E K, vt S R ad R E; nempe S R in O E ad R E, in O E, quæ ostendetur esse, vt F R in O E, quod est æquale duplo trianguli O F E ad A E in E C; ergo parallelogrammum E K æquale est ipsi E A in E C, & propterea quadruplum illius spatij, quod est parallelogrammum M K æquale est ipsi B A in C D. Et hoc erat propositum.

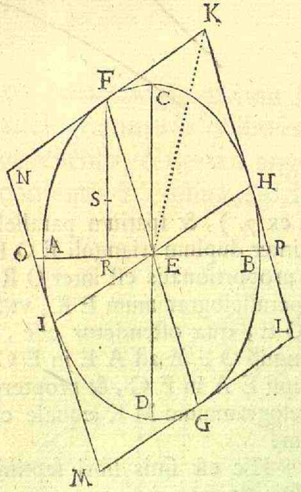
* Hic est finis libri septimi Apollonij, quemadmodum illum disposui, & puto me præuenisse in hoc quoscunque alios, illumquè reposui in Bibliotheca Domini Nostri Regis Gloriosissimi, Beneficentissimi, Victoriosi; Deus vmbram illius conseruet super omnes famulos eius, & greges, & ad finem perducat omnia illius desideria, & cogitationes, & labor famuli eius sit iuxta eius beneplacitum; & Laus Deo Domino sæculorum, & orationes eius sint super Maumethum, eiusque sequaces. Explicit anno DXIII. scribente Mahamudo filio Masudi Medici Sciraz eni decima die di Alkade Anno DCCCXXV.

** In sequentibus Paraphrastes Arabicus impiè, & Maumedanorum more loquitur.*

Notæ in Proposit. XXXI. & XXXII.

PLanum axium coniugatarum in ellipsi, &c. *Idest in sectionibus coniugatis, & in ellipsi rectangulum sub axibus coniugatis contentum æquale est parallelogrammo sub diametris coniugatis in angulo æquali, ei qui ad centrum à diametris continetur. In textu arabico reperitur numerus 9. in illa propositione, quæ ellipsim considerat, sed mendose, vt arbitror debet potius censeri proposit. 32.* a

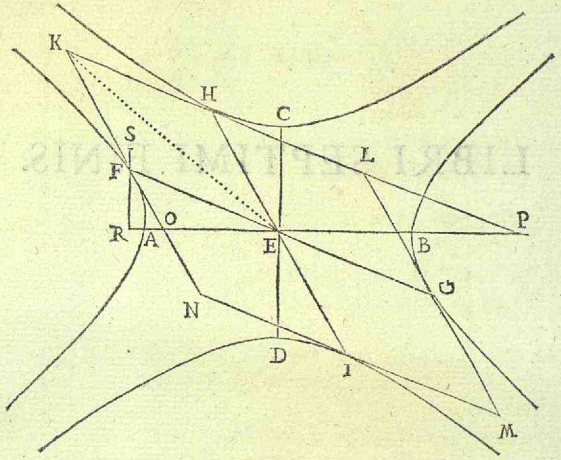
Et quia quadratum A E ad quadratum E C est, vt O R in R E, nempe quadratum S R ad quadratum F R, &c. *Quoniam axis rectus D C medius proportionalis est inter axim transuersum A B, eiusque latus rectum, quadratum A B ad quadratum D C, vel eorundem quadrantes, scilicet quadratum semiaxis A E ad quadratum semiaxis E C eandem proportionem habebit, quàm axis transuersus A B ad eius latus rectum, sed* b



Prop. 37. lib. 1. *rectangulum E R O ad quadratum F R eandem proportionem habet, quàm axis transuersus A B ad eius latus rectum, atque quadratum S R æquale est rectangulo E R O (eo quod S R facta fuit media proportionalis inter E R, & R O) erit quadratum S R ad quadratum F R, vt latus transuersum A B ad eius latus rectum: quare quadratum A E ad quadratum E C eandem proportionem habebit, quàm quadratum S R ad quadratum F R: & A E ad E C eandem proportionem habebit, quàm S R ad F R: & sumptis altitudinibus A E,*
Ibidem. *& O E erit quadratum A E, seu ei æquale rectangulum R E O ad rectangulum A E C, vt rectangulum sub S R, & sub O E ad rectangulum sub F R, & sub O E, & permutando rectangulum R E O ad rectangulum sub S R, & sub O E, seu vt R E ad S R eandem proportionem habebit, quàm rectangulum A E C ad rectangulum sub F R, & sub O E: & inuertendo rectangulum sub F R, & sub O E ad rectangulum A E C eandem proportionem habet quàm S R ad R E.*

Et

c Et quadratum F O ad quadratum E H, nempe triangulum E F O ad triangulum E H P, &c. *Quia G F, I H sunt diametri coniugatæ, quibus æquidistant contingentes F O, & L H erunt triangula E O F, & E H P similia, quorum latera homologa O F, & E H; & ideo triangulum E O F ad*



triangulum E H P eandem proportionem habebit, quàm quadratum O F ad quadratum E H: estque O R ad R E, vt quadratum O F ad quadratum E H, igitur triangulum E O F ad triangulum E H P eandem proportionem habebit, quàm O R ad R E. Ducatur postea recta linea E K, erit triangulum E F K medium proportionale inter duo similia triangula E O F, & E H P (eo quod triangulum E O F ad triangulum E F K æquè altum eandem proportionem habet quàm O F ad F K, seu ad latus E H ei homologum) posita autem fuit S R media proportionalis inter O R, & R E; ergo triangulum E O F ad triangulum E F K est vt S R ad R E: estquè parallelogrammum E K æquale duplo trianguli E F K; ergo duplum trianguli E O F ad parallelogrammum E K eandem proportionem habet, quàm S R ad R E; Et quia rectangulum sub O E, & sub perpendiculari R F æquale est duplo trianguli E O F (cum habeant basim O E communem, & eandem altitudinem perpendicularis R F); igitur rectangulum sub O E, & sub R F ad parallelogrammum E K eandem proportionem habebit, quàm S R ad R E: sed prius rectangulum sub O E, & sub R F ad rectangulum A E C eandem proportionem babebat, quàm S R ad R E: ergo idem rectangulum sub O E, & sub R F ad parallelogrammum E K eandem proportionem habet, quàm ad rectangulum A E C; & propterea parallelogram- Prop. 4. huius.

mum

mum E K æquale eſt rectangulo A E C; & eorum quadrupla erunt æqualia, ſcilicet parallelogrammum M K æquale erit rectangulo ſub B A, & ſub D C comprahenſo. Quod erat propoſitum.

LIBRI SEPTIMI FINIS.

ARCHIMEDIS
LIBER ASSVMPTORVM
INTERPRETE
THEBIT BEN-KORA
EXPONENTE ALMOCHTASSO

Ex Codice Arabico manuſcripto
SERENISS. MAGNI DVCIS ETRVRIÆ,

ABRAHAMVS ECCHELLENSIS
Latinè vertit.

IO: ALFONSVS BORELLVS
Notis Illuſtrauit.

IO: ALFONSI BORELLI

Præfatio ad Lectorem.

SI pulchrum illud Epicharmi effatum tenes (amice Lector) neruos , atque artus esse sapientiæ non temerè , ac imprudenter credere , non adeò facilis esse debes , vt Archimedis nomen lemmata hæc pretiosiora efficiens tibi imposturam , aut fucum facere patiaris , atque alterius contemptissimi auctoris opusculum immeritò tanto viro tribuas ; & siquidem maiores nostri æquum iudicium dixere , vt sine inuidia culpa plectatur , non ita morosus , ac difficilis esse debes , vt sua ei denegare velis leui quacumque suspicione , quæ facilè excuti possit ; verum ab omni prætudicio liberum te cupio , & memorem illius adagij : Ne quid nimis . Tibi igitur sic affecto notionem huius controuersiæ omnino relinquo , quod vt liberè , & ritè exequi valeas , sedato animo nullum meum iudicium interponens , afferam primò rationes , quibus persuaderi quis posset hoc opusculum iniuriâ Archimedi tributum fuisse , & mox coniecturas recensebo , quæ eiusdem Archimedis idipsum opus esse fortè non inaniter probant ; sicque pensitatis , & compositis vtrinque rationum ponderibus sententiam liberè pronuncies tuam per me licet .

Et primò animaduersione dignum est in Collect. Mathemat. Pappi Alexand. frequentissimè commemorari ea , quæ Archimedes conscripsit , præcipuè lib. 5. & lib. 8. De Spiralibus , de Solidis Polyedris , de Circuli Mensura , de Sphæra , & Cylindro , & multoties citantur , & transcribuntur Archimedeæ propositiones , neque vspiam huius Opusculi

(apud Arabes hactenus latentis) mentio vlla fit. Neque Ptol. in Magnæ Constr. lib. 2. tribuit Archimedi prop. 5. cap. 9. ibi relatam, cum tamen soleat esse adeò gratus, vt lib. 6. cap. 7. propositionem ab Archimede sumpsisse fateatur. Neque ipsemet Archimedes huius Opusculi vnquam meminit, qui alioquì valdè prolixè enumerat, & recenset ea, quæ in proprijs libris continentur, & demonstrantur. Inexcusabiles insuper errores, atque allucinationes, quæ in huiusmodi propositionibus reperiuntur, immò puerilia alia Opuscula, quæ citantur vt Archimedis, satis apertè videntur ostendere nunquam diuinum illud ingenium huiusmodi minutias somniasse; cum, vt Carpus Antiochensis ait, referente Pappo, quæ præcipua sunt in Geometria, breuiter quidem, sed diligenter conscripserit Archimedes. Tandem præcipuæ propositiones huius Opusculi similes sunt eis, quæ recensentur quidem, & demonstrantur lib. 4. Collect. Mathem. Pappi Alex., easque Archimedis esse non asserit; immò in quibusdam libris antiquis circumferri affirmat.

Quod verò dictæ rationes tanti roboris, ac efficaciæ non sint, vt penitus euincant huiusmodi Opusculum ab aliquo alio tributum Archimedi fuisse, ex modo dicendis patebit. Et primo optimè norunt, qui in Pappi libris euoluendis vllam operam impenderunt lib. 7. Collect. recensere eum prolixè, & accuratè quamplurima opera Apollonij Pergæi, quorum pars maxima non extat, & enumerare propositiones, & lemmata vsque ad figuras, & tamen qui huiusmodi minutias curat, & adnotat, idem integra opera eiusdem Apollonij non commemorat. Sufficiant hæc insignia specimina. De admirandis astronomicis demonstrationibus à Ptolemæo summoperè laudatis lib. 12. cap. 1. Magnæ Constr., ne verbum quidem. De libro Comparationis Dodecaedri, & Icosaedri ab Ypsicle memorato, altum silentium. Si igitur idem Pappus opera Archimedis non ex professo, sed obiter, & sparsim commemorat, mirum nòn est tacuisse aliqua eius opera, vt sunt hæc lemmata.

Secundò Ptolemæus non affirmat lib. 2. prop. 5. proprio marte à se inuentam fuisse, nec eam Archimedi, aut alicui alij tribuit, quare fieri potuit, vt eam ex libro antiquo desumpserit, à quo nomen Archimedis casu expunctum fuisset, vt postea ostendetur.

Tertiò Archimedes quoque in suis libris existentibus Græcè, & Arabicè non recenset omnia opera à se conscripta, & edita, nam liber de
In proh. lib. 8. insidentibus humido, & de Polyedris recensentur quidem à Pappo, non
Lib. 5. pr. 17. autem ab Archimede. Liber Mechanicus de Sphæropæia nominatur à Carpo

Antiochense apud Pappum. Liber de Figuris Isoperimetris asseruatur apud Arabes tantum; non igitur adulterina huiusmodi lemmata erunt, propterea quod Archimedes ea non nominat in paucis libris residuis, & fortè commemorata fuerunt in aliquibus alijs ex multis operibus eius iniuria temporum deperditis. In proh. lib. 8.

Quartò sane negari non possunt euidentissimi errores in hisce demonstrationibus, qui certè lemmatum auctori tribuendi non sunt, vt suis in locis adnotabo; explanatorum enim imperitia sæpenumero propositiones vniuersaliter pronunciatæ violenter in sensu particulari, & deformi exponuntur. Neque mirum est opera antiquorum magni nominis passim, & multis modis deformata fuisse transcriptorum incuria opponendo notas marginales, detrahendo, & superaddendo textui alienas sententias, ac testimonia, & hoc præcipuè in codicibus Arabicis frequentissimè obseruauit Excell. Abrahamus Ecchellensis. Sed nihilominus in tanta transformatione à vetustate, & ignorantia amanuensium profecta vestigium aliquod subobscurum admirandi, & perspicui Archimedis ingenij dignoscitur.

Tandem non inani coniectura ex Pappi, & Eutocij testimonijs probari potest idipsum, quod Arabes ratum habent, scilicet Archimedem huius libelli auctorem fuisse. Et primo aio præter reliqua opera iam nota edidisse Archimedem librum Lemmatum, quod quidem deducitur ex Eutocio in Comment. prop. 4. lib. 2. de Sphæra, & Cylindro, vbi ait: Id, quod promiserat se demonstraturum, (*scilicet Archimedes*) in nullis exemplaribus reperire est, quare etiam Dionysodorum deprehendimus nunquam in ea incidisse, adeoque cum non potuerit relictum (*ab Archimede*) lemma attingere diuersam viam suscepit vniuersi problematis, quam deinceps describemus. Diocles porrò idipsum in libro à se de Pyrijs inscripto, promissum fuisse ab Archimede nunquam præstitum opinatus, supplere contendit, cuius conatum mox apponemus, quod & ipsum pariter à superius propositis discedit; itidem enim ac Dionysodorus alia demonstrandi ratione problema struit. IN QVODAM AVTEM VETERI LIBRO (neque enim diuturnæ pepercimus diligentiæ) suprascripta incidimus theoremata haud exiguam tamen habentia obscuritatem præ erratis, multiformiterque mendosa in figurationibus. Eamdem equidem veritatem, quam inquirebamus, atque in parte domesticam Archimedi linguâ Doricam seruabant, visitavſitatiſque pridem rerum nominibus conſcripta erant, quæ nunc parabola, recti coniſectione, quæ hyperbole, obtuſi anguli ſectione vocata; vt ex his ſuſpicari liceat EADEM IPSA FORTEAN ESSE, QVÆ IN FINE SCRIBENDA PROMITTEBANTVR; quare attentius incumbentes, (cum ipſam hypotheſim, qualiter perſcripta fuerat, præ mendarum copia (vt diximus) ſatis incommodam, & abſtruſam reperiremus,) ſenſum inde paucis elijcientes communi, & plana dictione (vt fieri potuit) deſcribimus. Vniuerſaliter autem primum theorema deſcribetur, vt definitis manifeſtetur, deinde reſolutis in problemate accomodabitur. *Inferius*

Præmiſſis autem problematis, quæ hìc apponuntur, ſcilicet duplam eſſe ipſam D B ipſius B F, &c. (*Nota quod hic loquitur de lemmatibus adiunctis,*) *&* *paulò poſt*; animaduertendum eſt autem, & hæc quæ ab Archimede dicta ſunt conſonare ijs, quæ nos reſoluimus (*ſcilicet iſdem adductis lemmatibus*). *Deinde* cum dixerit, quod ſuperius dictum vniuerſaliter habet determinationem, adiectis autem problematibus ab eo inuentis, hoc eſt ipſam D B duplam eſſe ipſius B F, & ipſam B F maiorem ipſa F H, &c. *Hìc manifeſtè Eutocius declarat propoſita lemmata in antiquo codice inuenta Archimedis fuiſſe.*

Hæc igitur conſentanea verbis Archimedis, qua fieri potuit, dilucidè expoſuimus.

Conſtat ergò ex Eutocij ſententia librum antiquum ab eo repertum, & recognitum, eſſe opus Archimedis, licet titulo Auctoris caruerit, & mendoſiſſimum eſſet, atque ignotum Dionyſodoro, Diocli, & plerìſque Græcorum diù iacuiſſet; etenim ex ſtylo, ex ſubiecto promiſſo, ex lingua Dorica, & ex vocibus vetuſtis Archimedi familiaribus concluſit lemmata prædicta Archimedis fuiſſe. Sed adhuc difficultas hæret, nam licet concedamus ſcripſiſſe Archimedẽ, & edidiſſe librum lemmatum ab Eutocio memoratum, diuerſus omnino erit ab eo, quem Thebitius Arabicè tranſtulit, nam in iſto non reperitur lemma illud, quod promiſerat Archimedes ſe demonſtraturum.

Hæc difficultas duplici coniectura ſi non frangi, ac reſolui ſaltem debilitari poteſt; liber enim antiquus lemmatum Archimedis ne dum titulo carebat ſuo, ſed erat valdè corruptus, deficiens, & mendoſus; quarè non ſine diuturno, ac pertinaci labore ſenſus illius lemmatis elicere potuit Eutocius, vnde fieri potuit vt Græcus codex ad Arabes tranſmiſſus deterior, & magis mutilus adhuc fuerit eo exemplari, in quod incidit Eutocius, vel potius incuria, aut vitio librariorum Arabum, & amanuenſium eiuſdem codicis quamplurima lemmata perierunt, inter quæ aſſumptum in prop. 4. lib. 2. de Sphæra, & Cylindro excidit. E contrà aliquæ propoſitiones ſimiles eis, quæ leguntur in hoc Arabico codice de Arbelo extant apud Pappum lib. 4. Collect. prop. 14. 15. & 16., quas ait circumferri in quibuſdam libris antiquis, ſcilicet in libro Græco incerti Auctoris propoſitiones lemmaticas continente; at teſtimonio Thebitij magni nominis viri, & omnium Arabum, liber ex Græco translatus continens ferè eadem lemmata, quæ recenſentur à Pappo, tribuitur Archimedi, ſicuti prius Eutocius multiplici coniectura libri antiqui lemmatum à ſe reperti Archimedem auctorem fecit; quare ergo nos eiſdem coniecturis perſuaſi eidem Achimedi tribuere dubitabimus Opuſculum hoc ab Arabibus aſſeruatum, in quo ſi mendarum copiam ſpectes, ſimile omnino erit ei, quod Eutocius nactus eſt? Hæ ſunt rationes, mi lector, quas tibi examinandas relinquo in hoc perplexo negotio nulla diſsimulata difficultate.

Interim ſcito hoc manuſcriptum Arabicè elegantiſsimè exaratum in Bibliotheca Sereniſsimi Magni Etruriæ Ducis diù aſſeruatum fuiſse; eius tamen editionis ſpe facta tandem anno 1658. *Sereniſsimus Ferdinandus Secundus Magnus Etruriæ Dux Romæ aſportandum humaniſsimè mihi credidit, vt rei litterariæ bono latinè traduceretur, præſtitumque fuit opera, & ſtudio celeberrimi, & peritiſsimi Orientalium linguarum profeßoris Abrahami Ecchellenſis, ipſoque dictante religioſiſsimè, & accuratè ipſe calamo excepi, in eoque paucula quædam in notis animaduertenda cenſui tum in contextu plurimis mendis corrupto, tum in ſcholijs Arabicis Almochtaſſo non admodum in Geometria verſati. Addidi in fine huius libri duas alias Archimedis propoſitiones ab Eutocio repertas quarum altera fortaſſe illa eadem eſt quæ hìc deficit, nam Almochtaſſo in proemio ait, propoſitiones huius Opuſculi ſexdecim eſſe, cum tamen poſtrema ſit decimaquinta. Et licet hæc eadem lemmata anno præterito edita fuerint Londini, non tamen hac noſtra editione fraudandus es, amice lector. Vale.*

IN NOMINE DEI MISERICORDIS MISERATORIS

CVIVS OPEM IMPLORAMVS.

LIBER ASSVMPTORVM ARCHIMEDIS,

INTERPRETE THEBIT BEN-KORA,

Et exponente Doctore

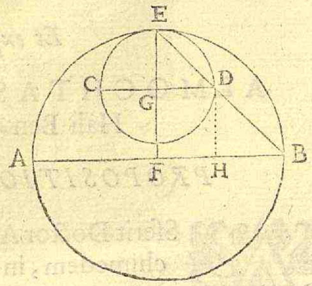
ALMOCHTASSO ABILHASAN,
Halì Ben-Ahmad Nosuensi.

PROPOSITIONES SEXDECIM.

Asserit Doctor Almochtasso hunc librum referri ad Archimedem, in quo sunt propositiones pulcherrimæ paucæ numero, vtilitatis verò maximæ de principijs Geometriæ, optimæ atque elegantissimæ, quas adnumerant professores huius scientiȩ summæ intermediorum, quæ legi oportet inter librum Euclidis, & Almagestum; at verò quædam illius propositionum loca indigent alijs propositionibus, quibus propositiones illæ clariores euadant. Et quidem ipse Archimedes has indicauit propositiones, easque retulit in alijs suis operibus, dum dixit quemadmodum demonstrauimus in propositionibus rectangulorum: item & quemadmodũ demonstrauimus in nostra expositione agentes de triangulis; rursus quemadmodum demonstrauimus in propositionibus quadrilaterum; & retulit in propositione quinta demonstrationem hac de re magis peculiarem. Deinde composuit Abusahal Alkuhi librum, quem inscripsit ordinationem libri Archimedis de assumptis, & tractauit demonstrationem huius propositionis via vniuersaliori, ac meliori, nec non ea, quȩ dependent ex compositione proportionis, quod quidẽ cum id comperi, attexui locis obscurioribus huius libri expositionem, seu marginales postillas, & confirmaui quod ille indicauerat propositionibus, vti iudicaueram, & retuli ex propositionibus Abisahal duas propositiones, quibus opus est ad propositionem quintã declarandam, reliquas omittens breuitatis gratia, & eo quod non sint necessariȩ.

PROPOSITIO I.

SI mutuo ſe tangant duo circuli, vt duo circuli A E B, C E D in E, fuerintque eorum diametri parallelæ, vt ſunt duæ diametri A B, C D, & iungantur duo puncta B, D, & contactus E [lineis] D E, B D, erit linea B E recta.



Sint duo centra G, F, & iungamus G F, & producamus ad E, & educamus D H parallelam ipſi G F. Et quia H F æqualis eſt ipſi G D, ſuntque G D, E G æquales, ergo ex æqualibus F B, F E remanebunt G F, nempe D H, & H B, quæ erunt æquales, atque duo anguli H D B, H B D æquales. Et quia duo anguli E G D, E F B ſunt recti, atq; duo anguli E G D, D H B ſunt æquales, remanebunt duo anguli G E D, G D E, qui inter ſe, & duobus angulis H D B, H B D æquales erunt; ergo angulus E D G æqualis eſt angulo D B F, & comprehenſus angulus G D B eſt communis, ergo erunt duo anguli G D B, F B D (qui ſunt pares duobus rectis) æquales duobus angulis G D B, G D E: igitur ipſi quoque ſunt æquales duobus rectis, ergo linea E D B eſt recta, & hoc eſt, quod voluimus.

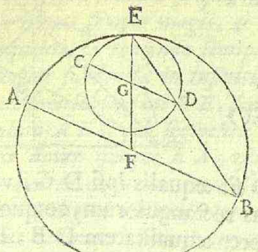
SCHOLIVM ALMOCHTASSO.

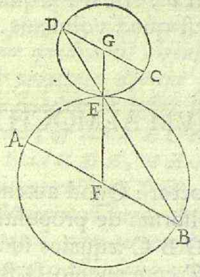
DIcit Doctor; Et quidem dici poteſt cum duo anguli H D B, H B D ſint æquales, & angulus D H B rectus, quod erit angulus B D H ſemirectus, & ſimiliter angulus E D G, & angulus G D H rectus, ergo tres anguli ſunt æquales duobus rectis, igitur linea E D B eſt recta. Idem ſequitur, ſi illi duo circuli ſe mutuo exterius contigerint.

Notæ in Propoſit. I.

HAEc eſt vna earum Propoſitionum, quas Pappus in quodam libro antiquo reperit, qui, vt deduximus ex Eutocio, ab Archimede conſcriptus diu apud Arabes latuit. Hæc aſſumitur in propoſit. 14. lib. 4. Collect. Pappi, eamque ſupplet Commandinus, ſed extat expreſſe lib. 7. propoſit. 110. eiuſdem Pappi, eſtque demonſtratio vniuerſaliſſima comprehendens caſum neglectum in hac demonſtratione, ſcilicet quando duo circuli ſeſe exterius contingunt, &

licet non laboret vitio Arabici textus, non tamen illa omnino ſincera eſt: conueniunt tamen in vniuerſalitate propoſitionis, quàm valde peruersè ſcholiaſtes Arabicus expoſuit; allucinatur enim quando ait, & quia duo anguli E G

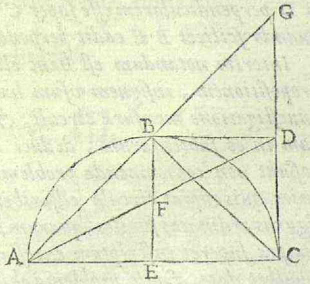




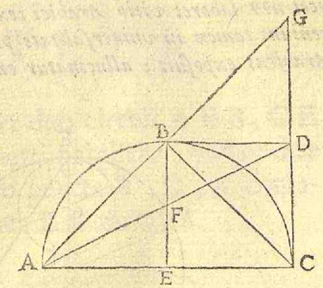
D, & E F B ſunt recti, &c. *Nam inferius citatur, & vſurpatur hæc prima propoſitio vniuerſaliſſimè, ſcilicet exiſtentibus angulis G, & F acutis, vel obtuſis, & ſic reuera ſonant verba propoſitionis, vbi ait,* quorum diametri A B, C D ſunt parallelæ, *& ſic pariter habetur in prædicta propoſitione Pappi; quare textus omnino corrigi debuit, vt pronuncientur anguli E G D, & E F B* æquales, *non recti. Neſcio tamen quomodo expoſitio Almochtaſſi excuſari poſſit, qui ſupponit diametros A B, & C D perpendiculares ad rectam lineam F G E, quod quidem in vnico caſu verificatur, vt dictum eſt. Peccat poſtea demonſtratio Pappi lib. 7. pr. 110., vbi conatur oſtendere duo centra, & punctum contactus circulorum eſſe in vnica recta linea; quod quidem in 3. Element. Eucl. oſtenſum ſupponi debuerat.*

PROPOSITIO II.

SIt C B A ſemicirculus, quem D C, D B tangant, & B E perpendicularis ſuper A C, & iungamus A D, erit B F æqualis ipſi F E.



Demonſtratio. Iungamus A B, eamque producamus in directum, & educamus C D, quouſque illi occurrat in G, & iungamus C B. Et quia angulus C B A eſt in ſemicirculo, erit rectus, remanet C B G rectus, & D B E C eſt parallelogrammum rectangulum, ergo in triangulo G B C rectangulo educitur perpendicularis B D ex B erecta ſuper baſim, & B D, D C erunt æquales, eo quod tangunt circulum, ergo C D eſt etiam æqualis ipſi D G, quemadmodum oſtendimus in propoſitionibus, quas confecimus de rectangulis. Et quia in triangulo G A C linea B E educta est parallela basi, & iam educta est ex D semipartitione basis linea D A secans parallelam in F, erit B F æqualis ipsi F E, & hoc est quod volumus.



SCHOLIVM ALMOCHTASSO.

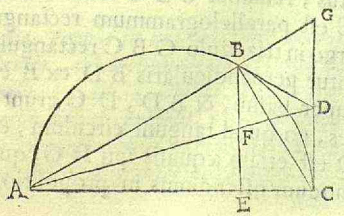
Dicit Doctor: Quod autem C D sit æqualis ipsi D G, vti remittit ad suum librum de propositionibus rectangulorum, eo quod duo anguli D C B, D B C æquales sunt propter æqualitatem D B, D C, & angulus D B C cum augulo D B G est rectus, & similiter angulus D C B cum angulo C G B: necesse est, vt sint duo anguli D G B, D B G æquales etiam, ergo duo latera D B, D G sunt æqualia.

Rursus si dicatur quod proportio C D ad D B sit vt proportio D B ad D G, & D C æqualis ipsi D B, ergo D B æqualis est D G, esset parabola. Dicit, quod vero B F sit æqualis F E, hoc constat ex eo quod casus A D super duas lineas B E, G C parallelas in triangulo A G C, exigit eorum sectio in eadem proportione, & id quidem, quia A D ad A F eandem proportionem habet, quam G D ad B F, & quam D C ad E F, ergo G D ad B F est vt D C ad E F, & permutando G D ad ei æqualem D C, est vt B F ad E F, & propterea ipsæ etiam sunt æquales.

Notæ in Propos. II.

Hvius secundæ propositionis expositio, & demonstratio insigniter deformata est; in propositione enim supponuntur duæ rectæ D C, D B tangere circulum tantummodo, non autem constituere angulum rectum, & solummodo recta linea B E perpendicularis ducitur ad diametrum A C, quare male in demonstratione pronunciatur quadrilaterum B D C E parallelogrammum rectangulum, cum ferè semper sit Trapetium: pariterque errat, quando ait rectam B D perpendicularem esse super C G, quæ nunquam vera sunt, nisi in vnico casu, quando scilicet B E cadit perpendiculariter super centrum circuli.

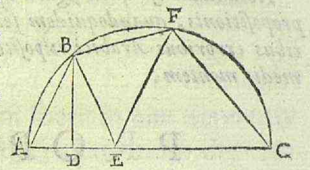
Interim notandum est hanc elegantem propositionem, insignem vsum habere pro inuestigatione mensuræ circuli, & rectarum in eo subtensarum; deduci namque possunt non contemnenda problemata; Si enim quis cupiat circulo adscribere duas figuras ordinatas similes, quarum circumscripta superet inscriptam excessu minori quolibet dato, facile problema absoluetur, pariter-



pariterque proportio diametri ad circuli peripheriam satis compendiose deduci potest, quandoquidem inter figuram ordinatam eidem circulo inscriptam, cuius semilatus est E B, & circumscriptam duplo laterum numero, cuius duo semilatera sunt C D B, circulus intermediat; & Perimeter circumscriptæ figuræ ad Perimetrum inscriptæ eandem proportionem habet, quam diameter C A ad A E, quæ proportio minui semper magis, ac magis potest in infinitum; & tandem ex 3. propos. sequenti, ex continua semipartitione quadrantis circuli elici possunt subtensæ successiuè subdiuisæ in infinitum, & propterea dabitur proportio diametri A C ad semisubtensam B E, sed datur quadratum ipsius B E, igitur datur rectangulum A E C sub segmentis diametri, & datur E C ex iam dicta 3. propos. igitur datur quoque E A; estque B E ad C D B, vt E A ad diametrũ A C, igitur quarta quantitas innotescet, scilicet recta C D B, quæ æqualia sunt vni lateri Poligoni circumscripti duplo laterum numero, & ideo habebitur mensura totius Perimetri tum Poligoni inscripti, cum circumscripti, quare mensura ipsius peripheriæ circuli, quæ intermedia est, facili negotio inuestigabitur.

PROPOSITIO III.

Sit C A segmentum circuli, & B punctum super illud vbicumque, & B D perpendicularis super A C, & segmentum D E æquale D A, & arcus B F æqualis arcui B A, vtique iuncta C F erit æqualis ipsi C E.

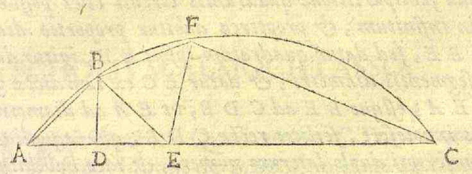


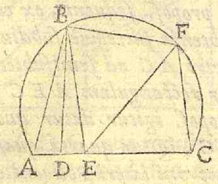
Demonstratio. Iungamus lineas A B, B F, F E, E B; & quia arcus B A æqualis est arcui B F, erit A B æqualis B F, & quia A D æqualis est E D, & duo anguli D sunt recti, & D B communis, ergo A B æqualis est B E, & propterea B F, B E sunt æquales; & duo anguli B F E, B E F sunt æquales. Et quia quadrilaterum C F B A est in circulo, erit angulus C F B cum angulo C A B ipsi opposito, immo cum angulo B E A, æqualis duobus rectis; sed angulus C E B cum angulo B E A, æquales sunt duobus rectis, ergo duo anguli C F B, C E B sunt æquales, & remanent C F E, C E F æquales; ergo C E æqualis est C F, & hoc est quod volumus.

Notæ in Proposit. III.

HAEc est propos. 5. cap. 9. lib. 1. Almag. Ptol., sed hic vniuersalius pronunciatur; Ptolomeus enim supponit segmentum A B C semicirculum esse, & ex cognita circumferentia A F, & corda F C, & illius medietate A B, quærit chordam A B; est enim rectangulum sub C A D æquale quadrato ipsius

ipsius A B, estque nota A D medietas differentiæ inter diametrum A C, & chordam differentiæ F C; at propositio Archimedea verificatur in quolibet circuli segmento siue maiori, siue minori; ex datis enim circumferentijs A C, A B,



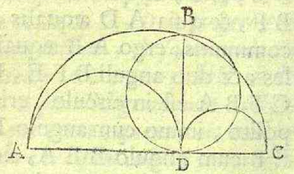


A F, & F C vna cum cordis A C, & F C, haberi quidem potest chorda A B paulo difficilius, si nimirum ex chorda A C tollatur chorda F C, & differentia A E bifariam secetur in D, & ex arcu cognito B C datur angulus A, atque angulus D rectus est, ergo triangulum A B D specie notum erit, & propterea proportio D A ad A B cognita erit, estque D A longitudine data, igitur A B longitudine innotescet.

Notandum est quod figura apposita in hac propos. non exprimit omnes casus propositionis, quandoquidem semicirculus est A B C, & propterea ex præcedentibus erroribus Arabici expositoris suspicari licet non ritè eum percepisse Archimedis mentem.

PROPOSITIO IV.

A B C semicirculus, & fiant super A C diametrum duo semicirculi, quorum vnus A D, alter vero D C, & D B perpendicularis, vtique figura proueniens, quam vocat Archimedes ARBELON, est superficies comprehensa ab arcu semicirculi maioris, & duabus circumferentijs semicirculorum minorum, est æqualis circulo, cuius diameter est perpendicularis D B.



Demonstratio. Quia linea D B media proportionalis est inter duas lineas D A, D C, erit planum A D in D C æquale quadrato D B, & ponamus A D in D C cum duobus quadratis A D, D C communiter, fiet planum A D in D C bis cum duobus quadratis A D, D C, nempe quadratum A C, æquale duplo quadrati D B cum duobus quadratis A D, D C, & proportio circulorum eadem est, ac proportio quadratorum, ergo

ergo circulus, cuius diameter est A C, æqualis est duplo circuli, cuius diameter est D B cum duobus circulis, quorum diametri sunt A D, D C, & semicirculus A C æqualis est circulo, cuius diameter est D B cum duobus semicirculis A D, D C; & auferamus duos semicirculos A D, D C communiter, remanet figura, quàm continent semicirculi A C, A D, D C, & est figura, quàm vocauit Archimedes Arbelos æqualis circulo, cuius diameter est D B, & hoc est quod volumus.

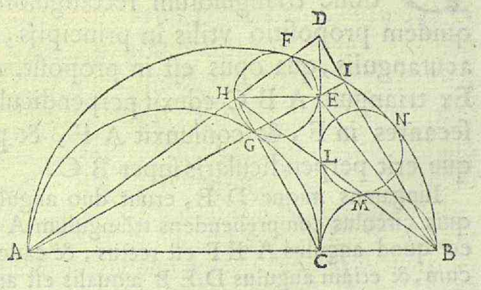
Notæ in Proposit. IV.

HAEc forsan est vna earum propositionum, quas Pappus legit in libro antiquo de mensura ARBELI, seu spatij à tribus semicircumferentijs circulorum comprehensi, vt ait Proclus, quæ quidem elegantissima est, eiusque inuentionis Lunulæ Hyppocratis Chij originem extitisse puto; est enim Hyppocratis Lunula superficies plana à quadrante peripheriæ circuli maioris, & semisse peripheriæ circuli subdupli comprehensa: Arbelus vero recentiorum est spatium à triente, & à duobus sextantibus circumferentiarum trium circulorum æqualium comprehensum, & hisce duobus spatijs facilè quadrata æqualia reperiri possunt; at Arbeli Archimedis, & Procli hucusque reperta non est quadratura; sed potest quidem assignari circulus prædicto spatio æqualis.

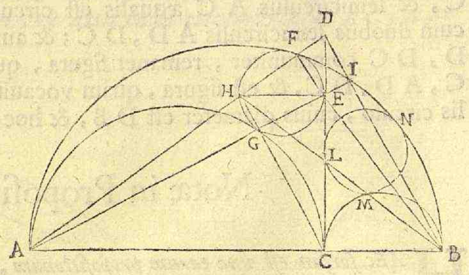
PROPOSITIO V.

SI fuerit semicirculus A B, & signatum fuerit in eius diametro punctum C vbicumque, & fiant super diametrum duo semicirculi A C, C B, & educatur ex C perpendicularis C D super A B, & describantur ad vtrasque partes duo circuli tangentes illam, & tangentes semicirculos, vtique illi duo circuli sunt æquales.

Demonstratio. Sit alter circulorum tangens D C in E, & semicirculum A B in F, & semicirculum A C in G, & educamus diametrū H E, erit parallela diametro A B, eo quod duo anguli H E C, A C E, sunt recti, & iungamus F H, H A, ergo linea A F est recta, vti dictum est in propositione 1. & occurrent A F, C E in D, eo quod egrediuntur ab angulis A, C



A, C minoribus duobus rectis, & iungamus etiam F E, E B, ergo E F B est etiam recta, vti diximus, & est perpendicularis super A D, eo quod angulus A F B est rectus, quia cadit in semicirculum A B, & iungamus H G, G C, erit H C etiam recta; & iungamus E G, G A, erit E A recta, & producamus eam ad I, & iungamus B I, quæ sit etiam perpendicularis super A I, & iungamus D I; & quia A D, A B sunt duæ rectæ, & educta ex D ad lineam A B perpendicularis D C, & ex B ad D A perpendicularis B F; quæ se mutuo secant in E, & educta A E ad I est perpendicularis super B I, erunt B I D rectæ, quemadmodum ostendimus in Propositionibus, quas confecimus in expositione tractatus de triangulis rectangulis: & quia duo anguli A G C, A I B sunt recti, vtique B D, C G sunt parallelæ, & proportio A D ad D H, quæ est vt A C ad H E, est vt proportio A B ad B C, ergo rectangulum A C in C B æquale est rectangulo A B in H E; & similiter demonstratur in circulo L M N, quod rectangulum A C in C B æquale sit rectangulo A B in suam diametrum, & demonstratur inde etiam, quod duæ diametri circulorum E F G, L M N, sint æquales, ergo illi duo circuli sunt æquales. Et hoc est quod volumus.

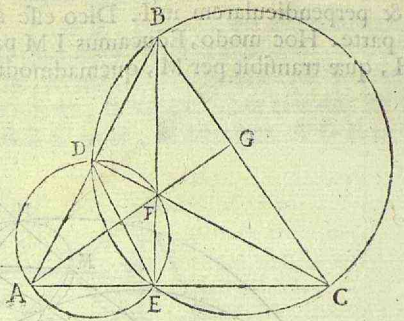


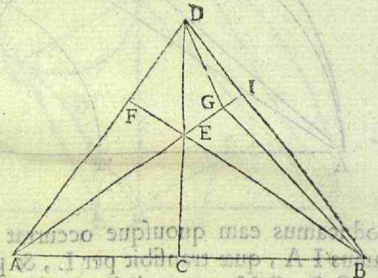
SCHOLIVM ALMOCHTASSO.

Dicit Doctor. Clarum quidem est quod citauit ex expositione triangulorum rectangulorum in præfatione; & est quidem propositio vtilis in principijs, ac præsertim in triangulis acutangulis, qua opus est in proposit. 6. huius libri, & est hæc. Ex triangulo A B C eduxit perpendiculares B E, C D se mutuo secantes in F, & coniunxit A F, & produxit ad G, hæc vtique erit perpendicularis super B C.

Iungamus itaque D E, erunt duo anguli D A F, D E F æquales, quia circulus comprehendens triangulum A D F transit per punctum E, eo quod angulus A E F est rectus, & cadent in illo super eundem arcum, & etiam angulus D E B æqualis est angulo D C B, quia circulus continens triangulum B D C transit etiam per punctum E, ergo in duobus triangulis A B G, C B D sunt duo anguli B A G, B C D æquales; & an-

gulus B est communis, ergo A G B æqualis est angulo C D B recto, ergo A G est perpendicularis super B C. Hoc præmisso repetamus ex proposit. quam attulit Archimedes D A, A B, & perpendiculares D C, A I, B F, B I, & lineam D I. iam si B I D non fuerit linea recta, iungamus B G D rectam, erit angulus A G B rectus ex præmissa propositione, & erat angulus A I B rectus, ergo internus in triangulo B I G æqualis est opposito externo, & hoc est absurdum, igitur linea B I D est recta. Deinde attulit duas propositiones ex interpretatione Alkauhi, quarum prima est hæc.

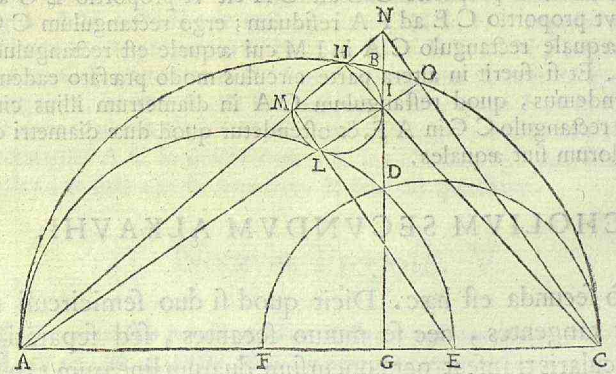




SCHOLIVM PRIMVM ALKAVHI.

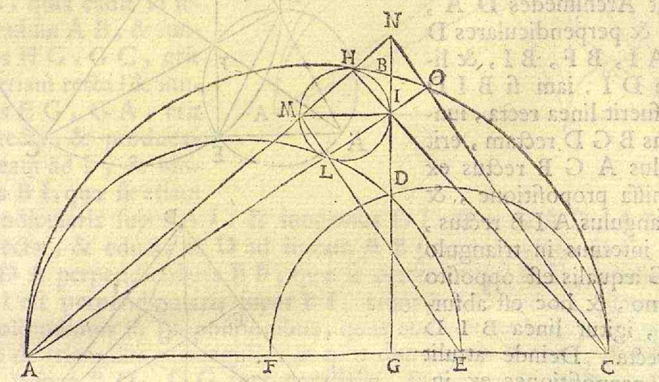
SI non fuerint duo semicirculi tangentes, sed mutuo se secantes, & perpendicularis fuerit in loco mutuæ sectionis, idem sequitur.

Sint itaque semicirculi A B C, A D E, F D C, & duo illi semicirculi se mutuo secantes in D, & B G perpendicularis super A C insistat,



& cir-

& circulus I H L tangat circulum A B C in H, & circulum A D E in L, & perpendicularem in I. Dico eſſe æqualem circulo, qui eſt in altera parte. Hoc modo, Educamus I M parallelam ipſi A C, & iungamus A H, quæ tranſibit per M, quemadmodum demonſtrauit Archimedes, Prop. 1. huius.



& producamus eam quouſque occurrat perpendiculari N G in N, & iungamus I A, quæ tranſibit per L, & producamus illam ad O, & iungamus C O, O N, quæ erit linea recta, & iungamus M E, quæ tranſibit per L, & iungamus C H, quæ tranſibit per I; & linea C O N parallela eſt lineæ E M, & proportio A N ad N M, nempe proportio A G ad I M eſt vt C A ad C E, ergo rectangulum A G in C E æquale eſt rectangulo C A in I M; & quia G D eſt perpendicularis in duobus circulis C D F, E D A ſuper duas diametros C F, E A, erit rectangulum C G in G F æquale quadrato G D, & rectangulum A G in G E æquale etiam eſt illi, ergo rectangulum C G in G F æquale eſt rectanlo A G in G E, & proportio C G ad G A eſt vt proportio E G ad G F, immo vt proportio C E ad F A reſiduam; ergo rectangulum C G in F A, eſt æquale rectangulo C A in I M cui æquale eſt rectangulum G A in C E. Et ſi fuerit in altera parte circulus modo præfato eadem ratione oſtendemus, quod reſtangulum C A in diametrum illius circuli æquale ſit rectangulo C G in A F, & oſtendetur quod duæ diametri duorum circulorum ſint æquales.

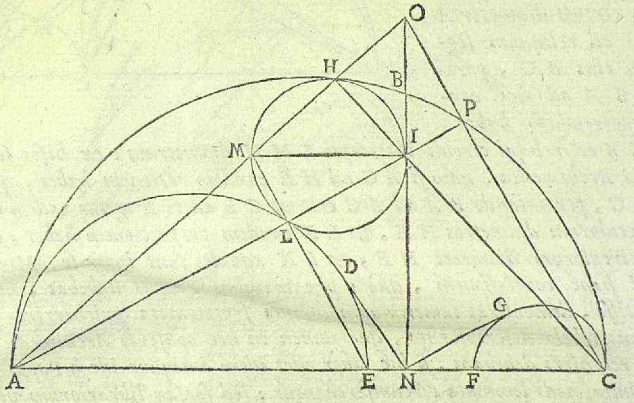
SCHOLIVM SECVNDVM ALKAVHI.

Porrò ſecunda eſt hæc. Dicit quod ſi duo ſemicirculi non ſint tangentes, nec ſe mutuo ſecantes, ſed ſeparati, & perpendicularis tranſeat per concurſum duarum linearum tangen-

tium

tium eos, quæ ſunt æquales idem ſequetur.

Sint itaque ſemicirculi A B C, A D E, F G C, vti diſpoſuimus, & duæ lineæ N G, N D tangentes illos duos ſemicirculos in G, D, & æquales, ſibique occurrentes in N, & linea B N tranſiens per punctum N perpendiculariter erecta ſuper A C, & tangat illam circulus M N I in I, & idem tangat circulum A B C in H, & circulum A D E in L,

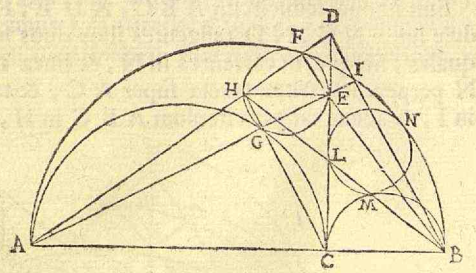


& educamus diametrum I M parallelam ipſi A C, & iungamus C H, quæ tranſibit per I, & iungamus M E tranſibit per L, & iungamus A I Prop. 1. huius. tranſibit per L, & producamus eam ad P, & iungamus C O tranſibit per P, eritque parallela ipſi E M, & erit proportio A O ad O M, nem- Ibidem. pe proportio A N ad M I vt proportio A C ad C E, & rectangulum A Scholium præc. Almoc. N in C E æquale rectangulo A C in I M. Et eodem modo oſtendetur, quod rectangulum C N in F A ſit æquale rectangulo A C in diametrum circuli, qui eſt ex altera parte; & quia rectangulum C N in N F æquale eſt quadrato G N, & eſt æquale quadrato D N, quod eſt æquale rectangulo A N in N E erit rectangulum C N in N F æquale rectangulo A N in N E, & proportio C N ad A N vt E N ad N F, & vt proportio totius C E ad totum A F, ergo rectangulum A N in C E æquale eſt rectangulo C N in F A, & iam oſtenſum eſt, quod A N in C E æquale eſt rectangulo A C in I M, & quod rectangulum C N in F A ſit æquale rectangulo A C in diametrum alterius circuli: ergo duæ diametri ſunt æquales, & duo circuli æquales, & hoc eſt quæſitum.

Notæ in Propoſit. V.

HAEc propoſitio parum quidem differt à poſtrema parte propoſit. 14. 16. *&* 17. *lib.* 4. *Pappi Alex., ſi figuram, conſtructionem, & progreſſum demon-*

demonstrationis species; differunt tamen in conclusione, quæ demonstranda proponitur; ostendit enim Pappus, sicut, & Archimedes, semicircularis diametri segmentum maius A C ad circuli intercepti diametrum H E habere eandem proportionem, quàm maioris circuli diameter A B habet ad reliquum segmentum eius B C, pariterque B A ad A C eandem proportionem habet,



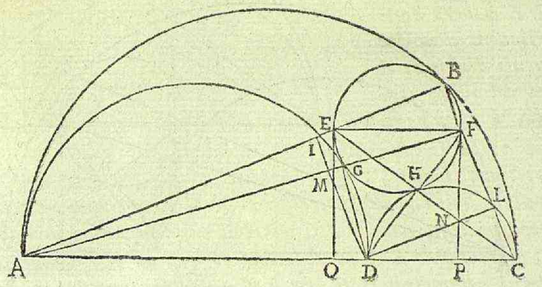
quàm C B ad reliqui circuli intercepti L M N diametrum: ex hisce sequitur conclusio Archimedea, nam si A C ad H E eandem rationem habet, quàm A B ad B C, permutando B A ad A C erit vt C B ad H E igitur eadem C B ad duas circulorum diametros H E, & L N eandem proportionem habet, & propterea circulorum diametri H E, & L N æquales sunt inter se. Mirum tamen est hanc conclusionem, quàm præ manibus Pappus habebat, non animaduertisse, demonstrat tamen quamplurima symptomata pulcherrima circulorum in Arbelo descriptorum, quæ tamen in hoc opusculo Archimedi tributo pariter recenseri debebant, si hic liber esset idem antiquus ille à Pappo visus, in quo huiusmodi lemmata circumferebantur: sed forsan librariorum vitio, & incuria codex corruptissimus ad Arabes transmissus non omnes illas admirandas propositiones, sed vnius tantum particulam continebat, sicut è contra liber ille antiquus, in quo Pappus prædicta lemmata reperit, carebat conclusione in hisce lemmatibus demonstrata. Cæterum propositiones in scholijs additæ manifestæ quidem sunt, sed absque duabus prioribus posset propositum facillimè demonstrari, Reliquæ duæ propositiones superadditæ ad Arabibus faciles quidem sunt.

PROPOSITIO VI.

SI fuerit semicirculus A B C, & in eius diametro sumatur punctum D, & fuerit A D ipsius D C sexqui altera, & describantur super A D, D C duo semicirculi, & ponatur circulus E F inter tres semicirculos tangens eos, & educatur diameter E F in illo parallela diametro A C, reperiri debet proportio diametri A C ad diametrum E F.

Iungamus enim duas lineas A E, E B, & duas lineas C F, F B, erunt C B, A B rectæ, vti dictũ est in prima proposit. Describamus etiam duas lineas F G A, E H C, ostendeturque esse quoque rectas; Similiter duas lineas D E, D F, & iungamus D I, D L, & E M, F N, & producamus eas ad O, P; Et quia in triangulo A E D, A G est perpendi-

pendicularis ad E D, & D I est quoque perpendicularis ad A E, & iam se mutuo secuerunt in M, ergo E M O erit etiam perpendicularis, quemadmodum ostendimus in expositione, quàm confecimus de proprietatibus triangulorum, & cuius demonstratio iam quidem præcessit in superiori propositione;

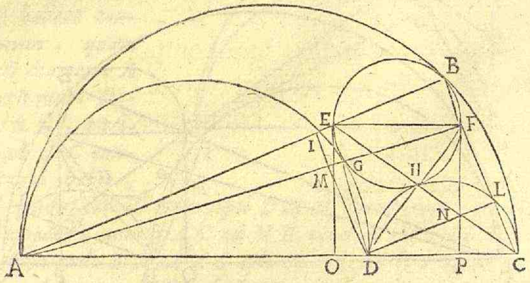


Similiter quoque erit F P perpendicularis super C A, & quia duo anguli, qui sunt apud L, & B sunt recti, erit D L parallela ipsi A B, & pariter D I ipsi C B, igitur proportio A D ad D C est vt proportio A M ad F M, immo vt proportio A O ad O P, & proportio C D ad D A vt proportio C N ad N E, immo vt proportio C P ad P O, & erat A D sexquialtera D C, ergo A O est sexquialtera O P, & O P sexquialtera C P, ergo tres lineæ A O, O P, P C sunt proportionales: & in eadem mensura, in qua est P C quatuor, erit O P sex, & A O nouem, & C A nouendecim, & quia P O æqualis est E F, erit proportio A C ad E F vt nouendecim ad sex, igitur reperimus dictam proportionem. Etiam si fuerit A D ad D C qualiscumque vt sexquitertia, aut sexquiquarta, aut alia, erit iudicium, & ratio, vti dictum est, Et hoc est quod voluimus.

Notæ in Proposit. VI.

HAEc propositio nil prorsus differre videtur à 16. proposit. lib. 4. Pappi Alex. est tamen pars illius, & particulariter demonstrata, quod quidem peccatum alicui expositori tribui debet; nunquam enim Archimedes propositionẽ illam, quam vniuersalissimè demonstrare potuisset, exemplis numericis tam pueriliter ostendisset. Pappus igitur quærit mensuram diametri illius circuli, qui in loco inter tres circunferentias circulares interijcitur, quod Arbelon appellatur, & ostendit quidem diametrum semicirculi maioris A C secari in duobus punctis O, & P à perpendicularibus cadentibus à terminis E, & F diametri circuli in Arbelo inscripti, ac diuidi in tria segmenta A O, O P, P C continue proportionalia in eadem ratione, quàm habet A D ad D C, & insuper

super ostendit perpendicularem E O æqualem esse circuli diametro E F. Itaque in quadrato spatio E O P F, circuli diameter E F, siue O P media proportionalis erit inter A O, & P C. Quam ergo proportionem habent tres continuè proportionales in eadem ratione A D ad D C simul sumptæ ad illarum inter-



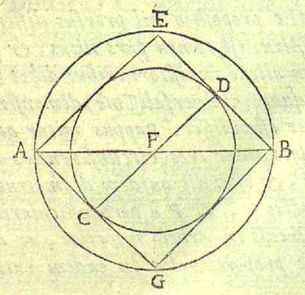
mediam, eandem habebit diameter maioris semicirculi A C ad O P, siue E F. Quæ deinde Pappus demonstrat perpendiculares à centris circulorum in collateralibus spatijs prædicti Arbeli existentium esse multiplices diametrorum eorum circulorum à quibus educuntur secundum seriem naturalem numerorum ab vnitate crescentium, proprietas quidem est admirabilis, de qua in hac propositione Archimedis altum silentium, quod forte temporum iniuriæ tribuendum est.

Possent in hisce duabus propositionibus non pauca problemata superaddi, quomodo nimirum in prædicto spatio à tribus semicirculis comprehenso circuli innumerabiles describi debeant, & alia quamplurima facilia, quæ lectorum sagacitati relinquuntur.

PROPOSITIO VII.

SI circulus circa quadratum descriptus fuerit, & alius intra illum, vtique erit circumscriptus duplus inscripti.

Sit itaque circulus comprehendens quadratum A B, circulus A B, & inscriptus C D, & sit diameter quadrati A B, & est diameter circuli circumscripti, & educamus C D diametrum circuli inscripti parallelam ipsi A E, quæ est ei æqualis. Et quia quadratum A B duplum est quadrati A E, siue D C, & proportio quadratorum ex dia-

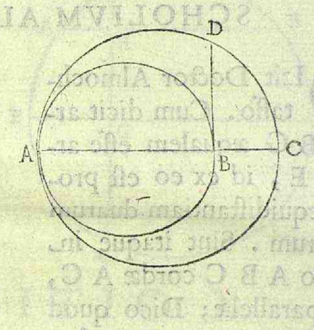


metris

metris circulorum est eadem proportioni circuli ad circulum, igitur circulus A B duplus est circuli C D, & hoc est quod volumus.

SCHOLIVM ALMOCHTASSO.

DIcit Doctor Almochtasso. Iam composui tractatum de conficiendo circulo, cuius proportio ad datum circulum sit vt proportio data. Qua ratione conficiendæ sunt omnes figuræ rectilineæ, & quem vsum habeant in arte illæ figuræ, & afferam hic ex illis vnam propositionem, quæ cõgruit expositioni huius propositionis, & est tanquam epitome illarum propositionum, & illationis ex illis, & est hæc. Volumus conficere circulum, qui sit quinta pars circuli, exempli gratia.



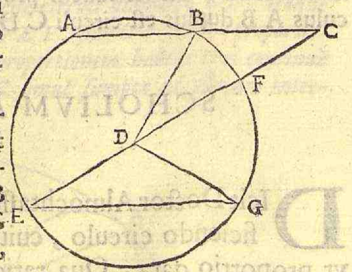
Circulus cuius habemus diametrum est A B, & addamus eius partem quintam, & est B C, & describamus super A C semicirculum A D C, & educamus perpendicularem B D, & quia proportio A B ad B C est, vt proportio quadrati A B ad quadratum B D, erit quilibet circulus factus, vel, figura super B D quæsita à nobis, & hoc, quia proportio circuli, qui est super A B, vel figuræ, quæ est super illam, ad circulum, vel figuram factam super B D facit illam figuram, & similiter positam, erit vt proportio A B ad B C, & hoc est quod volumus.

PROPOSITIO VIII.

SI egrediatur in circulo linea A B vbicumque, & producatur in directum, & ponatur B C æqualis semidiametro circuli & iungatur ex C ad centrum circuli, quod est D, & producatur ad E, erit arcus A E triplus arcus B F.

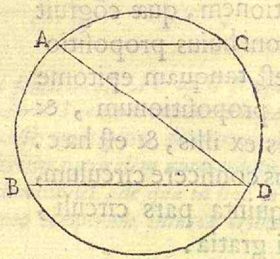
Educa-

Educamus igitur E G parallelam ipsi A B, & iungamus D B, D G: & quia duo anguli D E G, D G E sunt æquales, erit angulus G D C duplus anguli D E G, & quia angulus B D C æqualis est angulo B C D, & angulus C E G æqualis est angulo A C E, erit angulus G D C duplus anguli C D B, & totus angulus B D G triplus anguli B D C, & arcus B G æqualis arcui A E, triplus est arcus B F, & hoc est, quod voluimus.



SCHOLIVM ALMOCHTASSO.

Dicit Doctor Almochtasso. Cum dicit arcum B G æqualem esse arcui A E, id ex eo est propter æquidistantiam duarum cordarum. Sint itaque in circulo A B C cordæ A C, B D parallelæ; Dico quod duo arcus A B, C D sunt æquales,

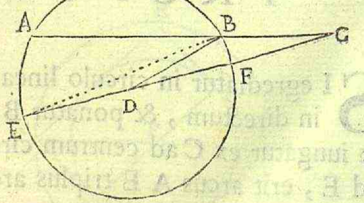


Iungamus A D, ergo duo anguli C A D, A D B sunt æquales; & propterea duo arcus sunt æquales, & conuersum eodem modo demonstratur.

Notæ in Proposit. VIII.

HAEc quidem propositio elegantissima est, quæ si problematicè resolui posset via plana, reperta iam esset tripartitio cuiuslibet anguli.

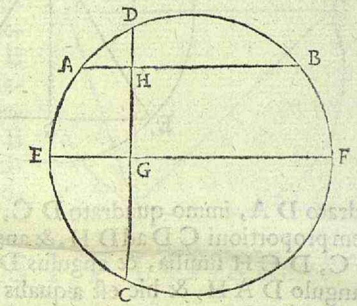
Breuius tamen demonstratio perfici potest hac ratione. Iuncta recta E B, quia in triangulo Isoscele B D C duo anguli C, & C D B æquales sunt, estque pariter externus angulus B D C duplus anguli D E B in triangulo Isoscelio D E B, ergo angulus C duplus est anguli B E C, & propterea illi anguli simul sumpti, seu externus angulus A B E triplus erit anguli B E F, & circunferentia A E tripla ipsius B F.



PROPOSITIO IX.

SI mutuo se secuerint in circulo duæ lineæ A B, C D, (sed non in centro) ad angulos rectos, vtique duo arcus A D, C B sunt æquales duobus arcubus A C, D B.

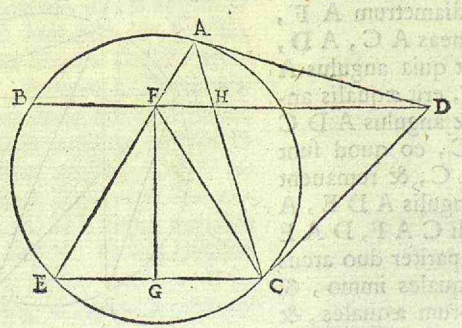
Educamus diametrum E F parallelam ipsi A B, quæ secet C D bifariam in G, erit E C æqualis ipsi E D; & quia tam arcus E D F, quam E C F est semicirculus, & arcus E D æqualis arcui E A cum arcu A D, erit arcus C F cum duobus arcubus E A, A D æqualis semicirculo, & arcus E A æqualis arcui B F, ergo arcus C B cum arcu A D æqualis est semicirculo, & remanent duo arcus E C, E A nempe arcus A C cum arcu D B æquales illi, & hoc est quod voluimus.



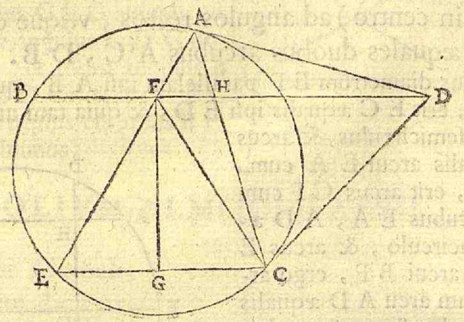
PROPOSITIO X.

SI fuerit circulus A B C, & D A tangens illum, & D B secans illum, & D C etiam tangens, & educta fuerit C E parallela ipsi D B, & iuncta fuerit E A secans D B in F, & educta fuerit ex F perpendicularis F G super C E; vtique bifariam secabit illam in G.

Iungamus A C, & quia D A est tangens, & A C secans circulum erit angulus D A C æqualis angulo cadenti in alterno segmento A C



nempe angulo A E C, & est æqualis angulo A F D, eo quod C E, B D sunt parallelæ, ergo anguli D A C, A F D sunt æquales, & in duobus triangulis D A F, A H D sunt duo auguli A F D, H A D æquales, & angulus D communis, propterea erit rectāgulum F D in D H æquale

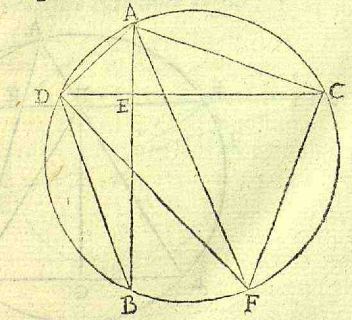


quadrato D A, immo quadrato D C, & quia proportio F D ad D C est eadem proportioni C D ad D H, & angulus D communis, erunt triangula D F C, D C H similia, & angulus D F C æqualis D C H, qui æqualis est angulo D A H, & hic est æqualis angulo A F D, ergo duo anguli A F D, C F D sunt æquales, & D F C æqualis angulo F C E, & erat D F A æqualis angulo A E C, ergo in triangulo F E C sunt duo anguli C, E æquales, & duo anguli G recti, & latus G F commune, propterea erit C G æqualis ipsi G E, ergo C E bifariam secatur in G, & hoc est, quod voluimus.

PROPOSITIO XI.

SI mutuo se secuerint in circulo duæ lineæ A B, C D ad angulos rectos in E, quod non sit in centro, vtique omnia quadrata A E, B E, E C, E D æqualia sunt quadrato diametri.

Educamus diametrum A F, & iungamus lineas A C, A D, C F, D B; Et quia angulus A E D est rectus, erit æqualis angulo A C F, & angulus A D C æqualis A F C, eo quod sunt super arcum A C, & remanent in duobus triangulis A D E, A F C duo anguli C A F, D A E æquales erunt pariter duo arcus C F, D B æquales immo, & duæ cordæ eorum æquales, & duo quadrata D E, E B æquantur quadrato B D, nempe C F, & duo

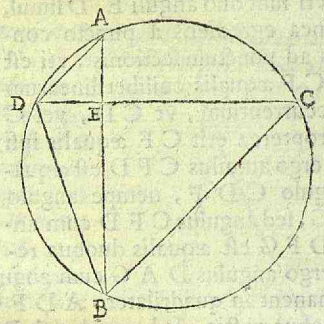


quadrata

quadrata A E, E C æquantur quadrato C A, & duo quadrata C F, C A æquantur quadrato F A, nempe diametri, igitur quadrata A E, E B, C E, E D omnia sunt æqualia quadrato diametri, & hoc est quod voluimus.

SCHOLIUM ALMOCHTASSO.

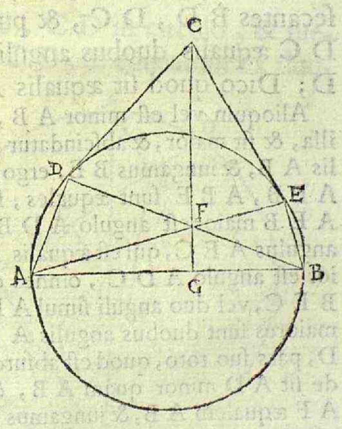
DIcit Doctor. Huius est alia facilior demonstratio ea, quam attulit Archimedes; quæ est huiusmodi. Iungamus A D, C B, B D; & quia angulus B E D est rectus, erunt duo anguli E B D, E D B æquales vni recto, & duo A D, B C, æquales semicirculo, ergo duæ cordæ eorum in potentia sunt æquales diametro; sed duo quadrata A E, D E æqualia quadrato A D, & duo quadrata C E, B E sunt æqualia quadrato C B, ergo quadrata A E, E B, C E, E D æqualia sunt quadrato diametri; & hoc est quod voluimus.



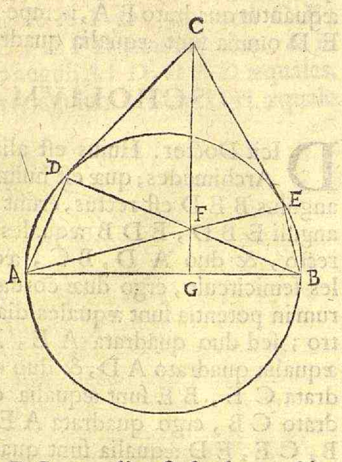
PROPOSITIO XII.

SI fuerit semicirculus super diametrum A B, & eductæ fuerint ex C duæ lineæ tangentes illum in duobus punctis D, E, & iunctæ fuerint E A, D B se muto secantes in F, & iuncta fuerit C F, & producatur ad G, erit C G perpendicularis ad A B.

Iungamus D A, E B. Et quia angulus B D A est rectus, erunt duo anguli D A B, D B A reliqui in triangulo D A B æquales vni recto, & angulus A E B rectus, igitur sunt æquales ei, & ponamus angulum F B E communem, ambo anguli D A B, A B E sunt æquales F B E, F E B, immo angulo D F E externo in F B E. Et quia C D est tangens circulum, & D B secans illum, angulus C D B æquatur angulo D A B, & pariter angulus C E F æquatur angulo E B A, ergo duo anguli C E F, C D F simul æquales sunt angulo D F E. Et iam quidem planum fit ex nostro tractatu de figuris quadrilateris, quod si educan-



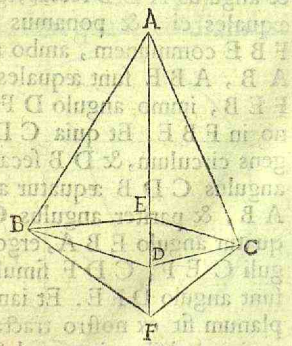
tur inter duas lineas æquales sibi occurrentes in aliquo puncto, vti sunt duæ lineæ C D, C E, duæ lineæ se mutuo secantes, vti sunt duæ lineæ D F, E F, & fuerit angulus ab illis contentus vt est angulus F æqualis duobus angulis, qui occurrunt duabus [lineis] se inuicem secantibus, vti sunt duo anguli E, D simul, erit linea egrediens à puncto concursus ad punctum sectionis, vti est linea C F æqualis cuilibet linearum sibi occurrentium, vt C D, vel C E, propterea erit C F æqualis ipsi C D, ergo angulus C F D est æqualis angulo C D F, nempe angulo D A G, sed angulus C F D cum angulo D F G est æqualis duobus rectis, ergo angulus D A G cum angulo D F G æqualis est duobus rectis, & remanent in quadrilatero A D F G duo anguli A D F, A G F æquales duobus rectis, sed angulus A D B rectus est, ergo angulus A G C est rectus, & C G perpendicularis ad A B, & hoc est quod voluimus.



SCHOLIVM ALMOCHTASSO.

DIcit Doctor de demonstratione, quàm citat ex tractatu de figuris quadrilateris. Sint duæ lineæ æquales sibi occurrentes A B, A C, & punctum concursus A, & se inuicem secantes B D, D C, & punctum sectionis D, & sit angulus B D C æqualis duobus angulis A B D, A C D, & iungamus A D; Dico quod sit æqualis A B.

Alioquin vel est minor A B, vel maior illa, & sit maior, & abscindatur A E æqualis A B, & iungamus B E, ergo duo anguli A E B, A B E sunt æquales; sed angulus A E B maior est angulo A D B, & pariter angulus A E C, qui est æqualis A C E maior est angulo A D C, omnes ergo anguli B E C, vel duo anguli simul A B E, B C E maiores sunt duobus angulis A B D, A C D, pars suo toto, quod est absurdum. Deinde sit A D minor quàm A B, & ponamus A F æqualem A B, & iungamus B F, F C, remanet, vt dictum est, quod angulus F,

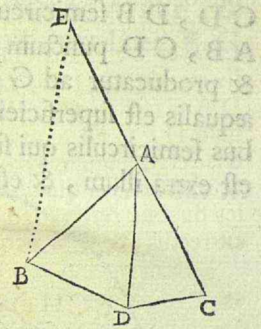


immo duo anguli A B F, A C F minores sint duobus angulis A B D, A C D, totum sua parte, & hoc est absurdum, ergo manet propositum.

Notæ in Proposit. XII.

LEmma assumptum in demonstratione huius pulcherrimæ propositionis potest directè ostendi hac ratione.

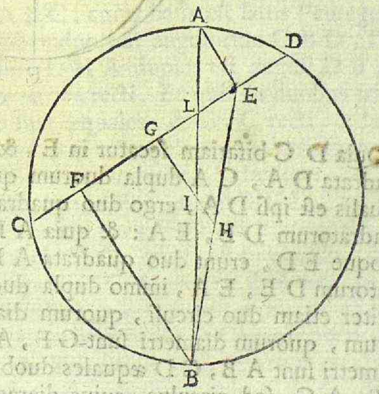
Si in quadrilatero A C D B duo latera A C, & A B æqualia fuerint, atque angulus C D B æqualis duobus angulis C, & B simul sumptis. Dico rectam A D ipsi A C, vel A B æqualē esse. Producatur C A, in E, vt A E fiat æqualis A B, iungaturque B E. Quia in triangulo Isoscelio B A E angulus E æqualis est angulo A B E, & angulus C D B æqualis est duobus angulis C, & D B A simul sumptis, ergo duo anguli C D B, & E (oppositi in quadrilatero C D B E) æquales sunt tribus angulis C, D B A, & A B E, seu duobus angulis C, & D B E, sed quatuor anguli quadrilateri E C D B æquales sunt quatuor rectis, ergo duo anguli oppositi E, C D B duobus rectis æquales sunt, & propterea quadrilaterum ipsum circulo inscribi potest, cuius circuli centrum erit A, cum tres rectæ lineæ C A, A B, A E æquales positæ sint, & propterea A D radius quoque circuli erit æqualis ipsi C A.



PROPOSITIO XIII.

SI mutuo se secent duæ lineæ A B, C D in circulo, & fuerit A B diameter illius, at non C D, & educantur ex duobus punctis A, B duæ perpendiculares ad C D, quæ sint A E, B F, vtique abscindent ex illa C F, D E æquales.

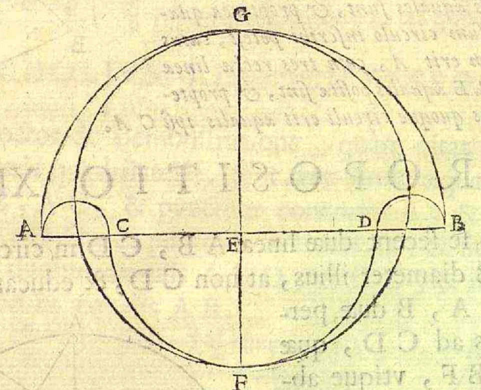
Iungamus E B, & educamus ex I, quod est centrum, perpendicularem I G super C D, & producamus eam ad H in E B. Et quia I G est perpendicularis ex centro ad C D illam bifariam diuidet in G, & quia I G, A E sunt duæ perpendiculares super illam, erunt paral-



lelæ, & quia B I æqualis est I A, erit B H æqualis ipsi H E, & propter earum æqualitatem, & quia B F est parallela ipsi H G, erit F G æqualis ipsi G E, & ex G C, G D æqualibus remanent F C, E D æquales. Et hoc est quod volumus.

PROPOSITIO XIV.

SI fuerit A B semicirculus, & ex eius diametro A B dissectæ sint A C, B D æquales, & efficiantur super lineas A C, C D, D B semicirculi; & sit centrum duorum semicirculorum A B, C D punctum E, & sit E F perpendicularis super A B, & producatur ad G: vtique circulus, cuius diameter est F G æqualis est superficiei contentæ à semicirculo maiori, & à duobus semicirculis qui sunt intra illum, & à semicirculo medio qui est extra illum, & est figura, quam vocat Archimedes Salinon.



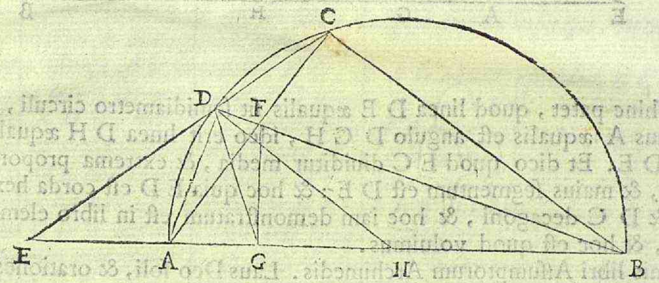
Quia D C bifariam secatur in E, & addita est illi C A, erunt duo quadrata D A, C A dupla duorum quadratorum D E, E A, sed F G æqualis est ipsi D A, ergo duo quadrata F G, A C dupla sunt duorum quadratorum D E, E A: & quia A B dupla est A E, & C D dupla quoque E D, erunt duo quadrata A B, D C quadrupla duorum quadratorum D E, E A, immo dupla duorum quadratorum G F, A C similiter etiam duo circuli, quorum diametri sunt A B, D C dupli sunt eorum, quorum diametri sunt G F, A C, & dimidij eorum, quorum diametri sunt A B, C D æquales duobus circulis, quorum diametri sunt G F, A C, sed circulus, cuius diameter A C, est æqualis duobus semicirculis

micirculis

micirculis A C, B D, ergo si auferamus ex illis duos semicirculos A C, B D, qui sunt communes, remanet figura contenta à quatuor semicirculis A B, C D, D B, A C, (quæ ea est, quàm vocat Archimedes Salinon) æqualis circulo, cuius diameter est F G, & hoc est quod volumus.

PROPOSITIO XV.

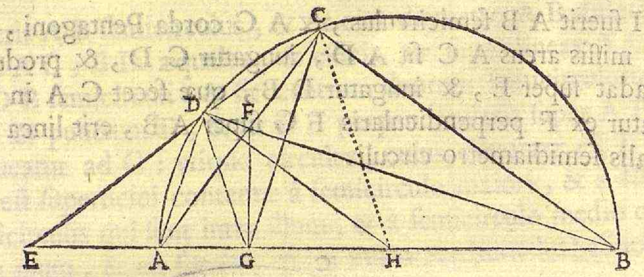
SI fuerit A B semicirculus, & A C corda Pentagoni, & semissis arcus A C sit A D, iungatur C D, & producatur vt cadat super E, & iungatur D B, quæ secet C A in F, & ducatur ex F perpendicularis F G super A B, erit linea E G æqualis semidiametro circuli.



Iungamus itaque lineam C B, & sit centrum H, & iungamus H D, D G, & A D. Et quia angulus A B C, cuius basis est latus Pentagoni, est duæ quintæ partes recti, quilibet duorum angulorum C B D, D B A est quinta pars recti, & angulus D H A duplus est anguli D B H, ergo angulus D H A est duæ quinte partes recti. Et quia in duobus triangulis C B F, G B F duo anguli B sunt æquales, & G, C recti, & latus F B commune, erit B C æquale ipsi B G: & quia in duobus triangulis C B D, G B D duo latera C B, B G sunt æqualia, & similiter duo anguli ad B, & latus B D commune, erunt duo anguli B C D, B G D æquales, & quilibet eorum est sex quintæ partes recti, & est æqualis angulo D A E externo quadrilateri B A D C, quod est in circulo, ergo remanet angulus D A B æqualis angulo D G A, & erit D A æqualis ipsi D G. Et quia angulus D H G est duæ quintæ partes recti, & angulus D G H sex quintæ partes recti, remanet angulus H D G duæ quintæ partes recti, & erit D G æqualis G H. Et quia A D E externus quadrilateri A D C B, quod est in circulo, est æqualis angulo C B A, & est duæ

duæ

duæ quintæ partes recti, & æqualis angulo G D H. Et quia in duobus triangulis E D A, H D G sunt duo anguli E D A, H D G æquales, & pariter duo anguli D G H, D A E, & duo latera D A, D G, erit E A æquale H G, & ponamus A G commune, erit E G æquale A H, & hoc est quod volumus,



Et hinc patet, quod linea D E æqualis sit semidiametro circuli, quia angulus A æqualis est angulo D G H, ideo erit linea D H æqualis lineæ D E. Et dico quod E C diuiditur media, & extrema proportione in D, & maius segmentum est D E: & hoc quia E D est corda hexagoni, & D C decagoni, & hoc iam demonstratum est in libro elementorum, & hoc est quod volumus.

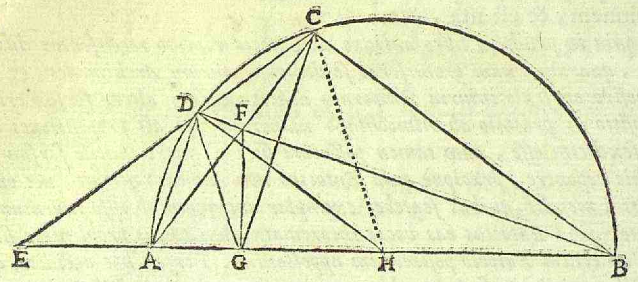
Impie vt Mahumetanus Paraphrastes loquitur, Finis libri Assumptorum Archimedis. Laus Deo soli, & orationes eius sint super Dominum nostrum Mahometum, & suos socios.

Notæ in Proposit. XV.

Ex hac propositione non pauca colligi possunt; Si enim coniungantur rectæ lineæ C H, & C G, erit triangulum B C E isoscelium simile triangulo H D E, & similiter positum; pariterque triangulum H C G simile quidem erit ipsi G D A, & in vtrisque bases similiter secantur, nam angulus B C E in tres partes æquales diuiditur à rectis lineis H C, & G C, quarum quælibet duæ quintæ partes est vnius recti, atque angulus E C G rursus bifariam diuiditur à recta C A: non secus tres anguli E D A, A D G, & G D H æquales sunt inter se, atque quilibet eorum duæ quintæ vnius recti. Et efficiuntur quatuor rectæ lineæ E A, A D, D G, D C, inter se, & lateri decagoni regularis circulo inscripti æquales. Pari modo rectæ lineæ E D, E G, G C, H C, H A, æquales sunt inter se, & lateri hexagoni regularis circulo inscripti. Tandem recta linea C B subtendens tres partes decimas circumferentiæ totius circuli æqualis est rectæ lineæ C E, scilicet compositæ ex latere hexagoni, & latere decagoni regularium eidem circulo incsriptorum. Præterea

recta

recta linea E G secatur in A extrema, ac media ratione; cuius maius segmentum est E A latus decagoni, & recta A H similiter diuiditur in G; cuius maius segmentum est G H decagoni latus, & tota E H secatur in A; & G extrema, ac media ratione, pariterque recta E B similiter secatur in H; cuius



minus segmentum H B est æquale lateri exagoni circulo inscripti. Breuius tamen propositio sic demonstrari posset.

Quia ostensa est C D æqualis D G, & A D æqualis est eidem D C; cum ambo sint latera decagoni, ergo D G æqualis est D A. Postea iuncta A C, quia angulus A H D, vel C H D quinta pars est duorum rectorum, ergo angulus C D H ad basim isoscelij, duæ quintæ partes erit duorum rectorum, & ideo angulus C D H duplus erit anguli D H E, estque externus angulus C D H æqualis duobus internis, & oppositis D H E, & D E H in triangulo D E H, ergo angulus C D H duplus quoque erit reliqui anguli E, & propterea angulus D H E æqualis erit angulo E, & subtensa latera D E, D H æqualia quoque erunt, sed prius D A, D G æqualia erant subtendentia angulos æquales, & reliqui anguli eiusdem speciei sunt, igitur E A æqualis est H G. Reliqua manifesta sunt.

In præfatione huius operis memini non esse omnino improbabile hunc libellum Archimedis non alium fuisse ab illo antiquo lemmatum libro ab Eutocio reperto, quod præcipuè ex verbis eiusdem Eutocij in Comment. proposit. 4. lib. 2. de Sphæra, & Cylindro comprobatum fuit: illa fidelissimè translata ex textu Græco ab amicis doctissimis cum iam in præfatione excusa essent aliam translationem ex Arabico Manuscripto Serenissimi Magni Ducis misit Excell. Abrahamus Ecchellensis desumptam ex editione Abusahli Alkuhi qui pariter librum ordinationis lemmatum Archimedis conscripsit, vt in proemio huius operis testatur Almochtasso. Verba eius sunt hæc, quæ paulò clarius propositum confirmare videntur: & meminit Eutocius Ascalonita in Comment. huius libri, quod Archimedes promiserit demonstrationem huius in hoc suo libro, quod in nullo exemplari reperitur, quod promisit. Atque ita vnusquisque tam Dyonisodorus, quàm Diocles post illum progressus est per aliam viam, quàm ille (scilicet Archimedes) in hoc libro in diuisione Sphæræ in duas partes, quæ datam habeant proportionem. Dixit, & ego reperi in

 Veteri

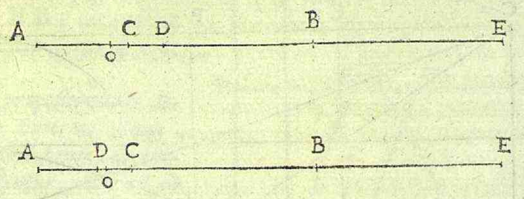
Veteri Libro Theoremata satis obscura propter multitudinem errorum, qui in eo sunt, nec non menda, quæ occurrunt in figuris propter ignorantiam amanuensium, erantque in eo Doricæ dictiones, quarum vsus Archimedi familiaris erat, & vocabula ipsi propria; hinc vtebatur loco sectionum parabolæ, & hyperbolæ, rectanguli, & obtusanguli coni sectionibus quamobrem operam ipsi nauaui, donec assecutus sum istam propositionem, & est ista, &c.

Modo quia in prædicto libro antiquo ab Eutocio reperto recensentur duæ propositiones, quarum vnam promiserat se demonstraturum Archimedes, & vtraque in nostro opusculo iniuria temporum deficit: earum altera forsan erit 16. illa propositio in proemio ab Almochtasso numerata vbi ait propositiones huius opusculi sexdecim esse, cum tamen postrema sit 15. quare inutile forsan non erit eas hic reponere, præcipuè quia Eutocius non rite eas restituit, nec omninò repurgauit à mendis, quibus scatebat exemplar antiquum ab ipso inuentum. Et primo noto, quod Eutocius eas vocat theoremata, cum potius problemata sint, & sic etiam ab eodem Eutocio postmodum appellantur. Forsan hoc accidit, quia in libro illo antiquo in formam theorematum scripta erant, sed Eutocius vt ad propositionem Archimedis ea accomodaret, forma problematica ea exposuit. Rursus Eutocius primum theorema se expositurum pollicetur, vt deinde analysi problematis Archimedei accomodetur. Vnde conijcere licet alterum theorema additum, vel alteratum ab Eutocio, vel ab aliquo alio fuisse, in quo proponit, quod, si aliqua recta linea secta sit in duo segmenta, quorum vnum duplum sit alterius, solidum parallelepipedum rectangulum contentum sub quadrato maioris, & sub minore segmento maximum erit omnium similium solidorum, quæ ex diuisione eiusdem rectæ lineæ in quolibet alio eius puncto consurgunt. Et hoc quidem ostenditur per sectiones conicas, contra artis præcepta; peccatum enim est non paruum apud Geometras, problema planum per conicas sectiones resoluere cum via plana absolui possit, hoc autem preclari nonnulli viri pariter adnotarunt, & præstiterunt, vt nuper accepi.

PROPOSITIO XVI.

SI recta linea A B sit tripla A C, non vero tripla ipsius A D; Dico parallelepipedum rectangulũ contentum sub quadrato C B in A C maius esse parallelepipedo sub quadrato D B in A D.

Producatur A B in E, vt sit B E æqualis B C. Quoniam B C dupla erat ipsius A C, erit E C quadrupla ipsius A C, & propterea rectangulum A C E æquale erit quadruplo quadrati A C, scilicet æquale erit quadrato C B: Est vero in primo casu, rectangulum A D E maius rectangulo A C E, in secundo vero minus, (eo quod punctum D in primo casu propinquius est semipartitioni totius A E, quàm C, in secundo verò remotius); igitur si fiat C D ad D O, vt quadratum C B ad rectangulum A D E, erit in primo casu D O maior, quàm C D, in secundo vero minor; & propterea A O minor erit, quàm A C in vtroque casu. Et quia quadratum C B ad rectangulum A D E est vt C D ad D O, igitur solida parallelepipeda reciproca erunt æqualia, scilicet solidum qua-



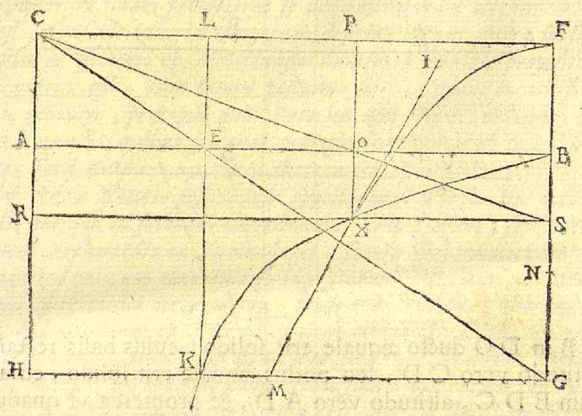
drato C B in D O ducto æquale erit solido, cuius basis rectangulum A D E, altitudo vero C D, seu potius æquale erit solido, cuius basis rectangulum E D C, altitudo vero A D, & propterea vt quadratum B C ad rectangulum E D C, ita erit reciproce A D ad D O, & comparando antecedentes ad terminorum differentias in primo casu, & ad eorundem summas in secundo casu, erit quadratum B C ad quadratum D B vt A D ad A O, & denuo solidum parallelepipedum rectangulum contentum sub quadrato B C in A O æquale erit ei, cuius basis quadratum D B, altitudo vero A D: Est vero A O ostensa minor, quàm A C in vtroque casu, igitur parallelepipedum, cuius basis quadratum B C, altitudo A C maius est eo, cuius basis est idem quadratum B C, altitudo A O; ideoque parallelepipedum, cuius basis quadratum B C, altitudo A C maius est quolibet parallelepipedo, cuius basis quadratum B D, altitudo A D: quare patet propositum.

PROPOSITIO XVII.

SIt A B tripla ipsius A E, maior vero quàm tripla alterius C A, secari debet eadem A B citra, & vltra E, in O, ita vt parallelepipedum, cuius basis quadratum O B, altitudo O A æquale sit parallelepipedo, cuius basis quadratum E B, altitudo A C.

Fiat rectangulum A C B F, & producantur latera C A, F B, & fiat rectangulum C F N æquale quadrato E B, & ducta diametro C E G compleantur

Prop.52. lib.1. pleantur parallelogramma rectangula A L, A K, L B, B K; atque axe F G, latere recto F N describatur parabole F M secans H G in M; erit Prop.11. lib.1. igitur in parabola quadratum M G æquale rectangulo G F N sub abscissa, & latere recto contento, ideoque idem quadratum F G ad rectangulum N F G, atque ad quadratum M G eandem proportionem habebit: est vero quadratum F G ad rectangulum N F G, vt F G ad F N, cum

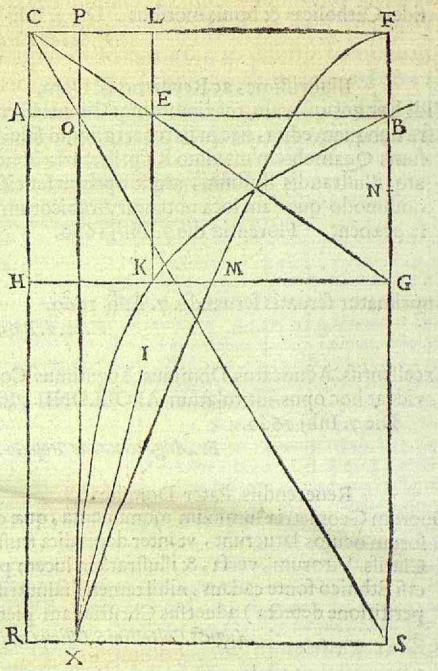


F G sit illorum altitudo communis, nec non vt C F G ad C F N sumpta nimirum C F communi altitudine, ergo rectangulum C F G ad C F N eandem proportionem habebit, quam quadratum F G ad quadratum M G, & permutando rectangulum C F G ad quadratum F G erit vt rectangulum C F N ad quadratum G M, sed vt rectangulum C F G ad quadratum F G, ita est C F ad F G, & E A ad A C, igitur E A ad A C erit vt rectangulum C F N ad quadratum G M, seu vt quadratum E B, vel K G ad quadratum G M: est vero A C minor, quàm A E, quæ triens est totius A B, igitur M G minor est, quàm G K. Postea Prop.4. & 12. lib.2. per B circa asymptotos A C F describatur hyperbole B K, quæ transibit per punctum K, cum parallelogramma A F, & C K æqualia sint propter diagonalem C E G, quare punctum M paraboles cadet intra hyperbolem B K, sed parabole F M occurrit asymptoto C F in vertice F, & occurrit etiam asymptoto C A in aliquo alio puncto, cum C Prop.26. lib.1. ex 1.& 2. lib.2. A sit parallela axi F G paraboles, & hyperbole semper intra asymptotos incedat, igitur parabola F M bis hyperbolæ occurrit supra, & infra punctum M: sint occursus X, à quibus ductis parallelis ad asymptotos compleantur parallelogramma R P, & A F, quæ erunt æqualia inter asymptotos, Prop.12. lib.2. & hyperbolen constituta, & propterea C O S parallelogrammorum diameter erit, & vna linea recta: & quia O A ad A C est vt C F ad F S, siue vt rectangulum C F N ad rectangulum S F N: erat autem quadratum E B æquale rectangulo C F N ex constructione, & quadratum

tum

Prop.11. lib.1.

tū O B, siue X S in parabola æquale est rectangulo S F N, ergo A O ad A C est vt quadratum E B ad quadratum O B, & propterea parallelepipedum, cuius basis quadratum O B, altitudo O A æquale erit parallelepipedo base quadrato E B, altitudine A C contento, quod erat propositum.



Ex hisce propositionibus deducit insuper Eutocius aliqua, quæ non omnino firma, & certa mihi videntur, nam ex eo quod recta linea vt I X tangit vtramq; conisectionem (hyperbolen scilicet B X, & parabolen F X) in eodem puncto X concludit hyperbolen interius contingere parabolen quàm deinceps non secat ad easdem partes axis illius. Hoc autem omnino necessarium nō est ex demonstratis à me in prop. 20. 21. & 22. Addit. lib. 6. Apoll. fieri enim potest vt Parabole exterius hyperbolen tangat in X, & postea hinc inde eam secet. Potest insuper hyperbole secare eandem parabolam in eodem puncto X, licet ambo in eodem puncto tangantur ab aliqua recta linea, vt est I X; quod quidem adnotasse fuit operepretium.

F I N I S.

Dominus Carolus de Datis videat, & referat an in hoc opere sit aliquid quod repugnet fidei Catholicæ, & bonis moribus. Die 3. Iulij 1660.

Vinc. de Bardis Vicar. Gener. Florent.

Illustrissime, ac Reuerendiss. Dom.

Vidi hæc antiquorum, maximorumq; Geometrarum Apollonij, atq; Archimedis Opera nunquam edita, nec in ijs reperi aliquid fidei Catholicæ, & bonis moribus aduersum; Quamobrem maximo Reip. literariæ bono, & gloria eorum qui in ijs vertendis, atq; illustrandis studium, atque operam felicissimè collocarunt euulganda censeo: dummodo quædam loca notentur Arabicorum interpretum, quibus Maumedanos se præbent. Florentiæ die 7. Iulij 1660.

Carolus Dati manupropria.

Imprimatur seruatis seruandis 7. Iulij 1660.

Vinc. d. Bardis Vicar. Gener. Flor.

Excellentiss. Aduocatus Dominus Augustinus Coltellini S. Offic. Florentiæ Consultor videat hoc opus intitulatum APOLLONII PERGÆI, &c. & referat.

Die 7. Iulij 1660.

Fr. Ang. Octau. de Populo S. Offic. Flor. Canc. de mand.

Reuerendiss. Pater Domine.

Duorum Geometriæ luminum monumenta, quæ diu in tenebris sepulta, adeò studiosorum oculos latuerunt, vt inter deperdita frustra desiderarentur, & nunc Opera Clariss. Virorum, versa, & illustrata in lucem prodeunt remoranda non puto; cum etsi Ethnico fonte cadant, nihil tamen (salutaribus monitis Arabica interpretum superstitione detecta) aduersus Christianam pietatem contineant.

August. Coltellini S. Officij Consultor, & librorum censor.

Stante supradicta attestatione Imprimatur. Die 16. Iulij 1660.

Fr. Ang. Octau. de Populo S. Off. Florent. Cancell. demand.

Alexander Victorius Senator Sereniss. Magni Ducis Auditor.

REGISTRVM.

* ** *** **** A B C D E F G H I K L M N O P Q R S T V X Y Z
Aa Bb Cc Dd Ee Ff Gg Hh Ii Kk Ll Mm Nn Oo Pp Qq Rr Sf Tt Vu Xx Yy Zz
Aaa Bbb Ccc Ddd Eee Fff

Omnes sunt duerni, excepto * qui est ternus.

Errata præcipua sic corrige.

Pagina 7. linea 27. ad margine. *prop. 1. huius*. pag. 14. lin. 4. *ad differentiam*. p. 24. l. 21. marg. *prop. 2. addit*. p. 31. l. 27. marg. *in lib. 1.* lin. 34. *& B A*. lin. 40. *I D, D K*. p. 32. l. 15. *& D H*. p. 36. l. 21. *figura)* p. 40. l. 17. (53. *ex* 5.) l. 33. *intercipiuntur, &*. l. 38. *ergo C A*. p. 46. l. 5. *ita inquam*. p. 49. l. 35. *componebatur insuper*. p. 50. l. 46. *B G b, & d e b*. p. 56. l. 15. marg. 4. & 13. l. 48. *pariterque L D*. p. 62. l. 7. *sit D A*. p. 70. l. 14. marg. 56. 57. *lib.* 1. & 30. *lib.* 2. p. 72. l. 12. *maior quam*. p. 73. l. 13. mar. 33. 34. *lib.* 1. p. 78. l. 4. *reddantur, & textus*. p. 86. l. 17. *appliceturque recta*. p. 96. l. 7. *super bipartitionem axis*. p. 99. l. 11. *ex vero P F minor quam D P*. l. 44. *legi* 44. 45. *in qua*. p. 109. l. 20. dele postillam. p. 110. l. 31. marg. appone *d*. p. 111. l. 31. *aut minor angulo*. p. 129. l. 35. *& inuertendo*. ibidem marg. 10. *hui*. p. 130. l. 26. dele omnia ab O G vsq; ad comparando. p. 138. l. 8. *opposita*. p. 139. l. 18. mar. *d*. p. 141. l. 8. mar. 14. *lib.* 1. p. 146. l. 18. mar. 12. 13. *lib.* 1. p. 151. l. 18. mar. 8. & 11. *addit. lib.* 5. l. 19. *M L, & R L*. l. 22. *æqualibus axium*. p. 161. l. 13. *ductam in hyperbola)* p. 168. l. 30. *quod est*. p. 172. l. 29. *sed in primo casu recta linea*. l. 30. *basim F I*. ibid. *puncta I, & F; nec F I secat bifariam subtensas G E, M K; propterea*. p. 175. l. 26. mar. *a*. l. 35. *ad duas*. p. 176. l. 15. mar. *d*. p. 183. l. 1. mar. *d*. p. 189. l. 29. mar. *lemma* 7. l. 47. *applicata*. p. 190. l. 8. mar. *prop. 2. præmis.* p. 193. l. 6. *XX. XXI. XXII. XXIII. XXIV*. p. 196. l. 25. *nempe X a*. p. 197. l. 29. *ad L P*. p. 202. l. 23. mar. 18. *huius*. p. 207. l. 6. *quod*. l. 33. mar. *a*. p. 213. l. 11. *hyperbolen E Z*. p. 214. l. 38. mar. *ex 20. huius*. p. 217. l. 21. *ideoque ei æqualis omnino erit. Simili ratiocinio ostendetur qualibet alia intercepta K L æquidistans*. p. 223. l. 6. mar. *Schol. prop. 6. addit*. p. 228. l. 18. *ergo comparando homologorum differentias*. ibid. mar. *lem. 3. lib. 1.* p. 233. l. 4. mar. *prop. 7. & ex 8. addit*. p. 235. l. 37. *hyperbolen H I K*. p. 240. l. 3. mar. *f*. p. 244. l. 14. *& I F R, seu H F N, & I F S*. p. 248. l. 35. *sit sectio*. p. 250. l. 4. *quod L O*. p. 256. l. 12. *parallela*. p. 259. l. 12. *quàm A C*. p. 260. l. 16. *per eundem*. p. 262. l. 1. *eandem*. l. 4. *A D, &*. l. 41. *& eam, quæ*. p. 264. l. 13. *secabit rectam*, p. 268. l. 22. *conus E A C*. p. 269. l. 8. mar. *ex prop. 5. lib. 1.* l. 9. 10. 20. expunge recto, l. 15. *sectionis F A G*. p. 275. l. 10. *rectangulo A D F*. p. 280. l. 14. *G E A eandem*. p. 291. l. 3. *XXIX. XXVII*. p. 298. l. 6. *XXIIX. XXVI*. p. 303. l. 16. *erectum*. p. 306. l. 23. *ad perfectionem prop. 26*. p. 313. l. 7. mar. *prop. 26. huius*. p. 318. l. 25. *quàm G H E ad E H, & (quando G cadit inter E, & H), multo maiorem quàm G E*. p. 319. l. 17. *E H ab ipso quadrato G E*. p. 321. l. 9. *quadrato E G*. l. 11. *XXXV. XXXVI*. p. 323. l. 2. *diametri ad easdem partes*. p. 325. l. 7. 21. & 23. (16. *ex*. 7.) p. 326. l. 11. *quæ est dupla*, l. 14. *M E ad*. l. 20. (16. *ex* 7.) p. 327. *quàm D H A ad A H, & in primo casu multo maiorem, quàm*, p. 328. l. 33. *latus C O*. p. 329. l. 22. *quàm E D O in O E*. p. 331. l. 27. *vt axis transuersus A C*. p. 335. l. 7. *ipsius P R supra P Q*. l. 11. *aggregati M G, H E*. p. 338. l. 18. *G E, & E H*. p. 341. l. 3. *axis transuersi C A*. p. 343. l. 9. mar. dele b. p. 344. l. 7. mar. *b*. p. 346. l. 15. mar. *c*. p. 347. l. 7. *ad quadratum Q P R, &*. p. 350. l. 13. *O H, & G E*. p. 356. l. 14. mar. *lem. 15*. p. 386. l. 31. mar. *lib. 4. Coll. prop. 14*. p. 391. l. 9. mar. *lib. 4. Coll. prop. 13*. p. 392. l. 15. *quæ erit*. p. 404. l. 37. *A B E, A C E*.

Errata in figuris.

Pag. 12. in eius figura deest recta N Q, & D terminus axis. pag. 22. fig. 1. deest recta I N. pag. 30. in parabola deest N in occursu B F, G H. pag. 37. deest P in puncto incidentiæ perpendicularis à puncto I super S K. pag. 46. deest A in vertice axis. pag. 93. deest recta L O. pag. 112. in tribus sequentibus figuris deest ramus I B. pag. 213. fig. 1. litteræ C, Q commutari debent. pag. 240. fig. 2. & pag. 246. producantur F L, H I ad K. pag. 268. fig. 2. linea curua A Z duci debet inter A G, & A D. pag. 368. fig. 3. in puncto I ponatur X.