Biálgebras desde dos puntos de vista simpliciales

Imma Gálvez Carrillo
Universitat Politècnica de Catalunya

Trabajo en progreso con
Ralph Kaufmann (Purdue) y Andy Tonks (London Metropolitan), y
con Joachim Kock (UAB)

Plan

- Lenguaje simplicial y operádico
  - Opéradas y coopéradas
  - Objetos simpliciales
  - Los símplices estándares como opéradas
  - Los conjuntos simpliciales como coopéradas
- Coopéradas con multiplicación compatible dan biálgebras
  - Definición/Teorema
  - Demostración
- Ejemplos
  - Monoides simpliciales como biálgebras
  - La construcción de cobarras de Baues
  - La biálgebra de integrales iteradas de Goncharov
- ∞-grupoidificación de coálgebras de incidencia

Opéradas y coopéradas en una categoría monoidal $(\mathbf{C}, \otimes, I)$

Una opérada no simétrica $\mathscr{O}$ es una sucesión de objetos $\mathscr{O}(n)$, $n \geq 0$, con una identidad $u : I \to \mathscr{O}(1)$, y estructuras de composición

$$\circ_i \colon \mathscr{O}(k) \otimes \mathscr{O}(m) \longrightarrow \mathscr{O}(k+m-1), \qquad\qquad 1 \leq i \leq k,$$

que son unitarias, $\circ_1(u \otimes \mathrm{id}) = \mathrm{id} = \circ_i(\mathrm{id} \otimes u)$, y asociativas,

$$(- \circ_i -) \circ_j - = \begin{cases} - \circ_i (- \circ_{j-i+1} -) & \text{if } i \leq j < m+i \\ ((- \circ_j -) \circ_{i+n-1} -)(23) & \text{if } 1 \leq j < i, \end{cases}$$

donde $(23) : \mathscr{O}(k) \otimes \mathscr{O}(m) \otimes \mathscr{O}(n) \cong \mathscr{O}(k) \otimes \mathscr{O}(n) \otimes \mathscr{O}(m)$.

Ejemplo: La opérada de endomorfismos de un objeto A

Si A es un objeto en una categoría monoidal cerrada

$$(\mathbf{C}, \otimes, I, \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}),$$

obtenemos la opérada de endomorfismos de A,
dada por las aplicaciones 'multilineales',

$$\mathscr{E}nd_A(n) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A^{\otimes n}, A)$$

con la identidad obvia,

$$u : I \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, A)$$

y con las estructuras de composición

$$\circ_i : \mathscr{E}nd(k) \otimes \mathscr{E}nd(m) \longrightarrow \mathscr{E}nd(k+m-1), \qquad 1 \leq i \leq k,$$

substituyendo una aplicación m-aria como el i-ésimo argumento de una aplicación k-aria.

- Las estructuras de composición $\circ_i$, $i = 1, \ldots, k$, se combinan para formar

$$\begin{aligned}
\gamma : \mathscr{O}(k) \otimes \mathscr{O}(m_1) \otimes \cdots \otimes \mathscr{O}(m_k) \\
&\stackrel{\circ_1 \otimes \mathrm{id}}{\longrightarrow} \mathscr{O}(m_1 + k - 1) \otimes \mathscr{O}(m_2) \otimes \cdots \otimes \mathscr{O}(m_k) \stackrel{\circ_{m_1+1} \otimes \mathrm{id}}{\longrightarrow} \cdots \\
\cdots &\longrightarrow \mathscr{O}(m_1 + \cdots + m_{k-1} + 1) \otimes \mathscr{O}(m_k) \\
&\longrightarrow \mathscr{O}(m_1 + \cdots + m_k)
\end{aligned}$$

que satisfacen unas condiciones de unitariedad y asociatividad.

- Las operaciones $\circ_i$ se pueden recuperar de γ y de la unidad u,

$$\begin{aligned}
\circ_i : \mathscr{O}(k) \otimes \mathscr{O}(m) \;&\cong\; \mathscr{O}(k) \otimes I^{\otimes i-1} \mathscr{O}(m) \otimes I^{\otimes k-i} \\
&\xrightarrow{\mathrm{id} \otimes u^{\otimes i-1} \otimes \mathrm{id} \otimes u^{k-i}} \mathscr{O}(k) \otimes \mathscr{O}(1)^{\otimes i-1} \mathscr{O}(m) \otimes \mathscr{O}(1)^{\otimes k-i} \\
&\xrightarrow{\qquad\quad \gamma \qquad\quad} \mathscr{O}(k + m - 1)
\end{aligned}$$

Una coopérada $\mathscr{C}$ es una sucesión de objetos $\mathscr{C}(n)$, $n \geq 0$, con estructuras de descomposición (counitarias y coasociativas)

$$\check{\circ}_i \colon \mathscr{C}(k+m-1) \longrightarrow \mathscr{C}(k) \otimes \mathscr{C}(m), \qquad\qquad 1 \leq i \leq k,$$

o, equivalentemente,

$$\check{\gamma} \colon \mathscr{C}(m_1 + \cdots + m_k) \longrightarrow \mathscr{C}(k) \otimes \mathscr{C}(m_1) \otimes \cdots \otimes \mathscr{C}(m_k).$$

para todo $m_1, \ldots, m_k \geq 0$.

La categoría simplicial

- Denotaremos por Δ la categoría cuyos objetos son los ordinales estándares finitos no vacíos

$$[n] := \{0, 1, \cdots, n\}, \qquad n \geq 0.$$

  y cuyos morfismos son las aplicaciones no decrecientes entre ellos.
- Entre dichas aplicaciones consideramos los generadores siguientes: para $n \geq 0$ y $i \in [n]$,

$$\partial_n^i : [n-1] \to [n]$$

  es la única inyección creciente que se salta el valor i, i

$$\sigma_n^i : [n+1] \to [n]$$

  es la única suryección creciente que repite el valor i.
- Si no hay ambigüedad, es habitual escribir ∂^i y σ^i.

Objetos simpliciales en una categoría $\mathbf{C}$

- Un objeto simplicial es un funtor (contravariante)
$$X : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{C}.$$
Se denota
$$X_n = X([n]), \qquad X_\bullet = (X_n)_{n\geq 0}$$
- Las aplicaciones ∂^i, σ^i en Δ inducen las así llamadas aplicaciones cara
$$d_i^n := X(\partial_n^i) : X_n \to X_{n-1}, \quad i = 0, \dots, n,$$
y aplicaciones degeneración
$$s_i^n := X(\sigma_n^i) : X_n \to X_{n+1}, \quad i = 0, \dots, n.$$
Escribiremos d_i y s_i si no hay peligro de confusión.
- Una aplicación simplicial $X_\bullet \to Y_\bullet$ es una transformación natural, es decir: una familia de morfismos $(X_n \to Y_n)_{n\geq 0}$ en $\mathbf{C}$ que conmutan con las aplicaciones cara y degeneración.
- Los objetos simpliciales en $\mathbf{C}$ forman una categoría
$$\mathbf{C}_\Delta := \mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathbf{C}).$$

Los símplices estándares

- Los símplices estándares son los conjuntos simpliciales

$$\Delta[n] = \mathrm{Hom}_{\Delta}(-, [n]) : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$$

- Por tanto, los k-símplices de $\Delta[n]$ son las funciones no decrecientes

$$[k] \to [n]$$

- Por el lema de Yoneda, para cualquier conjunto simplicial X,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}_{\Delta}}(\Delta[k], X) \cong X_k$$

- En particular

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}_{\Delta}}(\Delta[k], \Delta[n]) \cong \Delta[n]_k \cong \mathrm{Hom}_{\Delta}([k], [n])$$

Los símplices estándares forman una opérada

Proposición

La sucesión $(\Delta[n])_{n\geq 0}$, forma una opérada en $(\mathbf{Set}_{\Delta}, \cup, \varnothing)$, con

$$\varnothing \xrightarrow{u} \Delta[1]$$

$$\Delta[k] \cup \Delta[m] \xrightarrow{\circ_i} \Delta[k+m-1]$$

Para $i = 1, \ldots, k$, la composición parcial círculo-i envía:

- un vértice a de $\Delta[k]$ al vértice

$$\begin{cases} a \text{ de } \Delta[k+m-1] & \text{si } a \leq i-1 \\ a+m-1 \text{ de } \Delta[k+m-1] & \text{if } a \geq i \end{cases}$$

- un vértice b de $\Delta[m]$ al vértice $b+i-1$ de $\Delta[k+m-1]$.

Conjuntos simpliciales como coopéradas

Sea X un conjunto simplicial cualquiera.
Puesto que $(\Delta[n])_{n\geq 0}$ es una opérada, y $X_n \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}_\Delta}(\Delta[n], X)$ tenemos por adjunción:

Proposición

La sucesión $(X_n)_{n\geq 0}$, forma una coopérada en $(\mathbf{Set}, \times, \{*\})$, con estructuras de counidad y de cocomposición dadas por

$$X_1 \xrightarrow{\quad \check{u} \quad} \{*\} \qquad \text{(counidad)}$$

$$X_{k+m-1} \xrightarrow{\quad \check{\circ}_i \quad} X_k \times X_m \qquad (1 \leq i \leq k)$$

$$x \longmapsto \left(x_{(0,\ldots,i-1,\ i+m-1,\ldots,k+m-1)}, x_{(i-1,\ldots,i+m-1)}\right)$$

Si $x \in X_m$ entonces escribiremos $x_{(\alpha(0),\ldots,\alpha(r))}$ para $X\Big([r] \xrightarrow{\alpha} [m]\Big)(x) \in X_r$.

- Como es habitual, las cocomposiciones parciales $\check{\circ}_i$ determinan, y son determinadas por, la estructura de coopérada $\check{\gamma}$,

$$X_n \xrightarrow{\quad\check{\gamma}\quad} \prod_{m_1+\cdots+m_k=n} X_k \times X_{m_1} \times X_{m_2} \times \ldots X_{m_k}$$

- Reescribiendo los índices como $i_0 = 0$, $i_1 = m_1$, y $i_{r+1} - i_r = m_{r+1}$

$$\begin{aligned} X_n &\xrightarrow{\quad\check{\gamma}\quad} \prod_{0=i_0\leq i_1\leq\cdots\leq i_k=n} X_k \times X_{m_1} \times X_{m_2} \times \ldots X_{m_k} \\ x &\longmapsto \quad \big(x_{(i_0,i_1,\ldots,i_k)}, \\ &\qquad\qquad x_{(i_0,i_0+1,\ldots,i_1)}, x_{(i_1,i_1+1,\ldots,i_2)}, \ldots, x_{(i_{k-1},i_{k-1}+1,\ldots,i_k)}\big) \end{aligned}$$

Biálgebras obtenidas de coopéradas con multiplicación

Definición + Teorema

Una coopérada (no-simétrica, unitaria) $(\mathscr{C}, \check{\gamma})$ dotada de una multiplicación compatible asociativa

$$\{\mu_{n,n'} : \mathscr{C}(n) \otimes \mathscr{C}(n') \to \mathscr{C}(n+n')\}$$

determina una estructura de biálgebra $(\bigoplus \mathscr{C}(n),\ \mu, \delta)$.

Compatibilidad significa que para todo $n = \sum_{r=1}^{k} m_r$ y $n' = \sum_{r'=1}^{k'} m'_{r'}$,

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C}(n) \otimes \mathscr{C}(n') \arrow[r, "\check{\gamma}^{\otimes 2}"] \arrow[d, "\mu_{n,n'}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{compatibilidad}"] & \mathscr{C}(k) \otimes \bigotimes_{r=1}^{k} \mathscr{C}(m_r) \otimes \mathscr{C}(k') \otimes \bigotimes_{r'=1}^{k'} \mathscr{C}(m'_{r'}) \arrow[d, "(\mu_{k,k'} \otimes \mathrm{id})(\pi)"] \\
\mathscr{C}(n+n') \arrow[r, "\check{\gamma}"] & \mathscr{C}(k+k') \otimes \bigotimes_{r=1}^{k} \mathscr{C}(m_r) \otimes \bigotimes_{r'=1}^{k'} \mathscr{C}(m'_{r'})
\end{tikzcd}$$

Definición de la comultiplicación

La comultiplicación δ de $\bigoplus \mathscr{C}(n)$ se define como sigue, utilizando la multiplicación asociativa μ y la estructura de coopérada $\check{\gamma}$

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{C}(n) \arrow[r, "\check{\gamma}"] \arrow[dr, bend right, "\delta = (\mathrm{id} \otimes \mu)\check{\gamma}"'] & \bigoplus\limits_{\substack{k \geq 1, \\ n = m_1 + \cdots + m_k}} \left(\mathscr{C}(k) \otimes \bigotimes\limits_{r=1}^{k} \mathscr{C}(m_r) \right) \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \mu"] \\
 & \bigoplus\limits_{k \geq 1} \mathscr{C}(k) \otimes \mathscr{C}(n)
\end{tikzcd}
$$

$\left(\bigoplus \mathscr{C}(n),\ \ \mu,\ \ \delta = (\mathrm{id} \otimes \mu)\check{\gamma} \right)$ forma una biálgebra

Por ejemplo, el axioma de las biálgebras $\delta\mu = \mu^{\otimes 2}\delta^{\otimes 2}$ puede escribirse como el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{C}(n) \otimes \mathscr{C}(n') \arrow[rr, "\delta^{\otimes 2}"] \arrow[d, "\mu"'] \arrow[dr, phantom, "\text{compatibilidad}"] & & \mathscr{C}(k) \otimes \mathscr{C}(n) \otimes \mathscr{C}(k') \otimes \mathscr{C}(n') \arrow[d, "\mu^{\otimes 2}"] \\
\mathscr{C}(n+n') \arrow[rr, "\delta"'] & \arrow[ur, phantom, "\text{asociatividad}"] & \mathscr{C}(k+k') \otimes \mathscr{C}(n+n'),
\end{tikzcd}
$$

dado por el diagrama de compatibilidad de arriba y por

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{C}(k) \otimes \bigotimes_{r=1}^{k} \mathscr{C}(m_r) \otimes \mathscr{C}(k') \otimes \bigotimes_{r'=1}^{k'} \mathscr{C}(m'_{r'}) \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes\mu)^{\otimes 2}"] \arrow[d, "(\mu\otimes\mathrm{id})(\pi)"] \arrow[dr, phantom, "\text{asociatividad}"] & \mathscr{C}(k) \otimes \mathscr{C}(n) \otimes \mathscr{C}(k') \otimes \mathscr{C}(n') \arrow[d, "\mu^{\otimes 2}"] \\
\mathscr{C}(k+k') \otimes \bigotimes_{r=1}^{k} \mathscr{C}(m_r) \otimes \bigotimes_{r'=1}^{k'} \mathscr{C}(m'_{r'}) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mu"] & \mathscr{C}(k+k') \otimes \mathscr{C}(n+n').
\end{tikzcd}
$$

Monoides simpliciales como álgebras

- Sea X un conjunto simplicial, y sea A un complejo de cadenas

$$A = C_*(X, \mathbb{Q})$$

  Es decir, A_n es el espacio vectorial de base X_n.

- Si X es un monoide simplicial entonces A está dotado de una estructura de álgebra diferencial graduada, mediante el producto shuffle,

$$\mu : A \otimes A = C_*(X, \mathbb{Q}) \otimes C_*(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\text{shuf}} C_*(X \times X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\text{mult}} C_*(X, \mathbb{Q}) = A.$$

Monoides simpliciales como biálgebras

- La estructura de coopérada asociada a X que vimos antes induce una estructura de coopérada en el complejo de cadenas A,

$$\check{\gamma} : A_n \longrightarrow \bigoplus_{m_1+\cdots+m_k=n} A_k \otimes A_{m_1} \otimes \cdots \otimes A_{m_k}$$

- Podemos considerar el complejo reducido $A = \overline{C}_*(X)$, $A_0 = 0$, de manera que la suma sea finita.

- Y podemos desuspender el complejo $A = \overline{C}_*(X)[1]$ de manera que $\check{\gamma}$ sea una aplicación graduada de grado -1 para todo n.

- La multiplicación μ dada por la aplicación shuffle es compatible con la estructura de coopérada $\check{\gamma}$.

Proposición (De monoides simpliciales a biálgebras)

Sea A el complejo de cadenas de un monoide simplicial X. Entonces $A_\bullet = \bigoplus A_n$ tiene una estructura de biálgebra con la multiplicación dada por el producto shuffle y la comultiplicación dada por

$$\delta : A_n \xrightarrow{\check{\gamma}} \bigoplus_{0=i_0<i_1<\cdots<i_k=n} A_k \otimes A_{m_1} \otimes A_{m_2} \otimes \cdots \otimes A_{m_k} \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mu} \bigoplus_k A_k \otimes A_n$$

$$x \longmapsto \sum x_{(i_0,i_1,\ldots,i_k)} \otimes x_{(i_0,i_0+1,\ldots,i_1)} \cdot x_{(i_1,i_1+1,\ldots,i_2)} \cdots x_{(i_{k-1},i_{k-1}+1,\ldots,i_k)}$$

Generalizaciones y observaciones

- Obsérvese que esta construcción no utiliza las aplicaciones de borde del complejo de cadenas A, sino tan sólo el hecho de que es una familia de espacios vectoriales.
- La construcción no utiliza la totalidad de la estructura monoidal de X, de hecho sólo se necesita el producto xy si el vértice final de x coincide con el vértice inicial de y.
- Por lo tanto, podríamos enunciar la proposición para Δ_{gen}-categorías, donde Δ_{gen} es la subcategoría de Δ que contiene únicamente los morfismos que conservan los extremos.

La equivalencia de cobarras de Adams

- Sea X un conjunto simplicial 1-reducido, $X_0 = X_1 = \{*\}$.
- El complejo de cadenas $A = (C_*(X, \mathbb{Q}), d)$ es una coálgebra diferential graduada, con la comultiplicación dada por

$$\delta(x_{(0,1,\ldots,n)}) = \sum_{k=0}^{n} x_{(0,\ldots,k)} \otimes x_{(k,\ldots,n)} \qquad \text{(Alexander-Whitney)}$$

- La construcción de cobarras de una coálgebra diferencial graduada (A, δ) es el álgebra diferencial graduada (libre)

$$\Omega A = T(\overline{A}[1]), \qquad d_\Omega = d + \delta.$$

Teorema (Adams, 1956)

Los grupos de homología de $\Omega(C_*X)$ son isomorfos de manera natural a los del espacio de lazos de (la realización geométrica de) X

La comultiplicación de Baues en la construcción de cobarras

- La estructura de coopérada en X induce una en $\Omega(C_*X)$, y la multiplicación (libre) μ es compatible con ella.
- Por lo tantos tenemos una comultiplicación δ en la construcción de cobarras

$$T(\overline{C}_*X[1]) \xrightarrow{\delta} T(\overline{C}_*X[1]) \otimes T(\overline{C}_*X[1])$$

$$x \longmapsto \sum x_{(i_0,i_1,\ldots,i_k)} \otimes x_{(i_0,i_0+1,\ldots,i_1)} x_{(i_1,i_1+1,\ldots,i_2)} \cdots x_{(i_{k-1},i_{k-1}+1,\ldots,i_k)}$$

- Ésta coincide con la estructura de biálgebra diferencial graduada de Baues.
- Podemos aplicar la construcción de cobarras a la coálgebra ΩC_*X:

Teorema (Baues, 1981)

Si X tiene 2-esqueleto trivial entonces los grupos de homología de $\Omega\Omega C_*X$ son isomorfos de manera natural a los del espacio de lazos dobles de X.

Valores ζ múltiples e integrales iteradas

- La función zeta de Riemann es un ejemplo de integral iterada
$$\zeta(m) = \sum_{0<k} \frac{1}{k^m} = \int_{\Delta^m} \frac{dt_1}{1-t_1} \frac{dt_2}{t_2} \cdots \frac{dt_m}{t_m}$$
sobre $\Delta^m = \{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_m \leq 1\}$
- Se consideran también los valores zeta dobles y múltiples
$$\zeta(m,n) = \sum_{0<k_1<k_2} \frac{1}{k_1^m k_2^n} = I(0; \underbrace{1,0,\ldots,0}_{m}, \underbrace{1,0,\ldots,0}_{n}; 1)$$
donde se usa la siguiente notación para una integral iterada general
$$I(0; s_1, \ldots, s_m, 1) = \int_{\Delta^m} \frac{dt_1}{t_1 - s_1} \cdots \frac{dt_m}{t_m - s_m}.$$
- Estas integrales iteradas forman un álgebra donde la composición viene inducida por la estructura shuffle de los símplices Δ^m.
- En las integrales iteradas motívicas Goncharov introdujo una estructura coálgebraica también.

La biálgebra de Goncharov $\widetilde{\mathscr{I}}_\bullet(S)$

- Sea S un conjunto finito, y sea $\underline{S}$ el grupoide trivial, cuyo conjunto de objetos es S y cuyos morfismos consisten exactamente en una flecha $s_1 \to s_2$ para todo $(s_1, s_2) \in S^2$.

- Por ejemplo $\underline{[n]}$ es el grupoide del n-símplice,

$$S = [n] \quad \Rightarrow \quad \underline{S} = \Pi_1(\Delta[n]),$$

- Sea $X = \mathrm{Ner}(\underline{S})$, el nervio simplicial del grupoide $\underline{S}$.

- Explícitamente, los $(n+1)$-símplices de X son tuplas de elementos

$$X_{n+1} \cong \{\mathbb{I}(s_0; s_1, \ldots, s_n; s_{n+1}) : s_r \in S\} \cong S^{n+2}.$$

- Sea A el álgebra conmutativa libre en $X = \mathrm{Ner}(\underline{S})$ módulo su 1-esqueleto. La multiplicación (libre) μ es compatible con la estructura de coopérada $\check{\gamma}$ en A inducida por X.

- Por lo tanto, tenemos una comultiplicación $(\mathrm{id} \otimes \mu)\check{\gamma} : A \to A \otimes A$, que envía un generador $\mathbb{I}(s_0; s_1, \dots; s_n)$ de A a

$$\sum_{\substack{k \geq 1 \\ 0=i_0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k = n}} \mathbb{I}(s_{i_0}; s_{i_1}, \dots; s_{i_k}) \\ \otimes \mathbb{I}(s_{i_0}; s_{i_0+1}, \dots; s_{i_1}) \mathbb{I}(s_{i_1}; s_{i_1+1}, \dots; s_{i_2}) \cdots \mathbb{I}(s_{i_{k-1}}; s_{i_{k-1}+1}, \dots; s_{i_k})$$

- La biálgebra $(A, \mu, \delta = (\mathrm{id} \otimes \mu)\check{\gamma})$ coincide con la biálgebra $(\widetilde{\mathscr{I}}_\bullet(S), \cdot, \delta)$ de integrales iteradas de Goncharov, una vez cocientamos por las relaciones de shuffle.

Estructura cúbica

- Las comultiplicaciones de Baues y de Goncharov proceden de espacios de caminos o de lazos y pueden ser vistas como dotadas de una estructura cúbica natural.
- El espacio de caminos P de 0 a n en el n-símplice $|\Delta[n]|$ es un complejo celular homeomorfo al cubo $(n-1)$-dimensional.
- Los complejos cúbicos admiten una aproximación diagonal natural,

$$\delta : P = [0,1]^{n-1} \xrightarrow{\cong} \bigcup_{K \cup L = \{1,\dots,n-1\}} \partial_K^- [0,1]^{n-1} \times \partial_L^+ [0,1]^{n-1} \xrightarrow{\subset} P \times P$$

- Podemos identificar cada cara ∂_i^- del cubo P como el espacio de caminos a través de la cara $x_{(0,\dots,\widehat{i},\dots,n)}$ del n-símplice x.
- Una cara ∂_i^+ es producto de un $(i-1)$-cubo por un $(n-i-1)$-cubo: los espacios de caminos a través de $x_{(0,\dots,i)}$ y de $x_{(i,\dots,n)}$.
- El término correspondiente a $L = \{i_1, \dots, i_{k-1}\}$ bajo esta identificación es

$$x_{(0,i_1,\dots,i_{k-1},n)} \times x_{(0,1,\dots,i_1)} x_{(i_1,i_1+1,\dots,i_2)} \cdots x_{(i_{k-1},i_{k-1}+1,\dots,n)}.$$

Coálgebras de incidencia clásicas

[Leroux, Rota, Cartier–Foata, Lawvere–Menni, ...]

- Sea P un conjunto parcialmente ordenado (o un monoide, una categoría, ...)
- La coálgebra de incidencia de P es el espacio vectorial

$$\mathbb{Q}\mathrm{Mor}(P) \qquad \text{base: } \{e_{p\to q}\}$$

La comultiplicación viene dada por la descomposición de flechas

$$\delta(e_{p\to r}) \;=\; \sum_{p\to q\to r} e_{p\to q}\otimes e_{q\to r}$$

- La coasociatividad de δ es inmediata, como consecuencia de la transitividad (o asociatividad) en P
- (se supone aquí una condición de finitud local)

∞-grupoidificación de la noción de coálgebra de incidencia

Sea $\mathfrak{S}$ la ∞-categoría de los ∞-grupoides (conjuntos simpliciales de Kan)

Sea LIN la ∞-categoría monoidal cerrada con objetos las slices $\mathfrak{S}_{/S}$, y morfismos los funtores lineales dados por correspondencias

$$S \xleftarrow{p} M \xrightarrow{q} T \qquad \rightsquigarrow \qquad \mathfrak{S}_{/S} \xrightarrow{p^*} \mathfrak{S}_{/M} \xrightarrow{q_!} \mathfrak{S}_{/T}.$$

Definición + Teorema [Gálvez–Kock–Tonks, arxiv:1404.3202]

Sea X un espacio de descomposición, es decir, un ∞-grupoide simplicial tal que las siguientes relaciones simpliciales

$$d_0 s_1 = s_0 d_0 : X_1 \to X_1, \qquad d_2 s_0 = s_1 d_1 : X_1 \to X_1$$
$$d_0 d_{1+i} = d_i d_0 : X_{n+1} \to X_{n-1}, \quad d_n d_i = d_i d_{n+1} : X_{n+1} \to X_{n-1}$$

sean pullbacks homotópicos para algún $0 < i = i_n < n$ y todo $n \geq 2$.

Entonces $C(X) := \mathfrak{S}_{/X_1}$ tiene una estructura de coálgebra en LIN

$$X_1 \xleftarrow{d_1} X_2 \xrightarrow{(d_2, d_0)} X_1 \times X_1 \quad \rightsquigarrow \quad \mathfrak{S}_{/X_1} \longrightarrow \mathfrak{S}_{/X_2} \longrightarrow (\mathfrak{S}_{/X_1})^{\otimes 2}.$$

Cardinalidad es un funtor monoidal de lin a vect

La cardinalidad de $X \in \mathfrak{S}$ es $|X| = \sum_{x_0 \in \Pi_0 X} \prod_{i=0}^{\infty} |\Pi_i(X, x_0)|^{(-1)^i} \in \mathbb{Q}$.

La de un 'vector' $(X \to S) \in \mathfrak{S}_{/S}$ es el vector $\sum_{s \in \pi_0 S} |X_s|\, e_s \in \mathbb{Q}\,\Pi_0 S$.

La de una correspondencia $S \leftarrow M \to T$ es una matriz

$$\mathbb{Q}\,\Pi_0 S \to \mathbb{Q}\,\Pi_0 T.$$

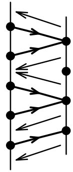
Si $\mathfrak{S}_{/S}$ es una coálgebra (finita), entonces $\mathbb{Q}\,\Pi_0 S$ es una coálgebra.

El sistema de factorización genérico/libre $(\Delta, \Delta_{\mathrm{gen}}, \Delta_{\mathrm{free}})$

- Las aplicaciones genéricas (que preservan los puntos extremos) en Δ son composiciones de codegeneraciones y cocaras internas.

- Existe un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{gen}}(-,[1]) : {\Delta_{\mathrm{gen}}}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\cong} \Delta^{+}$$
$$[n] \mapsto [n-1]$$



donde Δ^{+} es la categoría simplicial aumentada, que es una categoría monoidal con respecto a la suma ordinal $\oplus^{\mathrm{or}}$

$$[n-1] \oplus^{\mathrm{or}} [m-1] = [n+m-1]$$

- Por lo tanto tenemos una estructura monoidal $(\Delta_{\mathrm{gen}}, \vee, [0])$, con

$$[n] \vee [m] = [n+m].$$

- Los morfismos libres son composiciones de las aplicaciones de cocaras externas, es decir, son las inclusiones $[n] \rightarrowtail [a] \vee [n] \vee [b]$.

Lema (Pushouts entre morfismos genéricos y libres)

Los morfismos genéricos y libres admiten pushouts los unos con respecto a los otros, y los morfismos resultantes son nuevamente genéricos y libres.

$$\begin{tikzcd}
{[n]} \arrow[r, rightarrowtail, "f"] \arrow[d, "g"'] & {[a] \vee [n] \vee [b] = [a+n+b]} \arrow[d, "\mathrm{id} \vee g \vee \mathrm{id}"] \\
{[q]} \arrow[r, rightarrowtail, "f'"] & {[a] \vee [q] \vee [b] = [a+q+b]}
\end{tikzcd}$$

Segunda definición de espacio de descomposición

Un grupoide simplicial X es un espacio de descomposición si lleva pushouts de genéricos por libres a pullbacks homotópicos de groupoides.

Se puede comprobar que todo conjunto simplicial que verifica las condiciones de Segal es un espacio de descomposición.

La categoría de flechas torcidas de la categoría monoidal Δ^+

Consideremos la categoría $\mathscr{D}$, cuyos objetos son las flechas $a : [m] \to [h]$ de Δ^+ , y cuyos morfismos son los diagramas en Δ^+ :

$$\begin{tikzcd} {[m]} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "(g,f)"] & {[n]} \arrow[d, "b"] \\ {[h]} & {[k]} \arrow[l, "f"] \end{tikzcd} \; . \quad = \quad \bigoplus_{i\in[h]}^{\mathrm{or}} \left(\begin{tikzcd} {[m_i]} \arrow[r] \arrow[d, "a_i"'] \arrow[dr, phantom, "(g_i,\mathrm{id})"] & {[n_i]} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{id},f_i)"] & {[n_i]} \arrow[d, "b_i"] \\ {[0]} & {[0]} \arrow[l] & {[k_i]} \arrow[l] \end{tikzcd} \right)$$

Teorema (Tercera definición de espacio de descomposición)

Existe una equivalencia natural entre ∞-grupoides simpliciales X y funtores monoidales $\overline{X} : (\mathscr{D}, \oplus^{\mathrm{or}}) \to (\mathfrak{S}, \times)$, tal que X es un espacio de descomposición si y sólo si $\overline{X}$ envía pushouts de aplicaciones (g, id) a lo largo de (id, f) a pullbacks de ∞-grupoides.

Para X un ∞-grupoide simplicial, $\mathscr{D} \xrightarrow{\overline{X}} \mathfrak{S}$ viene dada en objetos por :

$$\overline{X}_a = \prod_{i\in[h]} X_{m_i}, \qquad m_i = |a^{-1}(i)|$$

Coasociatividad (general) via correspondencias razonables

- Sea X, o equivalentemente $\overline{X}$, un espacio de descomposición.

- Una correspondencia razonable $\overline{X}_a \leftarrow \overline{X}_c \rightarrow \overline{X}_b$ es aquella inducida por aplicaciones $(g, \mathrm{id}) : c \rightarrow a$ y $(\mathrm{id}, f) : c \rightarrow b$ en $\mathscr{D}$.

- Un funtor lineal razonable $\mathfrak{S}_{/\overline{X}_a} \rightarrow \mathfrak{S}_{/\overline{X}_b}$ es aquel inducido por una correspondencia razonable.

- Ejemplo: existe un funtor lineal razonable

$$\delta_n : \mathfrak{S}_{/X_1} \longrightarrow \mathfrak{S}_{/X_1 \times \cdots \times X_1},$$

que llamamos la n-ésima aplicación de comultiplicación, definida por la correspondencia razonable

$$X_1 \longleftarrow X_n \longrightarrow X_1 \times \cdots \times X_1.$$

δ_0 es la counidad y δ_1 es la identidad.

Teorema

Los productos tensoriales de funtores razonables son razonables (ya que los productos de correspondencias lo son).

Las composiciones de funtores lineales razonables son razonables (puesto que los pullbacks de correspondencias razonables lo son).

Cualquier funtor lineal razonable $\mathfrak{S}_{/X_1} \longrightarrow (\mathfrak{S}_{/X_1})^{\otimes n}$ es canónicamente equivalente a la n-ésima aplicación de comultiplicación $\delta_n : \mathfrak{S}_{/X_1} \longrightarrow (\mathfrak{S}_{/X_1})^{\otimes n}$ (existe una única correspondencia razonable entre X_1 y X_1^n).

Por lo tanto, $C(X) := \mathfrak{S}_{/X_1}$ es una coálgebra coasociativa.

Si X es un espacio de descomposición con una multiplicación

$$m : X \times X \to X, \qquad u : 1 \to X$$

Si m y u son cartesianas con respecto a los morfismos genéricos, entonces $C(X) := \mathfrak{S}_{/X_1}$ es una biálgebra.