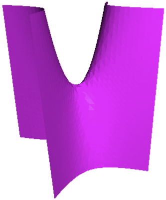
Deformación de esquemas formales vía homología local

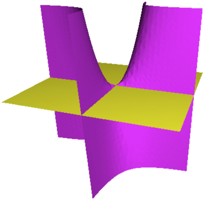
M. Pérez

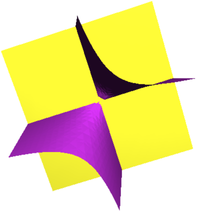
Métodos Categóricos y Homotópicos en Álgebra, Geometría y Topología
2014

Teoría de deformación

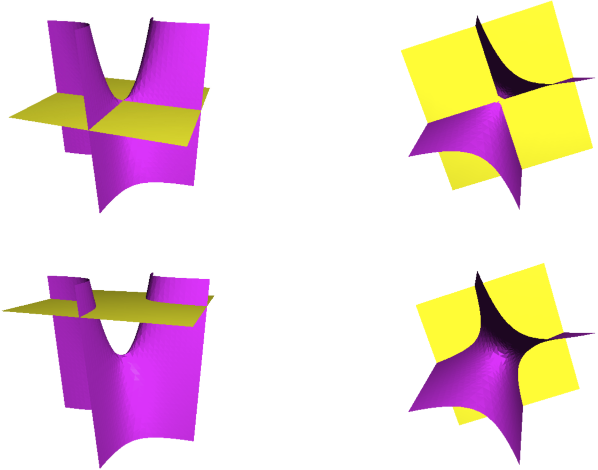


Teoría de deformación

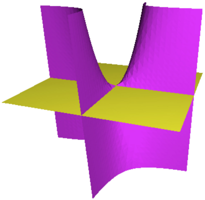


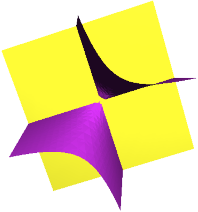


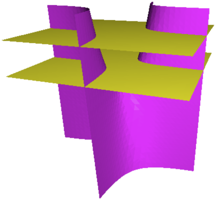
Teoría de deformación

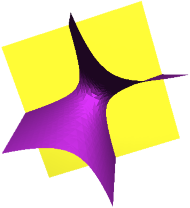


Teoría de deformación

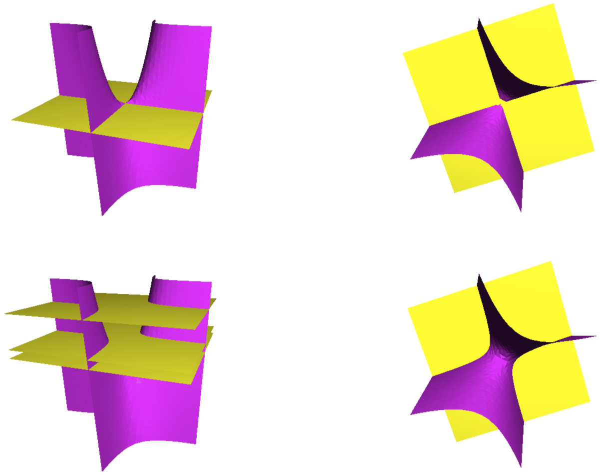




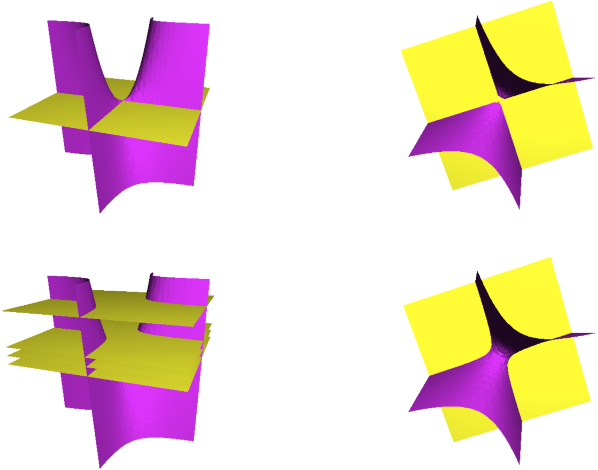




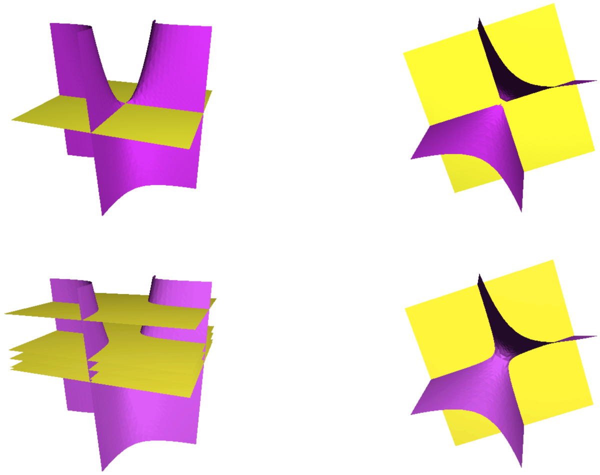
Teoría de deformación



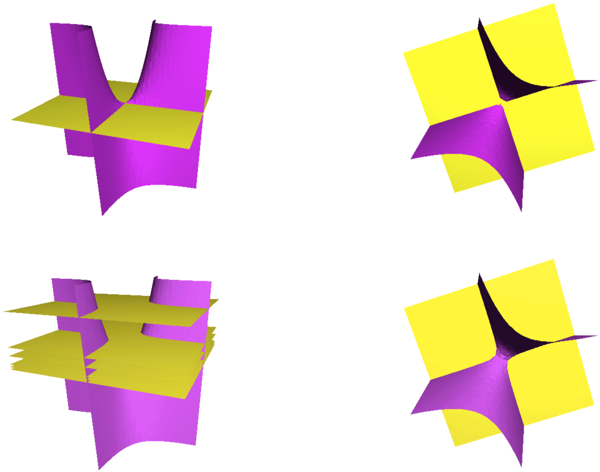
Teoría de deformación



Teoría de deformación



Teoría de deformación



Teoría de deformación

Estudio de las aproximaciones adecuadas (levantamientos) a un objeto

Teoría de deformación

Estudio de las aproximaciones adecuadas (levantamientos) a un objeto

- Levantamientos infinitesimales
- ¿Existen?
- ¿Descripción?

Teoría de deformación

Estudio de las aproximaciones adecuadas (levantamientos) a un objeto

- Levantamientos infinitesimales
- ¿Existen?
- ¿Descripción?

Complejo cotangente

Teoría de deformación

Estudio de las aproximaciones adecuadas (levantamientos) a un objeto

- Levantamientos infinitesimales
- ¿Existen?
- ¿Descripción?
- ¿Deformación formal?

Complejo cotangente

Geometría Algebraica y Deformaciones

- Grothendieck, Lichtenbaum, Schlessinger, Berthelot, André, Quillen, Artin, ...
- Illusie, I.: *Complexe cotangent et déformations I*, 1971.
- Laumon, G.; Moret-Bailly, L.: *Champs algébriques*, 2000.
- Gabber, O.; Ramero, L.: *Almost ring theory*, 2003.
- Olsson, M.: The logarithmic cotangent complex, 2005.
- Aoki, M.: Deformation theory of algebraic stacks, 2005.
- Olsson, M.C.: Deformation theory of representable morphisms of algebraic stacks, 2006.
- Toën, B.; Vezzosi, G.: *Homotopical Algebraic Geometry II: Geometric Stacks and Applications*, 2008.
- –:Basic Deformation Theory of smooth formal schemes, 2008.

Esquemas formales

Ejemplo

$$\mathbb{A}^1_k \ - - \ .^0 \ - - \quad V(\langle T \rangle) = \operatorname{Spec}(\frac{k[T]}{\langle T \rangle}) \hookrightarrow \mathbb{A}^1_k$$

Esquemas formales

Ejemplo

$\mathbb{A}^1_k \;\; - - \cdot^0 - - \;\; V(\langle T \rangle) = \mathrm{Spec}(\frac{k[T]}{\langle T \rangle}) \hookrightarrow \mathbb{A}^1_k$

$\mathbb{A}^1_k \;\; - - \bullet^0 - - \;\; V(\langle T^2 \rangle) = \mathrm{Spec}(\frac{k[T]}{\langle T^2 \rangle}) \hookrightarrow \mathbb{A}^1_k$ entorno infinitesimal de primer orden del 0 en $\mathbb{A}^1_k$

Esquemas formales

Ejemplo

$\mathbb{A}^1_k \;\; - - \cdot^0 - - \;\; V(\langle T \rangle) = \operatorname{Spec}(\frac{k[T]}{\langle T \rangle}) \hookrightarrow \mathbb{A}^1_k$

$\mathbb{A}^1_k \;\; - - \bullet^0 - - \;\; V(\langle T^2 \rangle) = \operatorname{Spec}(\frac{k[T]}{\langle T^2 \rangle}) \hookrightarrow \mathbb{A}^1_k$ entorno infinitesimal de primer orden del 0 en $\mathbb{A}^1_k$

$\mathbb{A}^1_k \;\; - - \odot^0 - - \;\; V(\langle T^{n+1} \rangle) = \operatorname{Spec}(\frac{k[T]}{\langle T^{n+1} \rangle}) \hookrightarrow \mathbb{A}^1_k$ entorno infinitesimal de n-ésimo orden del 0 en $\mathbb{A}^1_k$

Esquema formal afín

- Espectro formal de $\widehat{A} = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} A/I^{n+1}$

$$\mathsf{Spf}(\widehat{A}) = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \mathsf{Spec}\left(\frac{A}{I^{n+1}}\right)$$

- Espacio topológicamente anillado

$$\mathsf{Spf}(\widehat{A}) = \left(V(I),\ \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \frac{\widetilde{A}}{\widetilde{I^{n+1}}} \right)$$

Esquema formal afín

- Espectro formal de $\widehat{A} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} A/I^{n+1}$

$$\mathsf{Spf}(\widehat{A}) = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{Spec}\left(\frac{A}{I^{n+1}}\right)$$

- Espacio topológicamente anillado

$$\mathsf{Spf}(\widehat{A}) = \left(V(I), \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \frac{\widetilde{A}}{\widetilde{I^{n+1}}}\right)$$

Esquema formal afín (noetheriano)

$$\mathfrak{X} \cong \mathsf{Spf}(A),\ A \text{ anillo ádico (noeth.)}$$

Esquema formal

Esquema formal (loc. noetheriano):

- $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ espacio top. anillado: topología dada por $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ ideal de definición
- $\exists\ (\mathfrak{U}_i)_{i \in I}$ recubrimiento abierto
- $\mathfrak{U}_i$ esquema formal afín (noetheriano), $\forall i \in I$

FS $\begin{cases} \text{Objetos: esquemas formales loc. noetherianos} \\ \qquad \mathfrak{X} = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} X_n, \quad X_n := (\mathfrak{X}, \frac{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}{\mathcal{J}^{n+1}}) \\ \text{Morfismos: } (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \xrightarrow{f} (\mathfrak{Y}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}) \text{ espacios top. anillados,} \\ \qquad \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}, f(x)} \xrightarrow{f^\sharp_x} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}, x} \text{ local } \forall x \in \mathfrak{X} \end{cases}$

Esquemas formales

Ejemplo

- Espacio formal afín

$$\mathbb{A}^r_{\mathrm{Spf}(A)} = \mathrm{Spf}(A\{T_1, T_2, \dots, T_r\})$$

- Disco formal afín

$$\mathbb{D}^r_{\mathrm{Spf}(A)} = \mathrm{Spf}(A[[T_1, T_2, \dots, T_r]])$$

- Compleción de un esquema X a lo largo de un cerrado $X' \subset X$

$$\widehat{X} = X_{/X'} = (X_{/X'}, \mathcal{O}_{X_{/X'}}) = (X', \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}^{n+1}})$$

$$X = \mathrm{Spec}(A), X' = \mathrm{Spec}(A/I), \widehat{X} = \mathrm{Spf}(\widehat{A})$$

Morfismos de esquemas formales

$(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \xrightarrow{f} (\mathfrak{Y}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}) \in \mathsf{FS}$

$\exists \mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ y $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$ Ideales de definición tales que

$f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$, $X_n := (\mathfrak{X}, \frac{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}{\mathcal{J}^{n+1}}) \xrightarrow{f_n} Y_n := (\mathfrak{Y}, \frac{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}}{\mathcal{K}^{n+1}})$,

$$f = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} f_n$$

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{X} \arrow[r, "f"] & \mathfrak{Y} \\
X_m \arrow[r, "f_m"] \arrow[u, hook] & Y_m \arrow[u, hook] \\
X_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[u, hook] & Y_n,
\end{tikzcd} \qquad m \geq n \geq 0$$

Morfismos de tipo finito

$\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} \in$ FS ádico $\Longleftrightarrow \exists \mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$ Ideal de definición tal que
$\mathcal{J} = f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ Ideal de definición

$$f = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} f_n$$

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{X} \arrow[r, "f"] & \mathfrak{Y} \\
X_m \arrow[u, hook] \arrow[r, "f_m"] & Y_m \arrow[u, hook] \\
X_n = X_m \times_{Y_m} Y_n \arrow[u, hook] \arrow[r, "f_n"] & Y_n \arrow[u, hook]
\end{tikzcd} \qquad m \geq n \geq 0$$

Morfismos de tipo finito

$\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} \in$ FS ádico $\iff \exists \mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$ Ideal de definición tal que $\mathcal{J} = f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ Ideal de definición

$$f = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} f_n$$

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{X} \arrow[r, "f"] & \mathfrak{Y} \\
X_m \arrow[u, hook] \arrow[r, "f_m"] & Y_m \arrow[u, hook] \\
X_n = X_m \times_{Y_m} Y_n \arrow[u, hook] \arrow[r, "f_n"] & Y_n \arrow[u, hook]
\end{tikzcd} \qquad m \geq n \geq 0$$

f de tipo finito $\iff$ f ádico y f_0 de tipo finito

Morfismos de tipo finito

Ejemplo

- Encaje abierto, $\mathfrak{U} \overset{ab.}{\hookrightarrow} \mathfrak{X}$, localmente:

$$\mathfrak{D}(a) = \mathsf{Spf}(A_{\{a\}}) \hookrightarrow \mathsf{Spf}(A)$$

- Encaje cerrado, $\mathfrak{X}' \overset{cerr.}{\hookrightarrow} \mathfrak{X}$ localmente:

$$\mathsf{Spf}(\frac{A}{J}) \hookrightarrow \mathsf{Spf}(A)$$

- Proyección del espacio formal afín $\mathbb{A}^r_{\mathfrak{X}} \to \mathfrak{X}$, localmente:

$$\mathsf{Spf}(A\{T_1, T_2, \ldots, T_r\}) \to \mathsf{Spf}(A)$$

Morfismos de pseudo tipo finito

Ejemplo

- Proyección del disco formal $\mathbb{D}^r_{\mathfrak{X}} \to \mathfrak{X}$, localmente:

$$\operatorname{Spf}(A[[T_1, T_2, \dots, T_r]]) \to \operatorname{Spf}(A)$$

- Proyección $\mathbb{D}^r_{\mathbb{A}^s_{\mathfrak{X}}} \to \mathfrak{X}$, localmente:

$$\operatorname{Spf}(A\{T_1, T_2, \dots, T_s\}[[T_{s+1}, T_{s+2}, \dots, T_{s+r}]]) \to \operatorname{Spf}(A)$$

- Morfismo de compleción de un esquema X a lo largo de un cerrado $X' = V(I) \subset X$, $X_{/X'} \xrightarrow{\kappa} X$, localmente:

$$\operatorname{Spf}(\widehat{A}) \to \operatorname{Spec}(A)$$

con $\widehat{A} = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} A/I^{n+1}$

Morfismos de pseudo tipo finito

$$\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} (X_n \xrightarrow{f_n} Y_n) \in \mathsf{FS}$$

f es de pseudo tipo finito $\Longleftrightarrow$ f_0 es de tipo finito

Morfismos de pseudo tipo finito

$$\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} (X_n \xrightarrow{f_n} Y_n) \in \mathsf{FS}$$

f es de pseudo tipo finito $\Longleftrightarrow$ f_0 es de tipo finito

- Cualquier morfismo $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} \in \mathsf{FS}$ de (pseudo) tipo finito admite una descripción local:

$$\mathrm{Spf}(B) \overset{j}{\hookrightarrow} \mathrm{Spf}(A\{\mathbf{X}\}) \xrightarrow{p} \mathrm{Spf}(A)$$

$$(\mathrm{Spf}(B) \overset{j}{\hookrightarrow} \mathrm{Spf}(A\{\mathbf{X}\}[[\mathbf{Y}]]) \xrightarrow{p} \mathrm{Spf}(A)),$$

j encaje cerrado, p proyección

Condiciones infinitesimales

$f \in \mathsf{FS}$ pseudo tipo finito

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] & \mathfrak{Y} \\ T \arrow[u, hook, "\text{cerr.}"] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, ""] & \mathfrak{X} \arrow[u, "f"'] \\ \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[dr, dashed, "\exists"] & \mathfrak{Y} \\ T \arrow[u, hook, "\text{cerr.}"] \arrow[r] & \mathfrak{X} \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

Z esquema afín, $(T)_{\mathrm{top}} = (Z)_{\mathrm{top}}$

- f liso: existe levantamiento

Condiciones infinitesimales

$f \in$ FS pseudo tipo finito

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[dr, dashed, "!"] & \mathfrak{Y} \\ T \arrow[u, hook, "\text{cerr.}"] \arrow[r] & \mathfrak{X} \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

Z esquema afín, $(T)_{\text{top}} = (Z)_{\text{top}}$

- f liso: existe levantamiento
- f no ramificado: el levantamiento es único

Condiciones infinitesimales

$f \in$ FS pseudo tipo finito

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[dr, dashed, "\exists!"] & \mathfrak{Y} \\ T \arrow[u, hook, "\text{cerr.}"] \arrow[r] & \mathfrak{X} \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

Z esquema afín, $(T)_{\text{top}} = (Z)_{\text{top}}$

- f liso: existe levantamiento
- f no ramificado: el levantamiento es único
- f étale: existe un único levantamiento

Condiciones infinitesimales

Ejemplo

- Los encajes abiertos son étales ádicos
- Los encajes cerrados son no ramificados ádicos
- Las proyecciones canónicas del espacio formal afín $\mathbb{A}^r_{\mathfrak{X}} \to \mathfrak{X}$ son lisas ádicas
- Las proyecciones canónicas del disco formal $\mathbb{D}^r_{\mathfrak{X}} \to \mathfrak{X}$ son lisas (no ádicas)
- Los morfismos de compleción son étales (no ádicos)

Condiciones infinitesimales

Proposición

$\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$ *ádico*, $f = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} f_n$

$$f \text{ liso (étale)} \Leftrightarrow f \text{ plano y } f_0 \text{ liso (étale)}$$

Teorema

$\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$ *liso (étale)* $\Leftrightarrow$ *localmente:*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{U} \arrow[r, "\kappa"] \arrow[dr, "f|_{\mathfrak{U}}"'] & \mathfrak{X}' \arrow[d, "f'"] \\ & \mathfrak{Y} \end{tikzcd}$$

κ *morfismo de compleción,* f' *liso (étale) ádico*

El par diferencial $(\widehat{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}, \widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}})$

$\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} \in \mathsf{FS}$

$\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \xrightarrow{\widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}} \widehat{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}$

$\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(B) \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(A) \in \mathsf{FS}_{\mathsf{af}}$, $K \subset B$ ideal de definición

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} = B^{\triangle} \xrightarrow{\widehat{d}^{\triangle}_{B/A}} \widehat{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} = (\widehat{\Omega}^1_{B/A})^{\triangle}$$

$$\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{\widetilde{B}}{\widetilde{K}^{n+1}\widetilde{B}} \xrightarrow{\widetilde{d_{B/A}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_{X_n}}} \frac{\widetilde{\Omega^1_{B/A}}}{\widetilde{K}^{n+1}\widetilde{\Omega^1_{B/A}}} \right)$$

Propiedades del par diferencial

$\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$, $g \colon \mathfrak{Y} \xrightarrow{g} \mathfrak{S}$ de pseudo tipo finito.

- $\widehat{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \in \mathsf{Coh}(\mathfrak{X})$
- $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$ liso $\Leftrightarrow \widehat{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}$ loc. libre de rang. finito, f plano
- $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$ no ramificado $\Leftrightarrow \widehat{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} = 0$
- Primera sucesión exacta fundamental
$$\widehat{\Omega}^1_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{S}} \otimes \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \to \widehat{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{S}} \to \widehat{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \to 0$$
- Segunda sucesión exacta fundamental, f encaje cerrado dado por $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$,
$$\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \to \widehat{\Omega}^1_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{S}} \otimes \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \to \widehat{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{S}} \to 0$$

Deformación de esquemas formales lisos

$\mathfrak{X}'$ separado, f' liso, j encaje cerrado dado por $\mathcal{J}, \mathcal{J}^2 = 0$

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X} \arrow[r, dashed] & \mathfrak{Y} \\ \mathfrak{X}' \arrow[u, hook, dashed] \arrow[r, "f'"] & \mathfrak{Y}' \arrow[u, hook, "j"'] \end{tikzcd}$$

Proposición (Existencia)

$\exists c(f', j) \in \operatorname{Ext}^2(\widehat{\Omega}^1_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}'}, f'^*\mathcal{J})$ *tal que*

$$c(f', j) = 0 \Leftrightarrow \exists \text{ levantamiento liso } \mathfrak{X} \text{ de } \mathfrak{X}' \text{ sobre } \mathfrak{Y},$$
$$\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}'$$

Deformación de esquemas formales lisos

$\mathfrak{X}$ levant. liso de $\mathfrak{X}'$ sobre $\mathfrak{Y}$, f' liso, j encaje cerrado dado por $\mathcal{J}, \mathcal{J}^2 = 0$

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X} \arrow[rr] & & \mathfrak{Y} \\ \mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y} \arrow[u, hook] \arrow[rr, "f'"] & & \mathfrak{Y}' \arrow[u, hook, "j"'] \end{tikzcd}$$

Proposición (Unicidad)

$$\mathfrak{X} \textit{ es único (salvo iso.) } \Leftrightarrow \operatorname{Ext}^1(\widehat{\Omega}^1_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}'}, f'^*\mathcal{J}) = 0$$

Deformación de morfismos lisos

g liso, j encaje cerrado dado por $\mathcal{J}, \mathcal{J}^2 = 0$

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X} \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & \mathfrak{W} \\ \mathfrak{X}' \arrow[u, hook, "j"] \arrow[r, "f'"] & \mathfrak{Y} \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

Proposición (Existencia)

$\exists c(f', j) \in \operatorname{Ext}^1(f'^{*}\widehat{\Omega}^1_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{W}}, \mathcal{J})$ *tal que*

$$c(f', j) = 0 \Leftrightarrow \exists \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$$

Deformación de morfismos lisos

g liso, j encaje cerrado dado por $\mathcal{J}, \mathcal{J}^2 = 0$

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X} \arrow[r] \arrow[dr, "f"] & \mathfrak{W} \\ \mathfrak{X}' \arrow[u, hook, "j"] \arrow[r, "f'"] & \mathfrak{Y} \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

Proposición (Unicidad)

$$f \text{ es único (salvo iso.) } \Leftrightarrow \operatorname{Ext}^0(f'^*\widehat{\Omega}^1_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{W}}, \mathcal{J}) = 0$$

Complejo cotangente de anillos

$A \to B$ morfismo de anillos (en un topos T)

- $A[B] := S_A(A^{(B)})$
- $P_A(B)$ resolución simplicial libre estándar de B sobre A

$$P_A(B)\colon \ \ldots \to P_2 = A[P_1] \to P_1 = A[P_0] \to P_0 = A[B] \xrightarrow{\sim} B$$

- $L_{B/A} := \Omega^1_{P/A} \otimes_P B$ complejo simplicial de B-módulos

$$(L_{B/A})_n \simeq B \otimes_A A^{(P_{n-1})}$$

- Via Dold-Puppe: $L_{B/A} \in \mathbf{C}^{\leq 0}(B)$
- $L_{B/A}$ plano

Funtor de compleción

A anillo I-ádico (noetheriano), M A-módulo

$\Lambda(M) := \varprojlim_{n>0} M/I^n M$

$\Lambda\colon \mathbf{C}(A) \to \mathbf{C}(A)$ funtor de compleción

$\mathbf{L}\Lambda\colon \mathbf{D}^-(A) \to \mathbf{D}^-(A)$ con resoluciones planas

Propiedades

Dado $F \in \mathbf{D}^-(A)$, $\mathsf{Spf}(B) \to \mathsf{Spf}(A) \in \mathsf{FS}_{\mathsf{af}}$:

- $\mathbf{L}\Lambda(\mathbf{L}\Lambda(F)) = \mathbf{L}\Lambda(F)$
- $\mathbf{L}\Lambda_B(F \otimes^{\mathbf{L}} B) \xrightarrow{\sim} \mathbf{L}\Lambda_B(\mathbf{L}\Lambda_A(F) \otimes^{\mathbf{L}} B)$
- $F \in \mathbf{D}^-_{\mathsf{c}}(A) \Rightarrow \mathbf{L}\Lambda(F) \simeq F$

Complejo cotangente completo

$\mathrm{Spf}(B) \to \mathrm{Spf}(A) \in \mathrm{FS}_{\mathrm{af}}$

$$\widehat{L}_{B/A} := \Lambda(L_{B/A}) \in \mathbf{C}^{\leq 0}(B)$$

Complejo cotangente completo

$\mathrm{Spf}(B) \to \mathrm{Spf}(A) \in \mathsf{FS}_{\mathrm{af}}$

$$\widehat{L}_{B/A} := \Lambda(L_{B/A}) \in \mathbf{C}^{\leq 0}(B)$$

- $\widehat{L}_{B/A} \to \widehat{\Omega}^1_{B/A}$ en $\mathbf{C}^{-}(B)$
- Funtorial:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A' \arrow[r] & B' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \widehat{L}_{B/A} \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{L}_{B'/A'} \arrow[d] \\ \widehat{\Omega}^1_{B/A}[0] \arrow[r] & \widehat{\Omega}^1_{B'/A'}[0] \end{tikzcd}$$

Propiedades de $\widehat{L}_{B/A}$

$\mathrm{Spf}(B) \xrightarrow{f} \mathrm{Spf}(A), \mathrm{Spf}(C) \to \mathrm{Spf}(B) \in \mathsf{FS}_{\mathrm{af}}$

- $\mathbf{L}\Lambda(L_{B/A}) = \widehat{L}_{B/A}$ en $\mathbf{D}^{-}(B)$
- Triángulo distinguido en $\mathbf{D}^{-}(C)$

$$\mathbf{L}\Lambda(\widehat{L}_{B/A} \otimes_B C) \to \widehat{L}_{C/A} \to \widehat{L}_{C/B} \xrightarrow{+}$$

- f liso ádico $\Rightarrow \widehat{L}_{B/A} \simeq \widehat{\Omega}^1_{B/A}[0]$ y $\widehat{L}_{B/A} \in \mathbf{D}^{-}_{\mathrm{c}}(B)$
- f étale ádico $\Rightarrow \widehat{L}_{B/A} \simeq 0$
- f encaje cerrado $\Rightarrow \mathrm{H}^0(\widehat{L}_{B/A}) = 0, \mathrm{H}^1(\widehat{L}_{B/A}) \xrightarrow{\sim} J/J^2$

Propiedades de $\widehat{L}_{B/A}$

$\mathrm{Spf}(B) \xrightarrow{f} \mathrm{Spf}(A), \mathrm{Spf}(C) \to \mathrm{Spf}(B) \in \mathsf{FS}_{\mathrm{af}}$ de pseudo tipo finito

- f compleción $\Rightarrow \widehat{L}_{B/A} \simeq 0$
- $\widehat{L}_{A\{\mathbf{X}\}[[\mathbf{Y}]]/A} \simeq \widehat{\Omega}^1_{A\{\mathbf{X}\}[[\mathbf{Y}]]/A}[0]$
- $\widehat{L}_{B/A} \in \mathbf{D}^-_{\mathrm{c}}(B)$
- Triángulo distinguido en $\mathbf{D}^-_{\mathrm{c}}(C)$:

$$\widehat{L}_{B/A} \otimes_B C \to \widehat{L}_{C/A} \to \widehat{L}_{C/B} \xrightarrow{+}$$

- $\widehat{L}_{B/A} \otimes_B B_{\{b\}} \simeq \widehat{L}_{B_{\{b\}}/A}$

Propiedades de $\widehat{L}_{B/A}$

$\mathrm{Spf}(B) \xrightarrow{f} \mathrm{Spf}(A) \in \mathsf{FS}_{\mathrm{af}}$ de pseudo tipo finito

Proposición

f *liso* $\Rightarrow \widehat{L}_{B/A} \simeq \widehat{\Omega}^1_{B/A}[0]$

Demostración.

$\mathrm{Spf}(B) \xrightarrow{\kappa} \mathrm{Spf}(B') \xrightarrow{\text{liso ádico}} \mathrm{Spf}(A)$

$$\begin{tikzcd}
\widehat{L}_{B'/A} \otimes_{B'} B \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\simeq"'] & \widehat{L}_{B/A} \arrow[d] \\
(\widehat{\Omega}^1_{B'/A} \otimes_{B'} B)[0] \arrow[r, "\simeq"] & \widehat{\Omega}^1_{B/A}[0].
\end{tikzcd}$$

$\square$

Propiedades de $\widehat{L}_{B/A}$

$\mathrm{Spf}(B) \xrightarrow{f} \mathrm{Spf}(A) \in \mathsf{FS}_{\mathrm{af}}$ de pseudo tipo finito

Corolario

f *étale* $\Rightarrow \widehat{L}_{B/A} \simeq 0$

Proposición

$\mathrm{H}^0(\widehat{L}_{B/A}) = \widehat{\Omega}^1_{B/A}$

Demostración.

$A \to A\{\mathbf{X}\}[[\mathbf{Y}]] \to B \to 0$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1(\widehat{L}_{B/A\{\mathbf{X}\}[[\mathbf{Y}]]}) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathrm{H}^0(\widehat{L}_{A\{\mathbf{X}\}[[\mathbf{Y}]]/A} \otimes_{A\{\mathbf{X}\}[[\mathbf{Y}]]} B) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathrm{H}^0(\widehat{L}_{B/A}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
J/J^2 \arrow[r] & \widehat{\Omega}^1_{A\{\mathbf{X}\}[[\mathbf{Y}]]/A} \otimes_{A\{\mathbf{X}\}[[\mathbf{Y}]]} B \arrow[r] & \widehat{\Omega}^1_{B/A} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Homología local

$\mathfrak{X} \in \mathsf{FS}, \mathcal{I}$ ideal de definición de $\mathfrak{X}$

$$\mathsf{A}(\mathfrak{X}) \xrightarrow{\varGamma'_{\mathfrak{X}}} \mathsf{A}(\mathfrak{X}),\ \varGamma'_{\mathfrak{X}}\mathcal{F} := \varinjlim_{n>0} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{I}^n, \mathcal{F})$$

$$\mathbf{\Gamma}_{\mathfrak{X}} \colon \mathsf{D}(\mathfrak{X}) \to \mathsf{D}(\mathfrak{X}), \mathbf{\Gamma}_{\mathfrak{X}} := \mathsf{R}\varGamma'_{\mathfrak{X}}$$

$$\mathbf{\Lambda}_{\mathfrak{X}} \colon \mathsf{D}(\mathfrak{X}) \to \mathsf{D}(\mathfrak{X}), \mathbf{\Lambda}_{\mathfrak{X}}(-) := \mathsf{R}\mathcal{H}om^{\bullet}(\mathbf{\Gamma}_{\mathfrak{X}}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}, -)$$

Homología local

$\mathfrak{X} \in \mathsf{FS}, \mathcal{I}$ ideal de definición de $\mathfrak{X}$

$$\mathsf{A}(\mathfrak{X}) \xrightarrow{\Gamma'_{\mathfrak{X}}} \mathsf{A}(\mathfrak{X}),\ \Gamma'_{\mathfrak{X}}\mathcal{F} := \varinjlim_{n>0} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{I}^n, \mathcal{F})$$

$$\mathbf{\Gamma}_{\mathfrak{X}} \colon \mathsf{D}(\mathfrak{X}) \to \mathsf{D}(\mathfrak{X}), \mathbf{\Gamma}_{\mathfrak{X}} := \mathsf{R}\Gamma'_{\mathfrak{X}}$$

$$\mathbf{\Lambda}_{\mathfrak{X}} \colon \mathsf{D}(\mathfrak{X}) \to \mathsf{D}(\mathfrak{X}), \mathbf{\Lambda}_{\mathfrak{X}}(-) := \mathsf{R}\mathcal{H}om^{\bullet}(\mathbf{\Gamma}_{\mathfrak{X}}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}, -)$$

- $\mathbf{\Gamma}_{\mathfrak{X}} \dashv \mathbf{\Lambda}_{\mathfrak{X}}$
- $\mathbf{\Gamma}_{\mathfrak{X}}\mathbf{\Gamma}_{\mathfrak{X}} \simeq \mathbf{\Gamma}_{\mathfrak{X}}, \mathbf{\Lambda}_{\mathfrak{X}}\mathbf{\Lambda}_{\mathfrak{X}} \simeq \mathbf{\Lambda}_{\mathfrak{X}}$
- $\mathbf{\Gamma}_{\mathfrak{X}}\mathbf{\Lambda}_{\mathfrak{X}} \simeq \mathbf{\Gamma}_{\mathfrak{X}}, \mathbf{\Lambda}_{\mathfrak{X}}\mathbf{\Gamma}_{\mathfrak{X}} \simeq \mathbf{\Lambda}_{\mathfrak{X}}$

Homología local

$\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} \in \mathsf{FS}$, $\mathcal{E}, \mathcal{F} \in \mathbf{D}(\mathfrak{X})$, $\mathcal{G} \in \mathbf{D}(\mathfrak{Y})$

- $\mathsf{R}\mathcal{H}om^\bullet(\mathbf{\Lambda}_\mathfrak{X}\mathcal{E}, \mathbf{\Lambda}_\mathfrak{X}\mathcal{F}) \simeq \mathsf{R}\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{E}, \mathbf{\Lambda}_\mathfrak{X}\mathcal{F})$
- $\mathcal{F} \in \mathbf{D}_c(\mathfrak{X}) \Rightarrow \mathsf{R}\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \simeq \mathsf{R}\mathcal{H}om^\bullet(\mathbf{\Gamma}_\mathfrak{X}\mathcal{E}, \mathcal{F})$ y $\mathbf{\Lambda}_\mathfrak{X}\mathcal{F} \cong \mathcal{F}$
- $\mathbf{\Gamma}_\mathfrak{X}\mathbf{L}f^*\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathbf{\Gamma}_\mathfrak{X}\mathbf{L}f^*\mathbf{\Gamma}_\mathfrak{Y}\mathcal{G}$
- f ádico $\Rightarrow \mathbf{L}f^*\mathbf{\Gamma}_\mathfrak{Y}\mathcal{G} \simeq \mathbf{\Gamma}_\mathfrak{X}\mathbf{L}f^*\mathcal{G}$
- $\mathbf{\Lambda}_\mathfrak{X}\mathbf{L}f^*\mathbf{\Lambda}_\mathfrak{Y}\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathbf{\Lambda}_\mathfrak{X}\mathbf{L}f^*\mathcal{G}$

Homología local

$\mathfrak{X} \in \mathsf{FS}$

$\mathsf{A}_{\vec{c}}(\mathfrak{X})$ límites directos de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-módulos coherentes

$\mathsf{A}_{\vec{c}}(\mathfrak{X}) \subset \mathsf{A}_{\mathrm{qc}}(\mathfrak{X}) \subset \mathsf{A}(\mathfrak{X})$

Homología local

$\mathfrak{X} \in \mathsf{FS}$

$\mathsf{A}_{\vec{\mathsf{c}}}(\mathfrak{X})$ límites directos de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-módulos coherentes
$\mathsf{A}_{\vec{\mathsf{c}}}(\mathfrak{X}) \subset \mathsf{A}_{\mathsf{qc}}(\mathfrak{X}) \subset \mathsf{A}(\mathfrak{X})$

Dualidad de Greenlees-May
$\mathfrak{X}$ separado, $\mathcal{I}$ ideal de definición de $\mathfrak{X}$
$\mathcal{F} \in \mathbf{C}(\mathsf{A}_{\vec{\mathsf{c}}}(\mathfrak{X}))$ q-plano

$$\mathbf{\Lambda}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{F}) \cong \Lambda_{\mathfrak{X}}(\mathcal{F}) := \varprojlim_{n} (\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{I}^n)$$

Complejo cotangente de esquemas formales

$\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} \in \mathsf{FS}$

$$\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} := \mathbf{\Lambda}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{L}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}) \in \mathbf{D}^{-}(\mathfrak{X})$$

Complejo cotangente de esquemas formales

$\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} \in \mathsf{FS}$

$$\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} := \mathbf{\Lambda}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{L}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}) \in \mathbf{D}^{-}(\mathfrak{X})$$

- $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \to \mathbf{\Lambda}_{\mathfrak{X}}\widehat{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}$ en $\mathbf{D}^{-}(\mathfrak{X})$
- Funtorial:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{Y}' \arrow[d] \\ \mathfrak{X} \arrow[r] & \mathfrak{Y} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{\Lambda}_{\mathfrak{X}'}\mathbf{L}u^*\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}'} \arrow[d] \\ u^*\widehat{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}[0] \arrow[r] & \widehat{\Omega}^1_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}'}[0] \end{tikzcd}$$

- $\mathfrak{X}$ separado, $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \cong \Lambda_{\mathfrak{X}}(\mathcal{L}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}})$

Propiedades de $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}$

Proposición (Triángulo distinguido)

$\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$, $g : \mathfrak{Y} \xrightarrow{g} \mathfrak{S} \in \mathsf{FS}$, $\mathbf{D}^-(\mathfrak{X})$

$$\mathbf{\Lambda}_{\mathfrak{X}} \mathbf{L} f^* \widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{S}} \to \widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{S}} \to \widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \xrightarrow{+}$$

Proposición

$\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$, $\mathfrak{U} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathfrak{X}$, $\mathfrak{V} \hookrightarrow \mathfrak{Y} \in \mathsf{FS}$, $f(\mathfrak{U}) \subset \mathfrak{V}$

$$i^* \widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \simeq \widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{U}/\mathfrak{V}} \in \mathbf{D}^-(\mathfrak{U})$$

Propiedades de $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}$

Lema

$\mathfrak{X} := X_{/X'} \xrightarrow{\kappa} X$ *morfismo de compleción*

$$\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/X} \simeq 0$$

Demostración.

$$H^i(\Lambda_{\mathfrak{X}}(\mathcal{L}_{\mathfrak{X}/X})) \simeq H^i(\varprojlim_{n} i_n^* \mathcal{L}_{\mathfrak{X}/X}) \simeq \varprojlim_{n} H^i(i_n^* \mathcal{L}_{\mathfrak{X}/X}) \simeq 0$$

$\square$

Propiedades de $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}$

Proposición

$h \in \mathsf{Sch}_{\mathsf{af}}$ *de tipo finito*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] & Y \\ \mathfrak{X} \arrow[u, "\kappa"] \arrow[r, "\widehat{h}"] & \mathfrak{Y} \arrow[u, "\kappa"'] \end{tikzcd}$$

- $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \simeq \widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/Y} \simeq \kappa^* \mathcal{L}_{X/Y}$
- $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \in \mathbf{D}^-_{\mathsf{c}}(\mathfrak{X})$

Observación

$k^* \mathcal{L}_{X/Y} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}$ es una resolución q-plana.

Propiedades de $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}$

Proposición

$h \in \mathsf{Sch}_{\mathsf{af}}$ *de tipo finito*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] & Y \\ \mathfrak{X} \arrow[u, "\kappa"] \arrow[r, "\widehat{h}"] & \mathfrak{Y} \arrow[u, "\kappa"'] \end{tikzcd}$$

- $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \simeq \widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/Y} \simeq \kappa^* \mathcal{L}_{X/Y}$
- $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \in \mathsf{D}^-_{\mathsf{c}}(\mathfrak{X})$

Demostración.

$$\kappa^* \mathcal{L}_{X/Y} \to \widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/Y} \to \widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/X} \xrightarrow{+}$$

$$\mathbf{\Lambda}_{\mathfrak{X}} \mathbf{L}\widehat{h}^* \widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{Y}/Y} \to \widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/Y} \to \widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \xrightarrow{+}$$

Propiedades de $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}$

$\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} \in$ FS de pseudo tipo finito

Proposición

- $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \in \mathbf{D}^-_{\mathsf{c}}(\mathfrak{X})$
- $f \in \mathsf{FS}_{\mathsf{af}}$, $\mathrm{H}^i(\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}) \simeq (\mathrm{H}^i(\widehat{L}_{B/A}))^{\triangle}$

Propiedades de $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}$

$\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} \in$ FS de pseudo tipo finito

Proposición

- $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \in \mathbf{D}^-_{\mathsf{c}}(\mathfrak{X})$
- $f \in \mathsf{FS}_{\mathsf{af}}$, $\mathrm{H}^i(\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}) \simeq (\mathrm{H}^i(\widehat{L}_{B/A}))^{\triangle}$

Demostración.

$f = \widehat{h}$, h de tipo finito en $\mathsf{Sch}_{\mathsf{af}}$ e $\mathfrak{Y} = Y$

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(B) \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "\iota"'] & X = \mathrm{Spec}(C) \arrow[r, "h"] & Y = \mathrm{Spec}(A) \\ \mathrm{Spec}(B) \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{H}^i(\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}) \simeq \mathrm{H}^i(\kappa^*\mathcal{L}_{X/Y}) \simeq \iota^*((\mathrm{H}^i(\widehat{L}_{B/A}))^{\widetilde{\ }}) \simeq (\mathrm{H}^i(\widehat{L}_{B/A}))^{\triangle} \qquad \square$$

Propiedades de $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}$

$\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} \in$ FS de pseudo tipo finito

Proposición

- $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \in \mathbf{D}^{-}_{\mathsf{c}}(\mathfrak{X})$
- $f \in \mathsf{FS}_{\mathsf{af}}$, $\mathsf{H}^i(\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}) \simeq (\mathsf{H}^i(\widehat{L}_{B/A}))^{\triangle}$

Corolario

$\mathsf{H}^0(\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}) \simeq \widehat{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}$

Corolario

$\mathcal{F} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_\mathfrak{X}} \mathcal{O}_{X_n})$ *(p. ej. $\mathcal{F}$ coherente, $\mathcal{F} = M^{\triangle}$,...)*

$$\mathrm{Ext}^0_{\mathcal{O}_\mathfrak{X}}(\widehat{L}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Dercont}_{\mathfrak{Y}}(\mathcal{O}_\mathfrak{X}, \mathcal{F})$$

Propiedades de $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}$

Corolario

$\mathfrak{X} \overset{j}{\hookrightarrow} \mathfrak{Y}$ *encaje cerrado dado por* $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$

- $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \simeq \mathcal{L}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}$
- $\mathrm{H}^0(\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}) \simeq 0$
- $\mathrm{H}^1(\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}) \simeq \mathcal{J}/\mathcal{J}^2$

Proposición (Triángulo distinguido)

$\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$, $g \colon \mathfrak{Y} \xrightarrow{g} \mathfrak{S} \in \mathsf{FS}$ *de pseudo tipo finito,*

$$\mathbf{L}f^*\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{S}} \to \widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{S}} \to \widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \xrightarrow{+} \qquad \mathbf{D}_{\mathsf{c}}^{-}(\mathfrak{X})$$

Propiedades de $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}$

Observación

$\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$, $g\colon \mathfrak{Y} \xrightarrow{g} \mathfrak{S} \in \mathsf{FS}$ de pseudo tipo finito.

$$\mathbf{L}f^*\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{S}} \to \widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{S}} \to \widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \xrightarrow{+} \qquad \mathbf{D}^-_{\mathsf{c}}(\mathfrak{X})$$

La sucesión exacta larga de cohomología termina, salvo iso canónico, en:

- $\widehat{\Omega}^1_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{S}} \otimes \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \to \widehat{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{S}} \to \widehat{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \to 0$
- $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \to \widehat{\Omega}^1_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{S}} \otimes \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \to \widehat{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{S}} \to 0$, si f es un encaje cerrado dado por $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$

Propiedades de $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}$

Proposición (Cambio de base plano)

$f, f', u, v \in \mathsf{FS}$ de pseudo tipo finito, f ó v plano.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X} \arrow[r, "f"] & \mathfrak{Y} \\ \mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}' \arrow[u, "u"] \arrow[r, "f'"] & \mathfrak{Y}' \arrow[u, "v"'] \end{tikzcd}$$

- $\mathbf{L}u^* \widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}'}$
- $\mathbf{L}u^* \widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \oplus \mathbf{L}f'^* \widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{Y}'/\mathfrak{Y}} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}}$

Propiedades de $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}$

Proposición (Cambio de base plano)

$f, f', u, v \in$ FS de pseudo tipo finito, f ó v plano.

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{X} \arrow[r, "f"] & \mathfrak{Y} \\
\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}' \arrow[u, "u"] \arrow[r, "f'"] & \mathfrak{Y}' \arrow[u, "v"']
\end{tikzcd}
$$

- $\mathbf{L}u^* \widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}'}$
- $\mathbf{L}u^* \widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \oplus \mathbf{L}f'^* \widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{Y}'/\mathfrak{Y}} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}}$

Demostración.

$$\mathbf{L}u^* \widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} = u^* \kappa^* \mathcal{L}_{X/Y} = \kappa^* u_1^* \mathcal{L}_{X/Y} \simeq \kappa^* \mathcal{L}_{X'/Y'} \simeq \widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}'} \qquad \square$$

Extensiones de esquemas formales

Topos anillados

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X} \arrow[dr] & \\ \mathfrak{X}' \arrow[u, hook, "j"] \arrow[r] & \mathfrak{Y} \end{tikzcd}$$

$\mathfrak{X}$ es una $\mathfrak{Y}$-extensión de $\mathfrak{X}'$ por $\mathcal{M}$ si $j^{-1}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \to \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ es un aplicación sobreyectiva con núcleo $\mathcal{M}$ de cuadrado cero.

$\mathfrak{X}'_{\text{top}} = \mathfrak{X}_{\text{top}}$.

Proposición

$(\mathfrak{X}', \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}) \in$ FS, $\mathcal{M}$ $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$*-módulo coherente. Cualquier extensión (como topos anillados) de* $\mathfrak{X}'$ *por* $\mathcal{M}$ *está en* FS.

Deformación de esquemas formales

Proposición

$\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} \xrightarrow{g} \mathfrak{S} \in \mathsf{FS}$ *de pseudo tipo finito*, $\mathcal{F} \in \mathbf{D}_c(\mathfrak{X})$.

- $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}(\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}, \mathcal{F}) \simeq \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathcal{L}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}, \mathcal{F})$
- $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathbf{L}f^*\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{S}}, \mathcal{F}) \simeq \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}(f^*\mathcal{L}_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{S}}, \mathcal{F})$.

Deformación de esquemas formales

Morfismos de pseudo tipo finito en FS, j $\mathfrak{S}$-extensión por $\mathcal{N}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{X} \arrow[r, dashed, "f"] & \mathfrak{Y} \arrow[dr] & \\
\mathfrak{X}' \arrow[u, hook, dashed, "i"] \arrow[r, "f'"] & \mathfrak{Y}' \arrow[u, hook, "j"'] \arrow[r] & \mathfrak{S}
\end{tikzcd}$$

Corolario (Existencia)

Dado $v\colon f'^{*}\mathcal{N} \to \mathcal{M}$ *morfismo de* $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$*-modulos coherentes ,* $\exists c(f', j, v) \in \operatorname{Ext}^2_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}}(\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}'}, \mathcal{M})$ *tal que*

$$c(f', j, v) = 0 \Leftrightarrow \exists \mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y},\ \mathfrak{X}' \overset{i}{\hookrightarrow} \mathfrak{X}\ \mathfrak{S}\text{-extensión por } \mathcal{M}$$

Deformación de esquemas formales

Morfismos de pseudo tipo finito en FS, j $\mathfrak{S}$-extensión por $\mathcal{N}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{X} \arrow[r, "f"] & \mathfrak{Y} \arrow[dr] & \\
\mathfrak{X}' \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "f'"] & \mathfrak{Y}' \arrow[u, hook, "j"'] \arrow[r] & \mathfrak{S}
\end{tikzcd}$$

Corolario (Unicidad)

Si existe un morfismo f de levantamiento , las clases de isomorfía de dichos levantamientos es un espacio afín sobre $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}}(\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}'}, \mathcal{M})$.

Deformación de morfismos

Morfismos de pseudo tipo finito en FS, i $\mathfrak{W}$-extensión por $\mathcal{M}$, j $\mathfrak{W}$-extensión por $\mathcal{N}$ y k $\mathfrak{S}$-extensión por $\mathcal{L}$, $v\colon g'^*\mathcal{L} \to \mathcal{N}$, $w\colon (g' \circ f')^*\mathcal{L} \to \mathcal{M}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{X} \arrow[r, dashed, "f"] & \mathfrak{Y} \arrow[r] & \mathfrak{W} \arrow[dr] & \\
\mathfrak{X}' \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "f'"] & \mathfrak{Y}' \arrow[u, hook, "j"] \arrow[r, "g'"] & \mathfrak{W}' \arrow[u, hook, "k"] \arrow[r, "q'"] & \mathfrak{S}
\end{tikzcd}$$

Corolario (Existencia)

Dado $u\colon f'^*\mathcal{N} \to \mathcal{M}$ *morfismo de* $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$*-módulos con* $w = u \circ f'^* v$, $\exists c(f', i, j, u) \in \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}}(\mathbf{L}f'^*\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{Y}'/\mathfrak{W}'}, \mathcal{M})$ *tal que*

$$c(f', i, j, u) = 0 \Leftrightarrow \exists \mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$$

Deformación de morfismos

Morfismos de pseudo tipo finito en FS, i $\mathfrak{W}$-extensión por $\mathcal{M}$, j $\mathfrak{W}$-extensión por $\mathcal{N}$ y k $\mathfrak{S}$-extensión por $\mathcal{L}$, $v\colon g'^*\mathcal{L} \to \mathcal{N}$, $w\colon (g' \circ f')^*\mathcal{L} \to \mathcal{M}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{X} \arrow[r, "f"] & \mathfrak{Y} \arrow[r] & \mathfrak{W} \arrow[dr] & \\
\mathfrak{X}' \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "f'"] & \mathfrak{Y}' \arrow[u, hook, "j"'] \arrow[r, "g'"] & \mathfrak{W}' \arrow[u, hook, "k"'] \arrow[r, "q'"] & \mathfrak{S}
\end{tikzcd}$$

Corolario (Unicidad)

Si existe f, el conjunto de morfismos de levantamiento $\mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ es un espacio afín sobre $\mathrm{Ext}^0_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}}(\mathbf{L}f'^*\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{Y}'/\mathfrak{W}'}, \mathcal{M})$.

Complejo cotangente y condiciones infinitesimales

$\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$ de pseudo tipo finito

Proposición

f es liso $\Leftrightarrow \widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \simeq \widehat{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}[0]$ y $\widehat{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}$ $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-módulo localmente libre de rango finito.

Complejo cotangente y condiciones infinitesimales

$\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$ de pseudo tipo finito

Proposición

f es liso $\Leftrightarrow$ $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \simeq \widehat{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}[0]$ y $\widehat{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}$ $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-módulo localmente libre de rango finito.

Demostración.

$\Leftarrow$ Z esquema afín, $(T)_{\text{top}} = (Z)_{\text{top}}$

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, hook, "\text{cerr.}"] \arrow[d, "u"'] & Z \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "\exists"'] \\ \mathfrak{X} \arrow[r, "f"] & \mathfrak{Y} \end{tikzcd}$$

$$\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_T}(\mathbf{L}u^*\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}, \mathcal{J}) = \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_T}(u^*\widehat{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}[0], \mathcal{J}) = 0 \quad \square$$

Complejo cotangente y condiciones infinitesimales

$\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$ de pseudo tipo finito

Proposición

f es liso $\Leftrightarrow$ $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \simeq \widehat{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}[0]$ y $\widehat{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}$ $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-módulo localmente libre de rango finito.

Corolario

f es étale $\Leftrightarrow$ $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \simeq 0$

Complejo cotangente y condiciones infinitesimales

Corolario

$\mathfrak{X}' \stackrel{j}{\hookrightarrow} \mathfrak{X}$ encaje cerrado dado por $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ y $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$ liso.

$$\tau^{\geq -1}(\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}}) \simeq (0 \to \mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \xrightarrow{\widehat{d}} j^*\widehat{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \to 0)$$

Complejo cotangente y condiciones infinitesimales

Corolario

$\mathfrak{X}' \overset{j}{\hookrightarrow} \mathfrak{X}$ encaje cerrado dado por $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ y $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$ liso.

$$\tau^{\geq -1}(\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}}) \simeq (0 \to \mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \xrightarrow{\widehat{d}} j^*\widehat{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \to 0)$$

Demostración.

$$j^*\widehat{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \to \widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}} \to \widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{X}} \xrightarrow{+}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1(\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{X}}) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathrm{H}^0(\mathbf{L}j^*\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}) \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \arrow[r, "-\widehat{d}"] & j^*\widehat{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}
\end{tikzcd}$$

$$j^*\widehat{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}[0] \to \tau^{\geq -1}(\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}}) \to \mathcal{J}/\mathcal{J}^2[1] \xrightarrow{+}$$

Complejo cotangente y condiciones infinitesimales

$\mathfrak{X}' \stackrel{j}{\hookrightarrow} \mathfrak{X}$ encaje cerrado dado por ideal $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$

Definición

j es un encaje cerrado regular si $\mathcal{J}$ es regular.

$\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{J}$-módulo localmente libre y $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{X}} \simeq \mathcal{J}/\mathcal{J}^2[1]$

Proposición

j encaje cerrado regular y $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$ liso.

$$\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}} \simeq (0 \to \mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \to j^*\widehat{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \to 0)$$

Complejo cotangente y condiciones infinitesimales

$\mathfrak{X}' \xrightarrow{j} \mathfrak{X}$ encaje cerrado dado por ideal $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$

Definición

j es un encaje cerrado regular si $\mathcal{J}$ es regular.

$\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{J}$-módulo localmente libre y $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{X}} \simeq \mathcal{J}/\mathcal{J}^2[1]$

Proposición

j encaje cerrado regular y $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$ liso.

$$\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}} \simeq (0 \to \mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \to j^*\widehat{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \to 0)$$

Demostración.

$\mathbf{L}j^*\widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \to \widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}} \to \widehat{\mathcal{L}}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{X}} \xrightarrow{+}$ $\square$