EVALUACIÓN DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA DE UNA EXPERIENCIA DE ENSEÑANZA SOBRE DISTRIBUCIONES BINOMIAL Y NORMAL EN 2º DE BACHILLERATO

Máster de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.

Alumna: **MARTA NOGUERA VILCHES**

Especialidad: **Matemáticas**

Tutores: **Dr. Juan Díaz Godino y**

Dr. Gustavo R. Cañadas de la Fuente

Universidad de Granada

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

Para mí, la profesión del docente es una de las profesiones más bonitas, importantes y que te dan mayor satisfacción personal de todas a las que se puede acceder cuando terminas tu carrera universitaria, pero, pienso que para que el profesor pueda ejercer su tarea, tiene que realizar la imprescindible labor de la preparación de sus clases, teniendo en cuenta los objetivos y el currículo que debe desarrollar en sus estudiantes. Este es precisamente un componente muy importante de nuestra formación en el máster, orientada a la adquisición de destrezas en el diseño de unidades didácticas y de preparación de clases.

Las prácticas en institutos nos brindan una maravillosa oportunidad de poner en marcha todo lo aprendido y de ponernos en contacto con la comunidad educativa, tomando conciencia de las dificultades que el contexto en el que tiene lugar la enseñanza, impone al profesor. Después de esta experiencia, se pone de manifiesto la necesidad de reflexionar y valorar el propio trabajo, a fin de reconocer aquellos puntos en los que es preciso mejorar.

Esta es la razón por la que hemos optado por enfocar el trabajo de fin de máster hacia una reflexión sobre la experiencia de enseñanza vivida en la fase de prácticas, donde he tenido la oportunidad de asumir la responsabilidad de la enseñanza de un tema, las Distribuciones Binomial y Normal, bajo la supervisión del profesor. Esta reflexión sistemática estará apoyada en el uso de la noción de idoneidad didáctica y el sistema de indicadores de idoneidad desarrollados por Godino y colaboradores en diversos trabajos (Godino, 2011). La finalidad es obtener criterios para el rediseño de la unidad didáctica que permitan introducir cambios fundamentados en la enseñanza del tema correspondiente.

El trabajo está organizado en varios apartados. El primero, dejando a un lado esta introducción, consiste en el planteamiento del problema y un desarrollo global del marco teórico donde vamos a trabajar. La siguiente sección es una síntesis del diseño y la implementación de la unidad didáctica impartida durante las prácticas, que incluye una breve descripción del centro y de los alumnos.

Los dos últimos apartados, forman el grueso del trabajo. La sección 4, está formada por aquellas referencias, escritos, publicaciones e innovaciones realizadas sobre la enseñanza y el aprendizaje de las distribuciones binomial y normal, clasificando los resultados en las diferentes facetas que propone la teoría de la idoneidad didáctica: facetas epistémica-ecológica, cognitiva-afectiva e interaccional-mediacional. En la sección 5 se recoge la valoración y el análisis de la idoneidad didáctica del proceso de enseñanza vivido basado en todo lo anterior, con objeto de identificar propuestas fundamentadas de mejora de la unidad didáctica.

2. PROBLEMA, MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA

En esta sección describimos el marco teórico que se va a usar, las cuestiones centrales de nuestra indagación y la metodología que aplicaremos, para estudiar la idoneidad didáctica del proceso de enseñanza vivido, orientado a la identificación de propuestas fundamentadas de cambio.

Dado que la emisión de un juicio sobre la idoneidad de un proceso de enseñanza - aprendizaje requiere establecer previamente un marco de referencia hemos procedido (sección 4) a buscar y sintetizar publicaciones de innovaciones e investigaciones realizadas sobre la enseñanza y aprendizaje de las distribuciones binomial y normal, clasificando los resultados en las facetas epistémica-ecológica, cognitiva-afectiva e interaccional-mediacional, según propone la teoría de la idoneidad didáctica.

Como indican Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006), la investigación en la didáctica de los procesos de enseñanza de las matemáticas, con frecuencia se ha centrado en describir los "aspectos cognitivos del aprendizaje, pensamiento del profesor, etc.". Consideran, sin embargo, que es "necesario abordar de manera sistemática la cuestión tecnológica del diseño, desarrollo y evaluación de propuestas de intervención en el aula". Para ello, la Didáctica de la Matemática debería aportar conocimientos para el análisis de:

- La adaptación y pertinencia de los contenidos matemáticos a un determinado proyecto educativo.

- Los medios tecnológicos y temporales adecuados para la puesta en marcha de un proceso de estudio matemático.

- El tipo de interacción entre profesor y alumnos que permita identificar y resolver las dificultades y conflictos en los procesos de estudio matemático.

- La adaptación entre los objetivos formativos y las capacidades y competencias previas de los alumnos, así como a sus intereses, afectividad y motivaciones.

- La pertinencia de los significados pretendidos (e implementados), de los medios usados y de los patrones de interacción al proyecto educativo de la escuela y el contexto social en que se desarrolla el proceso de estudio.

Es decir, criterios que ayuden a determinar en qué medida un proceso de estudio reúna ciertas características que permita calificarlo como "idóneo" para los fines pretendidos.

A estas ideas les podemos añadir el papel que juega la reflexión sobre la experiencia como medio para estimular el aprendizaje. Como indican Godino y Batanero (2008), el valor de la reflexión sobre la experiencia como un medio para estimular el aprendizaje ha sido destacado desde hace varias décadas. Schön (1983) describió la reflexión como "una continua interacción entre el pensamiento y la acción" (p. 281); y describió al "práctico reflexivo" como la persona que "reflexiona sobre las comprensiones implícitas en la propia acción, que las hace explícitas, las critica, reestructura y aplica en la acción futura" (p. 50).

En trabajos recientes de diversos campos se ha introducido el concepto de "Reflexión guiada" como un proceso de indagación innovador en el que el práctico es asistido por un mentor (o "guía") mediante un proceso de auto-indagación, desarrollo, y aprendizaje a través de la reflexión, con el fin de llegar a ser enteramente efectivo. También en el campo de la formación de profesores se encuentran referencias en las que se informan de investigaciones en las que se desarrollan y experimentan técnicas específicas de "reflexión guiada" (Nolan, 2008).

Así es como nace la noción de idoneidad didáctica, como un instrumento para el diseño y el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Este marco teórico, dimensiones, criterios y desglose operativo han sido introducidos por Godino y colaboradores en diversos trabajos (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; Godino, 2011; Godino y Neto, 2013) como herramientas que permiten el paso de una didáctica descriptiva a una didáctica orientada a la intervención efectiva en el aula. Tales criterios citados anteriormente que dan forma al concepto de idoneidad didáctica, se sintetizan de la siguiente manera (Godino y Neto, 2013):

Idoneidad epistémica, requiere que las matemáticas enseñadas sean unas "buenas matemáticas". Se puede aumentar el grado de idoneidad presentando a los alumnos una muestra representativa y articulada de problemas de diversos tipos (contextualizados, con diferentes niveles de dificultad, etc.). Se debe procurar el uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico...), y traducciones y conversiones entre los mismos; de modo que el nivel del lenguaje matemático utilizado sea adecuado y que las definiciones y procedimientos estén clara y correctamente enunciados y adaptados al nivel educativo a que se dirigen. Hay que asegurar que se presentan los enunciados y procedimientos básicos del tema, adecuando asimismo las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen; estableciendo relaciones y conexiones significativas entre las definiciones, propiedades, problemas del tema estudiado, etc.

Idoneidad cognitiva, expresa el grado en que los aprendizajes pretendidos/ implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los aprendizajes logrados a los pretendidos/ implementados. Se puede aumentar su grado asegurándonos, por una parte, que los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema y, por otra parte, que los contenidos que se pretenden enseñar se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable). Esto implica incluir actividades de ampliación y de refuerzo, realizando una evaluación formativa durante el proceso de enseñanza-aprendizaje que nos asegure que los alumnos se han apropiado de los contenidos enseñados.

Idoneidad interaccional, grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje. Se puede aumentar su grado asegurándonos que el profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, haciendo un uso correcto de la pizarra, poniendo suficiente énfasis en los conceptos clave del tema, etc.). Se ha de procurar reconocer y resolver los conflictos de significado de los alumnos; utilizando diversos recursos retóricos y argumentativos para captar, implicar, etc. a los alumnos. Hay que facilitar la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase y no la exclusión; favoreciendo el diálogo y comunicación entre los estudiantes; contemplando momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio.

Idoneidad mediacional, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. Se puede aumentar su grado usando materiales manipulativos e informáticos; tratando que las definiciones y propiedades sean contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones; invirtiendo el tiempo en los contenidos más importantes o nucleares del tema e invirtiendo el tiempo en los contenidos que presentan más dificultad de comprensión.

Idoneidad afectiva, grado de implicación (interés, motivación) del alumnado en el proceso de estudio. Se puede aumentar su grado seleccionando tareas de interés para los alumnos, mostrando la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional;

promoviendo la implicación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc.; favoreciendo la argumentación en situaciones de igualdad de manera que el argumento se valore en sí mismo y no por quién lo dice; promoviendo la autoestima evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas, etc.

Idoneidad ecológica, grado de adaptación del proceso de estudio al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social, etc. Se puede aumentar su grado asegurando que los contenidos enseñados se corresponden con las directrices curriculares; asegurando que dichos contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes; procurando que los contenidos que se enseñan se relacionan con otros contenidos matemáticos y de otras disciplinas, etc.

Así, el problema que abordamos en este trabajo se puede formular en los siguientes términos:

-Valorar el grado de idoneidad didáctica del proceso de enseñanza-aprendizaje sobre las distribuciones binomial y normal en 2º de Bachillerato.

-Identificar cambios que se deberían introducir en el diseño e implementación del proceso de estudio para incrementar su idoneidad didáctica.

En el marco de la teoría de la idoneidad didáctica se establece que para poder emitir un juicio fundamentado sobre la idoneidad didáctica de un proceso de estudio matemático es imprescindible realizar una reconstrucción de los significados de referencia didáctica del tema correspondiente. Ello requiere proceder a una revisión sistemática de los resultados de las innovaciones e investigaciones realizadas en educación matemática sobre los aspectos epistémicos, ecológicos, cognitivos, afectivos, interaccionales y mediacionales. Lo que nos lleva a la siguiente cuestión previa:

-¿Cuáles son los resultados de las innovaciones e investigaciones previas realizadas sobre la enseñanza - aprendizaje de las distribuciones binomial y normal?

Estas serán las cuestiones que abordaremos en las siguientes secciones del trabajo.

Empezando primero por una descripción de la experiencia de enseñanza previa.

Para responder a estas cuestiones seguimos un proceso metodológico similar al desarrollado en Posadas y Godino (2014).

3. DESCRIPCIÓN DE UNA EXPERIENCIA DE ENSEÑANZA EN 2º DE BACHILLERATO

En el periodo de prácticas, he tenido la oportunidad de participar como docente en varios grupos de diferentes niveles e impartiendo distintas asignaturas, así como de observar cómo funciona un centro educativo. Hemos elegido el curso de 2º de Bachillerato porque ha sido el curso donde he asumido un cierto grado de responsabilidad en la enseñanza. Por este motivo, centraremos la reflexión en este curso y en el contenido matemático que en las semanas correspondientes les tocaba estudiar.

3.1. CARACTERÍSTICAS DEL CENTRO Y DEL GRUPO CLASE

El instituto imparte la etapa de Bachillerato distribuida en cuatro líneas por curso, con las modalidades de Ciencias y Tecnología, Humanidades y Ciencias Sociales. El alumnado de Bachillerato procede en su gran mayoría del propio centro a los que hay que añadir los procedentes de otros institutos cercanos. La inmensa mayoría son de nacionalidad española. Solamente hay un pequeño grupo muy reducido de alumnos extranjeros de diversa procedencia. En el curso actual, el centro cuenta con un profesorado cualificado y con experiencia, que se adapta al nuevo modelo educativo.

Como hemos mencionado antes, he impartido la unidad didáctica sobre la que voy a reflexionar en una clase de 2º de Bachillerato. Este grupo es muy diverso debido a que la asignatura es de carácter optativo, y por tanto la pueden cursar alumnos procedentes de cualquier especialidad. En concreto, en la clase hay 24 alumnos, de los cuales 3 vienen de la rama tecnológica, 5 de Biología y 16 de Ciencias Sociales. Esta distribución de los alumnos, hace que en cuestión de motivación haya bastantes desigualdades en el aula; los alumnos de CC.SS, que forman la gran mayoría, han visto ya en otra asignatura los mismos contenidos, esto es bueno ya que permite ampliar y profundizar más, pero por otro lado, los alumnos de la rama de Ciencias no los han visto nunca, lo que conlleva a empezar desde cero y que los anteriores se “aburran”.

A pesar de estas diferencias, quitando uno o dos casos, el comportamiento en el aula es bueno. Mientras estuve con ellos, pusieron bastante interés y participaron en la medida en que yo les iba pidiendo. Según ellos me comentaron, están poco acostumbrados a salir a la pizarra, lo que hizo que en la mayoría de ejercicios fuera yo misma la que los corrigiera.

En cuanto a las potencialidades de aprendizaje, todo profesor estaría bastante cómodo con el grupo porque pese a las diferentes motivaciones de los alumnos, en general tienen todos muchas posibilidades, además el hecho de ser su último año en el instituto lo potencia. Como excepción, dos o tres alumnos con bastantes dificultades debido al poco nivel con el que vienen de cursos anteriores, a lo que se suma una ínfima motivación por la asignatura.

Otra característica a destacar de la clase, es la facilidad que tienen los alumnos para faltar a clase. Por regla general cada día hay alguna falta de asistencia, incluidos días importantes como las sesiones previas al examen. Este hecho provoca un desajuste de control del temario por parte de los alumnos que en algunos momentos nos hizo tener que repetir ciertos ejercicios o partes de teoría.

En cuanto al comportamiento, la mayoría de los alumnos han sido respetuosos conmigo y han colaborado haciendo las tareas que les dejaba asignadas. En algunos momentos han estado más revoltosos y hablando entre ellos, debido en mi opinión a que estábamos explicando conceptos que ellos conocían de sobra.

3.2. DISEÑO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

En este apartado se presentan los contenidos tratados en el periodo de prácticas, primero desde un punto de vista teórico por medio del marco curricular vigente durante la experiencia, y después desde un punto de vista práctico con los objetivos a lograr durante el transcurso de la unidad didáctica y la secuenciación de las actividades y los contenidos. Posteriormente, hacemos una implementación del estudio que consiste en describir el día a día de una clase, cómo se ha hecho, qué material se ha usado, etc. Para finalizar, se ha recogido información de los resultados que han tenido las pruebas de evaluación realizadas a los alumnos para valorar el grado de consecución de los objetivos propuestos.

3.2.1 Marco curricular

Los contenidos relacionados con el tema a tratar están recogidos en el RD 1467/2007 del 2 de Noviembre; que se encuentran en el Bloque de Estadística y Probabilidad que es el tercero en el caso de los alumnos que cursan Matemáticas Aplicadas a las CC.SS. y el cuarto bloque para los que cursan Matemáticas, pero en este caso pertenecientes a Matemáticas I. A continuación listamos el conjunto de contenidos y criterios de evaluación comentados.

Como he mencionado anteriormente, aun siendo los contenidos relativos al estudio del tema de las Distribuciones Binomial y Normal propios del primer curso de Bachillerato, en el instituto donde he realizado las prácticas se dan en la asignatura Estadística y Probabilidad, de carácter optativo en segundo de Bachillerato. Este es:

"Distribuciones binomial y normal como herramienta para asignar probabilidades a sucesos"

El criterio de evaluación correspondiente a este único contenido es:

"Asignar probabilidades a sucesos correspondientes a fenómenos aleatorios simples y compuestos y utilizar técnicas estadísticas elementales para tomar decisiones ante situaciones que se ajusten a una distribución de probabilidad binomial o normal".

En este criterio se pretende medir la capacidad para determinar la probabilidad de un suceso, utilizando diferentes técnicas, analizar una situación y decidir la opción más conveniente. También se pretende comprobar la capacidad para estimar y asociar los parámetros relacionados con la correlación y la regresión con las situaciones y relaciones que miden.

Sin embargo, si los alumnos de la asignatura en la que intervine durante las prácticas cursan Matemáticas Aplicadas a las CC.SS., los contenidos están repartidos en los dos cursos. Estos son:

- *Asignación de probabilidades a sucesos. Distribuciones de probabilidad binomial y normal.*

- *Implicaciones prácticas de los teoremas: Central del límite, de aproximación de la Binomial a la Normal y Ley de los Grandes Números.*

- *Problemas relacionados con la elección de las muestras. Condiciones de representatividad. Parámetros de una población.*

- *Distribuciones de probabilidad de las medias y proporciones muestrales.*

De igual manera, estos son los criterios de evaluación correspondientes:

- *Utilizar técnicas estadísticas elementales para tomar decisiones ante situaciones que se ajusten a una distribución de probabilidad binomial o normal.*

Se pretende evaluar si, mediante el uso de las tablas de las distribuciones normal y binomial, los alumnos son capaces de determinar la probabilidad de un suceso, analizar una situación y decidir la opción más adecuada.

-*Diseñar y desarrollar estudios estadísticos de fenómenos sociales que permitan estimar parámetros con una fiabilidad y exactitud prefijadas, determinar el* *tipo de distribución e inferir conclusiones acerca del comportamiento de la población estudiada.*

Se pretende comprobar la capacidad para identificar si la población de estudio es normal y medir la competencia para determinar el tipo y tamaño muestral, establecer un intervalo de confianza para μ y p, según que la población sea Normal o Binomial, y determinar si la diferencia de medias o proporciones entre dos poblaciones o respecto de un valor determinado, es significativa. Este criterio lleva implícita la valoración de la destreza para utilizar distribuciones de probabilidad y la capacidad para inferir conclusiones a partir de los datos obtenidos.

Aun cursando modalidades distintas de Bachillerato, en clase el profesor de la asignatura ha dado contenidos que pertenecen tanto a la asignatura de Matemáticas I como a las de Matemáticas Aplicadas a las CC.SS. I y II. Por tanto los requisitos previos también son los mismos:

- Estadística descriptiva unidimensional. Tipos de variables. Métodos estadísticos. Tablas y gráficos. Parámetros estadísticos de localización, de dispersión y de posición. *(Matemáticas Aplicadas a las CC.SS. I).*

- Distribuciones bidimensionales. Relaciones entre dos variables estadísticas. Regresión lineal. *(Matemáticas I).*

- Distribuciones bidimensionales. Interpretación de fenómenos sociales y económicos en los que intervienen dos variables a partir de la representación gráfica de una nube de puntos. Grado de relación entre dos variables estadísticas. Regresión lineal. Extrapolación de resultados. *(Matemáticas Aplicadas a las CC.SS. I).*

- Estudio de la probabilidad compuesta, condicionada, total y a posteriori. *(Matemáticas I).*

- Profundización en los conceptos de probabilidades a priori y a posteriori, probabilidad compuesta, condicionada y total. Teorema de Bayes. *(Matemáticas Aplicadas a las CC.SS. II).*

En resumen, el estudio de las distribuciones Binomial y Normal exige conocer anteriormente qué es una variable aleatoria, qué tipos de variables hay y qué parámetros estadísticos las caracterizan. Los alumnos de la modalidad de Ciencias y Tecnología se encontrarán en esta asignatura por primera vez con ellos (en unidades anteriores) y los de Ciencias Sociales lo habrán dado en el curso anterior en la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las CC.SS. I.

A partir de ahora, cuando me refiera a contenidos, criterios de evaluación y objetivos de la unidad que voy a tratar en este documento, no haré distinción sobre modalidad a la que pertenece el alumno, tomando una combinación de ambas en cada ítem a tratar.

3.2.2 Objetivos.

Con esta unidad didáctica se ha pretendido que los alumnos alcancen los siguientes objetivos:

-Distinguir entre variables aleatorias discretas y continuas.

-Comprender el modelo teórico que es la Distribución Binomial, así como conocer y utilizar fórmulas y tablas para resolver problemas.

-Comprender el modelo teórico que es la distribución Normal y entender su importancia. Conocer cómo se tipifica una variable aleatoria normal y cómo utilizar fórmulas y tablas para resolver problemas.

-Aprender a resolver y justificar problemas en los que hay que aproximar una Binomial a una Normal.

-Resolver problemas con Distribuciones Muestrales de media y de proporción muestral.

3.2.3 Contenidos, actividades y secuenciación

Aunque en el periodo de prácticas he tenido la oportunidad de observar y participar en diversos temas matemáticos, la unidad que describo y analizo se centra en el estudio de las Distribuciones Binomial y Normal. Dentro de este tema, se han desarrollado las dos distribuciones (binomial y normal), así como la resolución de problemas contextualizados mediante estas distribuciones.

La unidad está distribuida en 9 sesiones donde, además de las explicaciones, se han hecho ejercicios, y se ha realizado un examen de evaluación del trimestre, para así ver si los alumnos han comprendido el tema. A continuación detallo estas sesiones:

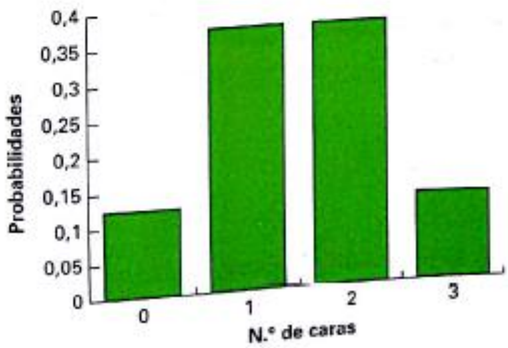
SESIÓN 1	Distribuciones Discretas: concepto, función de probabilidad, función de distribución, parámetros.
	Distribuciones Continuas: concepto, función de densidad, función de distribución, parámetros.
	Experimentos de Bernouilli.
	Distribución Binomial: concepto, parámetros de la distribución, ejemplos.
SESIÓN 2	Función de probabilidad de la Binomial.
	Cálculo de probabilidades de una Binomial.
	Tablas de la Binomial.
	Cambio de los parámetros p y q cuando p>0.6
SESIÓN 3	Distribución Normal: concepto, función de densidad y características.
	Normal reducida. Tablas de la Normal.
	Tipificación.
	Cálculo de probabilidades.
SESIÓN 4	Cálculo de probabilidades.
	Ejercicios. Cálculo de cuartiles.
SESIÓN 5	Aproximación de la Binomial a la Normal: parámetros, condiciones, corrección por continuidad. Ejemplos.
SESIÓN 6	Distribución muestral de la media.
	Distribución muestral de una proporción.
SESIONES 7 Y 8	Ejercicios y repaso de esta unidad.
SESIÓN 9	EXAMEN DE EVALUACIÓN

Los apuntes que he seguido en clase, son de Javier Pérez Olano (s.f.), proporcionados por el profesor que da la asignatura, aunque algunos ejercicios y ejemplos los he sacado del libro que tienen los alumnos, Estadística: Guía didáctica (2001), ambos documentos se encuentran en los anexos. Para completar, les preparé una relación de ejercicios bastante amplia donde estuvieran reflejados todos los contenidos de la unidad que les sirviera como trabajo de repaso y refuerzo, en algunos casos, de cara a la prueba final.

En las figuras 1, 2 y 3 se pueden ver algunos ejercicios y ejemplos tomados del libro.

Vamos a calcular la función de probabilidad y representar la gráfica asociada al **ejemplo 1:**

Resultados posibles	Número de caras x_i	Distribución de probabilidad
xxx	0	$f(0) = p[X = 0] = 1/8 = 0{,}1250$
xxc xcx cxx	1	$f(1) = p[X = 1] = 3/8 = 0{,}3750$
ccx cxc xcc	2	$f(2) = p[X = 2] = 3/8 = 0{,}3750$
ccc	3	$f(3) = p[X = 3] = 1/8 = 0{,}1250$



Luego la probabilidad de obtener una o dos caras será:

$$p[X = 1 \text{ o } X = 2] = p[X = 1] + p[X = 2] = 6/8$$

Figura 1: Introducción a la Distribución Binomial, mediante las funciones de probabilidad de variables aleatorias discretas.

- Uso de la tabla N(0,1).

En dicha tabla, TABLA 4 del anexo I, aparece la $p[X \le x_0]$ con x_0 positivo. Para ello basta con buscar en la primera columna los valores de la variable desde 0,0 hasta 3,9 y la primera fila son valores desde 0,00 a 0,09.

La intersección de la fila con la columna nos da el valor de la probabilidad. En caso de no aparecer, se interpola.

Para ello distinguiremos dos casos:

a) Conocemos los puntos y deseamos conocer la probabilidad.

b) Conocemos la probabilidad y deseamos conocer los puntos.

OBSERVA

La probabilidad de que la variable tome exactamente un valor es 0, es decir, $p[X < x_0] = p[X \le x_0]$ o $p[X > x_0] = p[X \ge x_0]$.

Figura 2: Uso de tablas de Distribución Normal Tipificada

Volvemos al **ejemplo 1** para resolver la tercera cuestión:

Si deseamos aproximar la distribución B(200,1/2) por una normal, tendríamos una distribución normal de media $n \cdot p = 200 \cdot 1/2 = 100$ y varianza

$$n \cdot p \cdot q = 200 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 50$$

Luego la distribución normal que aproxima a B(200,1/2) es N(100, 7,05).

Entonces podemos calcular la probabilidad de que X sea igual a 30 caras, comparando ambas distribuciones:

$$p[X = 30] = \binom{200}{30}\left(\frac{1}{2}\right)^{200} = 2,4595 \cdot 10^{-25}$$

Si deseamos calcular dicha probabilidad por la aproximación normal, deberemos calcular $p[29,5 \le Y \le 30,5]$, donde Y sigue una distribución N(50, 7,05). Ahora bien, deberemos tipificar dicha variable para poder utilizar las tablas de la N(0,1).

$$p[29,5 \le Y \le 30,5] = p\left(\frac{29,5-50}{7,05} \le \frac{Y-50}{7,05} \le \frac{30,5-50}{7,05}\right) =$$

$$= p[-2,91 \le Z \le -2,77]$$

donde Z sigue una N(0,1).

$$p[-2,91 \le Z \le -2,77] = p[Z \le -2,77] - p[Z \le -2,91] =$$
$$= p[Z \le 2,91] - p[Z \le 2,77] = 0,9982 - 0,9972 = 0,001$$

Luego la probabilidad de obtener 30 caras es 0,001.

Figura 3: Ejemplo de una aproximación de la binomial a la normal

Se puede ver cómo el libro de texto utilizado es bastante antiguo (2001) y a pesar de eso tiene unos ejemplos muy ilustrativos y explicativos de los contenidos a tratar. Al tratarse de un tema que recoge todas las distribuciones en general, donde incluye las que son objeto de este trabajo, estos ejemplos se quedan un poco cortos.

3.3. IMPLEMENTACIÓN DEL ESTUDIO

El día a día de la clase fue bastante normal. Durante las primeras sesiones, las clases empezaban con explicación de los contenidos correspondientes a ese día, intercalando con ejemplos cortos. Las siguientes sesiones, sí que empezábamos corrigiendo ejercicios en la pizarra y preguntando las dudas que tuvieran.

Cuando se explicaba materia nueva, como no he seguido el libro, los alumnos copiaban todo lo que yo iba escribiendo en la pizarra. Durante la explicación, les iba lanzando preguntas para intentar adelantarme a lo que estaba escribiendo y así que ellos probaran a "adivinar" el contenido. Además, también les iba relacionando lo que se estaba dando con lo que ya sabían. Por ejemplo, la primera sesión debía ser un mero repaso, ya que en unidades anteriores habían estudiado las variables aleatorias y sus diferentes distribuciones.

Por último, para fomentar el trabajo individual y un mayor grado de consecución de objetivos, les proponía una serie de problemas o ejercicios de la relación para afianzar los conceptos nuevos.

La introducción a la unidad se realizó con una motivación que justificara el porqué de las nuevas distribuciones, partimos de la base de que ellos ya sabían calcular probabilidades de variables aleatorias y tablas de distribuciones. Esta motivación fue que el fin que tiene la Estadística es estudiar poblaciones que, generalmente, no son pequeñas. Es decir, todo el que trabaja con Estadística, trabaja con miles de datos, y ni los ordenadores podrías hacer las operaciones que ellos saben debido a la gran cantidad de información. Para eso están las distribuciones, para modelizar las poblaciones a estudiar y simplificar los cálculos.

La Distribución Binomial fue introducida y justificada por medio de los experimentos de Bernouilli, es decir, identificamos los parámetros importantes (número de repeticiones *n*, probabilidad de éxito *p* y de fracaso *q*) y luego construimos la distribución, basándonos en que repetir un experimento de Bernouilli tantas veces como se desee puede ser bastante tedioso en la mayoría de los casos. La figura 4 muestra la presentación de la distribución binomial en los apuntes de la asignatura.

3.2. La distribución binomial o de Bernoulli

La distribución binomial está asociada a experimentos del siguiente tipo:

- Realizamos n veces cierto experimento en el que consideramos sólo la posibilidad de éxito o fracaso.
- La obtención de éxito o fracaso en cada ocasión es independiente de la obtención de éxito o fracaso en las demás ocasiones.
- La probabilidad de obtener éxito o fracaso siempre es la misma en cada ocasión.

Veámoslo con un *ejemplo*

Tiramos un dado 7 veces y contamos el número de cincos que obtenemos. ¿Cuál es la probabilidad de obtener tres cincos?.

Este es un típico ejemplo de distribución binomial, pues estamos repitiendo 7 veces el experimento de lanzar un dado. ¿Cuál es nuestro éxito?.

Evidentemente, sacar un 5, que es en lo que nos fijamos.

El fracaso, por tanto, será no sacar 5, sino sacar cualquier otro número.

Por tanto, Éxito = E = "sacar un 5" $\Longrightarrow p(E) = \dfrac{1}{6}$

Fracaso = F = "no sacar un 5" $\Longrightarrow p(F) = \dfrac{5}{6}$

Figura 4: La distribución binomial

La Distribución Normal fue más difícil de justificar ya que al tratarse de una distribución continua, a los estudiantes les resulta más difícil porque los de Sociales no saben integrar. Simplemente se introdujo diciendo que hay muchos fenómenos a los que da explicación, y que es la más importante de las distribuciones estadísticas. Lo vemos en la figura 5.

3.3. La distribución Normal

Al estudiar aspectos tan cotidianos como:

- Caracteres morfológicos de individuos (personas, animales, plantas) de una misma raza. como tallas, pesos, envergaduras, etc.
- Caracteres fisiológicos, como el efecto de una misma dosis de un fármaco, o de una misma cantidad de abono.
- Caracteres sociológicos, como el consumo de ciertos productos por individuos de un mismo grupo humano.
- Caracteres psicológicos, como el cociente intelectual, grado de adaptación a un medio.
- Caracteres físicos, como la resistencia a la rotura de ciertas piezas. . .

Figura 5: Introducción a la distribución normal

Se realizaron bastantes ejemplos para que los alumnos aprendieran a manejar las tablas de probabilidades, a calcular probabilidades acumuladas. También ejemplos donde se trabaja al revés, dada una probabilidad, calcular el valor de la variable.

Después de tener controladas las dos distribuciones, con todos los “ejercicios tipo” hechos en clase, pasamos a lo que es para mí la parte más importante de este tema, que es el uso del Teorema Central del Límite para la aproximación de la distribución binomial a la distribución normal. Básicamente, lo que se les explicó fue que el teorema nos deja una serie de condiciones que tenemos que comprobar antes de poder realizar la aproximación. En la figura 6 se ve la motivación con la que se introduce este tipo de cálculos y las condiciones proporcionadas por el teorema.

Para finalizar con la unidad, dimos las distribuciones muestrales de la media y la proporción muestral. Consistió simplemente en recordar la parte de muestreo que habían dado en el tema anterior y ver qué distribución siguen. Además esta parte es con la que enlazamos con lo que resta del curso, intervalos de confianza y test de hipótesis para la media y la proporción de una variable aleatoria.

Las sesiones siguientes a esta consistieron en hacer ejercicios de todo lo que habían visto en el trimestre, ya que el examen de evaluación lo incluye todo. En total fueron siete sesiones de ejercicios, al principio hechos por ellos en la pizarra y al final hechos por mí, ya que fueron perdiendo el interés.

El día anterior al examen, el profesor les prepara dos exámenes parecidos y los mete en dos sobres. Los alumnos eligen un sobre y hacen el examen en clase, pudiendo mirar apuntes y comentarlo. Al día siguiente hacen el sobre no elegido, siendo este la prueba oficial.

Es un hecho comprobado que cuando tenemos una distribución Bin(n;p), a medida que n crece, es difícil hacer uso de las fórmulas y/o tablas.

Por *ejemplo*, tiramos un dado 100 veces, calcular la probabilidad de obtener entre 20 y 33 cincos(inclusive).

Si éxito = obtener cinco entonces $p = \frac{1}{6}$ y fracaso = no obtener cinco y $q = \frac{5}{6}$.

Tenemos una $Bin\left(100; \frac{1}{6}\right)$, y nos piden $p(20 \leq X \leq 33)$.

Es inviable aplicar las tablas (pues repetimos el experimento 100 veces) y tampoco la fórmula pues es inviable calcular, por ejemplo,

$$p(X = 32) = \binom{100}{32} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{32} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{68}$$

¿Cómo resolver el problema?. Del siguiente modo:

Teorema Central del Límite:

La distribución binomial Bin(n;p) se aproxima a una curva normal de media $\overline{x} = n \cdot p$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$, cuando n tiende a ∞, es decir, cuando n se hace muy grande.

La aproximación se puede aplicar (es una buena aproximación) sólo si n es grande, en concreto $n \geq 30$ y además $n \cdot p \geq 5$ y $n \cdot q \geq 5$. Si no se cumplen estas condiciones NO podemos aproximar la binomial que tengamos por una distribución normal.

En caso de que podamos aproximar, debemos tener en cuenta que estamos pasando de una variable discreta (binomial) a una continua (normal), y por tanto son distribuciones diferentes. El "precio" que hay que pagar por pasar de una a otra se denomina *"corrección por continuidad"* y consiste en hacer determinados ajustes para que la aproximación realizada sea lo más precisa posible.

Figura 6: Ejemplo explicativo para la aproximación de la binomial a la normal

3.4. RECOGIDA DE INFORMACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS.

Mi experiencia como docente en las prácticas me ha permitido conocer los errores y las dificultades más comunes que suelen cometer los alumnos sobre esta materia, tanto en las dudas que me presentaban durante las explicaciones de clase, como en la corrección del examen de evaluación.

3.4.1. Examen de evaluación del segundo trimestre

Como he apuntado en la distribución de las sesiones, la última clase consistió en la realización del examen de evaluación en donde debían poner en práctica todo lo aprendido durante el trimestre. Señalo que sólo ha habido un examen porque el profesor así lo tiene programado en el curso de segundo de bachillerato.

La figura 7 muestra el examen que propusimos entre el profesor y yo y que los alumnos realizaron:

EXAMEN ESTADÍSTICA 2º BACHILLERATO. SEGUNDA EVALUACIÓN

1.- El 70% de empresas tiene errores en sus activos financieros, el 60% en sus pasivos financieros y el 40% tiene errores en sus activos y pasivos financieros. Obtén razonadamente el porcentaje de empresas sin errores en sus activos, en sus pasivos o en ambos. De una muestra de 500 empresas, ¿cuántas se espera que no tengan errores ni en sus activos ni en sus pasivos financieros? Razona la respuesta.

2.- Lanzando dos dados y sumando los puntos obtenidos, los premios que ofrece el juego son los siguientes:

-Devolución de lo apostado: si la suma es inferior a 4 o superior a 10.

-Doble de lo apostado si se obtiene 5 o 9.

-Cuatro veces lo apostado: si la suma de puntos es 7.

a) Analice si el juego es equitativo o no.

b) Si la apuesta fuera de 1€, realizar la gráfica de la función de probabilidad asociada y, establezca la expresión analítica de la función de distribución así como su gráfica.

c) Si la apuesta es de 36€ y el local dispone de 1.000.000€ y Hacienda le paraliza el juego cada día cuando gane o pierda 100.000€ ese día. ¿Cuántas jugadas podrá realizar cada día, jugando hasta que Hacienda le paralice el juego? ¿Cuántos días tardará en cerrar el local si eso ocurrirá cuando doble su caja o la pierda?

Razona los resultados que te llevan a las respuestas.

3.-Se ha comprobado que el tiempo medio que un adulto resiste sin respirar es de 40 segundos, con una desviación típica de 6.2 segundos, y que los datos anteriores siguen una distribución normal. Si queremos clasificar la población en cuatro grupos de igual tamaño, ¿cuáles serán los tiempos de resistencia que delimitan esos grupos?

4.-El 5% de los libros prestados en una biblioteca de un centro escolar son técnicos. Si se toman los últimos 500 préstamos:

a) Probabilidad de que se hayan prestado entre 25 y 30 libros técnicos.

b) ¿Qué número de libros deja a la derecha una probabilidad del 60%?

c) Si a mediados de mes ya se habían prestado más de 20, ¿qué probabilidad hay de que se presten menos de 40?

5.- En una ciudad de 2000 habitantes está formada por personas de pelo negro, rubio o castaño. Se ha seleccionado mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, una muestra constituida por 28 personas de pelo negro, 32 de pelo rubio y 20 de pelo castaño. Determina cómo es la distribución de la ciudad respecto al color de pelo.

Figura 7: Examen 2ª Evaluación

La manera de puntuar fue la siguiente: se puntuaba de 0 a 10 dependiendo de si estaba respondida correctamente o no, además todas las preguntas tenían el mismo valor. La figura 8 muestra los resultados de las preguntas correspondientes a esta unidad, que son la tercera y la cuarta:

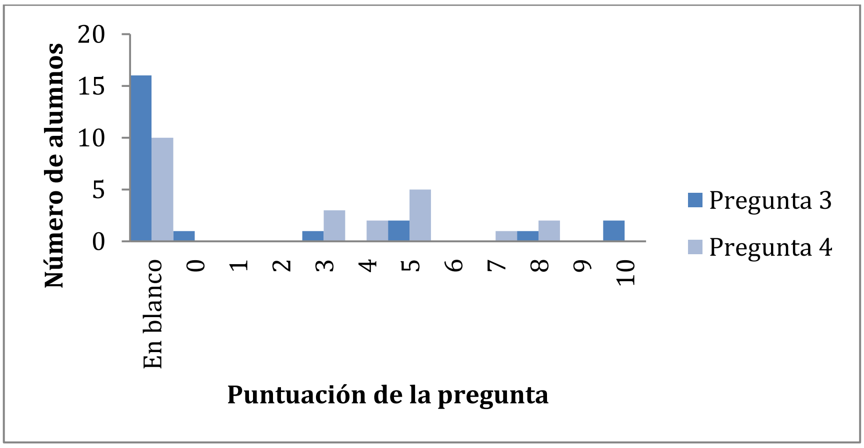


Figura 8: Distribución de notas de las preguntas 3 y 4

Como se puede ver, el examen en general fue bastante difícil, tanto que la mayoría de los alumnos ni respondieron a las preguntas. Las notas fueron muy bajas y el profesor y yo decidimos hacer un examen de recuperación más asequible que detallaremos más adelante. A continuación, describimos algunos de los errores que los alumnos cometieron a la hora de realizar el examen:

Pregunta 3: Se ha comprobado que el tiempo medio que un adulto resiste sin respirar es de 40 segundos, con una desviación típica de 6.2 segundos, y que los datos anteriores siguen una distribución normal. Si queremos clasificar la población en cuatro grupos de igual tamaño, ¿cuáles serán los tiempos de resistencia que delimitan esos grupos?

Esta pregunta esta respondida sólo por 7 de los 23 alumnos. Está claro que la dificultad es evidente. Reconocer que tienen que calcular los cuartiles de la distribución no es fácil, de hecho, de los que la contestaron, excepto 2 alumnos, interpretaron que lo que pedía el problema era calcular: $P(X < 0.25) = k$, en el caso del primer cuartil (y

$P(X < 0.5) = k$, $P(X < 0.75) = k$, en el caso del segundo y el tercer cuartil), totalmente fuera de contexto ya que la variable X es igual al tiempo que un adulto resiste sin respirar y no tiene sentido que sea inferior a 0.25.

Los dos alumnos que sí que supieron que el ejercicio consistía en buscar el valor crítico que dejaba a la derecha el tanto por ciento correspondiente a cada cuartil, plantearon correctamente el ejercicio y la tipificación correspondiente para el cálculo de la probabilidad.

Pregunta 4: El 5% de los libros prestados en una biblioteca de un centro escolar son técnicos. Si se toman los últimos 500 préstamos:

a) Probabilidad de que se hayan prestado entre 25 y 30 libros técnicos.

b) ¿Qué número de libros deja a la derecha una probabilidad del 60%?

c) Si a mediados de mes ya se habían prestado más de 20, ¿qué probabilidad hay de que se presten menos de 40?

Aquí sí que hubo variedad. La mayoría, 13 alumnos, respondieron la pregunta y casi todos bastante bien. El fallo más común fue a la hora de hacer la corrección por continuidad que hay que aplicar al realizar la aproximación de la binomial a la normal. Cinco de los alumnos calcularon directamente: $P(25 < X < 30)$, $P(X < k) = 0.6$ y $P(X > 20 \,/\, X < 40)$, sin sumar o restar 0.5 en cada caso. Del resto que sí lo hizo, cinco se equivocaron en el cálculo de la probabilidad, sólo dos alumnos lo hicieron prácticamente perfecto.

Otro error o, más bien, ausencia de contestación fue en el tercer apartado, en el que no identificaron la probabilidad condicionada.

La figura 9 muestra las preguntas que les planteamos en el examen de recuperación:

EXAMEN DE RECUPERACIÓN. ESTADÍSTICA 2º BACHILLERATO. 2ª EVAL.

1.- Se selecciona al azar una muestra de tres artículos de una caja que contiene 12, de los cuáles 3 son defectuosos. Hallar el valor esperado de artículos defectuosos.

2.- Se venden 5.000 billetes para una rifa a 1€ cada uno. Si el único premio del sorteo es de 1.800€, calcular el resultado que debe esperar una persona que compra 3 billetes.

3.- El diámetro medio de las piezas producidas en una fábrica es de 45mm.

a) Determina su desviación típica sabiendo que la probabilidad de que una pieza tenga su diámetro mayor de 50mm es igual a 0.0062.

b) Si se analizaron 820 piezas, ¿cuántas tendrán el diámetro comprendido entre 39.7 y 43.5mm?

4.- En un centro escolar, hay 500 alumnos matriculados en la asignatura A y 500 alumnos en la asignatura B. En ambas asignaturas hay 400 mujeres. Si queremos una muestra de 100 alumnos para realizar una encuesta con una proporción de mujeres y hombres en cada signatura idéntica a la del centro escolar, ¿cuántos alumnos varones de cada asignatura deberá tener la muestra? Razona la respuesta.

5.- En un experimento, la probabilidad de que ocurra un suceso A es 0.68, la de que ocurra otro suceso B es 0.2, y la de que no ocurra ninguno de los dos es 0.27. Hallar la probabilidad de que:

a) Ocurran los dos a la vez.

b) Ocurra B pero no A.

c) Ocurra B, sabiendo que no ha ocurrido A.

d) ¿Los sucesos A y B son independientes? ¿Son incompatibles?

Razona las respuestas.

Figura 9: Examen de recuperación de la 2ª evaluación.

Como se puede ver, este examen es bastante más sencillo, si ponemos por ejemplo la pregunta de la distribución binomial, en este sólo se pide la media de la distribución, frente a una aproximación a la normal del examen ordinario. La figura 10 muestra los resultados del examen:

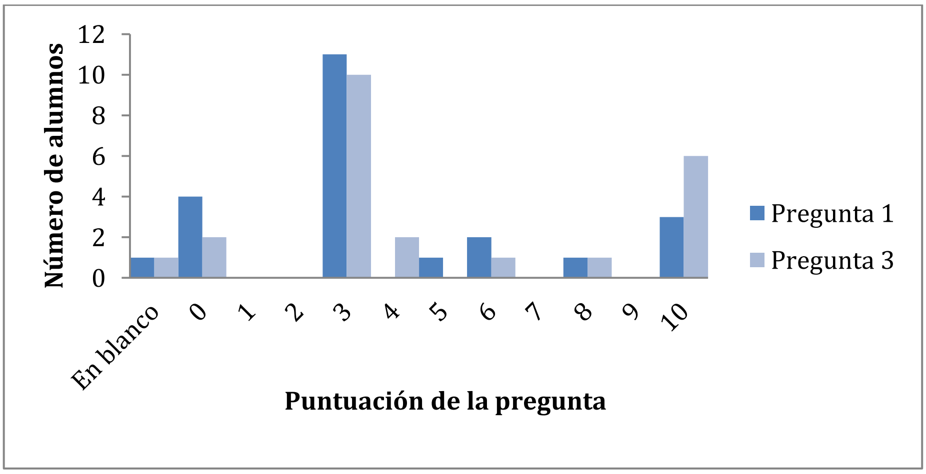


Figura 10: Distribución de notas de las preguntas 1 y 3

Los errores más comunes cometidos en este examen fueron:

Pregunta 1: Se selecciona al azar una muestra de tres artículos de una caja que contiene 12, de los cuáles 3 son defectuosos. Hallar el valor esperado de artículos defectuosos.

La mayoría de los alumnos, confundieron el problema. No entendieron que lo que está descrito en el enunciado son las características de una binomial. Unos diez plantearon un diagrama de árbol, y luego multiplicaron por 3 la probabilidad de ser defectuoso. Sus cálculos fueron: $P(ser\ defectuoso) = \frac{3}{12}, Nº\ esperado\ de\ defectuosos = 3 * \frac{3}{12} = \frac{9}{12} =$ 0.75. Aun siendo correcto el resultado, no entendieron el concepto que se pretendía que trabajar, que el de la media de una distribución binomial.

Pregunta 3: El diámetro medio de las piezas producidas en una fábrica es de 45mm.

a) Determina su desviación típica sabiendo que la probabilidad de que una pieza tenga su diámetro mayor de 50mm es igual a 0.0062.

b) Si se analizaron 820 piezas, ¿cuántas tendrán el diámetro comprendido entre 39.7 y 43.5mm?

En el primer apartado, es de destacar que la mayoría no lo respondieron, por eso casi todos tienen un 3 como puntuación del ejercicio. Creo que el hecho de tener que plantear un problema con un dato que les falta es una gran dificultad.

De lo que lo hicieron, muchos lo plantearon tal cual: $P(X > 50) = 0.0062$, y se pusieron a buscar en la tabla, sin plantearse si quiera el tipificar. Otros sí que tipificaron, $P\left(Z > \frac{50-45}{\sigma}\right) = 0.0062$, sin dase cuenta de que en la tabla sólo aparecen probabilidades a la derecha, y que tenían que tomar complementarios para buscar el valor crítico en la tabla.

El apartado b del ejercicio lo resolvieron más estudiantes. Los que no habían respondido el apartado anterior se inventaron una desviación típica adecuada para poder realizarlo, por lo que no todos los resultados eran iguales. Aquellos que aunque con otra desviación típica lo hicieron bien se les puntuó igual que a los demás. Una vez planteado el problema junto con la tipificación, $P(39.7 < X < 43.5) = P(\frac{39.7-45}{2} < Z < \frac{43.5-45}{2})$, a la hora de calcular se confundieron, ya que queda un intervalo de números negativos: $P(-2.65 < Z < -0.75)$, y en lugar de darle la vuelta usando la propiedad de simetría de la normal, empezaron a calcular con los signos.

Cuando ya tenían la probabilidad calculada (de mejor o peor manera), los alumnos no supieron qué hacer con el 820. Este hecho nos resultó muy curioso a la hora de corregir ya que en el ejercicio anterior sí que supieron que cuando se tiene el valor de la probabilidad del suceso en cuestión, en nuestro caso una medida determinada del diámetro de ciertas piezas, lo multiplicas por la cantidad de elementos de la población y la tienes la proporción adecuada a cada caso particular.

4. CONOCIMIENTOS DIDÁCTICO-MATEMÁTICOS SOBRE LAS DISTRIBUCIONES BINOMIAL Y NORMAL.

Como ya hemos explicado en los apartados anteriores, nuestro objetivo ahora es buscar y sintetizar publicaciones de innovaciones e investigaciones realizadas sobre la enseñanza y el aprendizaje que aporten información relevante sobre las distribuciones binomial y normal, clasificando los resultados en las diferentes facetas de la teoría de la idoneidad: facetas epistémica y ecológica, facetas cognitiva y afectiva y facetas interaccional y mediacional.

4.1. FACETAS EPISTÉMICA Y ECOLÓGICA

En nuestra búsqueda de referencias sobre las facetas epistémica y ecológica del conocimiento didáctico-matemático sobre las distribuciones binomial y normal, hemos encontrado el artículo Batanero, Tauber y Sánchez (2001), donde, expone que unos de los problemas didácticos principales que se encuentran en un curso de estadística a nivel principiante (ya sea en el primer curso universitario como sucede en el artículo citado o en un curso de estadística de bachillerato), es hacer comprensible para los estudiantes el paso del análisis de datos a la inferencia y el estudio de las distribuciones, “la escasez de tiempo disponible y de los conocimientos previos de los estudiantes impide llevar a cabo un estudio completo de la probabilidad”(Batanero, Tauber y Sánchez. 2001. p.1).

Tanto en este artículo como en otros que hemos leído, por ejemplo García y Sánchez (2013) titulado “Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a una situación básica de variable aleatoria y distribución”, destacan y enfatizan en lo necesario que es la comprensión adecuada de que una distribución de probabilidad nunca debe separarse de la idea de que expresa un fenómeno aleatorio de incertidumbre en cuyas manifestaciones se debe reflejar la aleatoriedad y la variación. Aseguran también que pese a la importancia que tiene la distribución normal para la aproximación de otras distribuciones, usando el teorema central del límite, no han "encontrado un estudio sistemático de los errores y dificultades de aprendizaje referidos a este tema" (Batanero, Tauber y Sánchez. 2001. p.2). La tesis doctoral de Tauber (2001) sobre el significado de la distribución normal, se resalta el contraste entre la importancia del conocimiento de distribuciones de probabilidad para estudios superiores y la poca relevancia que le dan a estos temas en la Educación Primaria y Secundaria, a pesar de aparecer en los últimos decretos curriculares.

En la nueva propuesta de currículo de la ley de educación que entra vigor a partir del próximo año, en el curso Matemáticas I ya no se incluye el contenido "Distribuciones binomial y normal como herramienta para asignar probabilidades a sucesos" (que era el único relacionado con la unidad didáctica que estamos estudiando en la modalidad de Ciencias y Tecnología) si no que en éste sólo se trabaja estadística descriptiva. Todos los contenidos se trabajan en Matemáticas II, siendo mucho más completos y parecidos a los de la otra modalidad. Estos son: *Distribución binomial. Caracterización e identificación del modelo. Cálculo de probabilidades. Distribución normal. Tipificación de la distribución normal. Asignación de probabilidades en una distribución normal. Cálculo de probabilidades mediante la aproximación de la distribución binomial por la normal.* (RD 1105/2014. BOE 03-01-2015, Nº3).

Como es de esperar, también en la modalidad de ciencias Sociales se completan y aumentan los contenidos en cada uno de los cursos. En el primero pasa de exigir solamente el uso de técnicas estadísticas que se ajusten a una distribución de probabilidad binomial o normal, a contenidos específicos como "Caracterización e identificación del modelo binomial" o "Cálculo de probabilidades mediante la aproximación de la distribución binomial por la normal" entre otros. En el segundo curso de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales se mantienen los contenidos respecto a la ley anterior.

Sinteticemos a continuación los argumentos que hemos ido recopilando sobre las técnicas y metodologías a seguir en el aprendizaje de las distribuciones binomial y normal. Hemos dividido esta parte en los tres grandes contenidos que tiene la unidad didáctica que estamos tratando: la distribución binomial, la distribución normal y por último la aproximación de la binomial a la normal.

4.1.1 La Distribución Binomial

Aunque no hay mucho escrito sobre la comprensión del significado de la Distribución Binomial (DB), en la mayoría de textos que hemos leído, los autores la definen usando como punto de partida la distribución de Bernouilli, afirmando que es la principal distribución de probabilidad discreta para variables dicotómicas (que sólo pueden tomar dos valores), (Martínez y Marí (2010)). Así, Bernouilli definió dicha distribución como la que corresponde a un experimento que sólo tiene dos posibles resultados, éxito y fracaso, siendo ***p*** la probabilidad constante de que ocurra uno de ellos (éxito) y ***q=1-p*** la de que no ocurra, o que ocurra el otro (fracaso). Se define después la DB como una generalización de la anterior cuando realizamos el mismo experimento ***n*** veces, siendo cada ensayo independiente del anterior. De esta manera los dos parámetros que definen una DB son ***n***=nº de veces que repetimos un experimento y ***p***=probabilidad de éxito de cada ensayo independiente.

Posteriormente, introducen la notación que se va a usar: la variable aleatoria *X*=nº de éxitos, decimos que sigue una DB de parámetros *n* y *p*, y lo representamos por *X→B(n,p),* (Rubio, 2011).

Todos los autores coinciden en la manera de presentar la función de probabilidad asociada a la DB, a pesar de ser una fórmula aparentemente complicada, dan la probabilidad de esta manera: $\boldsymbol{P(X=k)=\binom{n}{k}p^{k}q^{n-k}}$. Después incluyen una serie de detalles y aspectos a tener en cuenta tanto de la fórmula como de la DB:

-El número $\binom{n}{k}$ se lee "n sobre k" y es el número combinatorio n sobre k. Se calcula de la siguiente manera: o bien $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$, o bien con la calculadora pulsando la combinación de teclas $\boxed{\text{n}} + \boxed{\text{nCr}} + \boxed{\text{k}}$.

-Las probabilidades de éxito y de fracaso son complementarias, es decir, *q=1-p* y *p=1-q*, por lo que basta saber una de ellas para calcular la otra. Además, si una variable *X* sigue una *B(n,p)*, entonces $\bar{X}$ sigue una *B(n,q)*.

Por último los autores definen la media y la desviación típica de la población de la siguiente manera: $\bar{x}=n.p\ y\ \sigma=\sqrt{npq}$, (Rubio, 2011); aunque algunos a la media poblacional la denotan como la esperanza de la variable, es decir, $\bar{x}=E(X)$, (Martínez y Marí, 2010).

Otra manera de enseñar esta distribución, es considerar la *B(n, p)* como suma de *n* variables aleatorias idénticamente distribuidas, cada una de las cuales toma un valor *uno* en caso de que el suceso ocurra y *cero* en caso contrario (suma de n variables que siguen una distribución de Bernouilli) (Alvarado y Batanero, s.f.). De esta manera, cuando llega la hora de explicar el teorema central del límite (con la redacción original), la notación ya está introducida. En la figura 11 se puede ver este teorema con la notación que hemos comentado y que procederemos a describir en la sección 4.1.3:

Teorema de Laplace De-Moivre: Sea X_i una variable de Bernoulli y $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ una variable con distribución Binomial, $B(n, p)$ cuya esperanza matemática es $E(S_n)=np$ y cuya varianza es $Var(S_n)=npq$. Cuando n tiende a infinito, la función distribución de S_n tiende a la distribución normal con las mismas media y varianza, esto es $N\ (np, npq)$.

Figura 11: Teorema Central del Límite en su redacción original

(Alvarado y Batanero, s.f., p. 7)

4.1.2 La Distribución Normal

A diferencia del caso anterior, son numerosos los autores que han escrito sobre la Distribución Normal (DN) debido a su relevancia e importancia a la hora de aproximar otras distribuciones. Vamos a seguir la tesis de Tauber, (2001), mencionada anteriormente, donde construye el significado de la DN de una manera distinta a como estamos acostumbrados, ya que plantea problemas previos que justifican el surgimiento de esta distribución.

Los citados problemas en la tesis de Tauber a los que da respuesta la DN son:

- *Ajuste de un modelo a la distribución de datos reales en campos tales como la psicología, biometría, o teoría de errores*. Es decir, "generalizar los conceptos de polígono, diagrama de frecuencias y variable estadística".

- *La distribución normal como modelo aproximado de las distribuciones de variables discretas*. Problema que abordaremos en el siguiente punto del trabajo, apoyándonos en el Teorema Central del Límite.

- *Obtención de la distribución en el muestreo de la media de una distribución normal (distribución exacta)*. Este problema es muy interesante sobre todo porque es muy fácil de explicar a los alumnos, ya que el hecho de estudiar poblaciones muy numerosas es una tarea ardua y complicada y para ello se toman muestras de ésta.

- *Obtención de distribuciones en el muestreo de la media y otros parámetros de poblaciones no necesariamente normales para muestras grandes (distribuciones asintóticas).* Este problema se sale del currículo de Bachillerato pero es igualmente interesante.

- *Estimación por intervalos de confianza y contraste de hipótesis*. Forman una gran parte del currículo antes citado, así como de los requisitos mínimos que tienen que saber los alumnos de cara a las pruebas de acceso a la universidad.

Una vez hecha esta pequeña motivación de porqué es importante estudiar la DN, los autores y, en particular Tauber, pasan a describir los contextos en los que se presenta la distribución. No olvidemos que esta presentación de los contextos no deja de ser un motivo para estudiarla, ya que hay muchas situaciones que son explicadas por medio de una DN. Los contextos más importantes seleccionados por esta autora son: "mediciones físicas en experimentos meteorológicos, mediciones sobre partes manufacturadas, errores en las mediciones científicas, puntuaciones de tests, medidas repetidas de la misma cantidad, características de poblaciones biológicas, pesos de una muestra de adultos, errores en partes manufacturadas".

Veamos ahora una selección de la propuesta que hace Tauber (2001) de las distintas representaciones que tiene la DN.

-**Representaciones simbólicas**:

-*Notación:* X sigue una DN con media μ y desviación típica σ y se escribe $X \rightarrow N(\mu,\sigma)$.

-*Ecuación o fórmula de densidad de la DN*: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x\epsilon\mathbb{R}$

-*Función de distribución de la DN:* $P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz \, , x\epsilon\mathbb{R}$

-*Expresiones que refieren a la distribución normal típica*: Para expresar que una distribución normal es típica se lo hace del siguiente modo: *N(0,1)*, lo cual significa que la media es 0 y la desviación típica es 1.

-*Fórmula de tipificación*: la representación más común es: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, donde Z es la variable tipificada (con distribución *N(0,1)*) correspondiente a la variable X que sigue una $N(\mu,\sigma)$.

-*Formas de expresar la probabilidad en un intervalo*: hemos encontrado diversas maneras de simbolizar la probabilidad en un intervalo cualquiera. Las siguientes son algunas de estas formas:

- Probabilidad para valores menores que uno dado: $P(Z < b)$;
- Probabilidad para valores mayores que uno dado: $P(Z > a) = 1 - P(Z < a)$;

• Probabilidad de un intervalo comprendido entre dos valores: en este ítem es donde hemos encontrado mayor variedad. Por ejemplo: $P(a<Z<b)$, $Pr\{a<X<b\}$, $P(a<X<b)$, con $a< b$, en los tres casos las expresiones se refieren a la probabilidad en un intervalo *(a, b),* sólo que en el primer caso se está refiriendo a una variable normal tipificada *Z* y, en los otros dos casos a una variable normal cualquiera *X*;

• $P(x1<X<x2)$, este caso es una variación del anterior pero la finalidad también es la de expresar la probabilidad entre dos valores.

-Expresiones para realizar el cálculo de probabilidades: Se presentan diversas simbolizaciones del cálculo de probabilidades en un intervalo.

• $P(a < Z < b) = P(Z < b) - P(Z < a)$, esta expresión generalmente nos remite a la representación gráfica del área bajo la curva entre dos valores. Además se debe tener en cuenta que en este caso la expresión se está refiriendo a una variable normal tipificada, por lo cual se da esa expresión debido a que por lo general, las tablas de la normal típica dan la probabilidad correspondiente a todos aquellos valores menores que uno dado.

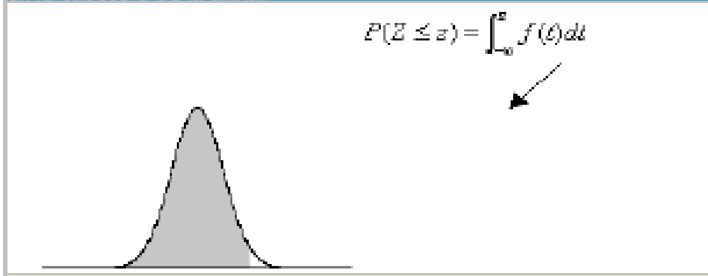
• $P(a < X < b) = F(b) – F(a)$, en este caso se está refiriendo a una variable cualquiera *X* y al expresar *F(x)* nos remite a una función de distribución.

• $P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} N(\mu,\sigma)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$, aquí se da la expresión de cálculo de probabilidad entre dos valores para una variable normal, remitiéndonos a la utilización de integrales. Veamos esta misma expresión utilizando la fórmula de tipificación: $P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_1}^{z_2} e^{\frac{-z^2}{2}}dz = P(z_1 < X < z_2)$.

En este caso la expresión propone el mismo cálculo de probabilidad que la anterior, sólo que en ésta se plantea también la expresión de tipificación por medio de integrales.

-**Representaciones numéricas**: *tablas de probabilidades*. La figura 12 muestra un ejemplo de estas tablas (Pértegas y Pita, 2001).

Tabla 1. Áreas bajo la curva normal estándar. Los valores de la tabla que no se muestran en negrita representan la probabilidad de observar un valor menor o igual a z. La cifra entera y el primer decimal de z se buscan en la primera columna, y el segundo decimal en la cabecera de la tabla.



Segunda cifra decimal del valor de z										
z	**0.00**	**.01**	**.02**	**.03**	**.04**	**.05**	**.06**	**.07**	**.08**	**.09**
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.4878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Figura 12: Tabla de probabilidades de una N(0,1)

-**Representaciones gráficas**: "*Hemos encontrado curvas de densidad, representación del área bajo la curva normal para los valores menores o mayores que un determinado valor o para el área bajo la curva entre dos valores, representación sobre la curva normal de los intervalos centrales y representación de curvas de densidad normales superpuestas*". Las figuras 13, 14, 15 y 16 muestran estas representaciones respectivamente.

$$F(z_1) = P(Z \le z_1) = \int_{-\infty}^{z_1} f(z)\, dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{z_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$$

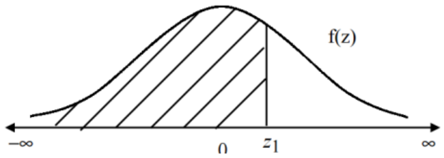


Figura 13: curva para los valores menores que uno dado.

$$\boxed{\alpha = P(Z > z_\alpha) = \int_{z_\alpha}^{\infty} f(z)dz}$$

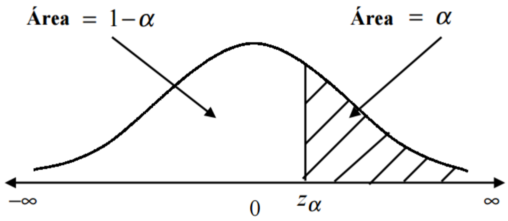


Figura 14: curva para los valores mayores que uno dado.

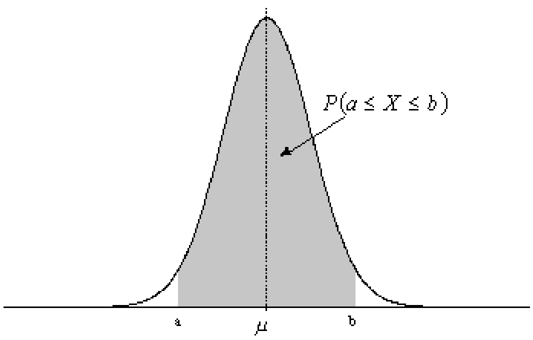


Figura 15: área de la curva entre dos valores.

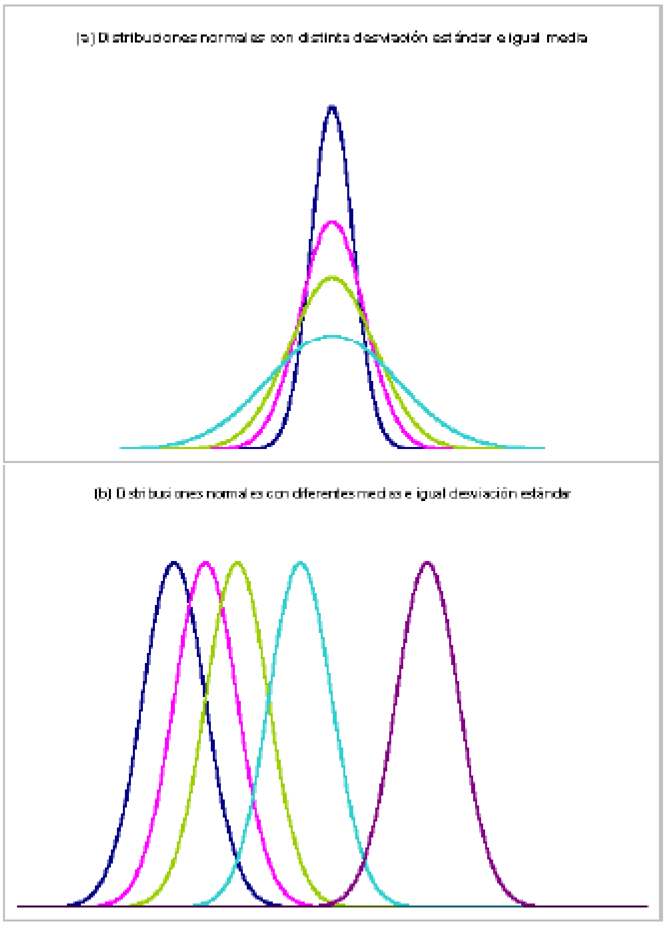


Figura 16: superposición de curvas con diferentes parámetros.

A continuación se presentan las propiedades más relevantes que tiene la DN, que facilitan al alumno el cálculo de probabilidades. Según Tauber estas son:

Propiedades geométricas

Las definimos como aquellas que se derivan del análisis de la gráfica de la función de densidad, tales como simetría y relaciones entre medidas. Sólo hemos seleccionado las más comunes en la etapa de Bachillerato.

Simetría: Hay una serie de propiedades que se derivan del hecho de que la función de densidad es simétrica, debido a que en su fórmula aparece una exponencial al cuadrado. La simetría es importante en la distribución normal pues simplifica el cálculo de áreas. A continuación veremos algunas propiedades derivadas de la simetría:

La distribución normal es simétrica respecto de su eje vertical donde tiene la media. Esta es la propiedad básica pero la hemos encontrado enunciada de diversas maneras que transcribimos a continuación: Las dos áreas, la superior y la inferior son iguales. Es decir, existe la misma proporción de casos por encima y por debajo de la media. En consecuencia, la mediana, que es el punto de una curva de densidad que la divide en áreas iguales, coincide con la media. La mediana es el punto tal que la probabilidad de ser menor a ella es igual a 1/2.

La moda, que es el punto sobre el eje horizontal donde la curva tiene su máximo, ocurre en $x = \mu$ *(media).* Otras formas de expresar esta propiedad que hemos encontrado en los libros de texto han sido: a) El punto de máxima ordenada en la distribución normal será siempre el valor de la media de la distribución; b) en el caso de la distribución normal típica, la máxima altura está en el valor cero del eje X, que es la media de esta distribución.

La media, mediana y moda en las distribuciones simétricas coinciden en un mismo punto, por tanto son iguales en las distribuciones normales. Para la distribución normal típica, la media vale cero. La media de una curva de densidad es el punto de balance, en el cual la curva podría balancearse si fuera un sólido.

4.1.3 Aproximación de la Distribución Binomial a la Distribución Normal

Para finalizar con la faceta epistémica, vamos a centrarnos en el desarrollo de la aproximación de la DB a la DN, usando como apoyo teórico el Teorema Central del Límite, TCL de ahora en adelante. Para la elaboración de esta parte, nos hemos basado en dos documentos (Alvarado y Batanero, 2008; Alvarado y Batanero, s.f.) que hablan sobre el significado de TCL, la aproximación de la DB a la DN y algunas investigaciones sobre el citado teorema. Estos textos no presentan el desarrollo del TCL en sí, si no que evalúan las dificultades que tienen los alumnos a la hora de entenderlo.

En primer lugar, vamos a analizar el problema que origina la necesidad de aproximar las distribuciones. En el cálculo de la DB, $B(n,p)$, interviene términos factoriales que crecen muy rápidamente al aumentar el valor de n. Según Alvarado, (2007), son muchos los matemáticos que, antes de la aparición de los ordenadores, trataron de encontrar aproximaciones para estos valores de n grandes. Fue De Moivre (1667-1754) el que desarrolló este problema con el Teorema Central del Límite.

A continuación presentamos el TCL, según Lorente, (s. f.):

Teorema de Moivre-Laplace: si X es una variable discreta que sigue una distribución binomial de parámetros n y p, $B(n,p)$ y se cumple que:

$-n>10$ $\quad$ $-np>5$ $\quad$ $-nq>5$

resulta una aproximación bastante buena suponer que la variable *X'* (recordemos que en la binomial μ=*np* y $\sigma = \sqrt{npq}$) se aproxima a la variable normal de media *np* y desviación típica $\sqrt{npq}$, *N(np,* $\sqrt{npq}$*)*.

"Resulta mucho más sencillo trabajar con la variable normal X' que con la binomial X, pues recordemos que los valores de la normal están tabulados"

A la hora de aplicar el teorema, no podemos olvidar que estamos aproximando una variable discreta a una continua. Por este motivo tenemos que realizar una corrección que se llama Corrección por continuidad o Corrección de Yates que consiste en:

"*Cuando aproximamos una distribución binomial mediante una normal, estamos convirtiendo una variable X discreta (toma un número determinado de valores) en una continua X' (toma valores en un intervalo).*

Los valores de la probabilidad para valores fijos de la variable continua son cero (ya que sería el área de un punto), y necesitamos definir un intervalo. Para evitar este problema en la aproximación de los valores fijos estos se corrigen (corrección de continuidad o de Yates) sustituyéndolos por un intervalo centrado en el punto y de valor unidad", Lorente (s. f.). La figura 17 muestra las distintas situaciones que se pueden plantear:

$X \Rightarrow B(n,p)$ y $X' \Rightarrow N(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot q})$

- $P(X=a)=P(a-0{,}5 \leq X' \leq a+0{,}5)$
- $P(X \leq a)=P(X' \leq a+0{,}5)$ (para que contenga al punto a)
- $P(X<a)= P(X' \leq a-0{,}5)$ (para que no contenga al punto a)
- $P(X>a)=P(X' \geq a+0{,}5)$ (para que no contenga al punto a)
- $P(X \geq a)=P(X' \geq a-0{,}5)$ (para que contenga al punto a)

$P(a \leq X<b)=P(a-0{,}5 \leq X' \leq b+0{,}5)$ (para que contenga al punto a y no a b)

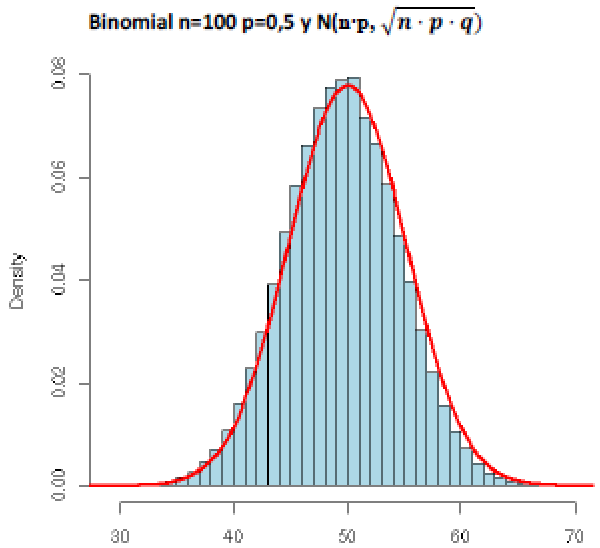


Figura 17: situaciones en las que se corrige el problema de valores fijos en la aproximación.

4.2. FACETAS COGNITIVA Y AFECTIVA

De nuevo, como en el apartado anterior, vamos a dividir esta sección en los tres grandes contenidos que estamos tratando en esta unidad. De cada uno de ellos hablaremos de errores que cometen los alumnos, dificultades, sesgos y niveles de razonamiento.

En cada investigación que se va a exponer, se ve el importante papel que tiene el docente en cuanto al cambio en el razonamiento del estudiante, ya que los resultados son notablemente mejores después de experimentar las sesiones explicativas. Es por eso que el conocimiento de las necesidades y dificultades cognitivas de los estudiantes debería ser imprescindible en la formación de los profesores.

4.2.1 La Distribución Binomial

Para hablar sobre la faceta cognitiva y afectiva del proceso de estudio de la DB, vamos a basarnos en varias investigaciones que hablan sobre niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato en el estudio de la DB.

El primer artículo que vamos a tratar se titula *Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato sobre problemas binomiales*, Landín (2013), donde habla de la influencia que tienen los sesgos cognitivos en la comprensión de problemas binomiales, usando como base para su investigación la resolución de un cuestionario con ocho problemas, entre los que hay algunos que pueden inducir un sesgo, otros que lo evitan y problemas clásicos de libros de texto.

Además, aclara que en la enseñanza es importante saber cómo aprenden los estudiantes, cómo adquieren el conocimiento. El autor propone hacerlo por medio de jerarquías que describan el orden con el que los estudiantes aprenden. Así, el objetivo de Landín es jerarquizar el aprendizaje de los estudiantes de la probabilidad binomial para entender cómo aprenden.

Como antecedentes a su investigación, nos presenta dos estudios relacionados, uno que trata sobre las jerarquías del razonamiento probabilístico, por medio de la Taxonomía SOLO (“Structure of Observed Learning Outcome”), proponiendo algunas modificaciones a este modelo, ya que “*la taxonomía SOLO no prescribe qué hacer con los errores*” de ciertos elementos de conocimiento. El otro estudio habla de la existencia de un sesgo cognitivo al que llaman "la ilusión de la linealidad", "*éste consiste en la tendencia fuerte a aplicar modelos lineales o proporcionales en cualquier lado, aún en situaciones donde no son aplicables*". (Landín, 2013. p.2).

Tanto en esta como en otras investigaciones que ha hecho sobre el tema (Landín y Sánchez, 2010) la metodología que ha seguido ha consistido en elaborar dos cuestionarios, o conjunto de actividades, uno anterior y otro posterior con preguntas comunes con el objetivo de recoger información acerca del razonamiento de los estudiantes sobre problemas o tareas de la DB.

Las conclusiones de este estudio fueron que una parte fundamental de la comprensión de los estudiantes de la DB está basada en el control y desenvoltura de otros conocimientos sobre probabilidad, como la regla del producto de probabilidades y combinaciones. Por otro lado, se hace imprescindible la comprensión de los diagramas de árbol para comprender las reglas anteriores, ya que el nivel de razonamiento que abarca este conocimiento se alcanza por muy pocos estudiantes sin la ayuda de los diagramas. Señala también que el planteamiento de problemas abiertos que permiten respuestas jerarquizadas favorece el razonamiento. Observa también que la redacción de los problemas aumenta la calidad de las respuestas de los estudiantes.

En otro estudio similar y con la misma metodología llevado a cabo por Mayén, Salazar y Sánchez, (2013) destacan la importancia de la instrucción de los estudiantes, que aumenta significativamente el progreso del razonamiento de la DB. Aplicando también la Taxonomía SOLO, concretan qué elementos son clave a la hora de que los estudiantes den respuestas de mejor calidad; estos son el uso del diagrama árbol, coincidiendo con la investigación anterior, y añade el concepto de probabilidad clásica, que "*permita a los estudiantes percibir cuándo una situación-problema es de tipo binomial*". Estos, junto con la regla del producto (que sustituye el diagrama árbol cuando n es grande) y las combinaciones logran el progreso en la comprensión de la DB.

Los tres artículos, Landín (2013), Landín y Sánchez (2010) y Mayén, Salazar y Sánchez (2013) proponen problemas y tareas que fomentan el interés de los estudiantes, y que son fácilmente señaladas por su utilidad en su vida cotidiana y profesional. La figura 18 muestra un ejemplo.

Además no hacen referencia a que haya diferencias entre los sujetos a los que se les ha realizado la investigación (salvo el hecho de que en algunos caso había grupos de profesores), promoviendo la implicación y la argumentación en igualdad.

3. En un hospital hay dos médicos; uno atiende 3 partos al día, mientras que el otro atiende 6 partos al día. Un día hacen una apuesta: observan el número de niños varones que nacen en los partos que cada quien atiende y gana quien en los partos que atiende iguale o rebase el 60% de niños varones (se supone que la probabilidad de que el recién nacido sea varón es igual a la probabilidad de que sea mujer). ¿Quién tiene mayor probabilidad de ganar?

a) El médico que atiende 3 partos tiene más probabilidad de ganar

b) El médico que atiende 6 partos tiene más probabilidad de ganar

c) Ambos tienen la misma probabilidad

Justifica tu respuesta:

Figura 18: ejemplo de un problema propuesto en Landín y Sánchez (2010)

4.2.2 La Distribución Normal

Para desarrollar la faceta cognitiva y afectiva relativa a la DN, vamos a basarnos en la investigación de Batanero, Tauber, y Sánchez (2001), en la cual evalúan el conocimiento adquirido por los estudiantes, comparando el significado institucional de los objetos matemáticos relativos a la DN (desarrollados en la sección 4.1.2) con el significado personal de la distribución construido por los estudiantes.

Como base y marco teórico del estudio, usan la clasificación del significado y comprensión de objetos matemáticos propuesta por Godino (1996) y Godino y Batanero (1998). Proponen estos cinco tipos de elementos:

-*Elementos extensivos*: son aquellos de donde surge el objeto a tratar, en nuestro caso, los elementos extensivos serían los problemas que contextualizan la necesidad de construir la DN, presentados en Tauber (2001).

-*Elementos ostensivos*: son las herramientas y representaciones que nos permiten operar con los problemas y objetos involucrados. Estas representaciones pueden ser gráficas, simbólicas y numéricas como hemos visto. En la investigación suman, además, aquellas representaciones proporcionadas por el ordenador

-*Elementos actuativos*: son los procedimientos y estrategias. En al caso de la DN son la tipificación, el cálculo de valores críticos, áreas bajo la curva, etc.

-*Elementos intensivos*: formados por las propiedades y características del objeto así como por las relaciones con otras definiciones, teoremas y proposiciones.

-*Elementos validativos*: son las argumentaciones necesarias para justificar el objeto.

La metodología implementada para realizar la investigación consistió en la elaboración de dos instrumentos de evaluación, un cuestionario que rellenaran en el aula tradicional y una prueba usando el ordenador, una vez finalizado un periodo de enseñanza de la DN.

Las conclusiones del estudio las presentamos a continuación. "*Los alumnos respondieron correctamente a un promedio del 70% de las preguntas del cuestionario, lo que indica que muchos de los elementos considerados en la enseñanza habían pasado a formar parte del significado personal de los alumnos*". Presentan los elementos sobre los estudiantes muestran una mayor comprensión:

Como elementos extensivos se destacan el ajuste de un modelo a datos continuos y la identificación de qué distribuciones se pueden aproximar mediante una normal.

Los elementos ostensivos que mejor se comprendieron fueron los términos verbales de los diferentes conceptos como: distribución, parámetro, media, etc., mostrando un dominio adecuado. Además reconocen correctamente la gráfica de la función de densidad de la normal, lo que les lleva a afirmar que hay otro tipo de elementos, sobre todo intensivos, que también comprenden, como el concepto función de densidad, propiedades de simetría, variación de la gráfica conforme varían los parámetros y la frecuencia de valores centrales. Uno de los motivos de que los alumnos comprendan tan bien los elementos ostensivos gráficos se debe al uso del ordenador.

Los elementos de tipo actuativo que mejor comprendieron los alumnos fueron la tipificación y el cálculo de inversos, que prácticamente formaban la totalidad del cuestionario.

Los elementos que el cuestionario evaluaba en mayor cantidad fueron los intensivos, ya que se incluían algunos específicos de estadística además de los relacionados con la DN. Estos fueron: los diferentes tipos de variables estadísticas, la DN tipificada, los parámetros de una DN (tanto para la representación de la densidad como para extraer características de la distribución); búsqueda de la moda y posición en la gráfica, y propiedades de simetría y otras geométricas.

Por último los elementos validativos que mejor comprensión tuvieron fueron la aplicación y comprobación de las propiedades y algunos alumnos que se apoyaron en la representación gráfica para justificar sus afirmaciones.

Los elementos de significado que mayor dificultad tuvieron para comprender los resumen en las conclusiones de la investigación como sigue (Batanero, Tauber y Sánchez, 2001, p. 21):

-Interpretación de áreas en histogramas de frecuencia y problemas en el cálculo del área dentro de un intervalo, cuando ello implica el cambio de los extremos de los intervalos.

-Dificultad en discriminar los casos en que una variable cuantitativa discreta puede y no puede ser aproximada por una distribución continua y las implicaciones que esta aproximación tiene.

-Dificultad en recordar y aplicar correctamente los convenios de interpretación de los coeficientes de asimetría y curtosis.

-Dificultad en recordar y aplicar correctamente los convenios de lectura de los elementos constitutivos de un gráfico estadístico.

-Escasa diferenciación entre el modelo teórico y los datos empíricos y dificultad en distinguir cuándo el programa de cálculo se refiere a una u otra distribución, así como no discriminación entre los estadísticos y parámetros. Las actividades propuestas implican el trabajo de modelización y la discriminación de los planos empírico (datos) y teórico (modelo), que los alumnos a veces no llegan a separar y que puede explicar errores en la aplicación de la inferencia (Moses, 1992).

-Dificultad de uso de las opciones del software que pertenecen a un menú secundario y que son, sin embargo esenciales para el análisis.

-Escasa capacidad de argumentación, sobre todo de análisis y síntesis.

4.2.3 Aproximación de la Distribución Binomial a la Distribución Normal

Para este apartado, volvemos a la investigación de Alvarado y Batanero (s.f.), donde exponen las dificultades en la comprensión teórica y práctica de la aproximación de la DB a la DN, y por tanto, del TCL, una vez finalizado un proceso de enseñanza. Como motivación para realizar el estudio señalan la cantidad de situaciones que se modelizan a partir de una DB y cuyo cálculo requiere una aproximación al tener *n suficientemente grande.*

La experiencia la realizaron en un curso de estadística con alumnos que cursaban el segundo año de ingeniería en la Universidad Católica de la Concepción (Chile), dando un total de ocho sesiones de ochenta minutos divididas entre el aula tradicional y la de ordenadores, con una participación de 134 alumnos.

El objetivo central de las sesiones fue la resolución de problemas que surgían de situaciones de la vida cotidiana o la ingeniería. Para ello plantearon actividades para que los alumnos las realizaran en tres tipos de configuraciones: manipulativa (con el objetivo de simular experimentos aleatorios, anotar los resultados y estudiar las variables resultantes), computacional (para poder ampliar el número de repeticiones de los experimentos y poder representar las distribuciones jugando con los parámetros y la idea de aproximación y bondad de ajuste) y algebraica (usando lenguaje simbólico y demostraciones deductivas, apoyándose en el álgebra y el análisis).

Después de que los estudiantes realizaran las actividades propuestas, las propiedades que comprendieron mejor fueron: la importancia del tamaño muestral, la corrección por continuidad, la variación respecto a los parámetros, la mejoría de la aproximación en los valores centrales y las condiciones para que la aproximación sea precisa.

Por otro lado, los errores que los alumnos cometieron con más frecuencia fueron: no comprender la importancia de los parámetros para la rapidez de convergencia, esperar mayor aproximación en los valores alejados de los centrales, dificultad en la aplicación de la corrección por continuidad en el cálculo de probabilidades, no tener en cuenta los parámetros si no sólo el tamaño muestral, entre otros errores cometidos pero en menor cantidad, como por ejemplo en el caso de la figura 19, ejemplo de una de las preguntas que se les planteó y que sólo el 9,7% de los estudiantes contestó correctamente. La mayoría no valoró que una muestra de menor tamaño pudiera dar una mayor probabilidad.

Tabla 5. Item 5 y resultados (n=134)

Ítem 5. La experiencia indica que 50% de todos los estudiantes en un curso cometerán errores de programación, ¿Cuál de estos casos te parece más probable? Indica por qué has elegido esta opción:

	Frecuencia	Porcentaje
a) Que entre los próximos 10 estudiantes seleccionados 8 o más cometan errores de programación.	**13**	9,7
b) Que entre los próximos 100 estudiantes seleccionados 80 o más cometan errores de programación.	12	9,0
c) Las dos cosas anteriores son igual de probables.	74	55,2
No responden	35	26,1

Figura 19: Ejemplo de actividad. Alvarado y Batanero (s.f.). p. 5.

Cuando en lugar de actividades plantearon a los alumnos problemas abiertos (que marcan un nivel más alto en cuanto a razonamiento), los resultados fueron: identificación de la DB por la mayoría de los alumnos y expresión correcta de la probabilidad, algunos errores en la identificación de *n y p, la mayor parte de los alumnos tipifican correctamente*, pero muchos confunden fórmulas, muy pocos aplican la corrección por continuidad de manera correcta, confundiendo el restar 0,5 por sumar o al contrario y errores por el estilo.

Como conclusión al estudio, señalan la alta dificultad que tiene la aproximación de la distribución binomial a la distribución normal, aunque muchos alumnos destacan notablemente sobre todo en la compresión de ambas variables y el efecto de los parámetros. Proponen reforzar la compresión de la corrección por continuidad y relacionar más este tema con el TCL.

4.3. FACETAS INTERACCIONAL Y MEDIACIONAL

En este apartado se resumen las distintas actividades y recursos que han usado los autores de las investigaciones que hemos desarrollado en los apartados anteriores, con el objetivo de que el aprendizaje sea idóneo, interaccional y mediacionalmente hablando, por medio de presentaciones del tema adecuadas y atractivas para los alumnos, medios para resolver los conflictos de significado que puedan presentarse, búsqueda del consenso en el aula, recursos manipulativos e informáticos, temporalización de contenidos adecuada y más descriptores que forman la idoneidad didáctica de estas facetas.

Como hay muy poco escrito sobre los modos de interacción en el aula para unidades como la que estamos trabajando, hemos buscado una alternativa a la enseñanza tradicional en bachillerato que presenta Vallejo (2013) en su trabajo final de máster, que consiste en una propuesta de aprendizaje cooperativo como metodología motivadora. En su trabajo, describe en qué consiste este tipo de aprendizaje, teniendo como marco teórico las competencias PISA, cuáles son los elementos básicos de la metodología y las técnicas más importantes y maneras de organizar el aula. Entre las técnicas del aprendizaje cooperativo, se encuentra la *técnica TAI ("Team Assited Individualization")*, que es una combinación entre la cooperación y la instrucción individualizada, el aprendizaje es personalizado para cada miembro del equipo, para que sea más ajustado a las necesidades personales. Otra es la *técnica de la tutoría entre iguales ("Peer Tutoring")*, estrategia que se adapta a las diferencias individuales ya que al estar por parejas, cada alumno con un rol, el rendimiento de los alumnos es máximo. La *técnica del rompecabezas o puzzle ("Jigsaw")*, consiste en dividir a la clase en equipos, y dividir también la tarea de manera que cada alumno necesite a los demás para lograr sus objetivos. Esta técnica es la más conocida y la que más se usa en las aulas porque es muy fácil de aplicar y favorece el diálogo y a la integración de los estudiantes en el grupo de clase. Por último, se describe la *técnica de los grupos de investigación ("Group-Investigation")*, bajo mi punto de vista la más compaginable con el día a día de un curso de bachillerato, que consiste en seleccionar un subtema de investigación para cada equipo de trabajo, y después de investigar cada grupo, discutir, valorar e interpretar los contenidos junto al resto de la clase.

Tauber (2001), hace una descripción sobre el papel del ordenador en la enseñanza de la estadística. En su estudio, señala como aspectos fundamentales la importancia que han tenido los ordenadores en el impulso del análisis exploratorio de datos, la problemática de encontrar un software apropiado para la didáctica. Hace también una propuesta de trabajo para la construcción de significado. Destaca, entre otros, el paquete Fathom, ya mencionado en otras investigaciones, "*este paquete incluye manipulación dinámica de diversas representaciones, permite trazar gráficos de puntos, de barras, trazar funciones e importar datos desde Internet*." (Tauber, 2001. p. 39)

Señala también el hecho de que utilizar el ordenador, abre las puertas a la construcción de gráficos tablas, pero que no siempre el nivel de comprensión de los estudiantes está adaptado al conocimiento técnico necesario.

Para estudiar la distribución binomial, Landín y Sánchez (2010) proponen un conjunto de cinco actividades y después un cuestionario con el objetivo de evaluar los niveles de razonamiento de los estudiantes.

Las dos primeras actividades fueron usadas como introducción al cálculo de probabilidades y familiarización con el software Fathom que usan en el estudio. Pero lo más interesante de estas propuestas es que en dos de las actividades, se usan recursos manipulativos para estimular el interés de los estudiantes y que comprendieran mejor la simulación que se iba a hacer con el ordenador de los fenómenos aleatorios. La primera es la actividad número tres (figura 20), donde usan canicas para simular el juicio del primer jurado. La segunda es la quinta (figura 21), aquí el material manipulativo utilizado fueron monedas y dados para trabajar el valor esperado en experimentos; en esta actividad hace referencia a otra anterior cuyo objetivo es también el cálculo del valor esperado.

Juan es acusado injustamente de un delito. Para juzgarlo existen dos jurados, el primer jurado consta de tres jueces y el segundo solamente de uno. En el primer jurado, los jueces A, B y C son justos las dos terceras partes de las veces. El juez del segundo jurado es justo dos de cada tres veces que interviene. Para que el primer jurado lo declare inocente deberá ser exonerado por la mayoría.

Si Juan tuviera oportunidad de escoger jurado, ¿cuál le recomendarías?

a) el primero   b) el segundo   c) cualquiera de los dos

Explica tu respuesta:___________________________

En el primer jurado, ¿cuál es la probabilidad de que dos o tres jueces, lo declaren inocente?_____________

Figura 20: Actividad 3 (Landín y Sánchez, 2010, p. 21)

El futbolista sabe por experiencia que anota el 85% de los penaltis que tira. Si lanza 5 penaltis, calcula la probabilidad de que anote:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4
f) 5 penaltis

¿Cuál crees que sea la opción más favorable?_______
Explica tu respuesta:_________________________

Figura 21: Actividad 5 (Landín y Sánchez, 2010, p. 21)

Estas actividades iban intercaladas con otras sesiones teóricas para resolver los posibles conflictos de significado de los estudiantes, donde resolvían problemas más sencillos y aprendieron a usar recursos como la ley de multiplicación de probabilidades o los diagramas árbol.

Posterior a la realización de las actividades, el estudio continúa con la realización del cuestionario. A continuación describimos brevemente las cuestiones que incluía:

<u>Cuestión 1</u>

Considere todas las familias en las que hay 5 hijos. Se elige una familia al azar. Se supone que la probabilidad de ser mujer es igual a la de ser hombre y es igual a ½. De las siguientes afirmaciones cuál es correcta:

a) El evento HMHMM es más probable que el evento HHHHH

b) El evento HHHHH es más probable que el evento HMHMM

c) El evento HHHHH es igual de probable que el evento HMHMM

Donde HMHMM significa que el mayor es Hombre, el que sigue Mujer, después Hombre y los dos menores Mujeres. HHHHH significa que todos son Hombres.

Justifica tu respuesta.

La respuesta correcta es la (c), ya que cada secuencia está formada por sucesos que tienen la misma probabilidad. El objetivo de esta pregunta es saber si los estudiantes se dejan llevar por los razonamientos subjetivos, en los que la alternancia de Hombre y Mujer pueda llegar a ser más probable. Además se trabaja la aplicación de la regla del producto de probabilidades para calcular la probabilidad de la secuencia completa.

<u>Cuestión 2</u>

¿Qué es más probable?:

a) obtener 1 águila en 2 volados

b) obtener 2 águilas en 4 volados

c) son igualmente probables

Justifica tu respuesta.

En este caso, los estudiantes están trabajando de nuevo la heurística de las repeticiones, a diferencia de que, en este caso, las representaciones secuenciales del tipo AA, AS, ASAS,... no están, por lo que sirve para saber si se ha interiorizado bien el esquema de la DB.

<u>Cuestión 3</u>

En un hospital hay dos médicos; uno atiende 3 partos al día, mientras que el otro atiende 6 partos al día. Un día hacen una apuesta: observan el número de niños varones que nacen en los partos que cada uno atiende y gana quien en los partos que atiende iguale o rebase el 60% de niños varones (se supone que la probabilidad de que el recién nacido sea varón es igual a la probabilidad de que sea mujer).

¿Quién tiene mayor probabilidad de ganar?

a) El médico que atiende 3 partos tiene más probabilidad de ganar

b) El médico que atiende 6 partos tiene más probabilidad de ganar

c) Ambos tienen la misma probabilidad

Justifica tu respuesta

Esta pregunta está diseñada para que los estudiantes comprendan que en las muestras más pequeñas hay más variación en las probabilidades. Además, tal y como está formulada la pregunta, puede aparecer el sesgo de linealidad, "*el análisis* a priori *muestra que el problema puede ser muy difícil para los estudiantes de bachillerato*" (Landín y Sánchez, 2010, p. 9)

<u>Cuestión 4</u>

Un tirador tiene 70% de probabilidad de pegar en el blanco y 30% de fallar. En un concurso gana si le pega al blanco al menos 3 veces de 5. ¿Cuál es su probabilidad de ganar?

Esta última cuestión ya sí que es una pregunta clásica típica de libros de texto, donde hay que aplicar la fórmula de la binomial.

A continuación presentamos una serie de actividades que propone Tauber (2001) para trabajar la distribución normal. En las sesiones participaron 21 alumnos del curso 98/99 y 30 del 99/00.

Después de hacer una sesión de introducción teórica, recordando las clases anteriores y explicando brevemente la idea de variable aleatoria, de modelos de distribución y del modelo normal, plantea una actividad introductoria (realizada en varias sesiones)del tema donde los alumnos, por parejas y con la ayuda de la profesora, fueron discutiendo las cuestiones que se plantean (figura 22).

Actividad 1: *La siguiente tabla de frecuencia ha sido obtenida con STATGRAPHICS a partir de los datos sobre altura de 1000 chicas de edades comprendidas entre 15 y 20 años. Se presentan también algunos estadísticos.*

Frecuency Table for ALTURA

Class	Lower Limit	Upper Limit	Midpoint	Frequency	Relative Frequency	Cumulative Frequency	Cum. Rel. Frequency
at or below		146,0		0	0,0000	0	0,0000
1	146,0	148,0	147,0	1	0,0010	1	0,0010
2	148,0	150,0	149,0	0	0,0000	1	0,0010
3	150,0	152,0	151,0	10	0,0100	11	0,0110
4	152,0	154,0	153,0	14	0,0140	25	0,0250
5	154,0	156,0	155,0	23	0,0230	48	0,0480
6	156,0	158,0	157,0	65	0,0650	113	0,1130
7	158,0	160,0	159,0	70	0,0700	183	0,1830
8	160,0	162,0	161,0	132	0,1320	315	0,3150
9	162,0	164,0	163,0	158	0,1580	473	0,4730
10	164,0	166,0	165,0	165	0,1650	638	0,6380
11	166,0	168,0	167,0	143	0,1430	781	0,7810
12	168,0	170,0	169,0	99	0,0990	880	0,8800
13	170,0	172,0	171,0	71	0,0710	951	0,9510
14	172,0	174,0	173,0	27	0,0270	978	0,9780
15	174,0	176,0	175,0	19	0,0190	997	0,9970
16	176,0	178,0	177,0	3	0,0030	1000	1,0000
above	178,0			0	0,0000	1000	1,0000

Mean = 164,721 Standard deviation = 4,92274 Variance = 24,2334 Skewness = -0,165955 Kurtosis = -0,0385743

a) ¿Qué características puedes deducir, sobre la forma de las representaciones gráficas del histograma y polígono de frecuencias de esta distribución? ¿Es la distribución aproximadamente simétrica respecto a su centro? ¿Qué nos indica el coeficiente de apuntamiento?.

Actividad 1-b): *¿En qué intervalo se encontrarían la moda y la mediana? ¿Cuál sería su valor aproximado? ¿Recuerdas el significado de estas medidas?*

Actividad 1-c): *Calcula, a partir de la tabla y de un modo aproximado, el porcentaje de chicas en este grupo cuya altura está comprendida en el intervalo ($\bar{x}$ -2s, $\bar{x}$ + 2s), donde con $\bar{x}$ indicamos la media y con s la desviación típica de esta muestra. En una distribución normal teórica el porcentaje de casos que está situado a menos de dos desviaciones típicas de la media es el 95%.*

Actividad 1-d): *Supongamos que escribimos el nombre de cada chica que tomó parte en la muestra anterior en un papel y elegimos uno de ellos al azar. ¿Cuál será la probabilidad de que la chica en cuestión tenga una altura comprendida en el intervalo (x -2s, $\bar{x}$ + 2s)? ¿Y que tenga una altura que caiga fuera del intervalo?*

Actividad 1-e) En un histograma, las áreas de cada rectángulo representan las frecuencias en el intervalo. Recíprocamente, a partir de las frecuencias podemos calcular el área que, en el histograma corresponde a un intervalo dado. En el histograma de frecuencias relativas:

1. *¿Cuál sería el área correspondiente al intervalo (160-170)?*
2. *¿Cuál sería el área aproximada en este intervalo en el polígono de frecuencias?*
3. *¿Cuál sería la probabilidad de que una chica elegida al azar tenga una altura entre 160 y 170?*
4. *¿Y que mida más de 174 cm?*

Actividad 1-f) Compara los resultados de e.1) y e.3). ¿Qué conclusiones puedes extraer?

Figura 22: Actividad 1 (Tauber, 2001, pp. 131, 132, 133, 134, 136)

La siguiente figura (figura 23), muestra otras actividades propuestas para trabajar el cálculo de probabilidades utilizando las propiedades de la curva de la normal:

Actividad 5. Las puntuaciones obtenidas en un test de inteligencia por un grupo de alumnos siguen una distribución normal con media 110 y desviación típica 25. A) ¿Qué proporción de alumnos puntúa por encima de 110? B) Obtener los valores de las puntuaciones tales que el 95% central de los casos comprendido entre dichos valores.

Actividad 6. La temperatura media en Noviembre en Nueva York sigue una distribución normal con 8 grados de media y 3 grados de desviación típica. ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura esté un día comprendida entre 5 y 11 grados? ¿Y entre 2 y 5 grados? ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura sea menor que 2 grados?

Actividad 7. Los siguientes gráficos muestran las distribuciones de las puntuaciones de 5 exámenes. Dos de estas muestras han sido extraídas de poblaciones normalmente distribuidas. Identifica las tres muestras que no proceden de una distribución normal, indicando en qué te basas

Figura 23: Actividades 5, 6 y 7 (Tauber, 2001, p. 148)

Pértegas (2001), en su investigación sobre la DN, propone una serie de recursos informáticos para trabajar la DN con el ordenador (figura 24):

Recursos relacionados en Internet

- Normal Density Plotter (UCLA Department of Statistic)
  Página que permite obtener la representación gráfica de la densidad de una distribución normal de media y desviación estándar dados por el usuario.
- SurfStat Statistical Tables - Standard Normal Distribution (University of Newcastle)
  Página que permite calcular, a partir de una distribución normal estándar, la probabilidad acumulada hasta un cierto valor, o la probabilidad de tomar un valor en un intervalo. Así mismo, permite realizar los cálculos inversos, es decir, obtener el p-cuantil de una distribución normal estándar.
- Normal Density Calculator (UCLA Department of Statistic)
  Permite obtener, bajo una distribución normal, la probabilidad de observar un valor mayor o igual que uno dado. La ventaja es que permite hacerlo no sólo para la distribución normal estándar, sino para valores de la media y desviación estándar dados por el usuario.
- Matt's spiffy normal plot maker (UCLA Department of Statistic)
  Se introducen los datos de la variable de interes y produce el gráfico Q-Q de probabilidad normal correspondiente, que puede ser fácilmente exportado a otros programas.
- Calculation of 95% Confidence Interval on a Sample Mean (Arizona State University)
  A partir del valor de la media y la desviación estándar muestral, calcula el 95% intervalo de confianza para la media poblacional.

Figura 24: Recursos informáticos para trabajar la DN (Pértegas, 2001, p. 6)

En la figura 25 mostramos la propuesta de Alvarado y Batanero (s.f.) para el trabajo de la aproximación de la DB a la DN, usando tres tipos de configuraciones, manipulativa (act. 1), computacional (act. 2) y algebraica (act. 3). Con esta secuencian, inician la comprensión del TCL de manera intuitiva por medio de la simulación, probando con distintos valores de *n* y *p*. Los estudiantes empiezan a trabajar con la idea de convergencia que luego trabajarían analíticamente.

Actividad 1: *Simulación con fichas*. Una caja contiene 4 fichas de las cuales 2 son verdes. Simula la extracción *n* veces de una ficha con reemplazo. A continuación simula *m* muestras de tamaño *n*; *(n, m)* = (4,5), (10,1), (10,10) y (30,10). Para cada una de ellas: a) Construye una tabla de distribución de frecuencias del número de fichas verdes obtenidas; b) Realiza un gráfico de barras y comenta sus características; c) Compara la media y varianza del experimento con la media y varianza teórica.

Actividad 2: Representa gráficamente en el ordenador la distribución *B(n,p)* para distintos valores de sus parámetros *n* y *p*. Manteniendo constante *p = 0.3* compara las distintas gráficas para *n* = 4, 8, 24. Manteniendo *p* = 0.1 compare las gráficas para *n* = 4, 8 y 50. ¿Cómo varían las gráficas para los distintos valores de los parámetros?

Actividad 3: Supongamos que un sistema está formado por 100 componentes cada una de las cuales tiene una confiabilidad igual a 0,95 (probabilidad de que la componente funcione correctamente). Si esas componentes funcionan independientemente una de otra, y si el sistema completo funciona correctamente cuando al menos funcionan 80 componentes, ¿Cuál es la confiabilidad del sistema?

Figura 25: Secuencia actividades (Alvarado y Batanero, s.f., p. 3)

En otra investigación de Alvarado junto con la colaboración de Retamal (Alvarado y Retamal, 2010) en la revista *Paradigma*, hacen un estudio sobre las fases del proceso de reflexión en la comprensión de los estudiantes con el objetivo de que sirva como soporte teórico a los docentes. Después, las conclusiones de la investigación se aplican en una secuencia de tareas para trabajar la aproximación de la DB a la DN, en concreto para trabajar las dificultades de los estudiantes para comprender la dependencia de la convergencia al valor de los parámetros *n* y *p*. En la figura 26 presentamos su propuesta:

Actividad 1. El departamento de finanza de una empresa ha detectado un 9% de artículos con algún tipo de fallas producidas por sus máquinas. Determine la probabilidad aproximada de obtener entre 2 y 5 artículos defectuosos de una muestra aleatoria de 40 artículos. Comente sobre la calidad de la aproximación, si la probabilidad exacta es de 0.7395.

Actividad 2. *Experimento con dados*. Suponga que gana si obtiene un "6" al lanzar un dado legal. Simule las posibilidades de ganar en los siguientes casos de varios lanzamientos del dado *(n, m)* = (4,5), (10,10) y (30,10). Observe que *n* es el número de ensayos y *m* el número de réplicas.

Actividad 3. *Representación computacional.* Estudiar la convergencia gráfica de la distribución de probabilidad binomial a la distribución normal (Teorema de Laplace De Moivre) para distintos valores de sus parámetros *n* y *p*. En particular, qué observas de las gráficas para los valores de los parámetros *p*=0,3 con *n*=4, 8, 24 y para *p*=0,1 con *n*= 4, 8 y 50.

Figura 26: Actividades propuestas. Aproximación de la DB a la DN (Alvarado y Retamal, 2010)

La actividad 1 de la figura 26, se usó para ver cuál era el grado de comprensión del tema, viendo que los alumnos tienen muchas dificultades a la hora de, una vez comprobadas las condiciones para realizar la aproximación, decidir y argumentar si esta va a ser buena o no. Además, cometen bastantes errores en la corrección por continuidad, ya sea porque no la han planteado bien o porque no realizan bien los cálculos. Después de reflexionar sobre esta práctica docente, analizan qué otras representaciones se pueden plantear para que los alumnos comprendan mejor los contenidos, planteando así las dos siguientes actividades de la figura anterior. En la actividad dos los estudiantes juegan con los dados, anotando los resultados e interpretando las propiedades de la distribución en función de los parámetros n y p. En la figura 27 se muestra las representaciones de la actividad en tablas de ocurrencias y de frecuencias.

La actividad 3 permite a los alumnos simular estos experimentos con un número más elevado de repeticiones, siendo posible comparar las gráficas con los resultados para entender la importancia de los parámetros.

Tabla 5. Distribución de S_n de 10 muestras de tamaño 30

Tabla de experimento con dados para (30,10)

X1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	X16	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
X2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	X17	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1
X3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	X18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X19	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0
X5	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	X20	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
X6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X21	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
X7	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	X22	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
X8	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	X23	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
X9	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	X24	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
X10	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	X25	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
X11	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	X26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X12	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	X27	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
X13	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	X28	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
X14	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	X29	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0
X15	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	X30	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
											Σ	7	5	3	7	7	7	6	3	4	2

Tabla de distribución de frecuencias

obt. El "6"	*ni*	*Ni*	*fi*	*Fi*
2	1	1	0,1	0,1
3	2	3	0,2	0,3
4	1	4	0,1	0,4
5	1	5	0,1	0,5
6	1	6	0,1	0,6
7	4	10	0,4	1,0

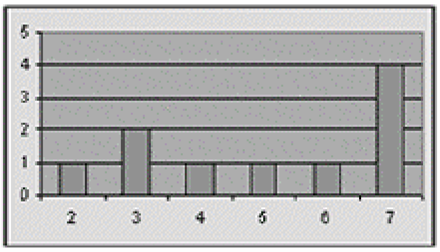


Figura 27: Solución a la actividad 2 (Alvarado y Retamal, 2010, p. 11)

5. VALORACIÓN DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA. PROPUESTAS DE CAMBIOS EN EL DISEÑO, IMPLEMENTACIÓN Y EVALUACIÓN DE LA EXPERIENCIA.

En esta sección analizamos el diseño, implementación y evaluación de la experiencia de enseñanza de las distribuciones binomial y normal vivida en el periodo de prácticas, descrita en la sección 3, teniendo en cuenta los conocimientos didáctico-matemáticos sintetizados en la sección 4 y los criterios de idoneidad didáctica (Godino, 2011). Se trata de responder a las preguntas que formulamos, las cuales motivan nuestra indagación:

-Valorar el grado de idoneidad didáctica del proceso de enseñanza-aprendizaje sobre las distribuciones binomial y normal en 2º de Bachillerato.

-Identificar cambios que se deberían introducir en el diseño e implementación del proceso de estudio para incrementar su idoneidad didáctica.

En definitiva se trata de valorar la idoneidad didáctica de la experiencia y de identificar propuestas fundamentadas de posibles cambios en un futuro rediseño de la unidad didáctica.

5.1. FACETAS EPISTÉMICA Y ECOLÓGICA

El proceso de estudio implementado en el periodo de prácticas, ha seguido una combinación de los contenidos y orientación propuestos en el libro de texto que usan los alumnos del curso de 2º de bachillerato del instituto donde se ha realizado la experiencia docente "Estadística guiada (en papel)" (2001) y los apuntes de Javier Pérez Olano (s.f.), proporcionados por el profesor que da la asignatura. Destacamos que en los dos materiales falta una selección significativa de situaciones que contextualicen los contenidos y su aplicación, aunque en el caso de la DB, sí que se introdujo por medio de un problema que generaba la necesidad de construir la distribución. Para que el proceso de estudio hubiese sido idóneo en este ámbito, se tendría que haber contextualizado mucho más la DN, y haber nombrado los diferentes problemas a los que responde y situaciones que siguen esta distribución (Tauber, 2001).

Centrándonos en la faceta epistémica y, más en concreto, en el uso del lenguaje, la valoración es bastante positiva. El nivel era adecuado para los alumnos a los que se dirigía, alumnos de 2º de bachillerato, y además con cada ejercicio se proponía una situación de expresión e interpretación. Habría que mejorar el uso de otros modos de expresión como por ejemplo utilizar más gráficos para comprender mejor el significado de las distribuciones e incluso como motivación para el desarrollo de la aproximación de la DB a la DN.

Los elementos regulativos que se han usado eran correctos y adaptados al nivel, aunque algunos casos, como el uso y enunciado de TCL, deberían haberse explicado con más rigurosidad, usando lenguaje matemático adaptado. Debido a la necesidad de facilitar la compresión del tema, se ha dejado un poco de lado este componente. Hacemos también una valoración muy positiva en cuanto a la propuesta de situaciones para la generación y negociación de reglas, ya que se puso mucho hincapié en la comprobación de las hipótesis para aplicar los enunciados.

Tanto en la argumentación como en el uso de relaciones entre los contenidos se ha procurado que sea adecuado, pero en mi opinión y después de leer los textos que han escrito otros autores sobre el tema, podría haberse hecho mejor, promoviendo que los alumnos hicieran más demostraciones adecuadas a su nivel.

En cuanto a la idoneidad ecológica, se puede ver si comparamos el marco curricular con los contenidos dados, que la adaptación al currículo de la etapa ha sido correcta si no tenemos en cuenta que viene de bachilleratos con dos modalidades distintas, ya que cada una tiene unos contenidos específicos diferentes. Para que esto no hubiera pasado, se tendrían que haber hecho dos grupos para la asignatura. Por otro lado, en esta unidad se podrían haber integrado el uso de tecnologías de la información y la comunicación como el ordenador para modelizar le aproximación binomial a normal.

Como conclusión, las mejoras que proponemos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las distribuciones binomial y normal en relación a la faceta epistémica y ecológica se resumen en:

-Favorecer la contextualización de la distribución normal.

-Promover otros modos de expresión, como por ejemplo el uso de gráficos.

-Más rigurosidad en el lenguaje y expresiones matemáticas en el enunciado y uso de teoremas y proposiciones importantes.

-Favorecer el desarrollo de demostraciones adecuadas al nivel educativo por parte de los alumnos.

-Adaptar los contenidos de la asignatura a la modalidad de bachillerato que están cursando los alumnos.

5.2. FACETAS COGNITIVA Y AFECTIVA

Nos disponemos ahora a valorar la idoneidad cognitiva y afectiva que ha tenido la experiencia docente vivida en el periodo de prácticas, hacer propuestas de mejora y describir qué cambios habría que incluir para incrementar la idoneidad en esta faceta. Para ello, igual que en el apartado anterior, vamos a basarnos en el cuadro de componentes y descriptores de la idoneidad didáctica (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006).

Al analizar los resultados de las evaluaciones realizadas a los estudiantes a los que se les explicó la unidad didáctica, se observa que la proximidad entre los aprendizajes logrados y los adquiridos se podría mejorar. Esto es por varios motivos, como hemos visto en todas las investigaciones que hemos analizado, es imprescindible que los alumnos estén conceptualmente preparados para los contenidos que se van a dar, y con esto nos referimos a que, por regla general, antes de empezar son necesarias una o dos sesiones completas de refuerzo donde se afiancen contenidos previos como las definiciones de variable aleatoria, distribución de probabilidad, tipos de variables aleatorias, función de densidad, función de distribución e incluso hablar de modelos de probabilidad en general con algunos ejemplos más sencillos. Hemos visto que meterse de lleno en los modelos binomial y normal ocasiona, a la larga, conflictos de significado que derivan en errores que por lo general son muy difíciles de resolver. En nuestro caso, sí que se hizo este repaso de contenidos previos, se explicaron los tipos de variables aleatorias y las características principales; esto ocupó los primeros quince minutos de la sesión, sin prácticamente ningún ejemplo. Es cierto que los alumnos ya habían trabajado estos contenidos en unidades anteriores, por eso el repaso fue tan ligero; a pesar de eso los resultados nos confirmaron que los alumnos no los tenían asumidos.

Al tratarse de un curso orientado prácticamente en su totalidad a que los alumnos realicen satisfactoriamente la prueba de acceso a la universidad, el nivel de los aprendizajes que se les requirió dejaba poco a la modificación. Al tener las sesiones tan ajustadas al calendario escolar, tuvimos que explicar los tres grandes subtemas sin descanso, lo que hizo que alumnos que necesitan más explicación, ejemplos y dedicación, se quedaran retrasados.

De nuevo por las características del curso, la evaluación es muy exigente, con un nivel que no se puede adaptar a alumnos con necesidades educativas especiales, o simplemente a alumnos que necesitan refuerzo en los contenidos. Además, la unidad ha sido evaluada junto con los contenidos del resto del trimestre. Esto ha hecho que sólo se pueda evaluar lo más importante e incluso de un nivel elevado para saber el grado en que los aprendizajes han sido logrados. En mi opinión, se tendría que evaluar cada unidad por separado, aunque luego hicieran un examen global que fuera el oficial; de esta manera es más fácil tanto para el profesor como para los alumnos saber cuáles son las dificultades que están teniendo así como los errores más comunes, dando pie al planteamiento de actividades de refuerzo o ampliación en función de las necesidades de los estudiantes.

Después de leer las investigaciones analizadas en la sección anterior, vemos que la naturaleza de los alumnos les lleva a cometer los mismos errores, independientemente de la ciudad o el país del que vengan, incluso de los años que tengan. Los errores en la aplicación de la fórmula de la DB, en el cálculo de probabilidades de la DN, y sobre todo en la aproximación de la DB a la DN, con las condiciones de convergencia del TCL y la corrección por continuidad, forman el grueso de dificultades con las que el profesor tiene que luchar.

Como comentamos al describir el proceso de enseñanza, la clase donde tuvo lugar la experiencia docente está formada por alumnos que, además de venir de modalidades diferentes, la gran mayoría tiene esta asignatura porque no les dejaron entrar en Educación Física, por lo que su motivación e implicación en el proceso de enseñanza-aprendizaje deja mucho que desear. Por este motivo, el esfuerzo del docente por plantar actividades que despierten el interés de los estudiantes, debería haber sido mucho mayor.

De igual manera, sería muy positivo que los alumnos vieran que lo que están dando en clase tiene utilidad para su vida cotidiana y profesional, de este modo, su implicación y autoestima frente a la evaluación se verían incrementadas considerablemente, y perderían el miedo y el rechazo a la estadística. Cambiando ligeramente la dinámica de clase, favoreciendo la argumentación y el debate entre los alumnos, resaltando sus cualidades matemáticas, la implicación, perseverancia y responsabilidad frente al estudio individual crecerían considerablemente, haciendo que hubiera un mejor ambiente en el aula.

Como conclusión, las mejoras que proponemos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las distribuciones binomial y normal en relación a la idoneidad cognitiva y afectiva se resumen en:

-Refuerzo más amplio de los contenidos previos necesarios para comprender la unidad.

-Modificación de los requisitos y contenidos mínimos exigidos en el curso para dar más libertad al profesor a la hora de dinamizar las clases.

-Realizar evaluaciones previas, con contenidos exclusivos de la unidad, con vistas a detectar y corregir errores.

-Fomentar en el aula el diálogo, la argumentación y el debate de situaciones donde se aplican los aprendizajes de la unidad para evitar el rechazo a la estadística.

-Seleccionar tareas de interés y utilidad para la vida cotidiana y profesional, que motiven a los estudiantes.

5.3. FACETAS INTERACCIONAL Y MEDIACIONAL

En este apartado vamos a valorar los aspectos relativos a las facetas interaccional y mediacional de la experiencia de enseñanza-aprendizaje que tuvo lugar durante las prácticas.

El modelo tradicional fue el modo de interacción que implementé en mis clases: sesiones teóricas en la pizarra y ejercicios y problemas propuestos para realizar con los alumnos. Todo el aprendizaje guiado y sin momentos de autonomía, exceptuando los momentos de trabajo individual para hacer ejercicios.

Como hemos visto, todas las investigaciones analizadas coinciden en lo conveniente que es introducir los temas de manera abierta, dejando que los alumnos saquen sus conclusiones y vayamos construyendo los contenidos poco a poco.

A diferencia de cómo lo hice, sería positivo utilizar diferentes herramientas que apoyen los aspectos teóricos. Las gráficas, las simulaciones con materiales manipulativos y con el ordenador son imprescindibles para la enseñanza de esta unidad, y en las prácticas sólo usamos el libro de texto, los apuntes y la pizarra.

Al tratarse de una asignatura optativa, los estudiantes no tenían un sitio asignado en el aula, por tanto se sentaban donde querían, sin orden. Esto en algunas ocasiones ha provocado distracciones y que los alumnos hablen entre ellos durante las explicaciones. Lo correcto sería que los alumnos tuvieran sitio fijos asignados, y dispuestos de manera que los que tienen más dificultades estén cerca de aquellos a los que les cuesta menos para que puedan ayudarse entre sí, fomentando el consenso y la inclusión dentro de la dinámica de la clase.

Sería positivo también, que se plantearan actividades que se puedan realizar en grupo, o en parejas, donde los alumnos puedan trabajar en equipo y aprender de sus compañeros. Una buena manera de trabajar con los alumnos de bachillerato es, como hemos visto, preparando trabajos de investigación que posteriormente se debatan en clase.

El número de alumnos era el adecuado (había 24), y permitía al profesor estar pendiente de todos. Por otro lado, nunca tenían clase ni a primera ni a última hora, por lo que el horario también era muy bueno (martes de 12.45 a 13.45h, miércoles de 9.15 a 10.15h, jueves de 12.45 a 13.45h y viernes de 9.15 a 10.15). Además, el hecho de tener clase todos los días permitía al profesor tener un buen seguimiento de los alumnos interesados (como hemos mencionado en otros apartados, la motivación de los estudiantes no era la más adecuada y tenían muchas faltas de asistencia que ocasionaban desajustes en la dinámica de la clase).

Aunque desde que se empezó la unidad hasta el día que tuvo lugar el examen hubo bastante tiempo, tuve la sensación de ir con prisas continuamente, dando las sesiones de teoría muy rápido sin tiempo prácticamente para afianzar el aprendizaje. Proponemos una mejor distribución de los contenidos, donde haya momentos de trabajos grupales y de aprendizaje autónomo.

Como conclusión, las mejoras que proponemos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las distribuciones binomial y normal en relación a la idoneidad interaccional y mediacional se resumen en:

- Proponer momentos de aprendizaje autónomo, utilizando materiales manipulativos e informáticos es decir, integrar el ordenador u otras tecnologías en el desarrollo de los contenidos.

-Introducción de los temas y contenidos de manera abierta, dando pie a que los alumnos vayan sacando las conclusiones por su propio medio.

-En consenso con los alumnos, fijar su disposición en el aula de manera que todos salgan beneficiados.

-Plantear actividades que se puedan realizar en grupo, y trabajos de investigación que favorezcan el debate y el diálogo.

-Distribuir adecuadamente los contenidos en las sesiones destinadas a la unidad didáctica.

6. SÍNTESIS Y CONCLUSIONES

La elaboración de este trabajo como cierre del máster que he realizado, con la orientador sugerida por los tutores, me ha brindado la oportunidad de conocer y aprender a aplicar unas herramientas muy útiles para analizar la práctica docente. La teoría de la idoneidad didáctica hace tomar conciencia de la importancia de recopilar, analizar y clasificar los conocimientos didáctico-matemáticos disponibles, fruto de investigaciones previas sobre la enseñanza y el aprendizaje de todos los contenidos matemáticos. He aprendido también que cualquier unidad didáctica que se realice debe llevar consigo los resultados de las investigaciones e innovaciones que autores de todo el mundo han ido produciendo.

La enseñanza de las distribuciones binomial y normal que hemos implementado ha tenido una serie de condicionamientos que ha sido complicado superar: la falta de legislación vigente en ese momento relativa a la etapa de bachillerato, el tiempo medido al milímetro que tienen los alumnos en cuanto a dedicación a las asignaturas, el poco material del que se dispone para la preparación de las clases y la restricción en el temario. Estas y otras dificultades van a estar siempre presentes en el día a día de los profesores, tenemos que ser conscientes de ellas y dar a conocer otras maneras de concebir las matemáticas.

El conocimiento de la idoneidad didáctica nos ha proporcionado un enfoque totalmente alternativo del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, analizando todas las facetas que la componen. En concreto las faceta epistémica y ecológica requieren un análisis del conocimiento instruccional, aquellos contenidos abstractos que los alumnos tienen que aprender, es decir, caracterizar los tipos de problemas a los que se van a enfrentar los estudiantes así como la clasificación de las construcciones y procesos matemáticos implicados. Además, el grado de adaptación entre el proceso de estudio y el proyecto educativo de los centros de enseñanza.

El desarrollo de las facetas cognitiva y afectiva ha implicado la investigación de todas las dificultades que pueden tener los estudiantes, de los errores que cometen y, por tanto, de los niveles de razonamiento que forman el aprendizaje; hemos desarrollado el conocimiento personal de los contenidos. Hemos valorado el grado de implicación que tienen los alumnos en este proceso de aprendizaje, proponiendo mejoras en cuanto a que las tareas sean de interés y útiles para su vida profesional y cotidiana, y potenciando sus emociones para resaltar las cualidades de las matemáticas.

La idoneidad interaccional y mediacional ha requerido que estudiemos las innovaciones relativas al modo de enseñar, de qué medios podemos disponer y qué tipos de recursos benefician el aprendizaje de los estudiantes. Modos de interacción en el aula y en qué grado pueden llegar a resolver conflictos de significado. Hemos visto cómo un factor muy restrictivo en esta línea de valoración ha sido el material didáctico que se ha usado durante la enseñanza.

Otra propuesta que hemos realizado para la mejora de este proceso de enseñanza-aprendizaje es la introducción de cambios en los contenidos (menos exigencia en cuanto al nivel a alcanzar por los estudiantes), lo que implica el uso de medios tecnológicos en el desarrollo del tema.

Para finalizar, destacar la importancia que tiene la formación inicial y permanente que deben tener los profesores como pieza del engranaje que forma todo este proceso. Debemos darle la misma prioridad al desarrollo de las unidades didácticas que al saber ser autocríticos y a aprender a valorar y evaluar nuestro trabajo en la línea de actuación que hemos descrito. Personalmente, agradezco la orientación de mis tutores del TFM para realizar esta investigación, ya que me ha permitido conocer una metodología que va a aumentar el grado en que mi trabajo futuro va a ser de utilidad. En mi opinión, creo que todo profesor debe preguntarse a sí mismo cómo se puede mejorar la práctica docente, ya que los procesos de enseñanza están en continuo cambio y nosotros debemos subirnos a esta evolución.

REFERENCIAS

Alvarado, H. (2007). *Significados institucionales y personales del teorema central del límite en la enseñanza de estadística en ingeniería*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Alvarado, H. y Batanero, C. (2008). Significado del teorema central del límite en textos universitarios de probabilidad y estadística. *Estudios Pedagógicos, 34(2), 7-28.*

Alvarado, H. y Batanero, C. (s.f.). Dificultades en la comprensión de la aproximación Normal a la Distribución Binomial. *Números. 67. Ideas y recursos para el aula.* Universidad Católica de la Santísima Concepción, Chile y Universidad de Granada.

Alvarado, H. y Retamal, L. (2010) La aproximación binomial por la normal: Una experiencia de reflexión sobre la práctica. *Paradigma v. 31 n. 2*

Asencio Rubio, M.J., Romero López, J. A. y De Vicente Fernández. (2001). *Estadística: Guía didáctica*. S. A. Mcgraw-Hill. Interamericana de España.

Batanero, C., Tauber, L. y Sánchez, V. (2001) Significado y comprensión de la distribución normal en un curso introductorio de análisis de datos. *Quadrante, 10(1), 59-92.*

García, J. y Sánchez, E. (2013). Probabilidad Condicionada: *Revista de didáctica de la Estadística*, 2, 417-424. Disponible en la Plataforma DIALNET.

Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.

Godino, J. D. y Batanero, C. (2008). Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica. *Conferencia Invitada al VI CIBEM*, Puerto Montt (Chile), 4-9 Enero 2009.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*. 27 (2), 221-252.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26 (1), 39-88.

Godino, J. D. y Neto, T. B. (2013). Actividades de iniciación a la investigación en educación matemática. *UNO. Revista de Didáctica de la Matemática, 63, 69-76.*

Landín, P. R. (2013) Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato sobre problemas binomiales. *Probabilidad Condicionada: Revista de didáctica de la Estadística, 2, 425-431.*

Landín, P. R., Sánchez, E. (2010). Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a tareas de distribución binomial. *Educação Matemática Pesquisa, 12, 3.*

Lorente, J. L. (s. f.). Aproximación de la Binomial por una Normal. Tema 7. *Disponible en: www.joseluislorente.es/estadistica/temas*

Martínez, M. y Marí, M. (2010). La Distribución Binomial. Universidad Politécnica de Valencia.

Mayén, S., Salazar, A. y Sánchez, E. (2013) Niveles de razonamiento frente a problemas binomiales. *Probabilidad Condicionada: Revista de didáctica de la Estadística, 2, 409-416.*

MEC. BOE 6-11-2007. *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.*

MEC. BOE 03-01-2015. *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.*

Nolan, A. (2008). Encouraging the reflection process in undergraduate teachers using guided reflection. *Australian Journal of Early Childhood*, 33 (1), 31-36

Pérez, J. (s.f.). Distribución binomial y distribución normal. Capítulo 3. Disponible en: http://sauce.pntic.mec.es/~jpeo0002/Archivos/PDF/T03.pdf

Pértegas Díaz S. y Pita Fernández S. (2001). La Distribución Normal. *Unidad de Epidemiología Clínica y Bioestadística. Complexo Hospitalario Juan Canalejo de A Coruña (España). Cad Aten Primaria, 8, 268-274.*

Posadas, P. y Godino, J. D. (2014). Reflexión sobre la práctica docente como estrategia formativa para desarrollar el conocimiento didáctico-matemático. *Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada*. (Disponible en, http://www.ugr.es/~jgodino/fprofesores/Posadas_reflexion.pdf)

Rubio, G. J. (2011) Variables aleatorias. Distribución binomial y normal. IES Francisco Ayala. Disponible en:

http://www.iesayala.com/selectividadmatematicas/ficheros/teoriaccss/

Schön, D. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. New York, NY: Basic Books.

Tauber, L. M. (2001) *La construcción del significado de la distribución normal a partir de actividades de análisis de datos*. Tesis doctoral. Universidad de Sevilla, Departamento de didáctica de las Matemáticas.

Vallejo, I. (2013) El aprendizaje cooperativo como metodología motivadora para el aprendizaje de las matemáticas. *Repositorio Institucional. Universidad de Almería*. Disponible en:

http://repositorio.ual.es:8080/jspui/bitstream/10835/2316/1/Trabajo.pdf