# CONFIGURACIONES DE PRÁCTICAS, OBJETOS Y PROCESOS IMBRICADAS EN LA VISUALIZACIÓN ESPACIAL Y EL RAZONAMIENTO DIAGRAMÁTICO

Juan D. Godino[1], Belén Giacomone[1], Miguel R. Wilhelmi[2], Teresa F. Blanco[3] y Ángel Contreras[4]

[1]Universidad de Granada; [2]Universidad Pública de Navarra; [3]Universidad de Santiago de Compostela; [4]Universidad de Jaén

## RESUMEN

Los diagramas, y en general el uso de visualizaciones y materiales manipulativos, desempeñan un papel importante en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Aunque diversos autores advierten que los objetos matemáticos deben ser distinguidos de sus posibles representaciones materiales las relaciones entre dichos objetos siguen siendo conflictivas, tanto desde el punto de vista epistemológico como educativo. En este trabajo aplicamos algunas herramientas teóricas del enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático para analizar la diversidad de objetos y procesos implicados en la actividad matemática, que se realiza con apoyo de representaciones diagramáticas. Esto permite apreciar las relaciones sinérgicas entre los objetos *ostensivos* (lenguajes visuales y secuenciales) y los objetos *no ostensivos* (entidades abstractas y mentales) imbricados en las prácticas matemáticas. El análisis de las características del razonamiento diagramático y su interpretación en términos ontosemióticos se contextualiza mediante el análisis de la resolución de un problema sobre fracciones aplicando tres procedimientos que involucran el uso de diagramas.

*Palabras clave*: diagramas, razonamiento matemático, lenguajes visuales, lenguajes secuenciales, objetos no ostensivos

## 1. INTRODUCCIÓN

Para favorecer el aprendizaje de las matemáticas se propone el uso de diversas representaciones, visualizaciones, diagramas, materiales manipulativos, asumiendo el supuesto de que tales materializaciones constituyen *modelos* de los conceptos matemáticos y de las estructuras en las cuales se organizan. Se supone que el uso de representaciones materiales es necesario no solo para comunicar las ideas matemáticas sino también para su propia construcción. Sin embargo, las relaciones entre las matemáticas y el mundo real no dejan de ser conflictivas[1]. Así, la Geometría no es la "medida de la Tierra", como etimológicamente se establece, sino un modelo del espacio, esto es, una representación simplificada que permita la previsión y la acción. Es pues necesario en educación matemática la identificación y descripción de los objetos matemáticos y reconocer su naturaleza específica.

[1] Se atribuye a Einstein la siguiente afirmación: "Las proposiciones matemáticas en cuanto que tienen que ver con la realidad no son ciertas y en cuanto que son ciertas no tienen nada que ver con la realidad".

> “Cualquier teoría didáctica, en un momento u otro (a menos que voluntariamente quiera confinarse a sí misma en una posición ingenua), debe clarificar su posición ontológica y epistemológica” (Radford, 2008, p. 221)

El problema que abordamos en este trabajo surge de la constatación de que algunos trabajos sobre el razonamiento diagramático, y en general sobre el uso de visualizaciones en educación matemática, no abordan de manera explícita la naturaleza y diversidad de objetos matemáticos representados mediante los diagramas y demás visualizaciones. Los objetos matemáticos son considerados como abstractos mientras que los diagramas lo son como concretos o perceptibles, y se insiste en no confundirlos, pero las relaciones entre ambos tipos de objetos no son abordadas de manera explícita. No es de extrañar esta situación dado que clarificar lo que sean los objetos abstractos y su relación con el mundo empírico es un problema filosófico y psicológico de primera magnitud que es abordado desde diversos paradigmas y marcos teóricos.

En este trabajo pretendemos progresar en la identificación de los objetos involucrados en el razonamiento diagramático y en la descripción de su naturaleza. Para ello, utilizaremos la perspectiva semiótica y antropológica propuesta por el “enfoque ontosemiótico” del conocimiento matemático (Godino, Batanero y Font, 2007; Font, Godino y Gallardo, 2013).

El problema epistemológico y semiótico que nos interesa es dilucidar las relaciones entre las representaciones visuales, diagramáticas o de cualquier otro tipo, y los objetos matemáticos no ostensivos que les acompañan necesariamente. También nos interesa dilucidar la dialéctica entre los distintos tipos de lenguajes, tomando conciencia de las limitaciones de las representaciones diagramáticas que deben ser compensadas por los lenguajes secuenciales, aunque reconociendo las posibilidades epistémicas y cognitivas de los medios visuales de expresión. El fin educativo es mostrar que la aplicación de la herramienta configuración ontosemiótica puede ayudar a comprender las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje matemático, al revelar la trama de objetos ostensivos y no ostensivos que intervienen en la actividad matemática y las relaciones sinérgicas entre los mismos.

En la siguiente sección mencionamos algunos rasgos característicos de la visualización y el razonamiento diagramático que señalan el problema descrito, esto es, la brecha entre la representación y el objeto matemático representado. Seguidamente sintetizamos la noción de *configuración ontosemiótica* de prácticas, objetos y procesos, que será la herramienta teórica que usaremos en la sección 4 para analizar el razonamiento diagramático desplegado en la resolución de un problema sobre fracciones usando tres métodos diferentes. En la sección 5 resaltamos las relaciones sinérgicas que existen entre los diversos tipos de lenguajes y los objetos no ostensivos necesariamente imbricados en la práctica matemática. En la última sección incluimos algunas reflexiones sobre el tipo de comprensión que el enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático puede aportar a la visualización y el razonamiento diagramático, así como algunas implicaciones sobre el aprendizaje y la formación de profesores de matemáticas.

## 2. VISUALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO DIAGRAMÁTICO

### Visualización y tipos de lenguajes

Arcavi (2003, p. 217) describe la visualización en términos muy generales: “La visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre retratos, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y comprensiones avanzadas“. Asimismo, este autor considera que la matemática, como creación humana y cultural que trata con objetos y entidades muy diferentes de cualquier fenómeno físico, se apoya fuertemente sobre la visualización en sus diferentes formas y niveles, no solo en el campo de la geometría. Mediante la visualización cualquier organización puede ser sinópticamente comprendida como una configuración, haciendo visible todo lo que no es accesible a la visión y aportando una aprehensión global de cualquier organización de relaciones (Duval, 2002).

Godino, Gonzato, Cajaraville y Fernández (2012) analizan la noción de visualización aplicando las herramientas del enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático (EOS) (Godino et al., 2007; Font et al., 2013) y proponen distinguir entre “prácticas visuales“ y “prácticas no visuales” o simbólico/analíticas. Fijan la atención en los tipos de objetos lingüísticos y artefactos que intervienen en una práctica los cuales son considerados como visuales si ponen en juego la percepción visual. Bien entendido, las representaciones simbólicas (lengua natural o lenguajes formales), aunque consisten en inscripciones visibles, no son consideradas como inscripciones propiamente visuales, sino como analíticas o sentenciales.

Los *lenguajes secuenciales* (por ejemplo, lógicas simbólicas, lenguajes naturales) usan solo la relación de concatenación para representar relaciones entre objetos. Por el contrario, en los diagramas se hace uso de relaciones espaciales para representar otras relaciones.

> “La idea es que los lenguajes sentenciales están basados en señales acústicas que son secuenciales por naturaleza, y por ello deben tener una sintaxis compleja que lo compense para expresar ciertas relaciones - mientras que los diagramas, siendo bidimensionales, son capaces de mostrar algunas relaciones sin la intervención de una sintaxis compleja“ (Shin y Lemon, 2008, p.10).

## El rol de los diagramas en el trabajo matemático

En las investigaciones analizadas en el campo de la educación matemática se proponen diferentes concepciones sobre el uso de diagramas. Arcavi los incluye como un recurso visual más que articula con la visualización; pero según la literatura sobre razonamiento diagramático, los diagramas, entendidos en el marco de la *semiótica peirceana* (Dörfler, 2005; Bakker y Hoffmann, 2005; Rivera, 2011), constituyen un recurso esencial del razonamiento matemático, así como en otros campos y disciplinas científicas (Shin y Lemon, 2009).

Encontramos que dichas investigaciones presentan una doble concepción sobre la noción de diagrama. Una concepción amplia en la que casi cualquier tipo de inscripción que hace uso del posicionamiento espacial en dos o tres dimensiones (derecha, izquierda; delante, detrás; arriba, abajo; inclusión, intersección, separación; acumulación, …) es un diagrama (figuras geométricas; gráficos cartesianos; matrices; grafos; mapas conceptuales; organigramas; croquis y mapas, …). Otra concepción más restringida requiere poder realizar con dichas representaciones determinadas transformaciones, combinaciones y construcciones según ciertas reglas sintácticas y semánticas específicas. Las partes constituyentes de un diagrama pueden ser cualquier tipo de inscripción como letras, numerales, signos especiales o figuras geométricas.

Peirce incluye en la noción de diagrama a las fórmulas algebraicas ya que las entiende como iconos de relaciones entre sus elementos constituyentes. Una característica que distingue a los iconos es que mediante la observación directa del mismo se pueden descubrir otras verdades relativas al objeto distintas de las que son suficientes para determinar su construcción. Esta capacidad de revelar verdades no esperadas es precisamente en lo que radica la utilidad de las fórmulas algebraicas, por lo que su carácter icónico-diagramático es el que prevalece. Así, por ejemplo, cuando se afirma: "la expresión $y = x^2 - 2x +1$ es una parábola" se informa de las propiedades esenciales del objeto matemático. Sin embargo, las letras de las expresiones algebraicas, tomadas de manera aislada, no son iconos, sino índices: cada letra es un índice de una cantidad. Por el contrario, los signos +, =, /, etc., son símbolos en el sentido de Peirce.

> "En las expresiones algebraicas encontramos, por tanto, ejemplos de la imbricación de los tres tipos de signos en la escritura matemática: las letras funcionan como índices, los signos de las operaciones, igualdad, desigualdad, etc. son símbolos, mientras las expresiones como un todo funcionan como un icono" (Filloy, Puig y Rojano, 2008, p. 47).

**Razonamiento diagramático**

Dörfler (2003, p. 41) identifica algunas de las características de los diagramas y el razonamiento diagramático:

- Las inscripciones diagramáticas tienen una estructura consistente en una disposición espacial específica de sus partes y elementos y relaciones espaciales entre ellos.
- Basadas en esta estructura diagramática se realizan operaciones guiadas por reglas sobre y con las inscripciones mediante transformación, composición, descomposición y combinación de las mismas (cálculos en aritmética y álgebra, construcciones en geometría, derivaciones en lógica formal).
- Otro tipo de reglas convencionales gobiernan la aplicación e interpretación del diagrama dentro y fuera de las matemáticas, esto es, lo que se puede considerar que diagrama designa o modeliza.
- Las inscripciones diagramáticas tienen un carácter genérico que permite la construcción de ejemplares arbitrarios del mismo tipo de diagrama.
- El razonamiento diagramático es una manipulación, inventiva y constructiva, de diagramas basada en reglas para investigar sus propiedades y relaciones.
- El razonamiento diagramático no es mecánico o puramente algorítmico, más bien es imaginativo y creativo.
- En el razonamiento diagramático el foco está en las inscripciones diagramáticas cualquiera que pueda ser su significado referencial. Los objetos del razonamiento diagramático son los propios diagramas y sus propiedades previamente establecidas.
- El razonamiento diagramático eficiente y exitoso presupone una experiencia intensa y extensa con la manipulación de diagramas. Un amplio "inventario" de diagramas, sus propiedades y relaciones apoya y ocasiona el uso creativo e inventivo de diagramas.

El razonamiento diagramático implica tres pasos (Bakker y Hoffmann, 2005, p. 340): 1) Construir uno o varios diagramas mediante un sistema de representación. 2) Experimentar con los diagramas. 3) Observar los resultados de la experimentación y reflexionar sobre ellos. Cualquier experimentación con un diagrama se está ejecutando dentro de un sistema de representación y es una regla o actividad, situado dentro de una práctica. A partir de esa experimentación y observación, Peirce destaca que se pueden "descubrir relaciones inadvertidas y ocultas entre las partes de un diagrama" (CP 3.363). En este sentido, Rivera (2011), destaca que "con la ayuda del razonamiento diagramático, el foco cambia hacia la detección, construcción y establecimiento de regularidades y relaciones invariantes que eventualmente toman la forma de conceptos y teoremas que son en sí mismos diagramas en algún otro formato" (Rivera, 2011, p.229).

**Registros de representación y diagramas**

Duval (2006) atribuye un papel esencial no solo al uso de diferentes sistemas de representación semiótica (SRS) para el trabajo matemático sino al tratamiento de los signos dentro de cada sistema y la conversión entre diferentes SRS: "El papel que los signos juegan en matemáticas no es ser sustituidos por otros objetos sino por otros signos. Lo que importa no es la representación sino sus transformaciones. Contrariamente a otras áreas del conocimiento científico, los signos y la transformación de los signos y las representaciones semióticas son el corazón de la actividad matemática". Dörfler (2005) reconoce que los diagramas pueden constituir un registro de representación autónomo para representar y producir conocimiento matemático en ciertos campos específicos, pero no es completo. Necesita ser complementado por el lenguaje conceptual-verbal para expresar nociones como continuidad y diferenciabilidad; imposibilidad de existencia de determinados objetos; o situaciones de uso de los cuantificadores *para todo*, *cada uno* y *existe*.

Las relaciones entre los objetos físicos, los diagramas y demás visualizaciones usadas en el práctica matemática y los objetos matemáticos (conceptos, proposiciones, procedimientos, …) son conflictivas. Duval (2006, p. 129) concibe el objeto matemático como "el invariante de un conjunto de fenómenos o el invariante de alguna multiplicidad de posibles representaciones", e insiste en no confundir el objeto matemático con sus diversas representaciones. Esto le lleva a plantear la *paradoja cognitiva* del aprendizaje matemático:

> "El problema crucial de la comprensión matemática para los estudiantes, en cualquier nivel del currículo, surge del conflicto cognitivo entre estos dos requerimientos opuestos: cómo pueden distinguir el objeto representado de la representación semiótica usada si no pueden tener acceso al objeto matemático sino por medio de las representaciones semióticas" (Duval, 2006, p. 107).

Otro problema con relación al uso de diagramas es el señalado por Shin y Lemon (2008, sec. 4.1) consistente en el paso de lo particular a lo general:

> "Una cuestión central, si no el problema central, es el *problema de la generalidad*. El diagrama que aparece en una demostración de Euclides proporciona un ejemplar único del tipo de configuraciones geométricas a las que se refiere la demostración. No obstante las propiedades que parecen cumplirse en el diagrama son tomadas como que se cumplen

> en *todas* las configuraciones del tipo dado. ¿Qué justifica este salto de lo particular a lo general?"

**Diagramas y objetos abstractos**

Otros autores (Bakker y Hoffmann, 2005), siguiendo a Peirce, además de asignar un papel central a las operaciones realizables sobre inscripciones diagramáticas, asumen una concepción de los objetos matemáticos condensada en la *abstracción hipostática*, según la cual una cierta característica de un conjunto de objetos es considerada como un nuevo objeto; se asigna un nombre a un predicado concreto creándose de ese modo un objeto abstracto. "En matemáticas, una colección es una abstracción hipostática. Y los números cardinales son abstracciones hipostáticas derivados del predicado de una colección" (Peirce, CP 5.535).

Pensar en los objetos matemáticos como cualidades de colecciones de objetos, o invariantes de un conjunto de fenómenos o representaciones, que son convertidas en nuevos objetos (abstractos) por el mero hecho de ser nombradas con términos específicos es adoptar una posición no exenta de problemas filosóficos, cognitivos, y por tanto, educativos. Supone no tener en cuenta la revolución lingüística que aportó Wittgenstein sobre la actividad matemática y el producto resultante de dicha actividad.

Sherry (2009) adopta una perspectiva antropológica sobre el papel de los diagramas en la argumentación matemática, diferente a la semiótica peirceana, según la cual los diagramas son un medio indispensable en el proceso de abstracción hipostática. Sherry analiza el papel de los diagramas en el razonamiento matemático (geométrico y numérico - algebraico) sin recurrir a la introducción de objetos abstractos, apoyándose en una perspectiva wittgeinsteiniana sobre la matemática. "Reconocer que un diagrama es uno más entre otros objetos físicos es el paso crucial para comprender el papel de los diagramas en la argumentación matemática" (Sherry, 2009, p. 65).

La posición de este autor se basa en observar la manera en cómo las matemáticas se aplican a los objetos concretos. La experiencia con diagramas, debe proporcionar a los estudiantes la oportunidad de ver la relación mutuamente determinante entre la construcción de una regla inferencial y el desarrollo del conocimiento matemático. Se trata de evitar el recurso a los conceptos abstractos concebidos de manera empírico-realista (abstracción hipostática) para entenderlo como reglas gramaticales, consensuadas socialmente, sobre el uso de los lenguajes mediante los cuales describimos nuestros mundos (material o inmaterial).

> "He enfatizado que el razonamiento diagramático recapitula hábitos del razonamiento matemático aplicado. Bajo esta visión, los diagramas no son representaciones de objetos abstractos, sino simplemente objetos físicos que a veces se usan para representar otros objetos físicos" (Sherry, 2009, p. 67).

## 3. CONFIGURACIONES ONTOSEMIÓTICAS

En el marco del EOS se postula que en las prácticas matemáticas intervienen seis tipos de objetos los cuales pueden ser contemplados desde cinco pares de puntos de vista duales (figura 1) (Font et al., 2013). Se propone la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios:

— *Lenguajes* (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.).
— *Situaciones-problemas* (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios).
— *Conceptos- definición* (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función).
— *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos).
— *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo).
— *Argumentos* (enunciados usados para justificar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo).

Tanto las dualidades como los objetos se pueden analizar desde la perspectiva proceso-producto. La emergencia de los objetos primarios (problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos) tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización, ...) y argumentación. Por otra parte, las dualidades dan lugar a los siguientes procesos cognitivos/ epistémicos: institucionalización – personalización; generalización – particularización; análisis/descomposición – síntesis/reificación; materialización /concreción – idealización/ abstracción; expresión/representación – significación.

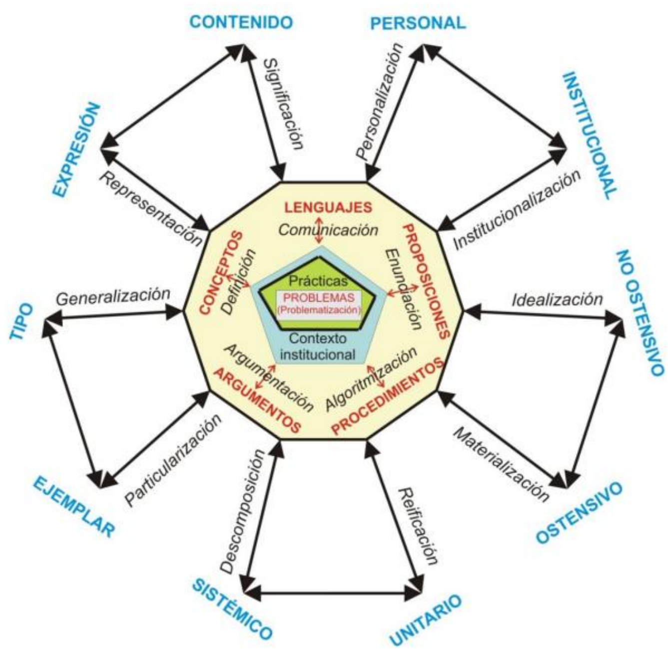



Figura 1. Objetos que intervienen en las prácticas matemáticas

Un objeto abstracto (ideal o hipostático) es entendido en el EOS como una entidad:
— Inmaterial (no ostensiva).
— General (intensiva).
— Que se puede considerar de manera:

- Unitaria (como regla) o sistémica (configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos).
- Personal (mental) o institucional (sociocultural).
- Antecedente (significante) o consecuente (significado) en una relación semiótica.

El proceso de abstracción mediante el cual emergen o se construyen los objetos abstractos conlleva el concurso de otros procesos cognitivos - epistémicos más básicos: generalización, idealización (entendida como desmaterialización), unitarización (reificación, cosificación), significación, representación.

Esta manera antropológica de entender la abstracción, esto es, la emergencia de objetos generales e inmateriales que constituyen las estructuras matemáticas, tiene importantes consecuencias para la educación matemática ya que el aprendizaje matemático debe tener lugar mediante la progresiva participación de los estudiantes en los juegos de lenguaje matemáticos realizados en el seno de comunidades de prácticas matemáticas (instituciones o grupos socioculturales). De esta manera, el diálogo y la interacción social cobran un papel clave, en contraposición a la mera manipulación y visualización de objetos ostensivos.

Se asume la visión antropológica de Wittgenstein, según la cual los conceptos, proposiciones y procedimientos matemáticos no son otra cosa que proposiciones empíricas que han sido "cosificadas" socialmente como reglas. Sherry describe de manera clara y sintética esta concepción wittgeinsteiniana de los objetos matemáticos:

> "Para que una proposición empírica se cosifique (harden) como una regla, debe haber un acuerdo abrumador entre las personas, no solo en sus observaciones, sino también en sus reacciones ante ellas. Este acuerdo refleja, presumiblemente, hechos biológicos y antropológicos sobre los seres humanos. Una proposición empírica que ha sido cosificada en una regla probablemente tiene valor práctico, implicando inferencias en el comercio, la arquitectura, etc." (Sherry, 2009, p 66).

Detrás del razonamiento diagramático, del uso de visualizaciones y manipulativos para facilitar el aprendizaje matemático, hay la adopción implícita de una posición empírico - realista sobre la naturaleza de las matemáticas, que no concede el papel esencial al lenguaje y la interacción social en la emergencia de los objetos matemáticos. En cierta manera, se supone que el objeto matemático "se ve", se abstrae de manera hipostática de cualidades empíricas de las colecciones de cosas. Frente a esta posición proveniente de la epistemología y semiótica peirceana se encuentra la concepción antropológica de las matemáticas, según la cual los conceptos y proposiciones matemáticas se deben entender, no como abstracciones hipostáticas de cualidades perceptibles, sino como *regulaciones* de las prácticas operativas y discursivas realizadas por las personas para describir y actuar en el mundo social y empírico en el que vivimos.

En trabajos previos Godino y cols. vienen desarrollando una técnica de análisis semiótico de las prácticas matemáticas mediante la cual se trata de desvelar la trama de objetos matemáticos que se ponen en juego en dichas prácticas. Así, en Godino (2002) se realiza una primera aproximación a dicha técnica analizando una lección de un libro de texto sobre la mediana; en Godino, Font y Wilhelmi (2006) se realiza el análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta; y en Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy (2011) se analizan las respuestas de un niño a una tarea relacionada con el aprendizaje de la decena. En la sección 4 mostramos, con el lenguaje diagramático de las tablas 1 a 3, una versión del análisis semiótico que consideramos más operativa y eficaz para mostrar la configuración de prácticas, objetos y procesos matemáticos puestos en juego en la resolución de un problema.

## 4. CONFIGURACIONES ONTOSEMIÓTICAS IMPLICADAS EN EL RAZONAMIENTO DIAGRAMÁTICO

En esta sección analizamos los tipos de prácticas, objetos y procesos[2] que se ponen en juego en la resolución de un problema sobre fracciones aplicando tres procedimientos que involucran el uso de razonamiento diagramático. Se tratará de mostrar que acompañando al lenguaje visual – diagramático es necesario el concurso del lenguaje secuencial – analítico, y que junto a los objetos ostensivos, consustanciales con ambos tipos de lenguajes, está siempre presente una configuración de objetos abstractos que participan de la práctica matemática. Así mismo, mostraremos que la resolución del problema implica la realización de procesos de particularización de objetos abstractos previamente compartidos y procesos de materialización (construcción y manipulación de diagramas).

**Problema del cóctel de Martini** (fracción de alcohol)

> *Un Martini es un cóctel que se hace con 5 partes de ginebra y 1 parte de vermut. Supongamos que 2/5 de la ginebra es alcohol y que 1/6 del vermut es alcohol. ¿Qué porcentaje de alcohol lleva un Martini?*

### 4.1. Resolución 1: Uso de diagramas de áreas para representar las fracciones

La secuencia de diagramas de áreas de la figura 2 es explicativa del proceso de resolución para alguien que conozca las convenciones asumidas, así como los conceptos y procedimientos implicados. Sin embargo, la justificación y explicación de la solución requiere realizar la siguiente secuencia de prácticas discursivas y operativas:

1) La cantidad unitaria de Martini se representa mediante un cuadrado (figura 2A)

2) El cuadrado se divide en 6 partes iguales verticalmente (figura 2B).

3) La fracción de ginebra son los 5/6 del cuadrado unidad (color rojo, figura 2B).

4) La fracción de vermut son 1/6 de dicho cuadrado (color blanco, figura 2B).

5) El rectángulo blanco que representa la cantidad de vermut se divide en 6 partes iguales de las cuales 1 parte corresponde a la cantidad de alcohol (1/6 de 6) (figura 2C).

6) La cantidad de alcohol de la ginebra se representa por las dos barras azules de la figura 2D (2/5 de 5).

[2] Solo mencionamos los procesos de significación y de particularización.

7) Las cantidades de alcohol en la ginebra y el vermut se deben expresar en la misma unidad de medida, para lo cual los dos rectángulos azules que representan la cantidad de alcohol en la ginebra se debe dividir horizontalmente en 6 partes iguales (figura 2E).

8) La cantidad total de alcohol en el Martini serán 12 + 1 = 13 cuadraditos (figura 2E).

9) La cantidad total de Martini representada por el cuadrado inicial se debe medir también con la misma unidad que se mide las cantidades de alcohol, para lo cual se prolongan las seis líneas horizontales (figura 2F).

10) La fracción de alcohol del Martini será 13/36 (figura 2F).

11) Puesto que la proporción (tanto por uno) de alcohol del Martini es 13/36 $\approx$ 0,3611, el porcentaje (aproximado) será del 36,11%.

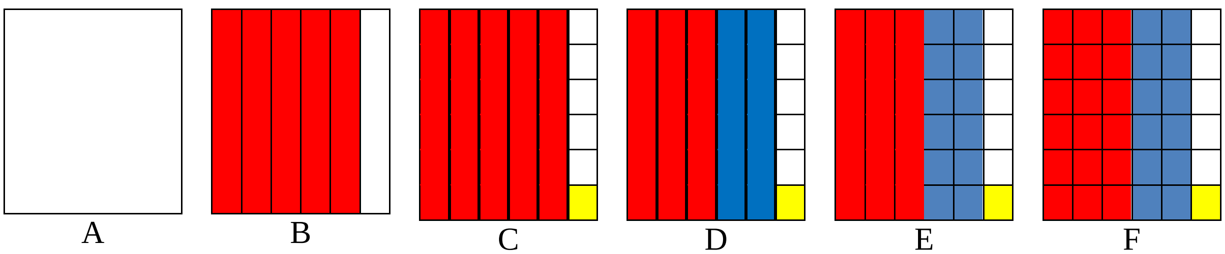



*Figura 2*. Diagramas de áreas para resolver el problema del Martini

En términos de la teoría de los registros de representación semiótica de Duval se comienza con una conversión, pasando del registro secuencial de la lengua natural (enunciado de la tarea) al registro gráfico (diagramas de áreas); dentro de este registro se realizan determinados tratamientos para finalmente pasar de nuevo al registro secuencial: *La fracción de alcohol del Martini es 13/36*. Pero como se muestra en la secuencia de prácticas 1) a 9) el registro secuencial acompaña necesariamente al registro gráfico. Así mismo, las prácticas operativas y discursivas puestas en acción están guiadas por la trama de objetos y procesos *no ostensivos* que desvelamos en la segunda columna de la tabla 1. En la tercera columna de dicha tabla indicamos el papel (rol o función) que desempeña cada práctica en el proceso resolutivo, así como su intencionalidad.

Tabla 1.

*Configuración de objetos y significados*

| **Prácticas operativas y discursivas textualizadas** | **Objetos no ostensivos (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)** | **Uso e intencionalidad de las prácticas** |
|---|---|---|
| | ***Enunciado*** | |
| *Un Martini es un cóctel que se hace con 5 partes de ginebra y 1* | *Concepto:* Un todo unitario de | Describe la composición del |

| | | |
|---|---|---|
| *parte de vermut.* | volumen.<br>*Procedimiento*: Composición de un todo unitario a partir de partes iguales. | Martini. |
| *Supongamos que 2/5 de la ginebra es alcohol y que 1/6 del vermut es alcohol.* | *Concepto:* fracción como parte de un todo unitario que se divide en partes iguales de las cuales se individualiza una parte. Se particulariza para el caso de la composición fraccionaria de la ginebra (2/5) y el vermut (1/6). | Fija la fracción de alcohol en la ginebra y el vermut como dato. |
| *¿Qué porcentaje de alcohol lleva un Martini?* | *Conceptos*: Todo unitario; fracción, parte de un todo dividido en partes iguales; porcentaje. | Enuncia la cuestión problemática de la tarea. |
| | **Resolución** | |
| 1) La cantidad unitaria de Martini se representa mediante un cuadrado, (figura 3A). | Concepto: cantidad unitaria. | Particularizar y materializar el concepto de cantidad unitaria. |
| 2) El cuadrado se divide en 6 partes iguales verticalmente, (figura 3B). | Procedimiento: división de la unidad en partes iguales. | Acción requerida para representar de manera ostensiva (diagramática) la composición del Martini en la siguiente práctica, teniendo en cuenta el enunciado. |
| 3) La fracción de ginebra son los 5/6 del cuadrado unidad. (figura 3B, color rojo). | Concepto: fracción como parte de un todo dividido en partes iguales.<br>Convención: la fracción se expresa de dos maneras equivalentes, con un diagrama aritmético (5/6) y un diagrama gráfico. | Expresar fraccionariamente la cantidad de ginebra en el Martini. |
| 4) La fracción de vermut son 1/6 de dicho cuadrado (figura 3B, color blanco). | Concepto: fracción como parte de un todo dividido en partes iguales.<br>Convención: la fracción se expresa de dos maneras equivalentes, con un diagrama aritmético (1/6) y un diagrama gráfico. | Expresar fraccionariamente la cantidad de vermut en el Martini. |
| 5) El rectángulo blanco que representa la cantidad de vermut (...) | Procedimiento: división de una unidad en partes iguales.<br>Concepto: fracción como operador. | Expresar fraccionariamente la cantidad de alcohol en el vermut. |
| 6) La cantidad de alcohol de la ginebra (...) | Concepto: fracción como operador. | Expresar fraccionariamente la cantidad de alcohol en la ginebra. |
| 7) Las cantidades de alcohol en la ginebra y el vermut se deben | Concepto: unidad de medida; medida. | Hacer posible la medida de todas las cantidades con una misma unidad. Se trata de |

| | | |
|---|---|---|
| expresar (...) | Procedimiento: medir un área con una unidad dada. | usar la aritmética natural. |
| 8) La cantidad total de alcohol en el Martini serán 12 + 1 = 13 cuadraditos (figura 3E). | Concepto: magnitud volumen (sumable).<br><br>Procedimientos: conteo y adición. | Medir la cantidad de alcohol del Martini con números naturales (13 unidades). |
| 9) La cantidad total de Martini representada por el cuadrado inicial (...) | Procedimiento: medir un área con una unidad dada.<br><br>Concepto: producto cartesiano de números naturales. | Hacer posible la medida de todas las cantidades con una misma unidad. Se trata de usar la aritmética natural. |
| 10) La fracción de alcohol del Martini será 13/36 (figura 3F). | Concepto: fracción como parte de un todo.<br><br>Proposición: La fracción del alcohol en el Martini es 13/36.<br><br>Argumentación: está formada por la secuencia de pasos 1) a 10), apoyada en el uso de los diagramas aritméticos y de áreas y del lenguaje secuencial natural. | Respuesta fraccionaria a la cuestión planteada. |
| 11) Puesto que la proporción (tanto por uno) de alcohol del Martini es 13/36 ≈ 0,3611, el porcentaje (aproximado) será del 36,11%. | Conceptos: número racional; proporcionalidad; fracción; aproximación decimal y porcentual.<br><br>Procedimientos: obtención de la expresión decimal mediante el cociente del numerador y denominar; paso a la expresión porcentual. | Respuesta al problema y su justificación en términos de expresión porcentual. |

Además de los procesos indicados en la tabla 1 el sujeto que resuelve el problema basando su razonamiento en el uso de diagramas de áreas realiza procesos de *materialización* de los conceptos y operaciones con fracciones implicadas en el enunciado y de *composición* de los resultados parciales que va obteniendo. La solución la encuentra finalmente mediante un procedimiento aritmético de conteo de las fracciones unitarias que ha representado en el último diagrama mediante un proceso de *idealización* (la razón del número de cuadraditos azules al número total de cuadraditos es la fracción de alcohol del Martini).

### 4.2. Resolución 2: Uso de un diagrama jerárquico

El diagrama en árbol de la figura 3 es explicativo del proceso de resolución para alguien que conozca las convenciones asumidas, así como los conceptos y procedimientos implicados. Sin embargo, la justificación y explicación de la solución requiere realizar la siguiente secuencia de prácticas discursivas y operativas:

1) El diagrama construido en la figura 3 expresa en el primer nivel la descomposición de una cantidad unitaria de volumen de Martini en dos partes, ginebra y vermut, indicando en cada conector la fracción correspondiente.

2) En el segundo nivel se expresa la descomposición de las partes de ginebra y vermut, que ahora son consideradas como cantidades unitarias, en dos partes, alcohol y no alcohol, indicando en cada conector la fracción correspondiente.

3) La fracción de alcohol de la ginebra son los 2/5 de la cantidad de ginebra; como esa cantidad es los 5/6 de la cantidad de Martini, la fracción de alcohol en el Martini procedente de la ginebra será la "fracción de la fracción", esto es,

$$\frac{2}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

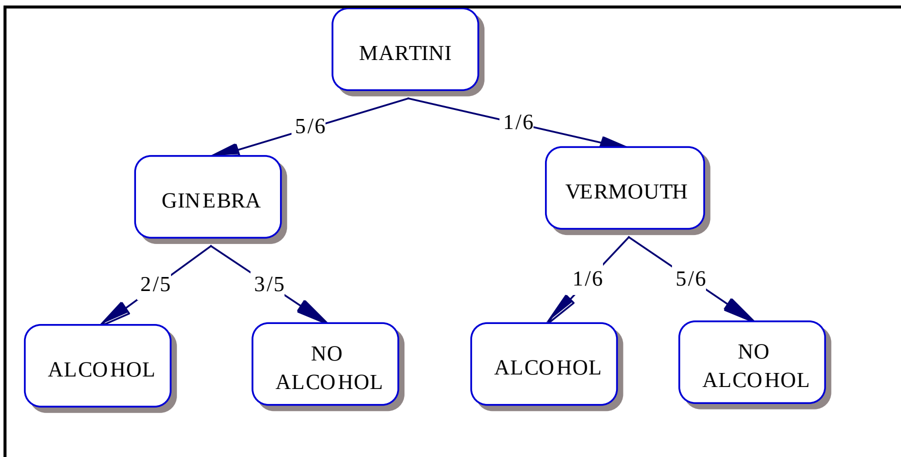
4) La fracción de alcohol del vermut son los 1/6 de la cantidad de vermut; como esa cantidad es 1/6 de la cantidad de Martini, la fracción de alcohol en el Martini procedente del vermut será la "fracción de la fracción", esto es,

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

5) La fracción total de alcohol en el Martini serán la suma de las fracciones de alcohol procedentes de la ginebra y del vermut, esto es,

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{36} = \frac{13}{36}$$

6) Dado que la fracción de alcohol del Martini es 13/36 ≈ 0,3611, el porcentaje (aproximado) será del 36,11%.




Fracción de alcohol:

$$\frac{2}{5} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{13}{36}$$

13/36 ≈ 0,3611

*Figura 3*. Solución de la tarea usando un diagrama en árbol

La tabla 2 incluye la configuración de objetos y procesos puestos en juego en la solución del problema mediante el uso del diagrama en árbol de la figura 3.

Tabla 2.

*Configuración de objetos y significados*

| **Prácticas operativas y discursivas textualizadas** | **Objetos no ostensivos: conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos** | **Uso e intencionalidad de las prácticas** |
|---|---|---|
| | **Enunciado**<br>*(igual que en el caso anterior)* | |
| | **Resolución** | |
| 1) El diagrama construido en la figura 4 expresa en el primer nivel (...) | Conceptos: primer nivel de un diagrama, conector, cantidad unitaria y fracción.<br>Procedimiento: descomposición de un todo en partes iguales.<br>Convenio de representación: las fracciones sobre los conectores refieren a la relación fraccionaria entre las cantidades conectadas. | Expresar en forma diagramática y fraccionaria la cantidad de ginebra y vermut en el Martini. |
| 2) En el segundo nivel se expresa la descomposición (...) | Ídem práctica 1) | Expresar fraccionariamente la cantidad de alcohol presente en la ginebra y en el vermut. |
| 3) La fracción de alcohol de la ginebra son los 2/5 de la cantidad de ginebra (...) | Conceptos: multiplicación de fracciones (fracción de una fracción); cantidad unitaria.<br>Procedimientos: multiplicación de fracciones; cambio de unidad al pasar del primer al segundo nivel del diagrama (el volumen de ginebra y vermut son ahora consideradas como nuevas unidades que se fraccionan). | Expresar fraccionariamente la cantidad de alcohol en el Martini que proviene de la ginebra. |
| 4) La fracción de alcohol del vermut son los 1/6 (...) | Ídem práctica 3) | Expresar fraccionariamente la cantidad de alcohol en el Martini que proviene del vermut. |
| 5) La fracción total de alcohol en el Martini serán (...) | Conceptos: suma de fracciones.<br>Procedimientos: suma de fracciones con diferente denominador.<br>Proposición: la fracción de alcohol en el Martini es 13/36.<br>Argumentación: está formada por la secuencia de pasos 1) a 5), apoyada en el uso de los diagramas aritmético y jerárquico y del lenguaje secuencial natural. | Respuesta fraccionaria al problema. |

| | | |
|---|---|---|
| 6) Dado que la fracción de alcohol del Martini es 13/36 ≈ 0,3611, el porcentaje (aproximado) será del 36,11%. | Conceptos: número racional; fracción; aproximación decimal y porcentual.<br><br>Procedimientos: obtención de la expresión decimal mediante el cociente del numerador y denominar; paso a la expresión porcentual. | Respuesta al problema y su justificación en términos de expresión porcentual. |

El análisis de cada una de las prácticas individualizadas en la tabla 1 se puede hacer más detallado. Así en la primera unidad del enunciado, la aplicación sistemática de la noción de configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos nos lleva a reconocer que el sujeto que lee el enunciado debe hacer un proceso de interpretación (semiosis o atribución de significado) del diagrama ⅖, identificando el "concepto de fracción" entendido aquí desde un punto de vista institucional como una regla socialmente convenida: una totalidad unitaria se descompone en partes iguales y se individualiza una o varias de dichas partes. A continuación debe realizar un proceso de particularización al caso: el todo unitario se divide en 5 partes iguales y se consideran aparte 2.

En las dos primeras unidades de la resolución (diagrama de la figura 2) el sujeto debe realizar un proceso de descomposición del sistema de elementos que componen el diagrama, distinguiendo tres niveles jerárquicos, las unidades que constituyen el todo unitario en cada nivel, los conectores, las fracciones y operaciones con fracciones que deben realizarse. También debe realizar un proceso de composición de los cálculos parciales realizados en cada rama del árbol para obtener la fracción del alcohol del Martini y de materialización de los cálculos en la expresión diagramática - aritmética,

$$\frac{2}{5}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{13}{36}$$

El resto de las prácticas discursivas y operativas realizadas, necesariamente apoyadas en el uso del lenguaje secuencial – natural, son imprescindibles para establecer la conexión entre ambos tipos de diagramas y explicar que en las condiciones del problema la fracción de alcohol del Martini es 13/36.

En el diagrama jerárquico se muestra de manera icónica la estructura del sistema de prácticas que hay que realizar para resolver el problema. La fracción de fracción (multiplicación de fracciones) se refleja en la composición de los dos niveles inferiores del diagrama (arriba, abajo) mientras que la suma de fracciones resultantes queda reflejada en la disposición lateral de las dos ramas (izquierda, derecha).

Un rasgo que distingue el uso de diagramas de áreas respecto del diagrama jerárquico es que el significado del concepto de fracción que se moviliza en cada caso es diferente: en las áreas la fracción interviene como operador de una cantidad de área mientras que en el diagrama en árbol la fracción es la razón entre las partes de un todo genérico que se divide en partes iguales y las partes que se individualizan. El procedimiento basado en diagramas en áreas tienes rasgos de menor generalidad que el jerárquico.

### 4.3. Resolución 3: Aritmética fraccionaria

El problema se puede resolver también sin usar diagramas de tipo gráfico, aunque el uso de la expresión fraccionaria (que en la semiótica de Peirce es también un diagrama) es inevitable. La siguiente secuencia de prácticas operativas y discursivas establece la justificación y explicación de que la fracción de alcohol en el Martini es 13/36.

1) La fracción de ginebra que contiene el coctel es 5/6, porque la unidad de volumen de Martini se ha dividido en 6 partes iguales y 5 corresponden a la ginebra.
2) Por igual razón la de vermut será 1/6.
3) El alcohol contenido en la ginebra es una fracción de la fracción de ginebra, en este caso, 2/5 de 5/6.
4) o sea,

$$\frac{2}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

5) El alcohol contenido en el vermut es una fracción de la fracción de vermut, en este caso, 1/6 de 1/6.
6) o sea,

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

7) La fracción de alcohol en el Martini será la suma de las fracciones de alcohol aportado por la ginebra y por el vermut.
8) Esto es,

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{36} = \frac{13}{36}$$

9) Dado que la fracción de alcohol del Martini es 13/36 ≈ 0,3611, el porcentaje (aproximado) será del 36,11%.

En la tabla 3 incluimos la configuración de objetos y procesos que se ponen en juego en la solución del problema mediante aritmética fraccionaria.

Tabla 3.

*Configuración de objetos y significados*

| **Prácticas operativas y discursivas textualizadas** | **Objetos no ostensivos: conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos** | **Uso e intencionalidad de las prácticas** |
|---|---|---|
| | **Enunciado** *(igual que en el caso anterior)* | |
| 1) La fracción de ginebra que contiene el coctel es 5/6, porque la unidad de volumen de Martini se ha dividido en 6 partes iguales y 5 corresponden a la ginebra. | Concepto: fracción, como parte de un todo.<br>Proposición: la fracción de ginebra en el coctel es 5/6.<br>Argumento: porque el Martini se ha dividido en 6 partes iguales y 5 corresponden a la ginebra. | Expresar en forma fraccionaria la cantidad de ginebra presente en el Martini a partir de los datos del problema. |

| | | |
|---|---|---|
| 2) Por igual razón la fracción de vermut será 1/6. | Ídem práctica 1) | Expresar en forma fraccionaria la cantidad de vermut presente en el Martini a partir de los datos del problema. |
| 3) El alcohol contenido en la ginebra es una fracción de la fracción de ginebra, en este caso, 2/5 de 5/6. | Concepto: fracción de una fracción (multiplicación de fracciones). | Establecer la relación de alcohol presente en la ginebra para justificar la práctica 4. |
| 4) O sea, $\frac{2}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ | Proposición: La fracción de alcohol en la ginebra es 1/3.<br><br>Argumento: porque el nuevo todo unitario (5/6) se divide en 5 partes iguales y se toman 2.<br><br>Procedimiento: multiplicación de fracciones; simplificación de fracciones.<br><br>Conceptos: número racional, fracción irreducible. | Expresar en forma fraccionaria la cantidad de alcohol presente en la ginebra. |
| 5) El alcohol contenido en el vermut es una fracción de la fracción de vermut, en este caso, 1/6 de 1/6. | Ídem práctica 3) | Establecer la relación de alcohol presente en el vermut para justificar la práctica 6). |
| 6) O sea, $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ | Ídem práctica 4) | Expresar en forma fraccionaria la cantidad de alcohol presente en el vermut. |
| 7) La fracción de alcohol en el Martini será la suma de las fracciones de alcohol aportado por la ginebra y por el vermut. | Concepto: suma de fracciones. | Interpretar los datos obtenidos en las prácticas anteriores, en términos de la respuesta fraccionaria a tarea, para justificar la práctica 8). |
| 8) Esto es, $\frac{1}{3} + \frac{1}{36} = \frac{13}{36}$ | Proposición: la fracción de alcohol del Martini es 13/36.<br><br>Argumento: Ese es el resultado de la suma de las fracciones obtenido aplicando el procedimiento correspondiente (suma de fracciones de diferente denominador). | Respuesta fraccionaria al problema. |
| 9) Dado que la fracción de alcohol del Martini es 13/36 ≈ 0,3611, el porcentaje (aproximado) será del 36,11%. | Conceptos: número racional; fracción; aproximación decimal y porcentual.<br><br>Procedimientos: obtención de la expresión decimal mediante el cociente del numerador y denominar; paso a la expresión porcentual. | Respuesta al problema y su justificación en términos de expresión porcentual. |

La solución aritmética fraccionaria es más dependiente del lenguaje secuencial, como se pone de manifiesto en las prácticas 1), 2), 3), 5) y 7). Atribuyendo características espaciales a las representaciones fraccionarias y a las transformaciones que se realizan con ellas (el número que está abajo divide, el que está arriba multiplica; se multiplican los denominadores que están abajo y los numeradores que están arriba), la solución aritmética fraccionaria también pone en juego razonamiento diagramático (prácticas 4), 6) y 8).

### 4.5. Poder heurístico de las resoluciones: particularización *versus* generalización

Además de las soluciones estudiadas en los apartados anteriores se pueden elaborar otras que implican el uso de distintos grados y modalidades de visualización, o soluciones mixtas que combinan las resoluciones diagramáticas con la aritmética fraccionaria. Por ejemplo, una variante de la solución aritmética fraccionaria puede ser la siguiente:

> 1) Supongamos que preparamos 36 litros de Martini. 2) La cantidad de ginebra será $(\frac{5}{6})(36) = 30$. 3) La cantidad de vermut, $36 - 30 = 6$. 4) La cantidad de alcohol en la ginebra será, $(\frac{2}{5})(30) = 12$. 5) La cantidad de alcohol del vermut, $(\frac{1}{6})(6) = 1$. 7) La cantidad total de alcohol del Martini será, $12 + 1 = 13$. 8) Luego la fracción de alcohol en el Martini será de 13/36.

Con excepción de la expresión de las fracciones, que incorpora como elemento visual la disposición del numerador y del denominador indicando el diferente papel que desempeña cada uno en la práctica matemática, el resto de las prácticas matemáticas se apoya en el lenguaje secuencial natural. El razonamiento está basado, no obstante, en la participación esencial del concepto de fracción como operador y como relación parte - todo.

Una variante del enunciado de la tarea que requiere un cambio sustancial en la modalidad de diagramas utilizables es el siguiente:

> *Supongamos que el cóctel de Martini se puede preparar con distintas proporciones de ginebra y vermut. Deseamos elaborar una regla (fórmula) que permita determinar la fracción de alcohol del Martini para cada posible composición. Se supone que las fracciones de alcohol de la ginebra y del vermut no cambian (2/5 y 1/6, respectivamente).*

En este caso se espera realizar la siguiente secuencia de prácticas operativas y discursivas apoyadas en el uso de diagramas algebraicos:

1) Supongamos que *g/m* indica la fracción de la ginebra en el Martini.
2) La fracción de vermut será *(m-g)/m.*
3) La fracción de alcohol del Martini será,

$$A = \frac{2}{5} \times \frac{g}{m} + \frac{1}{6} \times \frac{(m-g)}{m} = \frac{7g + 5m}{30m} = \frac{7}{30}\left(\frac{g}{m}\right) + \frac{1}{6}$$

La generalidad que se logra con los diagramas algebraicos no se puede conseguir con otro tipo de diagramas, lo que explica el uso tan extendido del razonamiento algebraico en la práctica matemática. Pero la explicación y consiguiente comprensión de los conceptos y procedimientos generales requiere el concurso de otros diagramas (con mayor grado de visualización y particulares), en las etapas previas del aprendizaje matemático.

## 5. SINERGIA ENTRE LOS LENGUAJES DIAGRAMÁTICOS Y SECUENCIALES

En la sección 4 hemos mostrado que existe una estrecha imbricación entre los objetos que intervienen en la actividad matemática, específicamente entre,

- los lenguajes diagramáticos - visuales y los lenguajes secuenciales
- los objetos ostensivos (materiales) y los no ostensivos (inmateriales)
- los objetos extensivos (particulares) y los intensivos (generales)

El uso de diagramas en la práctica matemática debe ir acompañado de otros medios de expresión no visuales para lograr la justificación y explicación de las tareas matemáticas y las prácticas operativas y discursivas implicadas en su realización. La génesis del conocimiento matemático se sitúa en un punto medio entre ambos lenguajes, donde es necesaria su interrelación e reinterpretación mutua. Pero además hemos mostrado que los medios de expresión son "artefactos" empíricos que conllevan el uso implícito de un sistema de objetos no ostensivos de naturaleza conceptual, proposicional, procedimental y argumentativa, que constituyen la esencia de la actividad matemática realizada con el apoyo de los objetos ostensivos. También hemos desvelado algunos procesos de particularización, generalización; descomposición, composición; materialización, idealización que se ponen en juego en el proceso demostrativo – explicativo realizado.

Nuestro análisis concuerda y apoya la posición de Sherry sobre el uso de diagramas en el trabajo matemático: lo que importa, más que construir un diagrama preciso, es el conocimiento matemático implicado, el cual no está visible por ningún sitio, ni se identifica con los diagramas que se utilizan para su representación y manipulación.

> "Cuando los estudiantes son incapaces de reconocer el conocimiento no es por deficiencias en los diagramas construidos sino en su incapacidad para comprender el sistema de relaciones conceptuales relevantes" (Sherry, 2009, p. 68).

Así, Sherry resume en dos aspectos el papel de los diagramas en el razonamiento matemático.

> "En primer lugar, un diagrama sirve de fundamento para sintetizar una regla matemática a partir de conceptos y reglas de inferencia existentes. El segundo papel de un diagrama geométrico es garantizar posteriores inferencias en virtud de sus características empíricas simples" (p. 69).

El diagrama apoya o hace posible el necesario proceso de particularización de la regla general; hace intervenir al objeto conceptual para participar en una práctica de la que emergerá otro objeto conceptual nuevo (en nuestro ejemplo, la fracción que constituye la respuesta al problema planteado).

## 6. REFLEXIONES FINALES

Este trabajo complementa a otros realizados previamente en el marco del EOS donde se analiza el papel de las representaciones en educación matemáticas y la potencial utilidad de tener en cuenta la trama de objetos no ostensivos implicados en el uso de tales representaciones (Font, Godino, y Contreras, 2008). En este caso usamos también la noción de configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos para dialogar con las investigaciones realizadas sobre el razonamiento diagramático y el uso de visualizaciones.

La manera de entender los diagramas tiene importantes consecuencias para la educación matemáticas toda vez que el uso de estos recursos penetra en toda la actividad matemática escolar. Consideramos que es necesario superar posiciones empiristas ingenuas sobre el uso de manipulativos y visualizaciones en los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático: acompañando a las necesarias materializaciones que intervienen en las situaciones - problemas y las prácticas matemáticas correspondientes hay siempre una cohorte de objetos no materiales intervinientes que son imprescindible para la solución de tales situaciones. Esta visión ontosemiótica de las prácticas matemáticas (antropológica y pragmatista) ayuda a tomar conciencia que tales objetos inmateriales no proceden de un mundo inaccesible sino que son de este mundo social en que vivimos y están implicados en nuestra práctica cotidiana.

> "El signo es una creación entre los individuos, una creación dentro de un medio social. Por lo tanto el elemento en cuestión [el elemento al que un signo se referirá] primero debe adquirir importancia interindividual, y sólo entonces puede convertirse en un objeto para la formación de signos" Voloshinov. (1973, p. 22).

La visualización (en general la materialización) es útil y necesaria en la práctica matemática, sobre todo si tiene un carácter diagramático y refleja, por tanto, metafóricamente, las estructuras conceptuales matemáticas. Pero esta capa de objetos materiales no debe impedir ver la capa de objetos inmateriales que propiamente constituyen el sistema conceptual de las matemáticas institucionales. Ambas capas están entrelazadas y en cierto modo son inseparables. Entre los objetos ostensivos y no ostensivos existen relaciones dialécticas complejas ya que la actividad de producción y comunicación matemática no se puede realizar sin el concurso sinérgico entre ambos tipos de objetos.

El profesor de matemáticas debe tener conocimiento, comprensión y competencia para discriminar los distintos tipos de objetos que intervienen en la práctica matemática escolar, apoyada en el uso de diversos sistemas de representación y siendo consciente de las relaciones sinérgicas entre los mismos. Debe ser competente para diseñar y gestionar procesos de materialización e idealización de los objetos matemáticos, junto con los correspondientes procesos de particularización y generalización.

**Reconocimiento:**

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación EDU2012-31869 y EDU2013-41141-P, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO).

REFERENCIAS

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 215-241.

Bakker, A. y Hoffmann, M. H. G. (2005). Diagrammatic reasoning as the basis for developing concepts: a semiotic analysis of students' learning about statistical distribution. *Educational Studies in Mathematics, 60,* 333–358.

Dörfler, W. (2003). Diagrams as means and objects of mathematical reasoning. Developments in mathematics education in German-speaking countries. *Selected papers from the Annual Conference on Didactics of Mathematics*.
Dörfler, W. (2005). Diagrammatic thinking. Affordances and constraints. En M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard y F. Seeger (Eds.), *Activity and sign- Grounding Mathematics Education* (pp. 57-66). Springer.
Duval, R. (2002). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt, (Ed.), *Representations and Mathematics Visualization*, (pp. 311-335). North American Chapter of PME: Cinvestav-IPN.
Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1–2), 103–131.
Font, V., Godino, J. D. y Contreras, A. (2008). From representation to onto-semiotic configurations in analysing mathematics teaching and learning processes. En, L. Radford, G. Schubring, y F. Seeger (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture* (pp. 157–173). Rotterdam: Sense Publishers.
Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*, 97–124.
Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, *22*(2/3), 237-284.
Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (Especial): 133-156.
Godino, J. D., Cajaraville, J. A., Fernández, T. y Gonzato, M. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, *30*(2),163-184.
Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(2), 247-265.
Peirce, Ch. S. (1958). *Collected papers of Charles Sanders Peirce.* 1931-1935. Cambridge, MA: Harvard UP.
Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. En L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: Epistemology, history, classroom, and culture* (pp. 215–234). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
Rivera, F. D. (2011). *Toward a visually-oriented school mathematics curriculum. Research, theory, practice, and issues*. Dordrecht: Springer.
Sherry, D. (2009). The role of diagrams in mathematical arguments. *Foundation of Science*, *14*, 59–74.
Shin, S-J. y Lemon, O. (2008). Diagrams. *Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Recuperado de http://plato.stanford.edu/entries/diagrams/