

E. Geometría fractal

fnl.04

1.- Dimensión fractal

Muchas estructuras espaciales naturales se forman por agregación espontánea de gran número de componentes idénticos. Por eficacia, este proceso de agregación sigue ciertas prescripciones sencillas que podemos llamar *principios de organización*. Los más sencillos son el *principio de regularidad* y el *principio de aleatoriedad*. El primero es responsable, por ejemplo, de las formas periódicas o casi periódicas en cristales, aleaciones, etc. El segundo es responsable de gases, vidrios, etc. Entre esos dos principios estaría el *principio de auto-semejanza* responsable de las estructuras llamadas **fractales**. En éstas, cuando una parte es ampliada usando el mismo aumento en todas las direcciones, se obtiene algo indistinguible del conjunto. Consecuentemente, el objeto tiene el mismo aspecto en (muchas) escalas distintas de observación. Otra característica esencial consiste en que se trata de una variedad matemática con dimensión fraccionaria.

Notemos que, en relación con los sistemas que nos interesan, puede definirse, en primer lugar, su

- **dimensión euclídea**, d , como la del espacio en que reside; este número es siempre entero, $d = 1, 2, 3$, etc. La
- **dimensión topológica**, d_T , se corresponde más con nuestra idea intuitiva de dimensión; $d_T = 1$ para una curva continua, $d_T = 2$ para una superficie continua, etc. Ésta no puede superar la dimensión del espacio que contiene a la variedad matemática en cuestión, $d_T \leq d$. También definimos la
- **dimensión Hausdorff**, que toma valores no enteros en variedades fractales, como sigue:
Definimos “esferas d -dimensionales” como generalización del concepto tridimensional, esto es, un segmento de longitud $2a$ para $d = 1$, un disco de radio a para $d = 2$, etc.
Sea $N(a)$ el número mínimo de esferas d -dimensionales necesarias para cubrir por completo la variedad en cuestión.
La dimensión Hausdorff, D , se define:

$$N(a) \sim a^{-D}, \quad \text{para } a \rightarrow 0, \quad (1)$$

o equivalentemente,

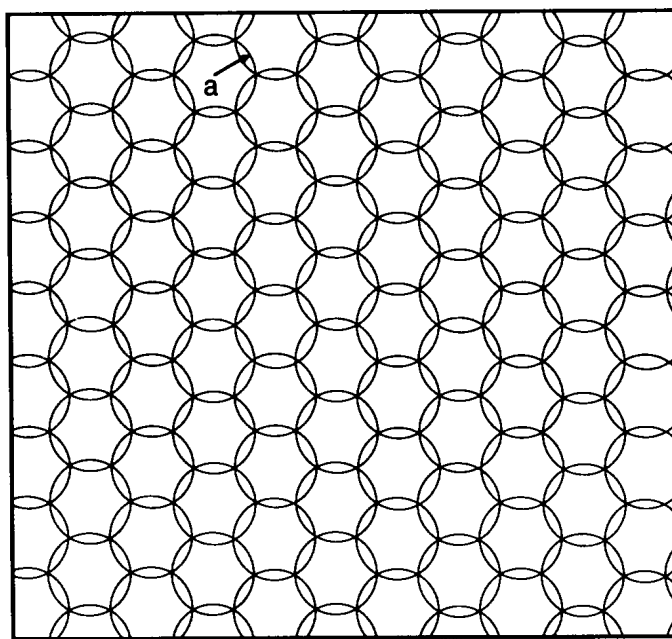
$$D = \lim_{a \rightarrow 0} \left(- \frac{\ln N(a)}{\ln a} \right)$$

Se tiene que

$$d_T \leq D \leq d.$$

El límite superior es claro, pues lo más que puede hacer una variedad (una curva, por ejemplo), por mucho que se distraiga, es llenar el espacio en el que está definida. También el límite inferior es claro: la variedad ha de tener, al menos, la dimensión de sus elementos.

La definición (1) conduce al resultado esperado para los casos familiares, curvas o superficies suaves. Por ejemplo, notemos:



Vemos que necesitamos $N \sim a^{-2}$ discos de radio a para cubrir un plano, luego $D = d_T = 2$. Luego vemos ejemplos de variedades menos familiares para las que D difiere de la idea usual de dimensión.

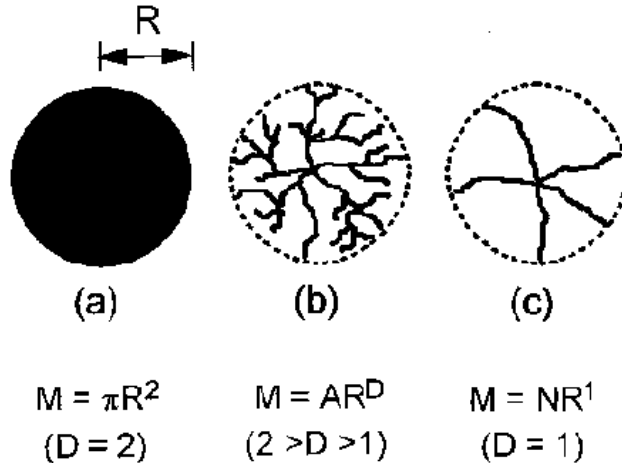
Para fractales generados en un proceso de crecimiento, es conveniente definir $M \sim R^D$, o explícitamente:

$$D = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln M}{\ln R} \right), \quad (2)$$

donde M es la masa del objeto cuando su dimensión lineal es R . Usualmente, esta definición conduce al mismo número que (1).

Para ilustrar cómo aplicar esta definición, supongamos un objeto en un espacio de dimensión d , por ejemplo, $d = 2$, de *longitud característica* R , por ejemplo, el diámetro medio o el radio de giro. Si lo digitalizamos, para representarlo mediante *pixels* en el ordenador, y asociamos una masa unidad a cada *pixel*, obtenemos la masa total M , y se sigue D inmediatamente. Si $D < d$, la masa crece más lentamente que R^d al crecer el tamaño del objeto; por ejemplo, al cambiar $R \rightarrow 2R$, la masa es $\sim (2R)^D < (2R)^d$. En consecuencia, la densidad disminuye. En efecto, el concepto ordinario de densidad es $\rho = M/R^d$; esto nos mide la fracción de espacio (d -dimensional) que realmente ocupa el objeto. En el ejemplo, $\rho \rightarrow 2^{D-d}\rho < \rho$.

Nos convencemos de que D no es necesariamente entero, considerando los tres objetos de la figura, cuya masa es proporcional al área en negro. En (a), el objeto es un círculo, para el que $M = \pi R^2$, luego $D = 2$ de (2). Si R sigue designando el radio del círculo con trazado discontinuo, se tiene $M = NR^1$ en (c), con N el número de líneas, luego $D = 1$, como corresponde a una curva. La situación es intermedia en el caso (b), con $2 > D > 1$ y A una constante.



Entre los ejemplos de fractales cito una bola de papel estrujado,¹ agregados y coloides, el modelo de agregación limitada por difusión (Lam p.51 y 240), árboles, rocas, montañas, nubes, galaxias (Lam p. 58), el modelo de rotura del comportamiento dieléctrico (Lam p. 166 y 245), polímeros y otros materiales (Lam p. 63), fracturas (Lam p.315), y el mercado de valores. No

¹Se trata de un experimento hecho por estudiantes descrito en MAF Gomes, *Am. J. Phys.* **55**, 649 (1987); *reprint* en Lam p.56.

se entiende todavía la ubicuidad de estos objetos en la naturaleza; la hipótesis de **criticalidad auto-organizada** pretende dar una explicación.

Una habilidad esencial en este negocio es la de saber determinar la dimensión de un fractal; a continuación desarrollo como ejemplos el caso del conjunto de Cantor y de otros fractales famosos, y se proponen problemas.

2.- Escala y auto-semejanza: los conjuntos de Cantor

La definición (1) —lo mismo puede decirse de (2)— es una **relación de escala**: el número de esferas *escala* con el radio, con un *exponente de escala*, D , que es la dimensión Hausdorff o fractal del objeto. Las relaciones de escala, que aparecen en la fenomenología de muchos sistemas complejos y en presencia de caos, implican **leyes potenciales**, esto es, comportamientos del tipo $y = Ax^a$ o, equivalentemente,²

$$y(\lambda x) = \lambda^a y(x), \quad \text{para todo } \lambda > 0;$$

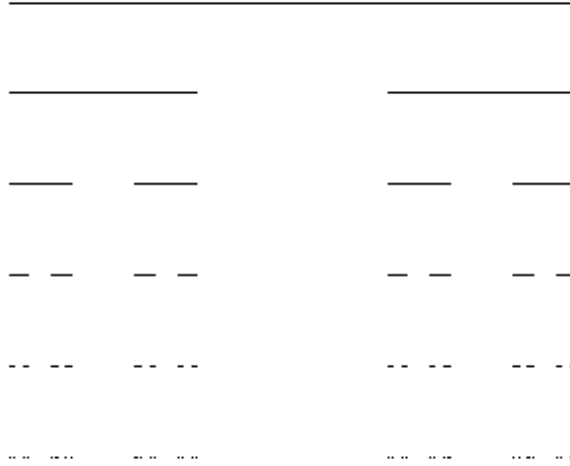
una función $y(x)$ con esta propiedad se dice que es **homogénea**. Las funciones homogéneas tienen la propiedad de **invariancia de escala**, esto es, si cambiamos $x \rightarrow x' (\equiv \lambda x)$, la nueva función $y'(x') [\equiv y(x)]$ tiene la misma forma que la original $y(x)$. Esta invariancia de escala (que también destaco en otras partes de la asignatura) implica que si amplificamos una parte del sistema hasta que tenga el tamaño de todo el objeto, no podremos distinguir la parte ampliada del objeto original. En otras palabras, **no hay una escala intrínseca** en el sistema. Un sistema con invariancia de escala ha de presentar auto-semejanza,³ y viceversa, y estas propiedades manifiestan el predominio de leyes potenciales $y \sim x^a$, esto es, comportamientos no-lineales (salvo si $a = 1$, un caso raro en este contexto).

Propiedades fractales (auto-semejanza) se presentan ya en el sencillo **con-**

²La equivalencia se sigue si tomamos $\lambda = 1/x$, que reduce esta ecuación a $y(x) = y(1)x^a$, que es $y = Ax^a$ con $A = y(1)$.

³En realidad, como resalta Mandelbrot, la equivalencia ocurre entre invariancia de escala y auto-afinidad, cuya relación con auto-semejanza establecemos más abajo.

junto de Cantor:⁴



que se construye tomando un segmento recto ($d = 1$) de longitud a_0 , dividiéndolo en tres partes iguales, quitando la del medio, repitiendo este proceso con los dos tercios restantes, y así sucesivamente. En el límite, queda un conjunto numerable de puntos, con $d_T = 0$ y $d = 1$. Calculemos D usando la prescripción (1):

Las ‘esferas’ son ahora segmentos rectos. La cuestión es qué longitud tomar para, usando el mínimo posible, descubrir la estructura del conjunto de puntos. La ley de formación sugiere el método más sencillo: tomar segmentos de longitud $a = a_0/3^n$ e ir haciendo $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. En el nivel n de detalle, necesitamos $N(a) = 2^n$ segmentos para cubrir por completo el conjunto. Puesto que $3^n = a_0/a$, se tiene $n = - [\ln(a/a_0) / \ln 3]$, y se sigue sucesivamente:

$$N(a) = 2^n = 2^{- [\ln(a/a_0) / \ln 3]} = \left(\frac{a}{a_0} \right)^{- (\ln 2 / \ln 3)},$$

es decir, $D = \ln 2 / \ln 3 = 0.6309\dots$

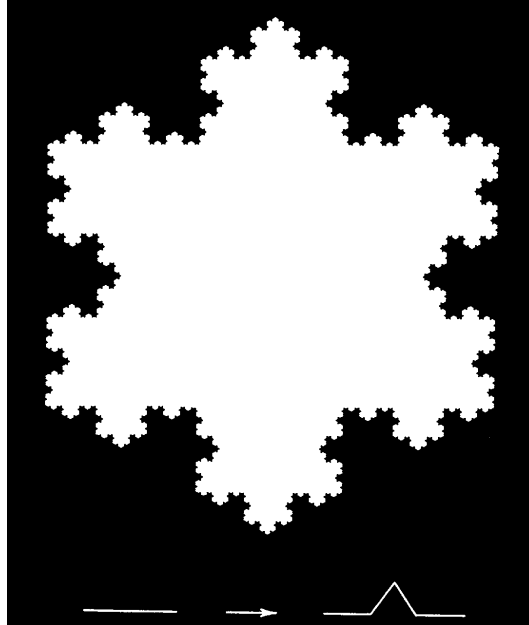
El conjunto es auto-semejante en el sentido de que, si tomamos una parte cualquiera del conjunto límite y la amplificamos, o reescalamos la unidad de longitud, en un factor 3, por ejemplo, se obtiene un conjunto de Cantor indistinguible del original. También hay invariancia de escala, pues tiene el mismo

⁴La trayectoria de un mapa bidimensional sencillo es un conjunto de cantor en la región caótica del espacio de parámetros; ver Creswick *et al.* (1992), capítulo 2.

aspecto en cualquier escala de longitudes: no hay una escala muy pequeña en la que se muestre *suave*, sino que su estructura típica aparece en cualquier escala de observación. De hecho, ambas propiedades están reflejadas en el comportamiento $N(a) \sim a^{-D}$ que, como acabamos de ver, se verifica con el exponente de escala $D = \ln 2 / \ln 3$.

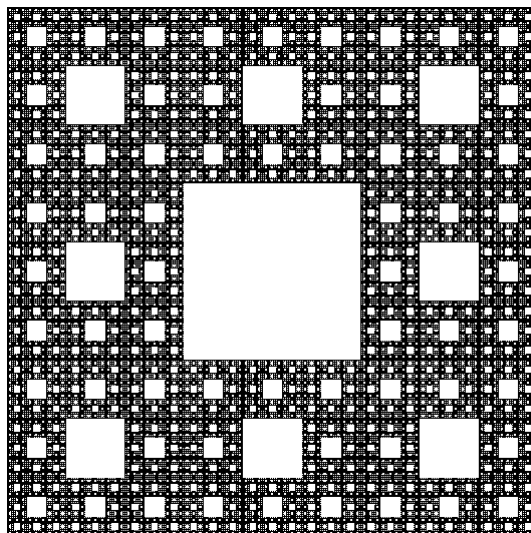
El cálculo de D puede también hacerse, directamente a partir de estas propiedades, notando que el número de segmentos se multiplica por 2 después de cada iteración, mientras que su longitud se reduce en un factor 3, luego el número de ‘esferas’ necesarias para cubrir el contorno crece de acuerdo con $N(a) = 2N(3a)$. Si aceptamos el comportamiento auto-semejante $N(a) \sim a^{-D}$, se sigue $a^{-D} = 2 \cdot (3a)^{-D} = 2 \cdot 3^{-D} \cdot a^{-D}$, luego $1 = 2 \cdot 3^{-D}$, de donde $D = \ln 2 / \ln 3$.

Es posible construir otras estructuras auto-semejantes en $d > 1$. Por ejemplo, las **islas de Koch** cuyo caso “triádico”; se forma partiendo de un triángulo equilátero unidad, dividiendo cada lado en tres partes, levantando otro triángulo equilátero de lado $1/3$ en cada uno de los tercios centrales, y reiterando *ad infinitum*:



El contorno resultante es una *curva* para la que intuimos $1 < D < 2$. Para calcular D , notamos que $d = 2$ y que nos enfrentamos con el problema de cubrir el contorno con discos. El número de lados se multiplica por 4 después de cada iteración, y su longitud se reduce en un factor 3, luego el número de discos necesarios para cubrir el contorno crece de acuerdo con $N(a) = 4N(3a)$, de donde se sigue (procediendo como antes) $D = \ln 4 / \ln 3 = 1.262\dots$





El conjunto de Cantor puede generalizarse a un espacio euclídeo bidimensional ($d = 2$), obteniendo el fractal conocido como **alfombra de Sierpinski**. Se toma el cuadrado unidad, se divide en nueve cuadrados iguales, se retira el central, y se sigue así *ad infinitum*:



Se tiene que $d_T = 1$, y $N(a) = 8N(3a)$, de donde se sigue $D = \ln 8 / \ln 3 = 1.8928\dots$

3.- La junta de Sierpinski

Uno de los más populares ejemplos de objeto fractal es una variación del anterior, la junta, juntura o acoplamiento (*gasket*), JS, introducida por el matemático polaco Waclaw Sierpinski en 1915, que se construye dividiendo un triángulo equilátero en cuatro triángulos (iguales) conectando entre sí los puntos medios de los lados del triángulo original, quitando el triángulo central así formado, y repitiendo el procedimiento en los triángulos restantes:

prefractal	n	ε	N_ε
	0	1	1
	1	2^{-1}	3
	2	2^{-2}	3^2
	3	2^{-3}	3^3
	\vdots	\vdots	\vdots
	n	2^{-n}	3^n

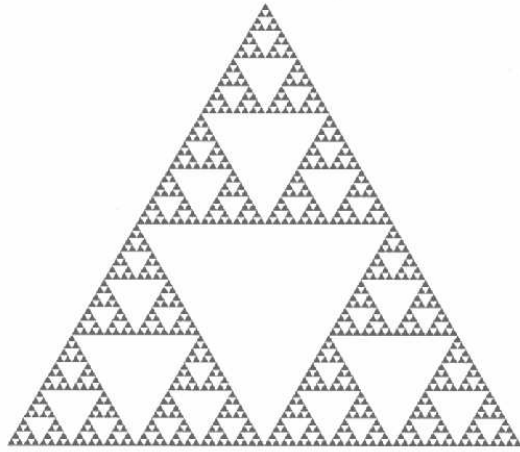
En esta figura mostramos el *iniciador* (la figura para $n = 0$) y el *generador* (caso $n = 1$); el conjunto de ‘triángulos’ que queda cuando $n = \infty$ es la JS. Para cada n , podemos cubrir los prefactales con triángulos de dimensión lineal $\varepsilon = 2^{-n}$ de los que, como indica la figura, necesitamos $N_\varepsilon = 3^n$.

Se sigue $D = \log 3 / \log 2 \approx 1.58$. Es decir, el resultado para $n = \infty$ no es un cuadrado ($D = 2$),⁵ sino más bien una ‘curva’ con propiedades matemáticas especiales, tales como que se cruza a ella misma en todo punto.⁶

⁵En efecto, comprobar que la definición conduce a $D = 2$ para un cuadrado, para lo que hay que cubrirlo con pequeños cuadrados siguiendo el procedimiento que hemos ilustrado para la JS.

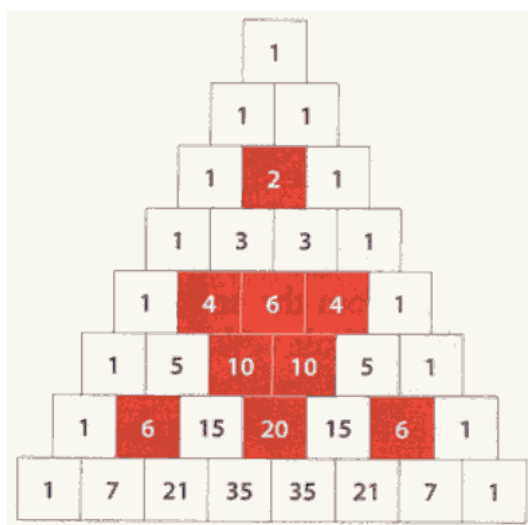
⁶Esta propiedad geométrica choca tanto con la intuición que se tomó originalmente como una curva patológica. En realidad, se corta a sí misma en todo punto, salvo en los tres vértices del triángulo mayor, por lo que Sierpinski, que quería esa propiedad, propuso considerar seis copias para formar un hexágono regular, lo que elimina la singularidad de esos puntos. Sigo aquí a Ian Stewart en ‘Mathematical Recreations’, *Scientific American*, p. 74, August 1999.

Mostramos el aspecto después de varias iteraciones:



Podemos preguntarnos si tiene interés, incluso práctico, el estudio de éste y otros objetos fractales. Notaré en primer lugar que la geometría fractal es susceptible de aplicaciones prácticas; por ejemplo, se han diseñado antenas con la forma de la JS que aprovechan su forma extraordinariamente intrincada.⁷ Más interesante para mí es la ubiquidad de estos objetos; voy a resaltar un par de situaciones, aparentemente muy distantes que, sin embargo, resultan tener una geometría similar a la de la JS.

Por ejemplo, notemos una interesante conexión entre este fractal y el **triángulo de Pascal**:

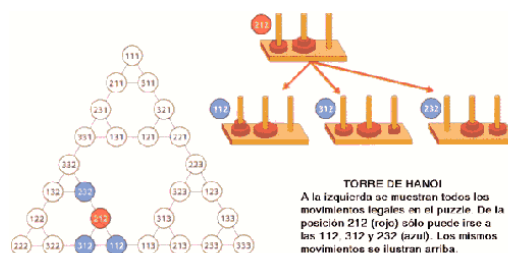


en el que cada número es la suma de los dos que tiene encima. Notemos que estos números son los coeficientes binomiales: numerando las filas y las posiciones en cada fila empezando por 0, la posición k en la fila n es el número de formas distintas de elegir k objetos de un conjunto con n . Vemos que los números impares forman una versión discreta de la JS. Por supuesto, esta similitud tiene consecuencias. Por ejemplo, se sigue —en contra de la primera intuición que uno puede desarrollar al ver la figura anterior— que prácticamente todos los coeficientes binomiales son pares, o que, al crecer el triángulo de Pascal, la relación entre números impares y pares tiende a cero. Esto es consecuencia de que, al ser la JS una curva, su área, que en el límite representa la proporción de números impares, es cero.⁸

⁷Ver ‘Practical Fractals’, en *Scientific American*, July 1999.

⁸Este resultado fue probado, sin haber sido propuesta la JS, en 1890, por el matemático francés Édouard Lucas. Recientemente, David Singmaster (South Bank University, Londres) ha probado que, para cualquier m , casi todos los coeficientes binomiales son divisibles por m .

Un famoso rompecabezas conocido como **la torre de Hanoi** (TH) (popularizado en 1883 por Lucas usando el seudónimo *M. Claus*) consta de ocho discos (o menos; aquí ilustraremos el caso de tres) montados sobre tres pernos o palillos, como en la figura. Los discos se colocan en un mismo palillo ordenados por tamaño, y tienen que moverse, de uno en uno, de modo que nunca descansa un disco sobre otro de menor diámetro. Se trata de mover todos los discos a un palillo distinto del original.



La solución para $n + 1$ discos puede deducirse inmediatamente de la solución para n discos. Por ejemplo, supongamos que sabemos resolver el caso de 3 discos y hemos de hacer el de 4. Empezamos ignorando el disco del fondo y transferimos —como sabemos— los otros 3 a un palillo vacío; movemos entonces el cuarto al otro palillo vacío y —usando de nuevo la solución para 3— transferimos los 3 primeros encima del que originalmente estaba en en fondo. Es decir, la solución es recurrente, lo que permite una interpretación geométrica.

En efecto, podemos dibujar un gráfico que conste de nodos, que representen las posiciones permitidas para los discos, unidos por líneas que indican los movimientos posibles entre posiciones.⁹ Llamaremos H_n el gráfico asociado con n discos. El caso H_3 ha sido dibujado arriba suponiendo que numeramos los discos 1, 2 y 3 para tamaños crecientes, y los palillos 1, 2 y 3 de izquierda a derecha. Tenemos, por ejemplo, las siguientes asociaciones disco–palillo en la imagen más superior: 1–2, 2–1 y 3–2, con el disco 3 necesariamente bajo el 1, lo que podemos representar simplifcadamente por 212, los números de los palillos donde están los discos 1, 2 y 3, respectivamente. Cualquier otra distribución se representa mediante una secuencia similar (hay $3^3 = 27$ posibilidades, puesto que cada disco puede encontrarse en cualquier palillo, independientemente de los otros).

Puesto que el disco menor ha de encontrarse arriba, se sigue que 212 sólo puede evolucionar hacia 112, 312 y 232, el caso representado en la figura.

⁹Cualquier rompecabezas de este tipo general, con objetos que se mueven y un número finito de posiciones, puede interpretarse geoméricamente de modo similar, con nodos unidos por líneas.

Las 27 distribuciones posibles (3^3 , puesto que cada disco puede encontrarse en cualquier palillo, independientemente de los otros) pueden representarse en un diagrama que indique todos los movimientos permitidos a partir de la distribución inicial 111. (Si se parte de 222 ó 333, sólo hay que rotar el diagrama 120° ó 240° .)

La figura muestra cómo H_3 consta de 3 copias del gráfico más pequeño H_2 (en éste hay que considerar sólo los dos primeros dígitos, de modo que las condiciones iniciales son 11, 22 ó 33), y éste tiene una estructura triple similar. Como podemos imaginar, esta propiedad, consecuencia del carácter recurrente de la solución, se repite para cualquier H_n , que será copia de 3 gráficos H_{n-1} conectados del mismo modo triangular. Es también evidente que, al ir aumentando el número de discos, el gráfico irá pareciéndose más y más a la JS.

El gráfico H_n permite determinar con facilidad las propiedades de la TH. Por ejemplo:

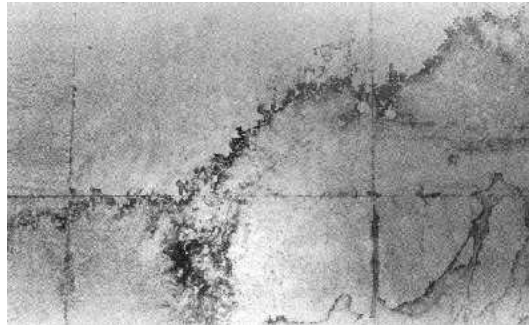
- El camino mínimo desde cualquier condición inicial (uno de los vértices del triángulo mayor) hasta una de las distribuciones finales (otro vértice del mismo triángulo) es el lado correspondiente, que consta de $2^n - 1$ líneas, luego éste es el número mínimo de movimientos para resolver el rompezabezas.
- El gráfico es conexo, todo de una pieza, luego puede conseguirse cualquier distribución de los discos a partir de una dada.
- El matemático alemán Andreas Hinz mostró en 1989 que el número medio de movimientos en H_n entre dos posiciones cualquiera, tomadas al azar, se acerca a $(466/885) 2^n$ para n grande. Como consecuencia de la semejanza, esto implica que la distancia media entre dos puntos de la JS es $466/885 \simeq 0.53$ si tomamos como unidad de longitud la de cada lado de la junta ($2^n - 1 \approx 2^n$ en la TH).¹⁰

4.- Multifractalidad

A veces se hace necesario amplificar una parte del objeto usando aumentos *diferentes* para las distintas direcciones si se quiere obtener una forma

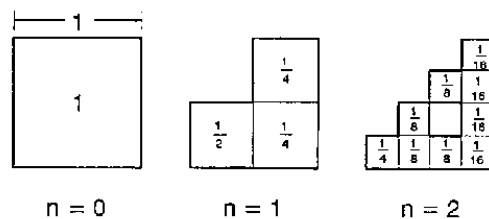
¹⁰También mostró que la variancia para esa distancia es precisamente $904808318/14448151575 \simeq 0.06$

semejante al conjunto. Se dice entonces que se trata de un **fractal auto-afín** (mientras que el caso ordinario, en el que todos los aumentos han de ser iguales, tiene *auto-semejanza*). En otras palabras, el término **auto-afinidad** se refiere a invariancia bajo *algunas* reducciones y dilataciones, mientras que el más familiar de **auto-semejanza** es el caso especial correspondiente a reducciones isotrópicas. Las interfases y superficies rugosas suelen presentar auto-afinidad; es el caso de la costa de Galicia o la curva irregular superior en



formada por un líquido que se ha secado después de caer libremente al suelo desde lo alto.¹¹ A estos objetos se les conoce como **multifractales**,¹² puesto que se sigue que diferentes regiones del objeto tienen diferentes propiedades fractales. De hecho, multifractalidad y auto-afinidad se consideran propiedades equivalentes. Mientras que la estructura fractal queda caracterizada por un único exponente de escala, D , la descripción completa de una estructura multifractal puede requerir varios exponentes.

Veamos cómo generar un sencillo multifractal. Partimos de una pieza cuadrada de papel de lado unidad y masa unidad. Dividimos el cuadrado en cuatro cuadrados iguales, y cortamos y doblamos el cuadrado izquierdo de arriba sobre el cuadrado izquierdo de abajo, con lo que éste dobla su masa:



¹¹Puede también verse HE Stanley & P Meakin, *Nature* **335**, 405 (1988) donde se presentan ejemplos naturales de comportamiento fractal en interfases y superficies complejas, y en el flujo de un fluido en un medio poroso.

¹²Benoit B. Mandelbrot, en 'Multifractals and $1/f$ Noise. Wild Self-Affinity in Physics', Springer 1998, dice que la auto-afinidad toma tres formas distintas: unifractalidad, mesofractalidad y multifractalidad; ver páginas 14, 15, 44 y 45.

Se repite este proceso de cortar y doblar hasta el infinito. El resultado es un multifractal.

Todavía más sencillo, podemos construir un conjunto de Cantor multifractal introduciendo dos escalas: r_1 y r_2 . Esto es, tomamos el segmento unidad, lo dividimos en segmentos de longitud r_1 , $1 - (r_1 + r_2)$ y r_2 , separamos el central, y reiteramos el proceso en los dos restantes *ad infinitum*.

Se manifiesta auto-semejanza en el sentido de que los subconjuntos que se forman en los intervalos $[0, r_1]$ y $[1 - r_2, 1]$ son idénticos al total salvo un factor de escala. Imaginad que hemos cubierto el conjunto total con $N(a)$ varillas de longitud a . Amplificamos, o reescalamos, la parte izquierda en $[0, r_1]$ con un factor $1/r_1$, lo que también reescala las varillas cobertoras. Como esta parte es similar al conjunto, al reescalarla se hace congruente, y el número de varillas en la parte izquierda es $N(a/r_1)$. El mismo argumento puede hacerse en la parte derecha con el factor de escala $1/r_2$, luego

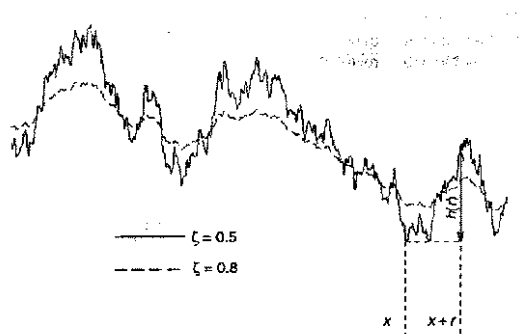
$$N(a) = N\left(\frac{a}{r_1}\right) + N\left(\frac{a}{r_2}\right)$$

y, puesto que $N(a) \sim a^{-D}$, se sigue $r_1^D + r_2^D = 1$. Si se tiene un generador con n elementos, la extensión de este argumento basado en auto-semejanzas lleva a

$$\sum_{i=1}^n r_i^D = 1,$$

ecuación que determina D . (Como ejercicio, comprobar que $D \simeq 0.611$ si $n = 2$, $r_1 = 0.4$ y $r_2 = 0.25$.)

Algunas superficies de fractura en materiales como el acero son ejemplos notables de auto-afinidad que han sido bastante estudiados.¹³ La observación muestra en estos casos superficies cuyos cortes en un plano tienen el aspecto de la curva en la figura al principio de esta sección o, esquemáticamente:



¹³Por ejemplo, E. Bouchaud & F. Paun, 'Fracture and Damage at a Microstructural Scale', *Computing in Science & Engineering*, September/October 1999, p.32.

Definimos $h(r)$ como la diferencia de altura (a lo largo del eje z) típica entre dos puntos de la superficie (de la que mostramos una sección para un valor de y) separados una distancia r . Se encuentra que

$$h(r) \sim r^\zeta,$$

lo que define el **índice de rugosidad** de la superficie, ζ . Este comportamiento de escala es válido para $r < \xi$, la longitud de correlación. El dibujo muestra casos $\zeta = 0.5$, muy sugoso, y 0.8 (curva discontinua), relativamente suave. Hay cierta evidencia experimental de que ζ podría tener el mismo valor para materiales y condiciones muy diferentes.

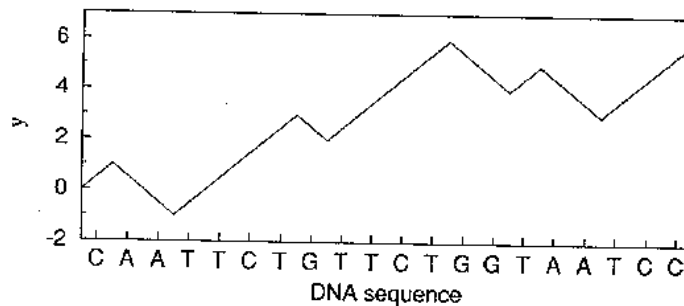
5.- Caminos aleatorios y ADN

Desde hace tiempo se conoce el papel de las secuencias de ADN (genoma) en la codificación de la estructura de las proteínas. La secuencia del genoma es probablemente la base de datos más sofisticada creada por la naturaleza mediante el proceso dinámico de la evolución. Los bloques básicos de información en el genoma son ciertas moléculas orgánicas llamadas nucleótidos que son dos purinas: Adenina (A), Guanina (G); y dos pirimidinas: Citosina (C) y Tiamina (T). Una secuencia de ADN sería pues una secuencia de esas 4 letras. Hay varias formas de construir dichas secuencias, por ejemplo de forma secuencial mediante cadenas de Markov que permite ver correlaciones de corto alcance. Otros métodos, basados en el uso de transformadas de Fourier, se centran en descubrir patrones repetidos a lo largo de la secuencia. Sin embargo, la complejidad de las secuencias de ADN hace que sea necesario el desarrollar nuevos métodos de análisis, algunos de los cuales involucran técnicas de campos tan dispares como el análisis de series temporales, la mecánica estadística, la geometría fractal, e incluso la lingüística.

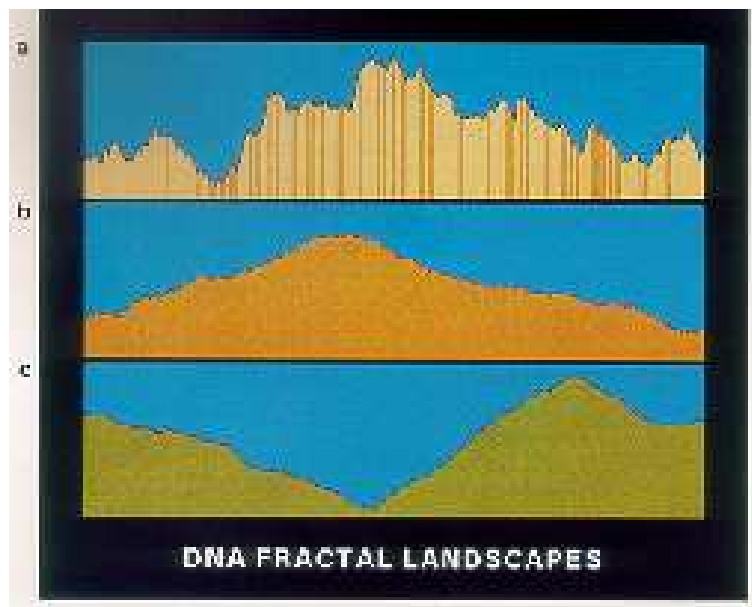
Desde el punto de vista de la física estadística uno puede preguntarse si la secuencia de nucleótidos, A,C,G y T presenta correlaciones de largo alcance que denoten la presencia de un punto crítico e invariancia de escala (IE). Una forma de estudiar IE en las correlaciones de largo alcance del ADN es mediante lo que se conoce como perfil "fractal" de las secuencias de nucleótidos, o *camino* ADN.

En un camino aleatorio unidimensional el caminante se mueve hacia "arriba" ($u(i) = +1$) o hacia "abajo" ($u(i) = -1$) en cada instante de tiempo. En un camino aleatorio descorrelacionado cada movimiento es independiente del anterior (no hay memoria). Una forma de construir un camino de ADN

es haciendo que el caminante se mueva hacia arriba ($u(i) = +1$) si una pirimidina (C o T) se encuentra en la posición i de la cadena de ADN, y hacia abajo ($u(i) = -1$) si en i hay una purina (A o G) (regla purina-pirimidina)¹⁴. En la figura se muestra un ejemplo:



La pregunta es si tal camino presenta correlaciones de largo alcance o no. La observación directa de estos perfiles muestran grandes diferencias entre regiones en las que se codifican aminoácidos y secuencias en las que no hay codificación como se ilustra en la figura:



¹⁴Hay mas formas de reglas para construir el dicho camino pero ésta es la que da resultados mas robustos debido probablemente a la complementariedad química entre purinas y pirimidinas (ver H.E. Stanley et al. *Fractals* 1 238 (1993) y H.E. Stanley et al. *Physica A* 200 4 (1993))

(a) Regiones con una gran fracción de zonas que no codifican (regiones claras) en un gen. (b) La misma secuencia juntando solo las regiones que codifican. (c) Secuencia del ADN de un bacteriofago que contiene solo regiones que codifican proteínas. Para cuantificar las posibles fluctuaciones que se observan definimos el desplazamiento neto:

$$y(l) = \sum_{i=1}^l u(i)$$

y la varianza del desplazamiento:

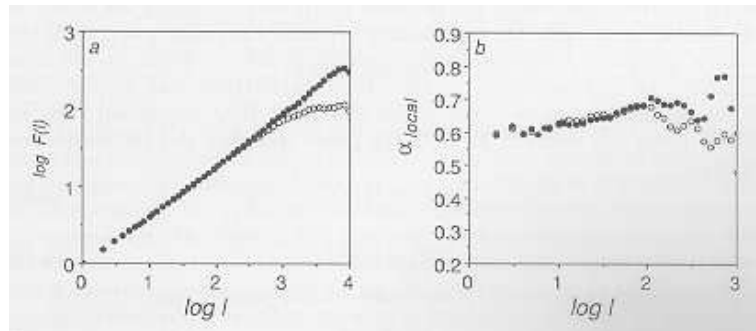
$$F^2(l) \equiv \overline{[\Delta y(l) - \overline{\Delta y(l)}]^2}$$

donde $\Delta y(l) = y(l_0 + l) - y(l_0)$ y la barra indica promedio sobre todas las posiciones en el gen. F^2 se relaciona con la auto-correlacion $C(l) \equiv \overline{u(l_0)u(l_0 + l)} - \overline{u(l_0)}^2$ mediante

$$F^2(l) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l C(j - i).$$

Pueden ocurrir tres casos en el cálculo de $F(l)$

- Secuencia aleatoria: $C(l) = 0$ y $F(l) \sim l^{1/2}$ (camino aleatorio normal)
- Hay correlaciones locales: $C(l) \sim \exp(-l/\xi)$ con ξ la longitud de correlacion. Para $l \gg \xi$ tenemos $F(l) \sim l^{1/2}$.
- Si no hay longitud característica (correlaciones de largo alcance) entonces $C(l)$ sigue una ley de potencias y $F(l) \sim l^\alpha$ con $\alpha \neq 1/2$.



La figura ilustra que las zonas de no-codificación muestran correlaciones de largo alcance (comportamiento lineal en escala log-log) y que las zonas con codificación no siguen una ley de potencias.