FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS BASADA EN LA *REFLEXIÓN GUIADA* SOBRE LA PRÁCTICA[1]

Juan D. Godino y Carmen Batanero
Universidad de Granada

Resumen

La reflexión sobre la propia experiencia matemática y sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje experimentados es necesaria para la apropiación y adaptación de los conocimientos didácticos por parte del profesor. Pero el análisis y reflexión didáctica requiere dominar y aplicar herramientas conceptuales y metodológicas adecuadas. En este trabajo presentamos un modelo de formación matemática y didáctica de profesores, resultado de nuestra experiencia como formadores, y apoyado en la aplicación del "enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática". La aplicación de las "guías de análisis didáctico", elaboradas a partir de dicho marco teórico, al diseño, implementación y evaluación de un proceso de estudio de un tema sobre estocástica con un grupo de estudiantes de magisterio permite describir el modelo formativo que aplicamos y reflexionar sobre su potencial utilidad en la formación de profesores.

Palabras clave: enfoque ontosemiótico; análisis y reflexión didáctica; formación de profesores; relación teoría y práctica

Abstract

Teachers need to reflect on their own mathematical practices and on the teaching and learning processes experienced to acquire and adapt their didactical knowledge. Nevertheless, this didactical analysis and reflection requires of the mastering and application of adequate conceptual and methodological tools. In this paper we present a model for the mathematical and didactical training of teachers that is result from our experience as mathematics educator, and is based on the application of the "onto-semiotic approach" to mathematical knowledge and instruction. We also apply a set of "guidelines for didactical analysis", based on our theoretical framework, to design, implement and assess a teaching and learning process about stochastics with a group of student teachers. This analysis allow us to describe the formative model that we are applying and to reflect on its potential utility in teacher training.

1. Introducción

En este trabajo describimos el modelo de formación matemática y didáctica de profesores que estamos experimentando en el que tratamos de aplicar los presupuestos asumidos por el "Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática" (EOS) (Godino y Batanero, 1998; Godino, Batanero y Roa, 2005; Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Batanero y Font, 2007)[2], y las herramientas de análisis didáctico derivadas de este marco teórico. Usaremos como contexto de reflexión el diseño, implementación y evaluación de una

[1] Versión ampliada de la Conferencia Invitada al VI CIBEM, Puerto Montt (Chile), 4-9 Enero 2009.
[2] Trabajos disponibles en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino

unidad temática del curso "Matemáticas y su didáctica" del plan de formación de maestros de Educación Primaria en la Universidad de Granada.

El *ciclo formativo* que describiremos contempla una etapa de estudio matemático en la que se implementa un modelo didáctico específico que los profesores en formación pueden adaptar de manera crítica a su futura enseñanza, y otra etapa de estudio didáctico en la que tienen oportunidad de aplicar las "guías de análisis y reflexión didáctica" a la experiencia de estudio matemático experimentada[3]. Mostraremos que los conocimientos y competencias puestas en juego en el ciclo formativo responden a un modelo de "conocimiento matemático y didáctico para la enseñanza" que articula y extiende otros de diversos autores: modelos PK (conocimiento pedagógico), CK (conocimiento del contenido), PCK (conocimiento pedagógico del contenido), y MKT (conocimiento matemático para la enseñanza) (Ball, Lubienski y Mewborn, 2000; Thames, Sleep, Bass y Ball, 2008).

En primer lugar, después de justificar nuestra opción metodológica de indagación de "trabajar desde dentro" y tratar de conectar la teoría con la práctica, presentamos nuestra interpretación de la *reflexión guiada*, enmarcándola en el campo de indagación sobre el profesional reflexivo. Analizamos a continuación las "competencias para el análisis didáctico" y enumeramos algunas de tales competencias específicas del profesor de matemáticas. Seguidamente describimos el ciclo formativo propuesto para futuros maestros de educación primaria y el modelo didáctico correspondiente.

En la sección 4.1 describimos una unidad temática sobre "Estocástica" que ha sido implementada en varios cursos académicos con distintos grupos de estudiantes de magisterio, en algunas de las cuáles hemos realizado una grabación audiovisual, por lo que disponemos de información para analizar con detalle las interacciones en el aula[4].

En las sección 4.2 a 4.4. presentamos y aplicamos a uno de los proyectos de análisis de datos incluidos en dicha unidad tres instrumentos de análisis didáctico: a) la "Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados", que tiene en cuenta de manera explícita las configuraciones de objetos y procesos matemáticos puestos en juego en la solución de los problemas, para identificar potenciales conflictos de significados y sistematizar las competencias matemáticas pretendidas; b) la "Guía para el Reconocimiento de Actos y Procesos de Significación", que permite identificar fenómenos didácticos relacionados con las interacciones profesor – estudiantes, estudiantes entre sí e interacciones con los recursos disponibles (medios tecnológicos y el tiempo), focalizados en la apropiación de los significados (aprendizaje) como objetivo final del proceso de estudio; c) la noción de *idoneidad didáctica* y la "Guía de Valoración de la Idoneidad Didáctica" como apoyo para evaluar el proceso de estudio en cada una de las dimensiones implicadas (epistémica, cognitiva-afectiva, instruccional (interacional, mediacional) y curricular/ ecológica).

Finalmente mostramos que la aplicación sistemática de las "guías de análisis y reflexión didáctica" contribuye, de una manera articulada, al desarrollo de las competencias matemáticas y didácticas del profesor de matemáticas descritas en la sección 3 y establece un

[3] En la materia de Currículo de matemáticas se profundiza en el modelo de análisis aplicándolo a procesos de estudio planificados por los estudiantes sobre temas curriculares de primaria.
[4] Este diseño es una aplicación de la "Guía para el Diseño Unidades Temáticas" en la que el núcleo central es la selección de situaciones – problemas "ricas" que pongan en juego el sistema de prácticas matemáticas operativas y discursivas pretendidas y su temporalización.

puente que permite salvar la brecha entre los modelos teóricos centrados en el estudio de la enseñanza y los que se refieren al aprendizaje (Oser y Baeriswyl, 2001).

Terminamos el trabajo con algunas observaciones finales sobre la importancia del análisis de la propia experiencia de estudio matemático, apoyada en el uso de instrumentos adecuados, en la formación del profesor de matemáticas. Esta experiencia será la base para contextualizar y sistematizar los conocimientos didácticos disponibles.

2. Articulando teoría y práctica en la formación de profesores de matemáticas

Un componente de nuestra actividad como investigadores en Didáctica de las Matemáticas y formadores de profesores de matemáticas es el compromiso con la Teoría de la Educación Matemática, campo en el que estamos aportando un marco teórico denominado "Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática" (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007). Este marco teórico trata de articular distintas aproximaciones a la investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a partir de supuestos de tipo antropológico y semiótico sobre la actividad matemática y los procesos de estudio correspondientes.

Actualmente estamos interesados en aplicar el "enfoque ontosemiótico" a la formación de profesores de matemáticas (Godino y cols., 2008), y al diseño, implementación y evaluación de nuestra propia práctica. Ello es debido a que nuestra experiencia como formadores de profesores de matemáticas nos ha llevado a valorar la importancia de enseñarles con la misma metodología que tratamos de transmitirles. Puesto que tenemos a nuestro cargo tanto la formación matemática como didáctica de los futuros maestros, tenemos la oportunidad de poner en práctica con nuestros estudiantes las teorías y modelos didácticos que en cada momento consideramos más pertinentes como resultados de la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. De esta manera se intenta integrar la formación matemática de los futuros profesores con la formación didáctica, aplicando el "principio del isomorfismo", esto es, "la idea de que los profesores en formación deben ser enseñados de la misma manera que se espera que ellos enseñen como profesores" (Ponte y Chapman, 2008, p. 238).

Así mismo, se trata de aplicar la estrategia metodológica y de indagación descrita por Ball (2000) como de "trabajar desde dentro", esto es, de usar la propia práctica como lugar para estudiar la enseñanza y el aprendizaje. Además, compartimos las ideas de Jaworski y Gellert (2003) cuando afirman, "es valioso considerar la teoría y la práctica no como polos distantes sino elementos de actividad cognitiva reflexivamente conectados. La teoría psicológica, sociológica y educativa, aunque no esté empíricamente apoyada de manera explícita, se trata de una reflexión humana sobre la práctica" (p. 832).

En el EOS se adoptan unos presupuestos socioculturales-antropológicos (Bloor, 1983; Wittgenstein, 1953) sobre la matemática y unos presupuestos socio-constructivas (Vygotsky, 1934) e interaccionistas (Blumer, 1969; Coob y Bauersfeld, 1995) sobre el aprendizaje, de los cuales se deriva un modelo didáctico para el estudio de las matemáticas. También se vienen desarrollando elementos operativos para analizar las diversas dimensiones y facetas a tener en cuenta en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, esto es, las dimensiones epistémica (significados institucionales), cognitiva-afectiva, (significados personales), instruccional (interaccional y mediacional) y curricular /ecológica.

Se trata de hacer operativas las nociones de práctica matemática, configuración epistémica y cognitiva, configuración didáctica, dimensión normativa e idoneidad didáctica[5] mediante unas "guías" para el reconocimiento de objetos y procesos matemáticos, interacciones didácticas, normas y metanormas que soportan y restringen los procesos de estudio, y para la valoración de la idoneidad didáctica de los mismos. Estas guías proporcionan unas herramientas para el análisis y reflexión didáctica (en las fases de planificación curricular, implementación en el aula, evaluación de los aprendizajes y la idoneidad didáctica), que los formadores de profesores e investigadores pueden aplicar, y debidamente adaptadas pueden ser también útiles para el profesor de matemáticas de cualquier nivel.

Reflexión sobre la práctica

El valor de la reflexión sobre la experiencia como un medio para estimular el aprendizaje ha sido destacado desde hace varias décadas. Schön (1983) describió la reflexión como "una continua interacción entre el pensamiento y la acción" (p. 281); y describió al "práctico reflexivo" como la persona que "reflexiona sobre las comprensiones implícitas en la propia acción, que las hace explícitas, las critica, reestructura y aplica en la acción futura" (p. 50).

En una revisión de los modelos de reflexión que se han descrito, Rogers (2001) encontró como definición más común de reflexión como el proceso que permite al aprendiz a "integrar la comprensión lograda en la propia experiencia con el fin de capacitarle para realizar mejores elecciones o acciones en el futuro así como estimular la propia efectividad global". Llinares y Kainer (2006) destacan que, "La práctica reflexiva ofrece una perspectiva de cómo los estudiantes para profesor aprenden sobre la enseñanza y proporciona información sobre los cambios en su enseñanza de las matemáticas. La reflexión de los estudiantes para profesor es un componente clave en esta visión del aprendizaje y se asume que uno aprende mediante la reflexión sobre la propia experiencia" (p. 437).

En trabajos recientes de diversos campos se ha introducido el concepto de "Reflexión guiada" como un proceso de indagación innovador en el que el práctico es asistido por un mentor (o "guía") mediante un proceso de auto-indagación, desarrollo, y aprendizaje a través de la reflexión, con el fin de llegar a ser enteramente efectivo (Johns, 2002). También en el campo de la formación de profesores encontramos referencias en las que se informan de investigaciones en las que se desarrollan y experimentan técnicas específicas de "reflexión guiada" (Nolan, 2008).

En este trabajo sobre formación de futuros profesores ampliamos el significado de la expresión "reflexión guiada" para incluir no solo la reflexión en la etapa de contacto con las prácticas de inducción en las escuelas, o la práctica docente del profesor, sino también en las etapas de formación académica. Por otra parte, pensamos que la reflexión sobre los distintos aspectos y momentos de la práctica tiene que realizarse mediante el apoyo, no solo del formador en su labor de tutor o supervisor, sino que la "guía" o ayuda hace referencia a un sistema de indicadores, o pautas, que llama la atención sobre aspectos críticos de dicha práctica. Estas guías proporcionan una estructura para la reflexión, entendida de manera holística (Klein, 2008), articulada (Ash y Clayton, 2004), guiada (Husu, Toom, y Patrikainen, 2008), crítica (Harrison, Lawson y Wortley, 2005) y cooperativa (Tomlinson, 2008).

[5] Remitimos al lector a Godino, Batanero y Font (2007) donde describimos estas nociones teóricas.

3. Competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas

El término *competencia* ha penetrado fuertemente en el discurso de la educación matemática, sobre todo en los ámbitos del desarrollo curricular, la práctica de la enseñanza y la evaluación, donde se habla con frecuencia de "enseñar por competencias". En este contexto, competencia es la facultad de movilizar un conjunto de recursos cognoscitivos (conocimientos, capacidades, información, etc.) para enfrentarse con pertinencia y eficacia a una familia de situaciones.

En diversos trabajos anteriores (Godino, Batanero y Font, 2007; D'Amore, Godino, Arrigo y Fandiño, 2003) hemos atribuido a la noción de *conocimiento* el carácter holístico que el enfoque pedagógico/curricular atribuye a la noción de competencia. Desde un punto de vista pragmático, conocer/saber implica el uso competente de los objetos constituyentes del conocimiento, la capacidad de relacionar entre sí dichos objetos, o sea, comprender, y de aplicarlos a la solución de problemas. Así mismo, en la investigación sobre formación de profesores se ha extendido la expresión "conocimiento matemático para la enseñanza" (Ball, Lubienski y Mewborn, 2000) donde "conocimiento" se usa también en el sentido holístico mencionado.

En el Informe Final del Proyecto Tuning (González y Wagenaar, 2003), las competencias y han sido entendidas como "conocer y comprender" —conocimiento teórico de un campo académico—, "saber cómo actuar" —aplicación práctica y operativa del conocimiento a ciertas situaciones— y "saber cómo ser" —valores como parte integrante de la forma de percibir a los otros y vivir en un contexto social—. Entre las competencias generales (o transversales) incluidas en el mencionado informe se encuentran las *instrumentales* (herramientas para el aprendizaje y la formación): Análisis y Síntesis; Organización y planificación; Conocimientos generales básicos; Conocimientos básicos de la profesión. Entre las competencias *sistémicas* (capacidades que dan visión de conjunto y sirven para gestionar el total de la actuación) se incluyen: Aplicar los conocimientos a la práctica; Habilidades de investigación; Capacidad de aprender (aprender a aprender); Adaptación a nuevas situaciones; Diseño y gestión de proyectos. Las competencias específicas se dividen en dos grandes grupos: aquellas relacionadas con la formación disciplinar —competencias disciplinares y académicas (saber) — y la formación profesional —competencias profesionales —.

Estas competencias generales y específicas se pueden concretar en el caso del profesor de matemáticas en lo que podemos llamar competencia para el "análisis, la síntesis y la acción didáctica", esto es, para analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, sintetizar el complejo de conocimientos aportados por la Didáctica de la Matemática, y actuar con idoneidad en el diseño, implementación y evaluación de la propia práctica docente.[6] El profesor de matemáticas debe tener competencia matemática, es decir, conocer y ser capaz de aplicar las prácticas matemáticas necesarias para resolver los problemas usualmente

[6] Se trata de un acercamiento a las competencias desde la complejidad (Tejada, 2007) asumiendo que "una competencia es el producto de la interacción dialéctica y permanente entre la reflexión y la acción, entendiéndose por reflexión la posibilidad de análisis, conceptualización, sistematización, procesamiento, teorización, inferencia, etc., y la acción como la posibilidad de desempeño, de hacer, de actuar, de ejecutar" (Tejada, 2007, p. 47).

abordables en el aula Pero desde el punto de vista de la enseñanza y el aprendizaje, el profesor debe ser también capaz de analizar la actividad matemática realizada al resolver los problemas, identificando los objetos y significados puestos en juego, con el fin de enriquecer su desempeño y contribuir al desarrollo de sus competencias profesionales.

Una de las tareas clave del profesor de matemáticas es la selección y adaptación de situaciones–problema que promuevan la contextualización de los contenidos matemáticos, su aplicación y ejercitación. Los problemas no pueden ser excesivamente puntuales/aislados, sino que deben permitir la articulación de las distintas competencias matemáticas, y por tanto, tener un carácter globalizador. Pero no es suficiente disponer de "situaciones ricas", se requiere avanzar hacia la organización de configuraciones y trayectorias didácticas (Godino, Contreras y Font, 2006) idóneas desde el punto de vista epistémico, cognitivo e instruccional. Para ello hay que tener en cuenta los roles potenciales del profesor, de los estudiantes, los recursos y patrones de interacción en sistemas didácticos.

La organización y gestión de todos estos recursos por parte del profesor le demanda el desarrollo de competencias de análisis de los objetos matemáticos y significados que se ponen en juego en la enseñanza a fin de prever conflictos de significados y distintas posibilidades de institucionalización de los conocimientos matemáticos implicados. Es por ello necesario tener en cuenta en la formación matemática y didáctica de profesores problemas cuya solución ponga en juego competencias de distintos bloques de contenido disciplinar (aritmética, geometría, medida, estocástica, razonamiento algebraico), otras áreas curriculares (conocimiento del medio y la sociedad), y de manera especial que promuevan la articulación entre las competencias de tipo matemático y didáctico. A continuación clasificamos las competencias didácticas necesarias en la formación de los profesores, teniendo en cuenta algunos aspectos del enfoque ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2007).

1. Competencias de diseño e implementación de procesos de estudio matemático:

- Seleccionar y reelaborar los *problemas matemáticos* idóneos para los alumnos de los distintos niveles, usando los recursos apropiados en cada circunstancia.

- *Definir, enunciar y justificar* los *conceptos, procedimientos* y *propiedades* matemáticas, teniendo en cuenta las nociones previas necesarias y los procesos implicados en su comprensión.

- Implementar *configuraciones didácticas*[7] que permitan identificar y resolver los *conflictos semióticos* en la *interacción didáctica* y optimizar el aprendizaje matemático de los alumnos.

- Reconocer el sistema de *normas sociales y disciplinares* que restringen y posibilitan el desarrollo de los procesos de estudio matemático y aportan explicaciones plausibles de los fenómenos didácticos.

2. Competencias didácticas específicas y de valoración de la idoneidad didáctica:

[7] Sistema de acciones del profesor y los estudiantes a propósito del estudio de una situación-problema, usando los recursos correspondientes.

- Conocer las aportaciones de la Didáctica de la Matemática a la enseñanza y aprendizaje de los bloques de contenidos y procesos matemáticos tratados en educación primaria (secundaria), referidas a: desarrollo histórico (desde una perspectiva epistemológica), orientaciones curriculares, etapas de aprendizaje, errores y dificultades, patrones de interacción didáctica y sus efectos en el aprendizaje, uso de recursos tecnológicos y materiales manipulativos, instrumentos de evaluación, etc[8].

- Valorar la idoneidad didáctica de los procesos de estudio planificados o implementados en sus distintas dimensiones (*epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica*), teniendo en cuenta el conocimiento descrito anteriormente.

- Desarrollar una actitud positiva hacia la enseñanza de las matemáticas, de modo que valore tanto su papel formativo como su utilidad en la educación de los ciudadanos y profesionales.

Ciclo formativo sobre matemáticas y didáctica de la matemática

El desarrollo de las competencias anteriores es un desafío complejo para los formadores de profesores por la diversidad de dimensiones y componentes a tener en cuenta, en particular los propios conocimientos matemáticos de los estudiantes.

En lo que sigue proponemos un *ciclo formativo* que estamos experimentando en la formación en matemáticas y su didáctica para futuros profesores, que incluye los siguientes tipos de situaciones – problemas:

1) Resolución de problemas de acuerdo a un modelo didáctico socio - constructivo – interaccionista, en particular problemas que históricamente tuvieron un papel en la creación de conocimiento matemático.

2) Reflexión epistémico - cognitiva sobre los objetos y significados[9] puestos en juego en la resolución de problemas, incluyendo items y respuestas en pruebas de evaluación.

3) Análisis de las interacciones en la clase de matemáticas, orientado al reconocimiento de actos y procesos de significación.

4) Análisis de recursos para la enseñanza, incluyendo las orientaciones curriculares, libros de texto, material manipulativo y tecnológico.

5) Análisis del sistema de normas que condicionan y soportan la actividad de estudio matemático.

6) Valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio matemático.

[8] Estos conocimientos le van a permitir reconstruir un significado de referencia matemática y didáctica para los procesos de estudio pretendidos o implementados, y en consecuencia emitir un juicio valorativo sobre los mismos que oriente el incremento de la idoneidad didáctica de tales procesos (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007).

[9] Los objetos y significados matemáticos sobre los que se orienta la reflexión se describen en Godino, Batanero y Font (2007), así como los supuestos antropológicos que sirven de base al "enfoque ontosemiótico". Los estudiantes son introducidos progresivamente en el reconocimiento de tales objetos y procesos, así como a la perspectiva plural y relativista del significado de los objetos matemáticos.

En estas situaciones se implementa una trayectoria didáctica que contempla las siguientes fases o momentos:

1) Presentación de las consignas; 2) Exploración personal; 3) Trabajo cooperativo en equipos para elaborar una respuesta compartida; 4) Presentación y discusión; 5) Institucionalización por el formador, explicitando los conocimientos pretendidos; 6) Estudio personal de documentos de trabajo seleccionados, apoyado por las tutorías individuales y grupales.

En las siguientes secciones presentamos un ejemplo de aplicación del ciclo formativo mencionado basado en el diseño e implementación de una unidad temática sobre "Estocástica" para futuros profesores de educación primaria[10]. También utilizamos este ejemplo para describir las "Guías para el análisis didáctico" que hacen operativos los supuestos y nociones teóricas del EOS.

La figura 1 resume los tipos de análisis que el profesor de matemáticas debería ser capaz de realizar, apoyado en el uso de las "guías" que se describirán la siguiente sección.

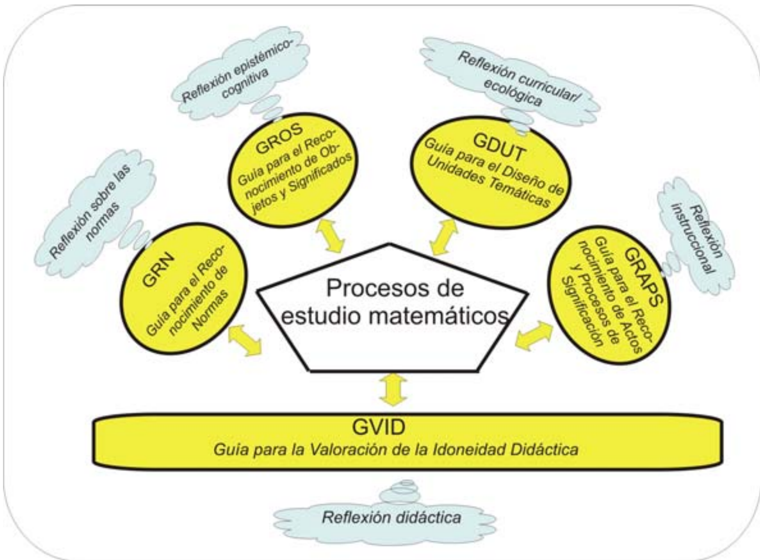

Figura 1: Formación didáctica basada en la reflexión guiada

El conjunto de las guías indican un ciclo de reflexión que se debe iniciar con la reconstrucción de un *significado de referencia* mediante la consulta de los libros de texto, experiencias e investigaciones previas. Este estudio proporcionará un banco de actividades y una descripción de las prácticas matemáticas (operatorias y discursivas) puestas en juego en la realización de dichas actividades y relativas al contexto al cual se dirige la planificación.

4. Guías para el análisis y la reflexión didáctica

4.1. Guía para el diseño de unidades temáticas

La primera competencia a desarrollar en el profesor es la capacidad de diseño de unidades didácticas adecuadas. En este apartado incluimos una guía que puede ser útil al profesor en

[10] En el anexo 1 incluimos uno de los tres proyectos de análisis de datos en que se basa el desarrollo del tema. El uso de este proyecto con alumnos de educación primaria requeriría algunas simplificaciones.

su planificación de unidades temáticas (que denominaremos Guía para el diseño de la unidad temática, y en forma abreviada, GDUT). La tabla 1 incluye el esquema de diseño mencionado, aplicado a la unidad sobre "Estadística y probabilidad".

Tabla 1: Guía para el diseño de la unidad temática (GDUT)

COMPONENTE	DESCRIPCIÓN
Motivación curricular	La estadística es hoy una parte de la educación general deseable para los ciudadanos, quienes precisan adquirir la capacidad de lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos que con frecuencia aparecen en los medios de comunicación.
Objetivos generales	• Que los alumnos lleguen a comprender y a apreciar el papel de la estadística en la sociedad, incluyendo sus diferentes campos de aplicación y el modo en que la estadística ha contribuido a su desarrollo. • Que los alumnos lleguen a comprender y a valorar el método estadístico, esto es, la clase de preguntas que un uso inteligente de la estadística puede responder, las formas básicas de razonamiento estadístico, su potencia y limitaciones. • Mostrar a los estudiantes aplicaciones de la Estadística para resolver problemas reales.
Competencias transversales genéricas	Capacidades de resolución de problemas, comunicación, uso de ordenadores, trabajo cooperativo y en grupo.
Contenidos	La Estadística y sus usos. Población, muestra y variables estadísticas. Tablas y gráficos. Medidas de posición central. Medidas de dispersión. Fenómenos aleatorios. Concepto de probabilidad y diferentes aproximaciones a la misma. Asignación de probabilidad: regla de Laplace. La Estadística como conocimiento cultural.
Metodología:	
Sesión 1 (gran grupo, aula habitual)	*Primera hora:* Se comenzará con la realización del proyecto "Lanzamiento de dos dados" (Anexo 1A, planteamiento de la situación, resolución, análisis de conocimientos puestos en juego y ficha de trabajo para los estudiantes). *Segunda hora:* Presentación y discusión de los informes elaborados por los equipos de alumnos. Sistematización de los conocimientos pretendidos (nociones y procedimientos estadísticos-probabilísticos elementales). (Anexo 1B, diapositivas que apoyan la sistematización de los conocimientos pretendidos). El proceso de estudio de las nociones estocásticas elementales iniciado en esta sesión presencial deberá complementarse con el estudio personal de los alumnos de la lección "Probabilidad" del texto de referencia para el curso (Godino y cols, 2004), incluido en el Anexo 1C, y la realización de ejercicios y aplicaciones complementarias (Anexo 1D). Este estudio personal será asistido por las sesiones de tutoría individualizada y grupal.
Sesiones, 2, 3 y 4 …	…
Evaluación	El componente teórico será evaluado mediante la realización de un examen escrito en el que el estudiante deberá resolver una situación-problema que implique la aplicación de las nociones y procedimientos estadísticos - probabilísticos estudiados en las sesiones de clase. La evaluación tendrá también en cuenta la asistencia y participación en las sesiones de clases prácticas, así como la calidad de los informes solicitados en los correspondientes Cuadernos de trabajo en equipo.
Bibliografía	Batanero y Godino (2002), …
Anexos	…

Tras explicitar la motivación del tema, los objetivos y competencias matemáticas generales que se pretenden- en consonancia con el marco curricular que define el perfil profesional correspondiente_, se definen los contenidos a incluir y se pasa a seleccionar una muestra de situaciones de contextualización – iniciación para cada una de las sesiones de clase programadas. La solución experta de las situaciones se deberá analizar para identificar las competencias específicas que efectivamente se ponen en juego[11]. El diseño de la unidad temática deberá incluir también la metodología y los procedimientos de evaluación.

La selección de las situaciones – problemas de contextualización/ iniciación, ejercitación y aplicación, y las configuraciones epistémicas correspondientes, adecuadas para el proyecto educativo que se diseña, requiere del estudio sistemático de la bibliografía de Didáctica de la Matemática específica del tema en cuestión. Este estudio se orienta a la reconstrucción de un *significado de referencia* para el proceso de estudio pretendido. En nuestro caso, para realizar dicha reconstrucción, hemos partido de los textos de Batanero (2001) y Batanero y Godino (2002), así como de nuestra experiencia previa en el campo de la Educación Estadística.

Como se menciona en el ejemplo, la fase de contextualización, discusión colectiva y sistematización de los conocimientos puestos en juego en la sesión presencial deberá ser complementada con el estudio personal de los estudiantes, apoyado en el uso de documentos de trabajo específicos y bibliografía complementaria, así como con la realización de actividades de ejercitación.

Aunque en la tabla el nivel de descripción de la planificación es genérico, se espera que el futuro profesor complemente la planificación presentada en una tabla similar a la 1 con la inclusión de diversos anexos en los que detalle las situaciones-problemas (proyectos) y las configuraciones epistémicas asociadas, los documentos de estudio complementarios (desarrollo del tema, ejercicios y aplicaciones) y las diapositivas que apoyarán la sistematización de los conocimientos pretendidos.

4.2. Guía para el reconocimiento de objetos y significados

La gestión de los conocimientos puestos en juego en la realización del proyecto propuesto requiere, que el futuro profesor, tras la resolución detallada de las situaciones problemáticas incluidas en mismo, analice los objetos intervinientes y emergentes en dicha solución, y los significados que se les atribuye en el contexto específico. La tabla 2 incluye la “Guía para el reconocimiento de objetos y significados” (GROS), que se proporciona al futuro maestro para guiarle en este análisis y que acá es aplicada al proyecto “Lanzamiento de dos dados” implementado como situación introductoria en la sesión 1. La realización del proyecto pone en juego “el conocimiento común del contenido”, por parte del futuro profesor, mientras que el análisis y la reflexión sobre los objetos y significados moviliza y desarrolla su “conocimiento especializado del contenido para la enseñanza” (Hill, Ball y Schilling, 2008).

Tabla 2: Guía para el reconocimiento de objetos y significados (GROS)[12]

Objetos:	Significados (referencia / uso, intención):
Situaciones – problemas 1) Determinación del carácter equitativo de un juego de azar (suma de puntos al lanzar dos dados)	Reflexión sobre intuiciones probabilísticas en situaciones de juegos de azar.

[11] En la siguiente sección propondremos realizar este análisis aplicando la herramienta “Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados”.
[12] No se incluye un análisis exhaustivo de los objetos y significados puestos en juego en la realización del proyecto. El análisis se puede ampliar teniendo en cuenta, no solo los procesos de significación, sino otros tipos de procesos descritos en el EOS (generalización – particularización; materialización – idealización; personalización – institucionalización; etc.)

2) Estudio intuitivo de la ley empírica de los grandes números	Desarrollo de competencias estocásticas básicas
Elementos lingüísticos Términos y expresiones conceptuales Tabla de doble entrada Tabla de valores, probabilidades/ frecuencias Diagrama de barras Diagrama de líneas	 Conceptos o propiedades correspondientes Recuento de casos posibles Distribuciones de probabilidad/ frecuencia Convergencia y fluctuaciones empíricas de las frecuencias (ley empírica de los grandes números)
Conceptos – definición Experimento aleatorio Espacio muestral Variable aleatoria Probabilidad Distribución de probabilidad (triangular) Juego equitativo Variable estadística Distribución de frecuencias	 Lanzar dos dados y observar la suma de puntos Conjunto de las 11 sumas posibles al lanzar dos dados Variable (símbolo) que puede tomar los valores del espacio muestral; valor de la suma de los datos Grado de creencia en que un suceso ocurra; proporción de casos favorables entre posibles; frecuencia de ocurrencia en una serie larga Sistema formado por los valores posibles de la suma de puntos y sus probabilidades Situación competitiva en la que los jugadores tienen igual esperanza matemática de ganar Variable (símbolo) que toma los valores de la suma de puntos en la muestra de 100 experimentos Sistema formado por los valores de la suma de puntos en el experimento y sus frecuencias.
Propiedades 1) Simetría del dado, equiprobabilidad 2) Regla de Laplace 3) P(A) = 20/36; P(B)= 16/36 4) Ley empírica de los grandes números 5) La convergencia de frecuencia relativa a la probabilidad es lenta y presenta fluctuaciones	 No hay razón para preferir un caso sobre otro Regla de cálculo de probabilidades de sucesos Al compararlas se ve que el juego no es equitativo Permite estimar las frecuencias conociendo la probabilidad Permite explicar diferencias entre frecuencias relativas y probabilidades en series cortas
Procedimientos Formación sistemática de las sumas posibles Tabulación de frecuencias y probabilidades Cálculo de probabilidades Elaboración de diagramas de barras Comparación de frecuencias y probabilidades en un gráfico cartesiano	 Construcción del espacio muestral Construcción de las distribuciones de frecuencias / probabilidades, expresadas numéricamente Cálculo de probabilidades en el experimento Representación de de las distribuciones de frecuencias y de probabilidades Estudiar las diferencias entre frecuencias y probabilidades
Argumentos 1) Convención social (no hay razones para suponer que las caras no tengan simetría) 2) Deducción a partir de 1) 3) Deducción a partir de 2) 4) y 5) Comprobación empírica con simulaciones	 Justifica la equiprobabilidad, razonamiento en base a normas Justifica la regla de Laplace; razonamiento deductivo Justifica el cálculo de las probabilidades de ganar A y B Justifica que A no haya ganado en la serie de 100 lanzamientos, razonamiento tipo empirico
Conflictos potenciales: Confusión frecuencia- probabilidad, sesgo de equiprobabilidad, "recencia" positiva o negativa, creencia en la ley de los pequeños números, errores en razonamiento proporcional, errores en la elaboración de las gráficas, por ejemplo, confundir la variable dependiente e independiente, confundir frecuencia y valor de la variable,...	

La reconstrucción de la configuración de objetos y significados, como la incluida en la tabla 2, para las distintas situaciones-problemas usadas en un proceso de estudio es necesaria para que el profesor pueda gestionar las interacciones en el aula, y decidir posibles institucionalizaciones de los conocimientos puestos en juego. La confrontación de este análisis con las investigaciones previas y la propia experiencia docente permitirá prever potenciales conflictos de significado que deberán ser tenidos en cuenta. El análisis se puede completar con la identificación de los procesos matemáticos intervinientes (especialmente, particularización – generalización; materialización – idealización) (Font, Godino y Contreras, 2008).

El análisis de los conflictos potenciales que los estudiantes pueden tener en el estudio del tema requiere la revisión de la literatura correspondiente sobre las concepciones (correctas o incorrectas), formas de conocimiento y tipos de comprensiones (Even y Tirosh, 2002) de los estudiantes[13] sobre los distintos objetos matemáticos en la situación. La GROS se puede aplicar también como ayuda para analizar sistemáticamente las configuraciones cognitivas iniciales y finales de los estudiantes.

4.3. Guía para el reconocimiento de procesos de significación en las interacciones de aula

Es también necesario analizar cómo interaccionan el profesor con los estudiantes, y estos entre sí, a propósito de cuestiones específicas relacionadas con las competencias matemáticas que se desean desarrollar en los estudiantes. El modelo epistemológico y cognitivo del EOS aporta elementos en los que centrar la atención: la dialéctica entre los significados personales e institucionales de los objetos, esto es, las situaciones problemas, los elementos lingüísticos, definiciones, propiedades, procedimientos y argumentos. Partiendo de los significados iniciales de los estudiantes habrá que observar el progresivo acoplamiento de dichos significados a los pretendidos por el profesor, para lo cual la identificación de los momentos conflictivos y de negociación de significados deberán ser de atención preferente. Habrá que ver si el problema ha sido transferido y asumido por los estudiantes, si los conceptos, propiedades, procedimientos y argumentaciones que se ponen en juego concuerdan con los pretendidos.

La tabla 3 incluye un resumen de los principales actos y procesos de significación que hemos identificado en el proceso de estudio que usamos como ejemplo. Distinguimos los actos y procesos ligados a objetos y procesos matemáticos (problematización, representación, definición, enunciación, algoritmización, argumentación, generalización) de los correspondientes a los procesos didácticos (institucionalización, evaluación, atribución de autonomía al estudiante y de trabajo cooperativo, gestión del tiempo y de los recursos, …). La información incluida en la tabla 3 se ha obtenido usando la grabación audio-visual de la sesión.

Tabla 3: Guía para el Reconocimiento de Procesos de Significación (GRAPS)[14]

PROCESOS MATEMÁTICOS	ACTOS Y PROCESOS DE SIGNIFICACIÓN:

[13] Este complejo multidimensional que en la literatura de investigación se describe como “conocimiento y comprensión”, concepciones, competencias, …, se describe en el EOS con la noción de “configuración cognitiva”.

[14] El análisis exhaustivo de las interacciones en el aula utilizando la metodología descrita en Godino, Contreras y Font (2006) queda fuera del alcance de este trabajo. Aquí presentamos una versión simplificada del análisis de las interacciones en el aula basado en el EOS.

Problematización: Asunción del problema por los estudiantes	En distintos momentos el profesor se esfuerza en que los grupos de estudiantes entiendan las cuestiones planteadas y las resuelvan. La simulación del lanzamiento de dos dados usando la tabla de números aleatorios motivó frecuentes y reiteradas aclaraciones. Finalmente se observa que los estudiantes se involucran en la solución del problema.
Representación: - Expresión del espacio muestral del experimento, "observar el resultado de lanzar dos dados" en forma de tabla de doble entrada (sucesos equiprobables) (E1). - Idem "observar la suma de puntos" (sucesos no equiprobables) - Sustitución del lanzamiento efectivo de los dos dados por la selección de una secuencia de pares de números de la tabla de números aleatorios.	Algunos alumnos han construido personalmente el E1, pero no el E2. E1 es presentado por una alumna, y ratificado por el profesor, quien también menciona E2, insistiendo en que en este caso los sucesos elementales no son equiprobables. El significado de la tabla de números aleatorios motivó frecuentes intervenciones del profesor; parece que la mayoría de los alumnos logran simular el lanzamiento.
Definición: Reconocimiento de los espacios muestrales Variable estadística Variable aleatoria Distribuciones de frecuencias Distribuciones de probabilidad	Los alumnos no reconocen como espacio muestral de la suma de puntos el conjunto de las sumas posibles. Fijan la atención en los 36 pares de números al lanzar los dos dados, pero no en la suma. Las definiciones de los conceptos, hechas de modo informal, quedan a cargo del profesor.
Enunciación: - Asignación de probabilidades a cada suma posible (distribución de probabilidad). Regla de Laplace -Ley empírica de los grandes números (convergencia lenta y con fluctuaciones)	Algunos alumnos logran asignar las probabilidades a las sumas posibles, y reconocen que la muestra de 10 lanzamientos es pequeña para asegurar que ganará A. El enunciado y explicación de la ley de los grandes números queda a cargo del profesor, que lo hace de manera empírica e intuitiva usando dos applets de simulación.
Algoritmización: Formación de espacios muestrales Cálculo de probabilidades usando la regla de Laplace	Ha resultado conflictivo el reconocimiento del espacio muestral que se debe formar para asignar probabilidades de ganar A y B. El profesor se esfuerza por aclarar esta dificultad de manera individualizada
Argumentación: Construcción del espacio muestral adecuado Empírica /intuitiva mediante simulación con muestras de tamaño progresivamente creciente	Dos alumnas explican que el jugador A tiene más probabilidades de ganar construyendo el espacio de los 36 casos posibles. La argumentación de las características de la ley empírica de los grandes números la hace el profesor
Generalización: Simulación de casos de lanzamiento de dos dados (10, 100, 1000, 10000) Variable aleatoria, distribución de probabilidad como generalizaciones de las variables y distribuciones estadísticas.	Algunos alumnos intuyen que es necesario aumentar el tamaño de muestra para los resultados experimentales concuerden con las previsiones teóricas. Pero el peso del proceso de generalización e idealización está a cargo del profesor.
PROCESOS DIDÁCTICOS	
Institucionalización: Sistematización de los conocimientos (configuración epistémica incluida en la sección 5)	El final de la primera hora y prácticamente la segunda hora es dedicada por el profesor para sistematizar los conocimientos puestos en juego. Deja como tarea para casa completar la "Guía de objetos y significados", pero realmente no se dedica tiempo a esta fase de reflexión epistémica.

Evaluación: - Observación del trabajo de los equipos - Hojas de respuestas escritas - Explicaciones de alumnos en la pizarra y en la fase de discusión	El profesor reconoce las dos dificultades básicas que aparecen: 1) la simulación con la tabla de números aleatorios; 2) la asignación de probabilidades a cada suma posible de dos dados. Varios alumnos, incluso después de la explicación colectiva insisten en considerar que B tiene más posibilidades porque en 7 casos gana, mientras que A lo hace en 4 (sin tener en cuenta que no son sucesos equiprobables) El profesor explica la solución a estos alumnos, en un formato tipo "efecto Jourdain" (Brousseau, 1986).
Autonomía y trabajo cooperativo: - En la primera hora los alumnos trabajan de manera personal sobre las cuestiones. Dos alumnos explican a toda la clase, con el refuerzo del profesor las soluciones correctas. - En la segunda hora predomina la presentación del profesor.	-Algunas intervenciones del docente con algunos equipos siguieron un patrón de interacción calificable como "efecto Jourdain".
Gestión de la heterogeneidad: El 20% de los alumnos afirman que nunca han estudiado probabilidad, mientras que algunos logran de manera autónoma resolver la tarea completa.	El profesor atiende de manera personalizada las dificultades de los alumnos para que entiendan la simulación y sugerirles que las sumas de puntos no son equiprobables.
Ejercitación y aplicación: El final de la segunda hora de clase propone como ejercicio que construyan la tabla de la distribución de probabilidad de la suma de puntos	A pesar de que en la pizarra una de las alumnas escribió las probabilidades de obtener cada suma, y que en la sistematización de conocimientos el profesor presenta la distribución de probabilidades en forma tabular, los alumnos muestran dificultades para realizar la actividad, la cual se asigna al final como tarea para casa.
Gestión del tiempo y de los recursos: - El tiempo asignado a la tarea permitió responder a las diversas cuestiones	Los alumnos que estudiaron por primera vez estas cuestiones mostraron dificultades que indican la necesidad de realizar nuevas actividades de ejercitación y aplicación, así como usar el tiempo asignado a la atención personalizada.

El análisis descrito de los patrones de interacción en el aula, focalizado en el reconocimiento de los actos y procesos de significación, constituye un componente de lo que en otras perspectivas teóricas se describe como análisis de la "cultura de la clase" y sus efectos en el aprendizaje. Even y Tirosh (2002) llaman la atención de los investigadores en formación de profesores sobre la necesidad de tener en cuenta los procesos sociales y culturales como parte integral de la actividad matemática. "Se requieren análisis que tengan en cuenta la complejidad de la instrucción matemática implementada, la cual necesita considerar varios factores, facetas y circunstancias (a veces conflictivas)" (p. 237).

4.4. Guía para el reconocimiento de normas

El trabajo del profesor y de los alumnos en los procesos de enseñanza y aprendizaje es una actividad sujeta a un complejo sistema de normas de distinta naturaleza y diversos grados de coerción (leyes, decretos, hábitos, etc.). Es necesario que el profesor sea consciente de este sistema de normas que condicionan, y al mismo tiempo hacen posible, el estudio de las matemáticas. “Al considerar las normas de la clase que apoyan la comprensión matemática, se deben tener en cuenta las regularidades en las interacciones sociales de la clase que constituyen la gramática de la vida de la clase” (Franke et al., 2007, p. 238).

En Godino, Font, Wilhelm y Castro (2007) se ha introducido la dimensión normativa de los procesos de enseñanza y aprendizaje, ampliando las nociones de contrato didáctico (Brousseau, 1988) y norma sociomatemática (Cobb y Bauersfled, 1995), y proponiendo una tipología de normas apoyada en el EOS. En este apartado analizamos la dimensión normativa a la experiencia de estudio descrita en la sección 4.1. En la tabla 2 sintetizamos los resultados de este análisis; en la columna 1 incluimos los tipos de normas consideradas y en la 2 las normas específicas identificadas en la experiencia de enseñanza.

Es importante resaltar que cada norma admite diversas interpretaciones, por lo que su seguimiento conlleva unos ciertos grados de libertad que en cada caso se debe indagar.

Tabla 4: Guía para el reconocimiento de normas (GRN)

TIPOS DE NORMAS:	NORMAS ESPECÍFICAS (condiciones de aplicación, rupturas, efectos, …)
Epistémicas: (Axiomas y teoremas sancionados por las culturas matemáticas)	1) Principio de indiferencia en situaciones de incertidumbre y regla de Laplace. Su aplicación lleva en la situación dada a preferir ser jugador A. Pero en una jugada aislada puede ganar A o B (“porque interviene el azar”, Raquel). La asunción de la regla de preferencia de ser el jugador con mayores probabilidades en una experiencia aislada, porque maximiza la utilidad “esperada” , requiere del sujeto descartar otras preferencias personales. 2) Ley empírica de los grandes números, lentitud y fluctuaciones de la convergencia estocástica. El uso de simuladores que permitan la repetición de series grandes de experiencias es imprescindible para justificar la aceptación de esta ley en el contexto dado. …
Cognitivas y afectivas: - Principios de aprendizaje - Reglas intuitivas, teoremas en acción, …	- El contenido pretendido está en la ZDP, aunque la clase era heterogénea (para algunos alumnos era el “primer encuentro” con la estocástica). El formato de trabajo en grupos sobre la tarea permitió evaluar los conocimientos iniciales de los estudiantes y conocer sus interpretaciones personales de la situación. - Los aprendizajes logrados por los estudiantes fueron superficiales, como se vio en un examen final. …
Mediacionales: - Recursos tecnológicos y temporales	- La sesión tenía que hacerse en el aula tradicional, dotada con proyector, para el grupo de clase completo (felizmente sólo asistieron 45 alumnos de los 130 inscritos en el curso) - La actividad y su discusión tenía que realizarse en una sesión de 2 horas. …
Interaccionales: - Profesor con toda la clase, con los miembros de los equipos, y con alumnos individuales; alumnos entre sí en el seno de los equipos; alumnos con la clase en su conjunto - Interacciones a	Se aplicaron las siguientes normas interaccionales: -El modelo didáctico implementado siguió las pautas marcadas por los principios socio-constructivistas-interaccionistas (devolución, acción, formulación, validación, institucionalización, ejercitación). - Los alumnos escribieron sus respuestas, por equipos, y las entregaron al profesor antes de la fase de discusión. - Algunos alumnos presentaron a la clase sus soluciones y justificaciones; los demás escucharon y reaccionaron a demanda del profesor. - El profesor corrigió las respuestas incorrectas o deficientes de los alumnos. - El profesor debe evaluó los estados de las trayectorias cognitivas de los alumnos en

propósito de los diversos procesos matemáticos y didácticos	distintos momentos, respondió a las cuestiones de los alumnos (sin desvelar prematuramente la solución) - El profesor sistematizó los conocimientos pretendidos. …
Ecológicas: -Orientaciones curriculares - Conexiones socio-profesionales	- El profesor justificó el tratamiento del tema en base a la inclusión de nociones estocásticas en el currículo de educación primaria, así como también en el interés de mejorar la intuición probabilística de los sujetos que permita evitar los sesgos como la "falacia del jugador" en relación al problema social y personal de las ludopatías. …

Podemos observar que el origen de unas normas está en la propia Didáctica de la Matemática y ciencias afines (psicopedagogía), en particular los "principios socio-constructivos – instruccionales", en el Departamento que fija el programa de estudios, la administración educativa que fija un número de créditos para la asignatura. Unas normas se aplican en el momento de planificación de la actividad (elección de la situación – problema), otras en la implementación o evaluación (normas interaccionales). Algunas normas permiten un cierto grado de libertad en su aplicación (normas interaccionales derivadas del modelo didáctico) mientras que otras dejan poca o ninguna libertad al profesor (número de créditos asignados a la asignatura; la manera de justificar la solución del problema). Consideramos que la toma de conciencia por el profesor de la trama compleja de normas (hábitos, reglas, …) que soportan y condicionan su trabajo, junto a la reflexión sobre la idoneidad didáctica de los procesos de estudio que se describe a continuación, es un componente clave en la constitución de su *identidad* como profesional de la educación. "Incluye su apropiación de los valores y normas de la profesión; las creencias sobre la enseñanza y sobre sí mismos como profesores; una visión de lo que significa ser un "profesor excelente" y el tipo de profesor que desea ser; un sentido del yo como aprendiz y una capacidad para reflexionar sobre la experiencia" (Ponte y Chapman, 2008, p. 242)

4.5 Guía para la valoración de la idoneidad didáctica

La información recogida en los análisis descritos permitirá finalmente emitir un juicio razonado sobre la idoneidad didáctica del proceso de estudio implementado y el reconocimiento de aspectos del mismo cuyo cambio aumentaría dicha idoneidad. En la tabla 3 sintetizamos el juicio razonado sobre la idoneidad del proceso de estudio en cada una de las seis dimensiones que se proponen en Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006).

Tabla 3: Guía para la valoración de la idoneidad didáctica (GVID)

DIMENSIÓN/ CRITERIO	INDICADORES/VALORACIÓN
Epistémica: *Grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia*	La situación usada, "Lanzamiento de dos dados" y la configuración de objetos y procesos asociados, revelada con el uso de la GROS, proporcionó condiciones idóneas para la contextualización de los significados pretendidos. Esta situación tiene que ser complementada con nuevas situaciones de aplicación y ejercitación, así como con el estudio personal del texto seleccionado como complemento de las fases de institucionalización implementadas (Anexos 2 y 3 de la planificación) . …
Cognitiva: *Grado en que los significados implementados (pretendidos) están en la zona de desarrollo potencial*	El desarrollo de la sesión presencial y los documentos escritos que acompañan a la planificación indican que el contenido está en la ZDP de este grupo de estudiantes, aunque algunos de ellos no habían estudiado previamente el tema. Los alumnos que hicieron la presentación de sus soluciones al resto de la clase muestran que habían logrado los aprendizajes pretendidos. No obstante, sería

de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados.	necesario realizar una evaluación final de los aprendizajes del conjunto de la clase. Algunas de las dudas de los alumnos, planteadas al profesor después de haberse presentado la solución a toda la clase, sobre la opción de ser jugador A o B indica que el tema puede estar lejos de ser asimilado para un cierto porcentaje de estudiantes.
Afectiva: *Grado de implicación, interés y motivación de los estudiantes*	La grabación audiovisual indica que los estudiantes muestran un cierto interés en la realización de las actividades; esto no quiere decir que no hubiera algunos estudiantes “fuera de la clase”, como es el caso de Raquel. También se pudo constatar una actitud pasiva de algunos estudiantes en algunos momentos. Sin duda hubiera sido preferible que los estudiantes lanzaran efectivamente los dos dados, en lugar de hacer la simulación con la tabla de números aleatorios. El uso de esta tabla resultó un factor negativo para la motivación al introducir un factor de dificultad no previsto por el docente, aunque sin duda aumentó la idoneidad epistémica.
Interaccional: *Grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje***.**	El formato de interacción, basado en el comienzo de la sesión con una fase de trabajo en equipo sobre una situación – problema de contextualización o iniciación, se reveló como idóneo para aflorar ideas iniciales de los estudiantes. El profesor tuvo ocasión de interactuar con los estudiantes que tenían dificultades, tanto para el cálculo de las probabilidades como con la simulación. Algunos estudiantes tuvieron ocasión de presentar sus soluciones a los compañeros. La segunda hora de clase se realizó con un formato básicamente magistral, lo que plantea dudas sobre la eficacia de las explicaciones presentadas. Ciertamente que el proceso de estudio contempla también fases de trabajos personal, apoyada en un texto y relaciones de ejercicios resueltos, así como con sesiones de tutoría grupal e individualizada.
Mediacional: *Grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.*	La sala de aula y el número de alumnos es adecuado; la sala estaba bien equipada para el trabajo en equipo, y la presentación audiovisual de los resultados (pizarra, display, applets informáticos de simulación probabilística) El tiempo disponible para el planteamiento y desarrollo de la situación – problema fue adecuado. No obstante, la compresión de los aspectos discursivos de la configuración asociada y el dominio de las competencias de cálculo probabilístico requieren una mayor cantidad de tiempo. Se espera que el alumno profundice personalmente en el estudio del tema. Las siguientes sesiones del curso se dedicaron a contenidos relacionados con el análisis de datos.
Ecológica: *Grado de adaptación curricular, socio-profesional y conexiones intra e interdisciplinares*	El proceso de estudio diseñado e implementado permite el desarrollo de las competencias específicas del futuro profesor de educación primaria con relación al tema de azar y análisis de datos incluido en el currículo de educación primaria. Permite mejorar la formación de los futuros profesores como profesionales y como ciudadanos informados en un tema con presencia en los medios de comunicación. En este sentido se puede afirmar que tiene una alta idoneidad ecológica.

La idoneidad didáctica es una herramienta para el *análisis* y la *síntesis* didáctica que puede ser útil para la formación de profesores. Como afirman Hiebert, Morris y Glass (2003), un problema persistente en educación matemática es cómo diseñar programas de formación que influyan sobre la naturaleza y calidad de la práctica de los profesores. La ausencia de efectos significativos de los programas de formación de profesores en dicha práctica se puede explicar, en parte, por la falta de un conocimiento base ampliamente compartido sobre la enseñanza y la formación de profesores. “La preparación de programas de formación puede ser más efectiva centrándola en ayudar a los estudiantes a que adquieran las herramientas que necesitarán para aprender a enseñar, en lugar de competencias acabadas sobre una enseñanza efectiva” (Hiebert, Morris y Glass, 2003, p. 202).

Pensamos que entre estas herramientas deben figurar los criterios para analizar la propia práctica docente, las lecciones de los textos escolares como fuente próxima para el diseño de unidades didácticas, o experiencias de enseñanza observadas. Consideramos importante introducir en la formación (inicial y continua) de profesores de matemáticas criterios para valorar la idoneidad de los procesos de estudio matemático, tanto si son basados en el uso de libros de texto, como si se trata de procesos apoyados en el uso de materiales y documentos de trabajo elaborados por el propio profesor.

5. Reflexiones finales

EL hilo principal de este trabajo ha sido la descripción de nuestro modelo de formación de profesores de matemáticas, el cual contempla la profundización en su competencia matemática y el desarrollo de “competencias para realizar el análisis didáctico de la propia práctica”. Ambas competencias pueden y deben ser articuladas. Esta articulación la llevamos a cabo apoyados en los presupuestos epistemológicos, cognitivos e instruccionales del marco teórico que denominamos “Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática” (EOS).

Hemos mostrado que la formación didáctica del profesor de matemáticas se puede orientar y sistematizar mediante las “Guías de análisis y reflexión” descritas en la sección 4 que tienen en cuenta las diversas competencias didácticas:

1. Competencias referidas al diseño e implementación de procesos de estudio matemático:

La GDUT pone el acento en la selección /reelaboración de situaciones – problemas ricas que permitan contextualizar las competencias matemáticas pretendidas en cada una de las sesiones en que se descompone el proceso de estudio. La GROS requiere categorizar los tipos de situaciones, identificar las variables de tarea, prever posibles generalizaciones y adaptaciones. Este análisis fenomenológico es complementado con el análisis de las configuraciones de objetos asociadas a cada situación-problema y los procesos matemáticos que dan lugar a tales objetos. La GRAPS apoya la reflexión sistemática sobre las interacciones en el aula, focalizada en el reconocimiento de conflictos de significado y la gestión de su resolución, así como el papel desempeñado por los recursos tecnológicos y la gestión del tiempo didáctico. La atención a las normas y metanormas que soportan y condicionan los procesos de estudio permitirán encontrar explicaciones a determinados comportamientos del profesor y los estudiantes.

2. Competencias referidas a conocimientos didácticos específicos y valoración de la idoneidad didáctica

En cuanto a los conocimientos didácticos sobre orientaciones curriculares, desarrollo histórico (desde una perspectiva epistemológica) de los contenidos a enseñar, etapas de aprendizaje, tipos de errores y dificultades, patrones de interacción didáctica y sus efectos en el aprendizaje, uso de recursos tecnológicos y materiales manipulativos, propuestas de enseñanza experimentadas previamente, instrumentos de evaluación, etc., todas ellas se adquieren con el uso de las citadas guías, siempre que el estudiante consulte los textos en que se recoge este contenido didáctico. En nuestro modelo se propone el estudio contextualizado de estos contenidos y de las guías como requisito para poder emitir un juicio sobre la idoneidad didáctica del proceso de estudio.

El análisis de la "matemática en acción" que proponemos debería ser una competencia instrumental del profesor de matemáticas al permitirle reconocer la complejidad de objetos y significados matemáticos puestos en juego en las actividades matemáticas, prever potenciales conflictos, adaptarlas a las capacidades de sus estudiantes y a los objetivos de aprendizaje. Se trata de situaciones didácticas para la formación de profesores cuyo objetivo central es el meta-análisis (Jaworski, 2005) de un componente clave de la enseñanza: la actividad matemática entendida tanto desde el punto de vista institucional (o socio-epistémico) como personal (o cognitivo).

Los supuestos epistemológicos, cognitivos e instruccionales del EOS, hechos operativos en las "Guías para el análisis didáctico" descritas en este trabajo, concuerdan y desarrollan los principios para la formación de profesores de matemáticas descritos en Cooney y Wiegel (2003). El primer principio se refiere a que los profesores en formación deberían experimentar la matemática como una materia plural (la noción de significado institucional de los objetos matemáticos postula la relatividad de tales significados respecto a los marcos institucionales, contextos de uso y juegos de lenguaje); el segundo principio indica que los profesores en formación deberían estudiar explícitamente y reflexionar sobre las matemáticas escolares (el ciclo formativo descrito parte de situaciones problemas tratables en los niveles escolares y de la reflexión sobre las configuraciones epistémicas y cognitivas asociadas); y el tercer principio afirma que los profesores en formación deberían experimentar las matemáticas de manera tal que apoye el desarrollo de estilos de enseñanza orientados a los procesos (en el caso del EOS ponemos la actividad de resolución de problemas y los procesos de representación, generalización, etc., como punto de partida en la construcción del conocimiento matemático, tanto desde un punto institucional como personal).

El modelo formativo descrito concuerda y desarrolla los dos objetivos primarios para la formación de profesores propuestos por Hiebert, Morris y Glass (2003. El primero se refiere a que el profesor "llegue a ser matemáticamente 'proficiente'", donde 'proficiencia' matemática se interpreta como la adquisición simultánea e integrada de cinco tipos de competencias matemáticas: comprensión conceptual, fluidez procedimental, competencia estratégica, razonamiento adaptativo y disposición productiva (Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001). El segundo objetivo se centra en preparar al profesor para lograr la proficiencia de sus propios alumnos[15]. Las "guías para el análisis y la reflexión didáctica" propuestas constituyen un sistema de herramientas para que los profesores aprendan a aprender de su propia experiencia, tanto en la fase de formación inicial como permanente.

Reconocimiento:

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación, SEJ2007-60110/EDUC. MEC-FEDER.

[15] "Los profesores que están equipados con herramientas para el aprendizaje a partir de sus experiencias están en una posición más fuerte para aprender métodos más efectivos a lo largo de sus carreras" (Hiebert, Morris y Glass, 2003; p. 205).

Referencias bibliográficas

Ash, S. L. y Clayton, P. H. (2004). The articulated learning: An approach to guided reflection and assessment. *Innovative Higher Education*, Vol. 29, No. 2, 137- 154.

Ball, D. (2000). Working on the inside: Using one's own practice as a site for stuying teaching and learning. En, A. E. Kelly y R. A. Lesh, (Eds.), *Hadbook of Research Design Mathematics and Science Education* (pp. 365-402).London: Lawrence Erlbaum.

Ball, D., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2000). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (pp.433-456), American Educational Research Association, Washington, D.C.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística.* Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística. ISBN 84-699-4295-6. (Disponible en Internet, http://www.ugr.es/~batanero/publicaciones%20index.htm)

Batanero, C. y Godino, J. D. (2004). Estocástica y su didáctica para maestros. En J. D. Godino (Dir.), *Matemáticas y su didáctica para maestros* (pp. 693-733). Granada: Los autores. (Disponible en Internet: http://www.ugr.es/~jgodino/fprofesores.htm

Bloor, D. (1983). Wittgenstein. A social theory of knowledge. London: The Macmillan Press.

Blumer, H. (1969). Symbolic interactionism: Perspective and method. Englewood Cliffs, NJ.: Prentice-Hall. [El interaccionismo simbólico: Perspectiva y método. Barcelona: Hora, 1982].

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7* (2), 33-115.

Cobb, P. y Bauersfeld, H. (Eds.) (1995). The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures. Hillsdale,N.Y.: Lawrence Erlbaum A. P.

Cooney, T. J. y Wiegel, H. G. (2003). Examining the mathematics in mathematics teacher education. En A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. K. S. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 795-828). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

D'Amore, B., Godino, J. D., Arrigo, G. y Fandiño, M. I. (2003). *Competenze in matematica*. Bologna: Pitagora.

Even, R. y Tirosh, T. (2002). Teacher knowledge and understanding of students' mathematical leaning. En L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 219-240). London: Lawrence Erlbaum y NCTM.

Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). An ontosemiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 27 (2), 3-9.

Font, V., Godino, J. D. y Contreras, A. (2008). From representation to onto-semiotic configurations in analysing the mathematics teaching and learning processes. En L.

Radford, G. Schubring y F. Seeger (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, Historicity, and Culture*. Rotterdam: Sense Publishing.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En, A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education,* 39 (1-2): 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics,* 60 (1), 3-36.

Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R. y Wilhelmi, M. R. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference.*

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26 (1), 39-88.

Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (en prensa). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *PUBLICACIONES.* Revista de la Facultad de Educación y Humanidades de Melilla.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma,* XXVII (2), 221-252.

González, J. y Wagenaar, R. (2003). *Tuning educational structures in Europe. Final Report. Phase one*. Bilbao: Universidad de Deusto. http://europa.eu.int/comm/education/policies/educ/tuning/tuning_es.html

Harrison, J. K., Lawson, T. y Wortley, A. (2005). Mentoring the beginning teacher: developing professional autonomy through critical reflection on practice. *Reflective Practice,*6 (3), 419 — 441

Hiebert, J., Morris, A. K., y Glass, B. (2003). Learning to learn to teach: An "experiment" model for teaching and teacher preparation in mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 6, 201-222.

Hill, H., Ball, D. L., y Schilling, S. (2008). Unpacking “pedagogical content knowledge”: Conceptualizing and measuring teachers’ topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39* (4), 372-400.

Husu, J., Toom, A. y Patrikainen, S. (2008). Guided reflection as a means to demonstrate and develop student teachers' reflective competencies. *Reflective Practice*, 9, (1), 37 – 51. DOI: 10.1080/14623940701816642

Jaworski, B. (2005). Tools and tasks for learning and meta-learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8, 359-361.

Jaworski, B. y Gellert, U. (2003). Educating new mathematics teachers: Integrating theory and practice, and the roles of practicing. En A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. K. S. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 829-875). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kilpatrick, J., Swafford, J. y Findell, B. (2001) (Eds), *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Mathematics Learning Study Committee, National Research Council.

Johns, Ch. (2002). *Guided reflection*. Blackwell Pub.

Llinares, S. y Krainer, K. (2006). Mathematics (students) teachers and teacher educators as learners.En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 429-459). Rotterdan: Sense Publishers.

Nolan, A. (2008). Encouraging the reflection process in undergraduate teachers using guided reflection. *Australian Journal of Early Childhood*, 33 (1), 31-36

Oser, F. K. y Baeriswyl, F. J.: 2001, 'Choreographies of teaching: Bridging instruction to learning. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (pp.1031-1065), American Educational Research Association, Washington, D.C.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2008). Preservice Mathematics Teachers´Knowledge and development In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 225- 236). New York, NY: Routledge.

Rogers, R. (2001). Reflection in higher education: A concept analysis. *Innovative Higher Education*, *26*, 37–57.

Schön, D. (1983).*The reflective practitioner: How professionals think in action.* New York, NY: Basic Books

Tejada, A. (2007). Desarrollo y formación de competencias: un acercamiento desde la complejidad. *Acción Pedagógica*, 16, 40-47.

Thames, M. H., Sleep, L., Bass, H. y Ball, d. L. (2008). Mathematical knowledge for teaching (K-8): Empirical, Theoretical, and Practical Foundations. ICME 11, TSG 27: *Mathematical knowledge for teaching*. [On line], descargado el 2/08/08 de, http://tsg.icme11.org/document/get/572

Tomlinson, K. (2008). The impact of cooperative guided reflection on student learning: the case of optimization problem solving in Calculus I. [On line] (20 June 2008) http://digital.library.wisc.edu/1793/24574

Vygotsky, L. S. (1934). *Pensamiento y lenguaje*. [Obras escogidas II, pp. 9-287]. Madrid: Visor, 1993.

Wittgenstein, L. (1953). *Investigaciones filosóficas.* Barcelona: Crítica.

ANEXO 1: PROYECTO, “LANZAMIENTO DE DOS DADOS”

Planteamiento:
Raquel es una maestra de Primaria y lleva unos días trabajando algunas nociones de probabilidad en su clase de 6º. Sus alumnos asignan sin dificultad probabilidades a ciertos sucesos simples, como los resultados de lanzar un dado o una moneda o de girar una ruleta con todos los sectores iguales. Para hoy decide plantear la siguiente actividad:

Actividad 1. Suma de puntos al lanzar dos dados:

“Vamos a jugar con dos dados por parejas. Lanzamos los dados y sumamos los puntos obtenidos. Si resulta una suma de 6, 7, 8, ó 9 entonces gana A una ficha; si la suma es distinta de esos números gana B una ficha. ¿Qué prefieres ser jugador A o B?
Juega con un compañero 10 veces y anota los resultados de las sumas que obtienes.
¿Quién ha ganado más veces A o B?
¿Piensas que se repetirá el resultado si jugamos 100 veces más?¿Por qué?

Actividad 2. Recogida de datos de la clase:

A continuación Raquel recoge en la siguiente tabla los datos de las 10 parejas de alumnos que hay en la clase y les pide construir un diagrama de barras con estos datos.

	Suma de puntos	Numero veces	Frecuencia relativa
Gana B	2	2	0,02
	3	9	0,09
	4	12	0,12
	5	20	0,2
Gana A	6	7	0,07
	7	12	0,12
	8	14	0,14
	9	9	0,09
Gana B	10	8	0,08
	11	4	0,04
	12	3	0,03

Raquel plantea a los niños las siguientes preguntas:
¿Quién ha ganado más veces los jugadores A o los B? ¿Quién tiene más probabilidad de ganar?

Cuestiones didáctico-matemáticas:

<u>Cuestión 1</u>: *Determina la probabilidad teórica que tienen de ganar los jugadores A y B. ¿Es equitativo este juego? ¿Tiene ventaja un jugador sobre el otro según estas reglas del juego?*
<u>Cuestión 2</u>*: Si realizáramos 100 tiradas, ¿con cuánta frecuencia se espera que gane A y B?*
<u>Cuestión 3:</u> *Prepara una tabla de frecuencias relativas con los 100 datos experimentales dados y un diagrama de frecuencias relativas. ¿Quién ha ganado más veces A o B? Compara estos resultados con los resultados esperables teóricamente.*
<u>Cuestión 4:</u> *¿Qué ha ocurrido? ¿Por qué no ha ganado más veces A como era de esperar?¿Qué puede hacer la maestra en esta situación para explicar el resultado a sus alumnos?*