

4.- Mapas unidimensionales

Después de la incursión anterior, más fenomenológica que profunda, en el sistema de Lorenz y análogos, que son casos *casi realistas*, vamos a estudiar los sistemas más sencillos que presentan comportamiento caótico; esto permite avanzar en un análisis detallado y riguroso que pudiera revelar ingredientes fundamentales en una teoría del caos.

Nos interesan realizaciones uni-dimensionales de sistemas dinámicos en los que la variable tiempo es discreta, esto es, *ecuaciones en diferencias finitas*, *relaciones de recursión*, *mapas iterados*, *mapas dinámicos* o, simplemente, **mapas**. Por ejemplo, $x_{n+1} = \cos x_n$ es un mapa **unidimensional**, pues los puntos x_n pertenecen al espacio (unidimensional) de los números reales. El caso uni-dimensional general es de la forma

$$x_{n+1} = f(x_n, r),$$

donde r es una constante, llamada *parámetro de control*,²⁸ que determina el grado de no-linearidad del mapa, esto es, las propiedades de la secuencia x_0, x_1, x_2, \dots . Esta secuencia es la **trayectoria** u **órbita** correspondiente a la condición inicial x_0 .

Los mapas surgen como modelos de fenómenos naturales en áreas tan dispares como electrónica digital, economía y socio-biología de poblaciones (cuando las generaciones no solapan). Es el caso del mapa de May, (1), que se corresponde con $f(x, r) = rx(1 - x)$. Los mapas también surgen como representaciones discretas de ecuaciones diferenciales, por ejemplo, para facilitar su estudio numérico, puesto que los ordenadores digitales son más adecuados para tratar variables discretas que continuas.²⁹ Independientemente de su origen, los mapas son excelentes laboratorios matemáticos para estudiar caos y complejidad pues —dado que el estado del sistema va saltando a lo largo de la ‘trayectoria’, en lugar de fluir continuamente— son capaces del comportamiento más salvaje.

Veamos propiedades de los mapas y algunas técnicas para su análisis; queremos llegar a las ideas de universalidad y renormalización.

²⁸Por ejemplo, la energía en el sistema de Henon–Heiles, el número de Reynolds en un fluido, o la diferencia de temperaturas en el experimento de Rayleigh–Bernard.

²⁹En efecto, puesto que el tiempo es inherentemente discreto en un ordenador, con frecuencia aparecen complicaciones técnicas importantes al tratar de representar las variaciones continuas que involucran las ecuaciones diferenciales. Ha de tenerse cuidado, sin embargo, pues un paso al discreto puede llevar asociado un cambio esencial en la naturaleza de la trayectoria.

4.1.- Puntos fijos y estabilidad local

Sea el mapa $x_{n+1} = f(x_n)$. Se dice que x^* es un **punto fijo** si

$$f(x^*) = x^*.$$

Es decir, si la órbita cae en un punto fijo, seguirá en él durante las sucesivas iteraciones, puesto que, dado $x_n = x^*$, se tiene $x_{n+1} = f(x_n) = f(x^*) = x^*$ para todo n .

Para investigar la estabilidad de x^* , consideramos una órbita próxima, $x_n = x^* + \eta_n$ y nos preguntamos si es atraída o repelida por x^* , esto es, si η_n crece o decrece al aumentar n . Tenemos, de la definición de mapa:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x^* + \eta_{n+1} = f(x_n) = f(x^* + \eta_n) \\ &= f(x^*) + f'(x^*)\eta_n + \mathcal{O}(\eta_n^2)\end{aligned}$$

y usando $f(x^*) = x^*$,

$$\eta_{n+1} = f'(x^*)\eta_n + \mathcal{O}(\eta_n^2).$$

Supongamos que puede despreciarse $\mathcal{O}(\eta_n^2)$. Tenemos el *mapa linealizado* $\eta_{n+1} = f'(x^*)\eta_n$. Se define su *valor propio* o **multiplicador** como la pendiente en el punto fijo:

$$\lambda \equiv f'(x^*).$$

La estabilidad depende del valor de λ . En efecto, los primeros términos del mapa linealizado son:

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \lambda\eta_0, \\ \eta_2 &= \lambda\eta_1 = \lambda^2\eta_0, \\ &\dots \\ \eta_n &= \lambda^n\eta_0.\end{aligned}$$

En consecuencia,³⁰

- si $|\lambda| < 1$, $\eta_n \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$, y el punto fijo x^* es **linealmente estable**, y se dice que x^* es un **atractor**;
- Si $\lambda = 0$ se dice que el punto es **superestable**, pues hay que considerar los términos superiores en el desarrollo, esto es, $\eta_{n+1} = \mathcal{O}(\eta_n^2)$, lo que es compatible con un decaimiento más rápido que en el caso anterior, $\eta_{n+1} = \mathcal{O}(\eta_n)$.
- si $|\lambda| > 1$, el punto es **inestable** ($\lambda = 1$ es el caso marginal).

PROBLEMA 3.9: Determine los puntos fijos del mapa $x_{n+1} = x_n^2$ y su estabilidad. Convéznase numéricamente, con una calculadora, de que la convergencia hacia el punto estable es rapidísima para una condición inicial próxima.

No hemos hablado hasta aquí del *parámetro de control*. Si crece r , generalmente (al menos, en los casos que consideramos aquí), crece la pendiente en el punto fijo, luego se llegará a violar estabilidad (esto es, la condición $\lambda < 1$) para algún valor de r definido

$$|f'(x^*, r)| = 1. \quad (24)$$

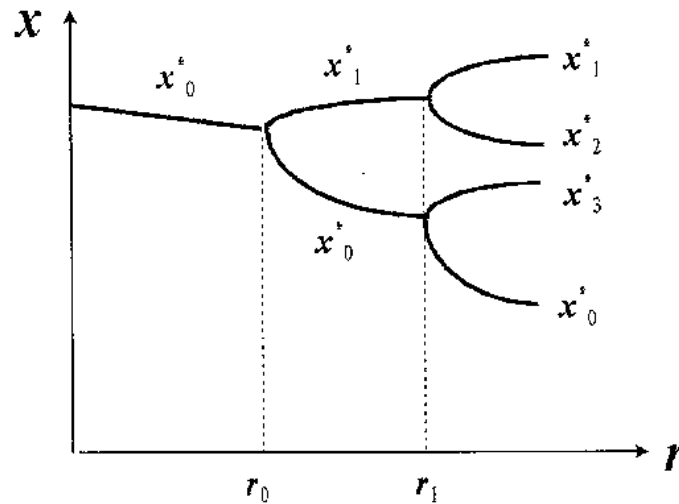
La trayectoria deja de tender hacia el atractor x^* ; se dice que la “**órbita período 1**” se ha hecho inestable. Emerge entonces una “**órbita período 2**” correspondiente a la pareja de ecuaciones

$$x_1^* = f(x_0^*, r), \quad x_0^* = f(x_1^*, r).$$

A este fenómeno se le llama **duplicación** o dobladura **del período**, y al punto (24) donde ocurre se le conoce como **bifurcación horquilla**.

³⁰Aunque estas conclusiones sobre estabilidad local están basadas en esa linealización, pueden mostrarse válidas para el mapa no-lineal original. La idea es que la linealización permite concluir *cerca* de x^* , que es la zona relevante para argumentos sobre estabilidad.

El siguiente gráfico ilustra esquemáticamente las dos primeras bifurcaciones en el mapa de May:

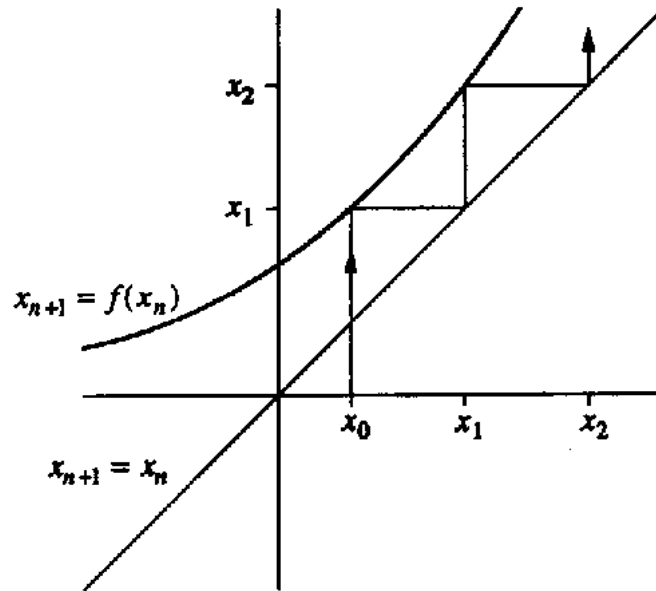


Como sugiere la figura, el fenómeno puede repetirse: la separación entre las dos ramas tiende a crecer al hacerlo r , la órbita-2 se hace inestable y bifurca en una órbita estable de período 4, etc. Vamos a desarrollar técnicas para estudiar con detalle estos fenómenos.

4.2.- Telaraña

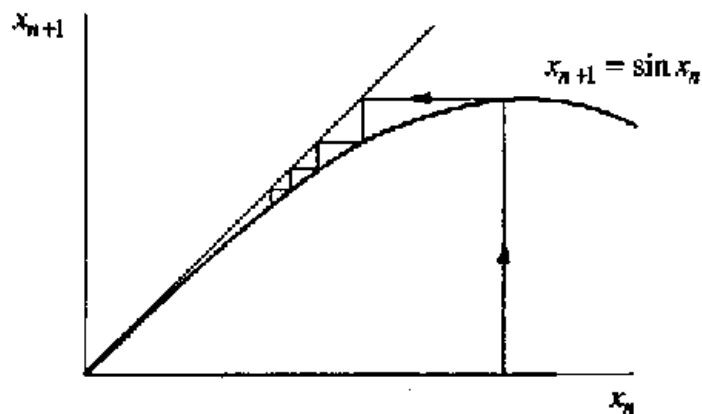
Es el resultado de iterar *geométricamente* el mapa $x_{n+1} = f(x_n)$. El método es: Desde x_0 , trazamos una línea vertical hasta encontrar f ; esa altura es el resultado x_1 de la primera iteración. A continuación, llevamos este valor al eje de abscisas o, lo que es más conveniente, trazamos una horizontal hasta encontrar la diagonal $x_{n+1} = x_n$, y movemos verticalmente hasta la

curva. Repitiendo n veces, se generan los primeros n puntos de la órbita:



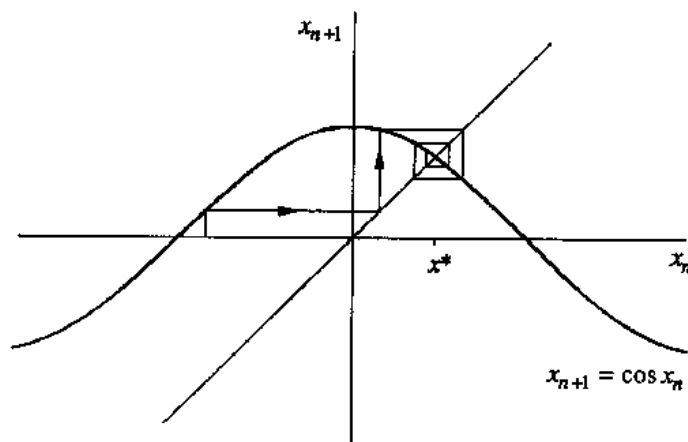
Esta construcción es útil pues proporciona idea global de la serie, que complementa la información local del análisis lineal y es esencial cuando éste falla.

PROBLEMA 3.10: Sea $x_{n+1} = \sin x_n$. Compruebe que la linealización falla, pero que su *telaraña* indica que $x^* = 0$ es (globalmente) estable.



Para convencernos de que es *globalmente* estable, hemos de ver que *todas* las órbitas satisfacen $x_n \rightarrow 0$. En efecto, para cualquier x_0 , la primera iteración nos lleva a $-1 \leq x_1 \leq 1$, puesto que $|\operatorname{sen} x| \leq 1$, y entonces, como sugiere la figura anterior, ya está garantizada la convergencia al cero.

PROBLEMA 3.11: Sea $x_{n+1} = \cos x_n$. Comprobad numéricamente —iterando con la calculadora— que $x_n \rightarrow 0,739\dots$ si $n \rightarrow \infty$ para cualquier condición inicial, e interpretad gráficamente este resultado.



El movimiento espiral implica que x_n converge a x^* mediante oscilaciones amortiguadas, lo que es característico de puntos fijos con $\lambda < 0$, como en este caso. (La convergencia es monótonica cuando $\lambda > 0$.)

4.3.- Mapas logísticos. Duplicación del período.

Veamos cómo aparecen los comportamientos imaginados arriba en el modelo de May para dinámica de poblaciones,

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \tag{25}$$

que es un ejemplo de lo que se llama **mapa logístico**. Si restringimos $0 \leq r \leq 4$ se garantiza que el mapa transforma el intervalo $0 \leq x \leq 1$ en sí mismo (otros casos de r son menos interesantes). Feigenbaum estudió este caso con

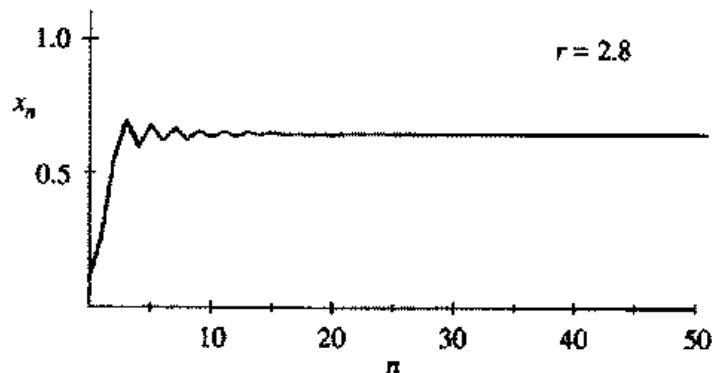
detalle y, en particular, llegó a la observación de que existía cierto tipo de universalidad al comparar esta serie con la que produce el mapa:³¹

$$x_{n+1} = \frac{r}{4} \operatorname{sen} \pi x_n. \quad (26)$$

PROBLEMA 3.12: Usando la telaraña, muestre que, para $0 \leq r \leq 1$ (pequeños ritmos de crecimiento), $x^* = 0$ es globalmente estable, esto es, $x_n \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$ (la población tiende a extinguirse).

PROBLEMA 3.13: Se trata de estudiar el mapa logístico representando gráficamente los elementos de la serie temporal, esto es, la trayectoria x_n en función de n (unidos con un trazo continuo) en casos típicos:

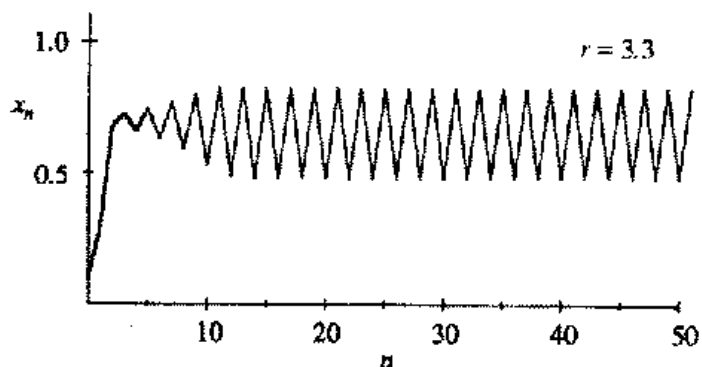
1. Para $1 < r < 3$. Por ejemplo, el caso $r = 2,8$ de la figura muestra que la población crece y, eventualmente, alcanza un estado estacionario no-nulo:



Se corresponde con lo que antes llamábamos *órbita período-1*.

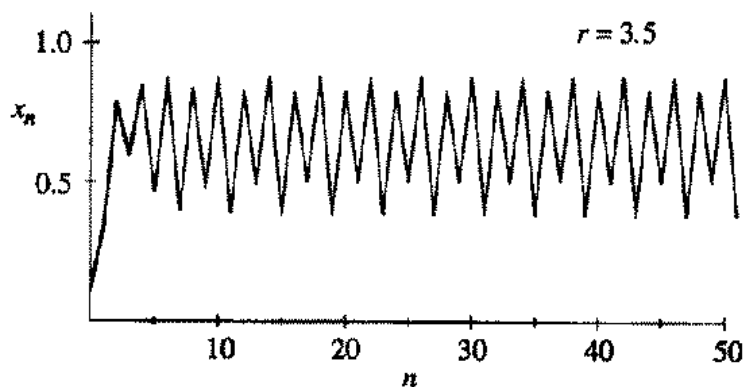
2. Para mayor r , por ejemplo $r = 3,3$, se observa que la población oscila alrededor del anterior estado estacionario:

³¹MJ Feigenbaum, *J. Stat. Phys.* **19**, 25 (1978); **21**, 699 (1979); *Comm. Math. Phys.* **77**, 65 (1980). Creswick *et al.* (página 40 y siguientes) hace un análisis paralelo del que hago aquí con $r = 4C$.



A esta oscilación —en la que x_n se repite cada dos iteraciones— es a lo que antes llamábamos *órbita ciclo-2*.

3. Para mayor r , por ejemplo $r = 3,5$, se observa que la población presenta una *órbita ciclo-4*, esto es, que se repite cada cuatro generaciones:



Resulta que este proceso de bifurcaciones sigue *ad infinitum*,³² y el período se dobla en cada caso creciendo exponencialmente al tender r a un límite finito. De hecho, experimentos numéricos para el mapa de May conducen a la siguiente tabla que muestra el primer valor de r_n para el que aparece **ciclo** 2^n :56

³²PROBLEMA 3.14: Demostrad esta afirmación.

Es posible demostrar que siempre se sigue una bifurcación de la anterior. Ver el argumento completo en Creswick *et al*, páginas 45 y 46; necesita elaboración.

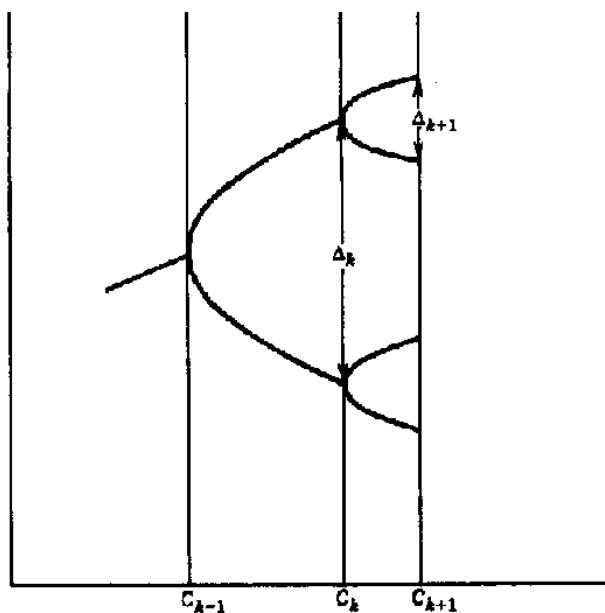
n	$r = r_n$	período, 2^n
1	3	2
2	3.449...	4
3	3.54409...	8
4	3.5644...	16
5	3.568759...	32
\vdots	\vdots	\vdots
∞	3.569946...	∞

Notamos en esta tabla que las bifurcaciones sucesivas están cada vez más próximas, de modo que r_n converge hacia un valor límite r_∞ . La convergencia es esencialmente geométrica: en el límite $n \rightarrow \infty$, la distancia entre bifurcaciones sucesivas se contrae en cada paso según un factor constante, $1/\delta$:

$$r_{n+1} - r_n = \frac{1}{\delta} (r_n - r_{n-1}), \quad n \rightarrow \infty,$$

esto es,

$$\delta \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = 4,6692016 \dots \quad (27)$$



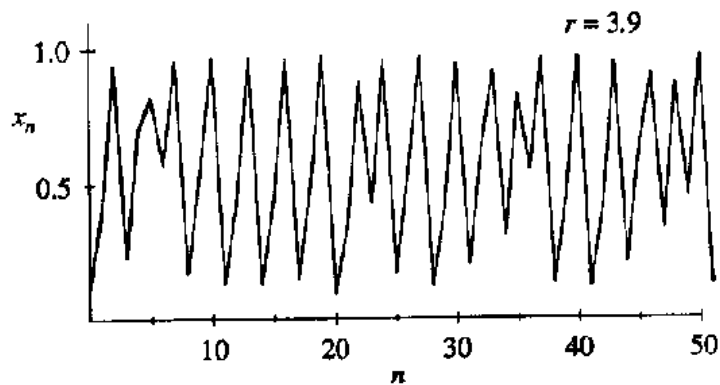
Esquema gráfico (notar cambio de notación) de cómo cambian las bocas de las horquillas, $\Delta_n, \Delta_{n+1}, \dots$ en las bifurcaciones, $r_{n-1}, r_n, r_{n+1}, \dots$

La figura también sugiere, de acuerdo con la observación, que las horquillas van haciéndose más pequeñas así como uno progresa en la *higuera*; es más, se ha determinado que las aberturas de estas horquillas se contraen en cada paso de acuerdo con un factor constante, de modo que se tiene:

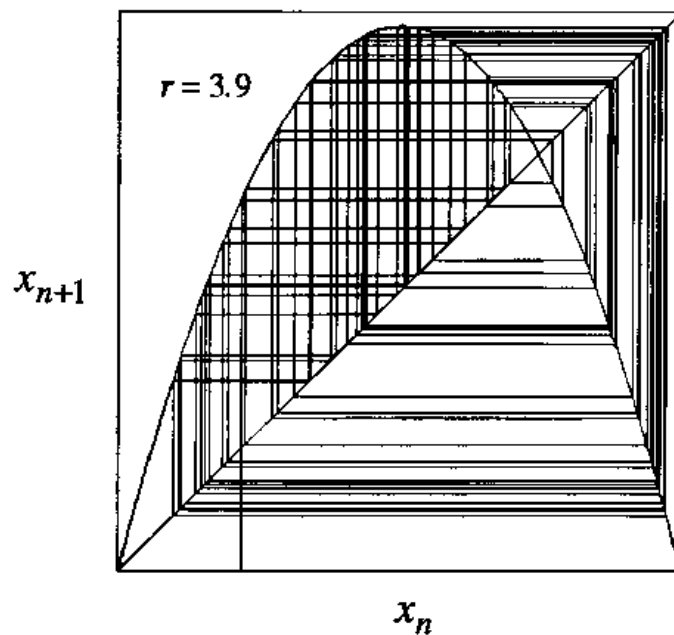
$$\alpha \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}} = 2,50290787\dots \quad (28)$$

Feigenbaum descubrió que los valores de α y δ manifiestan universalidad en el sentido de que son los mismos (los dados arriba) para toda una clase de mapas unidimensionales. Por otra parte, equivalentemente a (27), se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} (r_\infty - r_n) \sim \delta^{-n}$ lo que (conjuntamente con las propiedades de escala y universalidad observadas) sugiere fuertemente que la naturaleza recursiva de las bifurcaciones sucesivas es **auto-similar** en el límite asintótico, lo que sugiere usar aquí las técnicas del grupo de renormalización. Volveremos sobre estos resultados.

La primera vez que May propuso su modelo, lo hizo en la pizarra como problema a sus alumnos con la pregunta “*What the Christ happens for $r > r_\infty$?*” La respuesta no es fácil. Al representar la serie para $r = 3,9$ se observa:



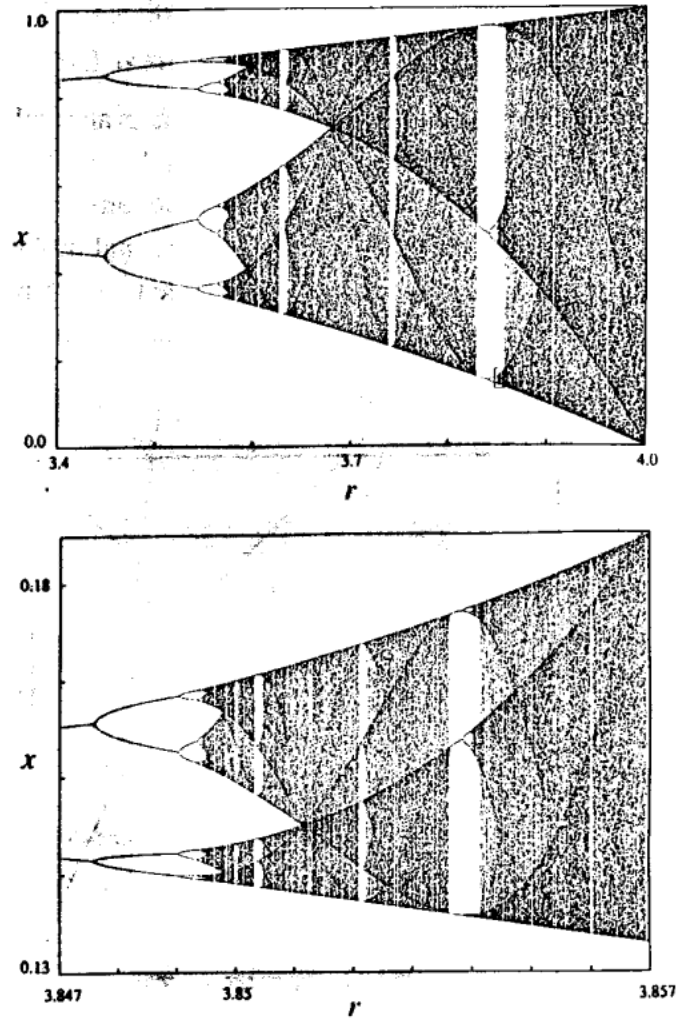
Esto es, x_n no evoluciona hacia un punto fijo, ni delata una órbita periódica. Al contrario, muestra comportamiento aperiódico, una especie de versión discreta del caos encontrado por Lorenz. Tampoco delata pautas sencillas el diagrama telaraña correspondiente:



Al analizar otros valores de $r > r_\infty$, uno encuentra generalmente situaciones similares. Quizás podría esperarse mayor caos al crecer r pero, de nuevo, la dinámica de este sistema es más sutil que nuestra imaginación.

El **diagrama de órbitas** proporciona buena información global para amplios rangos de r . Se programa el ordenador de modo que, elegido un valor de r (el origen para el eje horizontal), genere la órbita que empieza en x_0 (el origen para el eje vertical). Se itera unas 300 veces (para evitar transitorios) y se dibujan muchos puntos, x_{301}, \dots, x_{600} , por encima del r elegido. Se repite con valores de r sucesivos. En la región más interesante del

mapa de May, $3,4 \leq r \leq 4$, se obtiene de este modo:



El corte $r = 3,4$ en la figura de arriba confirma que el atractor es *ciclo-2*. Al crecer r , las dos ramas llegan a desdoblarse simultáneamente, y luego vuelve a doblarse el período. Al llegar a $r = r_\infty = 3,57$, el mapa se hace caótico, esto es, el atractor pasa de un conjunto finito de puntos a uno infinito. Como muestra el diagrama, la región $r > r_\infty$ está caracterizada por una mezcla de orden y caos sucesivos, pudiendo distinguirse **ventanas periódicas** (las zonas claras) entre nubes caóticas de puntos.

La figura de abajo es un detalle que presenta $x < 0,2$ empezando en $r = 3,83$ (donde se aprecia —ver la figura de arriba— un ciclo estable de período 3). Es notable cómo esta figura es una miniatura de lo observado en la otra figura.

PROBLEMA 3.15: Determinad todos los puntos fijos, y su estabilidad, en el mapa logístico $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ para $0 \leq x_n \leq 1$ y $0 \leq r \leq 4$.

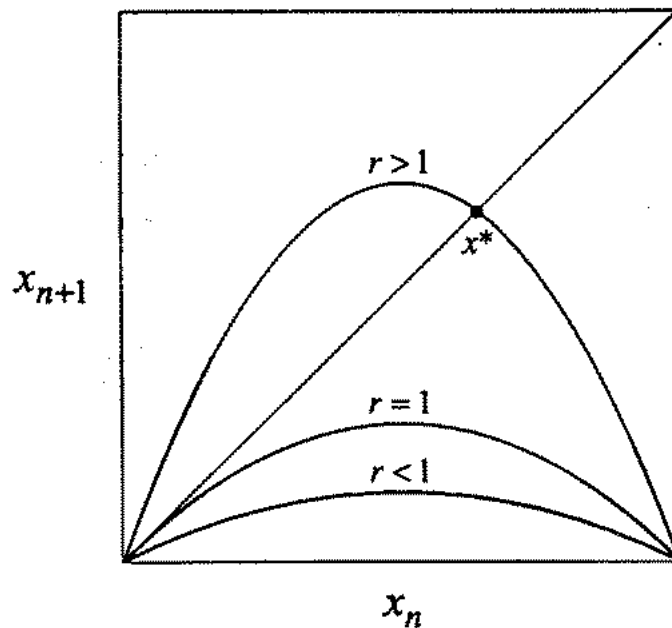
Solución: La ecuación de puntos fijos es $x^* = rx^*(1 - x^*)$, con soluciones:

- $x^* = 0$ (que es punto fijo para todo r) y
- $1 = r(1 - x^*) \implies x^* = 1 - \frac{1}{r}$ (que sólo es punto fijo para $r \geq 1$ en el rango permitido de x)

La estabilidad depende del multiplicador $f'(x^*) = r - 2rx^*$:

- $f'(0) = r$, luego el origen es estable si $r < 1$ e inestable si $r > 1$;
- $f'(x^*) = 2 - r$ para el otro punto, luego es estable si $-1 < (2 - r) < 1$ (esto es, $1 < r < 3$) e inestable si $r > 3$.

Estos mismos resultados pueden aclararse en un análisis gráfico. Si dibujamos x_{n+1} en función de x_n , obtenemos parábolas (la fórmula de May es parabólica) que cambian su curvatura con r :

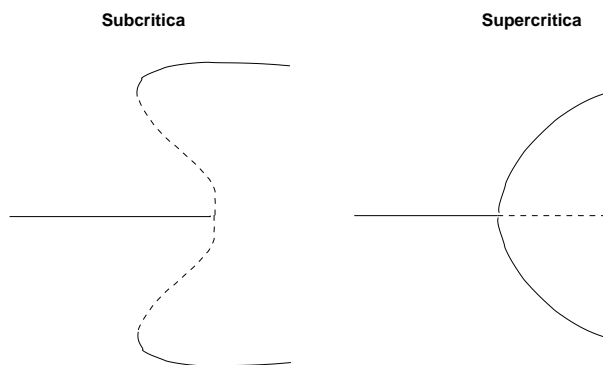


- Las parábolas con $r \leq 1$ quedan por debajo de la diagonal, indicando que el origen es entonces el único punto fijo; de hecho, el multiplicador se hace $f'(0) = r < 1$

- En $r = 1$, el multiplicador se hace $f'(0) = r = 1$, luego el origen pierde estabilidad.
- Para $r > 1$, la parábola corta a la diagonal en otro punto fijo, $x^* = 1 - \frac{1}{r}$ (solución de $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ y $x_{n+1} = x_n$).
A veces se resalta este tipo de cambio diciendo que x^* presenta una “bifurcación transcítica” en $r = 1$ (denominación que se toma prestada del estudio de ecuaciones diferenciales).
- Al crecer r , disminuye la pendiente en el segundo punto fijo desde $f'(x^*) = 2 - r \lesssim 1$ (donde el nuevo punto ya es estable, pues $|\lambda| < 1$) hasta que, para $r = 3$, vale $f'(x^*) = -1$.

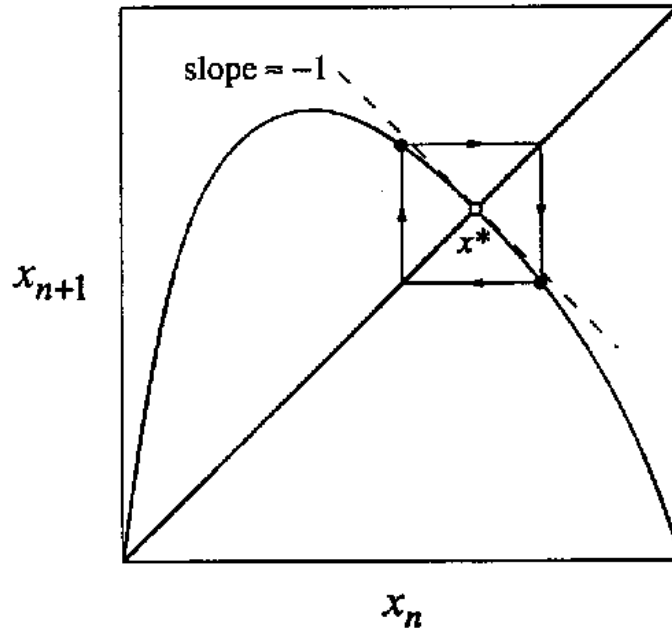
Este punto, que se conoce como **bifurcación voltereta** (*flip*), generalmente lleva asociado una duplicación del período.

La bifurcación puede ser subcrítica si la pareja de puntos aparece antes del punto de bifurcación de forma discontinua o supercrítica cuando aparece de forma continua por encima del punto de bifurcación (ver figura).



Un diagrama telaraña muestra cómo las bifurcaciones voltereta pueden hacer que se doble el período. Sea un mapa cualquiera. Nos fijamos en

las proximidades de un punto fijo donde $f'(x^*) = -1$:



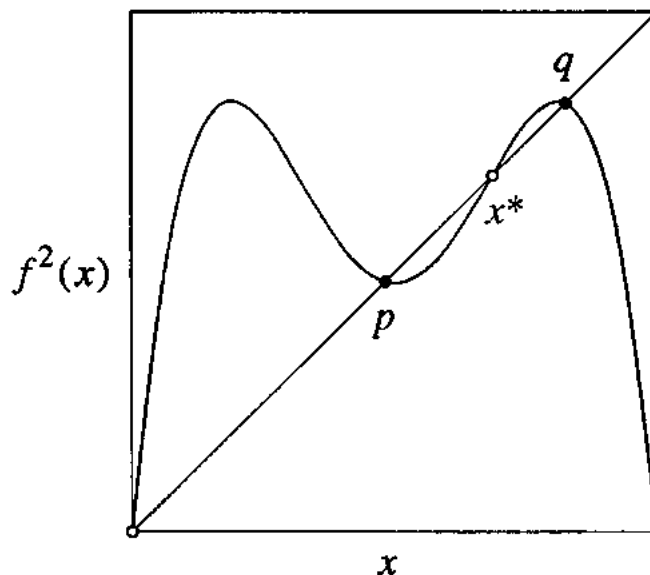
Si f es cóncava por allí, la telaraña tiende a producir cerca del punto fijo un pequeño *ciclo-2* estable. Pero las bifurcaciones voltereta, como las horquillas, pueden ser *subcríticas*, en cuyo caso el ciclo-2 es inestable.³³

PROBLEMA 3.16: Mostrad que el mapa de May tiene ciclo-2 $\forall r > 3$.

Solución: Para que exista un ciclo 2, es necesario tener dos puntos p y q tales que $f(p) = q$ y $f(q) = p$ o, equivalentemente, $f^2(q) \equiv f[f(p)] = p$, lo que implica que p es un punto de fijo del **mapa doblemente iterado**. Puesto que $f(x) = rx(1-x)$, se sigue que $f^2(x)$ es un polinomio cuártico que, para

³³Ver ejercicio 10.3.11 de Strogatz 1994, pág. 391

$r > 3$ es:



Los puntos p y q son soluciones de la ecuación de cuarto grado $f^2(x) = x$ o, explícitamente, $r^2x(1-x)[1-rx(1-x)] - x = 0$. Notamos primero que los puntos fijos $x^* = 0$ y $x^* = 1 - \frac{1}{r}$ son soluciones triviales de esta ecuación, puesto que $f(x^*) = x^* \implies f^2(x^*) = x^*$. Entonces, dividiendo $f^2(x) - x = 0$ por x y $x - (1 - \frac{1}{r})$ queda una ecuación de segundo grado cuya solución es:

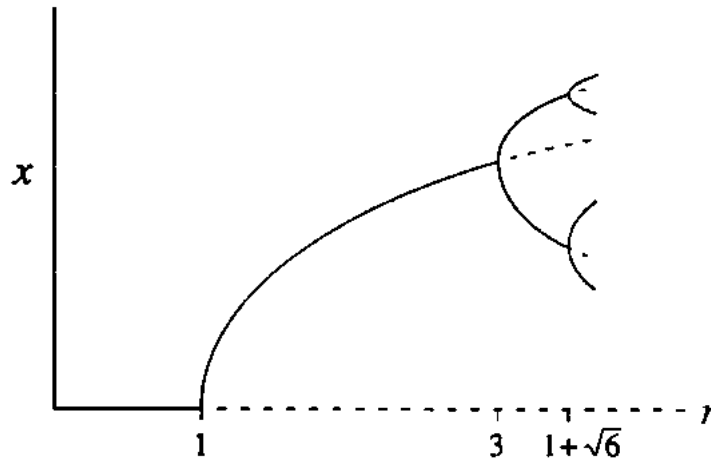
$$p, q = \frac{r + 1 \pm \sqrt{(r - 3)(r + 1)}}{2r}.$$

Estas soluciones son reales para $r > 3$, luego existe entonces un ciclo-2, QED. Notamos que, para $r = 3$, las dos raíces se hacen $x^* = (r + 1)/2r = \frac{2}{3}$, que marca una bifurcación **continua** del ciclo 2.

PROBLEMA 3.17: Mostrad que el ciclo 2 del problema anterior es estable si $3 < r < 1 + \sqrt{6} = 3,449\dots$ (lo que justifica r_1 y r_2 en la tabla de p. 56).

Recopilando los últimos resultados, podemos dibujar el siguiente **diagra-**

ma de bifurcaciones (parcial) para el mapa de May:

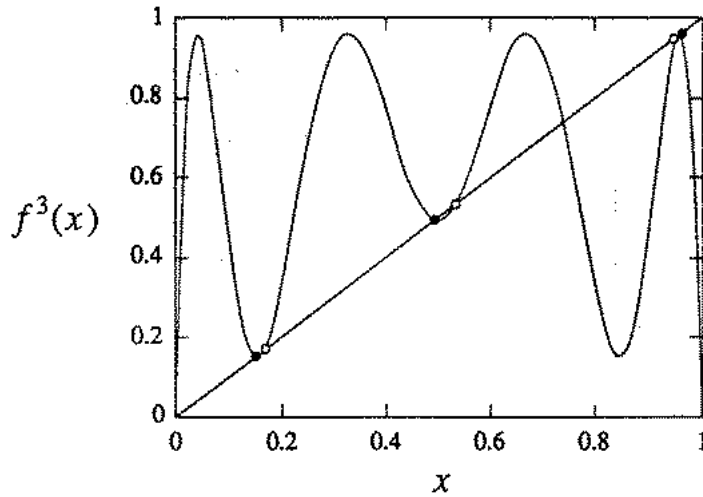


En este diagrama mostramos también los objetos inestables, contrariamente a lo que se hace en los diagramas de órbitas, que sólo muestran los atractores.

4.4.- Ventanas periódicas

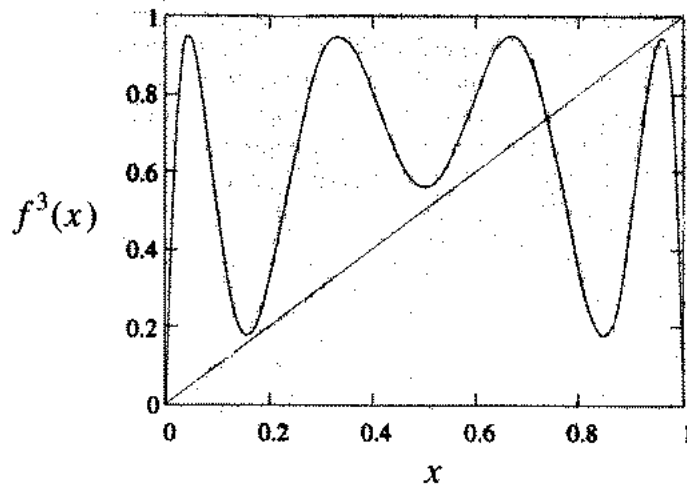
Un resultado interesante en el diagrama de órbitas de la página 60 es la aparición de ventanas periódicas para $r > r_\infty$. Por ejemplo, la ventana cerca de $3,8284 \dots \leq r \leq 3,8415 \dots$ en el cuadro superior de aquella figura, donde surge repentinamente un ciclo-3 del caos. Como ilustración de que se tienen los mismos mecanismos para todas las ventanas, veamos cómo se crea este ciclo 3.

Tenemos $x_{n+1} = f(x_n)$ con $f(x) = rx(1-x)$, luego $x_{n+2} = f[f(x_n)] \equiv f^2(x_n)$, $x_{n+3} = f^3(x_n)$, etc. El mapa triplemente iterado $f^3(x)$ tiene la clave para entender el nacimiento del ciclo 3, pues cualquier punto p de este ciclo se repite cada tres iteraciones, por definición, luego satisface $p = f^3(p)$ y es, por tanto, un punto fijo del mapa triplemente iterado. Lamentablemente, $f^3(x)$ es un polinomio de grado 8 que, en general, no podemos resolver explícitamente para obtener los puntos fijos. Pero los gráficos ayudan. Para $r = 3,835$, el siguiente muestra las 8 soluciones de $f^3(x) = x$, esto es, los cortes de $f^3(x)$ con la diagonal x :



Dos de estas soluciones son puntos fijos o ciclo-1 para los que $f(x^*) = x^*$. Hemos marcado en la figura las 6 soluciones genuinas que corresponden a ciclo-3. Las tres con círculos negros, son estables: la pendiente de $f^3(x)$ es pequeña. La pendiente supera 1 en los círculos en blanco, que señalan ciclos-3 inestables.

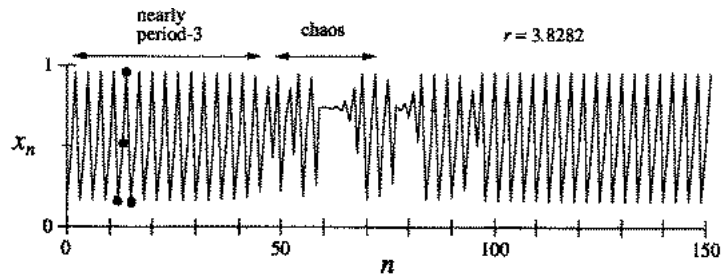
Si disminuimos r , nos acercamos al régimen caótico anterior a la ventana. Se observa entonces que los montes bajan y los valles suben de modo que, al llegar a $r = 3,8$, las 6 intersecciones ciclo-3 han desaparecido:



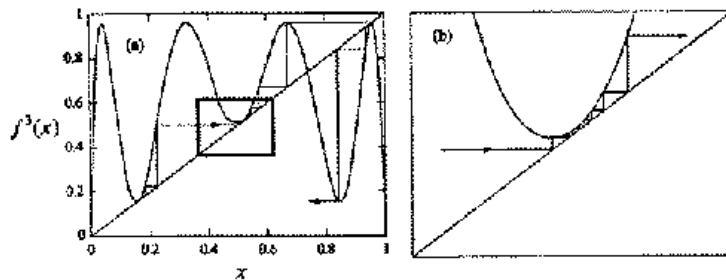
Se sigue que, para algún $3,8 < r < 3,835$, $f^3(x)$ habrá sido tangente a la diagonal; para este r , los tres ciclos-3 estables se confunden con los tres

inestables, desapareciendo en lo que se llama una **bifurcación tangente** o **punto de silla**, que define el comienzo de la ventana periódica. Se comprueba analíticamente (no sin dificultad) que este valor crítico es $1 + \sqrt{8} = 3,8284\dots$

Si r es ligeramente inferior, por ejemplo, $r = 3,8282$, la serie $\{x_n\}$ es:



Esto es, parte de la órbita *parece* ciclo-3 estable (puntos negros) pero es un *fantasma*, algo usual cerca de bifurcaciones tangentes. Es interesante notar cómo la órbita vuelve repetidamente a estos fantasmas, con muestras de caos intermitente entre estas visitas; a este fenómeno se le conoce como **intermitencia**. La geometría típica es:



Esto es, $f^3(x)$ está ahora muy cerca de la diagonal, dejando estrechos canales (figura b), de modo que la órbita hace muchas iteraciones para escapar del canal, teniéndose $f^3(x_n) \approx x_n$ durante el paso, lo que corresponde al fantasma que simula un ciclo 3. Eventualmente, la órbita escapa del canal, abriéndose hacia el caos hasta que cae en otro canal en lugar y tiempo posterior impredecibles.

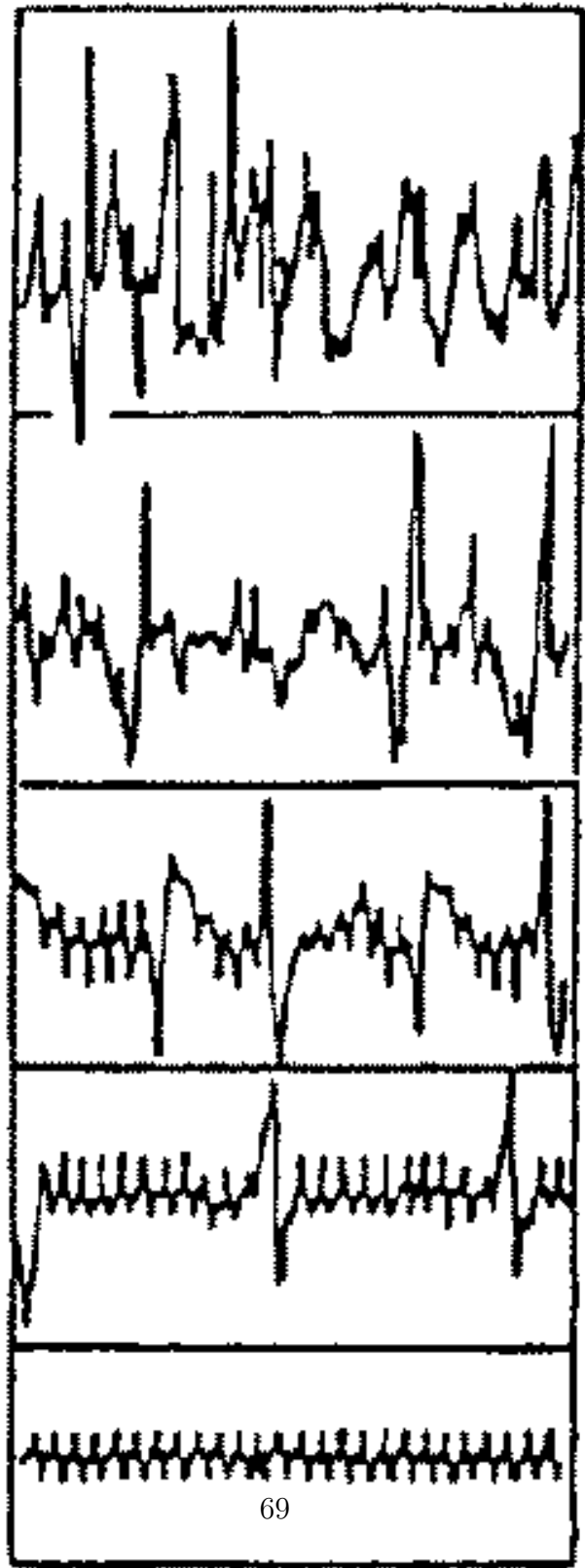
La intermitencia no es una curiosidad del mapa logístico de May, sino que aparece generalmente en sistemas en los que la transición de comportamiento periódico a caos ocurre mediante una bifurcación de ciclos tipo punto de silla. Por ejemplo, aparece en las ecuaciones de Lorenz, donde fue descubierta.³⁴

³⁴PROBLEMA 3.18: Estudiar numéricamente las ecuaciones de Lorenz para $\sigma = 10$, $b = 8/3$ y r próximo a 166. Mostrad que:

Se encuentra experimentalmente que el tiempo entre los intervalos caóticos tiene una distribución estadística parecida a la de una variable aleatoria, a pesar de que el sistema es determinista.

Al mover el parámetro de control fuera de la ventana periódica, los intervalos caóticos son más frecuentes hasta que el sistema se hace totalmente caótico; la figura muestra este fenómeno en un láser:

-
1. si $r = 166$, todas las trayectorias son atraídas a un ciclo límite estable; dibujad la proyección xz del ciclo y la serie temporal $x(t)$;
 2. si $r = 166,2$, la trayectoria parece el ciclo límite anterior para la mayor parte de t pero, ocasionalmente, es interrumpida por caos, indicando **intermitencia**;
 3. al crecer r , los intervalos caóticos se hacen más frecuentes y largos.



69

0 5 10

Time (μs)

Se muestra la intensidad de la luz emitida en función del tiempo, desde una situación en la que los pulsos son periódicos (abajo) hasta el caos total (arriba), al variar el parámetro de control (la inclinación del espejo en la cavidad). Se han detectado muchas intermitencias en fluidos y reacciones químicas: P Bergé, Y Pomeau & C Vidal, 'Order Within Chaos: Towards a Deterministic Approach to Turbulence', Wiley, NY 1984.

A esta progresión se le conoce como **ruta intermitente hacia el caos**.

Veámos en la figura de página 60 cómo ampliando se hace evidente una copia en pequeño del diagrama de órbitas en la ventana ciclo-3. La explicación también tiene que ver con montes y valles. Justo después de crearse el ciclo 3 estable en la bifurcación tangente, la pendiente en los puntos negros del gráfico de $f^3(x)$ tangente a x (página 65) disminuye constantemente desde $+1$ y eventualmente alcanza -1 , momento en el que una bifurcación voltereta hace que cada punto negro se separe en dos: el ciclo 3 dobla su período y se hace ciclo 6. Se trata del mismo mecanismo que en la cascada original de períodos que se duplican, pero ahora se producen órbitas de período $3 \cdot 2^n$. Una cascada similar puede detectarse en *todas* las ventanas periódicas.

4.5.- Exponente de Liapunov

Para estar seguros de que las órbitas aperiódicas del mapa logístico son manifestaciones de caos, es necesario *medir* su sensibilidad a las condiciones iniciales. Conviene, pues, generalizar a mapas unidimensionales el concepto de exponente de Liapunov introducido antes para ecuaciones diferenciales.

Sea una condición inicial x_0 y otra extremadamente próxima, $x_0 + \delta_0$. Si la separación después de n iteraciones es $|\delta_n| = |\delta_0| e^{n\lambda}$, λ es el exponente de Liapunov que, si es positivo, indica caos.

Para ser más precisos, tomando aquí logaritmos y notando que $\delta_n = f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0)$, se tiene

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\delta_n}{\delta_0} \right| = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0)}{\delta_0} \right| = \frac{1}{n} \ln |(f^n)'(x_0)|,$$

donde hemos supuesto el límite $\delta_0 \rightarrow 0$. Usando la regla de la cadena,³⁵

$$(f^n)'(x_0) = \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i),$$

tenemos

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i) \right| = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|.$$

Si esta expresión tiene límite para $n \rightarrow \infty$, a este límite,

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \right\},$$

le llamamos exponente de Liapunov para la órbita que comienza en x_0 .

Aunque la definición depende de x_0 , esperamos que produzca el mismo valor para cualquier órbita en la cuenca de atracción de un atractor dado.

Se tiene que

- $\lambda < 0$ para puntos fijos y ciclos estables;
- $\lambda > 0$ para atractores caóticos.

PROBLEMA 3.19: Supongamos que $f(x)$ tiene un ciclo p estable que contiene al punto x_0 . Mostrad que $\lambda < 0$, mientras que $\lambda = -\infty$ si el ciclo es superestable.

PROBLEMA 3.20: Sea el **mapa tienda** definido

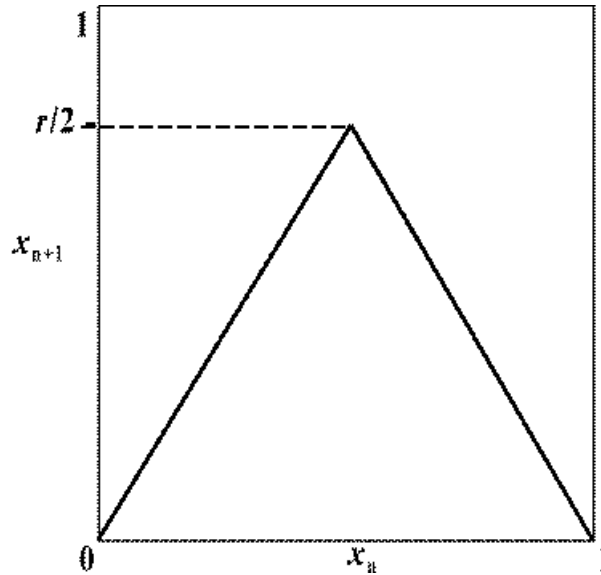
$$f(x) = \begin{cases} rx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ r - rx, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

³⁵Se trata de una generalización del resultado deducido en página 50. Suponed que $\eta_{n+1} \approx f'(z_n) \eta_n$. Iterando:

$$\eta_{n+2} \approx f'(z_{n+1}) \approx f'(z_{n+1}) [f'(z_n) \eta_n] = [f'(z_{n+1}) f'(z_n)] \eta_n$$

y así sucesivamente.

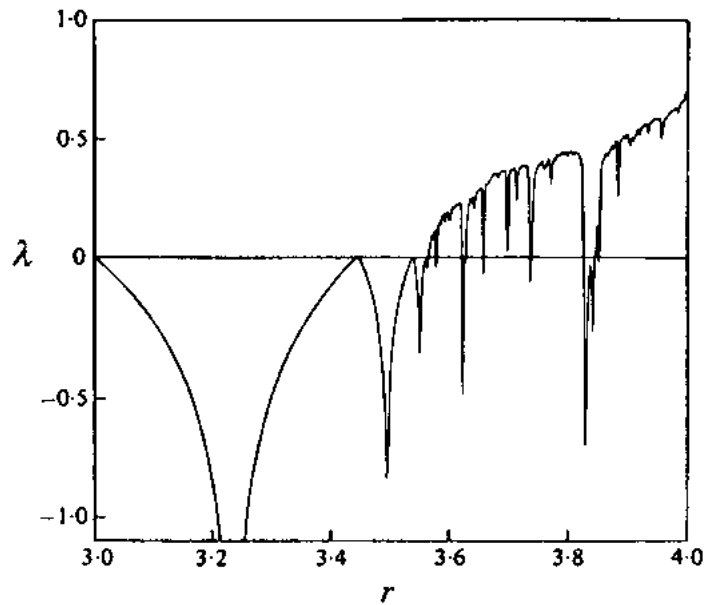
para $0 \leq r \leq 2$. Esto es,



Mostrad que $\lambda = \ln r$, independiente de la condición inicial.

Este resultado sugiere soluciones caóticas para todo $r > 1$, puesto que $\lambda = \ln r > 0$

PROBLEMA 3.21: A menudo es necesario usar el ordenador para calcular exponentes de Liapunov. Con objeto de experimentarse en ello, describid un esquema numérico para el cálculo de λ en el mapa logístico $f(x) = rx(1-x)$. Dibujad el resultado en función del parámetro de control r para $3 \leq r \leq 4$.



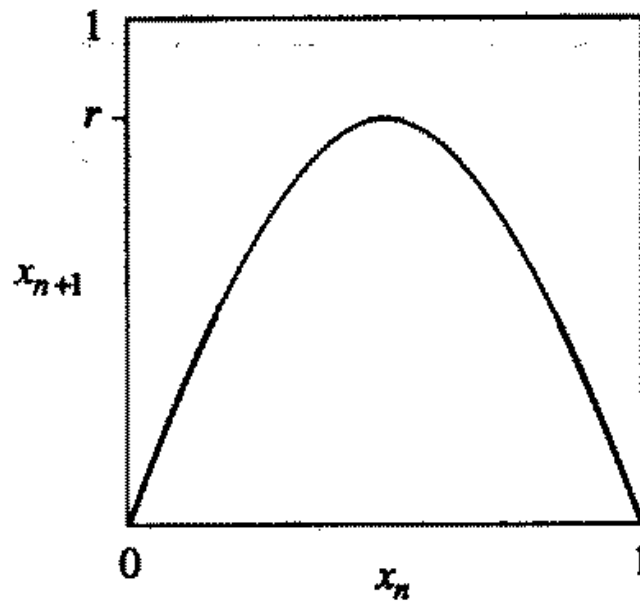
Es útil comparar con el diagrama de órbitas en página 60: es $\lambda < 0$ para $r < r_\infty \approx 3,57$, y va hacia cero en las bifurcaciones donde se dobla el período. Los picos negativos son los ciclos 2^n . El comienzo de caos es visible cerca de $r \approx 3,57$, cuando λ se hace por primera vez positivo. Para $r > 3,57$, λ generalmente crece, excepto por las bajadas correspondientes a las ventanas de comportamiento periódico; la bajada es importante cerca de $r = 3,83$ debido a la ventana período 3. De hecho, todas estas bajadas deberían de ir hasta $\lambda = -\infty$, pues está garantizado que ocurrirá un ciclo superestable (caracterizado por tal λ) cerca del medio de cada bajada, pero habría que considerar mucha resolución en r para observar este efecto.

5.- Universalidad

Dibujemos el *mapa seno*,

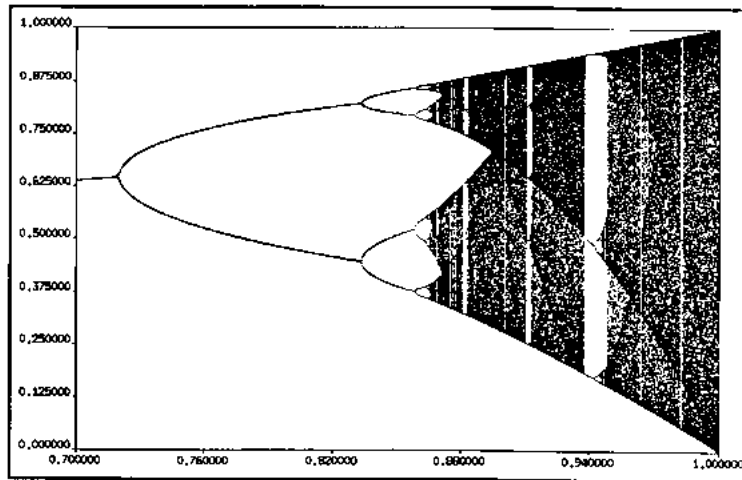
$$x_{n+1} = r \operatorname{sen} \pi x_n \quad \text{para} \quad \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Se tiene:

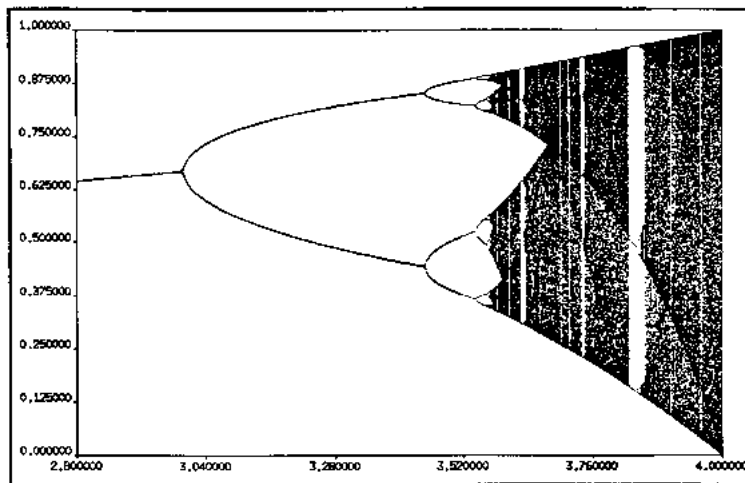


Como el mapa logístico, es una curva suave, cóncava (hacia abajo) y tiene un máximo único; a tales mapas se les llama **unimodales**. El diagrama de

órbitas para este mapa seno es:



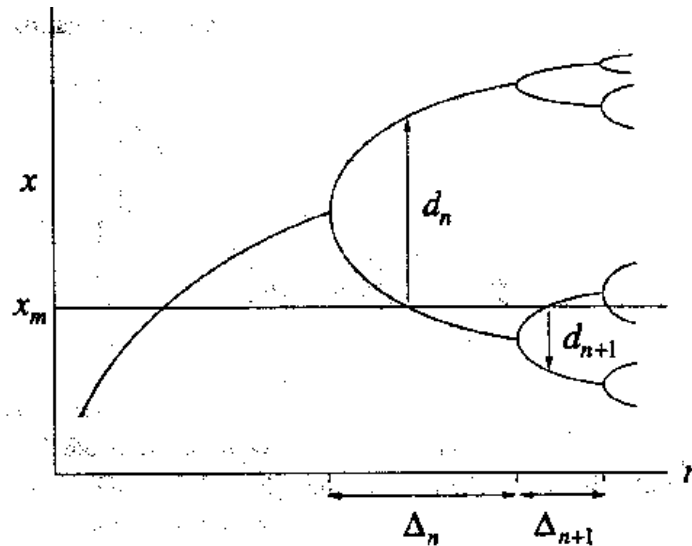
y para el mapa logístico se tenía:



Es notable la similitud entre ambos, salvo que el eje horizontal es 4 veces mayor en el segundo caso, consecuencia de que el máximo de $r \sin \pi x$ es r , mientras que el de $rx(1-x)$ es $\frac{1}{4}r$. Esto es, la dinámica es *cualitativamente idéntica*. Ambos muestran rutas hacia el caos con desdoblamiento, seguidas de ventanas periódicas y bandas caóticas. Además, las ventanas periódicas ocurren en el mismo orden y con los mismos tamaños relativos. Las diferencias *sólo* son *cuantitativas*, por ejemplo, en el mapa logístico, las bifurcaciones donde se dobla el período ocurren más tarde, y las ventanas periódicas son más estrechas.

Este ejemplo ilustra un TEOREMA: Para todos los mapas unimodales de la forma $x_{n+1} = rf(x_n)$ con $f(0) = f(1) = 0$, el orden en el que las soluciones periódicas estables aparecen al variar r es el mismo.³⁶ Esto es, la función $f(x)$ es irrelevante: los atractores periódicos ocurren siempre en la misma secuencia, llamada secuencia *universal* o *secuencia U*; sólo importa la forma global de $f(x)$. Esta secuencia universal ha sido observada de hecho en experimentos de la reacción Belousov-Zhabotinsky.³⁷

Esta universalidad es *cualitativa* (se produce el mismo orden, pero no los valores precisos para los parámetros). Veamos ahora comportamiento *cuantitativo* universal en mapas unidimensionales descubierto por Mitchell Feigenbaum,³⁸ ver ecuaciones (27) y (28). Sea un diagrama del tipo:



donde $\Delta_n = r_n - r_{n-1}$ con r_n el valor de r para el que un ciclo 2^n aparece por primera vez. Feigenbaum observó

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = 4,669 \dots$$

³⁶N Metropolis, ML Stain & PR Stein, "On finite limit sets for transformations on the unit interval", *J. Combin. Theor.* **15**, 25 (1973)

³⁷Esta reacción se discute en fnl.02. El experimento se describe en RH Simoyi, A Wolf & HL Swinney, "One-dimensional dynamics in a multicomponent chemical reaction", *Phys. Rev. Lett.* **49**, 245 (1982); ver también el libro Strogatz (1994), sección 12.4 (pág. 437).

³⁸Una nota histórica del descubrimiento —y referencias— en Strogatz (1994), pág. 372.

es **universal**, esto es, una constante matemática nueva tan básica para el fenómeno de duplicación del período como lo es π para los círculos.

También existe escala universal en la dirección x . Sea x_m el máximo de f , y d_n la distancia desde x_m al punto más próximo en un ciclo 2^n , como ilustra la figura. Se tiene

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = -2,5029 \dots$$

independientemente de la forma detallada de $f(x)$. (α es aquí definido negativo para reflejar cómo el punto más próximo a x_m está alternativamente abajo y arriba, de modo que la distancia d_n cambia de signo.)

Estos resultados deducidos a partir de modelos matemáticos han sido razonablemente confirmados en muchos experimentos reales; por ejemplo, aparte de otros experimentos en láseres y sistemas químicos y acústicos {4.3(8) indica $4.3 \pm 0,8$):

Experimento	n	δ	Referencia
Hidrodinámico			
agua	4	4.3(8)	Giglio et al. (1981)
mercurio	4	4.4(1)	Libehaber et al. (1982)
Electrónico			
diodo	4	4.5(6)	Linsay (1981)
diodo	5	4.3(1)	Testa et al. (1982)
transistor	4	4.7(3)	Arecchi & Lisi (1982)
Josephson simul.	3	4.5(3)	Yeh & Kao (1982)

Esta universalidad es, en principio, misteriosa, puesto que los modelos matemáticos distan muchísimo de sistemas reales tales como fluidos con convección o circuitos electrónicos, que tienen muchísimos grados de libertad.

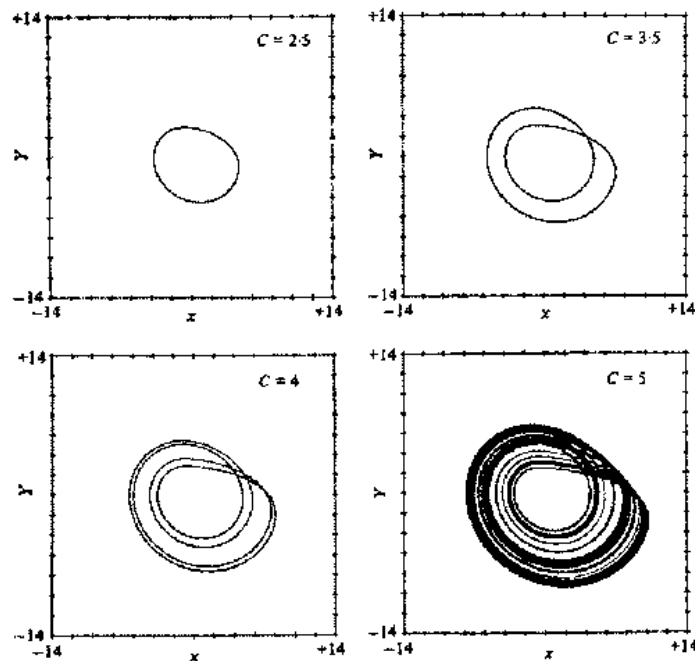
¿Cómo es posible que el mapa unidimensional capture esta complejidad?

Para acercarnos hacia la respuesta, consideremos el **sistema de Rössler**, el conjunto de 3 ecuaciones diferenciales acopladas (a , b y c son parámetros)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + z(x - c), \end{aligned}$$

inventado para mostrar el más sencillo atractor extraño posible. Este sistema es muchísimo más sencillo que cualquiera de aquellos sistemas reales, pero sensiblemente complejo comparado con el mapa unidimensional (notar, por otra parte, que tiene una sola no-linealidad, de modo que es más sencillo que el sistema de Lorenz, que tiene dos no-linealidades).

Haciendo $a = b = 0,2$, las proyecciones bidimensionales del atractor para distintos valores de c son

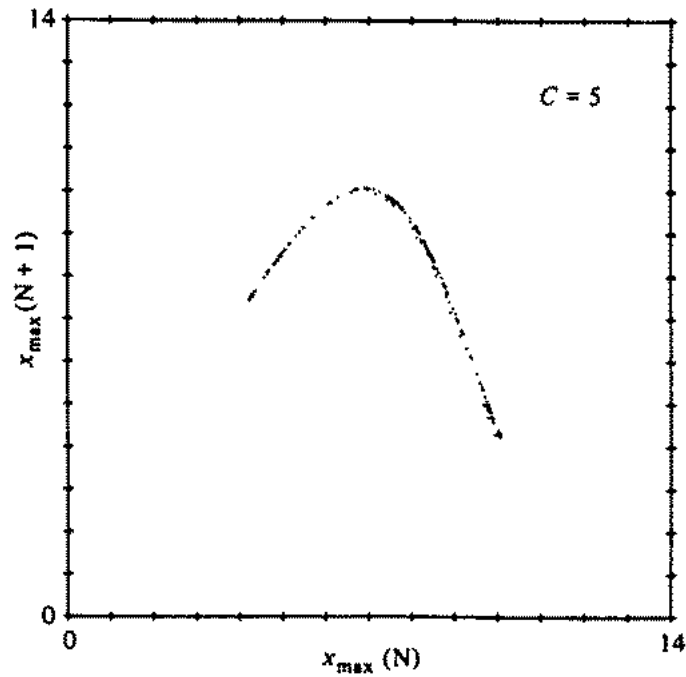


Esto es, el atractor es un simple ciclo límite para $c = 2,5$, mientras que el ciclo límite da dos vueltas antes de cerrarse para $c = 3,5$, y su período es aproximadamente el doble que el del ciclo original.³⁹ Vemos aquí el aspecto que tiene el duplicarse el período en un sistema con tiempo continuo. Otra bifurcación con duplicado del período da lugar al bucle cuádruple que apreciamos para $c = 4$, y una cascada de tales bifurcaciones produce el atractor observado para $c = 5$.

Para comparar este comportamiento con el de un mapa unidiemensional, podemos usar el truco de Lorenz antes discutido para obtener un mapa a partir de un flujo. Fijamos c y anotamos los máximos locales sucesivos, x_n ,

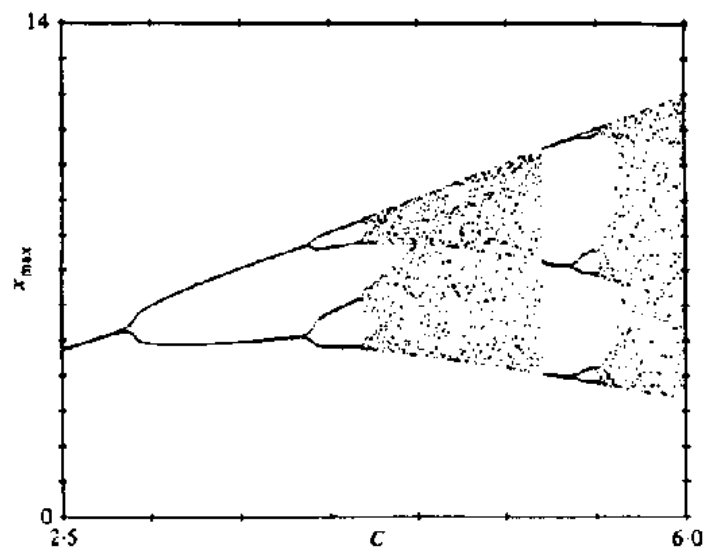
³⁹Existe una bifurcación con duplicado del período entre $c = 2,5$ y $3,5$. Como sugiere esta figura, tal bifurcación sólo puede ocurrir en dimensión 3 o mayor, puesto que el ciclo límite necesita espacio para evitar cortarse así mismo.

de $x(t)$ para una trayectoria sobre el atractor extraño. Dibujamos entonces x_{n+1} versus x_n . El mapa de Lorenz que se obtiene para $c = 5$ es



Vemos cómo los datos caen prácticamente sobre una curva unidimensional que recuerda el caso del mapa logístico.

Para obtener el diagrama de órbitas, vamos variando c y, para cada valor de este parámetro, dibujamos todos los máximos locales x_n sobre el atractor:



El número de máximos diferentes nos indica el ‘período’ del atractor; por ejemplo, para $c = 3,5$ vimos en la primera figura que el atractor es período-2, y aparecen ahora dos máximos locales de $x(t)$. Vemos también las bifurcaciones, las ventanas, etc.

La conclusión es que un sistema relativamente complejo como éste puede tener las características universales de Feigenbaum si su mapa de Lorenz es próximo a unidimensional y unimodal, que son las condiciones de esa teoría de universalidad. Probablemente otros sistemas reales tienen esta propiedad, pero no todos. Para que el mapa de Lorenz sea casi unidimensional es necesario que el atractor extraño sea muy plano, esto es, separarse poco de una variedad bidimensional, lo que requiere que el sistema sea fuertemente disipativo: sólo dos o tres grados de libertad son entonces realmente activos, arrastrando a los otros como esclavos. Esto no se cumple, luego no hay que esperar que la teoría aplique, por ejemplo, en el caso de flujos totalmente turbulentos o, en general, cuando el sistema tenga muchos grados de libertad activos, correspondiendo a comportamiento muy complejo en el espacio y en el tiempo. Esto se confirma experimentalmente, dejando tales sistemas todavía huérfanos de teoría.

6.- Renormalización

Feigenbaum explicó la universalidad de α y δ usando las ideas (del grupo) de renormalización de la física estadística, estableciendo, en consecuencia, una analogía entre estas constantes y los exponentes universales observados en los cambios de fase de segundo orden.

Veamos una rápida introducción a tales ideas en este contexto.

Sea

- $f(x, r)$ un mapa unimodal con ruta hacia el caos en la que se duplica el período al incrementar r ;
- x_m el máximo de f ;
- r_n el valor de r para el que aparece un ciclo 2^n ;
- R_n el valor de r para el que el ciclo 2^n es superestable.

Como ejemplo, consideremos $f(x, r) = r - x^2$. Calculemos:

R_0 : Por definición, el mapa tiene un punto fijo superestable para este valor de r .

Puesto que la condición de punto fijo es

$$x^* = R_0 - (x^*)^2,$$

y la condición de superestabilidad es

$$\lambda = (\partial f / \partial x)_{x=x^*} = 0,$$

que implica $x^* = 0$ (puesto que $\partial f / \partial x = -2x$), se sigue que el punto fijo es el máximo, $x^* = 0$, de f (pues hace $\partial f / \partial x = 0$ y $\partial^2 f / \partial x^2 < 0$) y que $R_0 = 0$.

R_1 : El mapa tiene en $r = R_1$ un ciclo-2 superestable.

Sean p y q los puntos del ciclo. Superestabilidad requiere

$$\lambda = (-2p)(-2q) = 0,$$

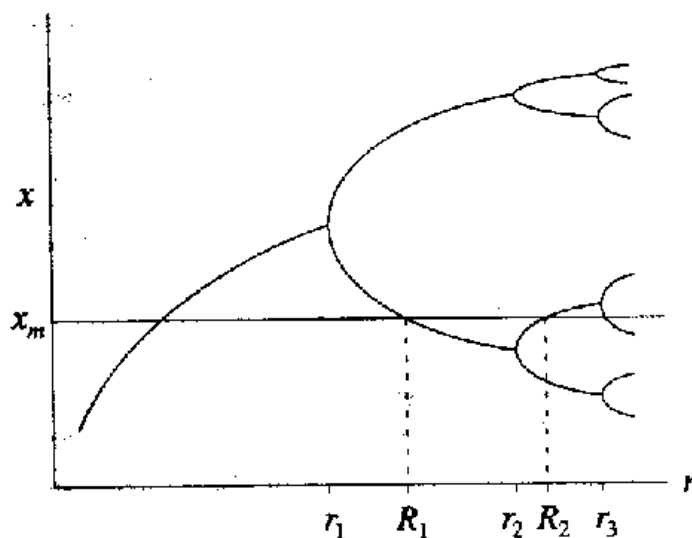
luego el punto $x = 0$ ha de ser uno de los puntos en el ciclo-2. Entonces, la condición período-2, $f^2(0, R_1) = 0$ implica que $R_1 - (R_1)^2 = 0$. En definitiva, $R_1 = 1$ (pues la otra raíz da un punto fijo, y no un ciclo-2).

Este ejemplo ilustra una PROPIEDAD GENERAL:

**un ciclo superestable de un mapa unimodal
siempre contiene x_m como uno de sus puntos.**

Esto sugiere un sencillo método gráfico para localizar R_n .

Sea

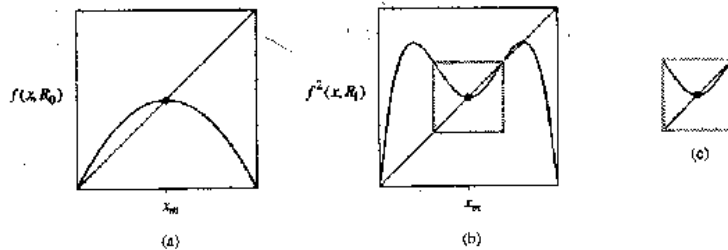


Trazamos la horizontal en x_m : las intersecciones con el árbol del diagrama de órbitas señalan R_n , que se encuentra entre r_n y r_{n+1} . Se puede entonces comprobar numéricamente que, en efecto, los R_n sucesivos tienden a aproximarse con el factor universal $\delta = 4,669$.

La teoría de renormalización está basada en la **auto-similitud**, propiedad que se hace aquí evidente: a partir de cualquier bifurcación se repite en el árbol esencialmente lo anterior, salvo escalamientos (contracciones y/o dilataciones) en las direcciones x y r . Esta estructura refleja la repetición sin fin del mismo proceso dinámico: aparece un ciclo 2^n , se hace superestable, y pierde entonces estabilidad en una bifurcación en la que se dobla el período.

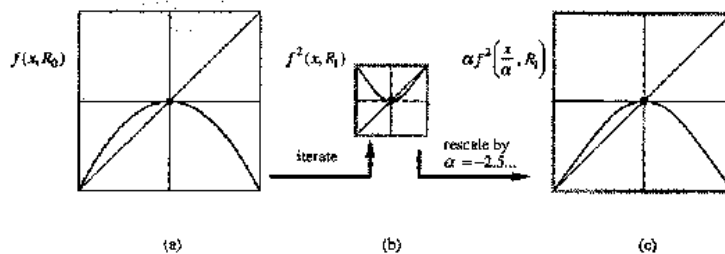
Para expresar matemáticamente esta auto-similitud, comparemos f con su segunda iteración f^2 , y ‘renormalicemos’ un mapa en el otro, esto es, incrementamos r desde R_0 hasta R_1 (este escalado a lo largo de r es la parte

básica del procedimiento de renormalización). En definitiva, nos fijamos en el gráfico de $f(x, R_0)$, figura (a), y en el gráfico de $f^2(x, R_1)$, figura (b):



Es una comparación adecuada, pues los mapas tienen las mismas propiedades de estabilidad: x_m es un punto fijo superestable para ambos. La pequeña caja de (b) se reproduce en (c), que resulta ser prácticamente idéntica a (a), salvo un cambio de escala y la inversión de los dos ejes. Desde el punto de vista de la dinámica, los dos mapas son similares.

Tratemos de expresar en fórmulas estas observaciones cualitativas. Con este objeto, es conveniente trasladar el origen de las x a x_m , para lo que redefinimos x como $x - x_m$. Consecuentemente, hemos de restar x_m también de f , puesto que el mapa implica que $f(x_n, r) = x_{n+1}$. Dibujamos los mapas trasladados en (a) y (b):



A continuación, para que (b) tenga el aspecto de (a), escalamos (expandimos) con un factor $|\alpha| > 1$ en las dos direcciones, e invertimos reemplazando (x, y) por $(-x, -y)$; las dos operaciones pueden realizarse a la vez sin más que tomar un **factor de escala** α que sea negativo. Pero reescalar con α es equivalente a reemplazar $f^2(x, R_1)$ por $\alpha f^2(x/\alpha, R_1)$,⁴⁰ luego la similitud entre (a) y (c) implica que

$$f(x, R_0) \approx \alpha f^2\left(\frac{x}{\alpha}, R_1\right). \quad (29)$$

⁴⁰PROBLEMA 3.22: Sea un mapa $y_{n+1} = f(y_n)$. Reescribidlo en términos de la variable reescalada $x_n = \alpha y_n$, y mostrad así que reescalado e inversión convierten $f^2(x, R_1)$ en $\alpha f^2(x/\alpha, R_1)$.

En definitiva, hemos **renormalizado** f tomando su segunda iteración, escalando $x \rightarrow x/\alpha$, y corriendo r al próximo valor ruperestable ($R_0 \rightarrow R_1$).

Pero estas propiedades no paran en f^2 , sino que son generales, luego podemos renormalizar f^2 generando f^4 y moviendo r al siguiente punto fijo superestable R_2 :

$$f^2\left(\frac{x}{\alpha}, R_1\right) \approx \alpha f^4\left(\frac{x}{\alpha^2}, R_2\right) \implies f(x, R_0) \approx \alpha^2 f^4\left(\frac{x}{\alpha^2}, R_2\right)$$

y seguir para obtener:

$$f(x, R_0) \approx \alpha^n f^{(2^n)}\left(\frac{x}{\alpha^n}, R_n\right).$$

En este contexto, el resultado descubierto numéricamente por Feigenbaum, que antes mencionamos, se formula diciendo que, para $\alpha = -2,5029\dots$ existe la función límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n f^{(2^n)}\left(\frac{x}{\alpha^n}, R_n\right) = g_0(x) \quad (30)$$

tal que $g_0(x)$ es una **función universal** con un punto fijo superestable. Es universal en el sentido de que es (casi) independiente de la f original.

La misma forma de (30) sugiere una explicación de este sorprendente resultado:

$g_0(x)$ sólo depende de f a través de su comportamiento cerca de $x = 0$, puesto que eso es todo lo que sobrevive en el argumento x/α^n para $n \rightarrow \infty$. En cada paso de la renormalización, estamos ampliando un entorno más pequeño del máximo de f , de manera que toda la información acerca de la forma global de f acaba por perderse.

Una advertencia: el *orden* del máximo nunca se olvida, de modo que un enunciado más preciso es que $g_0(x)$ es universal para todo f *con un máximo cuadrático* (el caso genérico). Si f tuviese un máximo de cuarto orden, $g_0(x)$ sería diferente, etc.

Si partimos de $f(x, R_i)$ en lugar de $f(x, R_0)$, se sigue que

$$g_i(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n f^{(2^n)}\left(\frac{x}{\alpha^n}, R_{n+1}\right)$$

es una función universal con un ciclo 2^i superestable. El caso más interesante ocurre cuando empezamos en $R_i = R_\infty$, el inicio del caos, pues se tiene

$$f(x, R_\infty) \approx \alpha f^2\left(\frac{x}{\alpha}, R_\infty\right),$$

de modo que no hay que escalar r al renormalizar.⁴¹ La función límite $g_\infty(x)$, que suele denotarse $g(x)$, tiene pues la propiedad

$$g(x) = \alpha g^2\left(\frac{x}{\alpha}\right).$$

Esto es una **ecuación funcional** para $g(x)$ y el factor universal de escala α .

Esta ecuación funcional es una definición de $g(x)$ en términos de sí misma una vez que se complete con condiciones límites específicas para $g(x)$.

Notemos a este respecto que, al correr el origen, todas las unimodales f tienen el máximo en $x = 0$, por lo que pediremos que $g'(0) = 0$.

Sin perder generalidad, pediremos también que $g(0) = 1$, lo que simplemente define la escala para x .

Por otra parte, notamos (PROBLEMA 3.23): Si $g(x)$ es una solución de la ecuación funcional, también lo es $\mu g\left(\frac{x}{\mu}\right)$ con el mismo α .

Se trata ahora de resolver la ecuación funcional para $g(x)$ y α . En $x = 0$, la ecuación funcional dice que $g(0) = \alpha g(g(0))$ y, como $g(0) = 1$, se sigue $1 = \alpha g(1)$, esto es,

$$\alpha = \frac{1}{g(1)},$$

de modo que $g(x)$ determina α . Nunca se ha encontrado una solución cerrada para $g(x)$, de manera que recurriremos a una solución en forma de serie de potencias:

$$g(x) = 1 + c_2 x^2 + c_4 x^4 + \dots$$

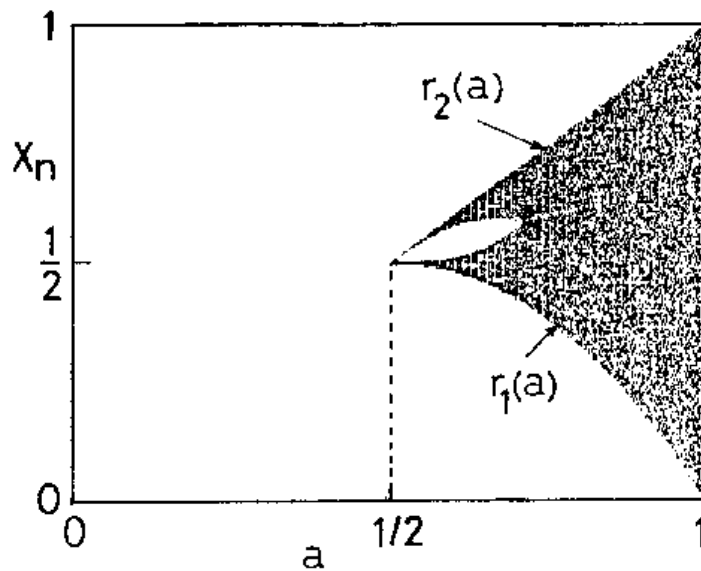
(que supone que el máximo es cuadrático). Sustituimos esta serie en la ecuación funcional e igualamos las mismas potencias de x . Usando un desarrollo con 7 términos es como Feigenbaum determinó $c_2 \approx -1,5276$, $c_4 \approx 0,1048$ y $\alpha \approx -2,5029$, confirmando así la teoría el valor encontrado numéricamente. La teoría también confirma el valor de δ , pero no vamos a hacerlo aquí pues involucra un aparato matemático algo más complejo.

⁴¹En efecto, notar que esta ecuación es como la (29), pero con $R_0 = R_1 = R_\infty$, sin posibilidad de seguir escalando r .

PROBLEMA 3.24: Estudiad analítica y numéricamente, generando el diagrama de bifurcaciones mediante un programa de ordenador, el *mapa carpa de Lozi*,

$$x_{n+1} = a \left(1 - 2 \left| x_n - \frac{1}{2} \right| \right) \equiv f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

donde $0 < a \leq 1$, para $0 \leq x_n \leq 1$, mostrando que no aparece el fenómeno de doblarse el período y que, a partir de un valor crítico del parámetro de control, el sistema se hace inmediatamente caótico.



Determinar $r_1(a)$ y $r_2(a)$ los límites inferior y superior, respectivamente, del diagrama para $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$.