ECUACIONES DIFERENCIALES EN MECÁNICA Y BIOLOGÍA.
UNIVERSIDAD DE GRANADA.
EJERCICIOS DE ECUACIONES DE TRANSPORTE. RELACIÓN 1

$\boxed{1}$ Suponiendo a tan regular como sea necesario, probar que:

I. Si ρ resuelve: $\partial_t \rho + \operatorname{div}(a\rho) = 0$ y $\rho_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_0(x)dx \quad \forall t.$$

II. Si ρ resuelve $\partial_t \rho + a \cdot \nabla \rho = 0$ y $\rho_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, entonces

$$\|\rho(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = \|\rho_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \quad \forall t.$$

¿Cuál es la regularidad mínima sobre a y ρ_0 para que los cálculos necesarios estén bien definidos?

$\boxed{2}$ Demuestra que bajo las hipótesis

$$\begin{array}{l} a_i \in L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)), \quad 1 \le i \le N, \\ a_0 \in L^\infty(0,T;L^\infty(\mathbb{R}^N)), \end{array} \tag{1}$$

existe una constante $C > 0$ tal que

$$C\ e^{-|t-s|} \le J(t;s,x) \le C\ e^{|t-s|}, \quad \forall t,s \in [0,T],\ \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

donde J es el determinante de la matriz Jacobiana de la transformación definida por la ecuación de las carasterísricas asociada a $a = (a_1, ..., a_N)$.

$\boxed{3}$ Supongamos que se verifican las hipótesis (1) y que tenemos un cierto $p \in [1,\infty]$ tal que

$$u_0 \in L^p(\mathbb{R}^N) \qquad f \in L^p(0,T;L^p(\mathbb{R}^N));$$

entonces (visto en clase) el problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}_x(a\ u) + a_0\ u = f & \text{en } Q_T := (0,T)\times \mathbb{R}^N, \\ u(0) = u_0 & \text{en } \mathbb{R}^N. \end{array} \right.$$

admite una solución débil dada por la expresión

$$u(t,x) = u(0,X(0;t,x))\ J(0;t,x)\ e^{-\int_0^t a_0(s,X(s;t,x))ds} +$$

$$+ \int_0^t f(s,X(s;t,x))\ J(s;t,x)\ e^{-\int_s^t a_0(\sigma,X(\sigma;t,x))d\sigma} ds.$$

Demuestra que, además, está en $L^\infty(0,T;L^p(\mathbb{R}^N))$.

$\boxed{4}$ Resuelve

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2\right) = 0, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R},$$

$$u_0(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \le 0, \\ 1-x, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & x \ge 1. \end{array} \right.$$

Estudia la onda de choque, si la hubiese. Especifica en cada intervalo de tiempo (antes o después del choque) si se trata de una solución clásica o débil.

$\boxed{5}$ Resuelve

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2\right) = 0, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R},$$

$$u_0(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x < 0, \\ 0, & x > 0. \end{array} \right.$$

Estudia la onda de choque o de rarefacción, si las hubiese. Especifica en cada intervalo de tiempo (antes o después del choque) si se trata de una solución clásica o débil.

$\boxed{6}$ Resuelve

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2\right) = 0, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R},$$
$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Estudia la onda de choque o de rarefacción, si las hubiese. Especifica en cada intervalo de tiempo (antes o después del choque) si se trata de una solución clásica o débil.

$\boxed{7}$ Se considera la ecuación de Burgers viscosa

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2\right) &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(t=0,x) &= u_0(x), \end{aligned}$$

donde $\nu > 0$ es la constante de viscosidad. Supongamos que u es una solución regular de la ecuación anterior tal que $|u(t,x)|$ y $\left|\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right| \to 0$, cuando $|x| \to \infty$.

(1) Estudia el efecto que produce sobre la ecuación el cambio de variable

$$v(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\nu}} u(t, \sqrt{\nu} x).$$

(2) Efectúa el cambio de variable

$$w(t,x) = \int_{-\infty}^{x} v(t,\sigma)\, d\sigma,$$

seguido de este otro cambio de variable

$$z(t,x) = 2e^{-\frac{w(t,x)}{2}},$$

y demuestra que z satisface la ecuación del calor

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$$

(3) Determina la condición inicial para z.

Los anteriores cambios de variables se conocen como transformación de Cole-Hopf.

$\boxed{8}$ Calcula la solución explícita $u(t,x)$ del PVI:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2\right) &= 2t, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(t=0,x) &= x, \quad x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

¿Qué tipo de solución has obtenido?

$\boxed{9}$ Resuelve

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2\right) = 0, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R},$$
$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ nx, & 0 \le x \le \frac{1}{n}, \\ 1, & x \ge \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Estudia la onda de choque, si la hubiese. Especifica en cada intervalo de tiempo (antes o después del choque) si se trata de una solución clásica o débil. Calcula, si es posible, el límite de la solución cuando $n \to \infty$, especificando el concepto de límite que usas.

$\boxed{10}$ Demuestra que para una ley de conservación escalar convexa

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(f(u(t,x))\right) = 0, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R},$$
$$u_0(x) = \begin{cases} u_i, & x < 0, \\ u_d, & x > 0, \end{cases}$$

con $u_i < u_d$, $f \in C^2(\mathbb{R})$ y $f'' > 0$, la onda de rarefacción viene dada por

$$u(t,x) = \begin{cases} u_i, & \frac{x}{t} \leq f'(u_i), \\ v\left(\frac{x}{t}\right), & f'(u_i) \leq \frac{x}{t} \leq f'(u_d), \\ u_d, & \frac{x}{t} \geq f'(u_d), \end{cases}$$

donde $v(\xi)$ es solución de $f'(v(\xi)) = \xi$.