http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8nespp1

Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada

(Segunda parte)

Desenho e aplicação de um instrumento para explorar a faceta epistêmica do conhecimento didático-matemático de futuros professores sobre a derivada

(Segunda parte)

Luis R. Pino-Fan[1]
luispino23@gmail.com

Juan D. Godino[2]
jgodino@ugr.es

Vicenç Font[3]
vfont@ub.edu

Resumen

En este artículo presentamos la segunda parte de una investigación de cuatro años sobre el diseño y aplicación de un instrumento para explorar y caracterizar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada de futuros profesores de secundaria/bachillerato. En el primer artículo presentamos el proceso seguido para el diseño del instrumento. En este segundo artículo presentamos los resultados obtenidos de la aplicación de dicho instrumento a una muestra de futuros profesores de bachillerato en el contexto de una universidad Mexicana. Los resultados del análisis de las respuestas de los estudiantes evidencian tanto una desconexión entre los distintos significados parciales de la derivada como la necesidad de potenciar el conocimiento del contenido especializado. Este aprendizaje puede hacerse mediante actividades que favorezcan el uso e identificación de objetos matemáticos, sus significados y los procesos involucrados en la solución de tareas matemáticas.

Palabras clave: Formación inicial de profesores. Conocimiento del profesor. Derivada. Enfoque onto-semiótico.

[1] Dr. en Didáctica de las Matemáticas.
[2] Catedrático de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada, España.
[3] Profesor Titular de la Universitat de Barcelona, España.

Resumo

Neste artigo, apresentamos a segunda parte de uma investigação de quatro anos sobre o desenho e a implementação de um instrumento para explorar e caracterizar a faceta epistêmica do conhecimento didático-matemático acerca da derivada de futuros professores do ensino secundário/bacharelado. No primeiro artigo apresentamos o processo seguido para o desenho do instrumento. Neste segundo artigo, apresentamos os resultados obtidos com a aplicação do referido instrumento a uma amostra de futuros professores de bacharelado no contexto de uma universidade mexicana. Os resultados da análise das respostas dos alunos evidenciaram tanto uma desconexão entre os diferentes significados parciais da derivada como a necessidade de potencializar o conhecimento de conteúdo especializado. Esse aprendizado pode ser feito por meio de atividades que favoreçam o uso e identificação de objetos matemáticos, seus significados e os processos envolvidos na resolução de tarefas matemáticas.

Palavras-chave: Formação inicial de professores. Conhecimento do professor. Derivada. Enfoque ontossemiótico.

1. Introducción

El presente artículo forma parte, la segunda, de un compendio de dos artículos que hemos escrito para dar a conocer los resultados de una investigación que se desarrolló durante los últimos cuatro años. En dicha investigación tratamos de avanzar respecto de la problemática general, evidenciada en el primer artículo, sobre qué conocimientos necesita un profesor de matemáticas para desarrollar efectivamente su práctica y así, gestionar adecuadamente los aprendizajes de sus estudiantes.

Como vimos en el artículo anterior, existen diversos modelos propuestos desde el campo de investigación en didáctica de la matemática – "categorías del conocimiento del profesor" de Shulman (1986, 1987); "MKT" de Ball y cols. (Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008); "Knowledge Quartet" (Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005; Turner y Rowland, 2011); "Theory of proficiency in teaching mathematics" (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008) – que aportan grandes categorías o bloques en los que se "secciona" el conocimiento de los profesores de matemáticas y describen, aunque de manera genérica (Godino 2009), dichas categorías. Sin embargo, no se aportan criterios para explorar cada uno de esos bloques, de hecho, aún no hay un acuerdo unificador sobre un marco teórico, enfoque o modelo, que ayude describir cada una de las facetas o dimensiones del conocimiento de los profesores de matemáticas (Rowland y Ruthven, 2011).

En este sentido nuestra investigación trata de la exploración de una de las dimensiones del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada de profesores en formación inicial: *la faceta epistémica*. Para ello se diseñó y aplicó un cuestionario, con base en los supuestos teóricos y metodológicos del modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM) de Godino (2009) que se describió en el primer artículo de este compendio, para explorar aspectos relevantes del conocimiento del conocimiento común del contenido, conocimiento ampliado del contenido y características del conocimiento del contenido especializado, de profesores en formación inicial. Así, en el primer artículo presentamos todo lo que refiere a la fase de diseño del cuestionario.

En este segundo artículo abordamos los resultados obtenidos de la aplicación de dicho instrumento a una muestra de futuros profesores de bachillerato en el contexto de una universidad Mexicana. Los resultados del análisis de las respuestas de los estudiantes evidencian tanto una desconexión entre los distintos significados parciales de la derivada como la necesidad de potenciar el conocimiento del contenido especializado. Este aprendizaje puede hacerse mediante actividades que favorezcan el uso e identificación de objetos matemáticos, sus significados y los procesos involucrados en la solución de tareas matemáticas.

2. Método

Nuestra investigación se inscribe dentro de un enfoque metodológico de tipo mixto (Johnson y Onwuegbuzie, 2004; Creswell, 2009), puesto que se trata de un estudio de tipo exploratorio en el que se considera la observación de variables cuantitativas (grado de corrección de los ítems: respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas) y cualitativas (tipo de configuraciones cognitivas propuestas por los futuros profesores). Esta última variable cualitativa está estrechamente relacionada, como se discutió en el primer artículo, con el tipo de conocimiento referente a la faceta epistémica del CDM sobre la derivada de los futuros profesores de bachillerato.

Para el estudio cualitativo nos apoyamos en la técnica de análisis denominada *análisis semiótico*[4] (Godino, 2002), la cual permite describir de manera sistemática tanto la actividad matemática realizada por los futuros profesores al resolver problemas, como los objetos matemáticos primarios (*elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos*) que intervienen en las prácticas que permiten su resolución y que conforman una *configuración cognitiva* – cuando estos objetos matemáticos primarios emergen de una práctica personal, como la de los futuros

[4] En algunos artículos a este tipo de análisis también se le llama *análisis ontosemiótico*.

profesores – (Godino, Batanero y Font, 2007). Como vimos en la sección 2, marco teórico, de nuestro primer artículo, el análisis de la actividad realizada por un sujeto (persona o institución) al resolver un problema, en nuestro caso una tarea sobre derivadas, se realiza dentro del enfoque onto-semiótico (EOS) a dos niveles: 1) describiendo las prácticas (acciones) operativas o discursivas que realiza el sujeto; y 2) describiendo los objetos y procesos que intervienen en la realización de tales prácticas. En ambos casos se trata de un análisis de contenido de los textos en los cuales se refleja o concreta la actividad matemática. Este análisis de contenido se apoya en la tipología de objetos y procesos propuestos por el EOS, cuyo detalle se describe en diversos artículos (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2011; Font, Godino y Gallardo, 2013).

2.1. *Procedimiento*

La aplicación del cuestionario se realizó en dos momentos que denominaremos primer y segundo estudio. En el primer estudio se aplicó la primera versión del cuestionario diseñado y en el segundo estudio se aplicó la versión modificada con base en los resultados de la valoración de los expertos y de los resultados encontrados con la primera aplicación. Las 8 primeras tareas fueron coincidentes en ambas versiones del cuestionario, excepto por algunos detalles de redacción que no afectaban a los resultados.

Para la resolución de las tareas de ambas versiones del *Cuestionario FE-CDM-Derivada,* los profesores en formación inicial contaron con un tiempo de dos horas. El primer estudio se realizó en dos días consecutivos en el mes de enero del 2011, esto fue así debido a la incompatibilidad de los horarios de clases de los dos grupos participantes y a la accesibilidad a los grupos que nos otorgó la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán, en México. Este hecho no afectó los resultados del primer estudio, pues como se evidenció en el apartado 3.1 del primer artículo (Tabla 1), no hubo diferencias significativas entre los resultados (puntuaciones) de ambos grupos. El segundo estudio se llevó a cabo en un sólo día a mediados del mes de febrero del 2012 (un año después de la aplicación de la versión "piloto" del instrumento). El cuestionario se aplicó al total de 49 estudiantes, divididos en dos grupos. Dado que, nuevamente, no hubo diferencias significativas entre los resultados (puntuaciones) de ambos grupos, hemos considerado para nuestro estudio a los 49 como una sola muestra.

De esta forma el primer estudio se realizó con una muestra de 53 futuros profesores y el segundo estudio con una muestra de 49.

La aplicación del cuestionario, en ambos estudios, estuvo a cargo del primer autor de este artículo. Antes de comenzar las pruebas se dio especificaciones a los estudiantes sobre la forma en que deberían responderla, y se mencionó que iban a ser parte de un estudio de investigación para su motivación. Para cuidar la objetividad y calidad de las respuestas, se les indicó que aquellos que no quisieran escribir su nombre, podrían omitirlo y colocar en dicho apartado “Sujeto-Hombre” o “Sujeto-Mujer”. Dos estudiantes (hombres), en el primer estudio, y cuatro (dos hombres y dos mujeres) en el segundo, prefirieron responder de forma anónima.

2.2. Sujetos

El primer estudio se llevó a cabo con una muestra de 53 futuros profesores, 56,6% (30) mujeres y 43,4% (23) hombres, de los últimos cursos (sexto y octavo semestre) de la Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas que se imparte en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán (UADY) en México. Dicha licenciatura tiene una duración de cuatro años (8 semestres). Cabe señalar que la Facultad de Matemáticas de la UADY es la encargada, a través del plan de estudios de dicha licenciatura, de formar profesores con salida al nivel bachillerato o universitario en el estado de Yucatán en México.

El segundo estudio se llevó a cabo con una muestra de 49 estudiantes, 55,1 % (27) mujeres y 44,9 % (22) hombres, de los últimos cursos (sexto y octavo semestre) de la misma licenciatura. Cabe señalar que el plan de estudios de dicha licenciatura no sufrió modificaciones entre un estudio y otro.

Los participantes de ambos estudios habían cursado cálculo diferencial en el primer semestre de la licenciatura y, a lo largo de ella, tomaron otros cursos relacionados con el análisis matemático (cálculo integral, cálculo vectorial, ecuaciones diferenciales, etc.). También habían cursado materias relacionadas con las matemáticas y su didáctica. Otro aspecto importante a destacar es que los futuros profesores, durante estos dos últimos semestres, habían tomado una asignatura llamada “microenseñanza” en la cual tienen la oportunidad de aplicar las habilidades de inducción, comunicación y reforzamiento en la impartición de clases a pequeños grupos. Estas clases son grabadas y retroalimentadas.

Así mismo, durante el último semestre (octavo) los participantes de ambos estudios estaban cursando una asignatura llamada “taller de formación profesional”, en la cual los futuros profesores demuestran sus habilidades docentes en la impartición de cursos de matemáticas adquiridas como resultado de todos los cursos previos recibidos relacionados con el área de didáctica.

Debemos mencionar que, aunque consideramos la cantidad porcentual de hombres y mujeres participantes en ambos estudios, no enfatizamos las diferencias entre los resultados de hombres y mujeres ya que esto no es objeto de nuestro estudio.

2.3. Instrumentos para la recogida de la información

Como instrumento principal para la recogida de datos utilizamos el cuestionario diseñado y descrito en el primer artículo. No obstante, a partir de los comentarios que dieron los investigadores que valoraron el cuestionario y de los resultados obtenidos de la aplicación de la primera versión del mismo, se tomó la decisión de realizar entrevistas con la intención de profundizar en la exploración del conocimiento, referentes a la faceta epistémica del CDM, de los futuros profesores.

La selección de los estudiantes que participaron en la entrevista, en el segundo estudio, fue intencional. Para la selección de los participantes, luego de la aplicación del cuestionario, se analizaron los resultados obtenidos considerando el grado de corrección de las respuestas y, de manera menos rigurosa, el tipo de configuración cognitiva. Así, se eligieron estudiantes que: 1) obtuvieron una puntuación baja en la globalidad del cuestionario, y 2) para algunas de las tareas “críticas” (tareas con las cuales no se obtuvo mucha información acerca de los conocimientos, como por ejemplo la tarea 5 del cuestionario), no respondieron; 3) cuyas configuraciones cognitivas movilizadas en alguna de las tareas, estaban “lejos” de las configuraciones (o conocimientos) esperadas.

Las entrevistas tuvieron una duración de 40 minutos por cada estudiante y se programaron en dos días consecutivos una semana después de la segunda aplicación del cuestionario. Se tomaron grabaciones de audio, y notas de los estudiantes entrevistados. También se tomó nota de las reacciones de los estudiantes, así como de los “gestos y ademanes” que estos utilizaban, por ejemplo, para denotar el signo de la pendiente de una recta.

2.4. Análisis y variables

Para el análisis de los datos obtenidos de la implementación del cuestionario, consideramos dos variables: *grado de corrección de la tarea* (respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas) y *tipo de configuración cognitiva* (tipología de resolución propuestas por los futuros profesores, especificando los objetos y procesos puestos en juego en las mismas). Respecto de la primer variable de corte cuantitativo, *grado de corrección de las tareas,* se asignaron las puntuaciones de 0, 1 o 2, según si las respuestas eran incorrectas, parcialmente correctas o correctas respectivamente. Las características de lo que fue considerado una respuesta correcta, parcialmente incorrecta o incorrecta, para cada uno de los ítems de las tareas, se describirán brevemente cuando se presenten los resultados de cada tarea. Una explicación más detallada de estos criterios y características de puntuación puede encontrarse en Pino-Fan (2013).

Para el análisis de los datos obtenidos respecto de la segunda variable de corte cualitativo, *tipo de configuración cognitiva*, como se ha señalado, se utilizó la técnica de análisis denominada *análisis semiótico* (Godino, 2002; Malaspina y Font, 2010; Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2011), la cual permitió describir de manera sistemática tanto la actividad matemática realizada por los futuros profesores al resolver las tareas, como los objetos matemáticos primarios que intervienen en sus prácticas. Esta segunda variable fue principalmente de corte descriptiva y dependió de los procesos, los objetos matemáticos primarios, y los significados que a éstos asignaban los futuros profesores, movilizados en la solución que daban de las tareas.

Debido a las características de las tareas y a las respuestas que éstas admiten, fue posible establecer una agrupación de las respuestas de los estudiantes según el tipo de configuración cognitiva que movilizaban en cada uno de los ítems de las tareas. A partir de dichas agrupaciones, se realiza un estudio cuantitativo (conteo, frecuencias y porcentajes) de los tipos de configuraciones cognitivas movilizadas en la resolución de una tarea. En la siguiente sección presentamos el análisis detallado de las tipologías de configuraciones encontradas en las prácticas desarrolladas por los futuros profesores al resolver las tareas del cuestionario *FE-CDM-Derivada*.

3. Análisis y discusión de las configuraciones cognitivas

3.1. Tarea 1: Significados de la derivada

La tarea uno nos permite tener una primera panorámica general de los significados de la derivada que "conocen" o mejor dicho, "recuerdan" los profesores en formación inicial. Como resultado a la pregunta, los futuros profesores, tal y como lo previmos en el análisis a priori del contenido de la tarea proporcionaron "listados" de posibles significados de la derivada entre los que se encontraron: "pendiente de la recta tangente en un punto determinado", "razón instantánea de cambio", "límite del cociente de incrementos (tasa instantánea de variación)". Adicionalmente, algunos de los estudiantes proporcionaron significados para la derivada que, debido a su naturaleza, no eran del todo correctos pero tampoco eran del todo erróneos; por ejemplo: es una función, es un procedimiento, mejor aproximación lineal, proceso inverso a la integral, entre otros. La Tabla 1 presenta los resultados cuantitativos obtenidos para la tarea 1 respecto de las variables *grado de corrección* y *tipo de configuración cognitiva*. Para el análisis cuantitativo de las respuestas, se consideró la variable grado de corrección, mediante la cual se asignaron los valores de 2, 0 y NR, según si las respuestas de los futuros profesores fueron correctas, incorrectas o no responden, respectivamente. Consideramos que una respuesta a esta pregunta es correcta si el estudiante menciona al menos un significado parcial de la derivada.

Tabla 1 – Resultados para grado de corrección y tipo de configuración cognitiva de la tarea 1, Estudio 1

Grado de Corrección	**Tarea 1**	
	Frecuencia	%
Correcta	46	86,8
Incorrecta	6	11,3
No contestan	1	1,9
Total	53	100

Significados de la derivada	**Tarea 1**	
	Frecuencia	%
Pendiente de la recta tangente	14	26,5
Razón instantánea de cambio	6	11,3
Tasa instantánea de variación	1	1,9
Dos significados	12	22,6
Tres significados	7	13,2
Otros	6	11,3
No dan solución	7	13,2
Total	53	100

En general los futuros profesores participantes del primer estudio, no tuvieron problemas para resolver la tarea, respondiendo correctamente el 86,8% de ellos. De los que respondieron correctamente, 21 (39,7%) proporcionaron un único significado para la derivada: como pendiente de la recta tangente, razón instantánea de cambio o tasa instantánea de variación (límite del cociente de incrementos). El 22,6% dieron dos de los significados antes mencionados y el 13,2% proporcionó los tres significados antes referidos. El 11,3% de los futuros profesores proporcionaron significados distintos, que aunque no eran significados válidos asociados a la derivada, tampoco eran erróneos; a estos significados los hemos rotulado con la etiqueta "otros". La Figura 1 muestra ejemplos de respuestas que contienen este tipo de significados (otros).

Figura 1 – Otros significados para la derivada dados por dos estudiantes

Respuestas de dos estudiantes del Primer Estudio

1- tentativamente se puede decir que es la pendiente de la recta tangente, para mi es muy complicado verle un significado, mas bien lo veo como algo muy algoritmico que conlleva a resolver diversos problemas aplicativos.

1- Es la mejor representación lineal

Respuesta de un estudiante del Segundo Estudio

Significados de la derivada:
- gráficamente tiene el significado de tangente a una curva (función derivable en un punto).
- Un límite
- Una fórmula.
- Razón de cambio o velocidad instantánea en un punto.

En cuanto a los resultados del segundo estudio, como se puede observar en la Tabla 2, los futuros profesores tampoco tuvieron dificultades para responder a la tarea, respondiendo de forma incorrecta solamente cuatro estudiantes, y uno no responde. En cuanto a la variable tipo de configuración cognitiva, vemos que los significados de la derivada más mencionados fueron pendiente de la recta tangente a la función en un punto (14,3%) y razón instantánea de cambio (20,4%). La acepción de la derivada como tasa instantánea de variación, o límite del cociente de incrementos como se le suele llamar normalmente en la literatura, sólo fue señalada por el 6,1%. Además vemos que 23 futuros profesores señalaron en su respuesta dos significados parciales de la derivada, de los cuales 21(42,9%) señalaron los significados de "pendiente de la recta tangente" y "razón instantánea de cambio"; y dos (4,1%), señalaron "razón de cambio" y "límite del cociente de incrementos (tasa instantánea de variación)". Los tres futuros profesores que incluyeron tres significados parciales para la derivada en su respuesta, refirieron a los tres significados que hemos mencionado anteriormente. Los dos estudiantes que están en la categoría de "otros", proporcionaron significados, que si bien es cierto no son del todo incorrectos, no refieren a significados parciales de la derivada, por ejemplo: "la derivada es una función" , "una operación", "la inversa de la integral" y "velocidades". La Figura 1 muestra también un ejemplo de respuesta dada en el segundo estudio.

La cuestión importante que surge a partir de las respuestas de los estudiantes a esta primera tarea es, ¿los profesores en formación inicial son capaces de utilizar los significados de la derivada, en la solución de tareas que requieren del uso de dos o más acepciones de la derivada? En general, entre otros aspectos, las preguntas siguientes del Cuestionario FE-CDM-Derivada responden a esta cuestión.

Tabla 2 – Resultados para grado de corrección y tipo de configuración cognitiva de la tarea 1, Estudio 2

Grado de Corrección	**Tarea 1**	
	Frecuencia	%
Correcta	44	89,8
Incorrecta	4	8,2
No responden	1	2
Total	49	100

Significados de la derivada	**Tarea 1**	
	Frecuencia	%
Pendiente de la recta tangente	7	14,3
Razón instantánea de cambio	10	20,4
Tasa instantánea de variación	3	6,1
Dos significados	23	47
Tres significados	3	6,1
Otros	2	4,1
No dan solución	1	2
Total	49	100

Aunque en muchas de las respuestas sólo se proporcionaron "listados" de significados plausibles, esto era lo que se esperaba obtener, para que a lo largo del cuestionario observáramos si los significados que proporcionaban los futuros profesores los "conocían" o solamente los "recordaban" a grandes rasgos, de sus cursos pasados. Aquí es importante remarcar qué entendemos por conocimiento. Para nosotros, y dentro del modelo CDM, conocimiento es el constructo que incluye comprensión, competencia y disposición (Pino-Fan, Godino y Font, 2010; Pino-Fan, Godino y Font, 2011). Así, diremos que un futuro profesor "conoce" tal o cual significado de la derivada si es capaz de movilizarlo en las distintas prácticas (tareas del cuestionario) en las cuales dicho significado requiera ser activado para su solución.

3.2. Tarea 2: Análisis de la derivada de la función valor absoluto

En este apartado se presentan con detalle las configuraciones cognitivas asociadas a la resolución de la tarea 2. En las soluciones que dieron los futuros profesores a la tarea dos, concretamente, las resoluciones a los ítems a), b) y c) de la tarea, se identificaron 3 tipos de configuraciones cognitivas las cuales hemos denominado: 1) gráfico – verbal; 2) técnica; y 3) formal. A continuación presentamos el análisis de cada una de estas configuraciones mediante un ejemplo prototípico.

Configuración cognitiva 1: gráfico – verbal

La característica esencial de este tipo de resolución es el carácter visual-descriptivo, a partir de la representación gráfica de la función $f(x) = |x|$. Se trata de respuestas en las que se activan procedimientos y argumentos descriptivos, a partir de la representación gráfica de la función $f(x) = |x|$ y la derivada como pendiente de la recta tangente a la función en un punto específico. La Figura 2 muestra la respuesta de un estudiante la cual representa un ejemplo característico de las soluciones que movilizan una configuración gráfico-verbal.

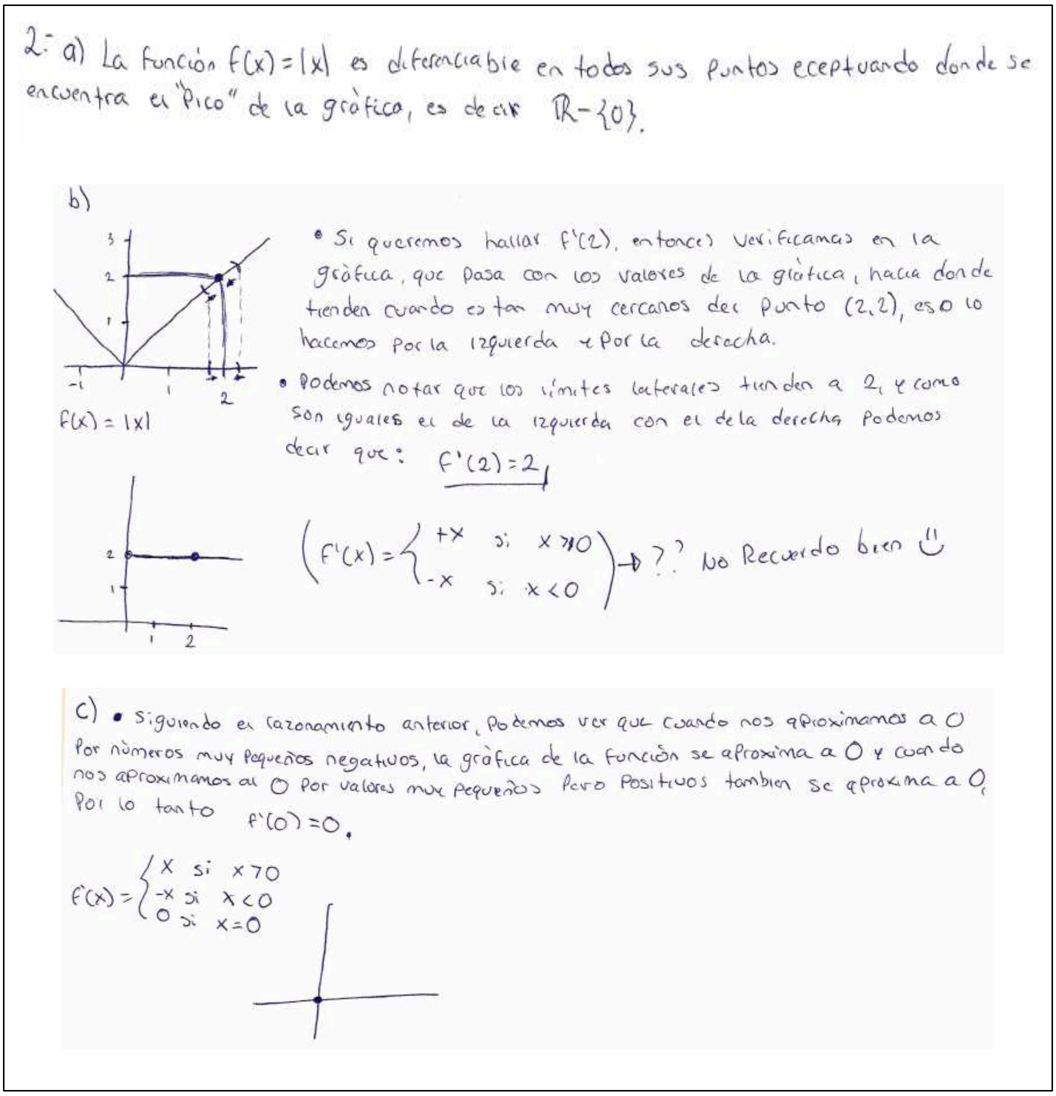
Práctica Matemática

Como puede observarse en la Figura 2, la actividad matemática desarrollada por el estudiante para profesor A, comienza con la justificación visual de una propiedad (la derivabilidad de la función valor absoluto). En general, su actividad se centra en el uso de descripciones verbales de su análisis visual a partir de la gráfica de la función $f(x) = |x|$.

Configuración Cognitiva

En la actividad matemática desarrollada por el estudiante A, es posible identificar el uso de diversos *elementos lingüísticos* tales como el uso predominante del lenguaje natural (descripciones verbales), algunos elementos simbólicos tales como "$\mathbb{R} - \{0\}$" o la derivada por partes $f'(x) = \begin{cases} x & si\ x > 0 \\ -x & si\ x < 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$ de la función valor absoluto [ítem c)]. Así mismo, el estudiante A, hace uso de elementos lingüísticos gráficos [de los ítems b) y c)] con los que "explica" su análisis. Estos elementos lingüísticos hacen referencia a una serie de conceptos, y proposiciones que se detallan a continuación.

Figura 2 – Solución a la tarea 2 por el estudiante A



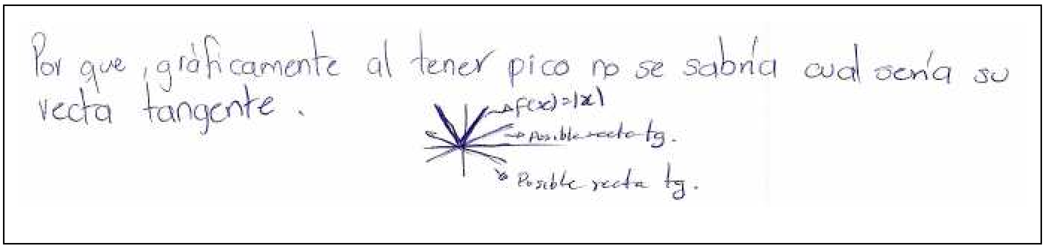
Entre los *conceptos* podemos destacar los de función (valor absoluto), dominio (de la función derivada y representado por $\mathbb{R}-\{0\}$), aproximación (a un punto específico de la función valor absoluto, en este caso a $x=0$ y $x=2$, tomando valores cada vez más próximos a dichos valores del dominio), limites laterales (que definen el limite bilateral de la función), y la derivada de la función valor absoluto (erróneamente definida mediante un proceso de particularización como $f'(x)=\begin{cases} x & si\, x>0 \\ -x & si\, x<0 \\ 0 & si\, x=0 \end{cases}$). Los límites laterales, y en consecuencia los bilaterales, a los puntos del dominio de la función $x=0$ y $x=2$, aunque visualmente bien calculados (si lo que se quisiera fuera calcular los límites de la función valor absoluto en dichos puntos del dominio), fueron usados incorrectamente por el estudiante A, para el cálculo de la derivada de la función en los puntos $x = 2$ y $x = 0$.

Este uso incorrecto de los límites laterales para el cálculo de la derivada se debe a la confusión o no comprensión, del estudiante, de una *proposición* que refiere a la relación entre continuidad y derivabilidad: una función derivable es continua pero una función continua no es necesariamente derivable. Lo anterior se evidencia con el uso del *procedimiento* y el *argumento* para el cálculo de $f'(2)$, referidos por el siguiente elemento lingüístico: "Si queremos hallar $f'(2)$, entonces verificamos en la gráfica, qué pasa con los valores de la gráfica, hacia dónde tienden cuando están muy cercanos del punto $(2\,,2)$, eso lo hacemos por la izquierda y por la derecha. Podemos notar que los límites laterales tienden a 2, y como son iguales el de la izquierda como el de la derecha, podemos decir que $f'(2) = 2$". Tanto el procedimiento como la argumentación que el estudiante proporciona para el cálculo de $f'(2) = 2$, se evidencian también con la representación gráfica proporciona en el ítem b) de la tarea (Figura 2). El error se hace más evidente cuando señala el *procedimiento* y su *justificación* empleados para resolver el ítem c) de la tarea, en el cual se le pide verificar la derivabilidad de la función valor absoluto en $x = 0$, para lo cual responde, "Siguiendo el razonamiento anterior, podemos ver que cuando nos aproximamos a 0 por números muy pequeños negativos, la gráfica de la función se aproxima a 0 y cuando nos aproximamos a cero por valores muy pequeños pero positivos también se aproxima a 0, por lo tanto $f'(0) = 0$".

Entre otras *proposiciones* activadas en la solución del estudiante, podemos destacar la derivabilidad de la función valor absoluto en cero, la cual justifica visualmente (proceso de argumentación) de la siguiente manera, "La función $f(x) = |x|$ es diferenciable en todos sus puntos exceptuando donde se encuentra el 'pico' de la gráfica…".

Así como el ejemplo que hemos analizado, las respuestas que hemos incluido dentro de este tipo de configuración cognitiva centran sus procedimientos y argumentos en el análisis visual de las propiedades de la gráfica de la función. Por ejemplo, otro tipo de respuestas que fue común es la que presentamos en la Figura 3, en las que se justifica la no derivabilidad de la función valor absoluto en $x = 0$ mediante el trazado de "infinitas" tangentes a la función en dicho punto. Este otro tipo de respuestas centraban su atención en la acepción de la derivada como pendiente de la rectan tangente en un punto determinado.

Figura 3 – Respuesta de un estudiante al ítem c) de la tarea.



En general, el alcance y potencialidad, en cuanto a conocimientos didácticos y matemáticos, de las respuestas que activaron una configuración *gráfico-verbal* fue limitada, pues ninguno de los futuros profesores que dio una respuesta con las características que acabamos de describir, fue capaz de resolver el ítem d) de la tarea, es decir, generalizar la tarea (proceso de generalización) con base en la definición formal de la derivada (como límite de las tasas medias de variación). Otro aspecto a resaltar es que las respuestas dentro de esta categoría, fueron casi en su totalidad erróneas [a excepción de las respuestas del ítem a) de la tarea que justificaban por medio del "pico" de la gráfica de la función]; esto debido posiblemente a que, al centrarse sólo al análisis empírico o visual de la función dada y por las concepciones erróneas tal y como la relación entre continuidad y derivabilidad, se forman obstáculos conceptuales importantes en los estudiantes que no les permiten percibir incongruencias tales como responder para el ítem a) de la tarea que la función $f(x) = |x|$ es derivable para "todos los reales excepto el cero" y posteriormente responder para el ítem c) de la tarea que $f'(0) = 0$, $f'(0) = 1$ o $f'(0) = -1$, estas do últimas según la definición dada de la función valor absoluto (proceso de materialización) y mediante el cálculo de la pendiente del segmento de recta (perteneciente a la función) ubicada en el primero o segundo cuadrante respectivamente.

Por todo lo anterior, es claro que los profesores en formación inicial que proporcionaron una respuesta de este tipo, poseen un limitado conocimiento común y casi nulos conocimientos del contenido especializado y ampliado requeridos para la resolución de la tarea.

Configuración cognitiva 2: técnica

La característica primordial de las respuestas que movilizan una configuración técnica, radica en el uso y manipulación predominante de los elementos simbólicos de los objetos matemáticos involucrados. Concretamente las respuestas se centran en el uso de la definición (simbólica) de la función valor absoluto y al uso de las reglas de derivación para "derivar por partes" dicha función. La Figura 4 presenta dos ejemplos característicos de este tipo de respuestas.

Práctica Matemática

Como se puede observar en la Figura 4, el estudiante para profesor B comienza definiendo "a trozos" la función valor absoluto (proceso de materialización). A partir de dicha definición calcula (mediante técnicas de derivación) $f'(2)$ y $f'(0)$ respectivamente. Este proceso se ve de forma clara en la respuesta del estudiante C. Quizá la única diferencia entre estas dos respuestas es que el estudiante C contempla algunos aspectos visuales para dar su respuesta.

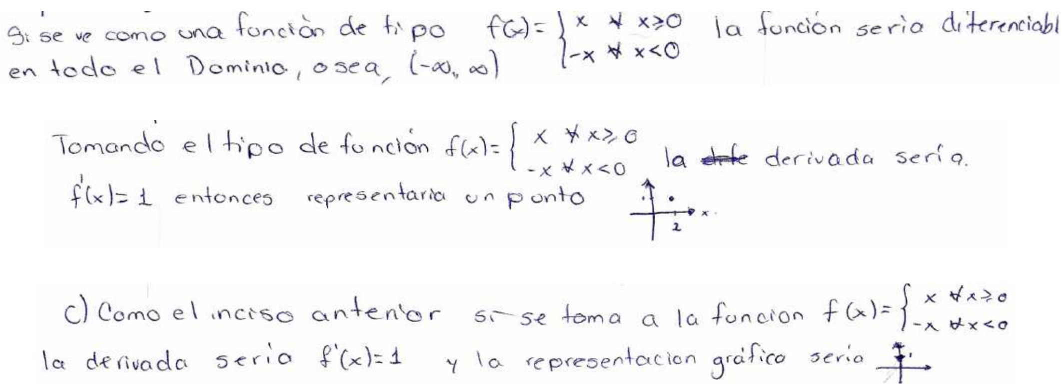
Configuración Cognitiva

Como se puede observar en la Figura 4, los estudiantes para profesor B y C utilizan elementos lingüísticos verbales, simbólicos y gráficos en el desarrollo de su práctica. Entre ellos podemos destacar las expresiones $f(x) = \begin{cases} x & \forall x \geq 0 \\ -x & \forall x < 0 \end{cases}$ (estudiantes B y C), que refiere al concepto de la función valor absoluto (proceso de materialización de la función valor absoluto); $f'(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \geq 0 \\ -1 & \forall x < 0 \end{cases}$ que refiere al concepto de derivada de la función valor absoluto según el estudiante C e implícita en la solución del estudiante B; $f'(x) = 1$, que según el estudiante B es la respuesta a los ítems b) y c) de la tarea; $f'(2) = 1$ y $f'(0) = 1$ que refieren al concepto de derivada en un punto (la derivada en los puntos 2 y 0 del dominio), y que de acuerdo con el estudiante C es la respuesta a los ítems b) y c) respectivamente. Entre los elementos lingüísticos verbales podemos destacar, "la función sería diferencial en todo el dominio", que refiere a una proposición planteada por el estudiante B y para él representa la solución del ítem a) de la tarea; "la derivada sería…entonces representaría un punto", que es la proposición planteada por el estudiante B y que resuelve, para él, los ítems b) y c) de la tarea. Esta última proposición da indicios de que el estudiante B al escribir "$f'(x) = 1$", como respuestas en los ítems b) y c), en realidad quiere indicar que la derivada de la función valor absoluto para todas las $x \geq 0$ es uno. Esto se ve más claro en el procedimiento del estudiante C.

Una proposición que es clave en los procedimientos empleados en las prácticas que hemos englobado dentro de esta categoría, son las reglas de derivación, las cuales están implícitas en las respuestas de los estudiantes B y C, y que permitieron "hallar la derivada" de la función valor absoluto en los puntos 0 y 2.

Figura 4 – Solución a la tarea 2 por los estudiante B y C

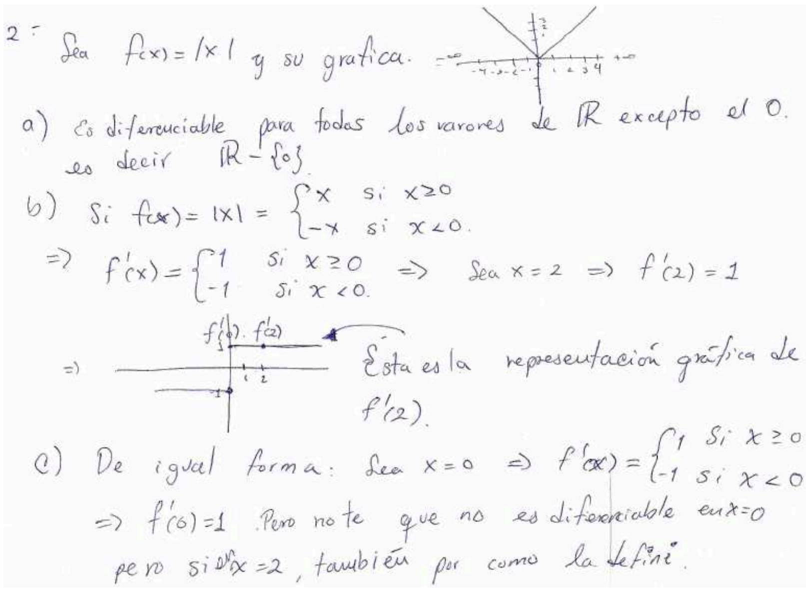
Respuesta estudiante B


Si se ve como una función de tipo $f(x)=\begin{cases} x & \forall x\geq 0 \\ -x & \forall x<0\end{cases}$ la función sería diferenciabl en todo el Dominio, o sea, $(-\infty, \infty)$

Tomando el tipo de función $f(x)=\begin{cases} x & \forall x\geq 0 \\ -x & \forall x<0\end{cases}$ la ~~dife~~ derivada sería. $f'(x)=1$ entonces representaría un punto

c) Como el inciso anterior si se toma a la funcion $f(x)=\begin{cases} x & \forall x\geq 0 \\ -x & \forall x<0\end{cases}$ la derivada sería $f'(x)=1$ y la representacion gráfica sería

Respuesta estudiante C


2: Sea $f(x)=|x|$ y su grafica.

a) Es diferenciable para todos los varores de $\mathbb{R}$ excepto el 0. es decir $\mathbb{R}-\{0\}$

b) Si $f(x)=|x|=\begin{cases} x & \text{si } x\geq 0 \\ -x & \text{si } x<0.\end{cases}$

$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\geq 0 \\ -1 & \text{si } x<0.\end{cases} \Rightarrow$ Sea $x=2 \Rightarrow f'(2)=1$

$f'(0).\ f'(2)$

$\Rightarrow$ Esta es la representación gráfica de $f'(2)$.

c) De igual forma: Sea $x=0 \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\geq 0 \\ -1 & \text{si } x<0\end{cases}$

$\Rightarrow f'(0)=1$ Pero note que no es diferenciable en $x=0$ pero si en $x=2$, también por como la definí.

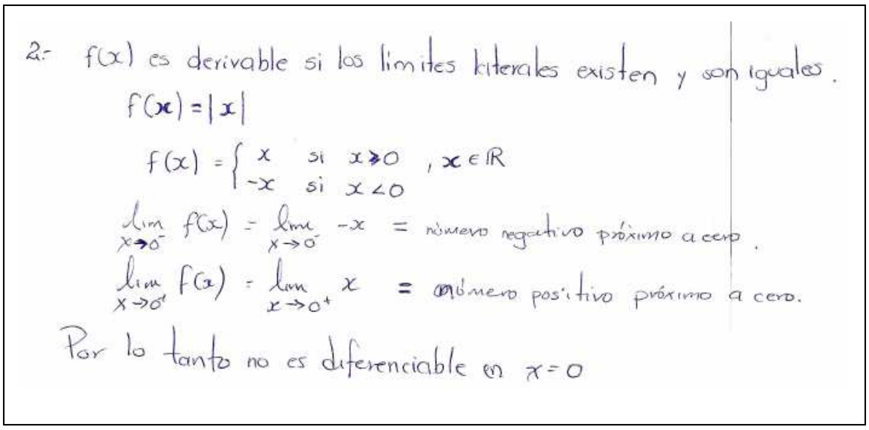
El error que fue común en los estudiantes que activaron una configuración como la que acabamos de describir, se evidencia en la seudo representación gráfica de $f'(0)$ planteada por el estudiante B. Tal y como lo advertimos en el análisis cuantitativo de la tarea dos (el cual se presentará más adelante), más del 50% de los estudiantes tuvieron dificultades para responder a los ítems b) y c) de la tarea. Lo anterior demuestra que los estudiantes requieren mejorar su conocimiento común y especializado del contenido requerido para resolver tareas como la planteada.

Finalmente dos aspectos relevantes que no podemos dejar de mencionar son, en primer lugar, que muchos de los estudiantes que activaron una configuración cognitiva técnica, respondieron al ítem a) mediante consideraciones visuales como "la función no es derivable en $x = 0$ porque tiene un pico en dicho punto". Esto generó un conflicto cognitivo al momento de presentar su respuesta, a los ítems b) y c), mediante una configuración técnica, esto queda reflejado, por ejemplo, en la respuesta del estudiante C de la siguiente manera: "…$f'(0) = 1$. Pero noté que no es diferenciable en $x = 0$ pero sí en $x = 2$, también por como la definí [a la función valor absoluto]". Conflicto similar presentan otros estudiantes cuando señalaron que $f'(0) = -1$ por definir la función valor absoluto como $f(x) = \begin{cases} x & \forall x > 0 \\ -x & \forall x \leq 0 \end{cases}$, o bien que $f'(0) = 0$ pues definieron la función valor absoluto como $f(x) = \begin{cases} x & \forall x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & \forall x < 0 \end{cases}$. El segundo aspecto es que ninguno de los estudiantes que respondieron a los ítems a), b) y c) de la tarea activando configuraciones como la que acabamos de describir, fue capaz de responder al ítem d) de la tarea.

<u>Configuración cognitiva 3: formal</u>

El eje central de este tipo de configuraciones es el uso de la derivada en su acepción "formal" de tasa instantánea de variación (límite del cociente de incrementos) y el uso de las derivadas laterales para el estudio de la derivabilidad de la función valor absoluto en $x = 0$. La Figura 5 presenta un ejemplo prototípico del tipo de soluciones que movilizan una configuración formal.

Figura 5 – Solución a la tarea 2 por el estudiante D


2.- $f(x)$ es derivable si los límites laterales existen y son iguales.

$f(x) = |x|$

$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}, x \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -x$ = número negativo próximo a cero.

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x$ = número positivo próximo a cero.

Por lo tanto no es diferenciable en $x = 0$

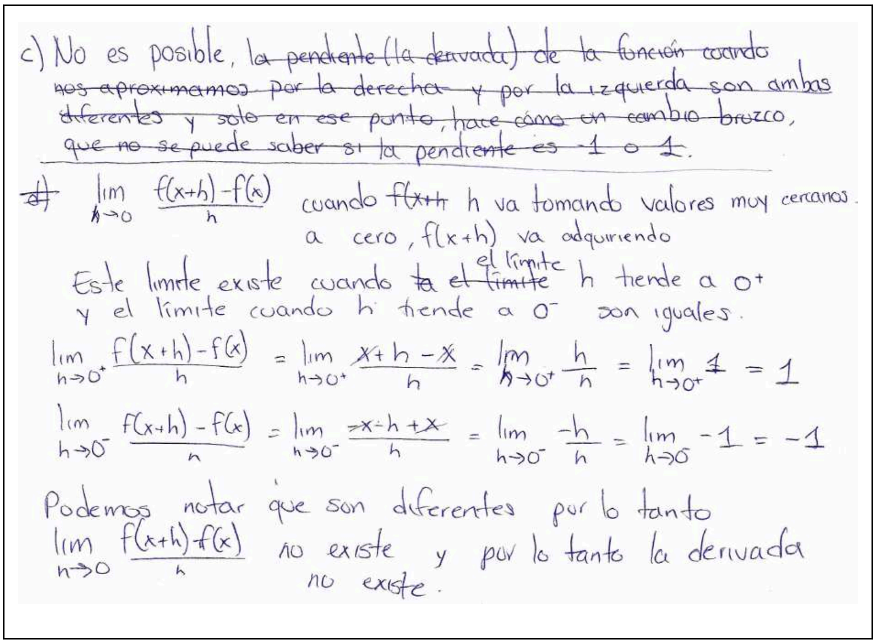
Práctica Matemática

La Figura 5 muestra, a manera de ejemplo, la actividad matemática desarrollada por un estudiante (D). Desde el principio se puede apreciar el carácter formal, aunque erróneo, de la solución de dicho estudiante mediante el empleo de límites laterales para "verificar la derivabilidad de la función valor absoluto en $x = 0$". El intento, aunque fallido, del estudiante D por verificar la derivabilidad en $x = 0$ de la función valor absoluto a partir de las derivadas laterales, es logrado por el estudiante E (Figura 6).

Configuración Cognitiva

Como se puede apreciar en las respuestas de los estudiantes D y E (Figuras 5 y 6), los *elementos lingüísticos* utilizados en esta categoría de configuración cognitiva son casi en su totalidad simbólicos y verbales. Por ejemplo, la expresión lingüística, "$f(x)$ es derivable si los límites laterales existen y son iguales" (estudiante D) que hace referencia a una *proposición/propiedad* de la existencia del límite bilateral de la función en $x = 0$. La enunciada proposición podría ser correcta si el estudiante D no hubiera escrito seguidamente los elementos lingüísticos simbólicos siguientes "$\lim_{x\to 0^-} f(x)$…$\lim_{x\to 0^+} f(x)$…" que indican que los limites laterales que contempla no son los que definen las derivadas laterales como en el caso de los elementos lingüísticos siguientes considerados por el estudiante E que hacen referencia a una proposición importante en esta categoría de configuración cognitiva: "$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$…este límite existe [si] el límite cuando h tiende a 0^+ y el límite cuando h tiende a 0^- son iguales" (Figura 6). Esta proposición planteada por el estudiante E, alude al concepto principal de esta configuración: la derivada en su acepción de tasa instantánea de variación (límite del cociente de incrementos) y la demostración de su existencia mediante los límites laterales que definen las derivadas laterales.

Figura 6 – Solución al ítem c) de la tarea 2 por el estudiante E



c) No es posible, ~~la pendiente (la derivada) de la función cuando nos aproximamos por la derecha y por la izquierda son ambas diferentes y solo en ese punto, hace como un cambio bruzco, que no se puede saber si la pendiente es -1 o 1.~~

$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ cuando ~~f(x+h~~ h va tomando valores muy cercanos a cero, $f(x+h)$ va adquiriendo

Este límite existe cuando ~~la el límite~~ el límite h tiende a 0^+ y el límite cuando h tiende a 0^- son iguales.

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{x}+h-\cancel{x}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1$$

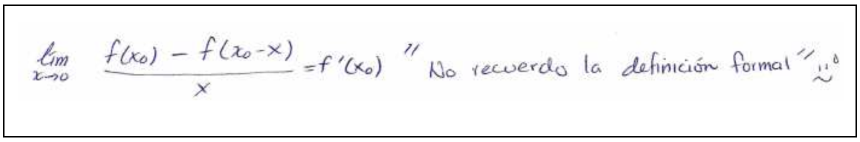
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-x-h+x}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0^-} -1 = -1$$

Podemos notar que son diferentes por lo tanto $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ no existe y por lo tanto la derivada no existe.

El uso incorrecto de los límites laterales para el cálculo de la derivada, como en casos anteriores, pensamos se debe a la confusión o no comprensión, del estudiante D, de una *proposición* que refiere a la relación entre continuidad y derivabilidad: una función derivable es continua pero una función continua no es necesariamente derivable. Este hecho aunado a que sólo 3 de los 53 futuros profesores proporcionaron una respuesta que lleva asociada una configuración cognitiva "formal" de los cuales uno de ellos la activo de forma incorrecta (estudiante D), demuestra que en general, el conocimiento de los futuros profesores asociado al uso de la acepción de la derivada como tasa instantánea de variación es limitado (lo que obstaculiza que realicen adecuadamente procesos de generalización, abstracción y enunciación, de la función valor absoluto y su derivada), lo que contribuyó a que reflejaran un limitado conocimiento especializado y ampliado del contenido requerido para la resolución de la tarea.

Un aspecto que debe ser resaltado es que, a pesar de que muchos estudiantes activaron combinaciones de las configuraciones antes descritas en sus resoluciones [e.g., visual para la resolución del ítem a), técnica para el ítem b) y formal para el ítem c)], estas “combinaciones” no contribuyeron a la comprensión de la tarea, pues siempre existía el predominio de lo visual sobre lo simbólico (en el caso de la configuración cognitiva 1) o bien de lo simbólico sobre lo visual (configuración cognitiva 2) lo que originaba algunos conflictos cognitivos en los estudiantes tal como la respuesta del estudiante C. Dichos conflictos cognitivos fueron ocasionados por la desvinculación aparente de los diversos significados asociados a un mismo objeto matemático dependiendo de la configuración en que se moviliza. Además se evidenció que los estudiantes no dominaban el uso (y comprensión) de la acepción formal de la derivada (como límite de las tasas medias de variación), pues a los ítems c) y d), en los que se requería su uso, muchos respondieron como en el ejemplo de la Figura 7.

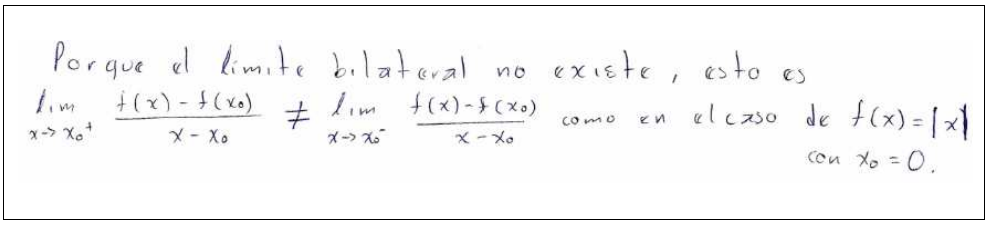
Figura 7 – Respuesta de un estudiante al ítem d) de la tarea 2



<u>*Configuraciones cognitivas asociadas a la resolución del ítem d)*</u>

Podría decirse que el ítem d) de la tarea dos requería, para su resolución, que los estudiantes movilizaran una configuración formal en la que cobrara protagonismo una proposición basada en la derivada en su acepción de límite de las tasas medias de variación: “la gráfica de una función derivable no puede tener ‘picos’ ya que en aquellos puntos donde la función alcanza un pico, los límites laterales $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ y $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ que definen las derivadas laterales son distintos, por lo tanto el limite bilateral $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ que define la derivada en dichos puntos, no están definido”. La Figura 8 muestra a manera de ejemplo la respuesta del estudiante F al ítem d) de la tarea.

Figura 8 – Solución al ítem d) de la tarea 2 por un estudiante F



Como se puede apreciar en la Figura 8, el futuro profesor F emplea elementos lingüísticos simbólicos y verbales para expresar la proposición antes mencionada que justifica el por qué la gráfica de una función derivable no puede tener picos. Otros ejemplos de respuestas dadas al ítem d) de la tarea dos, en las que se moviliza una configuración formal se presenta en la Figura 9. A pesar de que, por su naturaleza, el ítem d) requería la activación de una configuración formal y de la activación de un proceso de generalización para su resolución, algunos estudiantes activaron configuraciones cuyas justificaciones se enmarcan en lo "visual", como el ejemplo de la Figura 10.

Figura 9 – Solución al ítem d) de la tarea 2 por los estudiantes C y E

Estudiante C

Segun la definición de derivada es un límite. por ende para que el límite exista es necesario que exista tanto por la derecha que por la izquierda ~~es por eso~~ y que estos límites coincidan, es por eso, que en un pico o en ángulo al momento de calcular dicho límite ~~no existe~~ puede existir pero los limites laterales no coincidir. Como sucedio en $f(x) = |x|$, con $x = 0$. ya que ~~el~~ los límites derechos no coincide con el izquierdo. de no ser así no es diferenciable.

Estudiante E

) Como ya lo había mencionado por qué si tuviera picos el limite de la definicion formal de derivada no existiria, porque los límites laterales en el punto donde está el pico, no serian iguales.

Figura 10 – Solución al ítem d) de la tarea 2 por un estudiante G

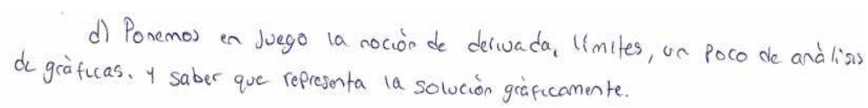
No es posible que existan picos porque tomando en consideración que la derivada es la pendiente de la recta tangente, no es posible aproximar la pendiente. ya que pueden existir muchas rectas que cumplan ser tangentes.

Configuraciones cognitivas asociadas a la resolución del ítem e)

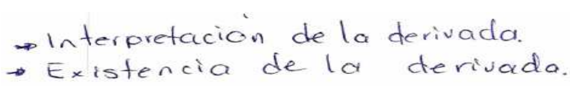
Una de las características importantes de los ítems sobre el conocimiento especializado del contenido, era que los futuros profesores identificaran conocimientos que se ponen en juego a propósito de una tarea sobre derivadas. El ítem e) de la tarea dos requería que los futuros profesores movilizaran este tipo de conocimiento especializado, relacionado con la identificación de los conocimientos (i.e., configuraciones de objetos y sus significados) involucrados en la resolución de la tarea. Sin embargo, todas las respuestas al ítem e) fueron "listados" o bien de algunos conceptos involucrados, o bien de habilidades matemáticas necesarias para la resolución de la tarea. La Figura 11 presenta las respuestas al ítem e) proporcionadas por los estudiantes A, B y C respectivamente. Ese tipo de respuestas dan evidencia de que el conocimiento especializado del contenido, en su faceta de identificación de conocimientos, de los profesores en formación inicial, es limitado y debe ser potenciado.

Figura 11 – Soluciones al ítem e) de la tarea 2 por los estudiantes A, B y C

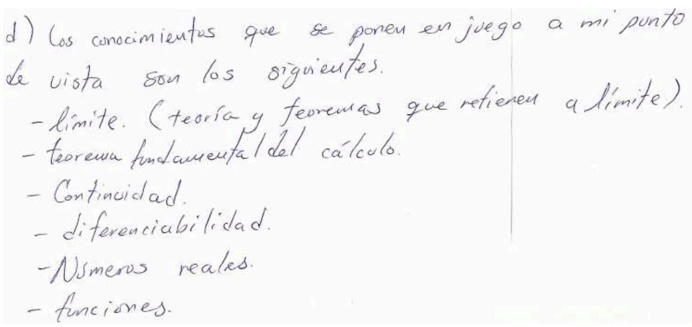
Estudiante A



Estudiante B



Estudiante C



Las Tablas 3 y 4 presentan los resultados cuantitativos respecto del tipo de configuración cognitiva movilizada por los futuros profesores. En la Tabla 3, se observa que un porcentaje elevado de los futuros profesores proporcionan una configuración gráfico-verbal para los apartados a) y c) (e.g., "…no es derivable en $x = 0$ ya que se pueden trazar infinitas tangentes a la función en ese punto"). Para el apartado b) la mayoría de los futuros profesores proporciona una configuración técnica (mediante el uso de reglas de derivación y la definición de valor absoluto). Un estudiante (1,9%) proporcionó una solución formal, a partir de la acepción de la derivada como tasa instantánea de variación, en los cuatro apartados de la tarea, y 2 estudiantes (3,8%) proporcionaron una configuración formal para el apartado c). Las configuraciones cognitivas asociadas a la resolución de los ítems d) y e) no se analizaron cuantitativamente pero si se describieron más arriba.

Tabla 3 – Frecuencias y porcentajes para el tipo de configuración cognitiva de la tarea 2. Estudio 1

Configuración cognitiva	Apartado a)		Apartado b)		Apartado c)	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Gráfico-Verbal	47	88,6	12	22,6	29	54,7
Técnica	2	3,8	33	62,3	13	24,5
Formal	1	1,9	1	1,9	3	5,7
No dan solución	3	5,7	7	13,2	8	15,1
Total	53	100	53	100	53	100

Uno de los objetivos perseguidos con la segunda aplicación del cuestionario (Estudio 2), fue verificar si las configuraciones cognitivas evidenciadas en las prácticas de los futuros profesores, categorizadas y descritas mediante nuestra metodología de análisis, eran coincidentes, con las obtenidas en el estudio piloto del cuestionario (Estudio 1). Esto, entre otras cosas, nos dio pautas para inferir que el cuestionario *CDM-Derivada,* mide lo que realmente pretendíamos medir. En la Tabla 4 observamos que la única diferencia en los resultados obtenidos en la segunda aplicación del cuestionario, es que en ésta, las configuraciones cognitivas de tipo formal, no se presentan en las soluciones de los apartados a) y b) de la Tarea 2. Observamos también que, nuevamente, el tipo de configuración cognitiva predominante en la solución de los apartados a) y c) fue el "gráfico-verbal" con 85,7% y 59,2% respectivamente, y para el apartado b) fue la configuración cognitiva "técnica".

Tabla 4 – Frecuencias y porcentajes para el tipo de configuración cognitiva de la tarea 2. Estudio 2

Configuración cognitiva	Apartado a)		Apartado b)		Apartado c)	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Gráfico-Verbal	42	85,7	13	26,5	29	59,2
Técnica	4	8,2	30	61,2	6	12,2
Formal	0	0	0	0	4	8,2
No dan solución	3	6,1	6	12,3	10	20,4
Total	49	100	49	100	49	100

En cuanto a los análisis cuantitativos de la tarea dos, las Tablas 5 y 6 presentan los resultados de los dos estudios. En el primer estudio (Tabla 5), respecto al ítem b), puede observarse que el 58,5% de los estudiantes, considerando las respuestas parcialmente correctas, incorrectas y no contestan, tuvieron dificultades para resolverlo. Para el ítem c), considerando respuestas parcialmente correctas, incorrectas y no contestan, 64% presentó dificultades para dar una respuesta satisfactoria. Lo anterior revela que más de la mitad de los futuros profesores exhiben carencias respecto al conocimiento común y especializado del contenido requerido para resolver la tarea. En cuanto al ítem d), 2 estudiantes (3,8%) lograron generalizar la tarea a cualquier función con "picos", y 5 (9,4%) dieron aproximaciones a dicha generalización sin llegar a concretarla. Este resultado evidencia que más de la mitad de los profesores poseen un escaso conocimiento ampliado requerido para dar solución al apartado.

Tabla 5 – Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de la tarea 2. Estudio 1

Grado de Corrección	Apartado a)		Apartado b)		Apartado c)		Apartado d)	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Correcta	40	75,5	22	41,5	19	35,9	2	3,8
Parciamente correcta	0	0	10	18,9	15	28,3	5	9,4
Incorrecta	10	18,8	15	28,3	13	24,5	18	34
No contestan	3	5,7	6	11,3	6	11,3	28	52,8
Total	53	100	53	100	53	100	53	100

En el estudio dos (Tabla 6), en general los futuros profesores evidenciaron un buen dominio del conocimiento común requerido para la resolución de la tarea, respondiendo de forma correcta al inciso a) de la misma el 81,7%. No ocurrió así con el conocimiento especializado, pues la suma de los porcentajes de respuestas incorrectas y "no responden" para los incisos b) y c), fue elevado, 32,7% y 30,6% respectivamente. En cuanto al ítem d), observamos que el 85,7% (respuestas "incorrectas" y "no responden") de los estudiantes, tuvieron dificultades para responderlo, lo que sugiere un escaso predominio del conocimiento ampliado requerido para su solución. Estas carencias en cuanto al conocimiento especializado y ampliado del contenido en los futuros profesores, se hicieron evidentes en el análisis de las configuraciones cognitivas.

Tabla 6 – Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de la tarea 2. Estudio 2

Grado de Corrección	Apartado a)		Apartado b)		Apartado c)		Apartado d)	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Correcta	40	81,7	27	55,1	25	51	4	8,2
Parciamente correcta	0	0	6	12,2	9	18,4	3	6,1
Incorrecta	6	12,2	10	20,5	7	14,3	25	51
No responden	3	6,1	6	12,2	8	16,3	17	34,7
Total	49	100	49	100	49	100	49	100

3.3. Tarea 5: describiendo características globales de la derivada

Por motivos de espacio, es imposible presentar en un solo artículo análisis pormenorizados como el que presentamos para la tarea 2. Análisis similares, mediante el uso de las herramientas teóricas y metodológicas introducidas, fueron realizados para cada una de las tareas. A continuación presentamos el análisis de la tarea 5, puesto que es una de las tareas cuyo análisis se reforzó con las entrevistas realizadas a los estudiantes. Los resultados son de relevancia para comprender la naturaleza de los conocimientos de los futuros profesores.

La Tabla 7 presenta los resultados obtenidos, en el primer estudio, para el grado de corrección de la tarea 5.

Tabla 7 – Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de la tarea 5. Estudio 1

Grado de Corrección	Tarea 5	
	Frecuencia	%
Correcta	1	1,9
Parcialmente correcta	27	50,9
Incorrecta	23	43,4
No contestan	2	3,8
Total	53	100

Como puede apreciarse en la Tabla 7, por sus características, esta tarea generó varias complicaciones a los futuros profesores para su solución, pues solamente un estudiante (1,9%) describió las características globales de la derivada, de la función dada gráficamente, respondiendo a las preguntas guía (ver Figura 14 del artículo 1). El 50,9% de los estudiantes falló al responder alguna de las preguntas guía. Un alto número de estudiantes, 43,4%, respondieron de forma incorrecta a las preguntas guía. Para el caso concreto de la tarea 5, en el primer estudio, no se encontraron evidencias concluyentes del tipo de configuraciones cognitivas asociadas a las respuestas de los estudiantes, a pesar de que, como quedó evidenciado en nuestro análisis a priori del contenido que evalúa esta tarea, los resultados eran de gran importancia para entender las concepciones globales que tienen los profesores en formación inicial sobre la derivada, y sobre cómo realiza asociaciones y conexiones entre los distintos objetos matemáticos involucrados y sus significados.

Las soluciones que proporcionaron los futuros profesores se centraron, como se muestra en el ejemplo de las Figuras 12 y 13, en las respuestas puntuales de cada una de las "preguntas guía" que se proporcionaron después de la gráfica de la función $f(x)$. Dichas respuestas fueron realizadas mediante elementos lingüísticos netamente verbales, a partir de la representación gráfica de una función cuya expresión simbólica es desconocida. La respuesta del estudiante H (Figura 12), pese al error de notación de los conjuntos (intersección "$\cap$" en lugar de unión "$\cup$"), puede considerarse como una respuesta parcialmente correcta puesto que, aunque las proposiciones que dan respuestas a las preguntas guía son correctas, no argumenta dichas proposiciones. Por su parte, la respuesta del estudiante I (Figura 13) refleja uno de los principales errores encontrados en las soluciones de los futuros profesores, pues a la pregunta ¿dónde la derivada es positiva y donde negativa? El estudiante I responde "su valor máximo lo alcanza en $x = -1.5$ y mínimo en $x = 0.8$", lo que corresponde a los valores donde la gráfica de la función dada alcanza un máximo y un mínimo relativos, aproximadamente. Otro error frecuente fue la concepción de los profesores en formación reflejada en la siguiente proposición "la función es derivable en todos sus puntos", la cual inferimos que es consecuencia de la desconexión en los estudiantes de las propiedades de continuidad y derivabilidad.

Figura 12 – Solución a la tarea 5 por el estudiante H

5.

a) La derivada es positiva ~~en~~ cuando $x \in (-3, -1.5) \cap (1, 2)$

b) La derivada es negativa cuando $x \in (-1.5, 1) \cap (2, 4)$

c) La derivada es cero ~~en~~ cuando $x \in \{-1.5, 1\}$

d) La derivada no esta definida en todos los puntos del dominio de la función; en $x = 2$.

e) La derivada alcanza su máximo cerca de los puntos $x = -3$ y $x = 2$

La derivada alcanza su mínimo cerca del punto $x = -0.5$.

Figura 13 – Solución a la tarea 5 por el estudiante I

5.

Punto 1 la derivada es positiva en los siguiente intervalos. $(-\infty, -1.5)$ y $(0.8, 2)$

Punto 2 la derivada es negativa en los siguientes intervalos. $(-1,5 , 0.8)$ y $(2, +\infty)$

Punto 3 la derivada fue cero en -1.5 (aproximadamente según la figura) en 0.8.

Punto 4 No esta definida ~~t~~ definida en todos los puntos, en $x = 2$, hay un pico y portanto no es diferenciable en el.

Punto 5 al parecer según la gráfica es constante en el intervalo $(2, +\infty)$

Punto 6 su valor máximo lo alcanza en $x = -1.5$ y mínimo en $x = 0.8$.

Nota: Todo es según la gráfica.

Tanto los autores de este artículo como los investigadores que participaron en el estudio de expertos, pensamos que esta tarea es importante y que para el segundo estudio debía ampliarse la información sobre el conocimiento de los estudiantes mediante otros medios que nos permitan recabar más información sobre las configuraciones cognitivas de los estudiantes para profesor, tales como entrevistas semi-estructuradas.

La Tabla 8, presenta los resultados, obtenidos en el estudio dos, en frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de la Tarea 5. Se consideró, para el análisis de esta tarea, respuestas correctas a aquellas en las que se respondieron todas las preguntas "guía"; parcialmente correctas aquellas en las que se respondió correctamente al menos dos de las preguntas guía; e incorrectas aquellas respuestas en las se dio respuesta correcta a una o menos preguntas guía.

Tabla 8 – Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de la tarea 5. Estudio 2

Grado de Corrección	**Tarea 5**	
	Frecuencia	%
Correcta	2	4,1
Parcialmente correcta	36	73,5
Incorrecta	8	16,3
No contestan	3	6,1
Total	49	100

Como se puede apreciar en la tabla anterior, sólo 4,1% de los futuros profesores fue capaz de proporcionar, por medio de las preguntas guía, descripciones generales del comportamiento de la función derivada de la función dada en la tarea. El 73,5% respondió correctamente al menos dos de las preguntas guía. Dentro de este grupo mayoritario de futuros profesores, los aspectos de la derivada en los que tuvieron más dificultades para describir fueron a los que referían preguntas tales como *¿dónde alcanza la derivada su valor máximo? ¿dónde alcanza la derivada su valor mínimo? ¿dónde es constante la derivada? ¿está la derivada definida para todos los puntos del dominio de la función dada?* El no justificar estas preguntas, era muestra de que los futuros profesores poseían un escaso conocimiento especializado; pero el no responderlas daba evidencia del insuficiente conocimiento común requerido para solucionar tareas como la planteada.

Al igual que en el primer estudio, las respuestas que dieron los futuros profesores a la tarea 5 en el segundo estudio, no arrojaron evidencia contundente que permitiera caracterizar tipologías de configuraciones cognitivas, pues éstos se limitaron a responder, sin una justificación ostensiva, las preguntas guía presentadas en la tarea. Por esta razón y dadas las sugerencias que realizaron los expertos, diseñamos una serie de entrevistas semiestructuradas, mediante las cuales se profundizó en el conocimiento de los futuros profesores activado en la solución de esta tarea. A continuación se presenta la transcripción de un fragmento de la entrevista realizada a una de las estudiantes de octavo semestre, a quien hemos denominado Lupita, la cual consideramos es un buen ejemplo del tipo de conocimientos reflejados por el grueso de los estudiantes en esta tarea. En la siguiente transcripción la etiqueta "**Inv.**" equivale a **Investigador** y la etiqueta **"L20"**, por ejemplo, refiere a la línea 20 del texto transcrito.

Inv. [L1–L7]:	*…se te dio la gráfica de una función arbitraria y te preguntamos ¿qué podrías decir sobre la derivada de esta función? Tú aquí respondiste a las preguntas guía que se te dieron. Tu mencionas que la derivada es positiva en el intervalo (0, -3.6) y (1.6, 4) pero no dices por qué. ¿Por qué la derivada es positiva? Me podrías explicar?...Si un compañero tuyo te dijera, Lupita ¿me explicas por qué es positiva la derivada en esos intervalos qué dices?*
Lupita [L8–L19]:	*En esa [pregunta] estaba pensando un poco, en los criterios de primera derivada, esos criterios los utilizas para encontrar la gráfica de la función. Entonces ya que tienes la función, tu sabes que es positiva o negativa. En este caso la función aquí es positiva, o sea es mayor que cero, siempre es positiva. Yo igual pensé cuando la gráfica es… bueno era cóncava, creo que estaba utilizando el criterio de la segunda [derivada], la de concavidad, como era cóncava hacía abajo y estaba en ese tanto positiva [señalando el segmento de función comprendido en el intervalo aproximado (-2.8,0)] pues yo la pensé positiva [la derivada] y dije, bueno, la función va a ser positiva. Pero creo que allí tuve un error, no sé, porque según el criterio de la primera derivada te dice que es creciente o decreciente en ese caso, pero en este caso no sé.*
Inv. [L20]:	*Y en la gráfica ¿dónde es creciente la …* [función]
Lupita [L21–L25]:	*En ese caso estaría en "menos dos punto y algo", hasta..., bueno, si la pensamos en la parte positiva, desde "menos dos punto algo" [refiriendo al punto de corte de la función con el lado negativo del eje X] hasta menos dos punto cinco, porque igual acá ya decrece* [señalando la sección de la función que tiene por dominio (-1.5 a 0)].
Inv. [L26–L27]:	*…Entonces la derivada, tu mencionas que es positiva en los puntos desde cero ¿hasta dónde?*
Lupita [L28–L29]:	*Bueno yo la estaba pensando en esa parte y luego esta parte... [señalando los segmentos de la función que están arriba del eje X]*
Inv. [L30–L32]:	*¡Ah! Ok, desde cero hasta menos tres punto y algo. ¿Toda esa parte es positiva?[señalando el segmento de función cuyo dominio está en la parte negativa del eje X]*
Lupita [L33–L34]:	*Yo estaba pensando en esta parte [señalando el segmento de función que tiene por dominio (-2.5, 0) aproximadamente].*
Inv. [L35]:	*Ok, ¿tú dices que es positiva [la derivada] por qué está arriba del eje X?*
Lupita [L36–L38]:	*Bueno, yo creo que sí. No sé si fue que confundí algo sobre crecientes o me faltó decir…, y lo mismo para la negativa, siempre la pensé de esa forma, es que …*
Inv. [L39–L42]:	*Es decir, tú pensaste que la justificación de esta respuesta [¿dónde es negativa la derivada?] sería, en ese caso, que es la parte que está debajo del eje X, la parte negativa de este intervalo, en este caso de menos dos punto y algo...*

Lupita [L43]: *En este caso puse hasta menos infinito.*

Inv. [L44–L48]: *desde menos infinito hasta menos dos punto y algo. Y la parte..., qué otro intervalo tienes aquí? O sea las partes que están debajo del eje X [mientras la alumna señala los segmentos que están debajo del eje X]. Y para la otra respuesta, ¿qué me dices de la otra? [¿dónde es cero la derivada?].*

Lupita [L49–L54]: *Lo que pasa es que siempre, como ya hay un cambio, la gráfica de la función pues allí considerábamos cuando había un cambio ya era un punto de inflexión, en ese caso porque igual había un punto crítico,... como hay un cambio pues allí se observa que serían donde la pendiente de la derivada se hace cero, por eso esos puntos, igual lo consideré como un cambio, pero...*

Inv. [L55–L56]: *¿Por eso escribiste el cero? [en el máximo y mínimo relativos de la gráfica dada]*

Lupita [L57]: *Sí*

Inv. [L58–L59]: *¿Y de la otra pregunta? [¿Está la derivada definida en todos los puntos del dominio de la función?]*

Lupita [L60–L62]: *En esa lo consideré como que no, porque se supone que cuando tienes derivada no debe de haber lo que habían llamado en el primero picos, entonces en ese caso…[señalando el “pico” de la función con su lápiz]*

Inv. [L63–L64]: *¿Entonces allí no está definida? [refiriéndose al punto donde hay un “pico”]*

Lupita [L65]: *Pienso que no.*

Inv. [L66]: *¿Sólo para ese punto?*

Lupita [L67]: *Según yo sí.*

Inv. [L68]: *Muy bien y la otra, ¿cuál era la otra pregunta?*

Lupita [L69]: *¿En donde es constante la derivada?*

Inv. [L70]: *¿Y tú respondiste?*

Lupita [L71–L80]: *En los distintos intervalos la función no tiene un comportamiento constante. Osea, se pueden observar cambios en la gráfica de… pero creo que ahí ya respondí en cuanto a la función. Entonces aquí no podía observar cambios [refiriéndose al segmento de recta en la función], entonces ahí en ese…, según no puedo observar cambio porque…, bueno en este caso no sé por qué siempre este lado me causó ruido porque la veo como que si fuera una [función] lineal. Entonces la derivada podría ser una cuadrática o algo así. Creo que allí siempre, no sería…, osea habría un comportamiento…, no sería constante, habría siempre un cambio en la gráfica.*

Inv. [L81–L82]: *Entonces ¿en ese trocito de recta, tú dices que la derivada podría ser una función cuadrática?*

Lupita [L83]: *Sí, tal vez.*

Inv. [L84]: *Y ¿que me dices de la otra pregunta, es la última, no?*

Lupita [L85-L90]: *¿Dónde alcanza la derivada su valor máximo ó mínimo? Pues ese siempre pensando en creciente y decreciente, pues como son los únicos que se observan, pues por eso puse que solamente en esos puntos, en 1.6 y en 0.8 que eran las únicas. Como no se qué sucede en ésta [refiriéndose a x=2] y si considero está igual siempre…, lo que pasa es que ésta no la consideré por lo mismo de que según yo, no estaba definida por el pico.*

Inv. [L91–L94]: *Ok, perfecto. Una pregunta, en esta pregunta, la última pregunta ¿dónde alcanza la derivada sus valores máximos y mínimos?, ¿me estás señalando que coinciden con los valores máximos y mínimos de la función?*

Lupita [L95]: *Si, así lo tomé.*

Como se puede apreciar (L5 a L7) la entrevista sobre la tarea 5 comienza con la pregunta ¿por qué la derivada es positiva?, la cual es planteada por el investigador para que, en este caso, Lupita justifique su respuesta: “la derivada es positiva en los intervalos en los intervalos (-3.6, 0) y (1.6, 4)”. Lupita, en su discurso, parece no estar segura de la proposición central de su justificación, puesto que señala, en principio, que utiliza la propiedad conocida como “el criterio de la primera derivada” (L8-L9) y, posteriormente, señala que utiliza el “criterio de la segunda derivada” (L13-L14). En cualquier caso, a primera instancia, lo que Lupita parecía querer expresar, es que la proposición “$f'(x) > 0 \ \forall x \in (a, b) \ \Rightarrow f$ es creciente en $[a, b]$”, era la justificación de su respuesta (L16-L17), pero no estaba segura si el recíproco de tal proposición también era verdadero, lo cual plantea en la forma “creo que cometí un error…” (L17-L19). El investigador se percata de que Lupita, además, parece no tener claro en qué puntos la función es creciente (por los señalamientos que hacía con el lápiz representando una recta tangente a la curva con pendiente negativa, cuando hablaba de una derivada positiva y “trozos” donde la función era creciente), por lo que se decide explorar en ese sentido (L20). De esta forma es que va surgiendo uno de los errores conceptuales más importantes de Lupita, mismo que le impediría resolver satisfactoriamente la tarea. Lupita consideraba que la función era creciente, y por ende la derivada era positiva, en aquellos intervalos del dominio en los que la función “quedaba por encima” del eje X (L21-L36), es decir, en aquellos intervalos en los que las imágenes de la función eran positivas, exceptuando $x=2$ en donde aseguraba que por haber un pico entonces la derivada no estaba definida (L60-L62). Este error conceptual quedaba evidenciado en las líneas 35 a la 38, cuando responde afirmativamente a la pregunta del entrevistador. En las líneas 37 a la 43, la alumna señala que, de manera análoga, la función era decreciente, y por ende la derivada negativa, en aquellos intervalos del dominio donde la función “queda por debajo del eje X”.

Otro error importante que fue generalizado y compartido por el 89,8% de los futuros profesores, es el que se evidencia en la líneas 85 a la 95. Y es que, como Lupita, la mayoría de los futuros profesores señalaron que los valores máximos y mínimos de la función derivada, coincidían con los valores máximos y mínimos de la función. Este tipo de error en la respuesta a la pregunta, ¿dónde alcanza la derivada sus valores máximos y mínimos?, evidenciaba un conflicto cognitivo aún más grave, pues el 89,8% de los futuros profesores, cuando se les preguntó, ¿dónde es cero la derivada?, respondieron, al igual que Lupita (L47-L57), que la derivada era cero en los máximos y mínimos relativos de la función, es decir, en $x = -1.5$ y $x = 0.8$, aproximadamente.

Podríamos realizar diversas conjeturas sobre la desconexión en las respuestas que dieron a las dos preguntas (¿dónde alcanza la derivada sus valores máximo y mínimo? y ¿dónde es cero la derivada?), respuestas que hasta cierto punto se contradicen "lógicamente". Sin embargo, la exploración más profunda sobre la naturaleza de estos errores quedó fuera de nuestro alcance por el tiempo que nos proporcionaron para entrevistar individualmente a cada estudiante.

Todo lo anterior, junto con otros conflictos que evidenciaron los estudiantes para resolver la tarea 5 del cuestionario, por ejemplo la diferencia entre punto de inflexión, punto crítico, etc., nos dan pautas para decir que los profesores en formación tienen un escaso conocimiento que les faculte para que, a partir de la gráfica de una función cualquiera, y haciendo conexiones entre las distintas representaciones, proposiciones, conceptos, significados parciales de la derivada, etc., puedan hacer descripciones y "decodificaciones" de las características globales y locales del comportamiento de la función derivada, conocimientos que estarían relacionados con el conocimiento especializado de dicho contenido.

3.4. Tarea 6: Cálculo de los ceros de la función derivada

La tarea 6, es una de las tareas que arrojó resultados muy sugerentes respecto a las conexiones que realizan, o no, los futuros profesores entre los distintos significados parciales de la derivada. Dos en concreto para esta tarea, la derivada en un punto entendida como la pendiente de la recta tangente a una función dada, y como razón instantánea de cambio.

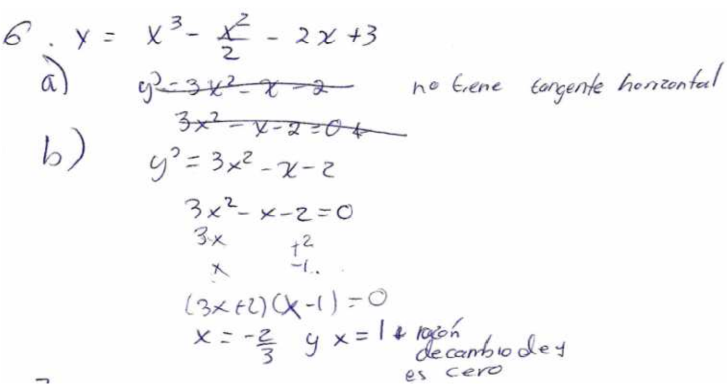
La Tabla 9 muestra los resultados obtenidos, en el estudio 1, para la tarea 6 respecto de la variable grado de corrección. Dado que la tarea explora si los estudiantes realizan conexiones entre los distintos significados de la derivada que conocen (o que enunciaron en la tarea 1), para el apartado b) de la tarea 6 se consideraron como correctas aquellas respuestas en las que se realizan asociaciones entre los distintos significados de la derivada y cuyas justificaciones eran válidas. Como incorrectas aquellas respuestas en las que no se realizan conexiones entre las acepciones de la derivada como: pendiente de la recta tangente y razón instantánea de cambio. Se consideraron parcialmente correctas aquellas respuestas en las que se realizan conexiones entre los distintos significados de la derivada pero cuyas justificaciones no son del todo válidas. Como se puede observar en la Tabla 9, el 43,4% de los profesores en formación no tuvieron problemas para responder al ítem a) de la tarea. Sin embargo, sólo el 7,6% logró responder correctamente el apartado b). Los resultados obtenidos en esta tarea 6, y en las tareas anteriores, señalan una desconexión entre los significados de la derivada que conocen y los que usan en las prácticas matemáticas sobre la derivada. La Figura 14 muestra las respuestas de dos estudiantes (J y K) en las que se hace evidente dicha desconexión.

Tabla 9 – Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de la tarea 6. Estudio 1

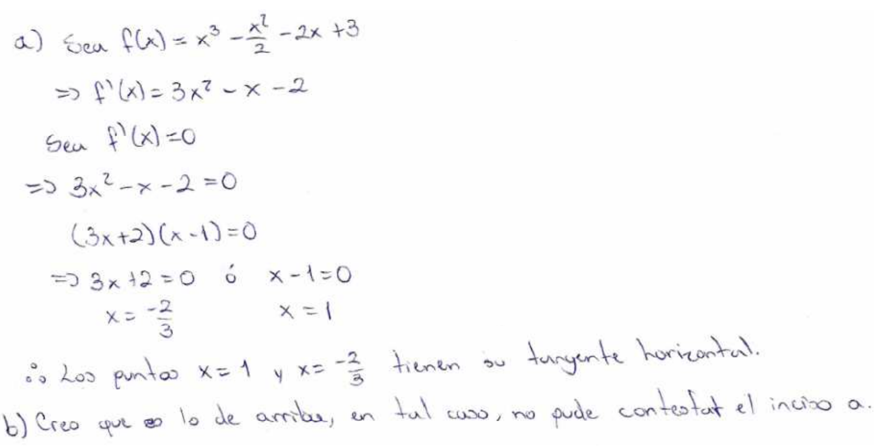
Grado de Corrección	**Apartado a)**		**Apartado b)**	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Correcta	23	43,4	4	7,6
Parcialmente correcta	7	13,2	20	37,7
Incorrecta	14	26,4	17	32,1
No contestan	9	17	12	22,6
Total	53	100	53	100

Figura 14 – Respuestas a la tarea 5 del *Cuestionario CDM-Derivada*

Respuesta estudiante J



Respuesta estudiante K



En la Figura 14 se aprecia cómo el estudiante J comienza a resolver el apartado a) de la tarea 6 de la misma forma en que procede, posteriormente, en el apartado b). Sin embargo, al percatarse de qué es lo que se le pide en el ítem b) de la tarea 6, escribe como respuesta al ítem a) "No tiene tangente horizontal". Posteriormente responde correctamente el apartado b) hallando los puntos en los que la razón de cambio de x con respecto de y es cero. Más evidente es el caso del estudiante K, quien resuelve correctamente el apartado a) de la tarea 6, y para el ítem b) responde: "Creo que es lo de arriba, en tal caso no pude contestar el inciso a".

Como se muestra en los dos ejemplos (Figura 14), los futuros profesores tienen dificultades para establecer conexiones entre dos acepciones de la derivada. Como se observa en la Tabla 9, el 32,1% de los futuros profesores no lograron hacer una asociación entre los significados de la derivada como la siguiente: "la razón de cambio de y con respecto a x es cero en aquellos puntos en los que la recta tangente a la función es horizontal".

Así tal y como lo señalamos en el análisis a priori, la relevancia de esta sexta tarea subyace en el hecho de que explora aspectos relevantes referentes al conocimiento especializado, aspectos que tienen que ver con la asosiación entre dos de los significados de la derivada. La Tabla 10 muestra los resultados en frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de cada uno de los dos apartados de esta tarea, obtenidos en el segundo estudio.

Tabla 10 – Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de la tarea 6. Estudio 2

Grado de Corrección	**Apartado a)**		**Apartado b)**	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Correcta	22	44,9	19	38,8
Parcialmente correcta	4	8,1	4	8,2
Incorrecta	14	28,6	8	16,3
No responden	9	18,4	18	36,7
Total	49	100	49	100

Como se explicó en el análisis epistémico de la tarea, cada uno de los ítems de la tarea 6, a) y b), de manera individual exploran el conocimiento común de los futuros profesores. Aún así, observamos en la Tabla 10 que casi el 50% de los futuros profesores ("Incorrecta" y "no responden") tuvieron dificultades para responder el ítem a); mientras que el 53% ("Incorrecta" y "no responden"), presentaron dificultades para responder al ítem b). Al igual que en los casos de la Figura 14, los resultados obtenidos con la tarea 6 en la segunda aplicación del cuestionario, mostraron evidencia de ese tipo de desconexiones en los futuros profesores, desconexiones entre los significados que ellos “recordaban” haber estudiado de sus cursos anteriores o cursos inmediatos (respuestas a la tarea 1), y la movilización de dichos significados en las distintas tareas del cuestionario. Concretamente, en la tarea 6 se evidencia la desconexión entre dos significados parciales de la derivada. A continuación se presenta un segmento de la entrevista realizada a un futuro profesor llamado Alberto. En la entrevista se puede ver claramente cómo Alberto no realiza las asociaciones entre los dos significados parciales de la derivada que esperábamos.

Inv. [L1–L5]: *…en la pregunta número 6 te damos una función cúbica y en el inciso a) te pedíamos que nos dijeras en qué puntos la gráfica de esta función [señalando la expresión simbólica de la función en el cuestionario] que te dimos tiene tangentes horizontales. En este sentido veo que aquí hiciste unos cálculos de los cuales me gustaría que hablaras un poco...*

Alberto [L6–L8]: *Bueno... aquí, lo primero que hice es derivar para buscar los mínimos o máximos. Porque tengo entendido que cuando hay un mínimo o un máximo de cierta gráfica su tangentes es horizontal.*

Inv. [L9]: *Ok, ¿y hallaste los…[puntos]*

Alberto: [L10]: *Ajá!*

Inv. [L11]: *Ok. ¿Y para el b)? Eso es para el a) ¿y para el b)?*

Alberto [L12–L13]: *Para el b) mmm… No me acordaba muy bien. La razón de cambio… no sé que hice. No, no recuerdo muy bien.*

Inv. [L14–L15]: *OK. ¿Entonces en ésta no te acuerdas cómo determinar la razón de cambio?*

Alberto [L16–L19]: *No, al principio pensé que era lo mismo que la primera, pero luego recordé que no… mmm no recuerdo como determinar la razón de cambio… De hecho en todas las tareas que siguen, en las últimas especifiqué que no me acordaba…*

Como se puede apreciar al inicio de la entrevista (L1 a L10), Alberto parece no tener problemas para resolver el inciso a) de la tarea, al igual que muchos otros de sus compañeros. Sin embargo, en él hay una desconexión evidente entre el significado de la derivada que moviliza para resolver el ítem a) y el significado que requiere movilizar para resolver el ítem b), cuando señala “no recuerdo como determinar la razón de cambio” (L16 a L19).

Otro tipo de respuestas que evidenciaban la misma desconexión entre los significados parciales de la derivada ya mencionados, son las de aquellos estudiantes que, como Cintia, respondieron correctamente el ítem b) de la tarea pero no el ítem a).

Inv. [L1–L5]: *…me gustaría que me hables a cerca de tu respuesta a la tarea seis. Te dan una función cúbica [señalando la función en el cuestionario] y veo que acá [en el cuestionario] respondiste el inciso b) en el cual se te pedía ¿en qué puntos la razón de cambio de y con respecto a x es*

	cero? ¿Me podrías comentar un poco sobre lo que hiciste para calcular el inciso b)?
Cintia [L6–L10]:	*En qué puntos la razón de cambio de y con respecto a x es cero… mmm bueno, la razón de cambio está relacionada con la derivada, entonces pues derivé la función cúbica. Como me están pidiendo en qué valores es cero, entonces igualé y' a cero y busqué las raíces donde… los valores de x que hacen que y' sea igual a cero.*
Inv. [L11]:	*Ok, ¿y que hay sobre el inciso a)?*
Cintia: [L12–L14]:	*Encuentra los puntos de la grafica de la función para los que su tangente es horizontal…Ah! Sí, allí luego me di cuenta jeje… cuando… cuando… es que cuando era cero… bueno yo pensaba graficar.*
Inv. [L15–L16]:	*¿Tiene tangentes horizontales la función? ¿podrías mostrarme si tiene o no tiene y por qué?*
Cintia [L17]:	*No tiene. Creo que no tiene.*
Inv. [L18–L19]:	*¿Qué necesitarías para estar segura de si tiene o no tiene tangentes horizontales? ¿necesitas más información?*
Cintia [L20–L23]:	*No…cuando tiene tangentes horizontales es cuando la derivada es igual a cero… luego cuando tiene pendiente cero… ah! Es lo mismo!... por eso no la hice [resolver el apartado a) de la tarea] porque me confundí, estaba toda revuelta…*
Inv. [L24]:	*Si tuvieras la gráfica ¿podrías responder la pregunta?*
Cintia [L25–L26]:	*Sí, sería más fácil. Pues ya me surgió dudas. No estoy segura de que no tenga [tangente horizontal].*

Como se puede apreciar en la transcripción anterior, Cintia no tuvo problema alguno para resolver satisfactoriamente el ítem b) de la tarea (L6–L10), no obstante, muestra dificultades para resolver el ítem a), resolución que, por supuesto, no asocia a la resolución del ítem b). De esta forma, a lo largo de la entrevista, Cintia hace proposiciones tales como "No tiene tangente horizontales" (L15-L17), "No estoy segura de que no tenga [tangentes horizontales]" (L25–L26) y "si sería más fácil [responder a la pregunta si tuviera la gráfica de la función cúbica propuesta]" (L25). De cualquier forma, al final de la entrevista, se había creado un conflicto cognitivo en Cintia, conflicto que la llevó a replantear su respuesta "no tiene tangentes horizontales" a "no estoy segura de que no tenga". Sin embargo, aún con este conflicto, Cintia aún veía las preguntas de los ítems a) y b) como dos cosas aisladas, pues como se evidenció en la líneas 24 y 26, para ella, responder al ítem a) sería más fácil si contara con la gráfica de la función, aún teniendo resuelta la parte b) de dicha tarea.

3.5. Tarea 7: Tasas instantáneas de variación

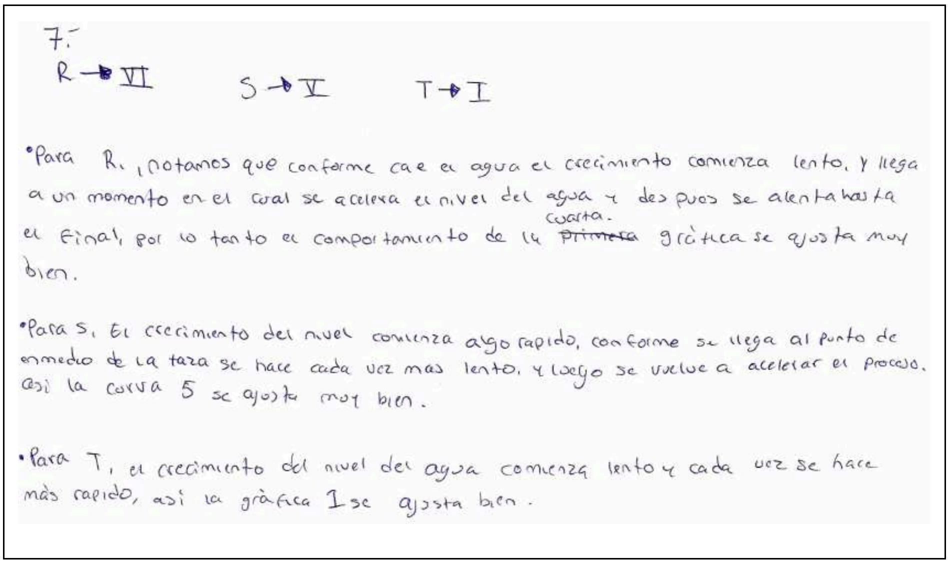
La Tabla 11 presenta los resultados para el grado de corrección de la tarea 7, obtenidos en el estudio 1. Como se observa en dicha tabla, el 54,7% de los futuros profesores, tuvieron dificultades para resolver la tarea. Los 43 (81,1%) sujetos que respondieron la tarea, utilizaron la derivada en su acepción como velocidad instantánea. Sin embargo, sólo el 5,7% respondió correctamente al apartado a) de la tarea 7. La Figura 15 muestra un ejemplo prototípico de las respuestas parcialmente correctas que dieron los futuros profesores.

Tabla 11 – Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de la tarea 7. Estudio 1

Grado de corrección	Tarea 4: ítem a)	
	Frecuencia	%
Correcta	3	5,7
Parcialmente correcta	21	39,6
Incorrecta	19	35,8
No contestan	10	18,9
Total	53	100

Al igual que en el estudio de Çetin (2009), el 75,4% de los futuros profesores no estableció una relación entre las funciones $h(t)$, representadas por las tazas, y las gráficas de las funciones $h'(t)$. Una de las posibles causas es que los futuros profesores no están habituados a resolver problemas “no cotidianos”, lo que les obstaculizó el paso de la representación icónica de la función (el dibujo de las tazas) a la representación gráfica de la función derivada, sin pasar por la representación gráfica de la función.

Figura 15 – Solución a la tarea 7 por el estudiante L


7.-
R → VI S → V T → I

•Para R, notamos que conforme cae el agua el crecimiento comienza lento, y llega a un momento en el cual se acelera el nivel del agua y después se alenta hasta el final, por lo tanto el comportamiento de la ~~primera~~ cuarta gráfica se ajusta muy bien.

•Para S, el crecimiento del nivel comienza algo rapido, conforme se llega al punto de enmedio de la taza se hace cada vez mas lento, y luego se vuelve a acelerar el proceso. así la curva 5 se ajusta muy bien.

•Para T, el crecimiento del nivel del agua comienza lento y cada vez se hace más rapido, así la gràfica 1 se ajusta bien.

Respecto al apartado b) de la tarea 7, todos los futuros profesores que lo respondieron proporcionaron “listados” de algunos conceptos tales como: derivada, función, modelación, concavidad, crecimiento y decrecimiento de funciones, etc., lo que evidencia que su conocimiento especializado requerido para la identificación de conocimientos puestos en juego a propósito de una práctica matemática, debe ser potenciado.

La Figura 15 presenta un ejemplo prototípico del tipo de respuestas que proporcionaron los profesores en formación inicial. En general, las justificaciones de los estudiantes, que proporcionaron alguna, se centraron en la descripción intuitiva de la rapidez de llenado, a partir de las figuras de las tazas. Elementos lingüísticos que aluden a proposiciones tales como "…el crecimiento comienza lento…", "…el crecimiento del nivel comienza algo rápido", fueron comunes de encontrar. Otros estudiantes se limitaron a realizar las relaciones sin justificar el razonamiento asociado al establecimiento de dichas relaciones. Más del 50% de la muestra no estableció una relación entre las funciones $h(t)$, representadas por las tazas, y las gráficas de las funciones $h'(t)$.

Para el estudio 2, la Tabla 12 muestra los resultados en frecuencias y porcentajes para el grado de corrección del ítem a) de la tarea 7. En esta segunda aplicación del cuestionario, nuevamente un alto porcentaje de estudiantes, 79,6%, no fueron capaces de establecer relaciones correctas entre las tasas dadas, que representaban la función de altura del agua, y las gráficas de su función derivada correspondiente. Sólo tres de los profesores en formación resolvieron correctamente la tarea.

Tabla 12 – Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección del ítem a) de la tarea 7. Estudio 2

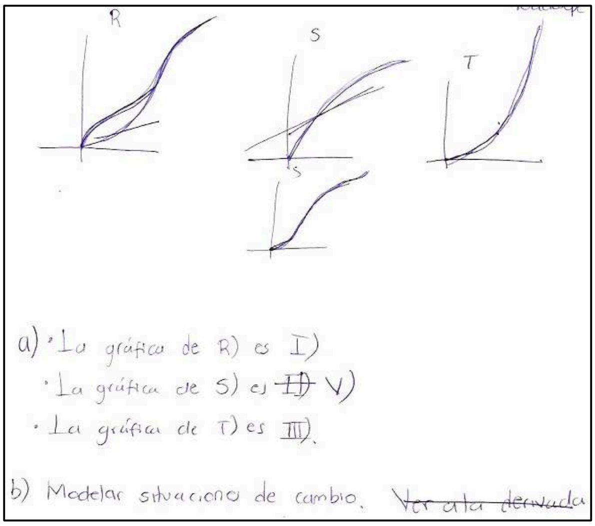
Grado de corrección	**Tarea 4: ítem a)**	
	Frecuencia	%
Correcta	3	6,1
Parcialmente correcta	26	53,1
Incorrecta	13	26,5
No responden	7	14,3
Total	49	100

En cuanto a las configuraciones cognitivas que pudimos identificar de las soluciones que dieron los estudiantes, de ambos estudios, a esta tarea, estas se centraron en justificaciones basadas en elementos lingüísticos verbales, mismos que referían a sentencias tales como "…el crecimiento comienza lento…", "…el crecimiento del nivel comienza algo rápido", etc. En general, los datos obtenidos con la aplicación del cuestionario, no arrojaron evidencias contundentes para caracterizar y describir tipologías de configuraciones cognitivas, ya que tanto las respuestas incorrectas como las correctas, pasando por las parcialmente correctas, fueron como la ejemplificada en la Figura 15.

Sin embargo, al realizar las entrevistas a algunos de los estudiantes se puso de manifiesto otro tipo de configuración, que podríamos denominar "*Gráfica – Gráfica*". El siguiente fragmento de la entrevista realizada a una estudiante, Cecilia, ejemplifica este nuevo tipo de configuración que se hace evidente en las entrevistas.

Inv. [L1–L9]:	*Vamos a pasar a otra pregunta que va en el mismo sentido. La pregunta si te acuerdas era de unas tazas que se estaban llenando a flujo constante mediante un grifo o una llave, y la pregunta era ¿cómo relacionas o relacionar, la actividad era relacionar cada una de las tazas que representan la función de llenado h(t) con sus derivadas? Se te daban seis opciones y aquí veo que hiciste algunas relaciones, por ejemplo vamos a hablar de la primera relación que tú tienes aquí, la taza R está relacionada con la gráfica uno, ¿me puedes hablar de la relación, de cómo fue que la obtuviste?*
Cecilia [L10–L16]:	*En este caso yo las relacioné con unas gráficas que elaboré de cómo se llenan las tazas [ver Figura 16]. Las gráficas representan el llenado, como es más ancha en la parte de abajo empieza a llenar más despacio, ya después cuando es más angosta, cuando es más altito empieza a llenarse más rápido, tiene como una parte exponencial pues se llena más rápido, y llegando ya a lo último de la taza está más anchita, entonces otra vez empieza a disminuir la velocidad de llenado.*
Inv. [L17–L19]:	*Y después de esta grafica que dibujaste [señalando la gráfica de llenado R] que es la de llenado, ¿qué fue lo que hiciste para relacionarlo?… ¿qué hiciste después?*
Cecilia [L20–L25]:	*Traté de relacionarla con su derivada a partir de la gráfica que ya dibujé… consideré algunas de las derivadas que hay aquí que podría ser la derivada de esa gráfica,… relacionándola…, si considero que esta gráfica [la grafica de llenado R] podría ser de un exponente cúbico, tratar de buscar una de exponente cuadrado, una cuadrática. Buscar una derivada con un exponente menos.*
Inv. [L26–L30]:	*Entonces por ejemplo, esta gráfica es una cúbica? [señalando la gráfica de llenado R]. Entonces, la gráfica uno de la derivada ¿qué representaría en el contexto del problema o cómo se interpreta? Porque esta me dijiste que era la gráfica de llenado, pero esta no sé qué seria, ¿cómo se interpreta? ¿Tienen alguna interpretación?*
Cecilia [L31–L33]:	*Como la velocidad…, el tiempo de llenado con respecto a determinadas alturas. Serviría para ver el cambio que hay en determinados tiempos y determinadas alturas.*

Figura 16 – Solución de Cecilia a la Tarea 7



Como ha quedado constatado, con el ejemplo de Cecilia, la característica principal de la configuración cognitiva que hemos denominado "*Gráfica – Gráfica*", es que a partir de las representaciones icónicas (imagen de las tazas) de la función "altura de llenado" se obtienen representaciones gráficas de la función altura de llenado [*h(t)*] de cada una de las tasas. Una vez obtenidas las gráficas *h(t),* a partir de diversas proposiciones tales como "Si la función R es una función cúbica, entonces la derivada es una función cuadrática,…la función derivada es con un exponente menos" (L20–L25), se pasa a las gráficas respectivas *h'(t).* Sin embargo, el uso de proposiciones como la que acabamos de mencionar, llevó a los futuros profesores a establecer relaciones incorrectas. Por ejemplo, Cecilia logra determinar que la función altura del agua respecto del tiempo *h(t)* de la taza R, era una función cúbica (L22-L24), empero, al no considerar aspectos como el de la simetría respecto del punto de inflexión de la función cúbica *h(t),* no concibe que la función derivada, si bien debe ser de un grado menor (una función cuadrática), ésta debe de ser simétrica, lo que llevaría a considerar como posibles respuestas las gráficas II y V. Posteriormente, mediante consideraciones sobre la rapidez de cambio de la función *h(t)* o la velocidad de llenado si se observa directamente de la taza R, podría discriminar y concluir que la gráfica de la derivada asociada a la taza R es la gráfica II.

Debemos destacar que, esta configuración cognitiva (gráfica – gráfica) fue utilizada por todos los estudiantes entrevistados. Cecilia fue la única estudiante, de los 49 que participaron en este segundo estudio y que fue entrevistada, que escribió las gráficas *h(t)* del cuestionario, gráficas que en un principio no teníamos la certeza de que fueran las gráficas de llenado obtenidas de R, S y T, ni de cómo es que relaciona dichas gráficas con las gráficas de sus respectivas derivadas. Por esta razón, decimos que esta configuración cognitiva se hace perceptible durante las entrevistas realizadas.

En lo que respecta al ítem b) de la tarea, los futuros profesores proporcionaron "listas pobres" de algunos conceptos y macro procesos como el modelación, tal y como en el ejemplo de la Figura 16. Este hecho daba cuenta del escaso conocimiento de tipo especializado del contenido con el que contaban los profesores para la identificación de conocimientos plausibles puestos en juego, a propósito de una tarea como la planteada.

3.6. Las tareas 9, 10 y 11

Las tareas 9, 10 y 11 que han sido incluidas en la "versión final" del cuestionario considerando los resultados del estudio del juicio de los expertos, trataban de explorar otros aspectos del conocimiento de los profesores sobre la derivada, que no habían sido explorados hasta el momento con las tareas anteriores. Por ejemplo, el uso que hacen los futuros profesores de la derivada en otros contextos como la economía y la asociación o conexiones entres los significados parciales que se activan en los distintos contextos (Tarea 9), los conocimientos que les faculta para modelar situaciones a partir de proposiciones verbales y así transitar entre distintos registros de representación (Tareas 10 y 11). No obstante, los resultados obtenidos con la aplicación de estas tres tareas, no fueron nada alentadores, o visto desde otro punto de vista, fueron muy sugerentes.

Ninguno de los 49 profesores que participaron de este segundo estudio, respondieron alguna de las tres últimas preguntas. Cuatro estudiantes realizaron algunos "intentos" y cálculos escuetos, que si bien es cierto, formaría parte de sus conocimientos, éstos por sí mismos no permitían inferir ni mucho menos describir nada, por lo que juzgamos innecesario traerlos a colación.

A partir del resultado obtenido con estas tres tareas, nos planteamos diversas hipótesis acerca de lo que podría haber pasado, por ejemplo: 1) el factor tiempo, era probable que las dos horas que duró la aplicación del cuestionario fuera insuficiente para los futuros profesores; y 2) falta de conocimientos, asociados a la modelación de diversas situaciones y para usar la derivada en diversos contextos como el de economía. Sin embargo, los resultados obtenidos con las respuestas, o mejor dicho, no obtenidos, no contribuían a la constatación de alguna de las hipótesis y, en principio, sólo podíamos alegar lo sucedido con la primera de ellas: la falta de tiempo. Por esta razón a todos los estudiantes entrevistados (15) se les cuestionó sobre las razones por las cuales no respondieron a dichas tareas. Los resultados de dichas entrevistas sustentaban algunas de nuestras hipótesis y daban luz acerca de otras razones, que no habíamos considerado, por las cuales no respondieron a estas. A continuación se presenta un segmento de la entrevista realizada a un estudiante, Alberto, segmento durante el cual se le cuestiona sobre las tareas 9, 10 y 11.

Inv. [L1–L2]:	*Ahora vamos a hablar un poco acerca de las tareas que no respondiste. Comencemos por la nueve…*
Alberto [L3]:	*En las últimas especifiqué que no me acordaba.*
Inv. [L4]:	*¿Sabes que es un costo marginal?*
Alberto [L5–L8]:	*No. No sabía que hacer. Se me olvidaron muchas cosas. En análisis numérico siempre nos decía el maestro “si no sabes que hacer, deriva”… es una frase más. Me imaginé que tenía que derivar, de hecho derivé, pero luego lo borré porque no sabía nada.*
Inv. [L9–L11]:	*Entonces no sabes cuál es la relación entre la derivada y la función que te damos; pero si te digo que derives ésta [la función dada], ¿si la puedes derivar?*
Alberto [L12–L13]:	*Sí [el alumno derivó la función dada correctamente en un folio en blanco].*
Inv. [L14]:	*Bueno, bueno, pasemos entonces a la tarea 10…*
Alberto [L15–L16]:	*No me acuerdo como se hace, es lo mismo… es terrible… la energía cinética…*
Inv. [L17–L21]:	*Olvidémonos un poco de la pregunta y leamos el enunciado. Podrías responderme o no responderme, ¿podrías dar un modelo de una función que modele la actividad que se te propone? Es decir, acá te dicen: la energía cinética de un objeto es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad. Hasta allí. ¿Podrías representar un modelo?*
Alberto [L22–L24]:	*No sé cómo representar energía cinética ni velocidad. Velocidad es igual a distancia entre tiempo. Entonces no sé cómo sería la energía cinética… se me viene a la mente como proporcional.*
Inv. [L25]:	*Directamente proporcional… ¿eso qué te indica?*
Alberto [L26–L28]:	*Me suena a algo de A entre B es igual a C, algo así me suena, pero… Pues me imagino que tal vez la energía cinética será algo de la forma A entre B. Entonces podría ser proporcional a la distancia entre tiempo.*
Inv. [L29–L32]:	*Dime una cosa: ¿Qué pasaría si yo te doy el modelo? Si yo te doy una función en donde ya se contemple la primera parte de la tarea: La energía cinética… hasta es proporcional a un medio de su masa. ¿Podrías responder la pregunta, si tuviéramos ya la función?...*
Alberto [L33]:	*Sí.*
Inv. [L34–L36]:	*Supón que doy esto [el modelo matemático que representa la energía cinética escrita en una tarjeta]. ¿Podrías resolver ya la pregunta con ese modelo?*
Alberto [L37–L38]:	*Me imagino que tengo que derivar esto [el modelo o función] con respecto a la velocidad…*
Inv. [L39]:	*¿Sabes que es rapidez de cambio?*
Alberto [L40]:	*No exactamente*

Inv. [L41–L43]:	*Vamos a variar un poco la pregunta, ¿qué pasa si te digo razón de cambio?... La misma pregunta, cuál es la razón de cambio de la energía cinética…*
Alberto [L44–L46]:	*Yo asocio la razón de cambio con… no recuerdo qué era la razón de cambio… podría intentar hacer algunos cálculos pero no estoy seguro de que sean correctos.*
Inv. [L47]:	*Bueno, ¿y que hay de la tarea 11?*
Alberto [L48–L52]:	*Me sonó a álgebra. Imaginé dos números. No sé si interpreté bien. Imaginé dos números tal que al evaluar el primero por el segundo en su derivada sea un máximo entonces como que tendría que sacar la segunda derivada, eso se me ocurre…. La verdad no tengo idea de cómo resolverlo…*

Es posible apreciar en el dialogo anterior que Alberto, al igual que varios de sus compañeros entrevistados, no ha respondido a las tareas 9, 10 y 11, más por falta de conocimientos que por falta de tiempo. Alberto, como otros de los estudiantes entrevistados, hace evidente su desconocimiento sobre la relación que hay entre la derivada y la función de costo marginal (L4 a L8), por lo que en el contexto de la tarea 9, la economía, no le confiere un significado a la derivada. Del mismo modo, en la tarea 10, Alberto no es capaz de establecer una relación entre la derivada, rapidez de cambio y razón de cambio (L39-L40, L44-L46). Además, otro impedimento que se encontró para resolver la tarea, que fue un aspecto generalizado en todos los estudiantes entrevistados, es que al parecer Alberto no tiene conocimiento especializado requerido para modelar situaciones como la planteada y así, pasar de un registro de representación a otra (L25-L36). Análogamente ocurrió con la tarea 11, en la cual el principal impedimento que se encontraron los profesores en formación fue el no saber modelar la situación planteada (L48-L52).

Una pregunta que nos ha surgido con las entrevistas, aunque sería aventurado responder por la falta de información, es ¿las carencias manifestadas por los futuros profesores respecto del conocimiento que les faculta para responder tareas como las últimas tres planteadas en nuestro cuestionario, serán a causa de la formación que reciben? Alberto señala lo siguiente: "*No sabía que hacer. Se me olvidaron muchas cosas. En análisis numérico siempre nos decía el maestro 'si no sabes que hacer, deriva'* " (L5-L7). Sería interesante explorar cuál es la naturaleza de sus cursos de formación, sobre temas de análisis matemático y de didáctica del cálculo, estudio que queda fuera del alcance de nuestra investigación.

4. Conclusiones

De manera estricta, podemos decir que la evaluación, y por ende el logro del objetivo de nuestra investigación, de la faceta epistémica del CDM sobre la derivada, mediante el cuestionario que diseñamos, se realizó en dos momentos. Un primer momento tuvo lugar con la aplicación del instrumento "piloto". Esta primera aplicación del cuestionario (primer estudio) tuvo un carácter mucho mayor al que suelen tener las "exploraciones piloto" o "pilotajes" de los instrumentos, al contemplar análisis pormenorizados de las configuraciones cognitivas que los futuros profesores activaron en la solución de las tareas. Esta análisis minucioso permitió la categorización o tipificación de dichas configuraciones cognitivas. En un segundo momento, que denominamos "segundo estudio", se aplicó el cuestionario a una muestra de 49 futuros profesores de bachillerato. Este segundo estudio fue reforzado con entrevistas clínicas que permitieron profundizar en la exploración y descripción de las configuraciones cognitivas utilizadas por los futuros profesores al resolver las tareas del cuestionario. Además este segundo estudio afianzó la fiabilidad de nuestros resultados y, en general, de nuestra investigación.

Como resultado de la aplicación del cuestionario, se puso de manifiesto que tal y como lo señalan Berry y Nyman (2003), en muchas ocasiones la comprensión de las ideas básicas del cálculo de los futuros profesores es similar a la de los estudiantes, incluyendo aquellas concepciones erróneas y la limitada comprensión de los objetos matemáticos. Esta "limitada comprensión" adquirió énfasis cuando los futuros profesores se enfrentaron a tareas tales como la Tarea 4 y, en general, de aquellos ítems que requerían la movilización del significado formal de la derivada para probar o justificar proposiciones. Del mismo modo, esta limitada comprensión se evidencia mediante la desconexión de los significados parciales de la derivada en los futuros profesores, desconexión de la que dan cuenta las dificultades que presentaron para resolver el ítem b) de la tarea seis cuando habían resuelto correctamente el ítem a), y viceversa. Además esta falta de asociación entre los significados parciales y comprensión del objeto derivada, se refleja a lo largo del cuestionario cuando en la tarea 1 proporcionan "listados" de lo que significa para ellos la derivada, pero no activan dichos significados parciales (anotados en la respuesta de la tarea 1) cuando la tarea o ítem lo requiere.

Los resultados obtenidos en las tareas 6 y 7, por su parte, ponen de manifiesto las dificultades que tienen los futuros profesores cuando tienen que usar la derivada como razón instantánea de cambio en el caso de una situación de cierta complejidad. Las Tarea 1 y 5, por ejemplo, dan cuenta tanto de las insuficiencias en el conocimiento especializado y ampliado manifestado por los futuros profesores, como de la desconexión entre los distintos significados de la derivada. Los resultados obtenidos en las tarea 3, 7 y 8, por ejemplo, apoyan la necesidad de mejorar el conocimiento ampliado de los futuros profesores, que les faculte para resolver tareas con características similares. Así mismo, ítems como el e) de la tarea 2, c) de la tarea 3 y el b) de la tarea 7, sugieren que los futuros profesores no han adquirido o desarrollado suficientemente uno de los niveles del conocimientos especializado del contenido, aquel que les faculte para identificar conocimientos involucrados en soluciones plausibles. En general, los resultados obtenidos a partir de los análisis cuantitativos y cualitativos, nos develan aspectos que van más allá de que el cuestionario haya resultado fácil o difícil para los futuros profesores, o de aspectos relacionados con "los profesores no tienen conocimiento". Tanto el análisis de las configuraciones cognitivas activadas y manifestadas en las resoluciones que los futuros profesores ofrecieron a las distintas tareas que integran el cuestionario, como las entrevistas que se realizaron a algunos de ellos para profundizar en el estudio de dichas configuraciones cognitivas, han arrojado resultados valiosos relacionados con la naturaleza de los conocimientos didáctico-matemáticos de los futuros profesores, tales como los conflictos y errores que presentan cuando requieren usar diversas representaciones de un objeto matemático, la desconexión entre los distintos significados parciales de la derivada o la problemática en cuanto a la adquisición de conocimientos que les confiera competencias para poder resolver tareas de modelación tales como las tareas 10 y 11 del cuestionario. Las entrevistas que realizamos para profundizar en las razones que llevaron a los profesores en formación a la no resolución de tareas como la 9, 10 y 11, desmienten nuestra hipótesis de que el "factor tiempo" fue el principal problema, desvelando las verdaderas causas. La pregunta es, ¿cuál es el origen o naturaleza de las dificultades que presentaros los futuros profesores en la resolución de las tareas? ¿cómo podemos ayudar a los futuros profesores a superar dichas dificultades y desarrollar así conocimientos necesarios para la resolución de tareas como las incluidas en el cuestionario? Estas y otras preguntas podrían ser vias de continuidad de nuestra investigación.

Los resultados obtenidos con el diseño y aplicación del cuestionario, y en general el desglose y análisis con detalle de las configuraciones cognitivas, nos ayudan a comprender las debilidades del conocimiento de los futuros profesores sobre la derivada, dándonos orientación sobre el camino que debemos seguir para el diseño de acciones formativas que contribuyan al desarrollo y potenciación del mismo; aspecto que, entre otras cosas, queda fuera del alcance de este estudio, pero que sin duda es de interés continuar en dicha dirección.

El análisis del contenido ontosemiótico (epistémico) realizado para cada una de las tareas muestran que los objetos matemáticos, sus significados y los procesos identificados en las soluciones plausibles de las tareas, se adaptan a los objetos matemáticos, sus significados y los procesos involucrados en las configuraciones cognitivas (análisis ontosemiótico cognitivo) asociadas a las respuestas de los profesores en formación inicial. Así, la técnica de análisis denominada análisis semiótico (Godino, 2002; Malaspina y Font, 2010; Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2011) permite observar y describir de manera sistemática tanto la actividad matemática realizada por los futuros profesores al resolver problemas, como los objetos matemáticos primarios (elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) que intervienen en las prácticas que permiten la resolución de las tareas (Godino, Batanero y Font, 2007).

Agradecimientos

Esta investigación ha sido desarrollada en el marco de los proyectos de investigación sobre formación de profesores: EDU2012-32644 (Universidad de Barcelona) and EDU2012-31869 (Universidad de Granada).

Referencias

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

ÇETIN, N. The ability of students to comprehend the function-derivative relationship with regard to problems from their real life. *PRIMUS*, v. 19, n. 3, p. 232-244, 2009.

CRESWELL, J. W. *Research design: qualitative, quantitative and mixed methods approaches*. Thousand Oaks, CA: Sage, 2009.

FONT, V.; GODINO, J. D.; GALLARDO, J. The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, v. 82, n. 97-124, 2013.

GODINO, J. D. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 22, n. 2/3, p. 237-284, 2002.

GODINO, J. D. Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, v. 20, p. 13-31, 2009.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, v. 39, n. 1, p. 127-135, 2007.

GODINO, J. D.; FONT, V.; WILHELMI, M.; LURDUY, O. Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, v. 77, n. 2, p. 247-265, 2011.

HILL, H. C.; BALL, D. L.; SCHLLING, S. G. Unpacking pedagogical content knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 39, p. 372-400, 2008.

JOHNSON, R. B.; ONWUEGBUZIE, A. Mixed methods research: a research paradigm whose time has come. *Educational Research*, v. 33, n. 7, p. 14-26, 2004.

MALASPINA, U.; FONT, V. The role of intuition in the solving of optimization problems. *Educational Studies in Mathematics*, v. 75, n. 1, p. 107-130, 2010.

PINO-FAN, L. *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada*. Tesis Doctoral, Universidad de Granada, España, 2013.

ROWLAND, T.; HUCKSTEP, P.; THWAITES, A. Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, v. 8, n. 3, p. 255-281, 2005.

ROWLAND, T.; RUTHVEN, K. (Eds.). *Mathematical Knowledge in Teaching, Mathematics Education Library 50*. London: Springer, 2011.

SCHOENFELD, A.; KILPATRICK, J. Towards a theory of profiency in teaching mathematics. In: TIROSH, D.; WOOD, T. L. (Eds.). *Tools and processes in mathematics teacher education* (p. 321-354) Rotterdam: Sense Publishers, 2008.

SHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, v. 57, n. 1, p. 1-22, 1987.

TURNER, F.; ROWLAND, T. The knowledge quartet as an organising framework for developing and deepening teachers' mathematics knowledge. In: ROWLAND, T.; RUTHVEN, K. (Eds.). *Mathematical knowledge in teaching* (p. 195-212). London and New York: Springer, 2011.