Relación de problemas 1

Geometría III, Grado en Matemáticas, grupos A y B
Universidad de Granada

Curso 2016-2017

1.1.– Sea V un espacio vectorial real. Se considera la aplicación $\Phi : V \times V \to V$ dada por $\Phi(u, v) = 2u - v$, que denotaremos por $\Phi(u, v) = \overrightarrow{uv}$. Estudiar si Φ induce o no una estructura de espacio afín en V.

1.2.– En un espacio afín A se consideran $(n+1)$-puntos $\{p_0, \ldots, p_n\} \subset A$. Se define el *baricentro* de estos puntos como

$$\mathbf{b} = p_0 + \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{p_0 p_i}.$$

Demuestra que el baricentro no depende del punto p_0 inicial escogido.

1.3.– Un triángulo en un espacio afín es una colección de tres puntos $\{a, b, c\}$ no alineados. Si $T = \{a, b, c\}$ es un triángulo, probar que las medianas (las rectas que unen los vértices con los puntos medios de los lados opuestos) se cortan en el baricentro del triángulo.

1.4.– Probar que los puntos medios de los lados de un triángulo T forman un triángulo cuyos lados son paralelos a los de T y cuyo baricentro es el mismo que el de T.

1.5.– Sea T un triángulo. Probar que la recta que pasa por el punto medio de un lado y es paralela a un segundo lado corta al tercer lado en su punto medio.

1.6.– Sea T un triángulo. Probar que las paralelas a dos de los lados que pasan por el baricentro dividen al tercer lado en tres segmentos de la misma longitud (Si los puntos a, b, c están alineados, diremos que los segmentos ab, bc tienen la misma longitud si $\overrightarrow{ab} = \pm \overrightarrow{bc}$).

1.7.– Si los lados opuestos de un cuadrilátero son paralelos (paralelogramo), probar que $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc}$ y que $\overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ad}$.

1.8.– Probar que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio. Calcular el centro de gravedad de un paralelogramo.

1.9.– Si los lados de un cuadrilátero C se trisecan, las rectas que unen los puntos de trisección adyacentes en lados distintos de C forman un paralelogramo.

1.10.– En $\mathbb{R}^3$ se consideran los puntos:

$$p_0 = (1, 2, 1),\ p_1 = (2, 1, 0),\ p_2 = (0, 1, 0),\ p_3 = (1, -1, 2).$$

Probar que forman un sistema de referencia afín en $\mathbb{R}^3$. Calcular las coordenadas de los puntos $p=(0,0,0)$, $q=(1,1,1)$ en dicho sistema de referencia.

1.11.– En $\mathbb{R}^2$ se consideran los sistemas de referencia $R=\{o,o+v_1,o+v_2\}$, $R'=\{o',o'+(v_1+v_2),o'+(v_1-v_2)\}$, donde $\{v_1,v_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$. Supongamos que $\overrightarrow{oo'}=v_1+v_2$.

1. Escribir las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de R a R'.
2. Calcular las coordenadas del punto $p_R=(1,0)$ en el sistema de referencia R'.

1.12.– En un plano afín A se considera el sistema de referencia afín $R=\{a,b,c\}$ y los puntos:

$$\begin{aligned} a' &= a+2\overrightarrow{ab}, \\ b' &= a+\overrightarrow{ab}-\overrightarrow{ac}, \\ c' &= a-\overrightarrow{ab}-\overrightarrow{ac}. \end{aligned}$$

Probar que $R'=\{a',b',c'\}$ es un sistema de referencia afín en A. Calcular las coordenadas de un punto en R' en función de las coordenadas en R.

1.13.– Sea S un subespacio afín de A, y $p\in A$. Probar que $S=p+\overrightarrow{S}$ si y sólo si $p\in S$. Además, si $p\notin S$, probar que $S\cap(p+\overrightarrow{S})=\emptyset$.

1.14.– Demostrar que toda recta afín de $\mathbb{R}^3$ es la intersección de dos planos afines. ¿Es cierta esta afirmación en $\mathbb{R}^n$?

1.15.– Calcular ecuaciones paramétricas e implícitas de los subespacios afines de $\mathbb{R}^4$ generados por los puntos:

1. $p_0=(1,1,0,1)$, $p_1=(1,-1,1,0)$.
2. $p_0=(1,1,0,1)$, $p_1=(1,0,1,0)$ $p_2=(0,1,0,1)$.

1.16.– En cada uno de los siguientes casos, calcular la intersección $S\cap T$ y la suma afín $S\vee T$ de los subespacios afines S y T de $\mathbb{R}^3$:

1. $S=(1,2,-1)+L((1,0,-2))$, $T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2x+z=1, 4x+y+2z=4\}$.
2. $S=(-1,0,1)+L((1,1,1))$, $T=(1,1,1)+L((-1,-1,-1))$.
3. $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+z=1\}$, $T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+z=2, y-z=1\}$.

1.17.– Sean L una recta afín y S un hiperplano afín de A. Supongamos que $\overrightarrow{L}+\overrightarrow{S}=\overrightarrow{A}$. Probar que $L\cap S$ es un único punto.

1.18.– Sea $f:A\to A'$ una aplicación afín, y sea $m\in A$ el baricentro de los puntos $p_1,\dots,p_k$. Probar que $f(m)$ es el baricentro de los puntos $f(p_1),\dots,f(p_k)$.

1.19.– Sean $p_0,\dots,p_k$ puntos en un espacio afín A. Probar que el subespacio afín:

$$A(p_0,\dots,p_k)=p_0+L(\overrightarrow{p_0p_1},\dots,\overrightarrow{p_0p_k})$$

es el menor subespacio afín que que contiene a los puntos $p_0, \ldots, p_k$. ¿Cuándo es la dimensión de $A(p_0, \ldots, p_k)$ igual a k?

1.20.– Se considera S el plano afín de $\mathbb{R}^3$ que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) y verifica $\overrightarrow{S} = L((u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3))$. Probar que una ecuación implícita de S es:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & u_1 & v_1 \\ y - y_0 & u_2 & v_2 \\ z - z_0 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

1.21.– Sean S y T dos subespacios afines de un espacio afín A tales que $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{S} + \overrightarrow{T}$. Probar que $S \cap T \neq \emptyset$. Si, además, $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{S} \oplus \overrightarrow{T}$, entonces $S \cap T$ es un único punto. Probar que una recta afín S y un hiperplano T tales que $\overrightarrow{S} \not\subset \overrightarrow{T}$ se cortan en un único punto.

1.22.– Probar que en un plano afín dos rectas son, o bien iguales, o paralelas y distintas, o se cortan en un único punto.

1.23.– Sea S una recta afín y T un subespacio afín de dimensión mayor o igual que dos. Probar que se da sólo una de las tres siguientes posibilidades:

1. $S \cap T = \emptyset$,
2. $S \cap T$ es un único punto,
3. $S \subset T$.

Además, si T es un hiperplano afín, entonces $S \cap T = \emptyset$ implica que S es paralela a T.

1.24.– Sean S y T dos hiperplanos afines de un espacio afín A de dimensión $n = \dim A \geq 2$. Probar que se da sólo una de las siguientes posibilidades:

1. $S \cap T = \emptyset$ y los hiperplanos son paralelos,
2. $\dim(S \cap T) = n - 2$,
3. $S = T$.

1.25.– Probar que la aplicación afín $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (1 - 2x, 3 - 2y)$ es una homotecia. Calcular su centro y su razón.

1.26.– Calcular explícitamente una homotecia en $\mathbb{R}^3$ de centro (a, b, c) y razón $r \neq 0$.

1.27.– Sea $f : A \to A$ una aplicación afín. Probar que el conjunto de puntos fijos de f es una subespacio afín cuyo subespacio de direcciones es $\ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{A}})$.

1.28.– Determinar el conjunto de puntos fijos de la aplicación afín $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z) = (x + 3y + 3/2, -2y - 3/2, -4x - 4y - z - 2)$.

1.29.– Determinar la aplicación afín $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que tiene como puntos fijos los del plano $x + y + z = 1$ y tal que $f(0, 0, 0) = (1, 0, 0)$. ¿Es f un isomorfismo afín?

1.30.– Demostrar las siguientes afirmaciones:

1. Una traslación de un espacio afín queda determinada por la imagen de un único punto.
2. Una homotecia de un espacio afín queda determinada por la imagen de dos puntos distintos.
3. Una aplicación afín de una recta afín en si misma es, o constante, o una traslación, o una homotecia.
4. Las traslaciones y las homotecias son las únicas aplicaciones afines $f : A \to A$ tales que $f(S)$ es paralelo a S para todo subespacio afín $S \subset A$.