# El límite en el Bachillerato y primer año de Universidad. Perspectivas desde los enfoques epistemológico y semiótico[1]


Ángel Contreras de la Fuente

*Universidad de Jaén*



**Resumen**

La enseñanza-aprendizaje de los objetos básicos del Análisis Matemático, en los niveles de Bachillerato y Universidad, ha constituido una problemática de investigación -de los fenómenos didácticos que emergen a lo largo del proceso- con una tradición de más de 20 años. Actualmente, desde el pensamiento matemático avanzado -Badillo y Azcárate (2001) y Sánchez-Matamoros, Llinares y Gavilán (2001)-, y la teoría de los obstáculos epistemológicos -Sánchez (1997) y Sanchez y Contreras (1998)- se ha intenta dar respuesta a algunas de las dificultades inherentes a la derivada y al límite de una función. Pero como Artigue (1998) sostiene, han de avanzarse propuestas más ligadas a enfoques de tipo ecológico y de estudio de técnicas de reconstrucción del conocimiento matemático que den explicaciones más sólidas a tales problemas. Tal es el caso de l los trabajos de Lorena (1998) -en el caso dellímite- y Fonseca y Gascón (2000) donde se estudia el problema global de las Matemáticas en Secundaria y en Universidad y se trata de explicar en términos de cambios de contrato entre ambas organizaciones matemático-didácticas, en los dos casos siguiendo la TAD. En este trabajo tratamos de aportar una nueva visión del problema centrados en el objeto límite- por medio de un enfoque epistemológico-semiótico (Godino, 1999).


## ENFOQUES DE INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO

La enseñanza-aprendizaje del Análisis Matemático en los niveles del Bachillerato y primer año de Universidad presenta un desfase de tipo institucional, en cuanto a las diferencias de contrato didáctico, que conduce aun importante porcentaje de fracaso académico en las asignaturas de Cálculo. Siendo éste un campo de problemas didácticos muy necesarios de resolver, la comunidad


[1] XVI Jornadas del SI-IDM (Huesca, 29 marzo-1 abril, 2001)

de investigadores de Didáctica de las Matemáticas ha abordado su solución desde muy distintas perspectivas teóricas.

Considero necesario efectuar un breve recorrido por las teorías más relevante en el campo de la investigación en la enseñanza del Análisis Matemático, puesto que nos ayudará a centrar nuestro problema de investigación. Se seguirán algunas de las ideas de Artigue (1998) y Contreras (2001.)

En primer lugar, el .AMI -en Gascón (2000) puede verse una síntesis sobre ello- con las aportaciones sobre el concept image y concept definition (Tall y Vinner, 1981), el procept, concept y los procesos de encapsulación (Tall, 1991 ), el APOS -acción, proceso, objeto y esquema- Dubinsky (1996), fundamentalmente. Actualmente en nuestro estado son varios los grupos que trabajan en esta línea de investigación, siendo las más estudiadas las ideas de Dubinsky –puede verse Asiala (1996)- como lo muestra la actividad de grupos de investigación españoles como los de la Universidad de Sevilla (Sánchez-Matamoros, Llinares y Gavilán, 2001) y la Autónoma de Barcelona (Badillo y Azcárate, 2001).

Otra línea de interés está representada en lo que se denomina el ~(el pensamiento y lenguaje variacional.) En Cantoral (1997) se señala que, como parte del AMT, el pensamiento y lenguaje variacional trata de las relaciones entre la matemática de la variación y el cambio por un lado y de los procesos complejos del pensamiento por otro. Estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y del cambio en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida, buscando enriquecer las situaciones de enseñanza en la escuela.

El pensamiento y lenguaje variacional adopta una orientación múltiple que atiende a las distintas dimensiones humanas, la cultural, la individual y la social, lo que se manifiesta por medio de lo epistemológico, lo cognitivo y lo didáctico. Como se indica Cantoral y Farfán (1998), intentan dar a la investigación en Didáctica del Análisis Matemático una aproximación sistémica que incorpore las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza.

En su propuesta didáctica, el pensamiento y lenguaje variacional pretende haber dado al estudiante que inicia un curso de análisis un lenguaje gráfico que lo dote de los elementos necesarios para poder concebir a la ,función como un objeto y para que tenga un dominio sobre el tránsito entre los contextos algebraico, geométrico, numérico, icónico y verbal.

Esta línea de investigación deja planteadas algunas preguntas: ¿Cuáles son las leyes que regulan las situaciones de enseñanza del pensamiento variacional en nuestro sistema educativo y en el medio social? ¿De qué naturaleza son las regularidades en los actos de entendimiento ante situaciones que precisan del pensamiento variacional? ¿Cuál debe ser la forma de articulación de los saberes matemáticos de manera que la aprehensión de situaciones variacionales sea lograda por la mayoría de los estudiantes en situación escolar?

Una tercera vía -conjunto de líneas de investigación- está asociada a la didáctica de la matemática de la escuela francesa. Como señala Artigue (1998), la didáctica francesa centra sus estudios en Didáctica del Análisis Matemático en tres marcos teóricos: la teoría de los campos conceptuales, la de situaciones didácticas y la transposición didáctica. Son trabajos de tipo sistémico –estudio epistemológico de los conceptos, de concepciones de los estudiantes y de concepciones de los profesores- y donde la ingeniería didáctica adquiere un papel relevante.

Es relativamente reciente un trabajo de Legrand (1997) -citado en Artigue, 1998- en el que se investiga una situación fundamental para la integral de Riemann que permite introducir el procedimiento integral como un útil que permite resolver un problema que tiene sentido para los estudiantes, pero no accesible sin dicha situación. Pero, como señala Artigue, trabajos sobre situaciones relativas al limite muestran la aparición de una ruptura entre la que es accesible vía proceptual y las necesidades matemáticas de un funcionamiento formal.

Como apunta Artigue: ". ..es necesario reconocer que el impacto de estos trabajos es todavía débil. En particular, los productos de ingeniería construidos no están apenas difundidos fuera de la comunidad de investigadores. Esto plantea problemas cruciales que no pueden abordarse con sólo el marco sistémico clásico y necesitan la integración de problemáticas institucionales y ecológicas." (p. 248).

Son relevantes los trabajos del grupo AHA (Approach Heuristique de l'Analyse) de Nicolás Rouche en la Universidad de Lovaina en Bélgica, los cuales tal y como señala Artigue (p. 239): "buscan, vía análisis histórico, devolver su densidad epistemológica a las teorías actuales, el comprender las condiciones que presentan sobre la enseñanza ya encontrar equilibrios mejor adaptados que los proporcionados por el Cálculo clásico."

Se encuentran sus propuestas didácticas en Hauchart y Rouche (1992.) Ponen de manifiesto que los alumnos se enfrentan al Análisis. Matemático sin una preparación previa de carácter experimental, con lo que han de asimilar al mismo tiempo los fenómenos asociados ala aparición del infinito y de los límites, las teorías formales que los expresan y desarrollan matemáticamente. Basándose en Freudenthal, sostienen que los alumnos que se inician en Análisis Matemático se apoyan sobre objetos mentales, nociones que recurren a los cotidiano y que le sirven mal que bien para organizar e interpretar los fenómenos relativos al infinito ya esbozar sus primeros razonamientos.

Proponen que en los cursos introductorios de Análisis se siga el siguiente principio: no teorizar más que lo necesario, pero conducir progresivamente a los alumnos a una teoría formalizada, desde cuestiones que le son más familiares hacia preocupaciones más abstractas.

## LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LA DIDÁCTICA (TAD)

Basan sus estudios en la reconstrucción institucional del conocimiento matemático, siguiendo fundamentalmente las ideas de Lakatos en lo que denominan el Programa Epistemológico de la Didáctica de las Matemáticas.

Detectan en sus investigaciones los "vacíos didácticos institucionales" que conducen al fracaso a los estudiantes de Cálculo. Como afirma Artigue: "La ausencia de una estructuración intermediaria entre las técnicas del Instituto y las construcciones teóricas de los cursos superiores, ..., hacen fracasar cruelmente a profesores y jóvenes que no llegan ellos mismos a construir una tecnología ( en el sentido de Y. Chevallard) susceptible de asegurar el interface entre las técnicas puras de secundaria y las teorías de cursos superiores no pudiendo ayudar eficazmente a sus alumnos." (p. 252).

De las cuatro componentes de la praxeología: tareas, técnicas, tecnologías y teorías, los dos primeros corresponden a los momentos del saber hacer; el momento del primer encuentro, momento de la exploración y el momento del trabajo de la técnica. Los dos últimos corresponden a los momentos tecnológico y teóric04a teoría antropológica sostiene que se dan rupturas de contrato cuando en el desarrollo de la enseñanza se olvida o gestiona mal alguno de esos momentos.

La T AD asume como hipótesis básica una despersonalización de la problemática didáctica, lo que conduce a plantear dicha problemática en términos institucionales. Formulan dos hipótesis en este sentido (Fonseca y Gascón, 2000): "Para precisar mejor nuestro punto de partida y clarificar los presupuestos que asumimos provisionalmente, explicitaremos a continuación dos hipótesis básicas de este trabajo:

Hl: Muchos de los fenómenos didácticos (esto es, relativos al estudio de las Matemáticas) que aparecen en el primer ciclo universitario (incluyendo los más "visibles" asociados al fracaso escolar"), pueden ser explicados en términos de contradicciones y cambios bruscos entre las organizaciones matemático-didácticas de Secundaria y de la Universidad.

H2: El conocimiento de las relaciones entre las dos organizaciones nos proporcionará criterios fundamentados para actuar sobre ellas y, de esta manera, empezar a modificar algunos de los fenómenos indeseables que se producen.

## LA TEORÍA DE LOS OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS

La teoría de los obstáculos epistemológicos trata de aplicar un método epistemológico-genético, según el cual las concepciones y obstáculos epistemológicos detectados a lo largo de la evolución histórica de los conceptos se repiten, con determinadas diferencias, como concepciones y obstáculos cognitivos en los sujetos durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos del Análisis Matemático.

Esta línea de investigación coloca en el centro de la aproximación didáctica las rupturas necesarias en el aprendizaje, sosteniendo que se aprende en contra de conocimientos anteriores, culturalmente incluso escolarmente construidos. Comu (1983) y Sierpinska (1991) estudiaron obstáculos sobre la idea de límite, en la tesis doctoral de Sánchez (1997) y en Sánchez y Contreras (1998) se analizaron los obstáculos y concepciones del límite funcional. Recientemente, como resultado de un proyecto de investigación (Contreras, 2000), se han estudiado concepciones y obstáculos de los conceptos de límite, continuidad y derivada. Actualmente, se está elaborando un trabajo sobre concepciones y obstáculos del límite donde se ha profundizado mucho mas en la evolución epistemológica de este concepto. No obstante, se considera que estos estudios hay que completarlos con otro tipo de investigaciones de tipo antropológico y semiótico, capaces de aportar explicaciones más sólidas a los fenómenos didácticos del aula.

Una crítica importante a esta línea de investigación la ha formulado Radford (1997), quien sostiene que los obstáculos no pueden intervenir más que en ciertos niveles de la cultura matemática –sin embargo en el trabajo en elaboración que se ha citado hay una respuesta a este tipo de crítica, en él se defiende la idea de que, si bien un obstáculo epistemológico surge en el nivel formal o informal de una determinada etapa histórica de la evolución de una noción, hay que tener en cuenta que ese nivel informal era un nivel técnico en la etapa anterior. Luego, por recurrencia, se trata de obstáculos epistemológicos que surgen del nivel técnico de una etapa histórica concreta, como concepciones válidas para determinados campos de problemas, pero que se relegan al nivel informal '-"' en la época posterior al no dar respuesta a otra nueva clase de problemas. Por otra parte, Radford señala además: "Las Matemáticas son, básicamente, manifestaciones semióticas de ciertos elementos culturales que sus miembros desarrollan a través de experiencias compartidas y desde donde se forman el significado de los productos." (pág. 30) Consideramos, por tanto, que los obstáculos epistemológicos están ligados tanto al desarrollo del propio concepto como al medio cultural.

Pero esto nos conduce al centro de la cuestión, esto es, tal y como propone Gascón habrá que buscar el obstáculo epistemológico en momentos de rupturas epistemológicas de un conocimiento matemático determinado. Como plantea Gascón (1993) respecto a la noción de obstáculo epistemológico: "Postulamos que un obstáculo epistemológico consiste precisamente en ser origen de una bifurcación en el desarrollo de las Matemáticas y que es éste desarrollo múltiple (bifurcado ) el que puede ser explicitado: dicha explicitación debe hacerse -de acuerdo con el modelo de la actividad matemática en el que nos situamos- en términos de dos o más desarrollos diferentes de las
técnicas, entendiendo que estos desarrollos generan nuevas clases de problemas y nuevas técnicas e inciden sobre los nuevos enfoques teóricos en la evolución dinámica de la disciplina." (pág. 305) Es decir, hay que dar explicación a los hechos matemáticos, problemas que se plantearon ya los discursos matemáticos que le dieron sentido a la resolución de dichos problemas.

Creemos, por tanto, que el estudio de concepciones hay que buscarlo: primeramente en un estudio de su evolución histórica lo más riguroso posible y, en segundo lugar, según las dimensiones epistemológicas siguientes:

-Etapa histórica.

-Ruptura con la concepción anterior (cuando proceda), que desde la teoría de las funciones semióticas podría explicarse por medio de elementos intensivos y validativos.

-Hechos relevantes que caracterizan la concepción, que se explicaría por medio de elementos extensivos, ostensivos y actuativos.

-Problemas más relevantes que se planteaban, que se explicaría con elementos extensivos y ostensivos.

-Métodos empleados en las argumentaciones, donde se utilizarían elementos intensivos, validativos y axiomáticos.

Como ejemplo del tratamiento que se da al estudio de concepciones y obstáculos, veamos las concepciones geométrica y pre-infinitesimal del límite:

**La concepción geométrica CLG**

La idea de límite está asociada en el mundo griego a la Geometría ya la noción de infinito. Los filósofos pitagóricos con su idea de que el número constituye la esencia de todas las cosas, sufrieron un contratiempo al descubrir las cantidades inconmensurables. Con el hallazgo de la magnitud irracional se eliminaba la posibilidad de poder medirlo todo de manera exacta, creencia muy arraigada en los matemáticos griegos. Como señala González (1992): "Se había descubierto la magnitud irracional, el alogon (lo inexpresable), provocando una crisis sin precedentes en la historia de la Matemática." (pág. 20).

Surgen, por tanto, los problemas que se derivan del tratamiento del infinito, "los cuales –como puntualiza Bessot y cols. (1999)- están íntimamente ligados a la propia constitución de la matemática griega y descansan sobre la divisibilidad infinita de las magnitudes y sobre la posibilidad de considerar un razonamiento que comporta un número infinito de etapas." (pág. 11) El paso siguiente fue la construcción de una teoría que soslayara los problemas señalados, aunque incapaz de darle una explicación a los mismos. Esta teoría apareció en los Elementos de Euclides, en la que -además de los axiomas, postulados y proposiciones- afloró un tipo de razonamiento (por reducción al absurdo) que permitía eludir las demostraciones de carácter infinito. Sin embargo, la genialidad griega no podía dejar escapar una fundamentación teórica que no abordaba la cuestión del infinito, sino que lo obviaba, y aparecieron las aporías de Zenon como muestra de la profundidad del pensamiento de esa civilización, cuya continuidad hay buscarla en el siglo XVII con el nacimiento del Cálculo Infinitesimal.

Como se ha señalado anteriormente, para las concepciones del límite se han tenido en cuenta una serie de dimensiones relevantes que permiten su caracterización. En el caso de esta concepción geométrica, estas dimensiones son las siguientes:

<u>Etapa histórica</u>: Desde el nacimiento de la matemática griega (siglo V. a.C.) hasta el siglo XVI.

<u>Hechos más relevantes de los que emergió la concepción</u>:

- El descubrimiento, hacia mediados del siglo V a.C., de las cantidades inconmensurables -es decir, del número irracional- provocó una crisis en el discurrir matemático del mundo heleno.

- Las aporías de Zenon que demostraron cómo el carácter discreto de la serie natural de los números, que surgió del modelo atomista de Demócrito, no podía reflejar la naturaleza de la continuidad del espacio. Estas refutaciones provocaron el denominado "horror al infinito" que caracterizó al mundo científico griego.

- Para soslayar el concepto infinitesimal del número irracional, Eudoxo trata de resolver la contradicción entre lo finito y lo infinito al introducir la noción de "tan pequeño como se quiera". Como indica González: "Introduciendo el concepto de "tan pequeño como se quiera", equivalente a nuestro proceso de "paso al límite"., encuentra, con su teoría de magnitudes, una escapatoria mediante un recurso genial que desarrolla en tres estadios: una definición, un axioma y un método. Como lo inexpresable era la razón entre dos cantidades inconmensurables, Eudoxo elimina la dificultad definiendo no la razón misma, sino la igualdad de razones." (pág. 26)

- Hipócrates introduce el método indirecto de demostración por reducción al absurdo.

- Nicomedes efectúa la trisección del ángulo por medio de la concoide.

- Anaxágoras establece lo que hoy denominamos el axioma de continuidad al manifestar que: "En lo pequeño no existe lo extremadamente pequeño, sino algo cada vez más pequeño... De igual modo, en lo grande siempre hay algo más grande."

- Eudoxo crea el denominado posteriormente método de exhausción, lo que le permitió aproximar áreas con precisión creciente. Este método -junto con el axioma de continuidad y el principio de Eudoxo- permitió a los griegos "reprimir " o "esconder " el infinito, al aportar procedimientos que eran la traducción geométrica del paso al limite.

- Arquímedes armoniza el método de exhausción con su método mecánico de descubrimiento (método de la palanca), convirtiéndose en unos de los pioneros del Cálculo Infinitesimal. En este sentido, González apunta: "En manos de Arquímedes el método de exhausción, conjugado con su genial y heurístico método mecánico de descubrimiento ("método de la palanca"), se convierte en un poderoso instrumento infinitesimal rigurosamente lógico que le permite alumbrar intuitivamente y convalidar apodícticamente numerosos resultados sobre cuadraturas, cubaturas y centros de gravedad, que hoy obtenemos con nuestros perfeccionados y rigurosos algoritmos infinitesimales, y con los que Arquímedes trasciende Los Elementos de Euclides, amplió de forma considerable el acervo matemático de su época." (pág. 32)

<u>Problemas más relevantes que se plantean</u>:

- (Hipasos) Medición de la diagonal del cuadrado con relación al lado y obtención de la relación entre la medida de las diagonal es del pentágono regular.

- (Hipócrates) Realización de la cuadratura de una figura comprendida entre dos arcos de círculo de una configuración muy simple -lúnulas- mostrando que es que igual aun triángulo de lados dados.

- (Demócrito) Cálculo de los volúmenes de la pirámide y del cono como la tercera parte de los del prisma y del cilindro, utilizando ideas metafisicas precursoras de la Geometría de los indivisibles.

- (Eudoxo) Intenta resolver los problemas de la irracionalidad establecidos por Zenón, por medio de las razones entre magnitudes inconmensurables.

- (Arquímedes) En la proposición tercera de su obra Medida del Círculo, que dice: "el perímetro de todo círculo es igual al triple del diámetro, aumentado en un segmento comprendido entre los diez setenta y un avos y el séptimo del diámetro", acota la relación $\frac{P}{D}$ -la notación π data de comienzos del siglo XVIII -con $\frac{P_{96}}{D}$ y $\frac{Q_{96}}{D}$ , donde P96 es el perímetro de un polígono de 96 lados inscrito y Q96 el del circunscrito. Los valores los calculó por un procedimiento iterativo consistente en partir del hexágono regular y doblar el número de lados. Esta metodología de aproximación de n únicamente fue superada por Newton al utilizar el desarrollo en serie y el cálculo integral.

Aplicando su método mecánico obtiene numerosos resultados, algunos de los cuales son: demostración de que el área del segmento parabólico es cuatro tercios del triángulo de igual base y altura; que la superficie de la esfera equivale a cuatro de sus círculos máximos; determinación del centro de gravedad de un segmento de paraboloide de revolución, y la determinación del volumen de la uña cilíndrica.

Métodos utilizados en sus argumentaciones:

- El método de la doble reducción al absurdo. En la obra La medida del círculo, en la proposición primera: "Todo círculo es equivalente aun triángulo rectángulo en el que uno de sus lados del ángulo recto es igual al radio del círculo y la base -es decir el otro lado del ángulo recto- es igual al perímetro del círculo." (Bessot y cols., pág. 33) , Arquímedes compara las áreas Ac y At del círculo y del triángulo y hace ver que si se supone Ac > At, se llega aun absurdo y, recíprocamente, que la desigualdad At > Ac también conduce a otro absurdo. Por tanto, se puede concluir que el triángulo no excede al círculo y éste tampoco al primero, At=Ac.

- El método de exhausción. Es la expresión que utilizó el matemático Saint- Vicent en el siglo XVII para calificar el método de cálculo de áreas y volúmenes por aproximación de superficies con ayuda de contornos poligonales o de volúmenes por contornos poliédricos.

- El método mecánico de descubrimiento. Arquímedes extrajo de la Mecánica y de la Geometría del mundo real aquellos elementos que conducen al conocimiento lógico, estableciendo resultados por analogías. Además del arte de la invención ilustra el arte de la argumentación científica informal, estableciendo una pauta de discurso matemático dirigido a mostrar el carácter plausible de unos resultados que serán enseguida convalidados en la forma demostrativa vigente, es decir, mediante el método de exhausción.

La concepción CLG como obstáculo epistemológico

La concepción geométrica puede resolver problemas ligados al infinito potencial, pero no resuelve los problemas propios del infinito actual. Es decir, al no darse en esta etapa los métodos infinitesimales, los razonamientos son de tipo finito y, por tanto, si bien resolvieron numerosos problemas matemáticos, impidió el desarrollo de los problemas propios del Cálculo Infinitesimal.

El carácter infinitesimal del número irracional hizo que Eudoxo introdujera la idea de "tan pequeño como se quiera", tratando de evitar la contradicción -señalada por Zenón- entre lo finito. Además, el método de exhausción aportó procedimientos -que eran la traducción geométrica del paso al límite- que sirvieron para resolver ciertos problemas de la época. El método de doble demostración por reducción al absurdo fue el discurso teórico que dio consistencia lógica a los razonamientos de los griegos.

Quedaron planteados problemas -asociados al límite- que fueron abordados posteriormente a partir del siglo XVII, bifurcándose en su desarrollo, por una parte, con la teoría de los indivisibles de Cavalieri y, por otra, con el método de adigualdad de Fermat.

Consideramos que en este obstáculo epistemológico CLG están comprendidos los clásicos planteamientos de obstáculos epistemológicos de investigadores como Comu (1983) y Sierpinska (1985), quienes consideran los obstáculos siguientes para el límite:

- El aspecto metafisico de la noción de infinito (Comu, 1983), ya que introduce una nueva forma de razonamiento. Sierpinska (1985) denomina a este tipo de obstáculo como horror infinito.

- Los conceptos de cantidad infinitamente grande y cantidad infinitamente pequeña, por su propia naturaleza.

- La creencia de que el límite no es alcanzable.

Observemos que el "horror al infinito" corresponde ala respuesta griega a las refutaciones de Zenon y que planeó en todo su desarrollo matemático. Que la noción de cantidad infinitamente pequeña fue la respuesta de Anaxágoras y Eudoxo para tratar de resolver la contradicción entre lo finito y lo infinito. Por último, la creencia de que el límite no es alcanzable corresponde a una de las aporías de Zenon.

Tenemos en cuenta lo que señala Artigue respecto a la problemática: "De hecho, la problemática de los obstáculos epistemológicos ha respondido en didáctica a la necesidad de tener en cuenta las discontinuidades necesarias del aprendizaje y el dotarse de instrumentos para trabajarlas. La existencia de tales discontinuidades es evidente en el análisis, pero son de naturaleza diversa y nos parece más productivo, hoy, para avanzar en la comprensión de estas discontinuidades de pensarlas en términos de reconstrucciones, de evolución con relación a objetos, liberándose, de algún modo, de las barreras ala vez teóricas y metodológicas que hacen pasar sobre el trabajo didáctico una vinculación demasiado fuerte con el obstáculo epistemológico." (p. 238).

**La concepción pre-infinitesimal CLPRI**

La Humanidad, desde el año 400 hasta el 1100 que corresponde a la Alta Edad Media, se desinteresa por el mundo físico y centra sus fines en la espiritualidad. De esta forma, las cuestiones relativas a la naturaleza -siempre que estuvieran ligadas a razones pragmáticas o, incluso, a mera curiosidad- carecían de valor alguno. Como señala Kline (1994): "La Cristiandad, e incluso los últimos filósofos griegos, estoicos, epicúreos y neoplatónicos, resaltaron la elevación de la mente sobre la carne y la materia y la preparación del alma para una vida futura en el cielo. La realidad era
la vida eterna del alma; y la salud del alma se reforzaba mediante el aprendizaje de verdades morales espirituales. ..Puesto que el estudio de la naturaleza no contribuía a alcanzar tales fines o a prepararse para la vida futura, era rechazado como algo sin valor e incluso herético." (pág. 276)

Fue alrededor de 1100 cuando nuevas influencias van creando un clima intelectual, de tal forma ue en Europa se comienzan a conocer los trabajos griegos de Euclides y Arquímedes fundamentalmente. En este entorno la Matemática infinitesimal se abre camino entre los escolásticos. Se pueden citar dos científicos que, en esta época medieval ya alumbraron ciertas ideas que pueden considerarse de matiz infinitesimal. Primeramente Brawardine (1290-1349), que distinguió dos tipos de magnitud infinita; primero, aquella que no tiene fin; segunda, aquella tal que dada cualquier magnitud finita siempre puede encontrase otra mayor. En segundo lugar, Oresme (1323-1382) introdujo una serie de ideas innovadoras -la de la constancia de la disminución de la variación en las proximidades de un extremo, y la de una sumación continua para calcular la distancia como el área bajo el grafo velocidad-tiempo- de repercusión posterior en el Cálculo del siglo XVII.

Las aportaciones anteriores, a sí como la disposición de traducciones de las obras matemáticas griegas, facilitaron la emergencia y coexistencia de varios planteamientos de tipo preinfinitesimal a finales del siglo XVI y principios del XVII. Así, Stevin, resta importancia al doble razonamiento por reducción al absurdo y se desplaza hacia razonamientos infinitesimales; Kepler aborda aspectos relacionados con los infinitamente pequeños, aunque muy imbricados con la metafisica; por último, Cavalieri aporta su teoría de los indivisibles. Todos ellos, aunque con diferentes planteamientos en cuanto a las nociones que utilizan, comparten el uso de métodos infinitesimales que es lo que va a caracterizar la concepción

Hay que aclarar que por método infinitesimal suponemos aquel que admite los procesos indefinidos, de división de un segmento por ejemplo, pero que no intentan explicar el elemento infinitesimal que utilizan; Cavalieri se cuida muy mucho de no explicar la naturaleza de su indivisible- Como podemos ver, en este sentido parece que el término pre-infinitesimal tiene sentido, esto es, no llegan a abordarse completamente los aspectos infinitesimales en sus métodos y en sus nociones. Es decir, se denomina esta concepción pre-infinitesimal porque, o bien se da un planteamiento metafísico del límite -caso de Kepler-, o bien se elude éste mediante el recurso a los indivisibles -casos de Cavalieri y Torricelli-

Las dimensiones epistemológicas que distinguen esta concepción, son las siguientes:

Etapa: Desde el siglo XVI hasta la primera mitad del siglo XVII.

Rupturas con la concepción CLG:

El matemático en su hacer, desarrolla una práctica teórica sobre objetos determinados tratando de resolver los problemas que dichos objetos le plantean. Cuando se enfrenta -en una época concreta- a las cuestiones que se le proponen, o bien se limita a ampliar el objeto matemático y, por tanto, su desarrollo teórico interno, o bien ese objeto se enfoca desde una nueva perspectiva, llegando, en consecuencia, a una ruptura epistemológica. Además, como señala Lorenzo (1976). "... la ampliación o desarrollo teórico de unos temas conlleva, necesariamente, la ruptura en cuanto a que ese desarrollo terminará manifestando los límites inherentes al problema considerado, imposible de resolver con el enfoque interior del marco en el cual está planteado." (pág. 15)

Consideramos que las dos rupturas que caracteriza el paso de la concepción CLG del límite a la nueva concepción pre-infinitesimal, son:

a) La que corresponde al uso de métodos de razonamiento pre-infinitesimales -cuyo pionero fue Stevin- superando al doble razonamiento por reducción al absurdo del mundo heleno, que caracterizan la concepción CLG.

b) Una ruptura -que se centra básicamente en Kepler ( con los "infinitamente pequeños") y Cavalieri -(con los indivisibles)- con el rigor discursivo que impusieron los griegos, pasando a buscarse nuevos resultados aún a costa del rigor. Como señala González (1992): "Se impone el lema "primero inventar, después demostrar" (si se puede). Bajo el nuevo enfoque se trata de crear, descubrir, no de expresar demostrativamente, axiomáticamente." (pág. 60)

La bifurcación que se observa en esta época, Stevin y sus razonamientos de tipo preinfinitesimal y Cavalieri con sus indivisibles, confirman la idea de que el desarrollo científico no es lineal.

Hechos más relevantes que caracterizan la concepción:

- Las argumentaciones pre-inifinitesimales de Stevin facilitaron, progresivamente, la emergencia de herramientas propias del Cálculo Infinitesimal. Como señala D'hommbres (1987): "Stevin allége le double raisonnement para l'absurde de la méthode d'exhaustion et passe à un raisonnement infinitesimal" (pág. 151 )

- Kleper utilizan la noción de infinitamente pequeño de la misma dimensión que aquello que trata de explicar.

- Cavalieri, aporta el indivisible, de una dimensión menor que lo que trata de explicar -la superficie está constituida por una infinidad de líneas, que son los indivisibles-.

Problemas más relevantes que se plantean:

- (Stevin) Cálculo del centro de gravedad de una figura plana, desarrollado en su obra "De la estática".

- (Kepler) Identifica una curva con una suma de segmentos infinitamente pequeños, un círculo con un conjunto de triángulos infinitamente pequeños. Enunció sus leyes en la obra " Astronomía

Nova". Se planteó el problema de la búsqueda de los valores máximos y mínimos de una magnitud variable, al estudiar el aforo de toneles (D'Hommbres, 1987, pág. 165)

- (Galileo) En su obra "Discursos que se refieren alas ciencias nuevas", recompone las magnitudes continuas por medio de los indivisibles (la línea está formada por puntos, la superficie por líneas,...).

- (Torricelli) En su obra "De la Dimension de la Parábola" utilizó indivisibles curvilíneos, cilíndricos cuando estudió un sólido hiperbólico infinito.

- (Roberval) Desarrolla el método cinemático de las tangentes al considerar todas las curvas como trayectorias engendradas por la composición de dos movimientos de los que se conocen las velocidades ("Tratado de los indivisibles")

- (Cavalieri) Compara las superficies planas confrontando las líneas en que se pueden dividir y los sólidos al confrontar las superficies en que se puede descomponer en su obra "Geometría por medio de los indivisibles".

<u>Métodos empleados en las argumentaciones</u>:

- Stevin y Kleper utilizan razonamientos de tipo pre-infinitesimal, aunque tienen una concepción metafisica del por qué de las cosas. Es decir, como entienden que la realidad es paradójica –según ponen de manifiesto las aporías de Zenón- intentan soslayar esa contradicción recurriendo a Dios y considerándolo como la coincidencia de las posturas opuestas, superación de toda contradicción.
- Cavalieri, al utilizar los indivisibles, elude los razonamientos infinitesimales, emplea la comparación entre los indivisibles de dos configuraciones lo que le conduce a las razones entre áreas o volúmenes.

- El marco en el que se mueven estos científicos es casi estrictamente geométrico, es decir, no se aportaron métodos algorítmicos generales de proceder.

<u>La concepción CLPRI como obstáculo epistemológico</u>

La concepción pre-infinitesimal resuelve ciertos problemas en los que se utilizan razonamientos infinitesimales y de indivisibles de carácter geométrico. Sin embargo, no pudo resolver problemas en los que era necesario haber usado los infinitamente pequeños numéricos.

Quedaron, por tanto, planteados problemas que posteriormente hubieron de resolverse por Fermat y, posteriormente, por Newton y Leibniz.

## AES (UN ACERCAMIENTO EPISTEMOLÓGICO-SEMIÓTICO)

Consideramos que la mayoría de las dificultades del aprendizaje de las Matemáticas son de naturaleza cultural y sistémica. Como señala Boero (2000): "En la educación matemática no podemos aislar el "aprendizaje" de la "enseñanza", ni el "aprendizaje de las Matemáticas" del desarrollo cultural e intelectual "situado" socialmente, incluyendo competencias lingüísticas, aspectos metacognitivos, actitudes racionales, etc."

(Además, estimamos que para poder mejorar la validez de los resultados en la investigación experimental en Didáctica de las Matemáticas se requieren equipos que incluyan investigadores con buen dominio matemático y epistemológico.

La línea de investigación que se propone tiene como base la teoría de las funciones semióticas (Godino, 2001), compartida por equipos de investigación de las Universidades de Jaén (Contreras), Barcelona (Font) y Santiago de Compostela (Cajaraville), y analiza el aprendizaje en cuanto a los procesos implicados en la construcción del significado por parte del alumno -mediante la interacción interpersonal a través de acciones comunicativas que se manifiestan por medio de distintos tipos de representaciones (lingüísticas, simbólicas, ...)- que forma parte de una institución escolar, considerando a la matemática como producción cultural realizada socialmente que ha evolucionado con el tiempo.

Al centramos en la matemática como una producción social, términos como "uso" y "contexto" adquieren una gran importancia y, como señala Font (1999) -siguiendo a Wittgenstein-: "nos conduce a observar que la adquisición de cualquier conocimiento matemático presupone la adquisición de unos significados lingüísticos que dependen del contexto social en que se utilicen" (p. 8) Es decir, se estima la semiótica como parte básica en los análisis didácticos, pero en su rama de la pragmática -relación existente entre los signos y los sujetos que los usan; es decir, es el estudio de las significaciones- Como señala Font (1999): "Al considerar la pragmática de los sistemas de representación, es decir, el significado en un contexto de uso, el conocimiento matemático pasa de ser una entidad con una existencia intemporal a ser un producto histórico. Eso hace que algunos de los diferentes contextos históricos que han dado sentido al concepto, pueden ser adaptados para utilizarlos en las clases." (p. 9)

Además, como actividad humana que es la matemática llega a crear sus propios objetos, pero una vez creados se independizan, creando sus propias leyes autónomas de crecimiento. Es por lo que es necesario considerar procesos de abstracción y generalización que permiten encapsular procesos en objetos que se pueden representar por notaciones ostensivas. Se estima que las funciones semióticas pueden ser una herramienta útil para realizar el análisis de los ostensivos en un contexto social y el
pensamiento.

Desde el punto de vista epistemológico de desarrollo histórico de los objetos matemáticos, consideramos que es necesario efectuar un análisis de los mismos donde se reinterpreten los obstáculos epistemológicos desde una perspectiva de la teoría de las funciones semióticas, como "conflictos semióticos" (Godino, 2001.)

**Objetivos de la investigación**

El objetivo general principal de la investigación que proponemos es avanzar en la identificación de los factores y fenómenos didácticos que influyen en la comprensión, por parte de los estudiantes, del concepto de límite, dentro del marco de la teoría de las funciones semióticas.

Además, dado el creciente el interés de las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas por analizar el proceso de construcción que desarrollan los alumnos cuando estudian un determinado sistema organizado de contenidos en una clase real, con toda su riqueza y complejidad, el estudio de los procesos cognitivos implícitos en la adquisición de determinados conceptos es el objetivo general secundario que puede ser útil para ayudar a explicar la variabilidad de las situaciones escolares reales.

Subordinados a estos dos objetivos generales, se han seleccionado cinco objetivos específicos tendentes a reorientar los estudios realizados hasta el presente:

I) Estudio epistemológico del desarrollo del objeto matemático límite, desde una perspectiva semiótica, como "conflicto semiótico", lo que permitirá efectuar aproximaciones con la teoría de los obstáculos epistemológicos.

En el anexo X aparece un estudio sobre las concepciones geométrica y pre-infinitesimal del límite y conflictos semióticos asociados, siguiendo los enfoques epistemológico y semiótico.

2) Estudio teórico sobre la utilización de las funciones semióticas como herramientas en el estudio del límite, lo cual permitirá unificar muchos fenómenos estudiados por la Didáctica del Análisis y que, en las diferentes investigaciones, se explican con distintas terminologías.

Mediante un análisis a priori se identificarán las componentes del contenido matemático considerado -límite- Es decir, se estudiarán las entidades primarias siguientes: ostensivas (representaciones materiales, notaciones), extensivas (situaciones-problema, tareas), actuativas ( operaciones, algoritmos, procedimientos, técnicas), intensivas (definiciones, proposiciones), validativas (argumentaciones y justificaciones de dicho contenido) -cuyo análisis centraremos en los aquellos libros de texto más utilizados en los centros objeto de la investigación, uno de Bachillerato y otro de Universidad- y sus eventuales correspondencias, buscando definir las posibles funciones semióticas.

El análisis se basará en descomponer en unidades relativas al conocimiento institucional. El criterio para definir las unidades de análisis será el cambio de elemento de significado. Es decir, se delimitarán los momentos en los que se ponen en juego alguna de las componentes referidas como ese cambio de elemento de significado.

En el anexo 2 aparece un estudio sobre el significado institucional -representado por medio de un libro e texto- del objeto límite por medio del análisis de los elementos semióticos implicados.

3) Estudiar la posibilidad de que las funciones semióticas sean el nexo de unión entre las investigaciones de tipo cognitivo realizadas en el campo del pensamiento matemático avanzado y las investigaciones de construcción social del conocimiento de tipo antropológico.

Se analizarán las posibles agrupaciones de las entidades primarias descritas. Estas agrupaciones darán lugar a nuevas entidades mixtas que coinciden con los términos de tecnología y teoría de la teoría antropológica. Así, una tecnología será una agrupación estructurada (sistema) de entidades primarias que describe y sistematiza un campo de problemas ( o una parte del mismo) y sus correspondientes técnicas de resolución.

En el anexo 3 se han analizado algunos de los elementos teóricos de la teoría antropológica desde los enfoques de la teoría de las funciones semióticas.

4) Aplicación del marco teórico al estudio de los significados institucionales -centrados en el contenido matemático de libros de texto más utilizados en los centros objeto de estudio- del concepto de límite.

Una vez elegidos aquellos manuales que son utilizados en los centros correspondientes, se analizarán las entidades primarias y funciones semióticas presentes en los mismos.

5) Aplicación del marco teórico al estudio de los significados personales de los alumnos pertenecientes a los centros participantes en la investigación.

Se elaborarán cuestionarios sobre la evaluación de los significados personales de los alumnos, en torno a los conceptos ya descritos, los cuales se aplicarán una vez finalizados los procesos de instrucción. El análisis de estos cuestionarios se efectuará según el marco teórico propuesto.

6) Extracción de criterios -a la luz de los resultados obtenidos por medio de los objetivos 4 y 5- para la elaboración de unidades didácticas de enseñanza sobre los conceptos referidos, a fin de facilitar a los profesores de Matemáticas de los niveles de Bachillerato y Universidad la superación -por parte de sus alumnos- de las dificultades y desfases entre los significados institucionales y personales, tratando de acercar los primeros a la realidad de los segundos.

## REFERENCIAS:

ARTIGUE, M. (1998), L 'évolution des problématiques en didactique de l' Analyse, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 18, n° 2, págs. 231-262.

ASIALA, M. y otros, (1996), A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education, en Jim kaput, Alan H. Schoenfeld y Dubinsky (Educación Secundaria.), Research in CollegiateMathematicsEducation. II, CBMATH 6.

BADILLO, E. y AZCÁRATE, C. (2001), Discusión sobre los instrumentos metodológicos y teóricos utilizados en el análisis de las concepciones de los profesores en ejercicio sobre la derivada, I Seminario de Investigación de Didáctica del Análisis Matemático de la SEIEM, Madrid.

BESSOT, D. y cols. (1999), Aux origines du calcul infinitésimal. Comprendre les mathématiques para les textes historiques. Cercle d'histoire des sciences. IREM de basse-Normandie. Ellipses.

BOERO, P. (2000), ¿Puede la investigación en Educación matemática ser útil para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en la escuela? ¿Cómo?, PME24, Japón.

CANTORAL, R. (1997), Pensamiento y lenguaje variacional, Cuadernos del Seminario de Investigación del Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa, México, Cinvestav-IPN.

CANTORAL, R. y F ARF ÁN, M.R. (1998), Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis, Epsilon, n° 42, págs. 353-369.

CONTRERAS, A. (2000), La enseñanza del Análisis Matemático en el Bachillerato y primer curso de Universidad. Una perspectiva desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión, IV Simposio de la SEIEM, Huelva.

CONTRERAS, A. (2001), La investigación en la enseñanza del Análisis Matemático. Perspectivas actuales, I Seminario de Investigación de Didáctica del Análisis Matemático de la SEIEM, Madrid.

CORNU, B. (1983), Apprentissage de la notion de limite, These de doctorat de troisieme cycle de Mathématiques pures, Université de Grenoble.

D'HOMBRES y otros. (1987), Mathemátiques auxfil des á'ges, IREM Groupe Epistémologie et Histoire, París, Gauthier- Villars.

DUBINSKY, E. (1996), Aplicación a la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria, Educación Matemática, 8, 3, pp. 25-41.

ESPINOZA, L. (1998), Organizaciones Matemáticas y Didácticas en torno al objeto limite de una función, Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona.

FONSECA, C, y GASCÓN, J. (2000), Reconstrucción de las Organizaciones Matemáticas en las Instituciones Didácticas, XIV Jornadas del SIIDM, Cangas do Morrazo (Pontevedra)

FONT, V. (1999), Procediments per obtenir expressions simbóliques a partir de gràfiques aplicacions a les derivades, Tesis Doctoral, Universitat de Barcelona.

GASCÓN, J. (1993), Desarrollo del conocimiento matemático y análisi didáctico: Del patrón del análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico, Recherches en Didactiques des Mathématiques, vol. 13, no3, págs. 295-332.

GASCÓN, J. (2000), Los objetos del Análisis Matemático en los programas cognitivo y epistemológico, Seminario de Investigación impartido en el Departamento de Didáctica de las Ciencias de la Universidad de Jaén, pp. 1-60.

GODINO, J.D. (1999), Análisis epistémico, semiótico t didáctico de procesos de instrucción matemática, III Simposio de la SEIEM, Valladolid.

GODINO, J.D. (2001), Confrontación de herramientas teóricas para el análisis en Didáctica de las Matemáticas, XVI Jornadas del slmM, Huesca.

GONZÁLEZ, P.M. (1992), Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII, Alianza Editorial, Madrid.

HAUCHART, CH. y ROUCHE, N. (1992), L 'enseignement de L'analyse aux debutants, Academia-Erasme.

KLINE, M. (1994, El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, Madrid: Alianza Universidad.

LEGRAND, M. (1997), La problématique des situations fondamentales et l'approach anthropologique, ReperesIREM, n° 27, pp. 81-125.

LLINARES, S. (2001),

RADFORD, L. (1997), On Psychology, Historical, and the Teaching of Mathematics. Towards a Socio-Cultural History ofMathematics, Por the Learning of Mathematics, 17, 1, págs, 26-33.

SÁNCHEZ, C. (1997), Estudio estadístico sobre le proceso de enseñanza-aprendizaje de la noción de límite de una función, Tesis Doctoral, Universidad de Granada.

SÁNCHEZ, C. y CONTRERAS, A. (1998), Análisis de manuales a través del tratamiento didáctico dado al concepto de límite de una función: Una perspectiva desde los obstáculos, Enseñanza de las Ciencias, 17, 1, págs. 73-84.

SANCHEZ-MATAMOROS, G; LLINARES, S. y GAVILAN, J.M. (2001), Análisis de las concepciones de los alumnos de Bachillerato sobre el concepto de derivada, I Seminario de Investigación de Didáctica del Análisis Matemático de la SEIEM, Madrid.

SIERPINSKA, A. ( 1991 ), Some remarks on undertanding in mathematics, Versión revisada del trabajo presentado al CanadianMathematicsEducation Study Group, Vancouver.

TALL, D. (1991), Intuition and Rigour: The role ofvisualization in the Calculus.

TALL, D. y VINNER, S. (1981), Concept image and concept definition in Mathematics whit particular reference to limits and continuity, Educational Studies in Mathematics, 12, págs. 151-169.

# ANEXO l

## La concepción CLG como conflicto semiótico

Cuando se considera la concepción geométrica del límite en el marco de la teoría de las funciones semióticas, su interpretación como obstáculo epistemológico adquiere una nueva dimensión según el significado del objeto matemático de que se trate. Ahora bien, ese significado se concibe como el sistema de prácticas ligadas a determinados campos de problemas, donde se diferencian los elementos semióticos extensivos, ostensivos, actuativos, intensivos y validativos. El obstáculo epistemológico será denominado conflicto semiótico cuando alguno de los elementos semióticos entre en contradicción con el significado institucional de referencia.

La idea de límite en la civilización griega estuvo íntimamente ligada al descubrimiento de las cantidades inconmensurables, es decir, de la magnitud irracional. Todas las soluciones aportadas por los griegos a este problema -axioma de continuidad, doble método de demostración por reducción al absurdo y método de exhausción- estuvieron encaminados a proporcionar medios para camuflar de algún modo la consideración del infinito, aportando procedimientos que fueron la traducción geométrica del paso al límite.

Un campo de problemas en la Matemática helena antigüedad: trisección del ángulo, duplicación del cubo y cuadratura del círculo. Basándose en este campo, como ejemplos de la concepción como conflicto semiótico, estudiaremos dos casos: el primero -asociado al problema de la trisección del ángulo- mostrará dicho conflicto a través del elemento validativo; el segundo -ligado al problema de la cuadratura del círculo- permitirá aflorar el conflicto semiótico por medio del elemento intencional.

<u>La trisección del ángulo</u> (Dado un ángulo cualquiera dividirlo en tres partes iguales usando la regla y el compás)

Los elementos de significado institucional que podemos considerar son los siguientes (ha de entenderse un análisis global, no pormenorizado, ya que nuestro objetivo prioritario es mostrar la noción de obstáculo epistemológico como conflicto semiótico ):

Elemento extensivo: Dividir un ángulo cualquiera en tres partes iguales.

Elementos ostensivos: La regla y el compás y los dibujos asociados a la resolución del problema.

Elementos actuativos: Utilización de la concoide recta de Nicomedes y de la regla y el compás -según sus reglas- en la obtención de la trisección.

Elementos intensivos: Las reglas de uso de la regla y el compás: I) La regla sin graduación, o empleada sólo para trazar líneas rectas a través de dos puntos dados; 2) El compás de "brazos caídos", que sólo traza círculos -no para trasladar segmentos o medir[2]-. Algunos de los teoremas propios de la Geometría de Euclides.

~ Elementos validativos: Por medio de los dibujos que aparecen en el proceso de resolución. Los razonamientos geométricos por deducción.

El problema de la trisección del ángulo (Cámara, p.  )

Primeramente veamos la curva "concoide recta de Nicomedes" (figura 1):

Figura 1

Recta fija: AH; Polo P; Eje polar PX; $\delta$= d(P ,H)

Parámetro: a= AB = HD ; Radio polar: $\rho$ = distancia de P a la recta

[2] Aunque se puede demostrar que aplicando las condiciones 1 y 2 se puede llegar a trasladar segmentos.

Argumento (variable): ω = ángulo XPB

Ecuación: $\cos\omega = \dfrac{\delta}{\rho} \Rightarrow \rho = \dfrac{\delta}{\cos\omega}$ (concoide externa)

Veamos cómo resuelve el problema de la trisección de un ángulo BOA cualquiera:

Se construye la concoide de polo O, recta fija AB y parámetro 2.0B (figura 2)

Figura 2

La recta BB' corta a la concoide en B'. Se tiene CB' = 2.OB y como el Δ CBB' es rectángulo y su hipotenusa es CB' = 2.OB, se tendrá que: CD = DB' = DB = OB; los triángulos OBD y BB'D son isósceles y los ángulos BOD = BDO = 2BB'D = 2B'OA; es decir, BOA = 3COA.

Conflicto semiótico:

Se inicia el estudio del problema de la trisección del ángulo con la regla y el compás y se valida ayudándose de la concoide recta de Nicomedes, que no es construible con regla y compás. Se trata, por tanto, de un obstáculo epistemológico al basarse utilizar elementos validativos no acordes con los elementos intensivos en que han de basarse. Es decir, surge un conflicto semiótico" entre elementos o herramientas semióticas que cumple detenninadas condiciones: 1) La curva concoide recta de Nicomedes es un objeto matemático; 2) Da respuesta a problemas de construcción donde las hipótesis de construcción no impongan las restricciones a la regla y el compás; 3) No resuelve aquellos problemas donde se impongan las condiciones de construcción por medio de la regla y el compás; 4) La superación de este conflicto supuso la utilización de recursos de tipo infinitesimal -tal es el caso de Roberval y Fermat, por ejemplo-; 5) Se resistió a la modificación puesto que hubo que esperar al siglo XVII para comenzar a superarse -además, este tipo de validaciones se usaron también para otros problemas como el de la duplicación del cubo a través de la cisoide recta de

Dioclés; 6) Para tratar de superar las aporías de Zenón[3], ligadas a lo que se denomina el "horror al infinito", se inventaron este tipo de curvas distintas a las cónicas. Es decir, en cierto modo, se buscó una ruptura epistemológica con el modelo atomista de Demócrito; 7) Este tipo de conflicto semiótico, junto al que se expone después, supuso una bifurcación en el desarrollo de las Matemáticas que se hizo explícito en dos desarrollos de las técnicas -una por los indivisibles y otra por los infinitésimos- aunque hubo que esperar al siglo XVII.

La cuadratura del círculo (Arquímedes, 287-212 a. C): "La medida del círculo"

Proposición 1 (Bessot y cols., pp. 33-34)

(Todo círculo es equivalente a un triángulo rectágulo en el que uno de los lados del ángulo recto es igual al radio del círculo y la base, es decir el otro lado del ángulo recto, es igual al perímetro del círculo -se dará una demostración (Bessot y cols., pp. 33-34) muy próxima ala que dio Arquímedes en su libro de "La medida del círculo"- )

Los elementos de signficado indtitucional que podemos considerar son los siguientes:

Elemento extensivo: Cuadrar un círculo de radio r .

Elementos ostensivos: La regla y el compás y los dibujos asociados a la demostración.

Elementos actuativos: Como técnicas para la resolución del problema se distinguen: El trazado de figuras auxiliares, el uso del método de exhausción y la utilización del doble razonamiento por reducción absurdo.

Elementos intensivos: Las reglas restrictivas del uso de la regla y el compás; el método de demostración de exhausción; el método de demostración por reducción al absurdo; algunos de los teoremas de los Elementos.

Elementos validativos: Se valida por medio de los dibujos; por deducciones de Geometría elemental; por la exhausción; por la doble reducción al absurdo.

[3] Zenón había hecho ver la contradicción del uso del modelo discreto numérico en la explicación de la continuidad del espacio. Se ha comentado esta cuestión en el apartado "hechos más relevantes de los que emergió la concepción".

Que el círculo AB ΓΔ sea al triángulo E como indica la hipótesis; yo digo que es equivalente (figuras 3 y 4).

Figura 3

Figura 4

Que el círculo sea en efecto, si es posible, más grande. Inscribámosle el cuadrado AΓ, y dividimos en dos partes iguales los arcos ( admitiendo como cuerdas los lados del cuadrado ); que los segmentos del círculo tienen al final ( si se repiten las operaciones de división en dos partes iguales) una suma inferior a la diferencia entre el área del círculo y del triángulo. La figura rectilínea será, por tanto, aún mayor que el triángulo. Tomemos el centro N y abatimos la perpendicular NS, que será inferior al (más pequeño) lado del triángulo. Pero el perímetro de la figura rectilínea es a su vez más pequeña que el lado restante, desde el momento que es más pequeño que el perímetro del círculo. La figura rectilínea es por consiguiente más pequeña que el triángulo E, lo que es absurdo.

Que el círculo sea, por otra parte, más pequeño, si es posible, que el triángulo E; le circunscribirnos un cuadrado, dividimos los arcos en dos partes iguales y trazamos tangentes por los puntos (de división). El ángulo OAP es pues recto; OP es por consiguiente superior a MP , desde el momento que PM es igual a P A, y el triángulo PO II es mayor que la mitad de la figura OZAM. Quedan pues segmentos tales como II ZA, cuya suma sea inferior a la diferencia entre el área del triángulo E y el círculo AB r 1\ .La figura rectilínea circunscrita es, por consiguiente, aún inferior al triángulo E, lo que es absurdo; ella es, en efecto, mayor, desde el momento que NA es igual a la altura del triángulo, y que el perímetro es mayor que la base del triángulo. Se sigue que el círculo es equivalente al triángulo.

Conflicto semiótico:

El estudio se apoya en la exhausción y en el método por reducción al absurdo. Es decir, los griegos aportaron caminos de demostración que, esencialmente, buscaban dar explicaciones geométricas, que camuflaran el paso al límite, o sea, el infinito. Es decir, se trata de un conflicto semiótico al utilizarse unos elementos intensivos que suponen un número finito de pasos y que, por tanto, eluden el paso al infinito. Se cumplen determinadas condiciones: 1) Se aporta conocimiento matemático al realizarse una aproximación al área del círculo; 2) Se dan respuesta a numerosos problemas ¡¡¡ aquí
los problemas citados de Arquímedes ¡¡¡; 3) Obviamente no se resuelve el problema de la cuadratura del círculo hasta que se conocieron los resultados de Lindemann sobre la trascendencia de *n* a finales del siglo XIX; 4) Los intentos de superación de este conflicto dieron origen a nuevos conocimientos matemáticos. Sin ir más lejos en el mismo problema Arnaud, en 1667, utilizó el método de los indivisibles; 5) Fue un conocimiento resistente al cambio que únicamente comenzó a superarse en el siglo XVII; 6) Los intentos de superación de las aporías de Zenon condujeron a Arquímedes a refinar el método de exhausción, hasta el punto de utilizar el método mecánico en sus demostraciones, como es el caso de la cuadratura de la parábola, posteriormente utilizado por Roberval en el siglo XVII aunque con elementos actuativos pre-infinitesimales; 7) Supuso una bifurcación en desarrollo de las Matemáticas, tal y como se ha descrito en el caso anterior .

La cuadratura del círculo (Arnauld): "Les nouveaux elemens de Geometrie" (1667)

Del libro decimoquinto

Teorema quinto (Bessot, 1999 -pp. 85-87)

El círculo es igual al triángulo rectángulo, que tiene por lados de su ángulo recto el radio del círculo, y una línea igual a la circunferencia del círculo.

Sea el centro del círculo *d,* el radio *db,* la tangente *bc,* igual a la circunferencia, ya la hipotenusa *dc.*

Si se consideran todos los puntos de radio de las circunferencias concéntricas al círculo, llenarán todo el círculo, y serán paralelas entre ellas, en la manera que circunferencias pueden serlo, y cortadas perpendicularmente por el radio (figura 6).

Figura 5

Si se consideran también estos mismos puntos del radio por los que pasan circunferencias paralelas a *bc,* hasta *dc,* esas paralelas llenarán el triángulo. y así la suma de estas circunferencias y de estas paralelas será igual, estando determinadas una y otra por los puntos del mismo radio, estando claro que no se podría trazar una circunferencia por ningún punto, y que no se podría tampoco trazar una paralela a *bc* por ese mismo punto, y al contrario.

Ahora bien, la circunferencia y la paralela trazadas por el mismo punto son iguales, como puede verse examinando aquella que se desee: por ejemplo la del punto *f.* Pues:

$$\frac{bd}{df} = \frac{circunf(b)}{circunf(f)}$$

y:

$$\frac{bd}{df} = \frac{bc}{fg}$$

Por tanto,

$$\frac{circunf(b)}{circunf(f)} = \frac{bc}{fg}$$

Alternando:

$$\frac{circunf(b)}{bc} = \frac{circunf(f)}{fg}$$

Ahora bien por hipótesis, la circunferencia *b,* que es la del círculo, es igual alIado del triángulo *bc.* Por tanto la circunferencia que pasa por el punto f, es igual a *fg,* la cual es paralela a *bc.*

Conflicto semiótico:

Se puede observar una demostración que seduce por su elegancia y es mucho más simple que las efectuadas por los griegos con el método de exhausción, aunque con rigor muy inferior. Además de no dar respuesta a los problemas infinitesimales, se trata de un método geométrico que maneja infinitamente pequeños heterogéneos pero que también camufla los problemas del infinito. Se considera que esta concepción de los indivisibles es un conflicto semiótico en el que los intensivos -que no abordan el tratamiento infinitesimal- y validativos -ya que la demostración sólo es correcta si se admite la constancia de proporcionalidad de la circunferencia y del radio, pero esto nos conduce a la constante de proporcionalidad ( circunferencia)/diámetro que únicamente puede demostrarse con el método por reducción al absurdo, cosa que Arnauld no hace- Se cumplen las condiciones siguientes: 1) Es un conocimiento matemático al haber dado una nueva demostración a un problema -el de la cuadratura del círculo-; 2) Se resuelven numerosos problemas de Cálculo, preparando el terreno al Cálculo Infinitesimal; 3) Tampoco resuelve el problema de la cuadratura del círculo; 4) Al intentar superar el conflicto, los matemáticos descubrieron nuevos conocimientos -caso de Roberval, quien manejó infinitamente pequeños homogéneos pero a veces como si fueran los heterogéneos indivisibles, que tuvo una concepción intermedia entre ambas concepciones-; 5) Fue una concepción resistente al cambio, como lo muestra los trabajos de Cavalieri, Torricelli, Arnauld...; 6) Al intentar superar los métodos de los indivisibles hubo una ruptura epistemológica con estos métodos de demostración que condujeron a los planteamientos de Fermat y, posteriormente, Newton y Leibniz; 7) Supuso una bifurcación posterior, con la aplicación de métodos algebraicos al Cálculo -adigualdad de Fermat- y de fluxiones por Newton.

## ANEXO 2

Análisis de los elementos semióticos de las pp. 184-187 del libro de Bruño de 2° de Bachillerato.

Elementos extensivos:

$E_1$: Límite por la derecha en el contexto numérico (tablas de valores), geométrico (gráficas) y algebraico (funciones potenciales y por intervalos)

$E_2$: Límite por la izquierda en el contexto numérico (tablas de valores), geométrico (gráficas) y algebraico (funciones potenciales y por intervalos)

$E_3$: Límite en el contexto numérico (tablas de valores), geométrico (gráficas) y algebraico (funciones lineales, potenciales y por intervalos)

Elementos ostensivos:

$O_1$: Representaciones numéricas por medio de tablas de valores.

$O_2$: Representaciones geométricas por medio de gráficas de rectas, parábolas y funciones abstractas.

$O_3$: Representaciones verbales en las definiciones y argumentaciones.

$O_4$: Representaciones algebraicas mediante las expresiones analíticas de las funciones

Elementos actuativos:

$A_1$: Por aproximación usando las tablas de valores.

$A_2$: Por aproximación usando la representación gráfica,

Elementos intensivos:

$I_1$: Definición intuitiva de límite por la derecha

$I_2$: Definición intuitiva de límite por la izquierda. 13: Definición intuitiva de límite de f(x).

Elementos validativos:

$V_1$: De tipo intuitivo los limites laterales.

$V_2$: Por síntesis la definición de límite de una función.

Conflictos semióticos:

$CS_1$: Elementos validativos no correctos.

$CS_2$: Elementos intensivos no correctos.