PRUEBA DE ECUACIONES EN MECÁNICA DE FLUIDOS.
ECUACIONES DIFERENCIALES EN MECÁNICA Y BIOLOGÍA.
UNIVERSIDAD DE GRANADA.

Notación $k(x) = \dfrac{(-x_2, x_1)}{2\pi|x|^2}$, y $G(x) = -\frac{1}{2\pi}\ln|x|$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

$\boxed{1}$ Prueba que

$$\begin{aligned} &i) \qquad |k(a) - k(b)| = \frac{1}{2\pi}\frac{|a-b|}{|a|\,|b|}, \\ &ii) \qquad |k(a) - k(b)| \le \frac{1}{2\pi}\Big(\frac{1}{|a|} + \frac{1}{|b|}\Big). \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ Si $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, prueba que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{|x|>R} |f(x)|\,dx = 0.$$

$\boxed{3}$ Si $\omega \in L^p \cap L^q(\mathbb{R}^2)$, con $1 < p < 2 < q < \infty$, prueba que $u = k * \omega$ está en $L^\infty(\mathbb{R}^2)$.

$\boxed{4}$. Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un cambio de variable regular con matriz Jacobiana inversa acotada y $\omega \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Demuestra que existe una constante C tal que se cumple la siguiente estimación:

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^2} (k(x-y) - k(x-\phi(y)))\omega(y)\,dy\Big| \le C\|I-\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}(1 + |\log\ \|I-\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}|),$$

donde $C = C(\|\omega\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \|\omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}) > 0$.

$\boxed{5}$. Sea $\omega_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2))$. Prueba que la solución de la ecuación de Euler en 2D se pude representar de la siguiente forma:

$$\omega(t,x) = \omega_0(X(0;t,x)),$$

donde $X(t) = X(t;0,y)$ es la solución de las ecuaciones características asociadas a la velocidad del fluido con condición inicial $X(0) = y$.

$\boxed{6}$. Prueba que las *líneas de vorticidad* se conservan en la evolución del fluido.

$\boxed{7}$. Calcula la expresión en coordenadas radiales de las soluciones de la ecuación de Euler en 2D. ¿Cómo son las trayectorias de las partculas en este caso?

$\boxed{8}$ Supongamos que tenemos una solución *vortex patch* cuya frontera está parametrizada de la siguiente forma: $\{x \in \mathbb{R}^2;\ x = \gamma(t,\xi),\ \xi \in [0,1], \gamma(t,\cdot) \in C^2(0,1),\ \gamma(t,0) = \gamma(t,1)\}$. Prueba que la dinámica del contorno viene dada por la ecuación

$$\frac{d\gamma(t,\xi)}{dt} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^1 \ln\Big|\gamma(t,\xi) - \gamma(t,\tilde\xi)\Big|\,\frac{\partial\gamma(t,\tilde\xi)}{\partial\tilde\xi}d\tilde\xi$$

(Sugerencia usa integración por partes y el hecho que $k = rot\ G$).

$\boxed{9}$ Demuestra, apoyándote en los resultados de clase, que si $\omega_0 \in W^{m,1}(\mathbb{R}^2) \cap W^{m,\infty}(\mathbb{R}^2)$ para algún $m \ge 1$, entonces para todo $T > 0$ se verifica que

$$\omega \in L^\infty(0,T; W^{m,1}(\mathbb{R}^2) \cap W^{m,\infty}(\mathbb{R}^2)).$$

$\boxed{10}$ Enuncia y demuestra el Teorema de Transporte en Mecánica de Fluidos.