

Tema 1: Introducción a los sistemas complejos

4 de febrero de 2021

1. Complejidad en física

En la naturaleza aparecen ciertos sistemas que presentan fenomenología emergente que no puede derivarse solo de la comprensión de las leyes fundamentales que siguen sus componentes elementales, y su estudio ha originado conceptos que parecen tener relevancia en todas las ciencias y ramas del saber. Ejemplos sencillos son el fenómeno de la percolación, o “mojado” al propagarse un líquido a través de una sustancia sólida porosa, los modelos de pilas de arena, una red cuyos enlaces sean muelles elásticos, los gases reticulares y el gas con arrastre, el modelo de Ising y sus variantes, las redes de neuronas, los sistemas de reacción-difusión, etc. *Se trata de sistemas con muchos componentes que interactúan entre sí mediante el intercambio de fuerzas o información y, eventualmente, sufren la acción de agentes externos (campos eléctricos o magnéticos, gravedad, estímulos externos, cambios en el medio ambiente, etc.)*

La *fenomenología que presentan estos sistemas es compleja* en el sentido de que no se sigue de modo sencillo del conocimiento de las leyes de interacción entre los componentes. Además sus *cambios están caracterizados por diferentes escalas para el tiempo y el espacio*, esto es, nunca existe un suceso único característico. Existen, sin embargo, algunos rasgos de sencillez entre tanta complejidad; por ejemplo, las *propiedades estadísticas siguen a menudo sencillas leyes potenciales y hay cierta universalidad*, esto es, idénticas leyes potenciales para sistemas que, desde un punto de vista microscópico, son aparentemente dispares.

Algunos de estos sistemas tienen un alto número de grados de libertad y son objeto de un estudio más sistemático y riguroso mediante la **Física estadística**. En estos casos, dada una configuración \mathbf{s} de sus unidades elementales, puede definirse la función Hamiltoniano, H , que determina su energía total, $E = H(\mathbf{s})$. Si el sistema está en equilibrio canónico a temperatura T , se define la “función de partición”:

$$Z = \sum_{\{\mathbf{s}\}} e^{-H(\mathbf{s})/k_B T}$$

donde la suma es sobre todas las configuraciones posibles que puede adoptar el sistema, y cuyo logaritmo resulta ser la energía libre, esto es, *un potencial*

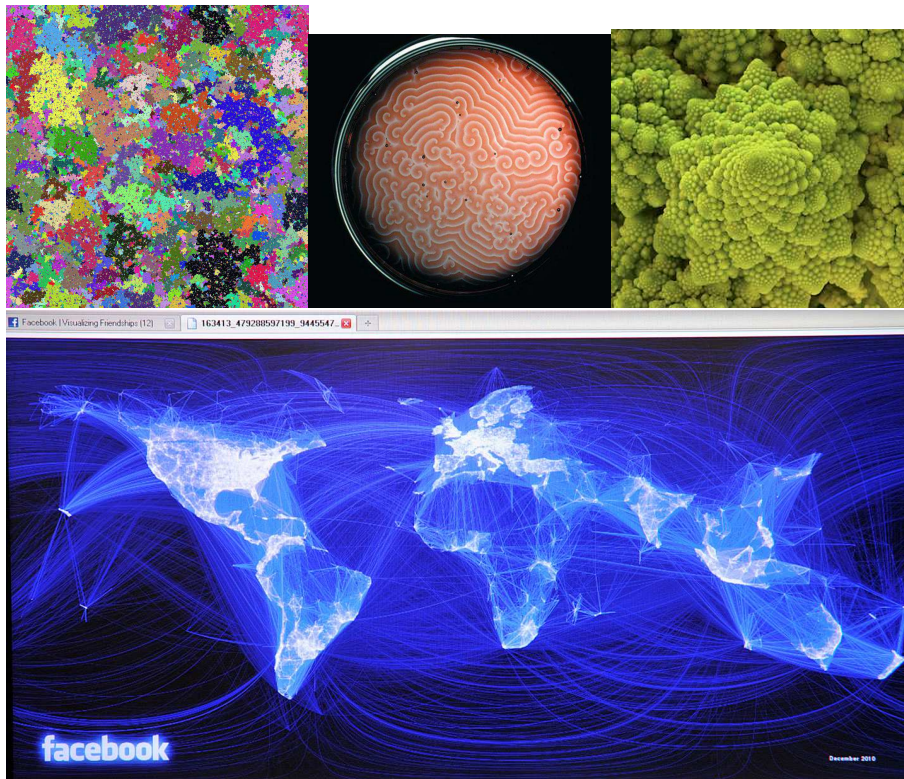


Figura 1: Ejemplos de complejidad en la naturaleza

termodinámico del que se sigue toda la información macroscópica sobre el sistema. Lamentablemente, pocos de los sistemas que nos interesan aquí pueden caracterizarse como sistemas en equilibrio con un Hamiltoniano bien definido, por lo que no se les puede aplicar este formalismo tan poderoso.

La aparición de fenómenos complejos está relacionada también con la *existencia de puntos críticos y puntos de bifurcación* donde tienen lugar *cambios estructurales o en las simetrías del sistema*, que puedan inducir una fase de inestabilidad o criticidad donde el sistema presenta – cuando recibe pequeños estímulos desde otras partes del sistema o desde el exterior – una *respuesta que es altamente no-lineal*. Esto puede ocasionar que pequeñas perturbaciones se intensifiquen y se propaguen sin amortiguamiento a lo largo del sistema o generen la aparición de cierto tipo de orden en el sistema.

1.1. Complejidad y caos

Otra de las características asociada a los sistemas complejos es *la sensibilidad a las condiciones iniciales* como ocurre con los *sistemas caóticos*. De hecho en el estudio de los sistemas complejos se introducen los sistemas caóticos como un paradigma de sistema complejo en el sentido que su comportamiento es complejo, altamente impredecible, manifestando alta sensibilidad a las condiciones iniciales y para el que es necesario la presencia de no-linealidades en la dinámica del sistema.

La complejidad y el caos puede surgir debido al alto número de grados de libertad que presenta el sistema y a las interacciones entre ellos, por ejemplo un fluido, o en sistema relativamente sencillos con pocos grados de libertad pero con no-linealidades presentes que inducen comportamiento impredecible y sensibilidad a las condiciones iniciales:

- Ejemplo: el atrayente de Lorenz.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= x(b - z) - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - cz\end{aligned}$$

Ejercicio: Simular y analizar el comportamiento complejo del atrayente de Lorenz.

- El atrayente de Rössler: solo presenta una no-linealidad en una de las variables y aun así presenta caos.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -y - z \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay \\ \frac{dz}{dt} &= b + z(x - c)\end{aligned}$$

Ejercicio: Simular y analizar el comportamiento complejo del atrayente de Rössler.

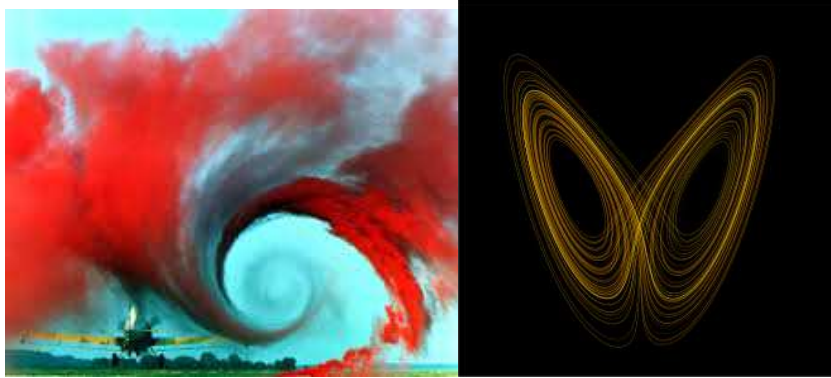


Figura 2: Ejemplos de turbulencia y caos en dos sistemas con diferentes grados de libertad. Un fluido presenta un alto número de grados de libertad que inducen la aparición de comportamiento emergente complejo. En cambio el atrayente de Lorenz solo tiene 3 grados de libertad pero las no-linealidades presentes en su dinámica microscópica inducen caos.

1.2. Autómatas celulares

Otro ejemplo de sistemas sencillos que dan lugar a complejidad son los llamados autómatas celulares como el “*Juego de la vida*” de Conway, que son sistemas reticulares donde los nodos o “células” pueden tener solo un número finito de posibles estados (dos en el caso del juego de la vida, esto es “vivo” o “muerto”) y donde con unas pocas *reglas locales de interacción* entre los nodos puede surgir una fenomenología emergente compleja:

En una red cuadrada regular cada célula interactúa con sus 8 células vecinas. En cada paso de tiempo pueden ocurrir las siguientes transiciones:

1. Cada célula viva con menos de dos vecinas vivas se muere.
2. Cada célula viva con dos o tres vecinas vivas permanece viva en el siguiente paso temporal
3. Cada célula viva con más de tres vecinas vivas muere como debido a una superpoblación.
4. Cada célula muerta con exactamente tres vecinas vivas pasa a estar viva (reproducción)

Con estas reglas sencillas aparecen formas cambiantes en el tiempo complejas, algunas que viajan a lo largo del espacio, otras estáticas y otras que cambian de forma periódica, etc.

Ejercicio: Simular el juego de la vida y estudiar su comportamiento emergente

Algunos ejemplos de formas en el juego de la vida:

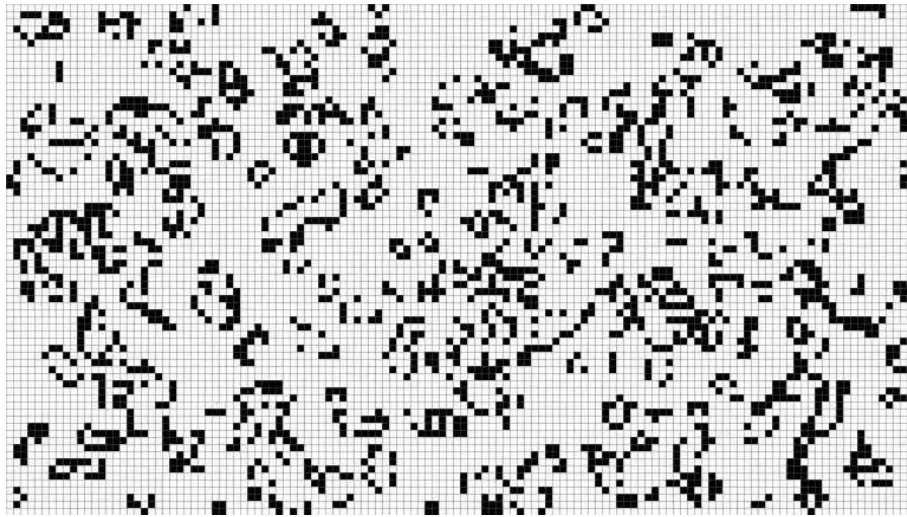
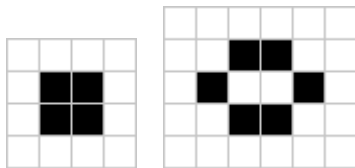


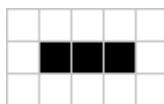
Figura 3: Configuración del Juego de la vida de Conway, donde se aprecian algunos de los organismos emergentes y complejidad

1. Formas sencillas:

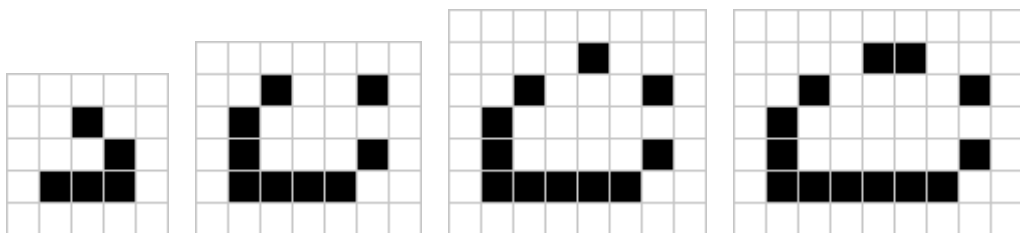
estáticas:



osciladores:



2. Naves espaciales:



3. Formas compuestas

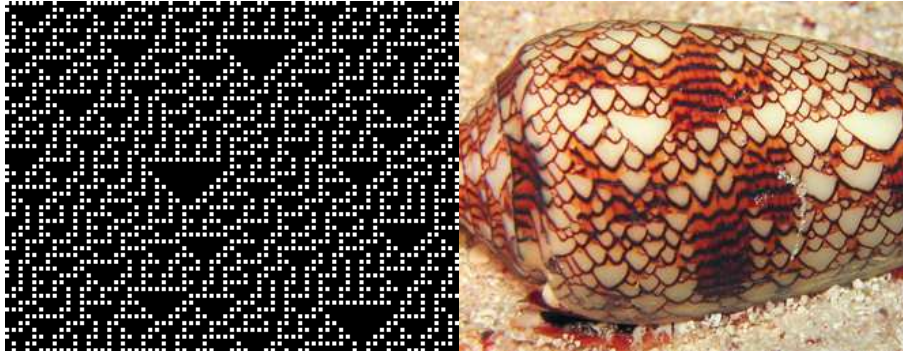
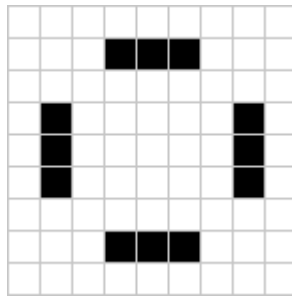


Figura 4: Similitud entre un 1-D autómata celular y un patrón biológico



(semáforo, oscilante)

Algunos autómatas celulares sencillos pueden explicar patrones observados en la naturaleza:

1.3. Sensibilidad a las condiciones iniciales

Para medir la sensibilidad a las condiciones iniciales se utiliza el llamado *exponente de Lyapunov* que indica como se separan las trayectorias de un sistema dinámico a partir de dos condiciones iniciales muy próximas. Si denotamos por $|\delta\mathbf{X}_0|$ la separación inicial de dos condiciones iniciales en la evolución del sistema dinámico

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t)$$

entonces la tasa de separación exponencial de dichas condiciones iniciales en cualquier tiempo posterior en cualquier componente del vector $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_N\}$, define los exponentes de Lyapunov, es decir asumiendo que dicha separación diverge exponencialmente en la forma

$$|\delta X_i(t)| \approx e^{\lambda_i t} |\delta X_{0,i}|$$

donde el conjunto $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ define el espectro de exponentes de Lyapunov. Dado el factor exponencial en la práctica basta con evaluar el mayor exponente

de Lyapunov para determinar si dos trayectorias muy próximas inicialmente se separaran o no, y se define entonces como

$$\Lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\delta \mathbf{X}_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{|\delta \mathbf{X}(t)|}{|\delta \mathbf{X}_0|}$$

de forma que un valor positivo para Λ implica una divergencia exponencial de la distancia entre las trayectorias a tiempos suficientemente largos para condiciones iniciales que difieren en un cantidad infinitesimal, es decir el sistema es caótico o aperiódico y la dinámica impredecible y compleja.

2. Auto-organización

El término auto-organización está muy íntimamente relacionado con el término de complejidad. Se entiende por *auto-organización el proceso mediante el cual un sistema natural se reproduce a sí mismo mediante sus propia lógica y los elementos que lo componen*. Es decir los sistemas auto-organizados son aquellos en los que ellos mismos son su propia causa y razón de ser (se producen a sí mismos). En estos sistemas aparece nuevo orden o nuevos fenómenos que resultan de la interacción entre todos los elementos del sistema. Se trata por tanto de fenómenos “emergentes” resultado del efecto cooperativo de los elementos que lo constituyen.

- Los sistemas auto-organizados son autocontenidos, todo ocurre dentro del sistema.
- Los sistemas auto-organizados son sistemas complejos: criticidad, no-linealidad, bifurcación hacia la inestabilidad, aparición de orden, retroalimentación de procesos.
- La auto-organización de los sistemas complejos induce una *jerarquización* de los mismos, en el sentido de que, primero aparecen fenómenos emergentes en un nivel alto que no se encuentran o se pueden explicar al nivel de los constituyentes elementales (por ejemplo en el caso del cerebro las memorias, la autoasociación, el recuerdo o la propia conciencia son funciones de alto nivel que no se pueden comprender sólo del funcionamiento de las neuronas o de las sinapsis, y mucho menos si nos retrotraemos a nivel molecular y atómico), y en segundo lugar porque *la complejidad es mayor en los niveles más altos* que a nivel más elemental (por ejemplo un árbol, la propia estructura de una neurona, o la propia estructura del cerebro).

3. Criticidad

Como hemos dicho muchos rasgos que caracterizan a los sistemas complejos son comunes a los sistemas que pueden sufrir un *cambio de fase* cuando se

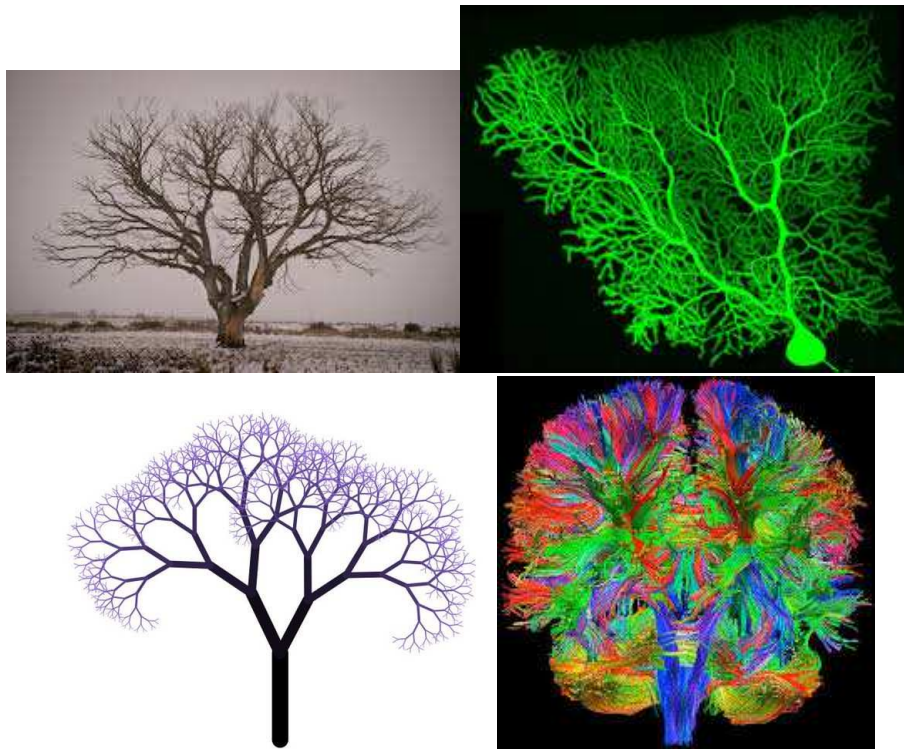


Figura 5: Universalidad de complejidad en diferentes sistemas. La figura muestra jerarquización de la complejidad. De izquierda a derecha y de arriba a bajo se trata de un árbol, una neurona de Purkinje, un fractal determinista y el conectoma del cerebro humano.

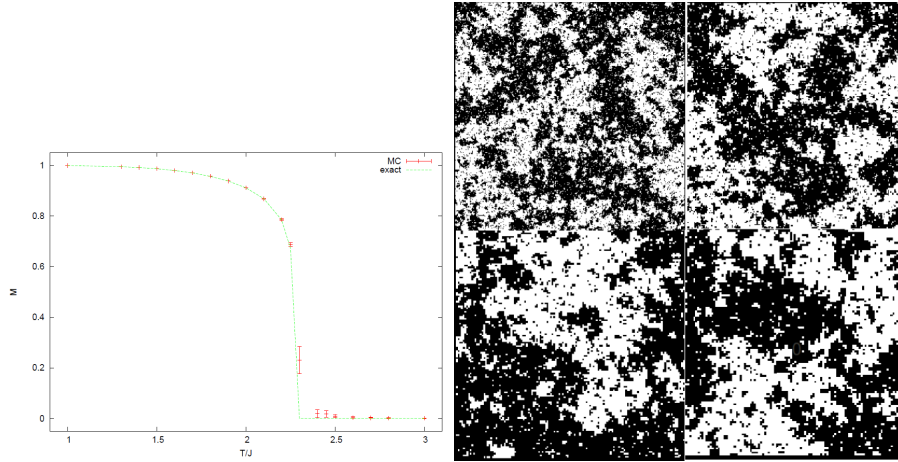


Figura 6: Izquierda: Cambio de fase en el modelo de Ising en dimensión $d = 2$ mostrando la temperatura crítica por encima de la cual el sistema es paramagnético ($M = 0$) y por debajo de la que es ferromagnético ($M \neq 0$). Derecha: Invariancia de escala en el modelo de Ising en dimensión $d = 2$ en el punto crítico $T = T_C$. Cada foto representa una región del sistema donde se ha aumentado la escala $\times 4, 9, 16$ el sistema original en el panel primero a la izquierda con un tamaño de $L = 400$.

varía ciertos parámetros (como por ejemplo la temperatura o la densidad del sistema) y que por lo tanto pueden ser sintonizados en un **punto crítico**. En ellos aparecen fenómenos relevantes como, por ejemplo, **respuesta no lineal a estímulos** que se intensifica y propaga sin amortiguamiento por todo el sistema como si todo el sistema estuviera correlacionado como en un estado crítico (**divergencia de la longitud de correlación**), o la existencia de **leyes de potencias** para las distribuciones estadísticas de propiedades del sistema (existencia de avalanchas de actividad en el espacio y el tiempo que se distribuyen mediante leyes de potencias) y como consecuencia de esto aparece en dicha situaciones **invariancia de escala**, por ejemplo veamos el modelo de Ising en el punto crítico

$$H(\mathbf{s}) = -\frac{1}{2}J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j - h \sum_{i=1}^N s_i.$$

En general, la invariancia de escala se pone de manifiesto de la siguiente forma, por ejemplo, si tenemos una ley potencial:

$$f(x) = Ax^{-\eta}$$

Si cambiamos de escala $x \rightarrow ax$, obtenemos

$$g(x) = (Aa^{-\eta})x^{-\eta}$$

es decir, para cualquier valor del exponente η , $g(x)$ es una función indistinguible de $f(x)$, excepto que la amplitud A ha cambiado en un factor $a^{-\eta}$. Dicho de otro modo, el cambio relativo $f(x)/f(ax) = a^{-\eta}$ es independiente de x , luego **no existe una escala característica** en el fenómeno. Por otra parte, esta invariancia de escala implica decaimientos cualitativamente prolongados (algebraicos). Estas propiedades no se dan si el fenómeno está controlado por funciones exponenciales como $\exp(-x/\xi)$. En este caso, los decaimientos son rápidos, y un cambio de escala $x \rightarrow ax$ cambia la longitud de correlación ξ (que mide la escala característica para el decaimiento) en un factor a : no hay invariancia de escala. En la práctica, las leyes potenciales que caracterizan la criticidad se extienden a lo largo de un rango finito para la distancia, el tiempo u otra variable, pues son finitos la extensión de los sistemas reales y el tamaño de sus elementos (partículas). Un ejemplo de invariancia de escala en un sistema complejo es la que se observa en el punto crítico del cambio de fase del modelo de Ising mostrado en la figura 6. Una magnitud útil para determinar si un sistema se encuentra en un punto crítico es la **función de correlación espacial** definida como

$$G(\mathbf{r}) = \langle n(\mathbf{r}_0)n(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}) \rangle_{\mathbf{r}_0} - \langle n(\mathbf{r}_0) \rangle_{\mathbf{r}_0}^2$$

donde $n(\mathbf{r})$ es un campo que describe espacialmente el estado del sistema. Por ejemplo, si $n(\mathbf{r}, t)$ es la densidad local de partículas en un líquido o la magnetización local en un cristal magnético. Se tiene que lejos de la “temperatura crítica”, estas correlaciones decaen exponencialmente, $G(r) \sim \exp(-r/\xi)$ más allá de la longitud de correlación ξ . Este parámetro diverge $\xi \sim |T - T_C|^{-\nu}$ al aproximarse a la temperatura crítica. En el punto crítico, $T = T_C$, la función de correlación cambia su comportamiento funcional de exponencial a algebraico, $G(r) \sim r^{-\eta}$. En consecuencia, la divergencia de ξ se considera como señal de ausencia de una escala característica de longitudes en T_C . En la práctica, las funciones de distribución suelen ser más apropiadas que la $G(r)$ para evidenciar invariancia de escala y criticidad.

En algunas situaciones la magnitud de interés fluctúa en el tiempo, $q(t)$ de forma que es más útil definir la **función de correlación temporal**:

$$G(t) = \langle q(t_0)q(t_0 + t) \rangle_{t_0} - \langle q(t_0) \rangle_{t_0}^2$$

La rapidez con que $G(t)$ disminuye hacia este valor desde la fluctuación instantánea media, $G(0)$, mide la duración de las correlaciones o efectos de memoria en la señal $q(t)$.

Dada una señal $q(t)$ tal que su densidad espectral de potencia

$$S(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T dt q(t) e^{2i\pi ft} \right|^2$$

de forma que si tenemos $S(f) \sim 1/f^\beta$ es un indicativo de criticidad.

Volvamos sobre el concepto de criticidad. Para medir cómo reacciona el sistema a una perturbación externa puede definirse el tiempo de respuesta –o reacción– característico y la longitud de correlación –o escala para las longitudes–, a lo largo de la que decae espacialmente la perturbación. En un estado ordinario (no crítico), aunque la respuesta puede diferir en detalle al cambiar la posición y el instante de la perturbación, la distribución de respuestas es estrecha y queda bien caracterizada por la respuesta promedio (distribución exponencial o Gaussiana). Por el contrario, la misma perturbación aplicada cambiando la posición y/o el instante origina una respuesta de tamaño impredecible si el sistema es crítico; el promedio puede no existir (como ocurre de hecho en algunas distribuciones tipo ley de potencias) y, en cualquier caso, no es una medida suficiente de la respuesta.

4. Criticidad auto-organizada

El descubrimiento de la criticidad auto-organizada (SOC) es uno de los logros más importantes de la física estadística en las últimas décadas. SOC agrupa un conjunto muy amplio de fenómenos que se dan en la naturaleza que ***combina la auto-organización y la criticidad*** para describir la complejidad observada en estos fenómenos. Por lo tanto podría definirse como un mecanismo físico para explicar la complejidad de muchos fenómenos naturales que aparecen no solo en física, sino en también en otras ramas del saber como la biología, la química, la sociología y la economía. El concepto de SOC fue propuesto por primera vez por Bak–Tang–Wiesenfeld (BTW) en un importante artículo publicado en 1987¹. SOC es una propiedad de los sistemas dinámicos por la que organizan su comportamiento microscópico presentando invariancia de escala en el espacio y el tiempo. La fenomenología emergente entonces se parece al comportamiento observado en los puntos críticos en los cambios de fase. Sin embargo y a diferencia a lo que ocurre en los cambios de fase, los sistemas que presentan SOC no requieren un ajuste externo fino de ningún parámetro de control (como por ejemplo podría ser la temperatura en el cambio de fase de hielo a agua líquida o de esta a gas o la densidad), es decir el sistema de auto-organiza de forma autónoma y dinámica en un comportamiento crítico. Ejemplos de sistemas que presentan SOC son los modelos de pilas de arena, que presentan avalanchas de arena sin una escala características en el tiempo y el espacio, modelos de terremotos, ciertos modelos de actividad cortical que presentan avalanchas de actividad también invariantes de escala, o las redes evolutivas invariantes de escala (como veremos más adelante) que explican la topología estructural, por ejemplo, de Internet, o de la propia topología estructural y funcional del cerebro humano.

El modelo más sencillo que muestra SOC es el llamado modelo de pila de arena BTW. Consiste en una red cuadrada (en dimensión $d=2$) donde en cada nodo hay definida una pendiente local $z(x, y)$, tal que $\sum_{x,y} z(x, y) < \infty$.

¹Bak, P.; Tang, C.; Wiesenfeld, K. (1987). "Self-organized criticality: an explanation of 1/f noise". *Physical Review Letters*. 59 (4): 381-384.



Figura 7: Configuración de pila de arena en el modelo BTW sobre una red regular cuadrada bidimensional. Los diferentes colores indican la altura de la pila en cada nodo de la red.

Cualquier punto tal que $z(x, y) > 4$ es inestable y se desmorona siguiendo la regla:

$$\begin{aligned} z(x, y) &\rightarrow z(x, y) - 4 \\ z(x \pm 1, y) &\rightarrow z(x \pm 1, y) + 1 \\ z(x, y \pm 1) &\rightarrow z(x, y \pm 1) + 1 \end{aligned}$$

Hay versiones del modelo que asumen también que en una escala temporal muy grande cada pila se va cargando

$$z(x, y) \rightarrow z(x, y) + 1 (\text{perturbación no conservativa})$$

5. Fractales

Los modelos de pila de arena son modelos de no-equilibrio que no necesitan ser sintonizados para que las magnitudes de interés muestren correlaciones de largo alcance y criticidad. Fueron propuestos como un mecanismo físico que explicara la aparición de complejidad en la naturaleza, la invariancia de escala y la existencia de los llamados fractales, como los árboles, los copos de nieve, las fracturas sísmicas, etc. Esta teoría ambicionaba explicar por qué los fractales y las series (fractales) con fluctuaciones $1/f$ son tan comunes en la naturaleza. De hecho, a pesar de todo lo que hoy sabemos acerca de los fractales (como veremos todavía no entendemos bien por qué se forman. ¿Qué aspectos en la

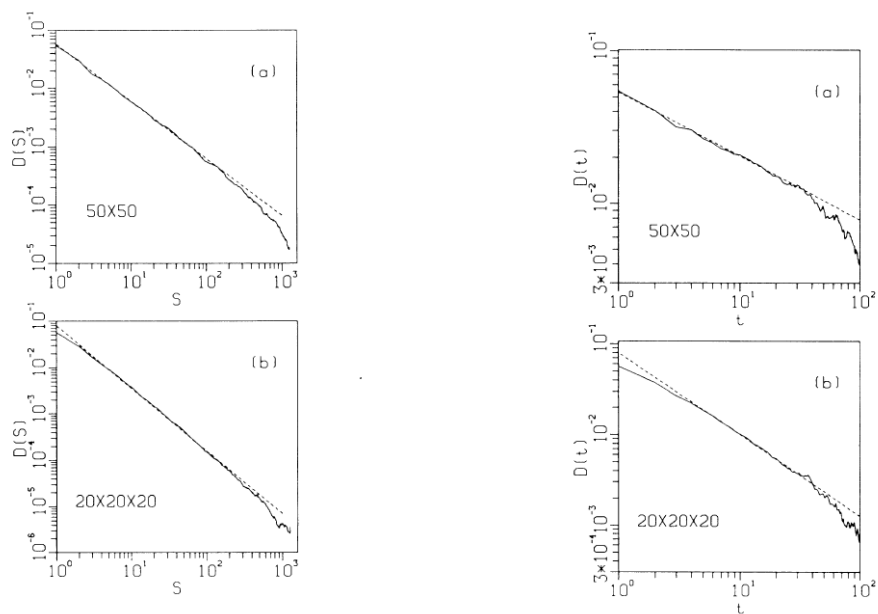


Figura 8: Distribución de tamaños s de avalanchas (izquierda) y de duración de avalanchas (derecha) en un modelo de pila de arena 2-D y 3-D, mostrando leyes potenciales en la forma $P(s) \sim s^{-\tau}$, $\tau = 0,98(2D)$ y $1,35(3-D)$, y $P(t) \sim t^{-\alpha}$ con $\alpha = 0,42(2-D)$ y $0,9(3-D)$.

evolución o en la dinámica de los sistemas complejos son responsables de la formación de fractales?. Muchos materiales forman estructuras cristalinas, como los metales y la sal común. No es demasiado sorprendente puesto que las fases cristalinas ordenadas se corresponden con la mínima energía posible. Pero los fractales no se corresponden con la configuración de mínima energía en equilibrio termodinámico, luego su formación debe de ser guiada por algún principio dinámico de selección mientras el sistema evoluciona (generalmente hacia un estado estacionario fuera del equilibrio).

Muchas estructuras espaciales naturales se forman por agregación espontánea de gran número de componentes idénticos. Por eficacia, este proceso de agregación sigue ciertas prescripciones sencillas que podemos llamar *principios de organización*. Los más sencillos son el *principio de regularidad* y el *principio de aleatoriedad*. El primero es responsable, por ejemplo, de las formas periódicas o casi periódicas en cristales, aleaciones, etc. El segundo es responsable de gases, vidrios, etc. Entre esos dos principios estaría el *principio de auto-semejanza* responsable de las estructuras llamadas fractales. En éstas, cuando una parte es ampliada usando el mismo aumento en todas las direcciones, se obtiene algo indistinguible del conjunto (invariancia de escala). Consecuentemente, el objeto tiene el mismo aspecto en (muchas) escalas distintas de observación (al igual que en un punto crítico).

Otra característica esencial de los fractales consiste en que se trata de una variedad matemática con *dimensión fraccionaria*. Notemos que, en relación con los sistemas que nos interesan, puede definirse, en primer lugar, su

1. **Dimensión euclídea**, d , como la del espacio en que reside; este número es siempre entero, $d = 1, 2, 3$, etc.
2. **La dimensión topológica**, d_T , se corresponde más con nuestra idea intuitiva de dimensión; $d_T = 1$ para una curva continua, $d_T = 2$ para una superficie continua, etc. Esta no puede superar la dimensión del espacio que contiene a la variedad matemática en cuestión, $d_T \leq d$.
3. También definimos **la dimensión Hausdorff**, que toma valores no enteros en variedades fractales, como sigue: Definimos “esferas d -dimensionales” como generalización del concepto tridimensional, esto es, un segmento de longitud $2a$ para $d = 1$, un disco de radio a para $d = 2$, etc. Sea $N(a)$ el número mínimo de esferas d -dimensionales necesarias para cubrir por completo la variedad en cuestión. Entonces, la dimensión Hausdorff, D , se define:

$$N(a) \sim a^{-D} \text{ para } a \rightarrow 0$$

o equivalentemente:

$$D = \lim_{a \rightarrow 0} \left(-\frac{\ln N(a)}{\ln a} \right) \quad (1)$$

y se tiene que $d_T \leq D \leq d$. El límite superior es claro, pues lo más que puede hacer una variedad (una curva, por ejemplo), por mucho que se

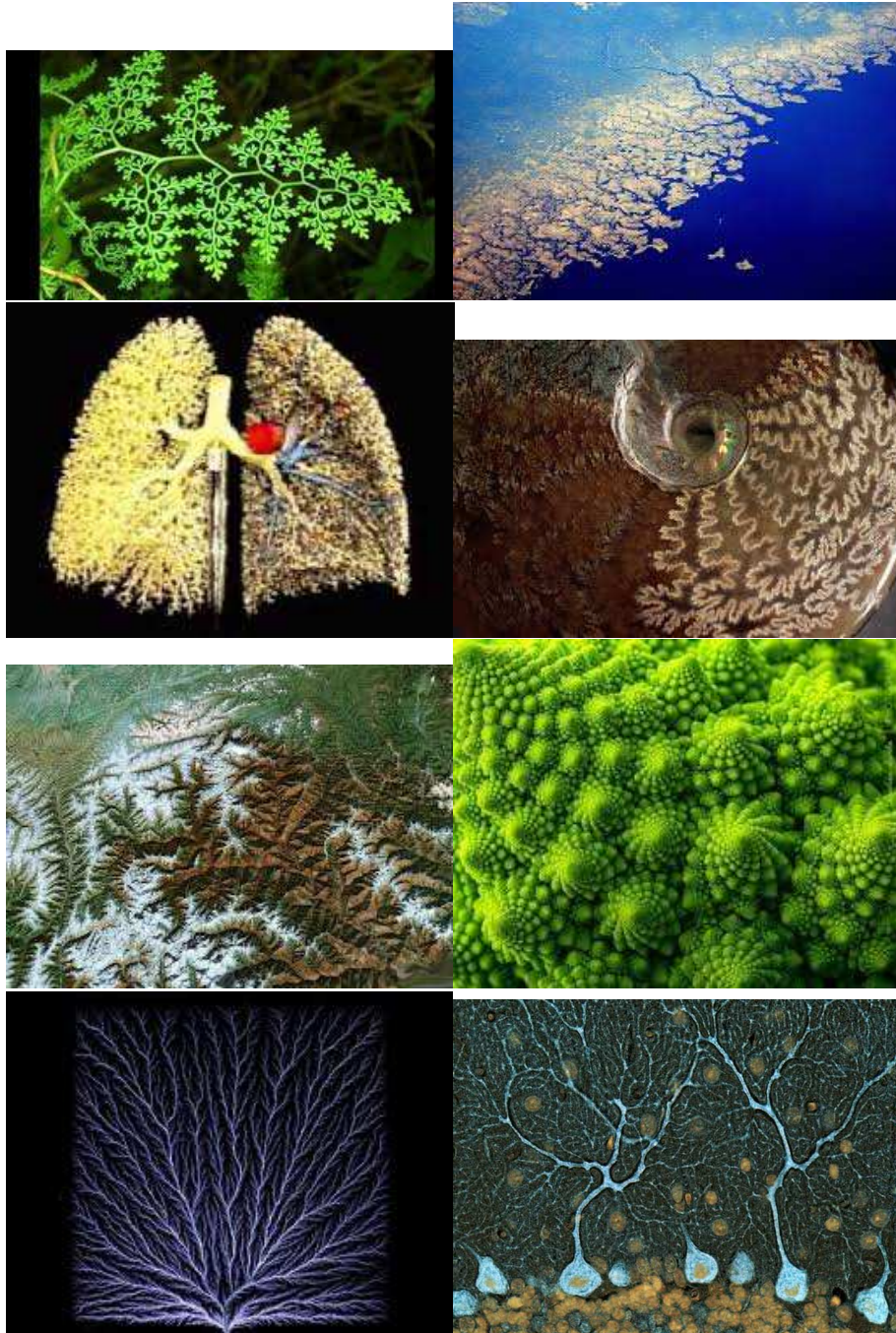


Figura 9: Algunos ejemplos de estructuras fractales en la naturaleza

distraiga, es llenar el espacio en el que está definida. También el límite inferior es claro: la variedad ha de tener, al menos, la dimensión de sus elementos.

Ejercicio: Demostrar que con la definición anterior se tiene para variedades continuas (curva, superficie, y volumen) las dimensiones esperadas.

Para variedades fractales, D difiere de la idea usual de dimensión. Para fractales generados en un proceso de crecimiento, es conveniente definir $M \sim R^D$, o explícitamente:

$$D = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln M}{\ln R} \right) \quad (2)$$

donde M es la masa del objeto cuando su dimensión lineal es R . Usualmente, esta definición conduce al mismo número que (1). Para ilustrar cómo aplicar esta definición, supongamos un objeto en un espacio de dimensión d , por ejemplo, $d = 2$, de longitud característica R , por ejemplo, el diámetro medio o el radio de giro. Si lo digitalizamos, para representarlo mediante píxeles en el ordenador, y asociamos una masa unidad a cada pixel, obtenemos la masa total M , y se sigue D inmediatamente. Si $D < d$, la masa crece más lentamente que R^d al crecer el tamaño del objeto; por ejemplo, al cambiar $R \rightarrow 2R$, la masa es $\sim (2R)^D < (2R)^d$. En consecuencia, la densidad disminuye. En efecto, el concepto ordinario de densidad es $\rho = M/R^d$; esto nos mide la fracción de espacio (d -dimensional) que realmente ocupa el objeto. En el ejemplo de crecimiento que estamos viendo la densidad cambiaría en la forma $\rho \rightarrow 2^{D-d}\rho < \rho$.

Nos convencemos de que D no es necesariamente entero, considerando los tres objetos de la figura, cuya masa es proporcional al área en negro. En (a), el objeto es un círculo, para el que $M = \pi R^2$, luego $D = 2$ de (2). Si R sigue designando el radio del círculo con trazado discontinuo, se tiene $M = NR^1$ en (c), con N el número de líneas, luego $D = 1$, como corresponde a una curva. La situación es intermedia en el caso (b), con $2 > D > 1$ y A una constante.

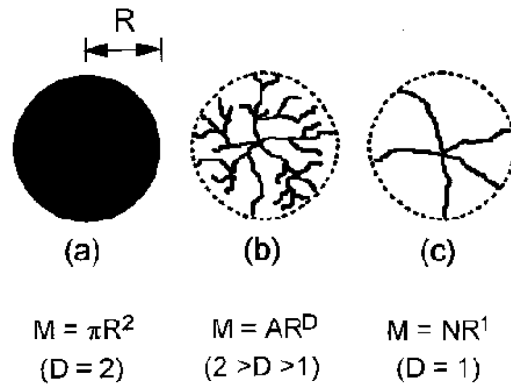


Figura 10: Cálculo de dimensiones Hausdorff en tres objetos diferentes.

Ejercicio: Calcular la dimensión Hausdorff de los siguientes fractales:

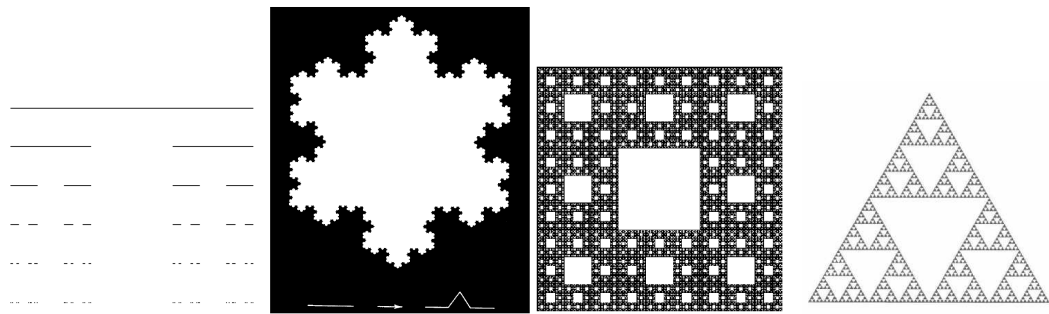


Figura 11: De izquierda a derecha, los fractales conocidos con el Conjunto de Cantor, la Isla de Koch, la Alfombra de Sierpinsky y la Junta de Sierpinsky.