50 ANIVERSARIO DE LA DIVISIÓN DE MATEMÁTICAS EN LA UNIVERSIDAD DE GRANADA

1. Evolución e historial del grupo FQM290

El grupo de investigación FQM290 se creó en 2002 con la finalidad de realizar un estudio exhaustivo de las *álgebras multiplicativamente semiprimas* (abreviadamente, *m.s.p.*): Álgebras no-asociativas semiprimas cuya álgebra de multiplicación es también semiprima. Al igual que en toda clase de álgebras, en el estudio de las álgebras m.s.p., contempla tres direcciones, que interaccionan entre si y que han de ser consideradas simultáneamente: Por un lado se debe sopesar la amplitud de la clase, describiendo distintas gamas de álgebras que la compongan. Por otro lado se deben buscar caracterizaciones y resultados estructurales que permitan reconocer y encuadrar en la teoría general a dichas álgebras. Finalmente, se deben obtener resultados que unifiquen y mejoren los conocidos para las diferentes gamas de álgebras contenidas en dicha clase. Ciertamente, en estas tres direcciones nuestro grupo cuenta en la actualidad con importantes aportaciones (ver bibliografía más relevante).

El inicio de las álgebras m.s.p. se remonta al trabajo de N. Jacobson [1937] en el que se estudian las álgebras no-asociativas finito dimensionales cuya álgebra de multiplicación es semiprima. Los resultados de N. Jacobson motivaron a A. A. Albert la introducción en [1942] del que hoy día se conoce con el nombre de Radical de Albert. El estudio de las álgebras m.s.p., sin restricción de finita dimensión, se inició en la Tesis Doctoral de A. A. Mohammed [2000], realizada bajo la dirección de uno de los miembros del grupo. Uno de los resultados principales de esta Tesis fue que las álgebras asociativas semiprimas son m.s.p. Este hecho sugirió que las álgebras no-asociativas (con conveniente condición de regularidad) cercanas a las asociativas debieran ser también m.s.p. Esto ha sido verificado para álgebras alternativas no-degeneradas y para álgebras de Jordan no-degeneradas en [CaV], así como para álgebras de Lie (skew) asociadas a álgebras asociativas semiprimas con una involución lineal en [CCaLM] y recientemente se ha probado en [CCaR1] que los monstruos Pchelintsev (álgebras de Jordan primas degeneradas son *álgebras m.p.* (esto es, álgebras primas con álgebra de multiplicación prima).

La herramienta fundamental para establecer la multiplicativa semiprimidad, tanto en álgebras asociativas, como en álgebras alternativas, Jordan y Lie-skew, es la Teoría GPI (Teoría de Identidades Polinomiales Generalizadas), para la que es referencia obligada la monografía de K. Beidar, W.S. Martindale and A.V. Mikhalev. [1996]. El resultado principal del artículo pionero de Martindale [1969] es el llamado GPI-Teorema Primo, el cual caracteriza las GPI-álgebras como aquellas cuya clausura central es primitiva con zócalo no nulo y con álgebra de división asociada finito-dimensional sobre el centroide extendido. Pese a algunos precedentes no se conoce ningún intento de presentar una teoría GPI en contexto no-asociativo general. En este intento, conseguimos un primer avance en [CCaN2; Corollary 5.18] donde probamos que si un álgebra m.p. que tiene un ideal finito dimensional entonces es simple y finito-dimensional, resultado que cabe considerarlo como un precedente del Teorema de Posner para álgebras m.p. Más recientemente en [CCaFGM] hemos obtenido extensiones no asociativas de los teoremas de Kaplansky , de Posner, de Amitsur y de Martindale en contexto primo, teoremas pueden ser considerados los resultados básicos en la teoría asociativa GPI. En la actualidad estamos inmersos en el desarrollo del caso semiprimo. Finalmente nos gustaría comentar que la Teorías PI y GPI permiten llevar resultados analíticos asociativos a contextos Jordan y Lie. Así, a título de ejemplo, se puede citar [BrCaFV] en el que se extiende a contexto Jordan el Teorema de Aupetit-Mathieu de continuidad automática para Lie epimorfismos.

La teoría de estructura de las álgebras m.s.p. está ampliamente desarrollada ([CCa1], [CCa2], [CCaN1], [CCaN2] y [CCa3]). Dicha teoría está ligada a la *ε-clausura* (que es la inducida por la conexión Galois entre los retículos de ideales de un álgebra A y de su álgebra de multiplicación M(A), y está determinada por los respectivos anuladores que aparecen al considerar A como un M(A)-módulo izquierdo) la cual permite, por una parte obtener diversas caracterizaciones de la multiplicativa semiprimidad en términos reticulares [CCa1; Theorem 2.6], y por otra introducir conceptos estructurales (descomponibilidad y atomicidad). Hemos establecido un Teorema de Yood para álgebras de anulador cero [CCa1; Theorem 3.7]. Así mismo, se cuenta con un teorema de descripción de las álgebras m.s.p. atómicas [CCa1; Theorem 3.8]. Como aplicación se obtuvo una versión normada del Teorema de Yood para álgebras normadas anuladoras generalizadas [CCa1; Theorem 4.6]. La extensión de estos resultados a álgebras con anulador distinto de cero se ha conseguido en [CCa2]. Además de la ε-clausura, se puede considerar la *π-clausura* (la clausura inducida por la conexión Galois determinada por el anulador, para el producto en el álgebra, de cada ideal). El estudio de los ideales primos π-cerrados y ε-cerrados en álgebras cuya álgebra de multiplicación es semiprima ha sido llevado a cabo en [CCaN1]. En . [CCa3] y [CCaN2] se ha desarrollado una Teoría de estructura para las álgebras π-complementadas y ε-complementadas respectivamente. En [CCaRR] se establece que, para un álgebra semiprima, existe una biyección entre los idempotentes del centroide extendido y los ideales π-cerrados. Como consecuencia probamos que un algebra es π-complementada si, y sólo si, todo idempotente del centroide extendido está de hecho en el centroide. Además si el álgebra es una C*-algebra se sigue que ésta es acotadamente centralmente cerrada si, y solo si, es π-complementada. En [CCaR2] discutimos la π-complementación de la unitización de un álgebra y de su álgebra de multiplicación. Más recientemente [CCaR3], probamos que un álgebra semiprima es un producto subdirecto esencial de álgebrs primas, si, y sólo si, su centroide extendido es un producto de cuerpos..

Miembros del Grupo:

1. Responsable: Juan Carlos Cabello Píñar (Dpto. Análisis Matemático. Univ. Granada)
2. Miguel Cabrera García (Dpto. Análisis Matemático. Univ. Granada)
3. Ricardo Casas del Castillo (F. Ciencias de la Educación. Univ. Granada)
4. Jorge Antonio González Ramírez (IES. Ceuta)
5. Pablo Montiel López (Centro de Magisterio "La Inmaculada" (C. Adscrito Univ. Granada))
6. Eduardo Nieto Arco (Dpto. Análisis Matemático. Univ. Granada)
7. Raúl Roura Redondo.(Centro de Magisterio "La Inmaculada" (C. Adscrito Univ. Granada)

2. Resultados destacados

Bibliografía más relevante:

[BrCaFV] M. Bresar, M. Cabrera, M. Fosner, and A. R. Villena: Lie triple ideals and Lie triple epimorphisms on Jordan and Jordan-Banach algebras, *Studia Math.* **169** (3) (2005), 207-228.

[CCa1] J. C. Cabello and M. Cabrera: Structure theory for multiplicatively semiprime algebras*, J.Algebra* **282** (2004), 386-421.

[CCa2] J. C. Cabello and M. Cabrera: Algebras whose multiplication álgebra is semiprime. A decomposition theorem*, J. Algebra* **319** (2008), 911-937.

[CCaF] J. C. Cabello, M. Cabrera and A. Fernández-López: π-complemented Algebras through pseudocomplemented lattices. Journal On the Theory Of Ordered Sets and Its Applications *29, (2012) 463-479.*.

[CCaFGM] J.C. Cabello, M. Cabrera, A. Fernández-López, A. Y. Golubkov and A. Moreno.Algebras whose multiplication algebra is PI or GPI. Preprint (2013) Univ. Granada

[CCaLM] J. C. Cabello, M. Cabrera, G. López, and W. S. Martindale 3rd: Multiplicative semiprimeness of skew Lie Algebras*, Comm. Algebra* **32** (2004), 3487-3501.

[CCaN1] J. C. Cabello, M. Cabrera, and E. Nieto: Closed prime ideals in algebras with semiprime multiplication algebra*, Comm. Algebra* **35** (2007), 4245-4276.

[CCaN2] J. C. Cabello, M. Cabrera, and E. Nieto: ε-complemented algebras*, J. Algebra 349 (2012) 386-421.*

[CCaR1] J. C. Cabello, M. Cabrera, and R. Roura: Multiplicative primeness of prime degenerate Jordan algebras*, Siberian Mathematical Journal. 51.5 (2010) 818-823.*

[CCaR2] J. C. Cabello, M. Cabrera, and R. Roura: : π-complementation in the unitisation and multiplication algebras of a semiprime

[CCaR3] J. C. Cabello, M. Cabrera, and R. Roura: :Completedly dense ideals. Decomposable algebras. J. of algebra and its applications.**12.7** (2013), (27 p.)

[CCaRR]] J. C. Cabello, M. Cabrera, A. Rodriguez Palacios and R. Roura : A Characterization of of π-complemented Algebras. *Comm. Algebra* **41** (2013), 3067-3079..

[CNO] J. C. Cabello, E. Nieto, and E. Oja: On ideals of compact operators satisfying the M(r,s)-inequality, *J. Math. Anal. Appl*. **220** (1998), 334-348.

[CaMo] M. Cabrera and A. A. Mohammed: Totally multiplicatively prime algebras, *Proc. Royal Soc. Edinburgh* **132A** (2002), 1145-1162.

[CaR] M. Cabrera and A. Rodriguez Palacios. On the Gelfand-Naimark Axiom ||a*a||=||a||^2. *Quarterly Journal of Mathematics 63 (2012) 855-860*

[CaS] M. Cabrera and J. Sanchez: Lie quotients for Skew Lie algebras, *Algebra Colloq.* **16** (2009), 267-274.

[CaV] M. Cabrera and A. R. Villena: Multiplicative-semiprimeness of nondegenerate Jordan algebras, *Comm. Algebra* **32** (2004), 3995-4003.

.

3. Conexiones con otros grupos

Hemos mantenido contacto con Fernando Montaner Frutos (Univ. de Zaragoza) que tiene importantes contribuciones a la Teoría GPI para sistemas Jordan. De hecho, podemos considerarlo como la máxima autoridad en España en dicha teoría. Igualmente mantenemos contacto con muchos y muy buenos investigadores en la Teoría general de las álgebras no-asociativas, y particularmente en álgebras alternativas, Jordan, Lie, Malcev, Color, etc. Es obligado mencionar a José Antonio Cuenca (Univ. de Málaga), Alberto Elduque (Univ. de Zaragoza), Antonio Fernández (Univ. de Málaga), Santos González (Univ. de Oviedo) y Consuelo Martínez (Univ. de Oviedo). En la Teoría de las álgebras no-asociativas normadas, Ángel Rodríguez (Univ. de Granada) es una indiscutible autoridad internacional. Recientemente hemos realizado algunos trabajos conjuntos. [CCaRR] y [CaR]. Un miembro de nuestro grupo (M. Cabrera) participa con dicho profesor en la elaboración de una importante monografía sobre C*-algebras cuyo primer volumen está apunto de ser publicado. Además, los primeros componentes del grupo nos hemos formado en su equipo. También, debemos citar a Armando R. Villena (Univ. de Granada) que dirige un grupo de investigación que trabaja en álgebras no-asociativas normadas y con el que hemos compartido varios trabajos (entre otros, [CaV] y [BrCaFV]). También se han hecho trabajos conjuntos con profesores de otras universidades españolas, concretamente con J. A. Anquela (Universidad de Oviedo) [CA], J. Sánchez (Universidad de Málaga) [CS]. y Antonio Fernández (Univ. de Málaga) con el que hemos compartido varios trabajos ([CCaF] y [CCaFGM) y cuya investigación ha sido marco de referencia y fuente de inspiración para parte de la nuestra.

Nuestro equipo de investigación ha desarrollado algunos trabajos en colaboración con profesores de otras universidades extranjeras, entre los que cabe destacar E. Zel'manov (Univ. de California. S. Diego, Medalla Fiels en 1994), W. S. Martindale 3rd (Univ. de Massachusetts, USA) [CCaLM], M. Mathieu (Univ. de Belfast, Irlanda del Norte), y a M. Bresar (Univ. de Maribor, Slovenia). [BrCaFV]). y E. Oja (Univ. de Tallin. Estonia.).[CON]. Así mismo se ha mantenido contacto con . A. Mohammed [CAMo] cuyo doctorado se hizo bajo la dirección de M. Cabrera.

4. Actividades organizadas

Hemos organizado distintas reuniones científicas en las que han participado algunos de los profesores indicados anteriormente, la última [dic. 2012] con ocasión de la defensa de la tesis de un miembro del grupo.