Reconstrucción escolar de la numeración. De la representación de los números a la simplificación de los algoritmos de cálculo.

Tomás A. Sierra[1] y Josep Gascón[2]

1. Reconstrucción escolar de una organización matemática cualquiera.

Consideremos la siguiente cuestión matemática: *¿Cómo expresar el cardinal de una colección finita (es decir, el número natural) mediante una representación escrita que sea un instrumento útil para el desarrollo de la aritmética elemental?* Esta cuestión puede ser considerada como una simple demanda de información y, entonces, puede zanjarse mediante una respuesta del tipo: *Para calcular, la mejor manera de expresar los números naturales es utilizando un sistema de numeración posicional*. Situémonos ahora en el caso de alguien que desconoce la respuesta y necesita realmente llevar a cabo una actividad aritmética. Si suponemos además que no dispone de ninguna técnica para expresar los números naturales de una forma sencilla y eficaz, la cuestión se convierte en *problemática* y, al intentar resolverla, genera un tipo de *tareas no rutinarias* que designaremos con la letra **T**, cuya resolución requerirá *elaborar un conjunto de técnicas matemáticas* τ, que, a su vez, deberán ser descritas, explicadas y justificadas mediante un discurso matemático que denominamos tecnológico-teórico y que designamos con la notación $[\theta/\Theta]$. Dicho en otras palabras, si consideramos la cuestión anterior *en un sentido fuerte* de "cuestión problemática que debe ser estudiada" y, pues, que no puede responderse dando una simple información, entonces se requiere una *respuesta en el sentido fuerte*, basada en la construcción de toda una *organización matemática,* es decir un conjunto de tipos de tareas o problemas, de técnicas o procedimientos para resolver estos problemas y de definiciones, propiedades y teoremas que permitan describir y justificar el trabajo realizado. Utilizaremos la notación $\mathbf{O} = [\mathbf{T} / \tau / \theta / \Theta]$ para designar una organización matemática generada por las tareas del tipo **T** (Chevallard, 1999). El objetivo de este trabajo es mostrar cómo la evolución de las respuestas que se han podido aportar a la cuestión arriba mencionada se pueden expresar en términos de la ampliación progresiva de organizaciones matemáticas. Y, lo

[1] Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Facultad de Educación, Universidad Complutense de Madrid, C/Rector Royo Villanova, s/n , 28040 (Madrid) Spain; Tfno: 34913946250; Fax 34913946157; E-mail: tomass@edu.ucm.es

[2] Departamento de Matemáticas, Universitat Autònoma de Barcelona, Edificio C, 08193 Bellaterra (Barcelona) Spain; Fax: 34935812790; E-Mail: gascon@mat.uab.es

que es más importante, veremos que esta ampliación permite poner de manifiesto las “razones de ser” de nuestro sistema de numeración posicional.

En las instituciones escolares, sin embargo, las cuestiones matemáticas no se presentan ni como cuestiones que puedan zanjarse con una simple información, ni como cuestiones vivas que requieran la *construcción primigenia o inédita* de toda una organización matemática. Normalmente, estudiar una cuestión matemática en una institución de enseñanza **I** (incluyendo las de nivel universitario) se reduce a *estudiar la organización matemática que otra institución* **I’** *propone como respuesta - en el sentido fuerte - a esta cuestión*. Pero, para llevar a cabo el estudio de la organización construida en **I’**, ésta debe ser *reconstruida* en **I** mediante una reconstrucción escolar que es “artificial” en el sentido de no primigenia, esto es, la organización debe ser *transportada* de **I’** a **I**. Es lo que llamamos el proceso de *transposición didáctica* de una organización matemática (Chevallard 1985 y 1991).

Surge así un gran tipo de *problemas didácticos* del que nuestro problema concreto no es más que un caso particular:

Dada una cuestión matemática concreta $\boldsymbol{q}$ que queremos que sea estudiada en una institución docente **I**, ¿cómo diseñar y gestionar el proceso de reconstrucción (que es un proceso de estudio) en **I** de la organización matemática $\mathbf{O} = [\mathbf{T}/\ \tau/\ \theta/\ \Theta]$ que se da como respuesta a dicha cuestión matemática en otra institución **I’**?

En nuestro problema didáctico concreto, los parámetros $\boldsymbol{q}$, **I**, **O** y **I’** toman los siguientes valores:

$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_{\mathbf{Num}}$ = “*¿Cómo expresar los números naturales mediante una representación escrita que sea un instrumento útil para el desarrollo de la aritmética elemental*?”

I = ID = Institución docente.

$\mathbf{O} = [\mathbf{T}/\ \tau/\ \theta/\ \Theta] = \mathbf{O}_{\mathbf{Num}}$ = Organización matemática en torno al sistema de numeración posicional (por ejemplo de base 10).

I’ = IM = Institución Matemática sabia.

2. Reconstrucción de la numeración en una institución docente.

Para empezar a estudiar nuestra cuestión, hay que clarificar qué es “un instrumento útil para el desarrollo de la aritmética elemental”. Podemos afirmar, siguiendo a Ermel

(1977), que para que una representación escrita de los números naturales sea eficaz debe permitir, como mínimo:

(A) Que la escritura de los números pueda hacerse de manera unívoca y cómoda. Para ello, es necesario que se utilicen pocos símbolos, de modo que sea fácil memorizarlos y que la longitud de las escrituras no haga difícil su lectura.

(B) Que la comparación de los números a partir de sus escrituras sea lo más fácil posible.

(C) Que la realización de los cálculos de las distintas operaciones sea rápida, sencilla y fiable.

Parece razonable pensar que las cuestiones problemáticas y las tareas asociadas que acabarán siendo las "razones de ser" de $\mathbf{O}_{\mathbf{Num}}$ en **ID** deberán extraerse de estas condiciones. Pero en este caso –como en otros muchos– los fenómenos de transposición han dado como resultado que algunas de las cuestiones problemáticas que dichas condiciones plantean[3] hayan desaparecido de la actividad matemática que se lleva a cabo en **ID**. Para que formen parte de las razones de ser de la reconstrucción "artificial" o "escolar" de $\mathbf{O}_{\mathbf{Num}}$ en **ID**, dichas tareas deberán aparecer a lo largo del proceso de estudio y, para que ello sea posible, habremos de hacer vivir en **ID** determinadas organizaciones matemáticas intermedias en las que tengan cabida dichas tareas.

Partiremos de un modelo del desarrollo (no necesariamente histórico) de las cuestiones problemáticas que queremos que sean las generadoras del proceso de estudio que nos lleve a la reconstrucción de $\mathbf{O}_{\mathbf{Num}}$ en **ID**. En nuestro caso, podemos esquematizar dicha evolución guiándonos por las categorías posibles de técnicas de representación escrita u oral de los números que se denominan *sistemas de numeración* y que convergen en el sistema de numeración *posicional decimal*. Tomaremos como criterio para considerar que dos categorías de sistemas de numeración son diferentes el que hagan aparecer (o desaparecer) determinadas cuestiones problemáticas y las tareas matemáticas correspondientes (y no el criterio histórico).

Consideraremos *tres grandes categorías de sistemas de numeración* que caracterizaremos matemáticamente como tales sistemas y que sólo posteriormente presentaremos como técnicas útiles para contestar a ciertas cuestiones problemáticas y

[3] Así, por ejemplo, la cuestión "¿Cómo pueden representarse simbólicamente los números naturales para que la comparación a partir de sus escrituras sea lo más fácil posible?" ha desaparecido de la actividad matemática universitaria.

para llevar a cabo tareas matemáticas que generarán, respectivamente, varias organizaciones matemáticas diferentes[4].

(1) Sistemas de numeración de tipo I ("aditivos"). En este primer tipo de sistemas las cifras son enteramente libres ya que la posición que ocupan no juega un papel relevante. Se trata de sistemas de numeración que, en principio, sólo disponen de cifras para 1, n, n^2, n^3, n^4, n^5, ... y en un segundo momento disponen de cifras para 1, a, n, an, n^2, an^2, n^3, an^3, n^4,... donde n es la *base del sistema de numeración*, y $a < n$ es un divisor privilegiado de n que recibe el nombre de *base auxiliar del sistema*. Dado que los sistemas de numeración "aditivos" sólo disponen de símbolos para representar las distintas potencias de la base y algunos de sus múltiplos, no permiten escribir cualquier número natural con un número de símbolos fijado de antemano. Además, a medida que aumentan los números, se necesitan símbolos nuevos para representarlos. La operación que corresponde a la yuxtaposición de los símbolos es la adición. Ejemplos de sistemas de numeración *aditivos* son el *sistema egipcio* y el *sistema romano*.

(2) Sistemas de numeración de tipo II ("híbridos"). Se trata de sistemas en los que las cifras no son más que parcialmente libres ya que su posición tiene cierta importancia. Estos sistemas utilizan dos tipos de símbolos: los que representan las distintas potencias de la base n, es decir, n^0, n, n^2, n^3, n^4, ... y los que representan a los multiplicadores de dichas potencias, o sea, para 2, 3, ..., $(n - 1)$, que juegan el papel de coeficientes[5] y siempre se colocan encima o delante de la potencia a la que multiplican (es aquí donde la posición es importante). En los sistemas "híbridos" cada número se representa como el valor numérico de un polinomio cuya indeterminada es la base n del sistema. Las operaciones que corresponden a la yuxtaposición de las cifras son la adición y la multiplicación, pero todavía no es posible escribir cualquier número natural con un número finito y predeterminado de símbolos. Ejemplos de sistemas de numeración "híbridos" son el *sistema chino* y nuestro *sistema decimal oral*.

(3) Sistemas de numeración de tipo III ("de posición"). En este tipo de sistemas las cifras están encadenadas, es decir, su posición juega un papel esencial. Se trata de

---

[4] Bourbaki (1969), considera que la técnica más frecuente de representación de los números son los sistemas de numeración tales que descomponen cada número natural en una suma de "unidades sucesivas" b_1, b_2, b_3, ... , b_n, ... cada una de las cuales es un múltiplo entero de la anterior, y denomina "*base*" de estos sistemas de numeración al cociente $b = b_n / b_{n-1}$ cuando es independiente de n. Aquí utilizaremos este tipo de sistemas y otros que no cumplen esta regla. Por ello, nos basaremos en la clasificación jerarquizada de los sistemas de numeración que propone Guitel (1975).

[5] El número 1 no se utiliza como multiplicador ya que es innecesario.

sistemas de numeración que sólo disponen de cifras para representar los $n-1$ primeros números naturales: 1, 2, 3, ..., $(n-1)$ que jugarán el papel de coeficientes de las potencias de la base n. Cada una de estas potencias n^i está representada por la posición i-ésima que ocupa un coeficiente dentro del grupo de símbolos que representa al número. Así, para indicar el número k (donde k varía entre 1 y n–1) de unidades de cada n^i se utiliza un símbolo que sólo depende de k y para distinguir entre k unidades de n^i y k unidades de n^j se hace que el símbolo correspondiente ocupe la *posición i* (o la *posición j*) en la sucesión de "trozos" que representan el número en cuestión. Las operaciones que corresponden a la yuxtaposición de las cifras son la adición y la multiplicación. Los sistemas "de posición" permiten escribir cualquier número natural utilizando únicamente un número finito y determinado previamente de cifras.

Entre los sistemas de numeración de posición distinguiremos dos subtipos:

- Los sistemas en los que un divisor a de la base n juega un papel privilegiado, y en los que sólo se dispone de símbolos para representar los números naturales 1 y a. Estos sistemas "de posición primitivos", como el *maya* y el *babilónico*, presentan ambigüedades ya que además, en un primer momento, tampoco utilizan el *cero* como cifra, es decir, no utilizan ningún símbolo para indicar que faltan las unidades de un cierto orden.
- Los sistemas de numeración "posicionales completos" que utilizamos actualmente como, por ejemplo, nuestro *sistema de numeración decimal*. Éstos aparecen cuando los anteriores *se completan con el cero* y con un símbolo para representar cada uno de los números más pequeños que la base n.

3. Sucesión de organizaciones o praxeologías matemáticas que guían el proceso de estudio de $\mathbf{O_{Num}}$ en ID.

3.1. La organización matemática inicial N_0 en torno a un sistema "aditivo" rudimentario.

El tipo de tareas que genera $\mathbf{N_0}$ está asociado a determinadas cuestiones problemáticas muy elementales que pueden describirse como sigue:

$\mathbf{T_0}$: **(1)**"¿Cómo expresar los números naturales que necesitamos mediante símbolos de manera que no haya ninguna ambigüedad?" **(2)**"¿Cómo expresar los números naturales que necesitamos utilizando únicamente una pequeña cantidad de símbolos diferentes fijados de antemano?” **(3)**“¿Cómo expresar cada número natural utilizando únicamente una pequeña cantidad de símbolos (diferentes o no)?”

A fin de producir una *técnica inicial* para abordar este tipo de tareas, se podría pensar en las dos técnicas extremas de representación de los números: utilizar un único símbolo y repetirlo tantas veces como indica el número que queramos representar o bien utilizar un símbolo diferente para cada número natural. La primera permite resolver **(1)** y **(2)** pero no **(3)** y la segunda permite resolver **(1)** y **(3)** pero no **(2).**

Podemos entonces empezar a considerar técnicas intermedias que sean más útiles y más eficaces. Si consideramos el uso del palote como único símbolo, el número 17 se representa mediante “IIIIIIIIIIIIIIIII”. Esta técnica es la primera utilizada por los hombres para describir los números, realizando muescas en un cayado o en una piedra, pero presenta fuertes limitaciones y resulta ineficaz cuando queremos describir y leer números de mayor tamaño. Por ello, aparece una mejora de dicha técnica que consiste en realizar *agrupamientos* de un tipo fijo. Así, por ejemplo, para representar el número 17 haciendo grupos de 5, la aplicación de esta técnica proporciona la representación:

IIIII IIIII IIIII II

Si creamos un nuevo símbolo, por ejemplo “V”, para representar al número cinco, se tiene la nueva representación “VVV II” que es más sencilla y que, por tanto, constituye una nueva mejora de la técnica. Denominaremos τ_0 a esta técnica primitiva de *un único tipo de agrupamiento* que utiliza un símbolo para designar al grupo que siempre está formado por el mismo número de objetos (en nuestro ejemplo cada grupo consta de cinco objetos) y la consideraremos como la técnica básica o *técnica inicial*. Esta técnica utiliza sólo la operación de adición y es muy utilizada en Estadística Descriptiva elemental para realizar recuentos de frecuencias absolutas y, también, en los recuentos de las votaciones.

La técnica τ_0 presenta muchas limitaciones incluso antes de plantearse la cuestión de las operaciones aritméticas. Además de no dar una respuesta satisfactoria a la tarea **(3),** *tampoco permite la comparación sencilla de dos números* tarea que, como hemos dicho, es básica para una buena representación simbólica de éstos. De hecho, si tenemos dos números representados mediante la técnica τ_0 y queremos compararlos utilizando sus expresiones escritas, no tendremos más remedio que acabar comparando colecciones mediante la técnica, un poco pedestre, de la *correspondencia término a término*.

Podríamos decir, en resumen, que la técnica inicial de representación de los números naturales, τ_0, sólo sirve para describir números pequeños y aporta una única novedad respecto a la representación "lineal" de los números (colección uniforme sin ningún tipo de agrupamientos): el empleo de *un único tipo de agrupamiento*, que ayuda a leer y describirlos mejor.

3.2. La organización o praxeología matemática N_1 en torno a un sistema "aditivo".

Consideramos la técnica de numeración τ_1 que utiliza agrupamientos de forma regular. Esto significa que τ_1 utiliza sistemáticamente agrupamientos de primer orden y agrupamientos de agrupamientos de primer orden (agrupamientos de segundo orden) y así sucesivamente. Esta técnica de numeración τ_1 puede ser considerada como una evolución de la técnica inicial τ_0 y genera una nueva *organización*, $\mathbf{N_1}$, desarrollada en torno a un sistema de numeración de tipo I ("aditivo") y cuya principal virtud consiste en que permite representar una gran cantidad de números naturales de una forma relativamente abreviada y sistemática. El tipo de tareas que genera $\mathbf{N_1}$ está asociado a las cuestiones problemáticas descritas para $\mathbf{N_0}$ y, en especial, a aquellas cuestiones problemáticas que no encontraban en $\mathbf{N_0}$ una respuesta (solución) adecuada, tales como las cuestiones **(3)** y **(4).** En esta nueva organización pueden plantearse nuevas cuestiones, como **(5)** y **(6)** aunque, como veremos, éstas tampoco pueden resolverse plenamente en $\mathbf{N_1}$:

$\mathbf{T_1}$: **(1)**"¿Cómo expresar los números naturales que necesitamos mediante símbolos de manera que no haya ninguna ambigüedad?" **(2)**"¿Cómo expresar los números naturales que necesitamos utilizando únicamente una pequeña cantidad de símbolos diferentes fijados de antemano?" **(3)**"¿Cómo expresar cada número natural utilizando únicamente una pequeña cantidad de símbolos (diferentes o no)?" **(4)** "¿Cómo comparar dos números mediante sus expresiones escritas?" **(5)** "¿Cómo representar los números naturales de manera que se simplifiquen los algoritmos de las operaciones suma y resta?" **(6)** "¿Y para que se simplifique el algoritmo de la operación producto?"

La nueva técnica τ_1 utiliza unos pocos símbolos para designar "unidades sucesivas" que se corresponden con las sucesivas potencias de la base. Aparece así un sistema de numeración como, por ejemplo, el *egipcio* cuyos símbolos[6] I, X, C, M, N, R y H designan unidades sucesivas, cada una de las cuales es diez veces la anterior (aquí los símbolos representan a cada una de las 7 primeras potencias de la base, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5 y 10^6). Con este sistema se resuelven las tareas **(1)** y **(2)** de manera más económica y sencilla que con la técnica inicial, pero la tarea **(3)** sigue presentando dificultades ya que, por ejemplo, para representar el número 9.999.999 necesitamos 63 símbolos, es decir, 9 de cada uno de los símbolos diferentes de que disponemos. Veamos algunos ejemplos de escrituras de números con esta técnica:

$$1 \rightarrow \text{I} \quad 10 \rightarrow \text{X} \quad 100 \rightarrow \text{C} \quad 1.000 \rightarrow \text{M}$$

$$10.000 \rightarrow \text{N} \quad 100.000 \rightarrow \text{R} \quad \text{y} \quad 1.000.000 \rightarrow \text{H}$$

$$999 \rightarrow \begin{cases} \text{CCC XXX III} \\ \text{CCC XXX III} \\ \text{CCC XXX III} \end{cases} \qquad 100101 \rightarrow \text{RCI}$$

Ante la cuestión problemática: **(4)** "*¿Cómo comparar dos números mediante sus expresiones escritas*?", este sistema no permite dar una respuesta suficientemente eficaz. Basta observar, por ejemplo, que para comparar dos números en $\mathbf{N_1}$ no basta con conocer la cantidad de símbolos necesarios para representar dichos números. El algoritmo *de comparación de dos números a partir de sus expresiones escritas* en los sistemas $\mathbf{N_1}$ es un poco más complejo y se ha esquematizado en el **ANEXO 1**.

¿Hasta qué punto $\mathbf{N_1}$ responde a las cuestiones **(5)** y **(6)**? Veremos que, *si los números son* "*pequeños*", las tareas de sumar, restar, multiplicar y dividir pueden realizarse en $\mathbf{N_1}$ de manera razonablemente económica, utilizando –por ejemplo– la designación de los números que proporciona el sistema de numeración *egipcio*. Pero estos algoritmos pierden rápidamente eficacia si se trata de sumar números no tan "pequeños". Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1: Sumar 2675 + 3849 en un sistema "aditivo"

Primero se representan simbólicamente ambos números y se agrupan los símbolos iguales; cuando se tengan grupos de diez o más símbolos iguales se sustituye cada

[6] Los símbolos que utilizamos en todo este trabajo generalmente no son los mismos que fueron usados históricamente. Dado que en este trabajo no pretendemos llevar a cabo un estudio histórico de los sistemas de numeración, nos servimos de símbolos más cómodos de representar mediante el tratamiento de textos con el que trabajamos.

grupo de diez símbolos iguales por el símbolo que representa una unidad del agrupamiento de orden superior. Así se sustituye un grupo de diez palotes por una X, uno de diez X por una C, y así sucesivamente. Una vez realizadas todas las sustituciones se obtiene el resultado de la adición:

2675 { MM CCC XXX III
CCC XXX II
X

3849 { MMM CCC XXX III
CCC X III
CC III

6524 { MMM CCC XX III
MMM CC I

Ejemplo 2 : Restar 8215 – 3627 en un sistema "aditivo"

Primero se escribe la representación simbólica del minuendo:

8215 { MMM CC X III
MMM II
MM

A continuación se descompone el minuendo de manera que se puedan eliminar tantos símbolos de cada orden como indica el sustraendo. Como en nuestro caso el minuendo sólo tiene 2C, se debe descomponer una M en 10C para poder eliminar 6C. También el minuendo sólo tiene 1X, para poder eliminar 2X debemos descomponer una C en 10X. Por último, como sólo tenemos 5 I en el minuendo y deben eliminarse 7 I, se descompone una X en 10 I:

8215 { MMM C $\boxtimes$ $\boxtimes$ III
MMM { CCC { XXX II
M $\boxtimes$ CCC XXX { IIIII
CCCC XXXX IIIII

Una vez realizadas las descomposiciones, ya pueden eliminarse todos los símbolos que constituyen el sustraendo, esto es: 3M, 6C, 2X y 7I, obteniéndose:

4588 { MMM CCC XXXX IIII
M CC XXXX IIII

Ejemplo 3 : Multiplicar 37×245 en un sistema "aditivo"

Se procede mediante sucesivas duplicaciones de uno de los dos términos (aquí de 245) del siguiente modo:

→ I	CC XXXX IIIII	CC XXXX IIIII ←
I I	CC XXXX X ~~IIIII~~ CC XXXX ~~IIIII~~	CC XXXX X CC XXXX
→ II II	CC XXXX CC C ~~XXXX X~~ CC ~~XXXX X~~ CC XXXX	CCCC C XXXX ← CCCC XXXX
IIII IIII	CCCC XXX C M ~~CCCCC~~ ~~XXXXX~~ ~~CCCCC~~ ~~XXXXX~~ CCCC XXX	CCCC C XXX M CCCC XXX
X ~~IIIII~~ III ~~IIIII~~ III	CCCC C MM ~~CCCCC~~ ~~XXXXX~~ ~~CCCCC~~ ~~XXXXX~~ M CCCC XX	MMM CCCCC XX CCCC
→ X X ~~IIIII~~ I X ~~IIIII~~ I	MMM CCCC XX ~~CCCCC~~ MMM M ~~CCCCC~~ CCCC XX	MMM CCCC XX ← MMMM CCCC XX

Ayudándonos de nuestro sistema de numeración posicional decimal, podemos representar de forma mucho más sencilla los cálculos anteriores:

→ 1	245 ←
2	490
→ 4	980 ←
8	1960
16	3920
→ 32	7840 ←

Para calcular 37 veces 245, se hacen sucesivas duplicaciones de 245 y se detiene el proceso en 32 veces 245, ya que la siguiente duplicación proporcionaría 64 veces 245 que supera las 37 veces 245 que se pretende calcular. Para completar desde las 32 veces 245 hasta las 37 veces 245, se buscan en la columna de la izquierda los números que sumados a 32 den 37 (son el 4 y el 1)[7] y se señalan éstos y el 32 y sus correspondientes

[7] Puede demostrarse fácilmente que cualquier número natural es suma de potencias de 2.

en la columna de la derecha (o sea 980, 245 y 7480). Por último se suman los números señalados en la columna de la derecha y se obtiene el producto:

7840	{	MMM MMMM	CCCC CCCC	XX XX	
980	{		CCCC C CCCC	XXXX XXXX	
245	{		CC	XXXX	IIIII
9065	{	MMMM M MMMM		XXX XXX	III II

Ejemplo 4 : Dividir 1475 entre 43 en un sistema "aditivo"

Ejemplo 4 : Dividir 1475 entre 43 en un sistema "aditivo"

Se hacen duplicaciones de 43 hasta acercarnos lo más posible a 1475:

I	XXXX III	XXXX III
→ I I	XXXX III XXXX III	XXXX III ← XXXX III
II II	~~XXXXX~~ XXX ~~IIIII~~ I ~~XXXXX~~ XXX ~~IIIII~~ I C X	C XXXX II XXX
IIII IIII	C C ~~XXXXX~~ XX II C ~~XXXXX~~ XX II	CCC XXXX IIII
X IIIIII	CCC XXXX IIII CCC XXXX IIII	CCC XXXX IIII CCC XXXX IIII
→ XXX II	~~CCCCC~~ C ~~XXXXX~~ XXX ~~IIIII~~ III ~~CCCCC~~ C ~~XXXXX~~ XXX ~~IIIII~~ III M C X	← M CCC XXXX III XXX III

Ayudándonos, de nuevo, de nuestro sistema de numeración, podemos representar de forma mucho más sencilla los cálculos anteriores:

1	43
→ 2	86 ←
4	172
8	344
16	688
→ 32	1376 ←

Nos detenemos en 1376, en la columna de la derecha, porque la duplicación siguiente daría un número superior al dividendo 1475. A continuación se buscan en la columna de la derecha los números que sumados a 1376 se acerquen lo más posible a 1475. Obtenemos que es el “86”: 1376 + 86 =1462

$$1376 \begin{cases} \text{M CCC XXXX III} \\ \text{XXX III} \end{cases}$$

$$86 \begin{cases} \text{XXXX III} \\ \text{XXXX III} \end{cases}$$

$$1462 \begin{cases} \text{M CCCC XXX II} \\ \text{XXX} \end{cases}$$

Como a “1462” le faltan “13” para alcanzar “1475”, el *resto de la división* es “13”. Y como los números que acompañan a “1376” y a “86” son, respectivamente, “32” y “2”, resulta que el *cociente de la división* es “34”.

Los cálculos anteriores muestran muy claramente lo poco económica que es la técnica de numeración $\boldsymbol{\tau}_1$, *puramente aditiva*, a poco que aumente el tamaño de los números involucrados en las operaciones aritméticas[8]. Una de las dificultades que presenta esta técnica de representación de los números es la de la necesidad de una gran cantidad de símbolos para designar algunos números. Así, por ejemplo, para representar el número “999” se necesitan 27 símbolos, y para representar el número “98.765” son necesarios 35 símbolos.

Una primera “mejora” de $\boldsymbol{\tau}_1$ con el fin de dar una respuesta más eficaz y económica a la tarea **(3)** es la aportada por el sistema *romano*, cuyos símbolos I, V, X, L, C, D y M designan unidades sucesivas que son alternativamente el quíntuplo o el doble de la anterior (es decir, 10^0, 5×10^0, 10^1, 5×10^1, 10^2, 5×10^2 y 10^3). Así, con esta variación de la técnica $\boldsymbol{\tau}_1$, que llamaremos $\boldsymbol{\tau'}_1$, si queremos representar el número “999” sólo necesitaremos 15 símbolos, es decir, D CCCC L XXXX V IIII, frente a los 27 que necesitábamos en el sistema *egipcio*.

Los sistemas *aditivos* han introducido históricamente nuevas modificaciones para responder mejor a la cuestión **(3).** El objetivo es disminuir el número de símbolos necesarios para representar los números que se utilizan usualmente, como el “999”, sin preocuparse demasiado de las (posibles) restantes funciones de la representación

[8] Hay que reconocer que los cálculos aritméticos en $\mathbf{N}_1$, esto es, utilizando un sistema de numeración *puramente aditivo*, pueden realizarse sin necesidad de tener que recurrir a las *tablas de sumar ni a las de multiplicar*. Pero esta “ventaja” cuando se trata de operar con números pequeños desaparece absolutamente cuando el tamaño de los números empieza a aumentar.

simbólica de los números. Así, por ejemplo, el sistema *romano* introdujo una nueva variación a la técnica τ'_1, que podemos denominar τ''_1, según la cual todo símbolo colocado a la izquierda de un símbolo de valor inmediatamente superior, indica que el menor debe restarse del mayor:

9 $\rightarrow$ IX; 4 $\rightarrow$ IV; 40 $\rightarrow$ XL; 90 $\rightarrow$ XC; 400 $\rightarrow$ CD; 900 $\rightarrow$ CM.

De este modo el número "999" requiere sólo 6 símbolos CM XC IX en lugar de 27; pero todavía necesitamos 12 símbolos para designar el "888" DCCC LXXX VIII. Esta importante mejora de la técnica de representación para dar respuesta a la tarea **(3)** la convierte, sin embargo, en una técnica todavía *menos económica y menos eficaz* para realizar operaciones aritméticas, incluso con números pequeños:

Por ello los contables romanos (y los calculadores europeos de la Edad Media, posteriormente) siempre recurrían a ábacos de fichas para practicar el cálculo. (Ifrah, 1987, p. 176).

Tenemos, en resumen, que el objetivo principal o "razón de ser" de los sistemas de numeración *aditivos*, o de tipo I, es la *representación de los números naturales* de manera que no haya ambigüedad y que se utilice una pequeña cantidad de símbolos y no la simplificación de los algoritmos de las operaciones aritméticas.

En consecuencia, hemos visto que una dirección de variación de la técnica de representación de los números naturales era[9]:

$$\tau_0 \longrightarrow \tau_1 \longrightarrow \tau'_1 \longrightarrow \tau''_1$$

Pero esta dirección de evolución de la técnica nos lleva a un callejón sin salida, y creemos que es necesario ampliar la problemática y hacer evolucionar la técnica de representación hacia la búsqueda de un sistema de numeración que permita *fiabilidad y economía* en la realización de los cálculos.

3.3 La organización o praxeología matemática N_2 en torno a un sistema "híbrido" (aditivo-multiplicativo).

Consideramos que existen direcciones de evolución de la técnica τ_1 diferentes de la anterior. Así, por ejemplo, para mejorar la descripción de los números –que puede considerarse como respuesta a las cuestiones:

---

[9] Donde τ_0 es la técnica de representación caracterizada por realizar *un único tipo de agrupamiento*, τ_1 la técnica que utiliza agrupamientos de forma regular, τ_1' la técnica primera evolución de τ_1 empleada por el sistema de numeración romano y τ''_1 la técnica variación de τ_1' también introducida por el sistema romano.

(1) "¿Cómo expresar los números naturales que necesitamos mediante símbolos de manera que no haya ninguna ambigüedad?"

(2) "¿Cómo expresar los números naturales que necesitamos utilizando únicamente una pequeña cantidad de símbolos diferentes y fijados de antemano?"

(3) "¿Cómo expresar cada número natural utilizando únicamente una pequeña cantidad de símbolos (diferentes o no)?"

y, a la vez, mejorar la eficacia de los algoritmos de comparación de dos números dando una respuesta eficaz a la cuestión:

(4) "¿Cómo comparar dos números mediante sus expresiones escritas?"

y también optimizar la economía y la fiabilidad de los algoritmos de las operaciones aritméticas respondiendo a las cuestiones:

(5) "¿Cómo representar los números naturales para simplificar los algoritmos de la suma y la resta?"

(6) "¿Cómo representar los números naturales para simplificar el algoritmo de la operación producto?"

(7) "¿Cómo representar los números naturales para simplificar el algoritmo de la división euclídea?"

podemos considerar una nueva dirección de variación de la técnica τ_1 caracterizada por evitar la repetición de símbolos gracias a la introducción de un nuevo tipo de símbolos que harán el papel de *multiplicadores de las potencias de la base*.

$$\begin{array}{ccccccc} \tau_0 & \longrightarrow & \tau_1 & \longrightarrow & \tau'_1 & \longrightarrow & \tau''_1 \\ & & \downarrow & & & & \\ & & \tau_2 & & & & \end{array}$$

Tendremos así una nueva técnica, τ_2, de representación de los números naturales que constituye un sistema *híbrido*, *aditivo-multiplicativo*, que también hemos denominado de tipo II, como el sistema *chino* o nuestro *sistema oral*.

Esta nueva técnica, τ_2, utiliza los símbolos que utilizaba τ_1 antes de ser modificada en la dirección de $\tau'_1 \rightarrow \tau''_1$, esto es, un símbolo para cada una de las potencias de la base:

$\mathrm{I} \rightarrow 10^0$; $\mathrm{X} \rightarrow 10^1$; $\mathrm{C} \rightarrow 10^2$; $\mathrm{M} \rightarrow 10^3$; $\mathrm{N} \rightarrow 10^4$; $\mathrm{R} \rightarrow 10^5$; $\mathrm{H} \rightarrow 10^6$; ...

y, además, utiliza los nuevos símbolos que harán la función de multiplicadores de dichas potencias (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9)[10]. De este modo, el número "3589" se representa mediante "3M 5C 8X 9".

Con esta nueva técnica de representación se evita la repetición de los símbolos I, X, C, M, N, ... que representan las potencias de la base pero, a cambio, debemos aprender un nuevo tipo de símbolos.

El algoritmo *de comparación de dos números a partir de sus expresiones escritas* en un sistema de representación “híbrido” figura en el **ANEXO 2**. Se observa que este algoritmo es más económico que el de los sistemas “aditivos” (**ANEXO 1**), puesto que ahora ya no es necesario contar cuántas veces se repite cada símbolo, cosa que si era necesaria en los sistemas “aditivos”.

Mostraremos a continuación, mediante algunos ejemplos, cómo pueden llevarse a cabo las operaciones aritméticas en un sistema “híbrido”.

Ejemplo 1 : Sumar 3589 + 2874 en un sistema “híbrido”

Se escribe la representación de ambos números, uno debajo del otro, haciendo corresponder en la misma columna los símbolos de las potencias del mismo. Luego *se suman* los coeficientes de cada potencia de la base y si se obtienen diez o más de una determinada potencia, se sustituyen diez unidades de una potencia de la base por una unidad de la potencia inmediatamente superior.

M	C	X	
3M	5C	8X	9
2M	8C	7X	4
6M	~~M~~ 4C	~~C~~ 6X	~~X~~ 3

Se simplifican mucho las expresiones escritas de los cálculos pero, a cambio, debe utilizarse la tabla de sumar de los coeficientes.

Ejemplo 2 : Restar 4235 – 2648 en un sistema “híbrido”

Se empieza como en el ejemplo anterior. Se restan los coeficientes de la primera potencia de la base, luego los de la segunda, y así sucesivamente. Cuando para cierta potencia de la base resulte que en el minuendo hay menos unidades que en el sustraendo, se debe descomponer una unidad de la potencia inmediatamente superior (del minuendo) en diez unidades de la potencia en cuestión a fin de que en el minuendo siempre haya más unidades que en el sustraendo (de cualquier potencia de la base) y pueda efectuarse la resta:

[10] El número 1 no se utiliza como multiplicador ya que es innecesario.

4M 2C 3X 5
2M 6C 4X 8
→
4M 2C 2X ~~X~~ → X 5
2M 6C 4X 8
7
→

4M C ~~C~~ → C 2X X 5
2M 6C 4X 8
8X 7
→
3M ~~M~~ → M C C 2X X 5
2M 6C 4X 8
M 5C 8X 7

Ejemplo 3 : Multiplicar 2745 × 389 en un sistema "híbrido"

Para multiplicar 2M 7C 4X 5 por 3C 8X 9, se deberán utilizar dos tablas de multiplicar: la de los coeficientes y la de las potencias de la base.

Tabla de multiplicar de los coeficientes:

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	X	X 2	X 4	X 6	X 8
3	3	6	9	X 2	X 5	X 8	2X 1	2X 4	2X 7
4	4	8	X 2	X 6	2X	2X 4	2X 8	3X 2	3X 6
5	5	X	X 5	2X	2X 5	3X	3X 5	4X	4X 5
6	6	X 2	X 8	2X 4	3X	3X 6	4X 2	4X 8	5X 4
7	7	X 4	2X 1	2X 8	3X 5	4X 2	4X 9	5X 6	6X 3
8	8	X 6	2X 4	3X 2	4X	4X 8	5X 6	6X 4	7X 2
9	9	X 8	2X 7	3X 6	4X 5	5X 4	6X 3	7X 2	8X 1

Tabla de multiplicar de las potencias de la base:

×	X	C	M	N...
X	C	M	N	R
C	M	N	R	H
M	N	R	H	...
N	R	H	...	...

Para efectuar el producto, se debe multiplicar cada componente del primer número, 3C 8X 9, por cada componente del segundo, 2M 7C 4X 5. Se empieza multiplicando 9 por 2M, por 7C, por 4X y por 5 y se suman los cuatro resultados obtenidos. A continuación se multiplica 8X por 2M, por 7C, por 4X y por 5 y así sucesivamente. Para obtener el resultado final se suman las cantidades obtenidas en las tres multiplicaciones parciales.

		2M	7C	4X	5
×			3C	8X	9

→

		2M	7C	4X	5
×					9
				4X	5
			3C	6X	
		6M	3C		
	N	8M			
	2N	4M	7C		5

→

			2M	7C	4X	5
×					8X	
				4C		
			3M	2C		
		5N	6M			
	R	6N				
	2R	N	9M	6C		

→

			2M	7C	4X	5
×				3C		
			M	5C		
		N	2M			
	2R	N				
	6R					
	8R	2N	3M	5C		

A continuación se suman los tres resultados parciales:

		2N	4M	7C	5
	2R	N	9M	6C	
	8R	2N	3M	5C	
H		6N	7M	8C	5

En realidad el tipo de multiplicación que hemos realizado tiene un gran parecido con la multiplicación de polinomios cuya variable es la base *n* (aquí $n = 10$):

$(2\ n^3 + 7\ n^2 + 4\ n + 5) \times (3\ n^2 + 8\ n + 9) = (2\ n^3 + 7\ n^2 + 4\ n + 5) \times 9 +$
$+ (2\ n^3 + 7\ n^2 + 4\ n + 5) \times 8\ n + (2\ n^3 + 7\ n^2 + 4\ n + 5) \times 3\ n^2 = (5 \times 9) + (4\ n \times 9) +$
$+ (7\ n^2 \times 9) + (2\ n^3 \times 9) + (5 \times 8\ n) + (4n \times 8n) + (7\ n^2 \times 8\ n) + (2\ n^3 \times 8\ n) +$
$+ (5 \times 3n^2) + (4\ n \times 3n^2) + (7\ n^2 \times 3n^2) + (2\ n^3 \times 3\ n^2) = (4\ n + 5) + (3\ n^2 + 6\ n) +$
$+(6\ n^3 + 3\ n^2) + (n^4 + 8\ n^3) + (4\ n^2) + (3\ n^3 + 2\ n^2) + (5\ n^4 + 6\ n^3) + (n^5 + 6\ n^4) +$
$+(n^3 + 5\ n^2) + (n^4 + 2\ n^3) + (2\ n^5 + n^4) + (6\ n^5) = 5 + 8\ n^2 + 7\ n^3 + 6\ n^4 + n^6.$

Ejemplo 4 : Dividir 3589 entre 74 en un sistema "híbrido"

3M	5C	8X	9	| 7X 4
2M	9C	6X		4X 8
	6C	2X	9	
	5C	9X	2	
		3X	7	

Se busca en la tabla de multiplicar de las potencias de la base cuál es la potencia de la base que multiplicada por X da M y resulta ser C, C × X = M, pero como el coeficiente de X es 7, C × 7X = 7M, que es mayor que 3M. Debe tomarse X que es la potencia de la base inmediatamente inferior. A continuación, se utiliza la tabla de los coeficientes para ver qué coeficiente le corresponde a X, y vemos que debe tomarse 4X.

De este modo, 4X × (7X 4) = 2M 9C 6X, que restado de 3M 5C 8X 9, proporciona el dividendo parcial 6C 2X 9. Análogamente debemos buscar qué potencia de la base con su correspondiente coeficiente multiplicada por 7X 4 se acerca lo más posible a 6C 2X 9. Según las tablas de multiplicar el número buscado es el "8", por lo que: 8 × (7X 4) = 5C 9X 2 y restado de 6C 2X 9 da como resto 3X 7.

Resulta, en resumen, que el *cociente* es 4X 8 y el *resto* 3X 7, ya que

3M 5C 8X 9 = (7X 4) × (4X 8) + 3X 7

De nuevo se observa que el algoritmo de la división tiene un gran parecido con el de la división de polinomios cuya variable es la base n (con n = 10). Podemos decir que con esta nueva técnica de representación τ_2 se pueden realizar las operaciones aritméticas de forma *más sencilla y económica* que con la técnica τ_1, especialmente cuando intervienen números "grandes", aunque tengamos que utilizar la tabla de sumar de los coeficientes y las dos tablas de multiplicar[11] (la de las potencias de la base y la de los coeficientes). La *representación de los números también se simplifica*, aunque todavía no podemos escribir todos los números naturales con un número finito de símbolos, fijados de antemano, y haya sido necesario crear nuevos símbolos para los coeficientes.

3.4. La organización matemática final N_3 en torno a un sistema "posicional completo".

Las limitaciones de la actividad matemática que es posible llevar a cabo en $\mathbf{N_2}$ ponen de manifiesto la necesidad de *ampliar* $\mathbf{N_2}$ *como organización matemática*, esto es, construir otra organización matemática $\mathbf{N_3}$ en la que puedan llevarse a cabo las tareas

[11] "Pero a pesar de este gran avance, no tuvieron la posibilidad de representar todos los números naturales. Las capacidades de este tipo de notación numérica son todavía limitadas: cuanto más elevadas eran las cantidades que se tenían que expresar, más símbolos originarios había que crear, o nuevas convenciones de escritura que forjar. Además, no siempre se podía "calcular por escrito", como se hace hoy en día con toda facilidad. Todavía había que dar un paso importante para que tal numeración pudiera adaptarse a la práctica de las operaciones aritméticas. Para poder efectuar una suma, una multiplicación o una división, había que seguir recurriendo a auxiliares materiales como el ábaco o la tabla o crear todo un conjunto de reglas y artificios muy complicados. La práctica del cálculo, que exigía un aprendizaje largo

matemáticas que se pueden llevar a cabo en $\mathbf{N_2}$ (si es posible de una forma más segura y económica) y que, al mismo tiempo, permita responder a cuestiones y realizar tareas matemáticas que no podían realizarse en $\mathbf{N_2}$. Podemos tomar como tareas generadoras de $\mathbf{N_3}$ las siguientes:

$\mathbf{T_3}$: **(2)** "¿Cómo expresar los números naturales que necesitamos utilizando únicamente una pequeña cantidad de símbolos diferentes y fijados de antemano?"
(6) "¿Cómo representar los números naturales de manera que se simplifique el algoritmo de la multiplicación?" **(7)** "¿Cómo representar los números naturales de manera que se simplifique el algoritmo de la división euclídea?" **(8)** "¿Qué representación simplifica la divisibilidad elemental (múltiplos y divisores de un número, máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos números, descomposición de un número en factores, ...) sin complicar la suma?

Un sistema de numeración de tipo III ("*posicional*") constituye una técnica representativa, τ_3, que da una respuesta definitiva a la tarea **(2)**, y permite resolver razonablemente las tareas **(7)** y **(8)** así como simplificar todavía más las anteriores **(1)**, **(2)**, **(4)**, **(5)** y **(6).**

La respuesta definitiva a la tarea **(2)** se consigue prescindiendo de los símbolos de las potencias de la base e indicando dichas potencias mediante las distintas posiciones que ocupan los respectivos coeficientes, que pasan así a estar completamente ligados a la posición que ocupan en el grupo de símbolos que representa al número en cuestión. De este modo, se obtiene un sistema donde los únicos símbolos disponibles son los coeficientes o multiplicadores de las potencias de la base y donde las potencias de la base vienen indicadas por las distintas posiciones. Por tanto, se simplifica extraordinariamente la representación de los números y, además, podemos escribir todos los números naturales con un número finito de símbolos.

Ejemplos de sistemas "posicionales" son los sistemas *maya* y *babilónico* que para representar los coeficientes utilizaron símbolos que intentaban evocar visualmente lo que representaban. Así, por ejemplo, los mayas tenían como base del sistema $n = 20$ y utilizaban un símbolo para el cinco (|) y otro para el uno (•) que hacían el papel de coeficientes (números menores que 20), por tanto,

17 → |||•• , 9 → | •••• , 87 → •••• |••

y difícil, seguía siendo inasequible para el común de los mortales y constituía el dominio reservado de una casta privilegiada de especialistas." (Ifrah,1987, p. 222)

La base del sistema que idearon los babilónicos era $n = 60$ y disponían de un símbolo para el diez (〈) y otro par el uno (∨) para representar todos los coeficientes, es decir, para los números menores que 59. Veamos algún ejemplo:

35 → 〈〈〈 ∨∨∨∨∨ , 57 → 〈〈〈〈〈 ∨∨∨∨∨∨∨ , 247 → ∨∨∨∨ ∨∨∨∨∨∨∨

Observamos que esta respuesta definitiva a la tarea **(2)** crea dificultades nuevas ya que esta técnica τ_3 no permite resolver la tarea **(1)** "*¿Cómo expresar los números naturales que necesitamos mediante símbolos de manera que no haya ninguna ambigüedad*?", puesto que aparecen ambigüedades como las siguientes:

(a) En el sistema *maya*, la designación ||| puede ser "15" ó "110" ó "205".

(b) En el sistema *babilónico* la designación ∨ ∨ puede ser "2" ó "61".

Para resolver esta dificultad se utilizaron símbolos convencionales diferentes para cada uno de los coeficientes (los números menores que la base), desligándoles de toda evocación del número que representaban. Y, además, se añadió un nuevo símbolo: el *cero*, para indicar que en una determinada posición hay ausencia de elementos. De este modo hemos llegado a nuestro sistema de numeración decimal posicional, donde la base es diez y disponemos de los símbolos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 para los coeficientes y del símbolo 0 para indicar ausencia de elementos en una determinada posición.

Esta técnica de numeración, que denominaremos τ'_3, genera un sistema "*posicional completo*" que nos permite comparar dos números –tarea **(4)**– de una forma muy eficaz, (ver **ANEXO 3**) y que, como veremos, también permite resolver de una forma más económica y eficaz las restantes tareas **(5)**, **(6)**, **(7)** y **(8)**.

En este punto queremos subrayar que, en el conjunto de algoritmos de las operaciones aritméticas que pueden utilizarse cuando los números están representados mediante un sistema "posicional completo", se produce una cierta incompatibilidad relativa entre dos características deseables de todo algoritmo de cálculo: la *economía* y la *fiabilidad*. Algunos algoritmos ganan economía a base de ocultar (en la escritura) muchas de las operaciones y resultados intermedios, lo que provoca una pérdida de fiabilidad puesto que la detección de errores es mucho más complicada en las operaciones "ocultas". Recíprocamente, existen algoritmos que para ganar en fiabilidad y automatizar el algoritmo, aumentan la cantidad de resultados intermedios que dejan un rastro escrito, perdiendo de esta manera economía. Los algoritmos más interesantes serán aquellos que conserven ambas características pero éstos, cuando existen, no son los que más se utilizan. Veremos, por ejemplo, que el algoritmo de la división euclídea más enseñado actualmente en la Enseñanza Primaria española, es muy económico pero no tan fiable.

Ejemplo 1 : Dividir 3621 entre 76 en un sistema “posicional completo”

Se comienza tomando, por la izquierda, cifras del dividendo hasta tener un número mayor que el divisor. Se toma el 3, y como 3 es más pequeño que 76, se toma 36, que todavía es más pequeño que 76 y a continuación se toma 362 que ya es mayor que 76. Ahora se busca un número de una cifra que al multiplicarlo por 76 el resultado se acerque lo más posible a 362 y resulta que es el 4. Entonces decimos: “4 por 6, 24; al 32 van 8 y me llevo 3; 4 por 7, 28 más 3, 31 al 36 van 5”[12].

$$\begin{array}{r|l} 3621 & \underline{\;76\;} \\ 58 & \;4 \end{array}$$

A continuación se baja la cifra siguiente, el 1. Se busca un número de una cifra que al multiplicarlo por 76 el resultado se acerque lo más posible a 581, y se obtiene el 7. Así decimos: “7 por 6, 42 al 51 van 9 y me llevo 5; 7 por 7, 49 más 5, 54 al 58 va 4”.

$$\begin{array}{r|l} 3621 & \underline{\;76\;} \\ 581 & \;47 \\ 49 & \end{array}$$

Se obtiene, en resumen, que el cociente es 47 y el resto 49.

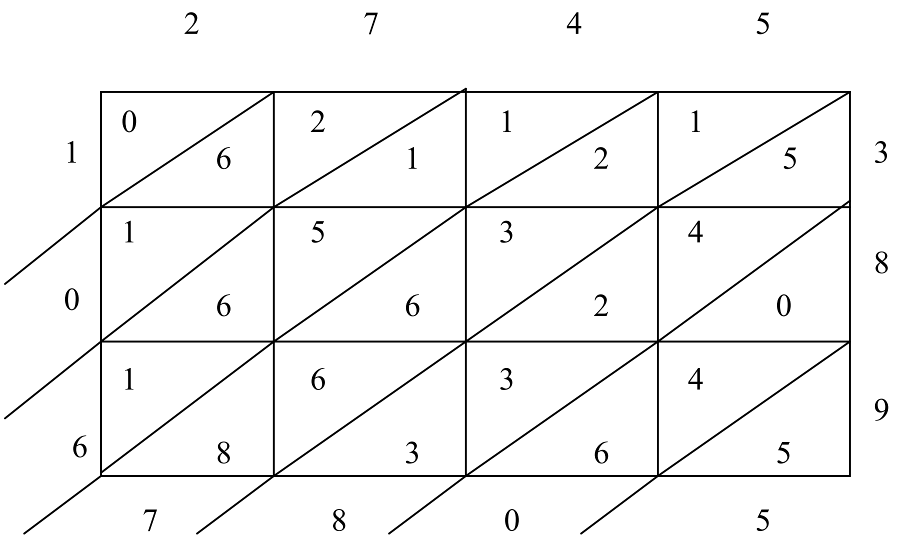
Hemos visto cómo, gracias a las propiedades de los sistemas posicionales completos, existe un algoritmo para realizar la división euclídea que es muy *económico* en la utilización de escrituras, aunque no es tan *fiable* como sería de desear[13]. Ejemplificaremos a continuación un algoritmo de la multiplicación mucho más fiable y no menos económico del que existe en la Enseñanza Primaria:

[12] Aquí podríamos decir que hemos realizado una operación mixta, mezcla de una multiplicación y una sustracción. Porque se trata de calcular 362 – (4×76) = 362 – 304 = 58, y esto se realiza del siguiente modo: 4 × 6 = 24 y se descompone 362 = 330 + 32 y se calcula 32 – 24 que es 8. Se escribe 8 y se llevan 3 de 32. A continuación se calcula 4 × 7 = 28 y se añaden las 3 que nos llevábamos y se obtiene 31 que se resta de 36, obtenido a su vez de sumar implícitamente también 3 al 33 de 330. En el cálculo de 4 × 76, al multiplicar 4 × 6, nos llevamos 2; y en el cálculo de 32 – 24 nos llevamos 1. Mientras que en la operación mixta realizada nos llevamos 3. Es decir, se ha realizado una operación que entremezcla el cálculo de un producto y de una diferencia dando lugar a llevadas no habituales.

[13] Debemos decir que existen otros algoritmos de la división euclídea que, aunque son algo *menos económicos* en escrituras, *ganan en fiabilidad* y, en consecuencia, son mucho más interesantes e indicados para los principiantes. Ver APMEP, (1983).

Ejemplo 2 : Calcular 2745×389 en un sistema "posicional completo"

Se trata de la técnica "*per gelosia*", que se inicia construyendo el siguiente cuadro



Se coloca uno de los factores en la parte superior del cuadro de modo que la cifra de las unidades coincida con la primera columna de la derecha, la cifra de las decenas con la segunda columna y así sucesivamente. El otro factor se coloca en el lateral derecho de modo que la cifra de las unidades coincida con la última fila, la cifra de la decenas con la penúltima fila, y así sucesivamente. A continuación, se multiplica cada cifra de un factor por cada cifra del otro factor y el resultado se coloca en el lugar de la fila y columna correspondiente. Cada celda de la matriz esta dividida en dos, la de la izquierda-arriba para las decenas y la de la derecha-abajo para las unidades. Una vez relleno todo el cuadro se obtiene el resultado de la multiplicación sumando los números de cada diagonal, ya que cada diagonal corresponde a una cierta potencia de la base n=10. Así, la primera diagonal de la derecha corresponde a las unidades, la siguiente a las decenas, y así sucesivamente. En nuestro ejemplo se obtiene como resultado de la multiplicación: $2745 \times 389 = 1067805$.

Vemos que esta técnica de multiplicar es mucho *más económica* que la que se utilizaba con los sistemas de numeración "híbridos" (ver ejemplo (3) de la sección 3.3.) y, además, es mucho *más fiable*, puesto que permite realizar los productos parciales en cualquier orden, desembocando siempre en una matriz que estructura la organización de los cálculos, lo que reduce enormemente el peligro de cometer errores.

Debido a la *economía y fiabilidad* con que se pueden efectuar los algoritmos de multiplicar y dividir (a pesar de que deban utilizarse las tablas de sumar y de multiplicar de los coeficientes), podemos afirmar que la técnica $\boldsymbol{\tau'_3}$ de representación de los números nos va a permitir una muy fácil caracterización de los criterios de divisibilidad a partir de sus escrituras, la descomposición en factores primos, y la obtención del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo de varios números.

Tenemos, en resumen, una serie evolutiva de organizaciones, obtenida mediante un proceso de ampliaciones y completaciones progresivas, que culmina en $\mathbf{N_3}$ que podemos considerar como una posible reconstrucción de $\mathbf{O_{Num}}$ en **ID**.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{N_0 = [T_0/\tau_0/\ \theta/\ \Theta]} \arrow[r] \arrow[drr, "\mu"'] & \mathbf{N_1 = [T_1/\tau_1/\ \theta/\ \Theta]} \arrow[r] & \mathbf{N_2 = [T_2/\tau_2/\ \theta/\ \Theta]} \arrow[d] \\
& & \mathbf{N_3 = [T_3/\tau_3/\ \theta/\ \Theta]}
\end{tikzcd}$$

Propugnamos que el *proceso de estudio* de la cuestión inicial: "*¿Cómo expresar los números naturales mediante una representación escrita que sea un instrumento útil para el desarrollo de la aritmética elemental*?" que, en **ID**, se reduce a estudiar la respuesta $\mathbf{O_{Num}}$ dada en otra institución, deberá estar guiado por la actividad matemática que es posible llevar a cabo en cada una de esas organizaciones intermedias y que viene determinada, en gran parte, por las restricciones específicas que aparecen en cada una de ellas[14].

Ahora queda por realizar la descripción detallada del *proceso de estudio* de la organización matemática $\mathbf{O_{Num}}$ en **ID** que, por lo dicho hasta aquí, equivale al estudio del proceso de *modelización matemática* μ que transforma $\mathbf{N_0}$ en $\mathbf{N_3}$:

$$\boldsymbol{\mu(N_0) = N_3}$$

Dado que μ es una *modelización algebraica* (Bolea, Bosch y Gascón, 2001) podemos considerar que el proceso de estudio correspondiente requiere una

[14] Si hubiésemos tomado otras organizaciones intermedias tendríamos otras restricciones muy diferentes. Así, por ejemplo, si representamos cada número natural mediante su descomposición en factores primos (expresando los factores primos y los exponentes de éstos mediante el sistema de numeración posicional en base 10), se simplificaría la divisibilidad elemental pero, a su vez, se complicarían los algoritmos de la suma y la resta. En este sistema de numeración "mixto" los exponentes se sumarían mediante el algoritmo habitual que utilizamos en el sistema de numeración posicional de base 10.

organización didáctica con características similares a las que se sugieren en el trabajo citado.

Señalaremos a continuación algunas de estas características en términos de los *momentos didácticos*, tomando en consideración las particularidades específicas de nuestro proceso de estudio:

(1) En el momento del *primer encuentro* deben aparecer algunos de los tipos de tareas constitutivos de $\mathbf{N_0}$ y, progresivamente, algunos de los tipos de tareas que se pueden formular en términos de $\mathbf{N_0}$, $\mathbf{N_1}$ y $\mathbf{N_2}$ pero cuya problematicidad provoque la necesidad de "ampliar" cada una de estas organizaciones mediante un modelo matemático adecuado. El profesor tiene que poner en marcha *técnicas didácticas* (que deberemos describir y especificar la forma cómo deberían ser gestionadas) que permitan que el estudiante tenga un primer encuentro y manipule *efectivamente* dichas tareas que serán la razón de ser de la futura ampliación, $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{N_0}) = \mathbf{N_3}$, de $\mathbf{N_0}$.

(2) En otro lugar (Bolea, Bosch y Gascón, 2001) hemos justificado que el momento *exploratorio* de una organización matemática algebrizada debe tener un carácter "material". La exploración debe llevarse a cabo mediante manipulaciones esencialmente *escritas*, esto es, *calculando*. Por lo tanto, para poder dirigir y gestionar adecuadamente un proceso de estudio que abarque las sucesivas ampliaciones de $\mathbf{N_0}$ sería necesario que existiese un dispositivo didáctico en el que pudiese vivir y desarrollarse con normalidad el *carácter manipulativo escrito del momento exploratorio* (Bosch y Gascón, 1994). Mientras tal dispositivo no está institucionalizado se complica enormemente la *tarea didáctica* de conseguir que viva en **ID** esta dimensión de la actividad matemática.

(3) Muy relacionado con el punto anterior está el hecho de que el momento del *trabajo de la técnica* debe provocar de manera ineludible la necesidad de cuestionar la *eficacia* (*economía* y *fiabilidad*, especialmente) y el *alcance* de las técnicas sucesivamente "válidas" en $\mathbf{N_0}$, $\mathbf{N_1}$ y $\mathbf{N_2}$. Para ello será preciso que en cada una de las praxeologías intermedias aparezcan problemas situados en la frontera del dominio de validez de las técnicas que forman parte de dicha praxeología. La generación de estos tipos de problemas matemáticos y su gestión en el aula son *tareas didácticas* que deberán ser descritas con más precisión y que, como todas, requerirán del uso adecuado de *técnicas didácticas.*

Este *cuestionamiento tecnológico* será el motor del proceso de modelización que desembocará en la construcción de $\mu($ $\mathbf{N_0}) = \mathbf{N_3}$. Sería interesante poner de manifiesto hasta qué punto es cierto en este caso que la modelización de las técnicas de $\mathbf{N_0}$, $\mathbf{N_1}$ y $\mathbf{N_2}$ produce sucesivamente las *nuevas técnicas*, más potentes, que sean útiles respectivamente en $\mathbf{N_1}$, $\mathbf{N_2}$ y $\mathbf{N_3}$.

(4) El entorno *tecnológico-teórico* debe constituirse de manera que permita justificar, explicar y producir las técnicas iniciales, las nuevas técnicas y las relaciones entre ambas. Esto significa, en particular, que las técnicas de modelización también deben ser descritas, justificadas e interpretadas. Existen muchos aspectos de las técnicas de simbolización de los números naturales que aparecen en $\mathbf{N_1}$, $\mathbf{N_2}$ y $\mathbf{N_3}$ que requieren ser interpretados, justificados y relacionados entre sí. Por tanto, el momento de la constitución del entorno tecnológico-teórico no debería descuidarse en este proceso de estudio. La presunta transparencia y hasta "trivialidad" de los elementos tecnológicos asociados a las técnicas de numeración es completamente engañoso. De nuevo hay que subrayar que queda pendiente de especificar la manera concreta de introducir los citados elementos tecnológicos a lo largo del proceso de estudio o, en otras palabras, queda abierto el *problema didáctico* de cómo gestionar las funciones de los elementos tecnológicos en este proceso de estudio.

(5) En el momento de la *institucionalización* no debe prescindirse completamente de las organizaciones matemáticas intermedias $\mathbf{N_0}$, $\mathbf{N_1}$ y $\mathbf{N_2}$, puesto que éstas constituyen, en cierta manera, la razón de ser de $\mathbf{N_3}$. También deben institucionalizarse las técnicas de modelización potencialmente útiles en otros procesos. Aunque a la larga $\mathbf{N_0}$, $\mathbf{N_1}$ y $\mathbf{N_2}$ pueden llegar a ser “matemáticamente contingentes” y hasta prescindibles, durante el proceso de estudio son, sin duda, “didácticamente necesarias” y, por tanto, requerirán algún tipo de institucionalización. De nuevo queda abierto el *problema didáctico* de cómo institucionalizar las organizaciones matemáticas intermedias y, al mismo tiempo, ir prescindiendo progresivamente de ellas.

(6) En el momento de la *evaluación* que, como todos los anteriores, no hay que confundir con un momento "temporal" que empieza y acaba de una vez por todas, debe ponerse el acento en la evaluación de la eficacia, la pertinencia y la fecundidad de las sucesivas ampliaciones de $\mathbf{N_0}$ y, en definitiva, de la *modelización* global. ¿Ha ampliado adecuadamente los tipos de tareas planteables y resolubles? ¿Ha producido técnicas más

eficaces y potentes? ¿Ha unificado y simplificado los objetos ostensivos y no ostensivos? ¿Ha permitido justificar más adecuadamente las técnicas que se utilizaban progresivamente?

En el momento de la evaluación deberán plantearse, asimismo, cuestiones más concretas a fin de caracterizar con detalle cada una de las organizaciones que van apareciendo. De esta manera se estará en condiciones de evaluar más finamente las citadas organizaciones matemáticas y la organización global que las contiene, en cierto sentido, a todas ellas.

La evaluación de cada uno de los sistemas de numeración pasa por responder, entre otras, a las siguientes preguntas: ¿Qué significado tienen los símbolos que se utilizan y qué tipos de símbolos aparecen? ¿Existe un símbolo para el cero como cifra, como número? ¿Qué tipos de agrupamientos se realizan? ¿Utiliza una base? ¿Tiene base auxiliar? ¿Qué operaciones corresponden a la yuxtaposición de los símbolos? ¿Qué papel juega la posición de los símbolos? ¿Es posible que una misma escritura pueda representar diferentes números? En caso afirmativo, ¿cuál es la causa de esta ambigüedad de escrituras? ¿Cómo podríamos evitarla? ¿Se pueden escribir todos los números naturales con un número finito de símbolos? En caso de que no sea posible ¿cuál es el mayor número que se puede escribir con los símbolos que utiliza dicho sistema? ¿Qué reglas de comparación podemos establecer para comparar dos números naturales escritos en este sistema? ¿Qué efecto produce sobre la escritura de un número la multiplicación por una potencia de la base? ¿Cómo funcionan los algoritmos de la adición y de la sustracción en dicho sistema? ¿Y los de la multiplicación y la división? ¿Existen algoritmos alternativos? ¿Cómo podríamos medir la *economía* y la *fiabilidad* de dichos algoritmos?

De nuevo queda abierta la *tarea didáctica* de utilizar estas cuestiones adecuadamente a lo largo de un proceso de estudio de la numeración en **ID** que, por tanto, deberemos describir en otro trabajo.

4.- Conclusión

Hemos visto que la reconstrucción escolar de una organización matemática $\mathbf{O_{Num}}$ en la institución **I = ID** puede estar guiada por el desarrollo evolutivo de cierta problemática que proporciona las "razones de ser" de $\mathbf{O_{Num}}$ en **ID,** razones que no tienen por qué coincidir con las de $\mathbf{O_{Num}}$ en la institución matemática **IM**. Este desarrollo se ha materializado en un proceso de ampliaciones progresivas de organizaciones matemáticas cada vez más complejas. El proceso de estudio de $\mathbf{O_{Num}}$ en **ID** estará, por tanto, guiado por la actividad matemática que se pueda llevar a cabo en cada una de las organizaciones matemáticas intermedias. Pero quedan todavía por diseñar la *estrategia docente* que ayude al alumno a recorrer el camino así diseñado.

Barcelona-Madrid, 28 de marzo de 2003

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

APMEP, (1983): *La división à l'école élémentaire,* Elem Math III. APMEP: Paris.

BOLEA, P., BOSCH, M. y GASCÓN, J., (2001): La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Pendiente de publicación.

BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1994): La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas, *Enseñanza de las Ciencias*, 12(3), 314-332.

BOURBAKI, N. (1969): *Elementos de historia de las matemáticas*, Alianza Universidad: Madrid (1972).

CHEVALLARD, Y. (1985, 1991): *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné,* La Pensée Sauvage : Grenoble. [Traducción en español de Claudia Gilman : *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado,* Aique : Buenos Aires (1997)]

CHEVALLARD, Y. (1999): L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19/2, 221-266.

CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997*): Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, ICE/Horsori: Barcelona.

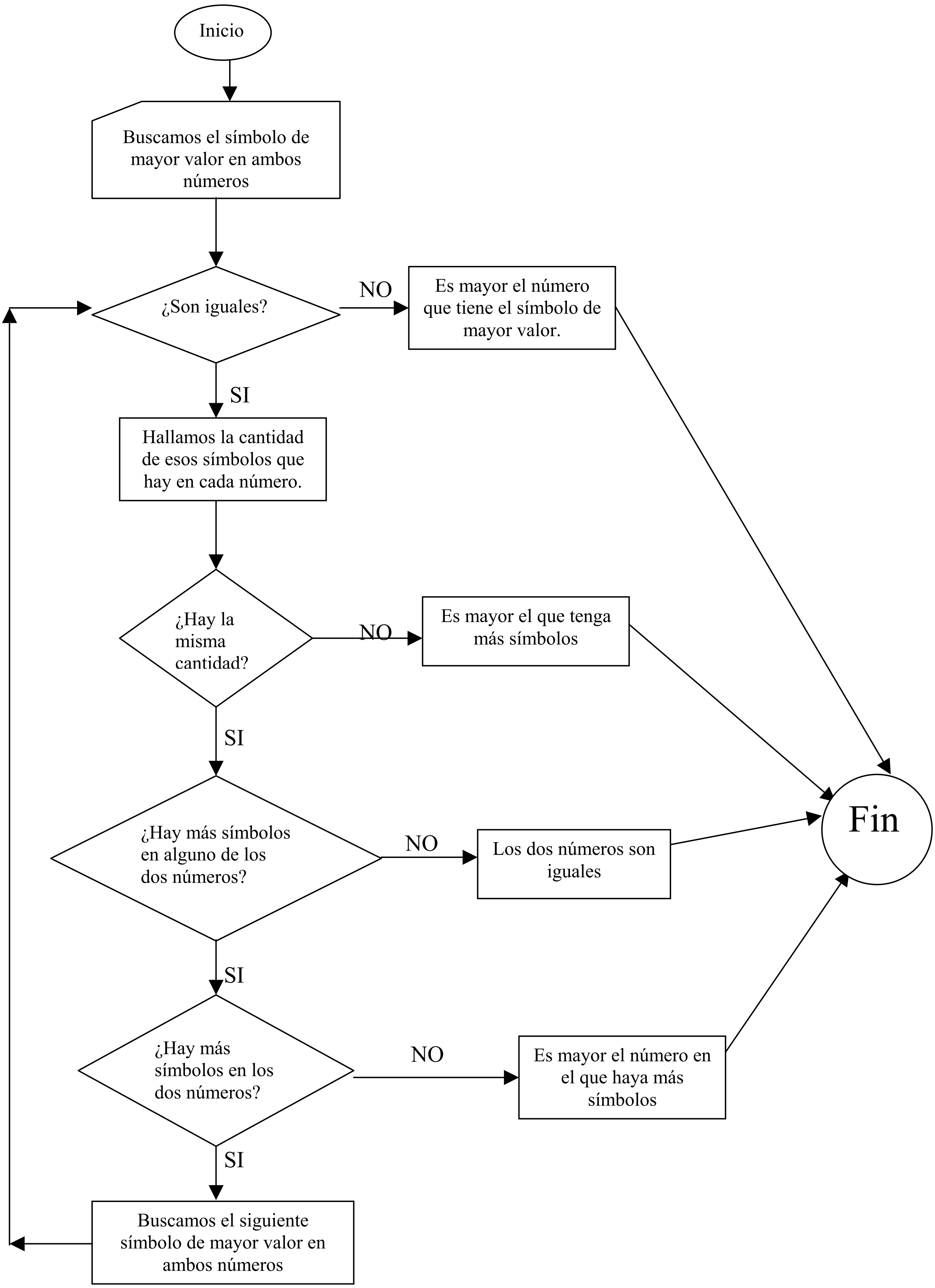
ERMEL (1977) : *Aprentissages mathématiques à l'école elementaire*. París: Hatier (cours CP).

IFRAH, G. (1987): *Las cifras. Historia de una gran invención*. Madrid: Alianza.

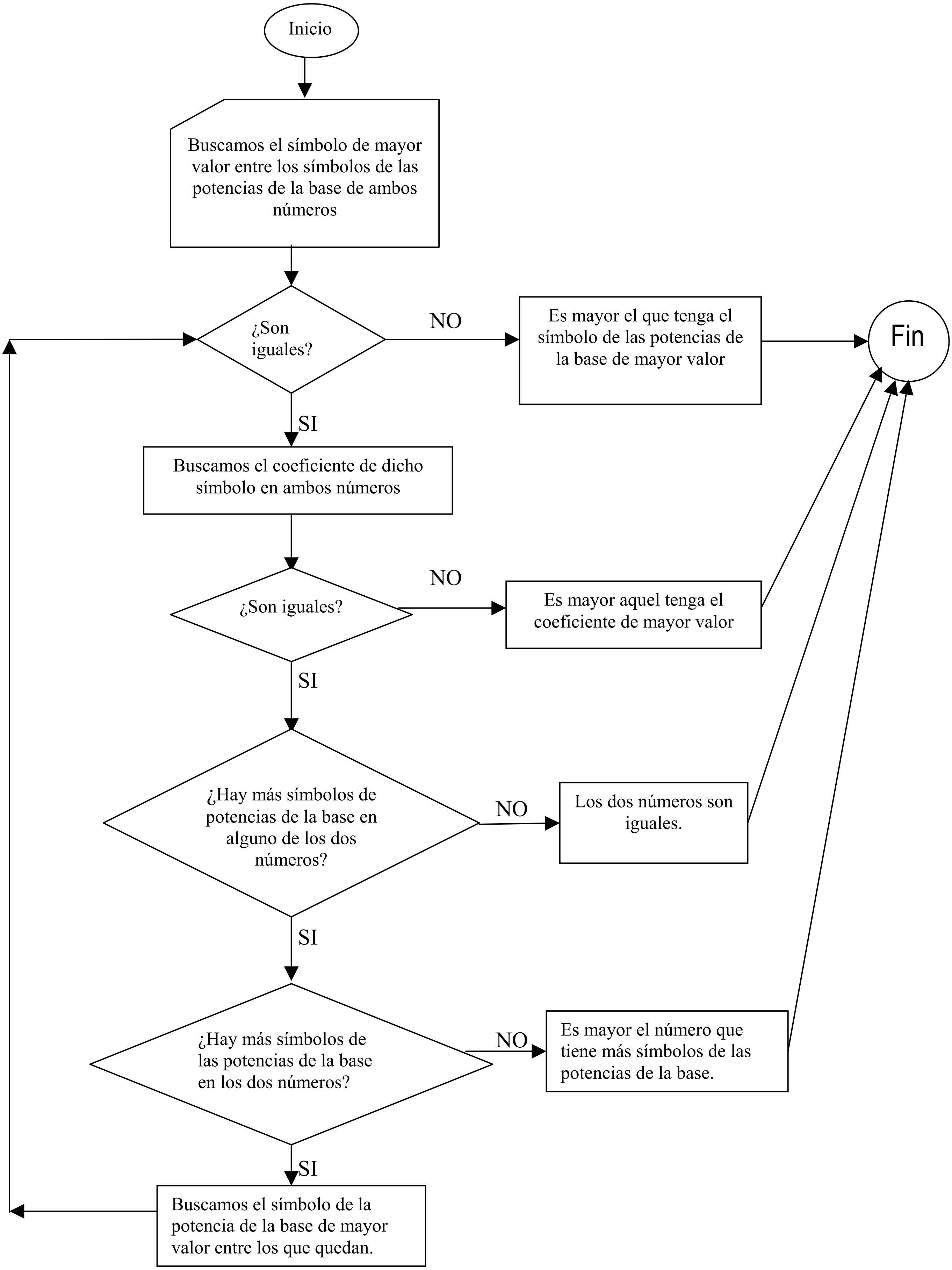
IFRAH, G. (1997): *Historia universal de las cifras*. Madrid: Espasa Calpe.

GUITEL, G. (1975) : Histoire comparée des numérations écrites. Paris: Flammarion.

ANEXO 1 : Comparación de dos números escritos en un sistema “ADITIVO”



ANEXO 2 : Comparación de dos números escritos en un sistema “HÍBRIDO”



ANEXO 3 : Comparación de dos números escritos en el sistema de numeración decimal posicional.