Introducción fnl.02

¿Qué es la Física no lineal?

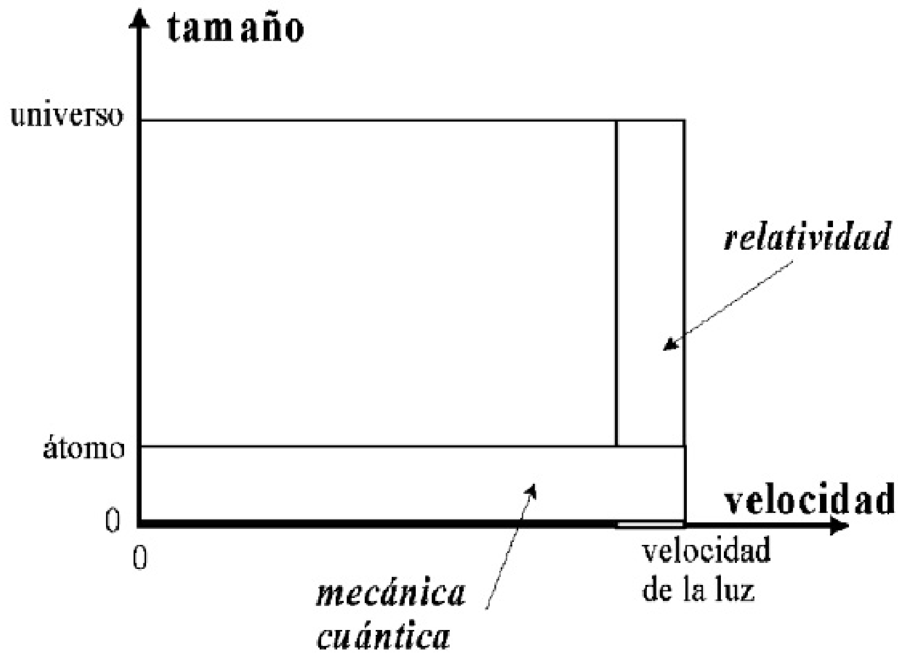
- En las últimas décadas del siglo XX hasta hoy, hemos asistido a una etapa muy importante en el desarrollo científico con el desarrollo de la física o ciencia no-lineal. Como dice Lam (Lam 1998, capítulo 1), ha sido una revolución callada, quizás porque no ha implicado cambios abruptos, pero ha cambiado la manera de ver las cosas de muchos científicos. [1]

- El término "física no lineal" se ha utilizado para designar el estudio de sistemas físicos en los que la respuesta no es proporcional al estímulo. Ahora se ha redefinido para indicar lo que algunos llaman ciencia —o física— de la complejidad, incluyendo el caos como un paradigma de comportamiento complejo. Se habla de 'complejidad' como el estudio de procesos no lineales "con sensibilidad a las condiciones". Así, ciencia no lineal y complejidad se refieren hoy a los mismos fenómenos y serían sinónimos. [2]

[1] Como ejemplo de esto baste citar una muestra de listas de 'bestsellers' del 'New York Times' y de 'amazon.com' en el verano de 1999: 1 Chaos: Making a New Science, James Gleick, Penguin 1988; 2 The End of Certainty: Time, Chaos & New Laws of Nature, I Stengers & I Prigogine, Free Press 1997. 3 The Fortune Sellers: The Big Business of Selling and Buying Predictions, W.A. Sherden, Wiley 1997; 4 Gen. Syst. Theory: Found., Developm., Applic., L. Von Bertalanffy et al., George Braziller 1976; 5 Simulation With Arena, W. David Kelton et al., McGraw Hill 1998; 6 Turbulent Mirror: Illustr. Guide to Chaos and Sci. of Wholeness, J. Briggs et al., HarperCollins 1990; 7 Chaos Theory Tamed, G.P. Williams, National Academy Press 1997; 8 Complexity and Postmodernism: Understanding Complex Systems, P. Cilliers, Routledge 1998; 9 Does God Play Dice?: The Mathematics of Chaos, I. Stewart, Blackwell 1990; 10 Time Series Analysis: Forecasting and Control, G.E.P. Box et al., Prentice Hall 1994; y otros de los libros dados como referencias.

[2] Puede verse cómo definen 'complejidad' varios autores en Science, vol. 284, 2 April 1999. El contenido de este curso podría también conocerse como física posmoderna. La posmodernidad, quizás ya enunciada en la década de los 20, sobre la que han discutido filósofos como Jean Braudillard, Jacques Derrida, Michel Foucault, Franois Lyotard y Gianni Vattimo, es una actitud que floreció en la década de los 80, principalmente entre artistas; en España queda bien reflejada en las películas de Almodóvar, la arquitectura de Bofill, y la decoración en muchos bares de copas, por ejemplo. Conceptualmente, parte de una rebelión contra los principios generales y consagra la diferencia y, puesto que rechaza la verdad absoluta y el sentar cátedra, acaba afectando a la ciencia. Un científico posmoderno trataría de superar la rigidez de las mecánicas resaltando lo que escapa de esa visión, esto es, las indeterminaciones, el azar, el caos, la complejidad, etc. (Por supuesto, se entiende que hay que olvidar algunos de los excesos de la posmodernidad en este sentido, en particular, la consideración de

- La ciencia no-lineal o de la complejidad no es una nueva rama de la ciencia en el sentido usual; no añade nuevos temas de estudio, como quizás sí que hace la física química —que extiende la física y la química a fenómenos en su interfase común que requieren métodos específicos—, sino que 'percola' por todas las disciplinas actuales tanto en las ciencias naturales como en las sociales. El programa de este curso ilustra cómo ésta circunstancia es casi una definición de ciencia no-lineal.
- Por lo que respecta a la física, tiene sentido hacer el siguiente esquema:



Las dos revoluciones surgidas en física a principios del s. XX, que

la ciencia como algo subjetivo; ver la polémica desatada a raiz del 'asunto Sokal'.) De hecho, la fenomenología que vamos a discutir en este curso no admite -al menos de momento- una descripción global y coherente (que es lo que buscaría el modernismo), sino, como veremos, una descripción que responde en parte a la máxima de Lyotard 'pensar en posmoderno es respetar el acontecimiento en lo que tiene de tal, no forzarlo en una calificación'. Parafraseando a Sethna (Nature 410, 242 (2001), la ciencia de la complejidad es consecuencia de los estudios de cambios de fase de segundo orden en los 60 y 70, de modelos estocásticos de turbulencia en los 70, y de sistemas desordenados en los 80. Se me ocurre a vuela pluma que puede añadirse, al menos, el estudio de caos.

presentaron inesperados conceptos y perspectivas, traspasando el dominio clásico, son la relatividad —para fenómenos que involucran velocidades próximas a $10^{10} cm/s$— y la mecánica cuántica —para fenómenos a nivel microscópico, que incolucran distancias típicamente menores que $10^{-8} cm$. La ciencia no-lineal está proporcionando un gran conjunto de nuevas ideas fundamentales y de resultados sorprendentes y además abarca fenómenos en todo el área del esquema, sean clásicos, cuánticos, relativistas, o cuántico-relativistas.

- ¿Por qué es necesaria la ciencia no-lineal o de la complejidad? La física se caracteriza por la sencillez de sus leyes básicas (las leyes de Newton, y las ecuaciones de Maxwell, de Schrödinger y de Hamilton). Estas leyes básicas tienen un gran rango de validez, y se aplican tanto a partículas elementales como a galaxias. Esto último es matizable. La naturaleza tiene una estructura jerárquica, en estratos —cada uno con su escala características para tiempo, longitud y energía— y, al estudiar desde las entidades individuales hacia los agregados, sabemos que no aparecen nuevas leyes básicas pero sí nueva fenomenología. La comprensión de esta nueva fenomenología requiere establecer relaciones entre esos estratos, generalmente desde las escalas pequeñas a las grandes. [3]

- Por ejemplo, hay "fenómenos de alto nivel" que sólo comprendemos muy pobremente: no sabemos relacionar el origen de la vida con leyes fundamentales en niveles más bajos. Incluso si la conexión entre niveles es más transparente, como ocurre entre el movimiento de las moléculas del aire y los fenómenos atmosféricos, no somos capaces de deducir la forma específica de estos fenómenos com-

[3] Algunas de las dualidades matemáticas actualmente en estudio en teoría de cuerdas sugieren conexiones en sentido contrario. Estoy siguiendo ahora un argumento de J. Lebowitz en su charla en la reunión "Science for Survival and Sustainable Development", Pontifical Academy of Sciences, Vatican City, 12-16 March 1999.

plejos directamente del comportamiento de los constituyentes microscópicos.

- Es cierto que, debido a la separación entre escalas, es a menudo posible y a veces esencial discutir niveles distintos independientemente –el quark es irrelevante en procesos biológicos y el concepto de átomo sólo distrae al estudiar corrientes oceánicas. Pero comprender la relación entre niveles suele ser requisito para innovar, como ocurre en el diseño de nuevos materiales o de nuevos medicamentos. [4]

Autómatas celulares

- Los autómatas celulares (AC) fueron introducidos por Stanislas Ulam, amigo y colaborador de John von Neumann y pionero en el desarrollo de los métodos Monte Carlo, a finales de la década de 1940, inmediatamente después de aparecer las computadoras electrónicas. Los AC No son máquinas reales —biológicas o mecánicas—, sino modelos concebidos como algoritmos matemáticos para ser implementados en un ordenador y simular así un cierto comportamiento. Su nombre es debido a que von Neumann usó algoritmos AC para mostrar que, en principio, es posible la máquina que se reproduce a sí misma. [5]

- Los AC típicamente capturan el comportamiento que aquí nos interesa. Por ejemplo, defininamos un sencillo AC que permite, además de definir este tipo de algoritmos, ilustrar la dificultad que entraña

[4] Mencionemos que no está garantizado el que existan siempre tales conexiones; por ejemplo, no se conoce –quizás no existe– ni siquiera una "explicación en principio" del fenómeno que llamamos conciencia en términos de las leyes en niveles inferiores. Roger Penrose apuesta por esa imposibilidad en Lo grande, lo pequeño y la mente humana (Cambridge Univ. Press 1999) y menciona que cualidades mentales como la emoción, la estética, la creatividad, la inspiración o el arte son difíciles de relacionar con nuestras leyes básicas.

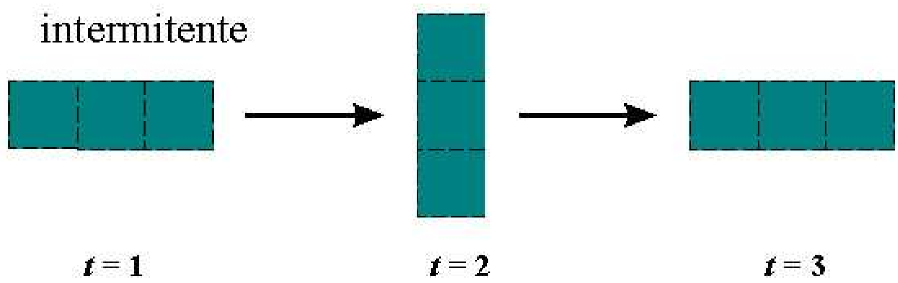
[5] Son buenas referencias: 1 Stephen Wolfram (ed), 'Theory and Applications of Cellular Automata', World Scientific, Singapore 1986. 2 S. Wolfram, 'Cellular automata as models of complexity', Nature 311, 419-424 (1984), en Lam p. 197. 3 Puede verse también una introducción en Sigmund 1995, p. 22 y siguientes.

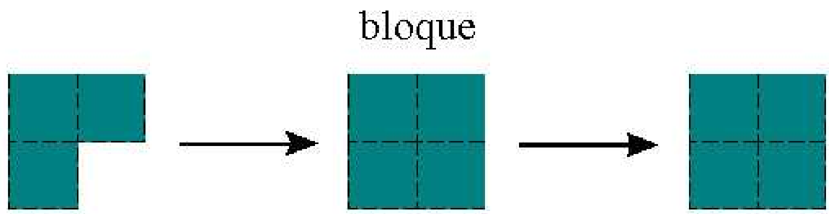
la explicación de 'fenómenos de alto nivel' a partir del conocimiento de las leyes correspondientes a niveles más fundamentales. A principios de los 1970, el matemático inglés John H. Conway introdujo el "juego de la vida", un sencillo AC bidimensional que acabó siendo muy popular entre el público. Consideremos un tablero de ajedrez indefinido donde las casillas pueden estar vacías u ocupadas. Si: vacía, sigue vacía en próxima generación, excepto si 3 (de las 8) vecinas están ocupadas, en cuyo caso pasa a estar ocupada; ocupada, permanece ocupada si dos o tres de sus vecinos están ocupados; en caso contrario, aparece vacía en la próxima generación.

Está claro que es una buena metáfora para una situación (sencilla) realista si, por ejemplo uno imagina que los dos estados se corresponden con célula muerta o viva, respectivamente. El juego simula entonces la evolución en el tablero de 'criaturas' vivas muy básicas. De acuerdo con la dinámica elegida, es necesario tener tres vecinos vivos para que se produzca un nacimiento, y un sujeto necesita de dos o tres vecinos para sobrevivir —si tiene menos, muere de soledad; si más, muere de hacinamiento—. De este modo, la población en el sistema cambia de generación en generación. *El futuro está contenido en la condición inicial; nada se deja al azar.*

Llega a ser apasionante simular distintas condiciones iniciales en el ordenador y ver cómo evolucionan. De hecho, a pesar de conocer las reglas básicas del, y siendo éstas sencillísimas y locales —lo que pasa en una casilla no depende de las distantes sino de los vecinos—, el comportamiento emergente es complejo, irregular, impredictible. Comencemos notando que la evolución puede determinarse a veces sin ordenador. Por ejemplo, está claro que si sólo hay una o dos casillas vivas, la población se extingue inmediatamente. Pero si hay tres, su descendencia puede prolongarse sin límite: de hecho, esto pasa para dos tipos de configuraciones con 3:

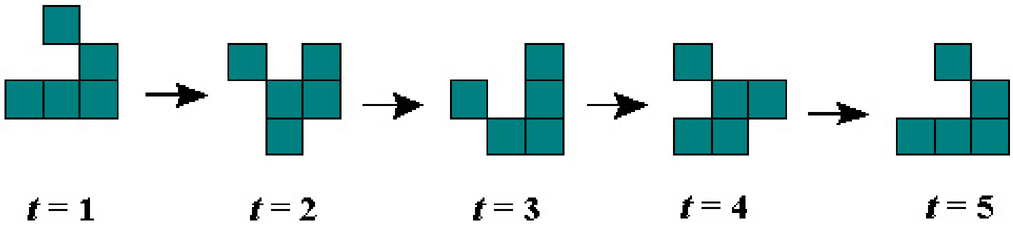
- 3 casillas adyacentes en línea: la primera y la última mueren, pero la del medio sobrevive y adquiere nuevos vecinos, de manera que es como si la línea rotase $90°$, y se produce un giro semejante en la próxima generación, y así sucesivamente; es una configuración que oscila con período 2, y se le llama intermitente;
- 3 casillas en ángulo recto se transforman en un bloque 2×2 en la siguiente generación, que es estable pues cada célula viva tiene tres vecinas vivas, mientras que las muertas tienen dos vecinas vivas como máximo; es un ejemplo de vida permanente.





También podemos observar patrones que no alteran su forma, o que la recobran constantemente mientras se arrastran por el tablero, como la mecedora, que se repite al cabo de 4 generaciones después de haberse desplazado una casilla en diagonal, y así sucesivamente hasta el infinito si no encuentra obstáculos:

Estos ejemplos nos muestran lo sencillo que es predecir generación tras generación, aunque está claro que, para sacar partido al juego,



conviene que lo programemos en la memoria de un ordenador y seamos luego espectadores de lo que pasa en pantalla con las reglas dadas a partir de distintas poblaciones iniciales. Pronto identifica uno todo un zoo de objetos con vida permanente (que se conocen popularmente con nombres propios: colmena, barcaza, serpiente, comilón, baliza, pentadecatlón, sapo, reloj, r-pentomino, bellota; Sigmund fig. 2.3 en p.12) y patrones periódicos como la mecedora. Pero, cuanto más se juega, más se hace evidente el carácter impredictible que tiene el resultado en general. Por ejemplo:

- ¿Qué pasa con una línea ocupada? Está claro que depende de su longitud, pero ¿cómo? Nadie ha encontrado regularidad alguna en el resultado al ir variando la longitud.
- ¿Hay algún patrón que pueda crecer sin límites?

Este juego, aparentemente infantil: [6]

- Es un AC, precursor de otros más elaborados que estudiaremos a lo largo de este curso. Un autómata celular es, pues, un sistema dinámico discreto cuya evolución es consecuencia de reglas locales. En la práctica, se realiza de modo que sus elementos
  - pueden ocupar las celdas o los nudos de una red, y
  - son capaces de un número finito de estados discretos; las reglas locales especifican cómo pasar de uno a otro de estos estados,

[6] Es notable aquí que, partiendo de este juego infantil, Christofer Langton y otros han desarrollado el concepto de vida artificial hasta crear una vigorosa disciplina.

lo que produce la evolución global del sistema que, en consecuencia, es discreta.

La naturaleza discreta de todas las magnitudes involucradas hace que puedan hacerse cálculos exactos —con el ordenador o sin él. [7]

- El comportamiento del juego de la vida permite la siguiente reflexión: aunque conociéramos todas las leyes fundamentales de la física, el mundo podría seguir siéndonos oscuro y misterioso si no adoptáramos un punto de vista en nuestro análisis como el de la física no-lineal.

- La Mecánica estadística (ME) es capaz de conectar –a veces– con rigor matemático, comportamientos organizados bien definidos, observados al más alto nivel, con la actividad de multitud de entidades individuales que interaccionan entre sí al más bajo nivel. Algunos de los mayores éxitos de esta ciencia han sido:

  – Ha relacionado fenómenos térmicos macroscópicos con la dinámica microscópica de átomos y moléculas.
  – También explica comportamiento magnético macroscópico a partir de las propiedades de los espines.
  – Relaciona las propiedades de un cuerpo negro en movimiento con las de los fotones.

- La ME ha mostrado que ciertos fenómenos son meros efectos aditivos de las acciones de los átomos individuales. La presión que ejerce un gas sobre la vasija que lo contiene es un ejemplo: se trata

[7]Los AC no se tomaron muy en serio en ciencia hasta que Frisch, Hasslacher y Pomeau demostraron en 1986 que es posible usar un AC determinado —el que defino luego, en página ¡pageref¿AC¡/pageref¿— para simular un flujo como el que satisface las ecuaciones de Navier-Stokes. La importancia de este resultado consiste en que realiza la conexión (rigurosa, aunque sea usando el ordenador) entre dos de los niveles a los que antes nos referíamos: el nivel microscópico del AC, en el que las partículas del fluido se hacen evolucionar siguiendo sencillas reglas, y el niver macroscópico de las (aceptadas) ecuaciones de la hidrodinámica, que son fenomenológicas.

simplemente de la suma del momento transferido en las colisiones de los átomos con las paredes. Otros fenómenos macroscópicos son paradigmas de comportamiento cooperativo emergente, sin contrapartida directa en las propiedades o en la dinámica de los constituyentes microscópicos considerados aislados. Por ejemplo, el comportamiento irreversible de los sistemas macroscópicos (como la tendencia de los sistemas macroscópicos aislados a evolucionar hacia el equilibrio —un estado caracterizado por ser máxima la función entropía para las ligaduras relevantes existentes.) o las transiciones de fase en sistemas en equilibrio (como la condensación de un vapor o la solidificación de un líquido). En estos casoos hay rotura de simetría, es decir, las simetrías que caracterizan un nivel fundamental desaparecen en el siguiente, un fenómeno que seguramente ocurre también en los sistemas complejos.

- Esta complejidad emergente –y fenómenos similares que no es capaz de tratar con mínimo rigor la Mecánica estadística, como en el caso de sistemas biológicos, que son actualmente un caso límite de complejidad excepcional– es la que nos interesa en este curso. De hecho, queremos llegar a comprender, al menos en parte, a través de muchos ejemplos, tratando de resumir lo que nos enseña el estudio reciente de sistemas complejos, cómo es posible que el mundo sea tan complejo si las leyes básicas son tan sencillas.

Complejidad

- Complejidad indica estructura con variaciones. Un organismo vivo es complejo puesto que tiene muchas distintas partes con funciones diferentes (¡aunque todo se sigue del mismo código genético!). Esa complejidad es evidente al observar el océano o el cielo, y la tendencia natural que existe en el mundo físico es hacia la formación de estructuras.

- Los sistemas naturales también presentan frecuentemente caos, esto es, influencia esencial de las condiciones iniciales en el resultado final. Lo difícil que resulta predecir qué variaciones ocurrirán en un lugar y tiempo dados evidencia que nuestro mundo es caótico; de hecho, observamos cómo los errores e incertidumbres a menudo crecen exponencialmente con el tiempo.

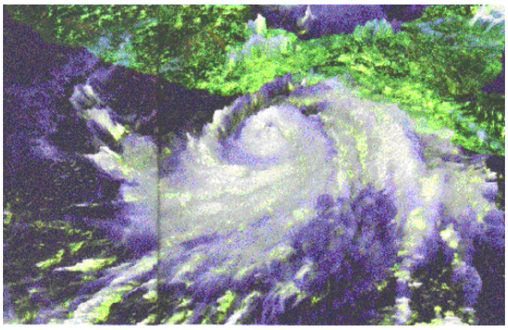
- Aunque nuestro mundo presenta regularidades (el invierno sigue al verano según un patrón predictible), está caracterizado por su complejidad (el tiempo atmosférico es muy complejo), es decir, está altamente estructurado, y es caótico, difícilmente predictible. Complejidad y caos (no sencillez ni regularidad) hacen científicamente interesantes los sistemas que nos rodean; la física emergente de estos sistemas es lo que llamamos hoy día física no lineal.

Cómo aparece la complejidad [8]

- La Naturaleza es capaz de crear estructuras complejas, incluso en situaciones sencillas, y puede obedecer leyes sencillas, incluso en situaciones complejas. Los fluidos frecuentemente producen comportamiento complejo, que puede ser altamente organizado (p.e.

[8] Estoy siguiendo argumentos de Nigel Goldenfeld y Leo P. Kadanoff en 'Simple Lessons from Complexity', Science 284, 87-89 (1999)

un tornado) o caótico (como en un flujo fuertemente turbulento). Lo que vemos suele depender del tamaño del observador. Una mosca atrapada en un tornado se sorprendería al saber que forma parte de un flujo muy estructurado:


- Ejemplo de comportamiento turbulento: La hidrodinámica nos enseña que las ecuaciones que describen cómo la velocidad del fluido en un punto del espacio afecta a la velocidad en otros puntos se deducen a partir de tres ideas básicas:
  - **Localidad.** Un fluido contiene muchas partículas en movimiento, pero una partícula es influida sólo por otras partículas en su entorno inmediato.
  - **Conservación.** Hay 'cosas' –magnitudes– que nunca se pierden, sólo cambian de lugar, como partículas y momento.
  - **Simetría.** Un fluido es isotrópico e invariante por rotaciones.

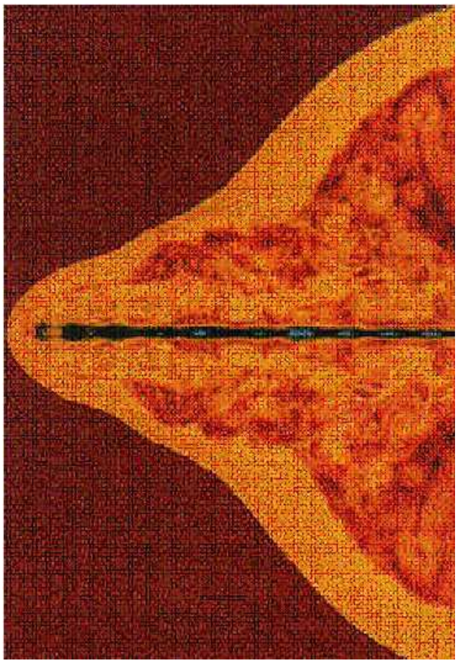


Figure 1: Simulación en ordenador de chorro de gas penetrando —por orificio a la derecha— a velocidad 10.000 veces la del sonido en ambiente gaseoso 100.000 veces más denso. (Azul indica la mayor velocidad, amarillo intermedia y rojo estacionario.) Se crea una especie de capullo, donde se desarrollan presiones altísimas. El choque calienta el chorro y reduce su velocidad hasta 7 u 8 Mach, tendiendo a volver hacia el orificio, y aparecen muchos vórtices. Estos vórtices tienden a arrastrar gas del ambiente. Esta situación cambia de forma impredictible con el tiempo. No hay teoría para este proceso, ni approximada, pero a pesar de esta complejidad evidenciada por la simulación —cualitativamente acorde con los experimentos— las leyes básicas entre partículas —la única información proporcionada al ordenador para la simulación— son sencillísimas.

En consecuencia, para construir un modelo de fluido —por ejemplo, con objeto de estudiarlo en el ordenador—, podemos diseñar una especie de danza de partículas obedeciendo estas tres ideas. Para limitarnos al caso más sencillo, imaginemos que el baile ocurre, sin salirse de un plano, en un retículo exagonal regular, con estas reglas: [9](fig. 2)

[9] Éste es el AC introducido en U. Frisch, B. Hasslacher & Y. Pomeau, Phys. Rev. Lett. 56, 1505 (1986), al que antes nos referimos. Por motivos obvios, este tipo de AC se conoce también como gas reticular. En Marro & Dickman (1999) se estudian otros gases reticulares. Ver Bruce M. Boghosian, "Lattice Gases Illustrate the Power of Cellular Automata in Physics", Computers in Physics, Nov/Dec 1991, p. 585 (tengo copia), que también describe la simulación Rothman & Keller de mezcla dos tipos de partículas según proceso dinámico elemental basado en las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido incompresible.

– Cada partícula está caracterizada por su posición en un nudo y por la dirección (una entre seis posibilidades) de su velocidad, $\vec{v}$;

– En el instante t cada partícula salta al nudo más próximo en dirección $\vec{v}$;

– Si las flechas (momentos) en cada nudo suman cero, girad $60°$;

– Repetid este paso miles de veces; promediad para suavizar.

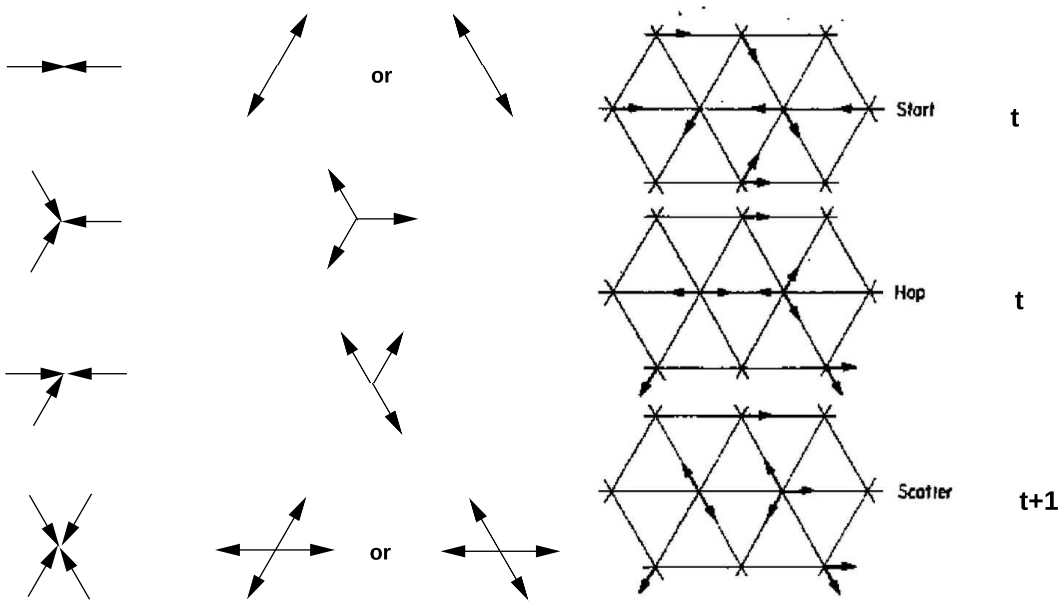


Figure 2: Reglas para la simulación de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Notamos los siguientes hechos importantes:

– Las particulas se cruzan, a menos que ocurra una colisión no trivial.

– La red triangular asegura perfecta isotropía macroscópica (si $N \to \infty$, $d = 2$) hay conservación de masa y momento; no es necesaria conservación de energía, pues la ec. de estado es irrelevante en este límite incompresible.

– El resultado es cualitativamente indistinguible del comportamiento de fluido real, esto es, estas sencillas reglas mimetizan el comportamiento de las complejas ecuaciones hidrodinámicas. [10] [11]

Cómo estudiar la complejidad

- Para extraer la física que es relevante en un sistema complejo, es necesario enfocar el nivel de descripción adecuado:
  - Experimento. El mejor, pues las técnicas experimentales (combinadas con el ojo humano) permiten examinar grandes cantidades de datos.
  - Simulación. Sirve como sustituto del experimento —cuando éste es difícil o imposible—, para:
    - hacer tests exigentes de las teorías —si la teoría no es capaz de describir el comportamiento del modelo, difícilmente describirá la realidad, más complicada—, y para
    - identificar piezas esenciales de física que deban ser incorporadas a la teoría.

  Es muy útil para investigar una situación o proceso físico en particular. En el autómata del ejemplo anterior, como en otros muchos casos, la estructura del fluido a larga escala es independiente de la descripción detallada del movimiento en escalas pequeñas. Podemos explotar esta 'universalidad' para diseñar el modelo mínimo más conveniente.
    - Por ejemplo, podría parecer más interesante simular un fluido mediante dinámica molecular (la ecuación diferencial de

[10] S. Chapman & T.G. Cowling, The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases, Cambridge Univ. Press 1970 (3rd edition); clásica deducción ecs. hidrodinámicas de leyes conservación.

[11] No es necesario ocuparse de quarks al diseñar un puente; afortunadamente, la naturaleza ha proporcionado una conveniente separación de escalas, como indicaba al principio. En consecuencia, un AC, que olvida los detalles 'irrelevantes' del sistema simulado, es acorde con una filosofía esencialmente distinta de la imperante en dinámica molecular, donde se intenta capturar todo el realismo posible de las interacciones entre moléculas.

movimiento de Newton exacta para el caso en cuestión se trata en el ordenador como una ecuación en diferencias finitas) pero esta técnica es tan lenta que difícilmente permite observar tiempos y tamaños de interés, salvo en casos especiales.

  * Otro ejemplo, si estudiamos dinámica de proteinas —como hacen algunos biólogos computacionales— siguiendo con detalle cada parte de la molécula, el ordenador sólo llega a mostrarnos ciclos casi microscópicos donde nada científicamente significante ocurre durante el tiempo de observación/computación, siempre limitado.

- Teoría. Esta última observación aplica también al desarrollo de teorías; el estudio de sistemas complejos con complicados tratamientos analíticos puede dar información sólo acerca de las estructuras a escala pequeña.

  Por ejemplo, no es conveniente estudiar los mercados financieros —u otros sistemas de comportamiento aleatorio complejo— mediante teorías geométricas estocásticas, como detallados movimientos brownianos; de hecho, no pueden reproducir las distribuciones de probabilidad fuertemente no-gausianas, con largas colas, que se observan en muchos mercados. En su lugar, el modelado ha de partir de preguntas como: ¿Cuáles son las no-linealidades o no-localidades más sencillas presentes? Esto es, tratando de separar características universales y comportamientos de escala de otras específicas de cada mercado.

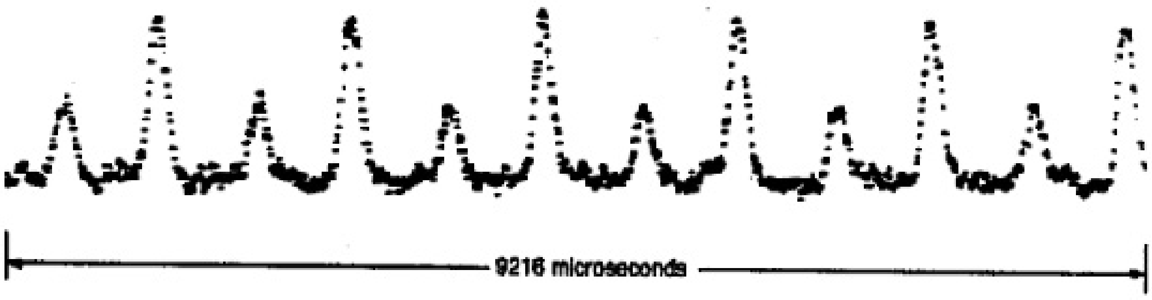
  Por otra parte, si incluimos demasiados procesos y parámetros, tenderemos a oscurecer la deseada comprensión cualitativa.

¿Se detectan rasgos generales?

- Un fluido en movimiento puede arrastrar 'elementos pasivos' (como energía, impurezas, etc.) que no afecten propiamente al flujo. Estos escalares pasivos sufren convección (van con el fluido) y difusión (se mueven al azar). El movimiento convectivo, que trata inicialmente de relacionar regiones separadas, tenderá a incrementar los gradientes. La difusión tenderá a suavizar estos gradientes. Si el flujo es rápido y turbulento, predominará la mezcla convectiva a la difusión; la densidad de estos escalares muestra entonces —como se comprueba en experimentos y simulaciones— un perfil caracterizado por muchas zonas planas separadas por saltos abruptos. Las zonas planas, que denotan regiones bien mezcladas, sin gradientes, son consecuencia de la competición entre convección y difusión. No obstante, la existencia de gradientes iniciales se manifiesta en saltos abruptos entre esas regiones homogéneas. [12] Este tipo de comportamiento (que, con objeto de generalizarlo, podríamos describir diciendo que el sistema está dominado por 'grandes sucesos') se llama intermitencia. Esta intermitencia parece ser una característica de los sistemas dinámicos:
  - El tiempo se hace tormentoso repentinamente; existen épocas glaciares; el mercado financiero se desploma; hay plagas y epidemias; un avión entra en zona turbulenta;
  - Confirmando esta 'intermitencia', ya sabemos que los movimientos de los cuerpos celestes no son tan ordenados como antes creíamos:
    * 1983 (Physics Today, Marzo): Donald Backer y sus colegas descubren en Arecibo una señal de radio perfectamente

[12] Se entiende que estamos muy lejos del último estado de equilibrio homogéneo, al que eventualmente podría llegar el sistema al cabo de más o menos tiempo, que no interesa —por su sencillez— en este contexto.

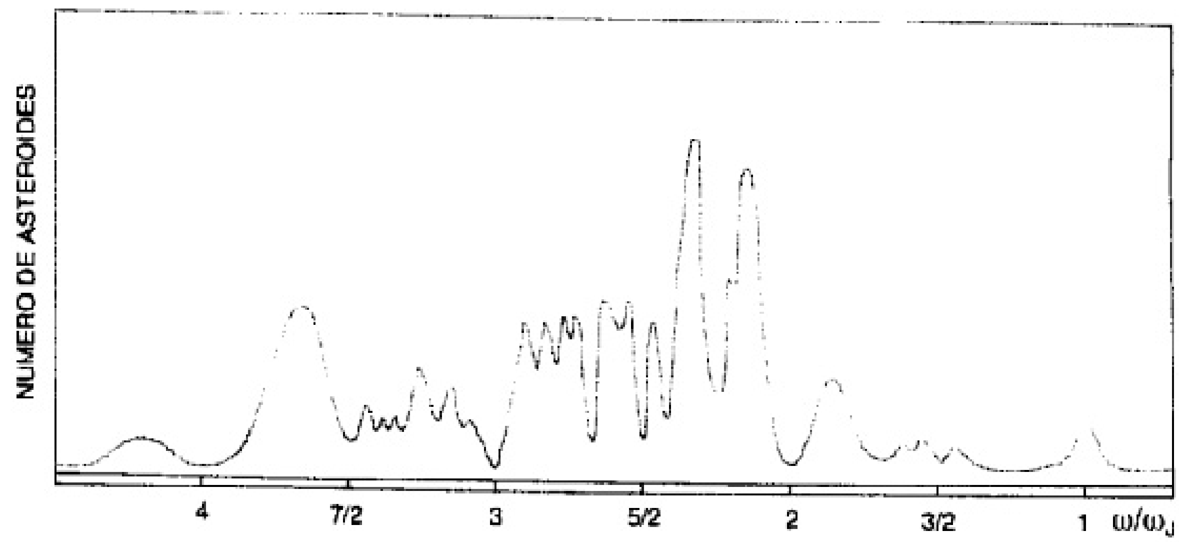
regular (dos picos repetidos siempre igual)



que se suponen debidos a los polos magnéticos opuestos de una estrella de neutrones —girando rápidamente. (En el informe se dice que la señal real es mucho más limpia y regular que en este gráfico; por ejemplo, la anchura de los pulsos es debida al promedio de la señal que realiza el instrumento de medida.)

∗ 1995 (Physics Today, Abril, y J.R. Buchler et al., Phys. Rev. Lett. 74, 842): analizando con detalle numerosas medidas anteriores referidas a la estrella R Scuti, se concluye que sus emisiones fluctuantes de luz (en función del tiempo) son acordes con la definición de caos, quizás debido a la superposición de (sólo) dos modos vibracionales diferentes en la estrella.

∗ Número de asteroides para cada valor de la frecuencia orbital (en unidades de la de Júpiter):
Esta intermitencia es probablemente debida a que la perturbación de Júpiter produce resonancias y movimiento caótico, lo que hace que el asteroide tienda a escapar de unas órbitas y preferir otras.
Se observan en la práctica saltos de cualquier tamaño, aunque los mayores ocurren más raramente. Empíricamente, el tamaño de los saltos sigue una distribución de probabilidad que, para



saltos grandes, es de la forma [13]

$$P(\text{salto}) = \frac{1}{2\sigma}\exp\left(-\frac{|\text{salto}|}{2\sigma}/\right)$$

con σ la desviación estándar, que contrasta con la forma gausiana:

$$P(\text{salto}) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}}\exp\left(-\frac{(\text{salto})^2}{(2\sigma)^2}/\right)$$

que uno podría haber esperado (es la hipótesis más generalmente empleada en el pasado en física). En su lugar, siempre se observa aquel comportamiento exponencial en presencia de caos y turbulencia. Esto implica que los sucesos malos, improbables, ocurren con mayor frecuencia (exponencial) de lo que uno podría pensar (gausiana). Por ejemplo, un suceso 6σ tiene probabilidades 10^-9 en el caso gausiano y 0.0025 en el caso exponencial, luego las predicciones gausianas serían esencialmente incorrectas en fenómenos con intermitencia (*intermittency*), consideración que puede ser muy importante

[13]A.R. Kerstein, J. Fluid Mech. 291, 261 (1997); E. Siggia & B. Shraiman, Phys. Rev. E 49, 2912 (1994)

en el estudio de mercados financieros, como se ha resaltado recientemente, [14] y se sigue otra lección: Los sistemas complejos forman estructuras, y estas estructuras varían ampliamente en tamaño y duración. Sus distribuciones de probabilidad son raramente normales, de modo que los sucesos excepcionales no son raros.

Sistemas complejos

En general, un sistema complejo consta de muchos elementos sencillos [15]. Éstos son como agentes 'inteligentes', que interaccionan entre sí y quizás con el exterior, lo que hace evolucionar al sistema —a veces, pueden también producirse cambios en los mismos elementos. En cualquier caso, no es posible deducir el comportamiento global a partir del de las partes: no es evidente una relación a priori entre esos 'niveles'. La complejidad del sistema depende del aspecto a estudiar. Una roca es un sistema complejo si nos interesa saber cómo se formó, o relacionar las propiedades de sus componentes con su estructura y otras propiedades observables, pero es un sistema sencillo si queremos predecir su trayectoria acorde con las leyes de Newton. De hecho, siguiendo a Lam, podría decir —con error despreciable— que son:

- Sistemas sencillos: los que se estudian en las licenciaturas de física y química y en ingeniería, y
- Sistemas complejos: aquellos sobre los que se investiga en los departamentos universitarios.

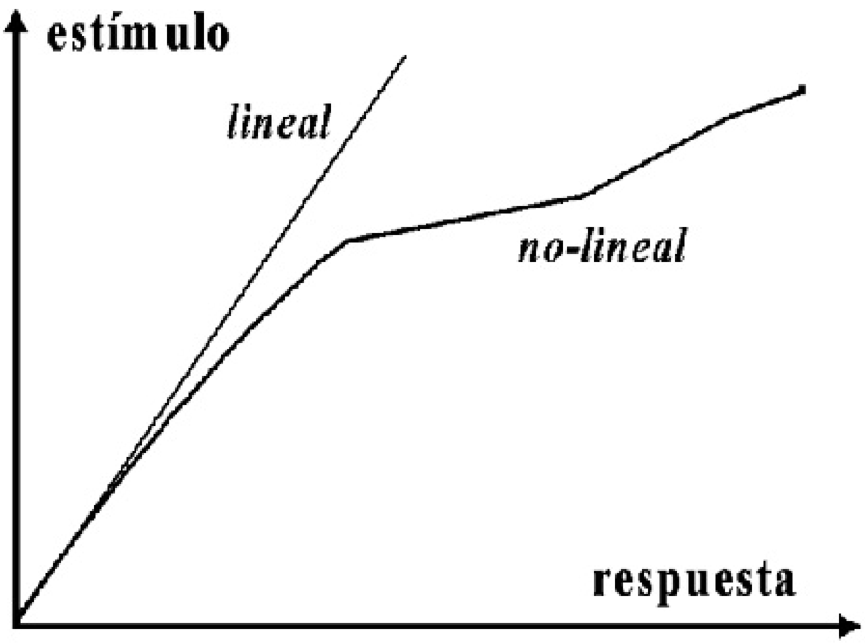
---

[14] B. Mandelbrot, Fractals and Scaling in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk, Springer-Verlag, New York 1997.

[15] En este curso estudiaremos también sistemas con sólo unos pocos grados de libertad. Esto es así porque, a pesar de ello, manifiestan complejidad y —dada su sencillez— son apropiados para comprender en ellos el origen del comportamiento —por ejemplo, caos— observado en sistemas naturales, que siempre son más complejos y difíciles de estudiar.

No linealidad

- Un sistema es no-lineal si sus respuestas no son proporcionales al estímulo que las provoca. El sistema de calificación de un profesor no es lineal, pues la calificación no suele ser una función lineal de las horas dedicadas al estudio por el alumno, aunque se intenta que sea una función monótonamente creciente: [16]



- De hecho, la no-linealidad es más frecuente que la linealidad. Por ejemplo, el aumento con el tiempo de una cierta cantidad x(t) es proporcional en algunos sistemas reales al valor presente elevado a una cierta potencia, de modo que

$$\frac{dx}{dt} = ax^{\alpha}, \qquad a, \alpha = \text{const}, \tag{1}$$

que sólo implica comportamiento lineal, $x = at + b$, para el caso

[16] Sigo a Lam (1998), capítulo 1.

especial $\alpha = 0$. En otro caso, se tiene, por ejemplo:

$$\alpha = 1 \Rightarrow x = b \exp(at),$$
$$\alpha \neq 1 \Rightarrow x = [(1-\alpha)(at+b)]^{1/(1-\alpha)}, ...$$

- En general, la linealidad sólo es para los sistemas en ciencias naturales y sociales una aproximación razonable para estímulos suficientemente pequeños. Es el caso de un muelle o resorte que se comporta como un oscilador anarmónico, salvo para pequeños esfuerzos, cuando satisface la ley de Hooke de proporcionalidad entre el esfuerzo y el cambio de longitud que produce. Otro ejemplo es el péndulo simple:
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\text{sen}\theta = 0, \tag{2}$$
donde θ es el ángulo con la vertical, g es la aceleración de la gravedad, y L es la longitud del pédulo (distancia entre el punto de suspensión y la masa puntual). Como recordaréis de su estudio, se comporta de modo muy distinto según sea la amplitud (máximo valor de θ durante sus oscilaciones): si la amplitud es pequeña se tiene sen$\theta \approx \theta$ (régimen lineal) y el período es independiente de ésta, lo que no es cierto en el caso general. De hecho, un péndulo real tiene generalmente un comportamiento muy complejo y caótico.

- Matemáticamente, la no-linealidad se reconoce por el fallo del principio de superposición, que establece que la suma de dos soluciones de las ecuaciones que describen el sistema es una solución. [17] Consecuentemente, el comportamiento físico global de un sistema no-lineal es algo distinto de la suma de sus partes. El fallo de este principio puede tener dos causas:

  – El carácter no-lineal de la ecuación. Esto pasa en (1) y (2)

[17] Problema: Comprobad este hecho en las ecuaciones (1) para $a = 0$ y $a \neq 0$y (2).

cuando, respectivamente, $\alpha \neq 0$ y no puede aproximarse senθ con θ.

– La ecuación es lineal pero tiene límites desconocidos o en movimiento. Por ejemplo, empujamos un líquido para que penetre a otro, con el que no se mezcla, encerrado entre dos placas paralelas [18], y queremos determinar la forma y el movimiento de una única interfase (desconocida) que esperamos separe a los dos líquidos. El campo de presiones P en cada líquido viene dado por la ecuación de Laplace, $\nabla^2 P = 0$, que es lineal. Sin embargo, la superposición de dos soluciones (correspondientes a condiciones externas diferentes en los extremos —supuestos muy separados— del volumen entre las placas) involucra dos interfases, luego no se corresponde con el problema original.

- La no-linealidad es causa de complejidad. Por ejemplo:

  – Una pequeña perturbación tal como un ligero cambio en las condiciones iniciales puede inducir más tarde una diferencia importante en el comportamiento del sistema. Esta propiedad está íntimamente relacionada con el comportamiento caótico, como veremos.

  – Cuando se conocen las ecuaciones que caracterizan al sistema, no podemos aplicar técnicas que —como las transformadas de Fourier— facilitan enormemente el estudio de sistemas lineales, puesto que están basadas en el principio de superposición, y no hay métodos sistemáticos similares [19]. Es claro que estas circunstancias manifiestan la complejidad de estos sistemas.

  – En muchos casos, incluyendo el sencillo modelo de agregación

[18] Más precisamente, me refiero al famoso problema del dedo viscoso en una celda de Hele-Shaw;

[19] Por ejemplo, el método de scattering inverso de la teoría de solitones sólo es aplicable a un subconjunto de sistemas integrables, y no hay forma de saber a priori qué sistemas lo admiten.

limitada por difusión de crecimiento fractal y muchísimos sistemas complejos, que a menudo sólo conocemos a través de simulaciones en el ordenador, las ecuaciones que caracterizan al sistema no se conocen y pueden no existir.

- Una consecuencia de esta complejidad es la irremplazable utilidad del ordenador, que no distingue ecuaciones diferenciables lineales de las no-lineales, en el estudio de estos sistemas. De hecho, la potencia que han adquirido los ordenadores y su actual accesibilidad son responsables de que la explosión de la ciencia no-lineal sea un fenómeno reciente.

Conclusión y Programa

- El proceso de comprensión de la no-linealidad y de sus consecuencias a lo largo de este curso será empírico; esto es así porque, aunque iremos encontrándonos con ideas y conceptos matemáticamente bien definidos, y podremos hacer desarrollos analíticos precisos, no existe todavía una teoría completa y coherente de sistemas complejos, sino una serie de capítulos de 'física no-lineal' que, aunque la llamemos física, demanda actitudes muy diferentes de las que son hoy comunes en física. En efecto, contrariamente a lo que es usual en física ordinaria, podemos hacernos aquí y ahora las preguntas:
  - ¿Puede que no se trate de buscar leyes fundamentales válidas en todo tiempo y lugar?
  - ¿Es posible que cada sistema complejo sea diferente y no haya leyes generales para la complejidad?
  - ¿Quizás, como pasa en la experiencia humana, tengamos que buscar lecciones (como sugiere Kadanoff en la exposición anterior) en el estudio de unos sistemas para, con intuición y com-

prensión, ser aplicadas a otros sistemas.

- La conveniencia de estudiar con profundidad estas cuestiones se sigue del interés, incluso práctico y tecnológico, que tienen las situaciones que hemos mencionado hasta aquí. También se sigue cuando caemos en la cuenta de que, muy probablemente, la tendencia hacia la complejidad que observamos en los sistemas naturales es la base de la vida. Esta sospecha se remonta, por ejemplo,
  - al trabajo de Turing [20], que imaginó un mecanismo —basado en ecuaciones **reacción-difusión**— para el desarrollo de organización en cosas vivas,
  - al ensayo "More is Different" de Anderson [21], en el que se describe cómo pueden aparecer características de organización como propiedades emergentes de un sistema, y
  - al concepto de estructuras disipativas [22], cuyo grado de complicación puede crecer con el tiempo.
- En este curso vamos a tener la oportunidad de profundizar en los conceptos relevantes para sistemas complejos (dinámica caótica, geometría fractal, criticalidad,...) que, por haber surgido recientemente y no ser objeto de estudio sistemático en las otras asignaturas (más convencionales) del plan de estudios, han podido llamar vuestra atención como algo misterioso y quizás impreciso. Aquí vamos a estudiar éstos y otros conceptos científicos recientes en su contexto matemático, tratando de determinarlos intuitivamente y tan precisamente como sea posible, aunque lo vamos a hacer sin

[20] A. Turing, Philos. Trans. R. Soc. London Ser B 327, 37 (1952). Se suicidó a los 42 años, en una época en la que la homosexualidad era un crimen en el Reino Unido, después de sufrir un tratamiento hormonal durante dos años.

[21] P.W. Anderson, Science 177, 393-396 (1972), en Lam p.193.

[22] A. Katchalsky & P.F. Curan, Nonequilibrium Processes in Biophysics, Harvard Univ. Press, Cambridge MA 1967; G. Nicolis & I. Prigogine, Self-Organization in Nonequilibrium Systems, Wiley, New York 1977.

acudir a matemáticas complicadas o farragosas. También vamos a ilustrar por qué estos conceptos se han puesto de moda y parecen científicamente tan relevantes. El curso creo que también ha de ser atractivo puesto que, al estudiar estos conceptos, se tiene la oportunidad de relacionar fenómenos en física con otros en biología, química, geología, ingeniería, economía y finanzas, sociología, etc.

- Por supuesto, así como vamos describiendo fenomenología y caracterizando los conceptos relevantes, nos entretendremos en las técnicas más adecuadas. A este respecto he de notar que buena parte del formalismo más apropiado está basado en leyes de escala, renormalización y puntos fijos. Este formalismo fue desarrollado por Kadanoff en 1966 y Fisher en 1972 en el contexto de la moderna física estadística de fenómenos críticos. Mi exposición aquí de estas técnicas será más casual que sistemática; a punto de terminar, o una vez terminado el curso, los alumnos pueden encontrar interesante sistematizar sus conocimientos al respecto por su cuenta [23].

[23]Por ejemplo, leyendo M Fisher, Rev. Mod. Phys. 70, 653 (1998)