ANÁLISIS ONTO-SEMIÓTICO DE PROBLEMAS COMBINATORIOS Y DE SU RESOLUCIÓN POR ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS[1]

Juan D. Godino, Carmen Batanero y Rafael Roa

Universidad de Granada

RESUMEN:

En este trabajo se describe un modelo ontológico y semiótico para la cognición matemática, que se ejemplifica para el caso de la combinatoria elemental. Asimismo, aplicamos este modelo para analizar el proceso de resolución de algunos problemas combinatorios por alumnos con alta preparación matemática y aportar una explicación semiótica de la dificultad del razonamiento combinatorio. Finalmente, se describen las implicaciones del modelo teórico y tipo de análisis presentado para la investigación en didáctica de la matemática.

1. INTRODUCCIÓN

Recientemente, observamos un interés creciente en la comunidad de investigación en educación matemática por el uso de nociones semióticas en el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Así encontramos trabajos presentados en PME (Ernest, 1993; Vile y Lerman, 1996), y los realizados desde la perspectiva del interaccionismo simbólico, entre otros, por Bauersfeld y colaboradores (Cobb y Bauersfeld, 1995) que enfatizan la noción de significado y negociación de significados como centrales para la educación matemática. Destacamos también los trabajos sobre la problemática de la influencia los sistemas de representación (Duval, 1993), simbolización y comunicación (Pimm, 1995; Cobb, Yackel y McClain, 2000), y, en general, del lenguaje (Ellerton y Clarkson, 1996) en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como las investigaciones sobre la comprensión de las matemáticas (Sierpinska, 1994; Godino, 1996), que no pueden eludir las cuestiones del significado.

Este interés es consecuencia natural del papel esencial que desempeñan los medios de expresión en los procesos de pensamiento, como resaltan Vygotsky (1934), quien considera el significado de la palabra como unidad de análisis de la actividad psíquica, y Cassirer (1964: 27) para quien *"el signo no es una mera envoltura eventual del pensamiento, sino su órgano esencial y necesario"*.

Estos trabajos sugieren la necesidad de analizar el papel de los signos y la propia noción de significado, desde la perspectiva de la educación matemática, así como la articulación entre los componentes semióticos y epistemológicos puestos en juego en la actividad matemática, esto es, de reflexionar sobre la naturaleza y tipo de los objetos

[1]Educational Studies in Mathematics, 60 (1): 3-36

cuyos significados se ponen en juego. "*Lo que entendemos por 'comprensión' y 'significado' está lejos de ser obvio o claro, a pesar de ser dos términos centrales en toda discusión sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en cualquier nivel"* (Pimm, 1995, p. 3)

En el trabajo matemático, los símbolos (significantes) remiten o están en lugar de las entidades conceptuales (significados). Por ello, además del dominio de la sintaxis del lenguaje simbólico matemático, la semántica, es decir, la naturaleza de los propios conceptos y proposiciones matemáticas y su relación con los contextos y situaciones-problemas de cuya resolución provienen es un punto crucial en los procesos de instrucción matemática. En consecuencia, es necesario elaborar modelos teóricos que traten de articular las dimensiones semiótica (en sus aspectos sintácticos, semánticos y pragmáticos), epistemológica, psicológica y sociocultural en educación matemática. Esta modelización requiere tener en cuenta, entre otros, los siguientes elementos y supuestos:

- Diversidad de objetos puestos en juego en la actividad matemática, tanto en el plano de la expresión como en el del contenido.
- Diversidad de actos y procesos de semiosis (interpretación) entre los distintos tipos de objetos y de los modos de producción de signos.
- Diversidad de contextos y circunstancias espacio-temporales y psicosociales que determinan y relativizan los procesos de semiosis.

En Godino (2001) se propone un sistema de nociones teóricas que configuran un enfoque semiótico de la cognición matemática, incorporando supuestos pragmáticos y antropológicos sobre la actividad matemática, y puede ser particularmente bien adaptado para el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En este artículo, tras sintetizar los principales herramientas teóricas del enfoque semiótico, mostraremos su potencial utilidad para describir y explicar las dificultades del proceso de resolución de problemas combinatorios elementales por estudiantes universitarios con preparación matemática avanzada. Los datos empíricos son parte de los obtenidos por Roa (2000) en una investigación sobre razonamiento combinatorio en alumnos con preparación matemática avanzada. Los problemas analizados forman parte de un cuestionario de 13 problemas que el citado autor propuso a una muestra de 118 estudiantes de la licenciatura de Matemáticas (4º o 5º curso), quienes mostraron una dificultad generalizada en su resolución (el número medio de problemas resueltos fue sólo de 6 problemas por alumno).

El modelo teórico presentado desarrolla nuestros trabajos anteriores (Godino y Batanero, 1994; 1998; Godino y Recio 1997) donde definíamos el "significado institucional y personal de un objeto matemático" tratando de centrar el interés de la investigación en los conocimientos matemáticos institucionalizados, sin perder de vista el sujeto individual hacia el que se dirige el esfuerzo educativo.

En ellos sugerimos que al preguntarnos qué es la "combinatoria" (u otro objeto matemático), o lo que consideramos como equivalente, cuando nos interesamos por su significado debemos identificar las "prácticas que realiza una persona para resolver cierto tipo de problemas (problemas combinatorios)". Si esas prácticas –acciones o manifestaciones operatorias y discursivas- son características de un sujeto individual, hablamos de significado personal del objeto, y si son compartidas en el seno de una institución, hablaríamos del significado institucional de dicho objeto.

En dichos trabajos hemos concebido el significado como el contenido asignado a una expresión (función semiótica en el sentido de Hjemslev, 1943), aquello a lo cual se refiere un sujeto en un momento y circunstancias dadas, que puede ser un elemento aislado o bien todo un "sistemas de prácticas". Por otro lado, en los procesos comunicativos que tienen lugar en la clase de matemáticas, no sólo intervienen entidades conceptuales, sino también situaciones problemáticas, medios expresivos y argumentos, los cuales también pueden ser contenidos (significados) de funciones semióticas.

En este artículo proponemos un modelo semiótico más completo que tiene en cuenta esta diversidad de objetos y procesos interpretativos. Lo estructuramos de la siguiente manera:

- Significados de los objetos matemáticos. La combinatoria elemental y sus elementos constitutivos.
- Dimensiones o facetas duales en la resolución de problemas combinatorios y la actividad matemática.
- Análisis comparativo de significados personales de la combinatoria elemental en cuatro estudiantes con preparación matemática avanzada. Implicaciones para la enseñanza de la combinatoria.
- Otras aplicaciones del análisis semiótico e implicaciones del modelo para la didáctica de la matemática.

ANTECEDENTES

La relación entre los signos usados para representar el conocimiento y los contextos que sirven para establecer el significado del mismo ha sido modelizada por diversos autores mediante esquemas de tipo triangular. Entre estos esquemas destacan los propuestos por Frege, Peirce, Ogden y Richards, así como la interpretación que hace Steinbring (1997) de ellos y que denomina triángulo epistemológico, incluyendo como elementos el concepto, signo/símbolo y objeto/contexto de referencia.

Vergnaud (1990, p. 36) también propone un esquema triangular para la estructura de un concepto matemático:

S: conjunto de situaciones que hacen significativo el concepto;

I: conjunto de invariantes que constituyen el concepto;

Z: conjunto de representaciones simbólicas usadas para presentar el concepto, sus propiedades y las situaciones a las que se refiere.

Estas modelizaciones del conocimiento matemático no explicitan si tales objetos (conceptos, y sus constituyentes) hacen referencia tanto a una realidad cognitiva individual como a otra cultural (institucional), o si se refieren a una sola de dichas realidades. Tampoco hacen referencia a las acciones de los sujetos ante las situaciones como origen del conocimiento. No se reconoce la dialéctica entre lo particular y lo general, entre las entidades ostensivas y no ostensivas, ni las relaciones instrumentales y representacionales entre las diversas entidades matemáticas.

Una modelización del conocimiento matemático, que resuelve en parte estas carencias, es la propuesta en la teoría antropológica de la didáctica de la matemática (Chevallard, 1992; 1997; Bosch y Chevallard, 1999). En esta teoría se definen los objetos matemáticos como praxeologías matemáticas las cuales están constituidas por la praxis (tareas, técnicas) y el logos (tecnología, teoría). Así mismo, modelizan la matemática como actividad humana y describen la dialéctica entre la acción situada y el discurso que la explica y justifica.

Pensamos, sin embargo, que en el componente discursivo de esta teoría es preciso diferenciar los *conceptos* y *proposiciones,* interpretados como reglas en el sentido de Wittgenstein (Baker y Hacker, 1985), y las *argumentaciones*. Esto permitirá realizar análisis más pormenorizados de la actividad matemática e incrementar la sensibilidad del investigador (y el profesor) hacia los procesos interpretativos por parte de los sujetos. Nos parece conveniente considerar además explícitamente el lenguaje, como un tercer componente de las praxeologías, junto con la praxis y el logos, apareciendo de este modo una nueva interpretación del "triángulo epistemológico", en una versión antropológica del conocimiento matemático.

Por otro lado, el problema epistémico-cognitivo no puede desligarse del ontológico. En los procesos comunicativos que tienen lugar en la educación matemática, no sólo hay que interpretar las entidades conceptuales, sino también las situaciones problemáticas y los propios medios expresivos y argumentativos. Por este motivo consideramos necesario elaborar una ontología simple, pero suficiente para describir la actividad y comunicación matemática.

El modelo ontológico-semiótico que describimos a continuación trata de aportar herramientas teóricas para analizar conjuntamente el pensamiento matemático, los ostensivos que le acompañan, las situaciones y los factores que condicionan su desarrollo. Así mismo, se tienen en cuenta facetas del conocimiento matemático que pueden ayudar a confrontar y articular distintos enfoques de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje y progresar hacia un modelo unificado de la cognición e instrucción matemática.

Este modelo desarrolla otros propuestos anteriormente (Godino y Batanero, 1994; 1998) sobre las nociones de “significado institucional y personal de un objeto matemático” en las que, desde supuestos pragmáticos, tratábamos de centrar el interés de la investigación en los conocimientos matemáticos institucionalizados, sin perder de vista el sujeto individual hacia el que se dirige el esfuerzo educativo.

Concebimos el significado de la “media aritmética” (o número real, función, etc.), en términos de los “sistemas de prácticas que realiza una persona para resolver cierto tipo de problemas”. Esas prácticas –acciones o manifestaciones operatorias y discursivas- pueden ser atribuidas a un sujeto individual, en cuyo caso hablamos de significado del objeto personal, o pueden ser compartidas en el seno de una institución y entonces decimos que se trata del significado del objeto institucional correspondiente.

Partimos también de la idea de significado en el sentido de Hjemslev, 1943, como el contenido de una función de signo, descrita por Eco (1979) como "función semiótica", interpretándola sencillamente como aquello a lo cual se refiere un sujeto en un momento y circunstancias dadas, y no solamente como entidad mental (supuesto básico de la semiótica de Saussure, 1916). En ciertos actos comunicativos nos referimos a “sistemas de prácticas”, mientras que en otros nos referimos a elementos constitutivos de tales sistemas. Admitimos incluso que las ideas o abstracciones pueden ser símbolos de otras ideas, en consonancia con la semiótica de Peirce (Eco, 1979).

El modelo ontológico que proponemos como instrumento analítico y explicativo de los fenómenos de cognición matemática incluye seis tipos de entidades primarias y cinco facetas duales desde las cuales se pueden contemplar dichas entidades primarias.

Entidades primarias:

(1) *Lenguaje* (términos, expresiones, notaciones, gráficos).

(2) *Situaciones* (problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, ejercicios, ...).

(3) *Acciones* del sujeto ante las tareas matemáticas (operaciones, algorítmos, técnicas de cálculo, procedimientos).

(4) *Conceptos*[2], dados mediante definiciones o descripciones (número, punto, recta, media, función, ...)

(5) *Propiedades*[4] o atributos de los objetos mencionados, que suelen darse como enunciados o proposiciones.

(6) *Argumentaciones* que se usan para validar y explicar las proposiciones (sean deductivas o de otro tipo).

Facetas de los objetos matemáticos:

Las entidades matemáticas, según las circunstancias contextuales y del juego de lenguaje en que participan, pueden ser consideradas desde las siguientes facetas o dimensiones duales:

- personal - institucional
- ostensiva - no ostensiva
- ejemplar – tipo
- elemental - sistémica
- expresión - contenido

En los apartados que siguen describiremos estos términos usando como ejemplo el campo de la combinatoria elemental. Posteriormente mostraremos utilidad de este modelo ontológico-semiótico para describir los procesos de resolución de una muestra de problemas combinatorios por parte de estudiantes universitarios. Este análisis muestra la complejidad cognitiva de la combinatoria elemental y explica la dificultad de la tarea por la existencia de conflictos semióticos así como por la aplicación incorrecta de elementos de significado de la combinatoria elemental que usualmente no son tenidos en cuenta en la enseñanza del tema.

[2] Los conceptos y propiedades son interpretados aquí como propone Wittgenstein, como "reglas gramaticales sobre el uso de símbolos y expresiones" para describir las situaciones y las acciones que realizamos ante dichas situaciones (Baker y Hacker, 1985, p. 285). Tales reglas cambian según la fenomenología, los juegos de lenguaje, las formas de vida, las instituciones. Otro uso habitual de 'concepto' es como sistema heterogéneo de objetos (situaciones, invariantes operatorios, representaciones) que se puede sustituir con ventaja por la noción de praxeología.

2. OBJETOS MATEMÁTICOS Y ELEMENTOS DE SIGNIFICADO: EL CASO DE LA COMBINATORIA ELEMENTAL

En lo que sigue consideraremos como objeto o entidad matemática "todo aquello que puede ser indicado, todo lo que puede señalarse o a lo cual puede hacerse referencia" (Blumer, 1982, p. 8), cuando hacemos, comunicamos o aprendemos matemáticas. Si queremos analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es necesario explicitar los distintos tipos de objetos mediante los cuales describiremos la actividad matemática y los productos resultantes de la misma. Consideremos, por ejemplo, el caso de la combinatoria. Encontramos en el trabajo con esta rama de las matemáticas diferentes tipos de objetos que describimos a continuación.

Las situaciones combinatorias

Son los problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas que inducen la actividad que llamamos combinatoria y a partir de las cuales han emergido los conceptos combinatorios. Un ejemplo es el siguiente:

> **Problema 1:** En un bombo hay cuatro bolas numeradas con los dígitos 2, 4, 7 y 9. Elegimos una bola del bombo y anotamos su número. La bola extraida se introduce en el bombo. Se elige una segunda bola y se anota su número. La bola extraida se vuelve a introducir en el bombo. Finalmente se elige una tercera bola y se anota su número. ¸Cuántos números de tres cifras podemos obtener? Ejemplo: se puede obtener el número 222.

El problema 1 es un ejemplo típico de una clase más amplia de *problemas de selección,* en los que se considera un conjunto de *m* objetos (generalmente distintos), de los cuales se extrae una muestra de *n* elementos. La palabra clave "extraer", incluida en el enunciado del problema, sugiere al resolutor la idea de obtener una muestra de bolas de entre los elementos de un conjunto. Podríamos sustituir las bolas por personas u objetos y cambiar el verbo clave por otros en los que también aparece la idea de muestreo, como "seleccionar", "coger", "elegir", "sacar", "tomar", etc.

Al seleccionar una muestra, a veces se puede repetir uno o más elementos, como en el problema 1 y otras veces no es posible. Según esta característica y si el orden en que la muestra es extraída es relevante o no, obtenemos las cuatro operaciones combinatorias básicas, que se muestran en la Tabla 1 (las permutaciones son un caso particular de las variaciones y las permutaciones con repetición un caso particular de éstas). En esta tabla usamos la siguiente notación: $VR_{m.n}$ para las variaciones sin repetición de *m* elementos tomados de *n* en *n*, $V_{m.n}$ para las variaciones sin repetición, $CR_{m.n}$ para las combinaciones con repetición y $C_{m,n}$ para las combinaciones ordinarias.

Tabla 1: Diferentes posibilidades en el esquema de selección

	Muestra ordenada	Muestra no ordenada
Reemplazamiento	$VR_{m,\ n}$	$CR_{m,\ n}$
No hay reemplazamiento	$V_{m,\ n}$	$C_{m,n}$

Otro tipo de problemas combinatorios según Dubois (1984) se refiere a la *colocación* de una serie de *n* objetos en *m* celdas, como en el siguiente:

> **Problema 2**. Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de diferentes colores: amarillo, blanco, crema y dorado. Si cada sobre sólo puede contener, a lo sumo, una carta. ¿De cuántas formas podemos colocar las tres cartas en los cuatro sobres diferentes? Ejemplo: podemos colocar una carta en el sobre amarillo, otra en el blanco y otra en el crema.

En este caso, intervienen dos conjuntos diferenciados de objetos (cartas y sobres) por lo que no es tan evidente aplicar la regla "ordenado/ no ordenado" para resolver el problema. En el ejemplo propuesto el conjunto de cartas es indistinguible; por tanto no puede ser ordenado, mientras que sí lo es el conjunto de sobres. Otros verbos claves que pueden considerarse en este modelo son: "colocar", "aparcar", "introducir", "asignar", "guardar", etc. La solución a este problema es $C_{4,3}$, pero hay muchas posibilidades diferentes en este modelo. dependiendo de las siguientes características:

- Si los objetos a colocar son idénticos;
- Si las celdas son idénticas o no;
- Si debemos ordenar los objetos colocados dentro de las celdas;
- Las condiciones que se añadan a la colocación, tales como el máximo número de objetos en cada celda (1 objeto como mucho en el problema 2).

No hay una operación combinatoria distinta para cada diferente posible colocación, y más aún, se puede obtener la misma operación combinatoria con diferentes problemas de colocación. Por ejemplo, podemos definir las variaciones como el número de formas de colocar *n* objetos diferentes en *m* celdas distintas (es irrelevante si la colocación es ordenada o no). En el caso de objetos indistinguibles, obtenemos las combinaciones.

También podemos obtener algunos tipos de colocaciones que no pueden expresarse con una operación combinatoria básica. Por ejemplo, si consideramos las colocaciones no ordenadas de *n* objetos diferentes en *m* celdas idénticas, obtenemos los números de Stirling de segundo género $S_{n,m}$. En consecuencia, no es posible traducir cada problema de colocación en un problema de muestreo. El lector interesado puede encontrar un estudio más completo de los números de Stirling en Grimaldi (1989) y de las diferentes posibilidades del modelo de colocación en Dubois (1984).

Asignar los *n* objetos a las *m* celdas es, desde un punto de vista matemático, equivalente a establecer una aplicación desde el conjunto de los *n* objetos al conjunto de las *m* celdas. Para las aplicaciones inyectivas obtenemos las variaciones ordinarias; en caso de una biyección obtenemos las permutaciones. Sin embargo, no hay definición directa para las combinaciones ordinarias usando la idea de aplicación. Mas aún, si consideramos una aplicación no inyectiva podríamos obtener un problema para el cual la solución no es una de las operaciones combinatorias básicas.

Finalmente, podríamos estar interesados en dividir un conjunto de n objetos en m subconjuntos, es decir, en efectuar una *partición* de un conjunto, como en el siguiente problema:

> **Problema 3:** Un niño tiene cuatro coches de colores diferentes (Azul, Blanco, Verde y Rojo) y decide repartírselos a sus hermanos Fernando, Luis y Teresa. ¿De cuántas formas diferentes puede repartir los coches a sus hermanos? Ejemplo: Podría dar los cuatro coches a su hermano Luis.

Podríamos visualizar la colocación de n objetos en m celdas como la partición de un conjunto de n elementos en m subconjuntos (las celdas). Por tanto, hay una correspondencia biyectiva entre los modelos de partición y colocación, aunque para el estudiante esto podría no ser tan evidente. Otros verbos claves asociados con la partición son: "dividir", "partir", "descomponer", "separar", etc. Consecuentemente, no podemos suponer que los tres tipos de problemas descritos (selección, colocación y partición) sean equivalentes en dificultad, incluso aunque puedan corresponder a la misma operación combinatoria.

Finalmente, en los problemas combinatorios compuestos uno o más problemas combinatorios simples se combinan por medio de la regla del producto, como en el caso siguiente, en que se combinan los modelos de colocación y selección mediante la regla del producto.

> **Problema 4.** Un niño tiene doce cartas: 9 de ellas son los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Las tres restantes son las figuras: sota, caballo y rey. ¿De cuántas maneras se pueden alinear cuatro de las doce cartas con la condición de que siempre estén seleccionadas las tres figuras? Ejemplo: sota caballo rey 1.

Queremos resaltar que todos los problemas analizados en este trabajo son problemas combinatorios de recuento en que se pide hallar el número de configuraciones combinatorias con una cierta estructura. No entraremos en el análisis de los problemas combinatorios de existencia, enumeración, clasificación y optimización que hemos descrito en Batanero, Godino y Navarro-Pelayo (1994).

El lenguaje combinatorio

Para resolver los problemas descritos, o para describirlos a otra persona necesitamos usar términos, expresiones, notaciones, gráficos. Así en el apartado anterior hemos usado palabras como *selección, colocación, partición, muestra, repetición, ordenación, variaciones, permutaciones, combinaciones, etc.*

Asimismo, la notación simbólica, como, por ejemplo $C_{4.2}$, $CR_{m.n}$ nos permite representar tanto objetos abstractos (combinaciones, combinaciones con repetición) como situaciones concretas (grupos de dos elementos entre cuatro, de n elementos entre m), y tanto valores numéricos concretos: el número 6 que corresponde a $C_{4.2}$ como variables. Posteriormente estas notaciones nos servirán para operar con las cantidades y variables representadas y por tanto, la notación no sólo tiene una función representacional, sino también instrumental.

Otros útiles de carácter lingüístico son las disposiciones tabulares (el famoso triángulo combinatorio sería un ejemplo típico), diagramas en árbol o de Venn, elementos figurativos e icónicos, etc. Como ejemplo, en la Figura 1 mostramos la solución de uno de los alumnos participantes en la investigación de Roa a los problemas 1 y 4.

Figura 1. Solución de Pedro al problema 1

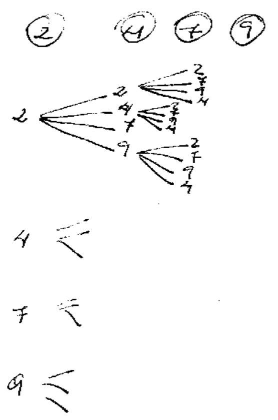
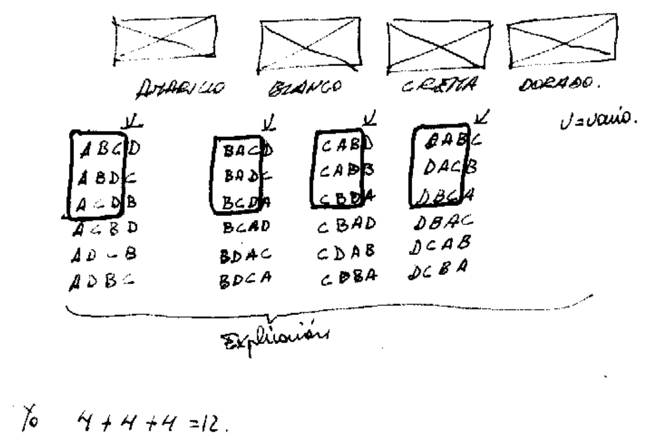


Figura 2. Solución de Pedro al problema 4



En un texto todos estos elementos vienen dados en forma escrita o gráfica pero en el trabajo matemático pueden usarse otros registros (oral, gestual; por ejemplo, en el caso de un alumno sordo que utiliza la lengua de signos).

Las acciones del sujeto ante las tareas matemáticas

Para resolver los problemas propuestos en el cuestionario se pueden aplicar diversas operaciones, algorítmos, técnicas de cálculo, procedimientos. Consideremos, como ejemplo el problema 3, uno de los que resultó más dificil en la investigación de Roa (9,4% de soluciones correctas).

En el enunciado de este problema se puede identificar con facilidad el esquema de partición (dividir el conjunto de cuatro coches distinguibles en uno o varios subconjuntos, para darlos a uno, dos o tres de los hermanos, que también son distinguibles). No se pone ningún tipo de condición, sobre el número de coches a repartir a cada uno de los hermanos. Se trata, por tanto de efectuar la partición de un conjunto de 4 elementos distinguibles (los coches) en 3 subconjuntos distinguibles (los hermanos), de los cuales uno al menos no es vacío y tal que la unión de estos subconjuntos produzca el conjunto original. No se considera el orden de los elementos dentro de cada subconjunto de la partición.

En los manuales escolares españoles las operaciones combinatorias se definen mediante el esquema de selección utilizando la tabla 1 que hemos mostrado anteriormente y ésta es, por tanto, la definición que conocen los alumnos de la muestra a la que se pasó el cuestionario, quienes habian estudiado combinatoria, tanto en secundaria, como durante la licenciatura. En consecuencia, las acciones que esperamos a priori hagan los alumnos de secundaria con instrucción o los estudiantes universitarios, para resolver este problema, serían las siguientes:

- *Traducción* del enunciado del problema (modelo de partición) a otro equivalente de selección, en el que puede aplicar con facilidad las fórmulas que conoce. Hacemos notar que hay que intercambiar los parámetros *m* y *n* en el proceso de traducción.
- *Identificar* las condiciones de realización de la acción: la selección de las personas es con reemplazamiento, ya que una misma persona puede recibir más de un coche; el orden de selección influye en la formación de las configuraciones.
- *Reconocer* las condiciones de aplicación del concepto de 'variaciones con repetición de 3 objetos tomados de 4 en 4'.
- Aplicar y desarrollar la fórmula $VR_{3,4} = 3^4$.
- Realización de las operaciones aritméticas $3^4 = 3x3x3x3 = 81$.

Esta sería una de las formas posibles de resolver el problema y aquellos alumnos que hayan hecho un curso avanzado de combinatoria podrían aplicar directamente el estudio del esquema de partición para hallar una fórmula directa. Asimismo, los alumnos sin instrucción o los alumnos que hayan olvidado la fórmula podrían aplicar un razonamiento arimético directo, o bien tratar de realizar una *enumeración* directa y sistemática de las diferentes posibilidades.

Conceptos[3]*combinatorios*

En la descripción anterior de la actividad matemática hemos visto que el sujeto, al resolver el problema no sólo realiza acciones sobre los símbolos u objetos materiales con los que opera, sino que en dicha actividad necesita evocar diferentes objetos matemáticos mediante sus definiciones o descripciones. Ejemplos de conceptos empleados en la resolución de los problemas anteriores son: configuración combinatoria, esquema de partición, selección, colocación, conjunto, subconjunto,

[3] El término 'concepto' lo usamos con dos sentidos diferentes que designaremos como concepto-sistema y concepto-regla (o concepto-definición). En el primer uso designa a un sistema praxeológico complejo, como cuando aparece para referir una determinada organización matemática (combinatoria, número real, función exponencial, etc.) e incluye un sistema de situaciones-problemas, técnicas y el discurso teórico que las describe y organiza. En el segundo caso el concepto se refiere a una de las posibles definiciones particulares de un objeto matemático, por ejemplo, las permutaciones como "número de formas diferentes en que se puede ordenar un número finito de objetos".

muestra, parámetros, variaciones, permutaciones, combinaciones. Consideramos a los conceptos como resultados de la realización de ciertos tipos de acciones.

Propiedades o atributos

Asimismo es preciso evocar o utilizar propiedades que suelen darse como enunciados o proposiciones. Las propiedades o atributos se refieren a condiciones de realización de las acciones, a características específicas de las situaciones y relaciones entre objetos. Por ejemplo, la selección de muestras puede ser con o si repetición, las muestras pueden ser ordenadas o no; las combinaciones se obtienen como cociente entre variaciones y permutaciones.

Argumentos

Finalmente, todas estas acciones y objetos se ligan entre si mediante argumentos o razonamientos que se usan para comprobar las soluciones de los problemas o explicar a otro la solución y que pueden ser deductivas, o de otro tipo. Por ejemplo, un alumno podría realizar una enumeración parcial o total de todas las formas de repartir los coches en el problema 4 para validar la solución obtenida por medio de una fórmula combinatoria.

Los seis tipos de objetos descritos, que se ponen en juego en la actividad matemática, son los constituyentes primarios de otros objetos más complejos u organizaciones matemáticas, como los sistemas conceptuales, teorías, etc. Las entidades lingüísticas tienen un papel representacional – se ponen en lugar de las restantes- y también instrumental, por lo que deben contemplarse además como instrumentos de la actividad matemática.

Las situaciones-problemas matemáticos promueven y contextualizan la actividad matemática, y junto con las acciones constituyen el componente praxémico (o fenomenológico) de las matemáticas, por lo que podemos considerarlos como *praxis* según propone Chevallard (1997). Los otros tres componentes (conceptos-definiciones, proposiciones, argumentaciones) desempeñan un papel normativo en las matemáticas. Son el resultado de una actividad reflexiva y regulativa de la praxis; y constituyen el componente teórico o discursivo (*logos*).

Este agrupamiento de las entidades matemáticas en praxis y logos no supone su independencia mutua. El lenguaje está presente de manera intrínseca y constitutiva tanto en la praxis como en el logos; el logos encuentra su razón de ser en la praxis y ésta se desarrolla y rige por el logos.

FACETAS O DIMENSIONES DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Además de diferenciar los tipos de entidades matemáticas descritas en el punto anterior, analizaremos a continuación las diferentes facetas o dimensiones duales desde las cuales se pueden considerar en diversos contextos y circunstancias.

Dimensión personal- institucional

Dependiendo de las circunstancias contextuales, podemos referirnos a un objeto personal o institucional en cada una de las categorias descritas: los problemas, lenguaje, acciones, conceptos, propiedades y argumentos pueden ser característicos de un sujeto aislado o bien ser compartidos dentro de una institución. En un análisis didáctico nos interesa diferenciar estos dos puntos de vista. Por ejemplo, si analizamos las respuestas de algunos estudiantes particulares a los problemas 1 a 4 nos interesa el punto de vista personal, que refleja los rasgos idiosincrásicos del conocimiento de cada alumno. Por otra parte, al preparar una pauta de evaluación de estos problemas, o si analizamos el libro de texto usado por el profesor de estos alumnos cuando estudiaron combinatoria, nos situamos en un punto de vista institucional, que servirá de referencia, para comprender y evaluar el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Desde un punto de vista institucional, en el problema 3 analizado en la sección anterior, se toman los coches a repartir como distinguibles, y esto condiciona la solución del problema y, por tanto, la operación combinatoria que utilizaríamos para resolverlo. Esta interpretación no fue obvia, sin embargo para los alumnos que completaron el cuestionario en la investigación de Roa (2000), para quienes el problema 3 fue uno de los más difíciles (menos del 10% de alumnos fueron capaces de resolverlo correctamente). Para tratar de explicar la dificultad de este problema y, en general, de todos los problemas propuestos, Roa (2000) realizó un análisis semiótico de las respuestas escritas y entrevistas a algunos de los alumnos participantes. Analizamos, a continuación la solución aportada al problema 3 por uno de los estudiantes (Caso 1: Pedro) para quien el significado de este problema no coincide con el significado institucional previsto.

Pedro tuvo una gran dificultad con los problemas combinatorios (sólo resuelve correctamente 5 problemas de los 13 propuestos, a pesar de haber estudiado la combinatoria tanto en primer curso de bachillerato como en el tercer curso de la licenciatura en la asignatura de Probabilidad y Estadística. En la entrevista que se le hizo mostró una gran inseguridad en las definiciones de las operaciones combinatorias y confusión de las fórmulas, no siendo capaz de aplicarlas para resolver los problemas. En general trata de resolverlos mediante enumeración total o parcial del conjunto de configuraciones. Reproducimos su solución al problema 3, que analizamos a continuación;

Figura 3. Solución de Pedro al problema 4.

400	*040*	*004*
301	*130*	*013*
310	*031*	*103*
220	*022*	*202*
121	*211*	*112*

Pedro introduce una notación para indicar el número de coches que pueden recibir las personas, pero no tiene en cuenta quien recibe dichas cantidades. No logra identificar las configuraciones que se deben contar. Aunque no lo especifica explícitamente, parece usar el esquema de partición implícito en el enunciado, puesto que en la notación se usan grupos de tres dígitos para representar el número de coches que recibe cada hermano.

Ha producido correctamente todas las descomposiciones ordenadas del número 4 en tres sumandos. El problema es que considera tanto los objetos como los conjuntos de la partición como indistinguibles, siendo distinguibles. Hay por tanto una interpretación incorrecta, desde el punto de vista institucional, de los datos del enunciado del problema. El alumno no ha sido capaz de percibir que los coches son distinguibles (atributo de la situación), aunque sí considera distinguibles los hermanos, como se pone de manifiesto en el siguiente extracto de su entrevista:

- **I:**¿Has entendido el enunciado?
- **P:** Si, hay cuatro coches y hay que repartírselos a tres hermanos pudiendo dar el número de coches que quieras a cada hermano.
- **I:**¿Qué pide el problema?
- **P:** De cuántas formas diferentes puedo repartirlos.
- **I:**¿Hay datos superfluos?
- **P:** Los colores, por ejemplo.
- **I:** Los colores, o sea que, ¿podría omitirse el hecho de que los coches sean de colores diferentes?.
- **P:** Si

Dimensión elemental / sistémica

En el estudio de la combinatoria por los alumnos los conceptos de variaciones, combinaciones y permutaciones se consideran como entidades compuestas, con una cierta organización o estructura. Por ello cuando nos referimos a estos conceptos, en general hacemos referencia a conceptos-sistema. Por ejemplo, se estudian las relaciones entre combinaciones y permutaciones sin repetición, las propiedades de los números combinatorios o la generación de estos números a partir del triángulo de Pascal, así como su relación con los coeficientes del desarrollo de la potencia del binomio.

En otros casos, puede interesar referirnos a un concepto, como un ente unitario. Por ejemplo, cuando analizamos el significado particular que se asigna a una expresión en un momento dado: *"las combinaciones de 4 elementos tomados 2 a 2"*. Esta distinción elemental - sistémico (o unitaria – compuesta) es aplicable a los otros tipos de elementos.

Dimensión ostensiva y no-ostensiva

En el ejemplo anterior, suponemos que Pedro ha usado el esquema de partición, porque la disposición de los símbolos que utiliza en la enumeración que presenta, así nos lo indica. Por ejemplo, suponemos que cuando Pedro escribe *400 040 004* en la primera línea está imaginando todas las *particiones* diferentes de *los cuatro coches* entre los *tres niños* del enunciado, de forma que sea uno sólo de los niños (*Fernando, Luis y Teresa)* el que reciba los cuatro coches. También suponemos que *400* quiere indicar que es Fernando el que recibe los coches. Idéntica interpretación damos al resto de la enumeración presentada por Pedro. Sin embargo, mientras que el alumno usa los numerales *0* y *4*, notación percetible, para hacer referencia a los números correspondientes (conceptos no perceptibles), también está usando en su solución otros conceptos (partición) y objetos fenomenológicos (niños, coches) que no son directamente perceptibles en su respuesta.

Es típico de la actividad matemática operar con objetos, tanto en forma ostensiva, esto es perceptible, como no ostensiva. En particular podemos considerar que el lenguaje permite dotar de una faceta ostensiva a los objetos matemáticos. Las entidades praxémicas y discursivas, son intrínsecamente diferentes de las lingüísticas, pero necesitan de éstas para su constitución y funcionamiento. Por otro lado, podría pensarse que las entidades lingüísticas sólo tendrían, en una primera aproximación, la faceta ostensiva. No obstante, desde el punto de vista del sujeto individual, todos los objetos lingüísticos pueden ser pensados.

Faceta Concreta – Abstracta

En el estudio de las matemáticas estamos siempre interesados por generalizar los problemas, las soluciones que encontramos y el discurso con el que se describen y organizan. No nos conformamos con resolver un problema aislado sino que deseamos resolver tipos de problemas y desarrollar técnicas cada vez más generales. Tales soluciones son organizadas y justificadas en estructuras cada vez más globales.

Veamos, por ejemplo la solución de otro estudiante (caso 2: Adolfo) al problema 2, que hemos descompuesto en unidades de análisis. Este alumno no recordaba las fórmulas ni las definiciones de las operaciones combinatorias (observamos que en las unidades U1, U6 llama combinaciones a las permutaciones, es decir el lenguaje que usa este alumno no está de acuerdo con el lenguaje institucional. Este alumno sin embargo es capaz de proporcionar una solución correcta (y así lo ha hecho con 12 de los 13 problemas, aunque nunca por medio de las fórmulas).

Figura 4 Solución de Adolfo al problema 2.

U1	Veo las combinaciones posibles que se pueden hacer con sota, caballo y rey y el orden importa.		
U2	sota, caballo, rey;	caballo, sota, rey;	rey, sota, caballo
	sota, rey, caballo;	caballo, rey, sota;	rey, caballo, sota
U3	Hay 6.		
U4	Si pongo el 1 en la 1ª posición y pongo a continuación cada una de las seis comb. Posibles anteriores tengo 6 maneras de alinear.		
U5	Si hago lo mismo poniendo el 1 en la 2ª posic., en la 3ª posición y en la 4ª posición, tengo en total 24 posibles para el 1, la sota, el caballo y el rey.		
U6	Como hay 9 números, análog. tendría para cada uno de estos números 24 comb. posibles.		
U7	Luego en total tengo 9.24 = 216 maneras de alinear.		

Adolfo usa acciones tales como la enumeración (U2), argumentos tales como la generalización (U5), propiedades matemáticas, como la regla del producto (U4; U7) y una variedad de medios expresivos que incluye números, palabras y símbolos (como el de igualdad). Observamos también la coexistencia de entidades ostensivas y no ostensivas (como algunas de las propiedades matemáticas que usa y las cartas de la baraja que se supone debe colocar en fila). El alumno ha obtenido una solución concreta al problema planteado. Sin embargo, una vez comprendido el proceso de llegar a la solución es capaz de generalizar a otras situaciones, y en este caso, tanto el problema, como la solución hallada se convierten en ejemplares concretos de un tipo abstracto de problema o de solución:

> *I: ¿Como resolverías el problema si hubiera muchas más cartas, por ejemplo treinta, y tuvieras que ponerlo en filas, por ejemplo de siete, en lugar de cuatro?*
>
> *A: Tal como lo he hecho aquí el que haya treinta cartas y los grupos fuesen de siete cartas no presenta problema porque, simplemente, voy a hacer las combinaciones de siete en siete y luego meter cada una de las otras, el problema sería hacer las combinaciones de las siete y, si me acordara de la fórmulas, las haría por la fórmula.*

Como muestra el ejemplo de este estudiante en la actividad matemática, o un estudio matemático particular, en unas circunstancias nos referimos a un objeto concreto (algo que se pone en juego por sí mismo, como el problema 2 y la solución de Adolfo al mismo). Otras veces (como en la parte trascrita de entrevista) consideramos a dicho objeto como representante de una clase de objetos mas amplia.

La distinción entre concreto y abstracto, es decir entre el *ejemplar* (algo particular, que se determina por sí mismo) y el *tipo* (objeto genérico que define una cierta clase o conjunto de objetos) es esencialmente relativa dependiendo del juego de lenguaje en que participen.

Dimensión Expresión – Contenido (significante – significado)

La actividad matemática y los procesos de construcción y uso de los objetos matemáticos se caracterizan por ser esencialmente relacionales. Los distintos objetos descritos, no son entidades aisladas, sino que se ponen en relación en el lenguaje y la actividad matemática for medio de *funciones semióticas*.

Utilizaremos este término en el sentido de Hjemslev[4] (1943), es decir de correspondencias (relaciones de dependencia o función) entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido o significado), establecidas por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio de correspondencia. Estos criterios pueden ser hábitos o convenios sobre los términos (funtivos) que se deben poner en correspondencia en ciertas circunstancias. La distinción entre expresión y contenido de una función semiótica nos permite tener en cuenta el carácter esencialmente relacional de la actividad matemática.

[4] Este autor llama *función semiótica* a la dependencia entre el texto y sus componentes y entre estos componentes entre sí.

Por ejemplo, en la transcripción de la solución dada por Adolfo al problema 3 (Figura 3) podemos indentificar ejemplos de funciones semióticas, en que diferentes entidades desempeñan el papel de expresión o contenido.

U1: la palabra *combinaciones* (elemento lingüístico) hace referencia a las formas posibles de permutar las tres cartas dadas (concepto de permutación*)*. Las palabras *sota, caballo, rey* hacen referencia a objetos físicos, en este caso a la situación problemática dada.

U2: El alumno ha producido una enumeración figurada de todas las permutaciones de las palabras sota, caballo y rey en forma de tabla. Cada una de estas permutaciones de las tres palabras hace referencia a una permutación de las tres cartas reales; es decir una situación (permutación de tres palabras) se pone en correspondencia con otra (permutación de tres objetos físicos) e igualmente el conjunto de todas las permuaciones de tres letras se pone en correspondencia con el conjunto de todas las permutaciones de los tres objetos. La acción del alumno (escribir la enumeración) hace referencia a otra acción (realizar físicamente las ordenaciones).

A lo largo de la entrevista, el alumno describe el proceso de resolución que seguiría en caso de aumentar el número de cartas, esta resolución descrita remite o se pone en correspondencia con la resolución real que haría el alumno en el nuevo problema.

Vemos en estos ejemplos que cualquiera de las diversas entidades pueden desempeñar el papel de expresión y contenido (significante y significado) de las funciones semióticas. Así podríamos hablar de "la demostración de la relación entre los números combinatorios y el desarrollo de la potencia del binomio" y la expresión verbal haria referencia a una entidad argumentativa.

Además, las relaciones de dependencia entre expresión y contenido pueden ser de tipo representacional, instrumental y cooperativa, como se muestra en diferentes ejemplos en la solución de Adolfo al problema 2.

En unos casos, un objeto se pone en lugar de otro, como en el caso de las palabras "sota" "caballo" "rey" en U2, y la relación es representacional. Será instrumental u operatoria si un objeto usa a otro u otros como instrumento, por ejemplo, en U7 encontramos la expresión $9.24 = 216$, donde el alumno realiza operaciones con los símbolos que se ponen en lugar de los números y las operaciones. No se multiplica (repite) realmente un número dado de objetos por otro, sino que esta acción se sustituye por la realización del algoritmo de la multiplicación que se realiza de una manera automática, o incluso, por medio de una calculadora.

En la unidad U2, cada conjunto de las tres palabras "sota caballo, rey" se usa de una forma componencial o cooperativa, en la que dos o más objetos (palabras) componen un sistema del que emergen nuevos objetos (una permutación de las tres palabras).

Síntesis del modelo

El esquema de la figura 5 resume el modelo ontológico-semiótico que proponemos como instrumento de análisis de la actividad matemática. Las entidades lingüísticas ocupan un lugar central ya que son necesarias para analizar la presencia y el papel desempeñado por las restantes entidades. Los ejemplos muestran la potencia de la visión semiótica que proponemos, que generaliza de manera radical la noción de representación, usada en las investigaciones cognitivas realizadas en educación matemática.

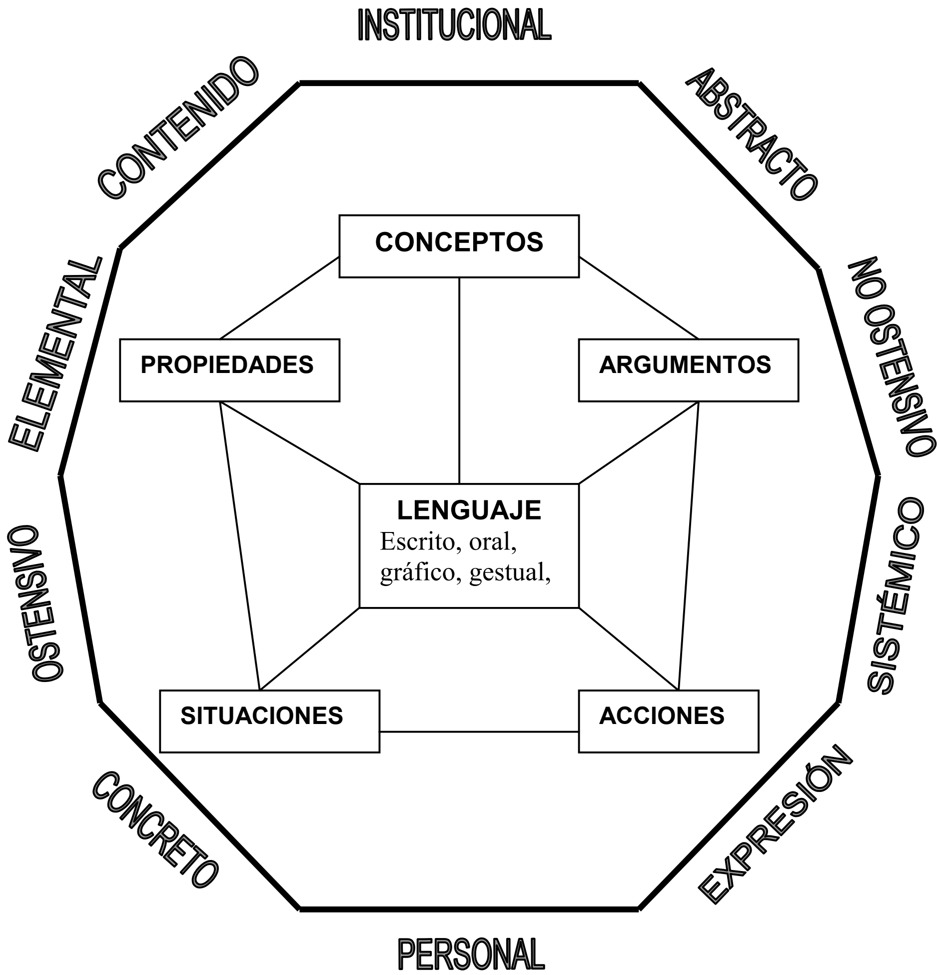


Figura 5: Componentes y facetas de la cognición matemática

En el modelo descrito interpretamos el conocimiento y la comprensión de cualquier objeto matemático O por parte de un sujeto X (persona o institución) en términos de las funciones semióticas que X puede establecer teniendo a O como uno de sus términos. Cada una de estas funciones semióticas constituye un *conocimiento* y equivale a hablar de significado. De ello resulta una variedad de tipos de conocimientos, en correspondencia con la diversidad de funciones semióticas que se pueden establecer entre las diversas entidades introducidas en el modelo.

Uno de los puntos diferenciadores de nuestro modelo teórico está en la descomposición analítica que proponemos para los conocimientos, tanto personales como institucionales. Junto a los conocimientos procedimentales y conceptuales (técnicas, conceptos y proposiciones) hemos considerado también los conocimientos situacionales o fenomenológicos (situaciones-problemas, tareas), lingüístico-notacionales y argumentativos-validativos.

Por otra parte, contemplamos la cognición matemática desde las facetas personal e institucional, entre las cuales se establecen relaciones dialécticas complejas pero cuyo estudio es esencial para la educación matemática. La "cognición personal" es el resultado del pensamiento y la acción del sujeto individual ante una cierta clase de problemas, mientras la "cognición institucional" es el resultado del diálogo, el convenio y la regulación en el seno de un grupo de individuos.

En nuestros trabajos anteriores (Godino y Batanero, 1994; 1998) hemos usado las nociones de *prácticas significativas* y *significado de un objeto* matemático, también desde el punto de vista personal e institucional. En dichos trabajos, definiamos una práctica significativa para una persona (resp. una institución) cuando cumple una función para resolver el problema, o para comunicar, validar o generalizar su solución y considerábamos el significado de un objeto como el sistema de prácticas significativas relacionadas con el mismo. Esta noción se amplia y precisa en este trabajo, donde también postulamos una tipología de objetos matemáticos y facetas de los mismos.

4. APLICACIÓN DEL MODELO EN EL ANÁLISIS DE LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA COMBINATORIO

Una consecuencia de este modelo teórico es que la evaluación de la comprensión debe contemplarse como el estudio de la correspondencia entre los significados personales e institucionales. La noción de función semiótica, así como la tipología de objetos y facetas que hemos descrito nos sirve para fundamentar una técnica analítica para llevar a cabo esta evaluación, que también podría aplicarse para analizar los significados institucionales y personales puestos en juego en cualquier proceso de instrucción matemática. A continuación aplicaremos esta técnica al análisis de las soluciones dadas al problema 4 por otros tres alumnos participantes en la investigación de Roa (2000).

En primer lugar analizaremos la solución correcta de Adolfo (el alumno analizado anteriormente como caso 2) a este problema, que se transcribe en la Figura 6. Observamos, en primer lugar, que Adolfo ha interpretado el problema según el esquema de partición de un conjunto (los coches a repartir) en subconjuntos (grupos de coches que da a cada hermano), sin condiciones adicionales, que es el sugerido en el enunciado del problema, sin intentar hacer una traducción al esquema de selección. Identifica correctamente todos los datos del problema. Observamos que Adolfo usa en el proceso los diversos tipos de objetos que hemos descrito anteriormente.

Adolfo necesita del *lenguaje matemático* para *representar* tanto los datos del problema (como el numeral 4 para representar el número de objetos a repartir y letras para representar los objetos), las acciones que realiza (como las palabras "da" y "repartir", o el símbolo de suma), e incluso los resultados de tales acciones (disposiciones tabulares para representar los resultados de los posibles repartos). También lo precisa para *operar* con los objetos; por ejemplo, para producir cada una de las particiones en U2.

Figura 6. Solución de Adolfo

U1	**Caso 1** *a) Le da los 4 coches a Fernando.* *b) Le da los 4 coches a Luis.*

c) Le da los 4 coches a Teresa.

U2 *<u>Caso 2:</u> Da los 4 coches a 2 de sus hermanos. Veamos que posibilidades hay:*

A) a) Fernando y Luis		*b) Fernando y Luis*		*c) Fernando y Luis*
(3 coche)	*(1 c.)*	*(2 coches)*	*(2 c.)*	*(1 coche) (3 c.)*
ABV	R	AB	VR	
ABR	V	AV	BR	Hay 4 formas
ARV	B	AR	VB	(análogo a a))
BRV	A	BV	AR	
		BR	AV	
		BR	AB	

U3 Hay 4 formas Hay 6 formas"

U4 Luego hay 14 formas diferentes de repartir entre Fernando y Luis.

U5 B)Análogamente hay 14 formas diferentes entre Fernando y Teresa.

U6 C)Análogamente hay 14 formas diferentes entre Luis y Teresa.

<u>Caso 3</u>: Todos los hermanos tienen algún coche.

A) a)Fernando 2,	*Luis 1,*	*Teresa 1*	*b)Fernando 2,*	*Luis 1,*	*Teresa 1*
AB	*V*	*R*	*BV*	*A*	*R*
AB	*R*	*V*	*BV*	*R*	*A*
AV	*B*	*R*	*BR*	*A*	*V*
AV	*R*	*B*	*BR*	*V*	*A*
AR	*B*	*V*	*BR*	*A*	*B*
AR	*V*	*B*	*RV*	*B*	*A*

U7 Luego el caso A) tiene 12 posibilidades distintas.

U8 Análogamente, el caso B) Luis 2, Fernando 1, Teresa 1 tiene 12
U9 posibilidades distintas.

Análogamente, el caso C) Teresa 2, Fernando 1, Luis 1 tiene 12 posibilidades distintas.

Sumando todas las opciones tengo:

Caso 1 + caso 2 + caso 3 = 3 + (14+14+14) + (12+12+12) = 81 formas diferentes

Adolfo realiza *acciones* para resolver el problema: aplica algoritmos (como la enumeración sistemática) y estrategias como analizar todas las diferentes posibilidades de partición del número 4. En cada uno de los pasos que sigue en su resolución fija algunas de las variables del problema. Por ejemplo, en U2 (caso 2) fija el número de coches que recibe cada una de las dos personas, que puede ser 3 y 1, 2 y 2 o 1 y 3. Resuelve para cada uno de estos casos el conjunto relacionado de subproblemas mediante recursión (que se usa para producir la permutación de los cuatro objetos a repartir). En cada subproblema se aplica la técnica de la enumeración sistemática como método de solución, apoyada en una notación simbólica para representar los coches y una disposición tabular que prueba la sistematicidad.

Durante el proceso de resolución, el estudiante se plantea nuevos *problemas* relacionados con el dado, aunque de menor complejidad, como el encontrar las diferentes formas de repartir los coches si los da todos al mismo hermano. En los pasos U1, U2 y U6 Adolfo usa la estrategia de descomponer el problema en subproblemas más simples: formas de repartir los 4 coches dando todos al mismo hermano (caso 1), repartiendo sólo entre dos hermanos (caso 2) y entre los tres (caso 3).

Adolfo aplica *propiedades*. En el paso U9 Adolfo reconoce y aplica la regla de la suma. Por último es capaz de realizar *argumentaciones* para validar los pasos que sigue en la resolución. En el paso U6 generaliza la igualdad del número de formas de repartir los coches de modo que un hermano reciba 1 coche y otro 3, que es independiente del hermano particular que lo reciba. También se usa la generalización en los pasos U4 y U5, así como en los pasos U7 y U8.

Resaltamos la complejidad de la solución dada por Adolfo, comparada con aplicar directamente la fórmula de las variaciones con repetición. Hay que destacar en este problema la gran destreza de Adolfo en la técnica de dividir el problema en subproblemas, en la enumeración y en el uso de la recursión.

Junto con las palabras, y símbolos (ostensivos) se identifican en la solución propuesta por Adolfo una variedad de objetos no ostensivos que son evocados por los anteriores por medio de funciones semióticas, tanto elementales (la palabra Fernando hace referencia a una sóla persona imaginaria) como sistémica (en la expresión "el caso A tiene 12 posibilidades", se hace referencia a un conjunto de particiones). En este ejemplo, los objetos son usados en modo concreto, se trata de un caso particular de partición, un número concreto de coches y niños a repartir. Sin embargo el alumno es capaz de considerar este ejemplo concreto como una caso particular de un tipo abstracto de problemas:

I: ¿Como resolverías este problema en vez de cuatro coches y tres hermanos fueran treinta coches y siete hermanos?

A: Aplicaría la fórmula.

I: ¿Y qué harías si no te acuerdas de la fórmula?

A: Supongo que haría lo mismo pero lo reduciría, procuraría encontrar todos los casos pero sería bastante complicado

Hemos analizado las soluciones de Pedro y Adolfo sólo desde un punto de vista global, pues sólo hemos querido mostrar la diversidad de objetos puestos en juego. Sin embargo, podemos hacer un análisis más detallado de la forma en que estos objetos son relacionados por medio de funciones semióticas, con el fin de identificar *conflictos semióticos* o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos alumnos o por alumno y el profesor.

En el caso de Juan (caso 1) se produce un conflicto semiótico entre el significado atribuido por el investigador al problema 3 y el atribuido por Juan al resolverlo. En el caso general cualquier conflicto entre personas o instituciones en interacción comunicativa, que pueda explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas lo consideramos como conflicto semiótico. Aplicaremos esta técnica al análisis de las soluciones dadas al problema 4 por otros dos alumnos

Caso 3: Luisa

En la Figura 7 transcribimos la solución de Luisa, quien estudió combinatoria en Bachillerato, así como también en el primer curso de la licenciatura (asignatura de Estadística). La alumna recordaba las fórmulas combinatorias, aunque tuvo que esforzarse para reconstruir algunas de ellas, ya que el esquema combinatorio que durante sus estudios se usó para definir las operaciones combinatorios fue el de selección, resultándole extraño el uso de las aplicaciones (esquema de colocación) en las definiciones de las operaciones combinatorias.

Resolvió 12 problemas correctamente, aplicando directamente la definición de las operaciones combinatorias y traduciendo, cuando era necesario el enunciado del problema al esquema de selección. El único problema que resuelve incorrectamente es precisamente el problema 4, donde no ha sido capaz de hacer una traducción conveniente del problema que le permita identificar la operación combinatoria. En la Figura 7 transcribimos la solución incorrecta de Luisa. En este caso analizaremos el proceso paso a paso para ver los puntos en que han sido precisos procesos interpretativos y cuáles han producido conflicos semióticos que originan una solución final errónea.

Figura 7. Solución de Luisa

U1	**A, B, V, R**
U2	*Hay que tener en cuenta que los coches son distinguibles.*
U3	*Casos:*
	Que le de a uno solo los 4 coches: 4 posibilidades.
	Que le de a uno 3 coches: $4.C_4^3$
	Que le de a uno 2 coches y a otro otros 2: $C_4^2 \,.\, 4 \,.\, 3$
	Que le de a uno 2 coches y a cada uno de los otros 2 un coche: $C_4^2 \,.\, 4 \,.\, C_3^2$
U4	*Que le de uno a cada uno:* P_4.
U5	*Se suman todas las posibilidades.*
	F L T
	4 0 0
	3 1 0
	3 0 1
	2 1 1
	2 2 0
	2 0 2
	1 3 0
	1 2 1
	1 1 2
	1 0 3
	0 4 0
	0 0 4
	0 3 1
	0 2 2
	0 1 3

U1: Luisa comienza a interpretar los datos del enunciado e introduce una notación simbólica (lenguaje) para designar los cuatro coches a repartir (situación problemática). Hay una correpondencia entre cada letra y cada expresión verbal de los objetos a repartir en el enunciado del problema, así como entre éstos y un coche real. Por ejemplo, la letra A (lenguaje) se usa en representación de la expresión "coche azul" (lenguaje) y esta expresión se usa en representación de un objeto físico real.

U2: Luisa empieza e intepretar el enunciado y reconoce que los objetos a repartir son distinguibles (una propiedad). Esta propiedad no está explicitada en el enunciado del problema, y la alumna debe reconocer que el color de los objetos, para este problema, puede ser es importante, en el sentido que puede inducir una ordenación (propiedad) en el conjunto de objetos (definición de conjunto ordenado y no ordenado), y que todo esto afecta a la resolución del problema de reparto (situación problemática).

U3: Para comenzar a resolver el problema, Luisa lo descompone en nuevos subproblemas que debe plantear correctamente (nuevas situaciones problemáticas); cada uno de ellos corresponde a una posible partición del número cuatro en sumandos. Ha formulado y resuelto, por tanto, un nuevo problema auxiliar (situación problemática) que es enumerar todas las particiones del número cuatro, lo cual hace usando la enumeración sistemática (acción). Observamos que Luisa no traduce el enunciado del problema, sino que usa directamente el esquema de partición (concepto) sugerido en el enunciado.

Trata de resolver cada problema usando las fórmulas que ya conoce, aunque produce errores, algunos de ellos de interpretación de los datos del enunciado. Veamos los pasos que sigue:

"Que le dé a uno solo los 4 coches: 4 posibilidades". Observamos que confunde el número de hermanos (3), con el número de coches a repartir (4) ya que las posibilidades si damos todos los coches al mismo niño serían sólo 3 en este caso, como vimos en el caso de Adolfo. Es decir, se ha producido un primer conflicto semiótico en la interpretación de los datos del problema, que, como veremos llevará a una solución errónea. Observamos también la complejidad del problema de partición, porque intervienen dos conjuntos diferentes: de coches y de niños, cada uno de los cuales puede estar formado por objetos distinguibles o indistinguibles, ser o no ordenado. Todos estos datos, así como el número de objetos de cada conjunto, sólo están implícitos en el enunciado y se requiere de procesos interpretativos por parte del alumno.

Seguiremos la resolución del problema, suponiendo que admitimos como correcto el hecho de que hay cuatro niños.

"Que le dé a uno 3 coches: $4.C_4^{3}$". Luisa sugiere que hay que seleccionar (acción) el niño al que se dará un coche, dando el resto a otro de los niños (4 casos según la interpretación dada). Nos lo expresa usando elementos linguísticos “uno” “coche”, “4” “3” que refiere a un niño, los coches y también a conceptos (el número uno, tres, cuatro). También observamos que Luisa sugiere las diferentes formas de seleccionar 3 coches entre los cuatro dados (una nueva acción, y una notación simbólica C_4^3 que lo representa y tiene, en este caso un significado sistémico, porque se refiere a un conjunto diferenciado de posibilidades, así como a la acción de repartir y los resultados de los repartos posibles.

Esta notación también está haciendo referencia a conceptos y sus definiciones: la idea de *combinación* como *elección* de una *muestra* de 3 objetos entre 4 dados, sin que el *orden* sea relevante. La alumna ha debido interpretar dichas definiciones y su aplicabilidad a la situación problemática que ella misma ha planteado (dar tres coches a uno de los niños y uno a otro de ellos) dando un valor adecuado (acción) a los parámetros (concepto). También identifica y aplica correctamente (acción) la regla del producto (propiedad). Debe además expresar por escrito su solución, identificando los símbolos (lenguaje) por los que representamos las combinaciones y sus parámetros, así como el producto por un numero.

"Que le dé a uno 2 coches y a otro otros 2: $C_4^2 . 4 . 3$". El razonamiento, así como los procesos interpretativos que debe seguir Luisa son similares al caso anterior,

por lo que los describimos sólo resumidamente. Luisa aplica de nuevo la regla del producto (propiedad) y la idea de combinación (definición) C_4^2 dando un valor adecuado a los parámetros (acción y definición) (elegir 2 coches entre cuatro); además aplica la recursión (acción), ya que para elegir el primer niño hay 4 casos y para elegir el segundo sólo quedan 3. Por último aplica la propiedad $C_m^n = C_m^{m-n}$. Asimismo vuelve a necesitar los elementos linguísticos para expresar su solución.

"Que le dé a uno 2 coches y a cada uno de los otros 2 un coche: $C_4^2 \cdot 4 \cdot C_3^2$". Usa un razonamiento similar, aunque ahora se produce un conflicto semiótico. Para elegir los dos coches que dará a uno de los hermanos usa correctamente la idea de combinación C_4^2; también es correcto el número de posibilidades de elegir al niño (4 casos). Pero para elegir a los otros dos niños a los que dará los coches restantes, hay una confusión de la operación combinatoria C_3^2 que debe ser las variaciones y no combinaciones puesto que los coches son distinguibles. Ha habido una identificación incorrecta de la idea de orden (concepto) que es necesaria también en el conjunto de niños, pero la alumna sólo la toma en cuenta en el conjunto de coches.

Probablemente este conflicto semiótico es inducido por la enseñanza, puesto que en la definición de las operaciones combinatorias que ha aprendido la alumna (en el modelo de selección) sólo hay un conjunto de referencia y sólo hay un orden posible, mientras que en el modelo de partición hay dos conjuntos cada uno de los cuales puede o no ser ordenado. De nuevo la alumna usa correctamente la notación de las combinaciones que es un objeto linguístico.

"Que le dé uno a cada uno: P_4." La alumna usa la idea de permutación (concepto) y su notación que estarían correctamente aplicadas en caso de que interprete que hay 4 niños en el reparto. Mediante elementos linguísticos se refiere, tanto a los conceptos, acciones y elementos fenomenológicos.

U4: "*Se suman todas las posibilidades".* La alumna identifica la regla de la suma (propiedad) y hace una aplicación correcta de la misma. Para ello se requiere reconocer que las particiones (concepto) anteriores son exhaustivas e incompatibles (propiedades).

U5: La alumna trata de comprobar la solución que ha dado (por tanto esta parte podemos considerarla como una argumentación). Para ello enumera (acción) las diversas particiones (el número total de particiones no llegó a ser calculado en los pasos anteriores). Se utiliza una nueva notación y una disposición tabular para hacer referencia a los niños y posibles particiones de los objetos. La alumna enumera las distintas descomposiciones del número 4 en sumandos (conceptos) y cada una de ellas representa una posible partición de los coches a repartir (resultado de una acción).

La enumeración realizada no es sistemática, aunque si completa. Un primer conflicto semiótico es que esta enumeración no es consistente con la interpretación de que hay cuatro niños, es decir con la solución anteriormente aportada. Otro conflicto semiótico es que no usa el hecho de que los coches son distinguibles, que había reconocido en la unidad U2. Solo tiene en cuenta el número de coches que recibe cada chico.

En resumen, diversos conflictos semióticos han llevado a una solución errónea del problema, aún cuando la alumna ha mostrado una gran capacidad combinatoria, en el planteamiento de nuevos subproblema, identificación de conceptos y propiedades (reglas de la suma y producto, conjunto, subconjunto, combinaciones, permutaciones, selección, partición, orden, parámetros) lenguaje y notaciones de las combinaciones y permutaciones, todo ello unido mediante argumentos correctos en su mayoría. La enumeración de la alumna no es completa y ha habido conflictos semióticos en la interpretación del número de elementos en los dos conjuntos que intervienen, así como en la necesidad de tener en cuenta el orden en los dos conjuntos. A pesar de no haber finalizado correctamente el problema, los conocimientos y capacidad combinatoria de esta alumna son altos, lo que coincide con el hecho de que resolvió correctamente los 12 problemas restantes.

Caso 4. Juan

Finalmente presentamos en la Figura 8 la solución dada por Juan al problema 4. En la entrevista que le hicimos este alumno dijo recordar las definiciones de las operaciones combinatorias y trató de resolver todos los problemas por medio de ellas, aunque sólo logró resolver cuatro problemas correctamente. Al preguntarle las definiciones de las operaciones combinatorias tuvo dificultades para recordarlas y sólo dió una definición correcta de las permutaciones ordinarias a pesar de que hace poco tiempo que habia enseñado este tema en clases particulares. Analizamos a continuación su solución.

Figura 8. Solución de Juan

U1	**A, B, V, R** **Fer., Luis, Ter.**
U2	*Cuenta el orden y la naturaleza de los elementos (el orden va a ser necesario para tener en cuenta cual coche se lleva cada hermano, es decir, es distinto que le toque a un hermano el coche verde que el azul) y, por tanto:*
U3	$V_{4,3} = 4!/(4-3)! = 4!/1! = 24$ *maneras posibles.*

U1: Juan introduce una doble notación simbólica para designar los distintos elementos del problema, tanto los coches, cuyo color representa por letras como los hermanos que representa por las abreviaturas de sus nombres (lenguaje que hace referencia a los elementos fenomenológicos del problema). Esta notación indica que interpreta correctamente el enunciado.

U2: Intenta resolver el problema aplicando el esquema de selección, que es el que ha estudiado en las definición de las operaciones combinatorias, lo que es consistente con su técnica general de tratar de identificar directamente la operación combinatoria para resolver los problemas. Para ello trata de traducir el problema (acción) a un enunciado de selección (concepto), siendo el único de los cuatro alumnos que hemos analizado que trata de hacer esta traducción.

Traduce la condición de ser coches distintos (propiedad) por tener en cuenta el orden (concepto) al seleccionar los coches (acción). Esta es una traducción correcta y no trivial, puesto que en el enunciado dado la idea de orden no aparece explícitamente. También identifica correctamente el hecho de que los elementos son distinguibles (propiedad).

U3: Trata de identificar directamente la operación combinatoria (concepto) que da la solución del problema aplicando su definición. El reconocimiento de la operación combinatoria es incorrecto (hay un conflicto semiótico referente al uso de una definición incorrecta). El alumno discrimina correctamente la relevancia o no del orden (concepto) en variaciones y combinaciones (conceptos).

Pero hay un conflicto semiótico al no identificar la posibilidad de repetición en el enunciado del problema, lo que le lleva a la operación de variaciones y no a variaciones con repetición, que sería la apropiada. Hay que reconocer que esta condición no es sencilla de identificar en el enunciado, porque se trata de traducir la condición de que un mismo hermano puede recibir más de un coche (que nunca se repiten) por otra nueva condición equivalente, que es que cada hermano puede ser seleccionado más de una vez en el reparto de coches. De nuevo el hecho de tratar con dos conjuntos diferentes (niños y coches) en cada uno de los cuales es posible repetir o no elementos, hace que la definición que conoce el alumno (modelo de selección) que se refiere a un solo conjunto produzca conflictos semióticos a la hora de aplicarlo en un contexto de partición.

También hay otro conflicto semiótico consistente en la identificación incorrecta de los parámetros (concepto), puesto que al traducir del esquema de partición al de selección los parámetros se intercambian entre si (propiedad). El alumno no los ha intercambiado, es decir, considera el conjunto del que ha de seleccionar los coches y no los niños. No identifica por tanto correctamente la población y muestra que interviene en el problema (conceptos). La solución del problema requiere reconocer que se trata de elegir, con repetición 4 personas entre un conjunto de 3 ($VR_{3,4}$), no modos de elegir sin repetición 3 objetos entre 4, como ha supuesto erróneamente Juan.

Trata de desarrollar la fórmula de la operación combinatoria para realización de los cálculos (actuativos). Hay un potencial conflicto en que en el desarrollo de la fórmula no se precisa el denominador, por lo que creemos que el alumno en realidad está inseguro respecto a las fórmulas, pero finalmente obtiene un número correcto de variaciones de cuatro elementos tomados tres a tres.

Síntesis de conocimientos puestos en juegos en la resolución del problema

El análisis realizado permite identificar los conocimientos puestos en juego correcta o incorrectamente por los alumnos en la resolución del problema, que se presentan en la Tabla 2 y ponen de manifiesto la complejidad de la tarea de resolución de este problema, aparentemente sencillo, así como la diversidad entre los cuatro alumnos que refleja una variedad del significado (sistémico o praxeológico) de la combinatoria elemental para los mismos. En el proceso de resolución se producen conflictos semióticos que llevan a error, debido a la disparidad entre el modelo de selección en que estos alumnos han aprendido de las definiciones combinatorias y las diversas situaciones (como por ejemplo, en un problema de partición) en que deben ser aplicadas dichas definiciones.

Sólo un alumno (Juan) trata de aplicar directamente la definición de operaciones combinatorias que ha estudiado mediante el esquema de selección, donde son enseñadas mediante una regla nemotécnica (importa-no importa el orden para diferenciar entre variaciones y combinaciones; hay o no repetición). Regla que resulta improductiva en los problemas que, como en el ejemplo se presentan en un esquema diferente (partición o colocación) si el alumno es incapaz de traducir el problema al esquema de selección.

Además en estos nuevos esquemas lo esencial para distinguir si se trata de variaciones o combinaciones es el hecho de que los objetos a repartir sean iguales o diferentes y para diferenciar si se admite la repetición es el hecho de que cada conjunto en la partición o distribución pueda tener más de un elemento.

Tabla 2. Conocimientos puestos en juego en la resolución del problema

	Adolfo	Luisa	Pedro	Juan
Problemas				
Planteamiento de problemas similares al	Correcta	Incorrecta		
dado de menor tamaño				
Planteamiento del problema de partición del	Correcta	Correcta	Correcta	
número 4 en sumandos				
Lenguaje				
Simbolización algebraica o numérica de los	Correcta	Correcta	Parcial	Correcta
elementos a combinar, según su naturaleza.				
Uso de disposiciones tabulares.	Correcta	Incorrecta	Correcta	
Notaciones y términos para denotar las		Correcta		Correcta
operaciones combinatorias.				
Expresión de la fórmulas combinatorias.				Correcta
Representación de los parámetros de las		Correcta		Incorrecta
fórmulas combinatorias.				
Expresión de las reglas de la suma producto	Correcta	Correcta		
y cociente.				
Expresión de las operaciones aritméticas.	Correcta			
Acciones				
Traducción entre esquemas operatorios.				Incorrecta
Desarrollo de una expresión combinatoria				Correcta
Enumeración	sistemáti	no	sistemáti	
Fijación de variables.	ca	sistemát.	ca	
Resolución recursiva del problema	Correcta	Correcta		
combinatorio simple.	Correcta			
Realización de las operaciones aritméticas				Correcta
correspondientes.	Correcta			
Conceptos (definiciones):				
Esquema de partición: conjunto,	Correcta	Correcta	Correcta	
subconjunto				Incorrecta
Muestreo	Correcta	Correcta	Correcta	
Partición.				
Conceptos combinatorios (variaciones,				
permutaciones, combinaciones)				
Propiedades:				
Identificación de las condiciones de	Correcta	Incorrecta	Incorrect	Incorrecta
realización del esquema (influencia del			a	
orden, repetición).		Correcta		Incorrecta
Condiciones de aplicación de las				
operaciones combinatorias.	Correcta	Correcta		
Reglas del producto, del cociente y de la				
suma; condiciones de aplicación.		Correcta		
Identifica propiedades combinatorias.				

Tipos de argumentos Justificación de las condiciones de aplicación del modelo combinatorio correspondiente. Enumeración como comprobación de algunas soluciones. Generalización	Correcta	Incorrecta		Incorrecta

Puesto que en este caso cada hermano (subconjunto de la partición) puede recibir más de un coche (objeto a repartir) las variaciones serían con repetición. Es improductiva también la definición para identificar los valores de los parámetros, que se intercambian en el esquema de partición y colocación, respecto al de selección, mientras que Juan no ha sido capaz de intercambiarlos.

En la imposibilidad de identificar la operación combinatoria directamente el alumno recurre a la división del problema en partes, formulando problemas relacionados con el dado, de menor tamaño, así como el problema de partición del número cuatro en sumandos (Adolfo, Luisa y Pedro). Sólo Adolfo ha sido capaz de plantear todos los subproblemas requeridos correctamente con identificación de las condiciones del enunciado inicial y cada uno de los subproblemas. Fallos en tener en cuenta que la persona que reciben los objetos (Pedro) y los objetos a repartir (Luisa y Pedro) son distinguibles, llevan a una solución incorrecta del problema original.

Al resolver bien el problema original o los subproblemas los alumnos realizan diferentes tipos de acciones. Una primera opción es traducir el esquema del enunciado al esquema de selección que sólo realiza Pedro de forma incorrecta. En el resto de casos se recurre a la enumeración, que en el caso de Luisa no llega a ser sistemática.

Adolfo y Luisa logran fijar con éxito valores de las variables del problema para lograr enunciar un problema más sencillo. En el caso de Adolfo resuelve correctamente la serie de problemas generados recursivamente. Luisa trata de resolver los pasos intermedios planteando fórmulas combinatorias, pero no llega a desarrollarlas ni calcular su valor. Mientras que Juan desarrolla y calcula la operación combinatoria que había identificado incorrectamente y por tanto que no le da la solución pedida.

Dependiendo de la forma de resolución los alumnos usan definiciones y propiedades de conceptos que varían de uno a otro alumno. Sólo Juan usa conceptos relacionados con el esquema de selección (incorrectamente), mientras los otros tres usan conceptos relacionados con el esquema de partición. Puesto que sólo Adolfo identifica correctamente las condiciones del esquema dadas en el enunciado, éste es un punto que influirá en la solución obtenida. Adolfo y Luisa ligan correctamente soluciones parciales mediante la regla de la suma y Luisa usa también una propiedad de los números combinatorios.

Los alumnos necesitan representaciones ostensivas para visualizar los conceptos y datos con los que están trabajando, entre otros la simbolización algebraica o numérica de los elementos a combinar, según su naturaleza, el uso de disposiciones tabulares, notaciones y términos para denotar las operaciones combinatorias, expresión de la fórmulas combinatorias, y sus parámetros, expresión de las reglas de la suma producto y cociente y de las operaciones aritméticas. También en este caso hay algunos conflictos semióticos.

Finalmente los alumnos usan argumentos tales como la generalización correcta (Adolfo) la enumeración (Luisa) y justificación de las condiciones del esquema (Juan) en estos dos últimos casos incorrectamente.

Es claro del análisis de los protocolos de resolución de este problema por los cuatro alumnos, que la actividad de resolución de los problemas requiere una diversidad de objetos que hemos explicitado en el análisis; estos objetos varían de uno a otro alumno y como hemos presentamos en forma resumida en la Tabla 1. Aunque, debido a las restricciones de espacio presentamos aquí el análisis de un solo problema, este mismo proceso fue repetido con los 12 problemas restantes, poniendo de manifiesto la pluralidad de conocimientos usados por los alumnos en la solución de los problemas, que para cada uno de ello constituye el *significado personal* (sistémico) de la combinatoria elemental.

La noción de *función semiótica* permite tener en cuenta la naturaleza esencialmente relacional de la actividad matemática y de los procesos de difusión del conocimiento matemático. En estas funciones semióticas, la correspondencia entre expresión y contenido se establece sobre la base de códigos explícitos o implícitos. Estos codigos pueden ser reglas (hábitos, convenios) que informan a los sujetos implicados sobre los elementos que se deben poner en correspondencia en las circunstancias fijadas. Un ejemplo de convenio que, en nuestro caso, ha sido explicitado en la enseñanza es asociar el ostensivo $V_{4,3}$ a las variaciones de cuatro elementos tomados tres a tres, así como las reglas de asociar valores a cada uno de los dos parámetros. En el problema analizado hay también convenios implícitos, como que el niño tiene que repartir todos los coches entre sus hermanos; este convenio no está explicitado en el enunciado del problema y, sin embargo, ha sido aplicado por los cuatro alumnos.

Este estudio sugiere que puede ser útil considerar un razonamiento matemático como secuencia de funciones semióticas (o cadena de conocimientos puestos en relación) en el proceso de resolución de un problema por parte de un sujeto. Se puede también describir un razonamiento como secuencia de prácticas actuativas y discursivas durante la resolución de un problema para un sujeto dado.

SÍNTESIS E IMPLICACIONES

La noción de significado, a pesar de su complejidad, puede desempeñar un papel esencial en la fundamentación y orientación de las investigaciones en didáctica de las matemáticas. Creemos que la pregunta de Ernest (1997) "¿puede la semiótica ofrecer la base para una teoría unificada de la educación matemática (y las matemáticas)" tiene una respuesta afirmativa, siempre que adoptemos una semiótica apropiada y la complementemos con una ontología que tenga en cuenta la variedad de objetos que se ponen en juego en la actividad matemática.

El modelo descrito en este trabajo incorpora elementos de las teorías pragmáticas (operacionales) y realistas (referenciales) del significado. Buscamos el significado de los términos y expresiones en su uso en los contextos institucionales y juegos de lenguaje de los que forman parte. Pero no renunciamos a la posibilidad de tratar como objetos emergentes a los usos prototípicos, que denotamos con nuevos términos y expresiones, puesto que la metáfora del objeto resulta útil para comprender el funcionamiento del pensamiento. De acuerdo con Ullmann (1962, p. 76), "el investigador debe comenzar por reunir una muestra adecuada de contextos y abordarlos luego con un espíritu abierto, permitiendo que el significado o los significados emerjan de los contextos mismos. Una vez que se ha concluido esta fase, puede pasar con seguridad a la fase "referencial" y procurar formular el significado o los significados así identificados. Nuestro significado comienza siendo pragmático, relativo al contexto, pero existen tipos de usos que permiten orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático. Estos tipos son objetivados mediante el lenguaje y constituyen los referentes del léxico institucional.

El modelo de cognición matemática descrito en este trabajo es fruto de un trabajo continuado desde 1994 (Godino y Batanero, 1994, Godino y Batanero, 1998; Godino y Batanero, 1999; Godino, 2002; Godino y Batanero, 2003). Se ha utilizado como marco teórico en diversas tesis doctorales y las publicaciones derivadas de ellas, revelándose como útil para caracterizar significados elementales y sistémicos puestos en juego en los procesos de estudio matemático. Así mismo, ha permitido aportar explicaciones de las dificultades y limitaciones en el aprendizaje matemático basadas en la naturaleza y complejidad de los objetos matemáticos. A nivel más general consideramos que permite confrontar herramientas propuestas por otros modelos teóricos para el análisis de la cognición matemática. A título de ejemplo mencionamos algunas de estas comparaciones entre nociones cognitivas.

a) Nuestra modelización semiótica del conocimiento permite interpretar la noción de *esquema* como la faceta interiorizada (no ostensiva) de los sistemas de prácticas personales, y las nociones de *concepto-en-acto*, *teorema-en-acto* y *concepción* (Vergnaud, 1990) como componentes parciales constituyentes de dichos sistemas de prácticas (correspondientes a las entidades funcionales primarias, concepto-regla y propiedad). Pueden desempeñar, por tanto, un papel en el análisis cognitivo, aunque sin perder de vista su parcialidad. El constructo "sistema de prácticas personales" se revela como un instrumento con mayores posibilidades descriptivas y explicativas al incorporar en un sistema organizado los componentes operatorios, situacionales, discursivos y lingüístico (ostensivos).

b) El uso que se hace en Teoría de Situaciones (Brousseau, 1997) de la noción de sentido queda restringido a la correspondencia entre un objeto matemático y la clase de situaciones de la cual emerge, y "le da su sentido" (podemos describirlo como “significado situacional”). Según nuestro modelo teórico esta correspondencia es sin duda crucial al aportar la razón de ser de tal objeto, su justificación u origen fenomenológico, pero también se tienen que tener en cuenta las correspondencias o funciones semióticas entre ese objeto y los restantes componentes operativos y discursivos del sistema de prácticas del que consideramos sobreviene el objeto.

En nuestro caso, la noción de significado (o sentido) de un objeto matemático es el contenido de cualquier función semiótica y, por tanto, según el acto comunicativo correspondiente, puede ser un objeto ostensivo o no ostensivo, concreto o abstracto, personal o institucional; puede referirse a un sistema de prácticas, o a un componente (situación-problema, una notación, un concepto, etc.).

c) La noción de representación (Goldin, 1998) y registro semiótico (Duval, 1993) usadas por diversos autores hacen alusión según nuestro modelo, a un tipo particular de función semiótica representacional entre objetos ostensivos y objetos no ostensivos mentales. La noción de función semiótica generaliza esta correspondencia a cualquier tipo de objetos y, además, contempla otros tipos de dependencias entre objetos (instrumental y componencial).

Los elementos teóricos descritos en este trabajo se centran en la dimensión cognitiva (en sentido individual e institucional) de los procesos de educación matemática. Sin embargo, somos conscientes que será necesario ampliar el modelo teórico con la inclusión de otras dimensiones que condicionan globalmente la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Se trata de las dimensiones instruccionales, afectivas (creencias, actitudes y emociones), axiológica (valores y fines de la educación matemática), política, curricular, etc. Estas dimensiones deberán ser objeto de atención en un enfoque unificado del análisis didáctico matemático.

REFERENCIAS

Baker, G., and Hacker, P. M. S. (1985). *Wittgenstein. Rules, Grammar and Necessity. An Analytical Commentary on the Philosophical Investigations* (Vol. 2). Glasgow: Basil Blackwell.

Batanero, C., Godino, J. D., & Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento combinatorio* (Cominatorial reasoning). Madrid: Síntesis.

Blumer, H. (1982). *El interaccionismo simbólico: Perspectiva y método* (Symbolic interactionism: Perspective and method). Barcelona: Hora. (Original work published in 1969).

Bosch, M. y Chevallard, Y. (1999), La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (1): 77-124.

Brousseau, B. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer A. P.

Cassirer, E. (1971). *Filosofía de las formas simbólicas* (Philosophy of symbolic forms). México: Fondo de Cultural Económica. Original work published in 1964.

Chevallard, Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approache anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12 (1): 73-112.

Chevallard, Y. (1997). Familièr et problématique, la figure du professeur (Familiar and problematic, the teacher's role). *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17(3), 17-54.

Cobb, P., & Bauersfeld, H. (Eds.) (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures.* Hillsdale, NY: Erlbaum.

Cobb, P., Yackel, & McClain, K. (2000) (Eds.). *Symbolizing and communications in mathematics classrooms*. London: Erlbaum.

Dubois, J. D. (1984). Une systematique des configurations combinatoires simples. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 37-57.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitive de la pensée (Register of semiotic representation and cognitive functioning of thought). *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.

Eco, U. (1979). *Tratado de Semiótica General*. Barcelona: Lumen.

Ellerton, N. F., & Clarkson, P. C. (1996). Language factors in mathematics teaching and learning. In A. J. Bishop et al. (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 987-1034). Dordrecht: Kluwer.

Ernest, P. (1993). Mathematical activity and rethoric: A social constructivist account. In I. Hirabasash, N. Nohda, K. Shigematsu, & F. Lin (Eds.), *Proceedings of the Seventeenth l Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol II, pp. 238-245). University of Tsukuba. Japan.

Ernest, P. (1997), Introduction: Semiotics, mathematics and mathematicas education. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, nº 10.

URL: http://www.ex.ac.uk/~PErnest/pome10/art1.htm
Godino, J. D. (1996). Mathematical concepts, their meaning, and understanding. In L. Puig, & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the Twentieth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. II, pp. 417-424). Valencia, Spain: University of Valencia.
Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques,* 22/23:
Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos (Institutional and personal meaning of mathematical objects). *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.
Godino, J. D., & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. In A. Sierpinska, & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.
Godino, J. D. y Batanero, C. (1999). The meanings of mathematical objects as analysis units for didactic of mathematics. En I. Schwank (Ed.). *European Reseach in Mathematics Education III*. CERME 1 (pp. 236-248). Osnabrück: Forschungsinstitu für Mathematikdidaktik
Godino, J. D. y Recio, A. M. (1998), A semiotic model for analysing the relationships between thought, language and context in mathematics education. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 3: 1.8. University of Stellenbosch, South Africa.
Goldin, G. (1998). Representations and the psychology of mathematics education: part II. *Journal of Mathematical Behaviour*, 17 (2): 135-165.
Grimaldi, R. (1989). *Discrete and combinatorial mathematics. An applied introduction*. Reading, MA: Addison-Wesley.
Hjemslev, L. (1971). *Prolegómenos a una teoría del lenguaje* (Preface to a theory of language). Madrid: Gredos. (Original work published in 1943).
Ogden, C. K., and Richard, R. A. (1923). *The meaning of meaning*. London: Routledge and Kegan.
Pimm, D. (1995). *Symbols and meanings in school mathematics*. London: Routledge.
Roa, R. (2000*). Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada* (Combinatorial reasoning in students with advanced mathematical training). Unpublished Ph.D. University of Granada, Spain.
Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London: The Falmer Press.
Sierpinska, A y Kilpatrick, J. (1998), (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity*. Dordrecht: Kluwer, A. P.
Steinbring, H. (1997). Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics,* 32: 49-92.
Ullman, S. (1962). *Semántica. Introducción a la ciencia del significado*. Madrid: Aguilar, 1978.
Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 10 (2, 3): 133-170
Vile, A., & Lerman, S. (1996). Semiotics as a descriptive framework in mathematics domain. In L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the Twentieth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vo.IV, pp. 395-402). Valencia, Spain; University of Valencia.
Vygotski, L. S. (1993). *Pensamiento y lenguaje*. [Obras escogidas II, pp. 9-287]. Madrid: Visor. (Original work published in 1934).