Ejercicios de Comunicación celular y dinámica tumoral

1. Estudia la existencia de soluciones estacionarias de la ecuación relativista del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial}{\partial x} F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad \text{donde } F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{|u| \frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{|u|^2 + \frac{\nu^2}{c^2} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2}}, \quad x \in [0, L]$$

con condiciones de contorno $u(t, L) = 0$ y $F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)(t, 0) = \beta$.

2. Estudia la energía de las soluciones de la ecuación de Cattaneo. ¿Cumple el segundo principio de la termodinámica?

Sugerencia: revisa el artículo de M.B. Rubin de 1992.

3. Demuestra que la expansión lineal de Hilbert de la ecuación de lineal de Boltzmann

$$\varepsilon^2 \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t} + \varepsilon v \cdot \nabla_x f^\varepsilon + \sigma \left(f^\varepsilon - \langle f^\varepsilon \rangle\right) = 0, \quad f_0^\varepsilon(x, v) = f_0(x, v), \tag{1}$$

donde $\langle f^\varepsilon \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} f^\varepsilon(t, x, v) dv$, y $\sigma > 0$, conduce a la ecuación de difusión lineal

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{3\sigma} \Delta \rho$$

donde

$$\langle f^\varepsilon \rangle \longrightarrow \rho \quad \text{in } L^p, \quad \text{para cada } t \geq 0.$$

4. Usa la expansión no lineal de Hilbert

$$f^\varepsilon = \exp\left(\sum_{k \geq 0} \varepsilon^k \Phi_k\right)$$

en la ecuación de Boltzmann lineal (1) para demostrar que $\langle f^\varepsilon \rangle = \rho^\varepsilon$ verifica la ecuación

$$\frac{\partial \rho^\varepsilon}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon} \text{div}_x \left(A\left(\frac{\varepsilon}{\sigma} \frac{|\nabla \rho^\varepsilon|}{\rho^\varepsilon}\right) \frac{\nabla \rho^\varepsilon}{|\nabla \rho^\varepsilon|} \rho^\varepsilon\right) = \mathcal{O}(\varepsilon)$$

donde

$$A(z) = \coth(z) - \frac{1}{z}$$

Esta ecuación de flujo saturado fue obtenida por Levermore & Pomraning en 1981.

5. i) Demuesta usando desarrollos de Taylor que el problema del camino aleatorio libre conduce el el límite de infinitas partículas a la ecuación lineal de difusión.

ii) Demuestra que el anterior proceso en el caso discreto se obtiene que la probabilidad de encontrar una partícula en la posición $2n$ en el tiempo 2τ viene dada por

$$p_{2n}(2\tau) = \binom{2\tau}{n+\tau} \left(\frac{1}{2}\right)^{2\tau} \overset{\text{Stirling}}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{n^2}{\tau}}.$$

6. Prueba que el problema FKPP para la ecuación de Fick

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ku(1-u)$$

admite soluciones de tipo ondas viajeras $u(t,x) = u(x - \sigma t)$. ¿Bajo qué condiciones de contorno?

7. Estudia la existencia de ondas viajeras $u(t,x) = u(x - \sigma t)$ y condiciones de contorno apropiadas el caso en que la función fuente en la ley de Fick es la de la ecuación biestable

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = u(x,t)(1 - u(x,t))(u(x,t) - \alpha).$$

8. Usa la ley de acción de masas para justificar el sistema dinámico asociado a la cascada bioquímica de la ruta de Shh-Gli en el interior de la célula.

9. Estudia en función de los parámetros la estabilidad e inestabilidad de la solución nula del sistema

$$\frac{\partial A}{\partial t} = aA - B + D_A \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = A - bB + D_B \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial A}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial A}{\partial x}(L,t) = \frac{\partial B}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial B}{\partial x}(L,t) = 0$$

10. Calcula α, β y f para que una función de la forma $U(t,x) = t^\alpha f\left(\frac{x}{t^\beta}\right)$ sea una solución de la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

A esta solución se la llama autosemejante.

Sugerencia: usa la ley de conservación de la masa y el hecho que buscamos soluciones no negativas tal que $u(t,x) \to 0, \ |x| \to \infty$.

11. Calcula α, β y f para que una función de la forma $U(t,x) = t^\alpha f\left(\frac{x}{t^\beta}\right)$ sea una solución autosemejante de la ecuación de los medios porosos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta\left(u^m\right), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

12. Describe el método BEWARE como modelo para describir la transcripción genética. Aplicalo a la rura de señalización Gli-Shh.

Sugerencia: Usa el artículo de Saha and Schaffer: Signaling dynamics in Sonic hedgehog tissue patterning, Development **133** *(2006), 889–900. y K. Lai, M.J. Robertson, D.V. Schaffer, The sonic hedgehog signaling system as a bistable genetic switch, Biophys. J.* **86** *(2004), 2748.*