Relación de ejercicios

1. Resolver el modelo de rango infinito de vidrio de espín de Sherrington-Kirpatrick (modelo SK) usando el formalismo de réplicas: encontrar la expresión de la energía libre. Ver que para $T \to 0$ hay un cambio de fase en simetría de réplicas, desde una fase *ferromagnética* a una fase *vidriosa* con

$$q = \langle \langle s_{\mathbf{x}} \rangle^2 \rangle, \tag{1}$$

$$m = \langle \langle s_{\mathbf{x}} \rangle \rangle. \tag{2}$$

los parámetros que caracterizan la fase vidriosa y ferromagnética respectivamente. Encontrar expresiones cerradas para dichos parámetros en el estado estacionario. Encontrar el valor de la entropía en $T = 0$. Que implica dicho resultado.

2. En el modelo de difusión de iones magéticos fuera del equilibrio en aproximación de campo medio con un spin central demostrar que los estados estacionarios vienen dados por la expresión

$$\sum_{n=0}^{q} \left(\begin{array}{c} q \\ n \end{array} \right) y^n \Theta(n) = 0, \tag{3}$$

donde $y \equiv \mathrm{e}^{\,2\beta h}$, y

$$\Theta(n) \equiv 2n \left[\left[\frac{A(n)}{B(n)} \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{B(n)}{A(n)} \right]^{\frac{1}{2}} \right] - 2q \left[\frac{B(n)}{A(n)} \right]^{\frac{1}{2}}, \tag{4}$$

con $A(n) = [[\phi\left(2\beta J(2n-q) + 2\beta h_e\right)]]$ y $B(n) = [[\phi\left(-2\beta J(2n-q) - 2\beta h_e\right)]]$. con $[[g(J)]] \equiv \int f(J) g(J) dJ$ donde $f(J)$ es la distribución stacionaria de desorden J en la red. Estudiar la posibilidad de cambios de fase al bajar la temperatura $1/\beta$, para diferentes funciones $f(J)$ y de la rate microscópica $\phi(X)$.

3. Construir una red neuronal tipo McCulloch-Pitts que implemente las operaciones lógicas NOT, AND , OR y XOR.

4. Demostrar que:

$$\sum_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{x}} \langle s_{\mathbf{x}} \rangle = \lim_{\mathbf{h} \to 0} \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mathbf{h}} \ln Z. \tag{5}$$

5. Calcular el punto crítico en el modelo de Mattis para la aparición de estados de mattis. Demostrar que para $T \to 0$ se tiene $E = -\frac{1}{2}\mathbf{m}^2$ y $\mathbf{m} = \langle \langle \boldsymbol{\xi} \ \mathrm{sgn}(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{m}) \rangle \rangle$

6. Estudiar la estabilidad local de las soluciones *punto de silla* para el modelo de Mattis. Para ello introducir la matriz

$$Q^{\mu\nu} \equiv \langle \xi^\mu \xi^\nu \tanh^2(\beta \mathbf{m} \cdot \xi) \rangle_\xi$$

Ver que en el caso particular de estados mezcla simétricos, $\mathbf{m} = m_n(1, 1, \ldots, 0)$, solo hay 3 tipos de autovalores que cerca del punto crítico tienen el comportamiento:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\approx 2t \\ \lambda_2 &\approx \tfrac{2t}{3n-2} \\ \lambda_3 &\approx \tfrac{-4t}{3n-2} \end{aligned} \tag{6}$$

con $t = T_c - T$.

Estudiar la estabilidad de dichas soluciones para $T \to 0$. Calcular el valor de temperature T_n por debajo del cual las soluciones con n impar son localmente estables.