Matemáticas y su Didáctica para Maestros

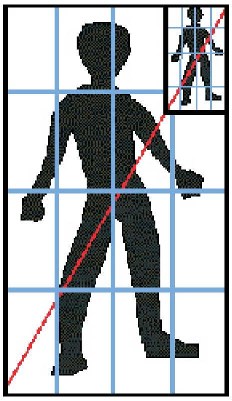
Manual para el Estudiante

Edición Febrero 2002

Proyecto *Edumat-Maestros*
Director: Juan D. Godino
http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

PROPORCIONALIDAD

Juan D. Godino
Carmen Batanero



Proyecto *Edumat-Maestros*
Director: Juan D. Godino
http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

PROPORCIONALIDAD Y SU DIDÁCTICA PARA MAESTROS

Juan D. Godino
Carmen Batanero

Publicación realizada en el marco del
Proyecto de Investigación y Desarrollo del
Ministerio de Ciencia y Tecnología,
BSO2002-02452.

Índice

A: Contextualización Profesional

ANÁLISIS DE PROBLEMAS SOBRE PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES EN PRIMARIA

Consigna:

A continuación incluimos algunos enunciados de problemas y ejercicios que han sido tomados de libros de texto de primaria. Para cada uno de ellos:

a) Resuelve los problemas propuestos.
b) Indica los conceptos y procedimientos matemáticos que se ponen en juego en la solución.
c) Clasifica los enunciados en tres grupos según el grado de dificultad que les atribuyes (fácil, intermedio, difícil).
d) Para cada problema enuncia otros dos del mismo tipo, cambiando las variables de la tarea, de manera que uno te parezca más fácil de resolver y otro más difícil.
e) ¿Piensas que los enunciados son suficientemente precisos y comprensibles para los alumnos de primaria? Propón un enunciado alternativo para aquellos ejercicios que no te parezcan suficientemente claros para los alumnos.
f) Consigue una colección de libros de texto de primaria. Busca en ellos tipos de problemas no incluidos en esta relación. Explica en qué se diferencian.

Enunciados de problemas incluidos en libros de primaria:

1. De los siguientes pares de magnitudes, ¿cuáles son directamente proporcionales?
a) Lado del cuadrado y su superficie.
b) Lado del cuadrado y su perímetro.
c) Edad y altura de las personas.
Justifica tu respuesta realizando una tabla para cada caso.

2. ¿Cuáles de las siguientes tablas expresan magnitudes proporcionales[1]?

A	1	2	3	4	5
B	7	14	21	21	35

L	4	8	12	16	20
S	36	72	108	144	180

T	1	2	3	4	5
E	100	200	300	400	500

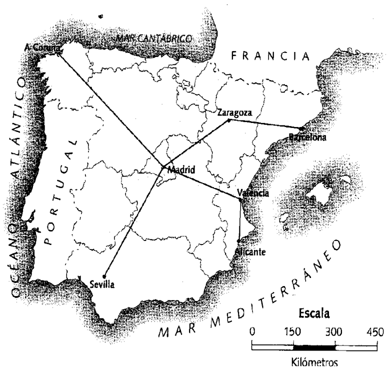
[1] Los números expresan las medidas de las cantidades correspondientes.

Comprueba tus respuestas, representando gráficamente cada tabla.

3. Explica con tus propias palabras cuándo dos magnitudes son proporcionales. Pon un ejemplo, construye su tabla y represéntala gráficamente.

4. Para hacer crema de chocolate para 6 personas se necesitan 8 onzas de chocolate, 6 cucharadas de azúcar, 4 yemas de huevo y 10 almendras, entre otros ingredientes. ¿Qué necesita Juan, de cada ingrediente, para preparar una crema para 9 personas?

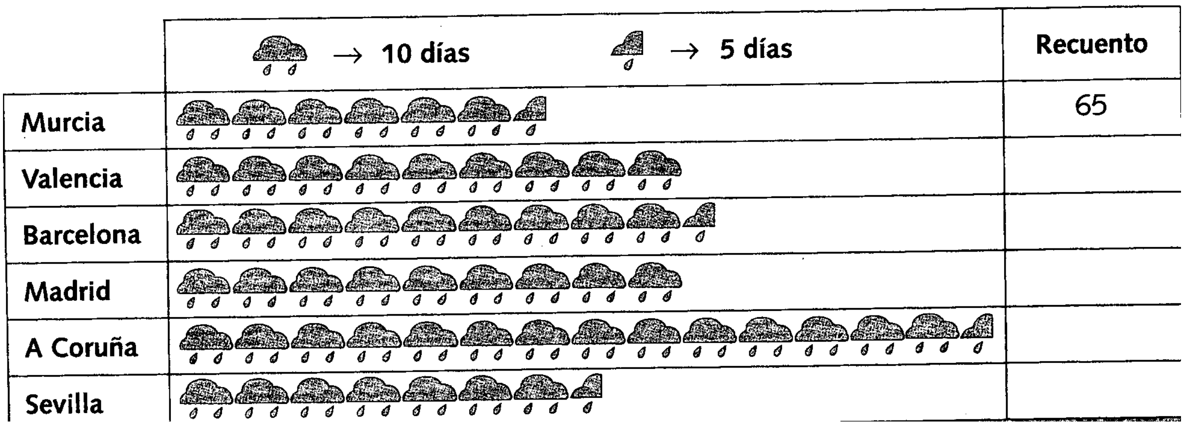
5. Observa en la escala que 1 cm representa 150 km. Esto significa que 1 cm sobre el mapa representa 150 km sobre el terreno real.

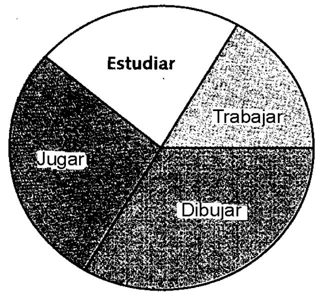


Mide en el mapa y calcula las siguientes distancias en línea recta:

- La distancia en kilómetros de Madrid a Zaragoza.
- La distancia en kilómetros de Madrid a A Coruña.
- La distancia en kilómetros de Madrid a Sevilla.
- La distancia de Madrid a Barcelona pasando por Zaragoza.
- La distancia de Madrid a Alicante pasando por Valencia.

6. El siguiente pictograma muestra el número de dias de lluvia que se registraron en un año en cada ciudad. Observa el pictograma y completa la tabla.





7. Se ha realizado una encuesta a 720 personas sobre el uso del ordenador en casa. Los resultados están representados en el siguiente gráfico de sectores. Observa el gráfico y calcula el número de personas que corresponde a cada grupo.
1º. Averigua cuántas personas representa cada grado del círculo.
2º. Mide, con un transportador, los grados de cada sector circular.
Trabajar = ; Jugar = ; Estudiar = ; Dibujar =
3º. Calcula el número de personas que corresponde a cada sector.
Trabajar 60º x 2= personas ; Jugar =--- x--- = personas
Estudiar... Dibujar...

Porcentajes:

1. En el colegio de Celia, la directora prevé que el curso próximo el número de estudiantes aumentará un 5%. Ahora son 400. ¿Cuántos serán el año que viene?

2. Los padres de Teresa van a comprar un coche que vale 1.7500.000 pts. Pagarán el 40% de su precio cuando se lo entreguen, y el resto en 12 mensualidades iguales. Calcula las cantidades que tendrán que pagar cada vez.

3. Al comprar una moto, cuyo precio es de 789.000 pts, hay que pagar el 13% más en concepto de impuestos. ¿Cuál es el precio final de la moto?

4. La comunidad autónoma donde vive Alfredo tiene una población de 653.800 habitantes, de los cuales el 51% son mujeres. a) ¿Qué porcentaje representan los hombres?; b) ¿Cuántas mujeres hay? c) ¿Cuántos hombres hay?.

5. Se ha investigado y se ha llegado a la conclusión de que, aproximadamente, el 1% de los nacimientos que se producen es de mellizos. En una gran ciudad, donde hay unos 27.000 nacimientos al año, ¿cuántos son de mellizos?

6. Alfredo va a comprar una mochila de 6.460 pts. En la tienda le rebajan un 15%. ¿Qué porcentaje paga por la mochila? ¿Cuánto paga por la mochila?. Resuelve este problema siguiendo los siguientes pasos:
   - ¿Cuánto dinero le descontaron a Alfredo?
   - ¿Cuánto dinero pagó por la mochila?

   Compara los dos procedimientos para ver cuál te resuelta más rápido.

B: Conocimientos Matemáticos

1. LA NOCIÓN DE RAZÓN

En el tema "*Fracciones y números racionales*" hemos visto que entre los usos de las fracciones figura el de razón, entendida, de manera genérica, como la comparación entre una parte y otra parte. Es importante, sin embargo, estudiar con más detalle el uso que se hace del término "razón", ya que no siempre es sinónimo de "fracción", lo cual puede acarrear dificultades de comprensión para los estudiantes. Hoffer[2] explica claramente estas distinciones. La idea clave es que las fracciones son "cualquier par ordenado de números enteros cuya segunda componente es distinta de cero"; mientras que una razón es "un par ordenado de cantidades de magnitudes". Cada una de esas cantidades vienen expresadas mediante un número real y una unidad de medida.

El hecho de que en las razones se refieran a cantidades de magnitudes, medibles cada una con sus respectivas unidades, implica las siguientes diferencias con las fracciones:

- Las razones comparan entre sí objetos heterogéneos, o sea, objetos que se miden con unidades diferentes. Por ejemplo, 3 jamones por 145 euros. Las fracciones, por el contrario, se usan para comparar el mismo tipo de objetos como "dos de tres partes", lo que se indica con 2/3. Según esto la razón 3 jamones/145 euros no es una fracción.

- Algunas razones no se representan con la notación fraccional. Por ejemplo, 10 litros por metro cuadrado. En este caso no se necesita, ni se usa, la notación de fracción para informar de la relación entre dichas cantidades.

- Las razones se pueden designar mediante símbolos distintos de las fracciones. La razón 4 a 7 se puede poner como 4:7, o $4 \rightarrow 7$.

- En las razones, el segundo componente puede ser cero. En una bolsa de caramelos la razón de caramelos verdes a rojos puede ser 10:5, pero también se puede decir que puede ser 10:0, si es que todos son verdes (no se trata de hacer ninguna división por 0).

- Las razones no son siempre números racionales. Por ejemplo, la razón de la longitud de una circunferencia a su diámetro C/D es el número π, que sabemos no es racional, o la razón de la longitud de la diagonal de un cuadrado a la longitud de su lado ($\sqrt{2}$). Esta es una diferencia esencial entre "razón" y "fracción", ya que como vimos las fracciones son siempre interpretables como cociente de enteros.

[2] Hoffer, A. R. (1988). Ratios and proportional thiking. En Th. R. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8*. Boston: Allyn and Bacon.

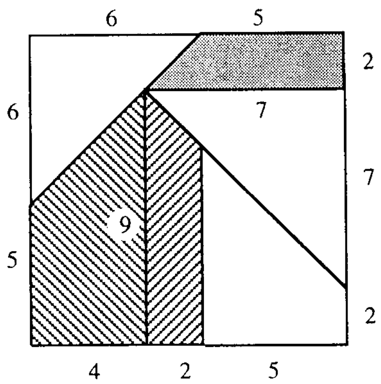
- Las operaciones con razones no se realizan, en general, de igual manera que las fracciones. Por ejemplo, 2 aciertos sobre 5 intentos (2:5), seguidos de 3 aciertos sobre 7 intentos (3:7) se combinan para producir 5 aciertos en un total de 12 intentos, o sea, con estas fracciones se puede definir una "suma" de razones del siguiente modo.

  2:5 + 3:7 = 5:12. Evidentemente esta suma no es la misma que la suma de fracciones.

2. PROPORCIONES. SERIES PROPORCIONALES

2.1. Situación introductora: El puzzle

En la figura adjunta se presentan las piezas de un puzzle. Los números escritos junto a los lados de los polígonos corresponde a las medidas de dichos lados expresadas en centímetros. Construir en cartulina este puzle pero de mayor tamaño, de tal manera que el lado de 4 cm tenga una longitud de 7 cm. Trabaja en colaboración con otro compañero haciendo cada uno la mitad de las piezas.



2.2. Series proporcionales[3]

En muchas situaciones prácticas se establecen relaciones entre las cantidades de dos magnitudes, de tal modo que las cantidades de una de ellas se obtienen multiplicando por un mismo número las distintas cantidades de la otra. Por ejemplo, el precio pagado por las distintas cantidades de un artículo – supongamos que barras de pan- se obtiene multiplicando el número de barras que compramos por el precio unitario de dicho artículo –30 céntimos de euro- , de manera que si compramos 3 barras tendremos que pagar 30x3=90 (90 c)., si compramos 5 habrá que pagar 150 c., etc. En estas situaciones tenemos dos series de números, como se indica en la tabla adjunta, que se dicen son proporcionales entre sí.

Número de barras de pan	1	2	3	4	5	6	7
Precio pagado en euros	0'3	0'6	0'9	1'2	1'5	1'8	2'1

> En general, decimos que dos series de números, con el mismo número de elementos, son proporcionales entre sí, si existe un número real fijo *k*, llamado razón de proporcionalidad, que permite escribir cada valor de la segunda serie como producto por k de los valores correspondiente de la primera serie.

La relación entre ambas series de números también se puede describir diciendo que se establece una aplicación lineal de coeficiente k entre los conjuntos numéricos correspondientes: $f: A \longrightarrow B$,

[3] Maurin y Johsua (1993)

cumpliéndose que, f(a+b) = f(a) + f(b), y f(ka) = kf(a).
En consecuencia, la gráfica cartesiana de estas funciones es una recta que pasa por el origen de coordenadas.

2.3 Proporciones

Cuando en la situación considerada sólo intervienen dos pares de números que se corresponden se dice que se establece una *proporción*.

A 21 le hacemos corresponder 6, y a 28 le corresponde 8. En este caso,
6 = 21.(2/7) y 8 = 28. (2/7). Por tanto, las dos series de números

21 —— 6
28 —— 8

decimos que forman una proporción. Se escribe en la forma de igualdad de dos razones:
$\frac{6}{21}=\frac{8}{28}$, o también, $\frac{6}{8}=\frac{21}{28}$.

Una proporción aparece en general bajo la forma de una igualdad entre dos fracciones. En consecuencia, el producto cruzado de los numeradores y denominadores serán iguales entre sí. Cualquier cambio de disposición entre los cuatro números que forman una proporción que no modifique los productos cruzados de los numeradores y denominadores entre sí dará lugar a una nueva igualdad de fracciones. Una proporción permite escribir cuatro igualdades equivalentes entre dos fracciones (que suelen ser interpretadas en este caso como razones), como se resume en el cuadro adjunto:

$$\begin{array}{ccc} \frac{a}{b}=\frac{c}{d} & \Longleftrightarrow & \frac{d}{b}=\frac{c}{a} \\ \Updownarrow & a \text{ x } d = b \text{ x } c & \Updownarrow \\ \frac{a}{c}=\frac{b}{d} & \Longleftrightarrow & \frac{d}{c}=\frac{b}{a} \end{array}$$

En la práctica una de las fracciones tendrá el numerador o el denominador desconocido y se plantea el problema de encontrar su valor usando la relación de proporcionalidad que se establece.

Ejemplo:
La razón de chicos a chicas en una clase es de 2 a 3. Hay 12 chicos ¿cuántas chicas hay?
Solución:
2/3 = 12/x; x = (3/2).12 = 18; hay 18 chicas.

En el enunciado de este problema se establece implícitamente una correspondencia entre dos conjuntos de cantidades discretas: "número de chicos" y "número de chicas". Esto se traduce en que si hay 2 chicos entonces hay 3 chicas, si hubiera 4 chicos habria 6 chicas, etc., lo que se puede expresar con la función lineal,
a=(3/2).c (a, número de chicas, c número de chicos)

La gráfica cartesiana de esta clase de funciones, $y = kx$, sabemos que es una recta que pasa por el origen de coordenadas.

En algunos casos, usamos frases como “la proporción de chicas en una clase es 3/5”. En estos casos la segunda fracción aparece implícita, y consiste en Nc/N siendo Nc el número de chicas en la clase y N el número total de alumnos de los dos sexos. En este sentido se usa habitualmente el término proporción en estadística, en que, con frecuencia estamos interesados en estimar la proporción de elementos con una cierta característica dentro de una población.

3. MAGNITUDES PROPORCIONALES

Dadas dos magnitudes A y B (por ejemplo, espacio recorrido por un móvil cuando la velocidad es constante y tiempo transcurrido) se dice que son proporcionales si están en correspondencia de tal manera que las medidas de las cantidades que se corresponden forman dos series de números proporcionales entre sí, es decir si existe una aplicación lineal $f: A \rightarrow B$.

En el ejemplo de la relación entre el espacio recorrido y el tiempo existirá una tal relación si el movimiento es uniforme, pero no si se trata de la caida de un cuerpo por la acción de la gravedad.

3.1. Proporcionalidad inversa

Se dice que dos magnitudes A y B son inversamente proporcionales si los valores tomados por la magnitud A y los inversos de los valores tomados por la magnitud B forman dos series proporcionales. Esta situación se presenta cuando el producto de valores tomados por las magnitudes A y B es constante, como ocurre, por ejemplo,
- la relación existente entre la presión (p) y el volumen (v) de un gas que siga la ley de Mariotte: p.v =k.
- la duración (t) del trayecto de longitud fija recorrida por un móvil (e) a velocidad uniforme (v): v.t =e.

3.2. Ejemplos de situaciones de proporcionalidad

Además de los ejemplos que hemos presentado en los apartados anteriores enumeramos algunos otros para mostrar la variedad de situaciones en las cuales se ponen en juego el modelo matemático de la proporcionalidad.

- Los numeradores y denominadores de todas las fracciones que son equivalentes entre sí (representantes del mismo racional).
- La longitud de cualquier circunferencia con su diámetro (o su radio): $l = \pi d$ $(2\pi r)$
- Longitud del arco de circunferencia y la amplitud del ángulo central correspondiente a dicho arco.
- El área de un sector circular y la amplitud del ángulo correspondiente.
- Las longitudes de diferentes segmentos marcados sobre una recta y sus proyecciones paralelas sobre otra recta (teorema de Thales)
- El volumen de líquido introducido en un recipiente con una sección regular (prisma, cilindro, ...) y la altura del líquido en el recipiente. (Esto permite la lectura del volumen graduando la altura).

- La masa de un cuerpo homogéneo y su volumen.
- El volumen de líquido que sale de un grifo de caudal constante y el tiempo que mantenemos el grifo abierto.
- La distancia medida sobre un plano o mapa realizado a una escala dada y la distancia real.
- El precio que pagamos al comprar un producto (por ejemplo, al llenar el depósito de gasolina) y la cantidad comprada (litros, en el ejemplo).
- Fijado un porcentaje, las medidas de las cantidades a las cuales se aplica dicho porcentaje (precios, pesos, etc.) y los valores resultantes del cálculo porcentual.

Hay otras muchas situaciones en que la proporcionalidad no es exacta, porque en las mismas se presenta un componente aleatorio. Sin embargo, la función lineal y la proporcionalidad se emplean también como modelo aproximado de la situación, por ejemplo:

- Altura de un hombre /mujer a una cierta edad y su peso.
- Número de hombres/ número de mujeres en un cierto país.
- Número de habitantes / número de niños nacidos (la constante de proporcionalidad es la tasa de natalidad).
- Número de glóbulos rojos en 1 cm^3 al realizar un análisis de sangre y número total de glóbulos rojos en sangre.

Estas situaciones no son objeto de estudio en la educación primaria. No obstante, la comprensión de la proporcionalidad y la función lineal en un contexto determinista es un requisito necesario para comprender posteriormente las relaciones aleatorias.

3.3. Ejemplos de situaciones de no proporcionalidad

- Los ejemplos de magnitudes inversamente proporcionales corresponden a relaciones no proporcionales.
- La longitud del lado de un cuadrado y su área.
- Número de habitantes de un país y Producto Nacional Bruto.
- La edad y la altura de un niño.
- La distancia de frenado y la velocidad de un vehículo.
- El espacio recorrido por un cuerpo en caída libre en el vacío y el tiempo transcurrido.
- Las magnitudes que varían por tramos, como las tarifas de franqueo postal de una carta y su peso; los impuestos pagados y los ingresos.
- Las situaciones en las que los precios aumentan proporcionalmente a la duración o distancia, pero a partir de un valor inicial no nulo (precio de un recorrido en taxi, ya que la bajada de bandera se debe pagar aunque el tiempo o la distancia sea mínima).

Ejercicios:

1. Algunos de los siguientes problemas son de proporcionalidad y otros no. Determinar en cuáles de estas situaciones aparece la proporcionalidad y resuelve las que se pueda:

a) Si los cereales se venden en cajas de tres paquetes, a 180 pts la caja, ¿cuánto costarán 12 paquetes?
b) Si un bebé aumenta de peso 3 kgr en tres meses, ¿cuánto aumentará en el primer año?
c) Pedro puede comer 2 pasteles en 3 minutos. ¿Cuánto tiempo le llevará comer 12 pasteles?
d) Si 5 chicas beben 3 botellas de limonada, ¿Cuánta limonada podrán beber 30 chicas?

2. En una ciudad, 2/3 de los hombres están casados con los 3/5 de las mujeres. Si nunca se casan con forasteros, ¿cuál es la proporción de solteros en dicha ciudad?

3. Si 8 hombres pueden cortar 9 troncos en 9 horas, ¿cuántas horas les llevará a 4 hombres cortar 3 troncos trabajando a la misma velocidad?

4. EL RAZONAMIENTO DE LA REGLA DE TRES

Con la expresión "regla de tres" se designa un procedimiento que se aplica a la resolución de problemas de proporcionalidad en los cuales se conocen tres de los cuatro datos que componen las proporciones y se requiere calcular el cuarto. Aunque aplicado correctamente el razonamiento supone una cierta ventaja algorítmica en el proceso de solución, ya que se reduce a la secuencia de una multiplicación de dos de los números, seguida de una división por el tercero, con frecuencia muchos alumnos manipulan los números de una manera aleatoria y sin sentido de lo están haciendo. En cierto modo el algoritmo les impide comprender la naturaleza del problema, sin preocuparse de si la correspondencia entre las cantidades es de proporcionalidad directa, inversa, o de otro tipo. La regla de tres se llega a aplicar de manera indiscriminada en situaciones en las que es innecesaria o impertinente.

Recordemos el procedimiento y las propiedades de las proporciones en las que se basa con un ejemplo.

"Un paquete de 500 gramos de café se vende a 5 euros. ¿A qué precio se debe vender un paquete de 450 gramos? (se sobreentiende que es del mismo tipo de café y al mismo precio unitario)"

Solución:

500 g ——— 5 e

450 g ——— x   x = (450.5)/500 = 4'5; 4'5 euros.

(se multiplican los dos números contiguos a la x y se divide por el opuesto)

Ciertamente, en las condiciones del enunciado, la correspondencia que se establece entre las cantidades del producto y el precio pagado es de proporcionalidad directa. Si se compra el doble, triple, etc. de producto, se deberá pagar el doble, triple, etc. de precio (suponiendo que no hay rebajas por comprar más o menos cantidad del producto).

Por tanto, la razón de las cantidades que se corresponden debe ser constante:

$$5/500 = x/450;$$

en esta proporción se cumple la igualdad del producto en cruz de los términos,

$$5.450 = 500.x, \text{ luego } x = (5.450)/500 = 4'5.$$

La razón de las cantidades que se corresponden es constante, en cualquier orden en que se coloquen como numerador o denominador; en la disposición que hemos puesto la razón de las cantidades da al coeficiente de proporcionalidad la interpretación del precio de 1 gramo de café (5/500), por tanto, como lo que deseamos comprar es 450 habrá que multiplicar dicho precio unitario por 450.

Se puede desarrollar un procedimiento de solución de los problemas de proporcionalidad poniendo en juego las propiedades de las funciones lineales,

$f(a+b) = f(a) + f(b)$; $f(ka) = kf(a)$,

en lugar de la igualdad de los productos cruzados de los términos de dos fracciones equivalentes. En efecto, en el ejemplo dado se puede escribir:

5e =f(500g) = 500f(1g); f(1g) = 5/500 euros por gramo;

es decir, se busca, en primer lugar el precio de un gramo de café. Una vez determinado, calculamos el precio de 450 gramos:

f(450g) =450f(1g)= 450.(5/500)= 4’5 euros.

Ejercicio

4. La fuerza de la gravedad en la Luna es 1/6 de la fuerza de la gravedad en la Tierra. Si una persona es capaz de hacer un salto de altura de 1’70 m y un salto de longitud de 4’85 m, ¿cuánto podrá saltar en altura y longitud en la Luna? Aplica el razonamiento de regla de tres y el razonamiento de función lineal para hacer los cálculos.

5. PORCENTAJES

La notación de porcentajes y el razonamiento de proporcionalidad que se pone en juego cuando uno de los términos que intervienen en las proporciones toma el valor 100 se utiliza en una amplia variedad de situaciones de la vida diaria. La expresión “x%” es una manera alternativa de expresar la fracción x/100, pero el concepto de porcentaje proviene de la necesidad de comparar dos números entre sí, no sólo de manera absoluta (cual de los dos es mayor), sino de una manera relativa, es decir, se desea saber qué fracción o *proporción* de uno representa respecto del otro. En estas situaciones se suele utilizar el número 100, que es bien familiar, como referencia. Al situarlo como denominador de una fracción, su numerador nos indica qué porción de 100 representa. El siguiente ejemplo muestra el interés de hacer estas comparaciones relativas y de adoptar 100 como base de comparación.

Ejemplo:

En una elección en la que se emitieron 5.781.200 de votos un candidato obtuvo 2.948.412 votos; en la siguiente elección se emitieron 6. 456.900 votos y dicho candidato obtuvo 3.099.312 votos. ¿Han mejorado los resultados de este candidato entre una y otra votación?

En la primera votación la fracción de votos obtenidos ha sido:

2.948.412/5.781.200 = 51/100; mientras que en la segunda

3.099.312/6.456.900 = 48/100.

El uso de los porcentajes permite conocer el número de votantes que recibió el candidato por cada 100 votantes, y comprobar de manera inmediata que el candidato ha perdido posición entre el electorado.

Sin embargo, la noción de porcentaje no sólo se utiliza para establecer comparaciones en valor relativo entre dos números. Una vez que se fija un porcentaje se puede aplicar a distintos números, obteniendo de este modo series de números proporcionales. Si se aplica el 30% de descuento a los precios de tres artículos A, B, C, cuyo valor es de 153, 452, 532 euros, respectivamente, entre los precios dados y los descuentos, se establece una correspondencia de proporcionalidad directa, cuya razón de proporcionalidad es 30/100:

30	A’	B’	C’
100	150	450	540

A’ = 0’30 x 150 = 45; B’ = 0’30 x 450 = 135; C’ = 0’30 x 540= 162

Ejercicios:

5. Justificar las siguientes reglas:

Regla 1ª : Para calcular el *p* % de un número *a* basta con multiplicar *a* por el operador decimal de porcentaje (*p*/100).

Regla 2ª : Aumentar un número en el *p* % de su valor equivale a calcular (100+*p*)% de dicho número, o sea, multiplicar dicho número por (1+*p*/100).

Regla 3ª : Disminuir o reducir un número en el *p*% de su valor equivale a calcular el (100-*p*)% de dicho número, o sea, multiplicar dicho número por: (1-*p*/100).

6. En los problemas de porcentajes intervienen cuatro números, a, b, c y 100 (a, el porcentaje a aplicar; b, la cantidad a la que se aplica el %; c, el resultado de aplicar el %. Inventar problemas que correspondan a estos tres tipos.

6. TALLER DE MATEMÁTICAS

1. En un catálogo, un mismo producto se presenta de dos formas distintas: en paquetes de 5 unidades al precio de 2’6 euros por paquete, y en paquetes de 17 unidades a 8’8 euros el paquete. ¿Es posible saber si el producto se vende al mismo precio unitario en ambas modalidades sin hacer cálculos, esto es, mediante una representación gráfica?

2. Un poste de 2’40 m de alto se coloca verticalmente en el suelo hincándolo una profundidad de 30 cm. La sombra que le proyecta el sol es de 1’75 m. En el mismo instante, un ciprés situado en las proximidades proyecta una sobra de 9’50 m. ¿Cuál es la altura del ciprés?.

3. Tres niños, Alberto, Bernardo y Carlos juegan una partida con canicas. Antes de la partida, cada uno tiene a, b, c canicas, respectivamente. La serie de números (a, b, c) es proporcional a la serie (3, 4, 5).

1) Encontrar la fracción de canicas que cada niño tiene respecto del total de canicas (se puede utilizar una tabla de proporcionalidad)
2) Después de la partida, los números de canicas que tienen los niños son, respectivamente, proporcionales a los números 15, 16 y 17.
   a) ¿Cuál es la fracción de canicas que tiene cada niño respecto del total?
   b) Uno de los niños ha ganado 9 canicas. ¿Quién ha sido? Justificar la respuesta.

c) ¿Cuál es el número total de canicas?

4. Sabiendo que un litro de leche pesa 1030 gramos, que la leche contiene el 12% de su peso en crema y que la crema da un 32 % de su peso en mantequilla, ¿cuánta mantequilla se otiene con 400 litros de leche?

5. Un artículo que vale 9’2 euros ha sufrido dos aumentos sucesivos del 5% y del 15%. ¿Cuál ha sido el incremento del precio en porcentaje y en valor?

6. Después de dos incrementos de precio, el primero del 10% y el segundo del 20 %, un artículo cuesta 79’2 euros. ¿Cuánto costaba antes de los aumentos de precio?

7. En una cierta población el 40% de los hombres están casados y el 30% de las mujeres están casadas. ¿Qué porcentaje de la población adulta está casada?

8. Un garaje de reparación de coches anuncia que hace el 10% de descuento en las reparadas, el 5% en los materiales y el 5% en la mano de obra. Una Asociación de Defensa del Consumidor ha denunciado a este garaje por publicidad falsa. ¿Es justa la denuncia de la asociación? Explicar la respuesta.

9. Demostrar que si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ entonces se cumple que $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

10. Dos analgésicos A y B han sido experimentados en dos muestras de personas, de edades y situación clínica similares, como remedio para la jaqueca. Se han obtenido los datos siguientes:

	Mejoran	No Mejoran
Analgésico A	40	60
Analgésico B	90	210

¿Son igualmente efectivos los dos analgésicos? ¿Cuántos pacientes debieran mejorar con el tratamiento B para que sea igualmente efectivo que el A?

11. Juan y Maria juegan a los dados. Lanzan dos dados. Si el producto de los números es impar, Juan gana un euro. Si el producto de los números es par, gana Maria. ¿Qué cantidad debe ganar Maria, para que el juego sea equitativo?

12. En un Mac Donald se pueden consumir diferentes tipos de alimento. En la tabla siguiente presentamos el contenido calórico y de grasas saturadas de una ración:

	Calorías	Grasas (en Gramos)
Patatas fritas	1500	100
Alitas de pollo	600	40
Buñuelos	450	22
Pastel de crema	290	19
Aritos de cebolla	276	16

Sabiendo que cada gramo de grasa tiene 9 calorías, determina el porcentaje de grasas de cada uno de estos alimentos.
Si una persona se toma un día una ración de cada uno de estos alimentos, ¿Cuál ha sido su consumo total de calorías y grasas? ¿En que porcentaje sobrepasa la cantidad recomendada de 2000 calorías y 65 gramos de grasa por persona y día?

C: Conocimientos Didácticos

1. ORIENTACIONES CURRICULARES

1.1. Diseño Curricular Base del MEC

La proporcionalidad se contempla en diferentes bloques temáticos, en la forma siguiente:

En el bloque 1 (Números y operaciones) se indica que *"El tanto por ciento se pretende abordar solamente de forma intuitiva."*

- Entre los hechos, conceptos y principios sobre los números naturales, enteros, fraccionales y decimales se menciona: *El tanto por ciento de una cantidad (%).*
- A propósito de la multiplicación y división se hace referencia explícita a la proporcionalidad: *"la multiplicación como suma abreviada, proporcionalidad (doble, triple, etc.); la división como reparto, proporcionalidad (la mitad, la tercera parte, etc.)."*

También entre los procedimientos de este bloque se incluyen los siguientes relacionados con el tema:

- (7) Interpretación, cálculo y comparación de tantos por ciento.
- (8) Formulación y comprobación de conjeturas sobre la regla que sigue una serie o clasificación de números y construcción de series y clasificaciones de acuerdo con una regla establecida.
- (16). Elaboración de estrategias personales de cálculo mental
- Porcentajes sencillos

En el bloque 3 (Orientación y representación en el espacio), encontramos:

- En el apartado de Hechos, conceptos y principios, se concede un lugar destacado a la representación elemental del espacio mediante:
  - Planos, mapas, maquetas.
  - Escalas: doble, mitad, triple, tercio, etc.
  - Escalas gráficas

- Entre los Procedimientos,
- (5). Lectura, interpretación y construcción a escala de planos y maquetas.
- (6). Lectura, interpretación y reproducción a escala de mapas.

1.2. Principios y Estándares para la Matemática Escolar (NCTM 2000)

En los grados 3-5 se menciona el tema en la forma siguiente:

- Comprensión numérica: reconocer y generar formas equivalentes de formas comunes en que se representan las fracciones, decimales y porcentajes.

- Los estudiantes deben comprender el significado de un porcentaje como parte de un total y usar porcentajes comunes como 10 o 50 por ciento. Al estudiar las fracciones decimales y porcentajes conjuntamente pueden aprender a pasar de una a otra forma equivalente.

Asimismo, en conexión con la estadística se sugiere que *los alumnos representen datos en gráficos de líneas y barras,* en cuya construcción aparece implícitamente la proporcionalidad.

En los grados 6-8 se menciona:

- Trabajar con flexibilidad con fracciones decimales y porcentajes para resolver problemas.
- Comprender porcentajes mayores que 100 y menores que 1
- Comprender y usar razones y proporciones para representar relaciones cuantitativas

2. DESARROLLO COGNITIVO Y PROGRESIÓN EN EL APRENDIZAJE

El razonamiento proporcional se considera como uno de los componentes importante del pensamiento formal adquirido en la adolescencia. Las nociones de comparación y covariación están en la base subyacente al razonamiento proporcional, siendo a su vez los soportes conceptuales de la razón y la proporción. El desarrollo deficiente de estas estructuras conceptuales en los primeros niveles de la adolescencia obstaculiza la comprensión y el pensamiento cuantitativo en una variedad de disciplina que van desde el álgebra, la geometría y algunos aspectos de la biología, la física y la química.

Diversas investigaciones han mostrado, sin embargo, que la adquisición de las destrezas de razonamiento proporcional es insatisfactoria en la población en general. Estas destrezas se desarrollan mas lentamente de lo que se había supuesto; incluso hay evidencias de que una gran parte de las personas nunca las adquieren en absoluto. Estas cuestiones no se enseñan bien en las escuelas, que con frecuencia sólo estimulan la manipulación de símbolos y fórmulas carentes de significado[4].

2.1. Desarrollo del razonamiento proporcional

El esquema de proporción es considerado por Piaget como un componentes básico del razonamiento formal, que será necesario, entre otros, para adquirir conceptos como el de probabilidad y correlación. Sin embargo, esto no quiere decir que los niños no tengan una percepción progresiva de las proporciones. El desarrollo de esta idea, también sigue las etapas típicas de la teoría de Piaget, quien estudió cómo los niños la usan cuando tienen que estimar la probabilidad de un suceso.

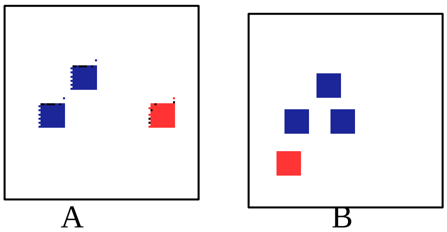
[4] Hoffer (1988), o.c.

Una tarea típica es la siguiente:

Tarea 1. En la caja A se han metido 2 fichas azules y 1 ficha roja. En la caja B se han metido 3 fichas azules y 1 ficha roja. (Mira el dibujo)

Con los ojos vendados tienes que sacar una ficha roja para ganar un premio (primero movemos bien la caja para que las fichas se mezclen). ¿Cuál caja elegirías para hacer la extracción? Señala la respuesta correcta:

(A) La caja A da mayores posibilidades de obtener una ficha roja
(B) La caja B da mayores posibilidades de obtener una ficha roja
(C) Las dos cajas dan la misma posiblidad
(D) No lo se



La comparación de probabilidades implica una comparación de fracciones, pero se añade la dificultad de que también se requieren las ideas de azar, casos favorables y posibles. Los autores que han trabajado el tema sugieren que una tarea de comparación de probabilidades es siempre más difícil que otra tarea de comparación de fracciones en un contexto determinista.

Un ejemplo típico de tarea proporcional en contexto determinista es la siguiente:

Tarea 2. Mi madre ha preparado dos jarras de limonada. En la jarra A ha mezclado dos vasos de agua y un vaso de zumo de limón. En la jarra B ha mezclado tres vasos de agua y uno de zumo de limón. ¿En cual de las dos jarras el sabor a limón es más intenso?

Ejercicios:

1. ¿Crees que puedes variar la dificultad de la tarea 1 para los niños, cambiando el número de bolas rojas y azules en cada caja? Pon un ejemplo de forma que la tarea sea más sencilla. Pon otro ejemplo de modo que la tarea sea más difícil.

2. ¿En qué se parecen las tareas 1 y 2? ¿En qué se diferencian? ¿Puedes cambiar el número de vasos de agua y limón en las jarras para que la tarea resulte más fácil o más difícil a los niños? ¿Qué tipos de razonamientos seguirán los niños para resolver la tarea?

En estas tareas hay cuatro datos, dos pares de datos para cada una de las jarras o cajas que queremos comparar:

a = número de vasos de limón en la Jarra A en la tarea 2 (o número de casos favorables en la urna A en la tarea 1).
b = número de vasos de agua en la Jarra A en la tarea 2 (o número de casos desfavorables en la urna A en la tarea 1).
c = número de vasos de limón en la Jarra B en la tarea 2 (o número de casos favorables en la urna B en la tarea 1).
d = número de vasos de agua en la Jarra B en la tarea 2 (o número de casos desfavorables en la urna B en la tarea 1).

La dificultad de estas tareas dependen de los valores relativos de estos cuatro datos. En la tabla 1 describimos algunas etapas que pasan los niños para resolver tareas como la 1 y 2 hasta llegar a alcanzar el razonamiento proporcional del adulto (tarea 2)[5]

Etapa	Nombre	Edad media (años,meses)	Ejemplo (a, b) vs (c, d)	Capacidad requerida	Estrategia /razonamiento
0	Simbólica	2, 0	(1,0) vs (0, 3)	Distinguir el agua del zumo de limón	Buscar la jarra que sólo tiene zumo
IA	Intuitiva Inferior	3; 6	(1, 4)vs (2, 4)	Comparar el primer elemento del par	Las dos jarras tienen igual cantidad de agua. Una tiene más zumo de limón Luego tiene el sabor más intenso
IB	Intuitiva media	6; 4	(1, 2) vs(1, 4)	Compara el segundo término del par	Las dos jarras tienen igual cantidad de limón. Una tiene más agua Luego tiene el sabor menos intenso
IC	Intuitiva superior	7; 0	(5,2) vs (3,4)	Observa la relación de orden inversa entre los términos de los dos pares	En la jarra A hay más zumo que agua En la jarra B hay más agua que zumo Luego A tiene el sabor más intenso
IIA	concreta inferior	8;1	(1,1) vs (3,3)	igualdad de términos en cada par	En la jarra A hay igual de agua que zumo En la jarra B también hay igual de agua que zumo Luego el sabor es igual
IIB	Concreta superior	10; 5	(4, 2) vs (6,3)	La misma proporción entre los términos de ambos pares	En la jarra A hay doble cantidad de agua que zumo En la jarra B hay doble cantidad de agua que zumo Luego el sabor es igual
IIIA	Formal inferior	12; 2	(2,1) vs (4, 3)	En alguno de los pares los términos son múltiplos	En la jarra A hay doble cantidad de agua que zumo En la jarra B hay menos del doble de agua que zumo Luego el sabor de A es más fuerte
IIIB	Formal superior	15; 10	(3, 5)vs (5,8)	Comparar fracciones con distinto denominador	En la jarra A, de 8 vasos de líquido 3 son de limón En la jarra B, de 13 vasos de líquido 5 son de limón 3/8 =39/104 5/13=40/104 Luego en B el sabor es más intenso porque de las mismas partes totales (104) hay una más de limón.

3. SITUACIONES Y RECURSOS

Los resultados de diversas investigaciones proporcionan orientaciones sobre cómo ayudar a los niños en el desarrollo del razonamiento proporcional. Algunas de estas orientaciones son las siguientes[6]:

1. Proporcionar una amplia variedad de tareas sobre razones y proporciones en diversos contextos que pongan en juego relaciones multiplicativas entre distintas magnitudes.

[5] Noelting (1980).
[6] Van de Walle (2001).

2. Estimular la discusión y experimentación en la comparación y predicción de razones. Procurar que los niños distingan las situaciones de comparación multiplicativa (proporcionalidad) de las no multiplicativas, proporcionando ejemplos y discutiendo las diferencias entre ellas.
3. Ayudar a los niños a relacionar el razonamiento proporcional con otros procesos matemáticos. El concepto de fracción unitaria es muy similar al de tasa unitaria. El uso de tasas unitarias para comparar razones y resolver proporciones es una de las técnicas más apropiadas.
4. Reconocer que los métodos mecánicos de manipulación de símbolos, como los esquemas del tipo de "regla de tres" para resolver problemas de proporcionalidad no son apropiados para desarrollar el razonamiento proporcional y no se deberían introducir hasta que los alumnos tengan un cierto dominio de otros métodos intuitivos y con un fundamento matemático consistente.

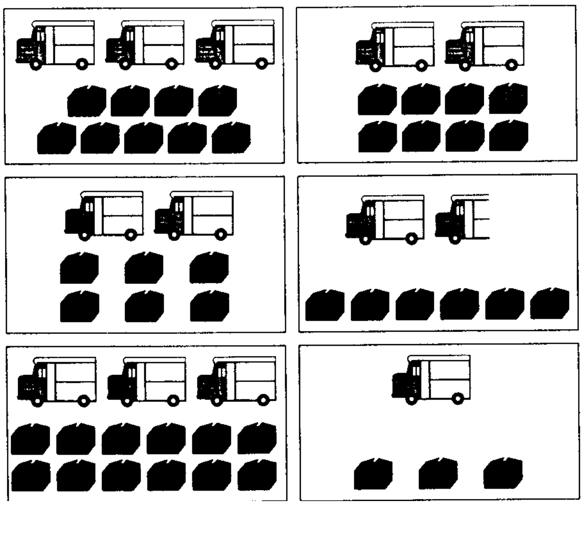
En las siguientes secciones describimos algunos tipos de actividades y recursos para el estudio de la proporcionalidad en primaria.

3.1. Selección de razones equivalentes

En este tipo de actividades se presenta una razón entre cantidades de objetos o medidas y los alumnos deben seleccionar una razón equivalente entre otras dadas. El centro de atención será el apoyo intuitivo de por qué los pares seleccionados tienen la misma razón. En estas actividades es de gran utilidad incluir pares de razones que no sean proporcionales pero que tengan una diferencia común. Por ejemplo, 5/8 y 9/12 no son razones equivalentes, pero la diferencia entre los numeradores y los denominadores es la misma. La situación fuerza a los alumnos a pensar en términos multiplicativos y no aditivos.

Actividad 1:

Preparar fichas en las que se muestren objetos diferentes en diversas cantidades, como se muestra en la figuras (cajas y camiones). ¿Hay algunas fichas en que la razón entre las cajas y los camiones sea la misma? Dada una ficha, los alumnos deben seleccionar otra ficha que tenga la misma razón entre el número de objetos.



Esta tarea lleva a los alumnos a realizar una comparación numérica multiplicativa y no visual, e introduce la noción de razón como tasa (comparación de cantidades de magnitudes diferentes). Una tasa unitaria corresponde al caso en que una ficha tiene un solo objeto de una clase (por ejemplo, 1 camión y tres cajas).

Objetos emparejados con monedas o billetes sería una manera de introducir el precio como una razón.

En el contexto de probabilidad se pueden presentar diferentes cajas con fichas de dos colores y analizar cuáles dan la misma probabilidad de obtener una bola de determinado color.

3.2. Progresiones crecientes y decrecientes de cantidades

Un tipo de actividad que se puede proponer a los alumnos para introducir las series proporcionales puede ser la continuación de series de cantidades que se corresponden según un factor de escala y que se refieren a situaciones familiares.

Dinero:
1 duro → 5 pts 1 euro → 166’384 pts
2 duros → 10 pts 2 euros →
3 duros → 15 pts 3 euros →
... ...
10 duros → ___ pts 20 euros → ___ pts

Tiempo:
1 hora → 60 minutos 1 minuto → 60 segundos
....

Longitud:
1 pulgada → 2’54 centímetros 1 metro → 100 centímetros
... ...

Unidades comunes:

1 persona → 10 dedos 1 coche → 4 ruedas
... ...
Esta actividad se debe proponer también de manera que en lugar de multiplicar por un factor constante la operación consista en dividir:

600 céntimos → 6 euros
300 céntimos → ___ euros
...

6 refrescos → 180 céntimos
3 refrescos → ___ céntimos
___ refrescos → 60 céntimos
...

Estas actividades se pueden proponer desde los primeros niveles.

Actividad 2: ¿Qué hay en la bolsa?

Esta actividad pone en juego nociones informales sobre probabilidad considerada como una razón. Poner fichas de dos colores en una bolsa. Por ejemplo, 4 rojas y 8 azules. Explicar a los alumnos que hay fichas de colores diferentes dentro de la bolsa, pero no decir el número de fichas ni el número de colores. Sacudir la bolsa y hacer que un alumno saque una ficha, registre el color y volver a ponerla dentro de la bolsa. Después de 10 o 15 extracciones, preguntar cuántas fichas de cada color piensan que puede haber en la bolsa y anotar el número que digan. Después de algunos ensayos más, preguntar cuál es el menor número posible de fichas que piensan puede haber en la bolsa.
A continuación se puede dar a los alumnos uno de los siguientes datos: el número total de fichas que hay en la bolsa o el número de fichas de uno de los colores. Ver si con esta información pueden predecir cuántas fichas de cada color hay en la bolsa. “¿Qué ocurriría si hubiera más

fichas? ¿Qué otros números de cada color podría haber en la bolsa?
La discusión es útil aunque los niños no acierten la razón correcta de fichas de cada color. Se puede continuar extrayendo fichas para ver que la razón se mantiene, aunque no de manera exacta.
La experiencia se puede variar cambiando la razón entre el numero de fichas de cada color, o incluso añadir fichas de otro color. Después de ver el contenido de la bolsa, discutir qué otros números de fichas de cada color produciría el mismo resultado. Los grupos de alumnos pueden explorar la extracción de fichas en bolsas con razones iguales de colores pero con números de fichas diferentes y comparar los resultados.

3.3. Actividades de construcción y medición

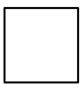
En estas actividades se hacen mediciones para construir modelos físicos o visuales de razones equivalentes con el fin de proporcionar ejemplos tangibles de proporciones y observar relaciones numéricas.

Actividad 3: Unidades diferentes, razones iguales

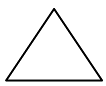
Cortar tiras de cartulina de la misma longitud y dar una tira a cada uno de los grupos de alumnos formados en la clase. Cada grupo tiene que medir la tira usando una unidad diferente. Como posibles unidades se pueden utilizar regletas de Cuisenaire, unidades estándares como el centímetro o el decímetro, o bien otras tiras de cartulina. Interesará que la longitud seleccionada para la tira a medir sea un múltiplo de las unidades de medida para evitar problemas con la precisión de las mediciones.
Cuando cada grupo haya medido su tira, preguntar por la medida obtenida por uno de los grupos y mostrar la unidad que han usado. A continuación, muestre la unidad usada por otro grupo, y hacer que la clase la compare con la primera unidad. Ver si la clase puede estimar la medida obtenida por el segundo grupo. La razón de las unidades de medida deberá ser la inversa de las medidas hechas con esas unidades. Por ejemplo, si las dos unidades están en la razón 2 a 3, las respectivas medidas estarán en la razón de 3 a 2. Repetir el proceso con otras unidades. Finalmente, presentar una unidad que ningún grupo haya usado y ver si la clase puede predecir la medida que se obtiene con esa nueva unidad.

Actividad 4: Construcciones con palillos[7]

Se proporciona a los alumnos unos 60 palillos y una hoja de papel milimetrado. Se les pide que construyan traiángulos y cuadrados cuyo lado esté formado por 1, 2, 3... palillos, completando la tabla que reproducimos a continuación:



Lado	Perímetro

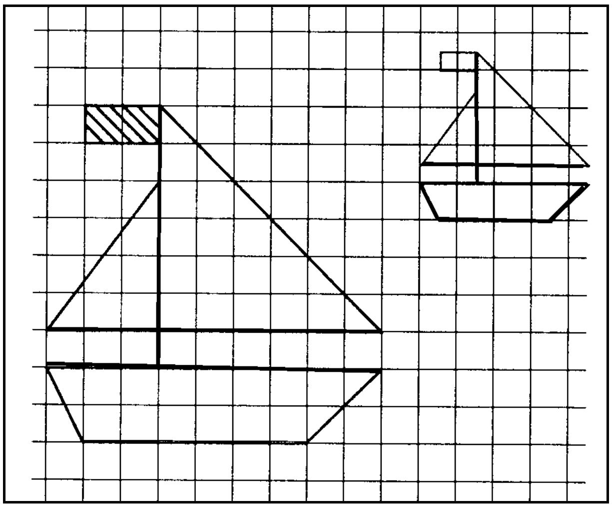


Lado	Perímetro

Se pide a los alumnos dibujar, sobre unos mismos ejes de coordenadas una gráfica que relaciones el lado con el perímetro para el cuadrado y el triángulo equilátero.
Se pide adivinar, sin tener que calcularlo el perímetro de un triángulo y cuadrado si el lado está formado por 15 palillos, utilizando la gráfica.

Actividad 5: Dibujos a escala

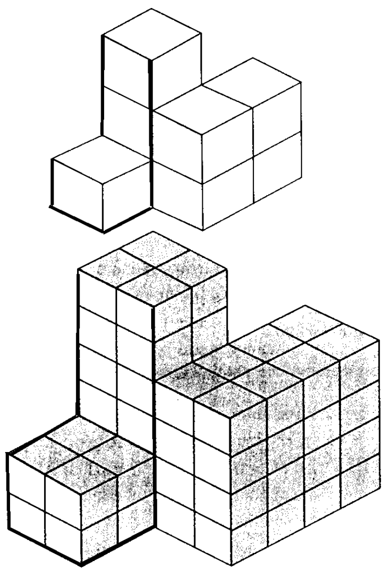
Sobre papel cuadriculado pedir a los alumnos que dibujen una figura sencilla sobre las líneas de la cuadrícula. Pedir que dibujen una figura de igual forma pero de mayor o menor tamaño. Después de repetir la actividad haciendo figuras de distintas dimensiones pero igual forma comparar las razones de las longitudes de los distintos lados.
Los lados que se correspondan en dos figuras deberán conservar la misma razón. De igual modo la razón entre dos lados de una misma figura deberá ser la misma que la razón entre los dos lados correspondiente en la figura transformada.
Esta actividad relaciona la idea geométrica de semejanza con el concepto numérico de razón.



Actividad 6: Razones entre longitudes, áreas y volúmenes

Esta actividad es una versión tridimensional de la anterior. Usando piezas cúbicas encajables construir un "edificio" simple como se muestra en la figura adjunta. Construir un edificio con la misma forma pero de mayor tamaño y comparar las medidas de los lados, las áreas y los volúmenes.
Observar que los volúmenes y las áreas no varían proporcionalmente con los lados de los cuerpos.

Si dos figuras son semejantes cualquier par de dimensiones lineales que se midan están en la misma razón, por ejemplo 1 a k. Pero las áreas que se corresponden estarán en la razón de 1 a k^2, mientras que los volúmenes estarán en la razón de 1 a k^3.

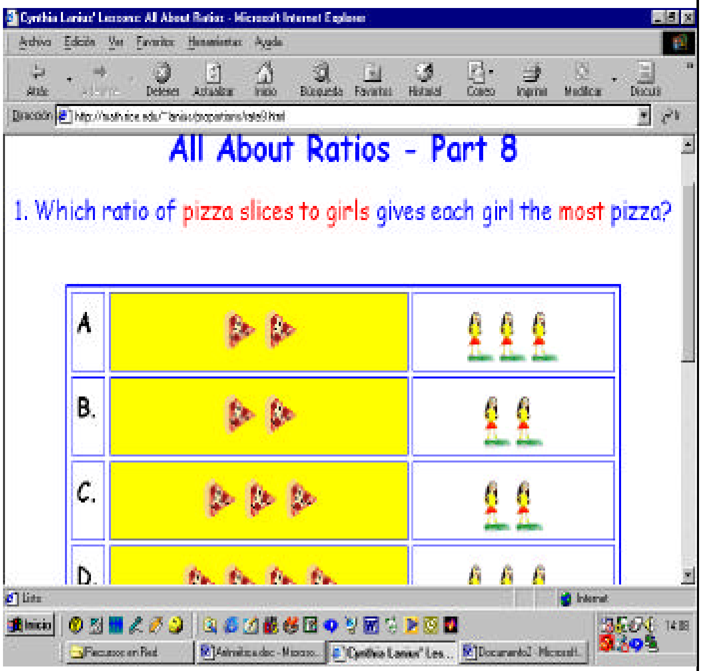


Las actividades descritas hasta este momento proporcionan a los alumnos un concepto intuitivo de razón y proporción, por lo que serán de ayuda en el desarrollo del razonamiento proporcional. Una utilidad práctica de este tipo de razonamiento se refiere al cálculo de valores desconocidos de alguno de los cuatro términos que intervienen en una proporción. El conocimiento de una razón se puede usar para hallar el valor de otra. Las comparaciones de precios, el uso de escalas en los mapas, la solución de problemas de porcentajes son algunos ejemplos de situaciones prácticas en las que se precisa resolver proporciones. Los alumnos deberán aprender a plantear estos problemas de manera simbólica y a resolverlos, aunque esto se hará en los niveles de educación secundaria.

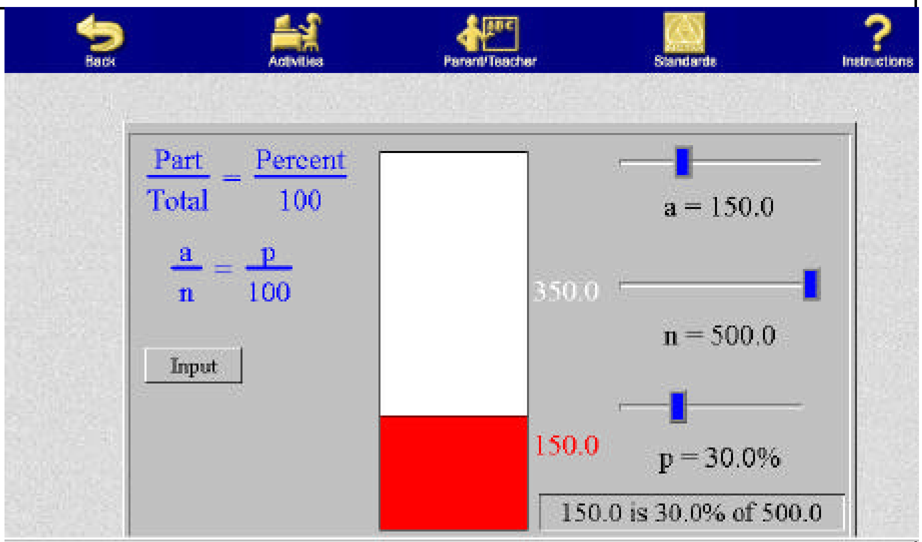
3.4 Recursos en Internet

1. Todo sobre las razones: http://math.rice.edu/~lanius/proportions/index.html

Este servidor presenta actividades para los alumnos de 5º y 6º mediante las cuales se puede construir de una manera constructiva la idea de razón y comparar razones. Se recomienda el trabajo de los alumnos por parejas en un ordenador conectado a la red. Contiene también una prueba de evaluación que indica el número de aciertos y algunos problemas. Los ejercicios se corrigen en red pudiendo el profesor obtener un registro escrito. Es parte de un laboratorio general de matemáticas escolares, que incluye actividades para los otros temas de primaria.



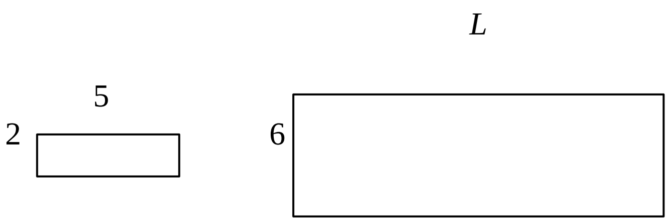
2. Manipulativos visuales: porcentajes
http://matti.usu.edu/nlvm/nav/frames_asid_160_g_1_t_1.html



El programa pide dos datos como entrada de los tres que intervienen en un porcentaje: una cantidad total *n*, una parte *a* de ese total y un porcentaje *p*. Gráficamente se representa la fracción correspondiente. Los cursores de la derecha permiten de una manera dinámica cambiar uno de los datos y ver el resultado en el gráfico y numéricamente.

4. CONFLICTOS EN EL APRENDIZAJE. INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

4.1. Razones y proporciones



Diversas investigaciones han puesto de manifiesto que los estudiantes basan su razonamiento intuitivo sobre las razones y proporciones en técnicas aditivas y de recuento en lugar de razonar en términos multiplicativos, lo que indica una deficiencia importante. Por ejemplo, cuando se les pide encontrar la longitud del lado *L*, los alumnos dicen con frecuencia que es 9 en lugar de 15. Los alumnos tienden a sumar una cantidad en lugar de multiplicar por un factor de escala.

Para resolver el problema de las mezclas (comparar en qué jarra el sabor del zumo de limón es más intenso, descrito en la sección 2), la estrategia aditiva consistiría es comparar la diferencia entre vasos de agua y zumo de limón en cada jarra. También hacemos notar que algunas estrategias propias de una etapa sirven para resolver con éxito los problemas más sencillos, que presentamos en la Tabla 1, pero no son válidos en el caso general.

4.2. Porcentajes

La comprensión de los porcentajes se considera con frecuencia como fácil de lograr pero hay datos experimentales abundantes de lo contrario. El uso incorrecto de los porcentajes es frecuente no sólo entre los estudiantes de secundaria sino incluso también en los adultos. Se encuentran errores flagrantes, lo que sugiere que con frecuencia las ideas básicas pueden no estar claras. Por ejemplo, en algunas investigaciones se ha encontrado que alrededor de la tercera parte de los estudiantes de 17 años respondieron erróneamente la siguiente cuestión:

"Si el 5% de los alumnos han faltado hoy a clase, ¿5 de cuántos han faltado?"
Un error en esta idea fundamental sobre los porcentajes sugiere que no sabían que 100 es la base de comparación de los porcentajes.

En otra investigación, alrededor de la mitad de los alumnos de 6º curso de primaria respondieron erróneamente la pregunta: *"¿Cuál es el 100% de 48?"*

Es fácil encontrar en los medios de comunicación anuncios que revelan errores, confusiones y distorsiones sobre el uso de los porcentajes. Indicamos dos ejemplos[8]:
1. *"Precios rebajados el 100%"*.
Si este anuncio fuera correcto, los artículos serían gratis. Probablemente, los precios se redujeron el 50%. Si un producto que costaba originalmente 400 E. se vendía a 200 E., el anuncio calculó el 100% sobre el precio de venta, cuando debería haberlo hecho sobre el precio original.

2. "De todos los doctores consultados, el 75% recomendó nuestro producto".
Este tipo de afirmación podría ser un anuncio de alguna compañia. Si el anuncio dijera que "3 de cada 4 doctores que hemos entrevistado recomienda nuestro producto", la reacción del consumidor podría ser diferente. Los porcentajes se pueden usar con frecuencia para disfrazar los números implicados. Los porcentajes permiten hacer comparaciones de manera fácil debido al uso común de la base 100, pero pueden llevar a suponer que se ha usado una muestra mayor de la que efectivamente se ha usado.

4.3. Items de evaluación

A continuación incluimos información sobre algunos ítems usados en investigaciones sobre razonamiento proporcional y sus porcentajes de éxito a diferentes edades. Indicar cuál es la solución correcta y algunas soluciones incorrectas para cada uno de ellos.

Item1[9]. Encuentra el término que falta para que las dos fracciones sean equivalentes

	Porcentaje des respuestas correctas	
Fracción	12 años	13 años
1/3= 2/?	72	77
4/12= 1/?	56	52
2/7 = ¿/4	57	63

Item 2[10]. Supongamos que x/y representa un número. Si se duplican los valores de x e y el nuevo número es:

- la mitad de grande que x/y
- igual a x/y
- doble de grande que x/y

(15% de respuestas correctas a los 9 años; 18% de respuestas correctas a los 11 años).

Item 3[11]**.** Una clase de matemáticas tiene 13 niños y 16 niñas. Cada nombre se escribe en un trozo de papel. Todos los trozos se ponen en un sombrero y el profesor saca uno sin mirar. Señala la frase correcta:

	Porcentajes de respuestas		
	11 años	12 años	13 años
Es más probable que el nombre sea de un niño	7.7	3.4	2.7
Es más probable que el nombre sea de una niña	63.7	75.9	68.5
Es igual de probable que sea de un niño que de una niñ	26.4	20.7	28.8

Item 4. Si 2 /25 = n/500 , entonces *n* =

A) 10 ; B) 20; C) 30; D) 40; E) 50

Item 5. Si se sube el precio de una lata de guisantes de 50 a 60 pesetas, ¿Cuál es el porcentaje de aumento en el precio?

A) 83.3% ; B) 20%; C) 18.2%; D) 16.7%; E) 10%

Item 6. La profesora pregunta por qué 4/5 es mayor que 2/3. ¿Cuál de los siguientes niños razonó correctamente?

A) María dijo "porque 4 es mayor que 2"
B) Juan dijo; " porque 5 es mayor que 3"
C) Sonia dijo. "porque 4/5 está más cerca de 1 que 2/3"
D) Jaime dijo: "porque 4 + 5 es más que 2 + 3."

5. TALLER DE DIDÁCTICA

5.1. Análisis de textos escolares. Diseño de unidades didácticas

Consigue una colección de libros de texto de matemáticas de 2º y 3er ciclo de primaria (recomendamos buscar los libros que utilizastes personalmente, o bien los de algún familiar o amigo).

1. Estudia el desarrollo del tema de "razones, proporciones y porcentajes" en dichos niveles.
2. Indica en qué curso se inicia y cuando termina.
3. Identifica aspectos del desarrollo del tema en los manuales escolares que consideres potencialmente conflictivos.
4. Describe los cambios que introducirías en el diseño las lecciones propuestas para los cursos 5º y 6º de primaria.

5.2. Análisis de una evaluación escolar

En el anexo 1 (a continuación) se dan tres ejercicios (A, B, y C) propuestos por un maestro en una evaluación final. En el anexo 2 se dan las respuestas de seis alumnos al ejercicio C. Responde a las siguientes cuestiones referidas a los ejercicios de esta evaluación y las respuestas dadas por los alumnos.

Cuestión 1: ¿Qué nociones matemáticas se utilizan se utilizan en los tres ejercicios?. Para cada uno de ellos, indica las magnitudes que se ponen en correspondencia y expresa simbólicamente la función que relaciona a estas magnitudes.

Cuestión 2: Resuelve de tres maneras diferentes el ejercicio B. Indica las propiedades de la noción que utilizas en cada caso.

Cuestión 3: Analiza las variables didácticas puestas en juego en estos tres ejercicios y deduce un orden de dificultad para los alumnos del primer ciclo de ESO.

Cuestión 4: Estos ejercicios están planteados en un contexto numérico. Inventa otros dos ejercicios de matemáticas para el primer ciclo de ESO que pongan en juego la misma noción matemática en otros contextos.

Anexo 1:

Ejercicio A: Un panadero utiliza la siguiente tabla para obtener el precio de venta de los panes:

Número de panes	5	10	15
Precio a pagar	15	30	45

a) ¿Cuál es el precio de venta de 15 panes; b) Utiliza la tabla para calcular el precio de venta de 25 panes.

Ejercicio B: Un tren circula siempre a la misma velocidad. Tarda 6 minutos en recorre 9 kilómetros y 10 minutos para recorrer 15 kilómetros. a) ¿Cuál es la distancia recorrida en 16 minutos?; b) ¿Cuál es la distancia recorrida en 30 minutos?

Ejercicio C: Para hacer un mouse de chocolate para 9 personas se necesitan 6 huevos. Para 15 personas se precisan 10 huevos. a) ¿Cuántos huevos se necesitan para hacer el pastel para 24 personas?; b) ¿Y para 30 personas?.

Anexo 2*: Soluciones de 6 alumnos al ejercicio C:*

A1: a) Se necesitan 24 huevos para 24 personas; b)Se necesitan 30 huevos para 30 personas.

A2: a) 24 +3 = 27 huevos; b) 30 + 5 = 35 huevos.

A3: a) Número de huevos para 1 persona: 9:6 = 1'5.
Número de huevos para 24 personas 24 x 1'5 = 36'0
b) Número de huevos para 30 personas: 30 x 1'5 = 45'0.

A4: a) Son necesarios 19 huevos; b) Son necesarios 25 huevos.

A5: a) Se necesitan 21 huevos; b) Se necesitan 27 huevos

A6: a) Son necesarios: 15 + 9 = 24
10 + 6 = 16 huevos
b) Para 30 personas, 15 x 3 = 45 huevos.

Bibliografía

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: MEC y Labor.

Fernandez, F. (2001). Proporcionalidad entre magnitudes. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 533-558). Madrid: Síntesis.

Fiol, M. L. y Fortuny, J. M. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Madrid: Síntesis.

Hoffer, A. R. Ratios and proportional thinking. En Th. R. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8*. Boston: Allyn and Bacon.

Maurin, C. y Johsua, A. (1993). *Les outils numériques à l'école primaire et au collègue*, Vol 2. París: Editions Marketing (Ellipses).

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II. Problem structure at succesive stages: Problem solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics*, 11 (3), 331-363.

Reys, R. E. y cols (2001). *Helping children learn mathematics*. New York: John Wiley

Van de Walle, J. A. (2001).*Elementary and middle school mathematics*. New York: Longman.