EVALUACIÓN Y DESARROLLO DE COMPETENCIAS DE ANÁLISIS DIDÁCTICO DE TAREAS SOBRE RAZONAMIENTO ALGEBRAICO ELEMENTAL EN FUTUROS PROFESORES

Walter F. Castro

Director: Juan D. Godino

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

2011

RESUMEN

La formación de maestros de escuela elemental es un campo de investigación activa. Los educadores de los maestros en formación enfrentan un reto constante para mejorar la comprensión limitada que los futuros maestros tienen acerca de las matemáticas y de la enseñanza de las mismas. El conocimiento y creencias que manifiestan los futuros maestros suelen ser instrumentales, enmarcadas en un modelo de enseñanza que enfatiza la clase magistral, el uso de fórmulas, de respuestas correctas, y cierta tendencia a valorar "el que enseñar" sobre "el cómo enseñar".

La investigación que se presenta en esta memoria de tesis doctoral informa sobre un proceso de formación realizado con futuros maestros de magisterio en su segundo año de carrera.

El objetivo general de la investigación es la evaluación y desarrollo de competencias de análisis didáctico de tareas sobre razonamiento algebraico elemental. Así mismo se indaga sobre las concepciones sobre el razonamiento algebraico elemental manifestadas por maestros en formación en la especialidad de maestro de primaria, en tanto que diseñan una unidad didáctica.

Los maestros en formación debían identificar y analizar tareas matemáticas que se encuentran en libros de texto para primaria. Las tareas identificadas y analizadas mediante el uso de una herramienta de análisis didáctico, diseñada a partir de las propuestas teóricas del enfoque Onto-semiótico, se imbrican en la elaboración de una Unidad Didáctica por parte de los estudiantes.

Fue en el contexto específico de la elaboración de la Unidad Didáctica que se adelantó la investigación que se informa en este informe de tesis doctoral. A los grupos de estudiantes que escogieron voluntariamente trabajar el tema de Razonamiento Algebraico Elemental, se les ofreció asesoría para la elaboración de sus Unidades Didácticas, fue así como estos grupos participaron en un proceso de estudio en donde el autor de este informe participó en un doble rol de observador y participante.

Se trató de caracterizar las competencias de análisis didáctico de los maestros en formación, sus creencias en relación con la inclusión del razonamiento algebraico elemental en el currículo de la escuela primaria así como el tipo de tareas y elementos propios de razonamiento algebraico elemental identificados y discutidos por los maestros en sus Unidades Didácticas.

Este trabajo de investigación contribuye en varias direcciones: La primera refiere a la exploración, en un contexto real de formación de futuros maestros, de una propuesta de análisis didáctico. La segunda refiere a la identificación de tareas matemáticas que los maestros en formación proponen para promover el razonamiento algebraico elemental en niños de escuela elemental, y la tercera, a la identificación de algunas creencias que los futuros maestros manifiestan en relación tanto de la inclusión del razonamiento algebraico elemental como de su promoción.

ABSTRACT

Elementary prospective teacher training is a very active research field. Preservice teacher educators face a constant challenge to improve the limited understanding that prospective teachers hold on mathematics and its teaching.

The preservice elementary teachers’ s knowledge and attitudes to mathematics are generally instrumental, and in line with a teaching model that stresses the teachers’ teaching role, focused on formulas, correct answers, and that put some emphasis in “what to teach” instead in “how to teach”. The research carry out on this report informs on an education process conducted with prospective elementary teachers on their second training year.

The main research objective is the study of didactic competencies as well as the beliefs on elementary algebraic reasoning manifested by preservice teachers while they design a didactic unit. Preservice teachers should identify mathematic tasks found on primary text books to foster algebraic thinking in pupils. The tasks then should be analyzed using a tool devised on theoretic features provided by the Onto-semiotic approach. The tasks are entwined on the design of the didactic unit.

It was on the context of the design of the didactic unit that the preservice teachers choose the topic on algebraic reasoning to be implemented with sixth graders. It is worth mentioning that neither the content knowledge of algebra nor its didactics was studied in the Mathematics Curriculum in Primary Education course. A total of seven teams, four students each, choose to work the didactic unit on algebraic reasoning, and to design their didactic units under the author’s counsel. Preservice teachers were given an elementary algebraic reasoning proposal at the beginning of the counselling process.

We focus on the characterization of preservice teachers’ didactic analysis competences, as well on their beliefs regarding the inclusion of elementary algebraic reasoning in the curriculum of primary school.

The submitted thesis is a contribution to three research lines: The first in instructional design, specifically on the didactic analysis as a tool for the prospective teacher to identify and to foster elementary algebraic reasoning. The second refers to the identification of some categories of mathematic tasks that, according to preservice teachers can foster elementary algebraic reasoning on pupils; and finally, the identification of some beliefs regarding both the inclusion of elementary algebraic reasoning and its fostering.

ÍNDICE

1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN: CONTEXTUALIZACIÓN, OBJETIVOS Y PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN 1

1.1 Introducción………………………………………………………………………… 1

1.2 El Problema de Investigación.……………………………………………………. 3

1.3 Origen y Motivación de la Investigación.………………………………………... 3

1.4 El Tema Matemático: Algebra en la Escuela Primaria……………………………… 4

1.5 Un Instrumento de Apoyo del Análisis Didáctico…………………………………... 5

1.6 Preguntas de Investigación………………………………………………………….. 6

1.7 Objetivos de Investigación………………………………………………………….. 8

1.7.1 Objetivo General…………………………………………………………………… 8

1.7.2 Objetivos Específicos……………………………………………………………… 8

1.8 Pertinencia de la Investigación……………………………………………………… 9

1.9 Organización del Documento……………………………………………………….. 10

2. LA INVESTIGACIÓN EN RAZONAMIENTO ALGEBRAICO ELEMENTAL 13

2.1 Introducción………………………………………………………………………… 13

2.2 Algunas Aproximaciones al RAE…………………………………………………….. 13

2.3 Razonamiento Algebraico Elemental y Niños de Escuela Elemental……………… 15

2.4 Algunos Estudios sobre el Razonamiento Algebraico Elemental………………….. 15

2.4.1 Algunas Aproximaciones a la Generalización……………………………………. 15

2.4.2 Patrones y Generalización………………………………………………………… 16

2.4.3 Generalización en Educación Primaria…………………………………………… 18

2.4.4 Conclusiones sobre los Estudios de Patrones y Generalización …………………. 19

2.4.5 Signo Igual…………………………………………………………………………... 20

2.4.6 Incógnitas, Variables y Cuasi-variables………………………………………….. 22

2.5 Razonamiento Algebraico Elemental y Maestros en Formación………………….. 23

2.5.1 Maestros en Formación……………………………………………………….... 24

2.5.2 El Conocimiento Pedagógico del Contenido………………………………….. 28

2.6 Propuestas Curriculares de Inclusión de Razonamiento Algebraico Elemental: Algunos Casos…………………………………………………………….……. 29

2.7 Conclusiones……………………………………………………………………. 33

3. MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA 35

3.1 Introducción………………………………………………………………….. 35

3.2 Algunos Elementos Teóricos Considerados…………….....………………………. 35

3.2.1 El Enfoque Onto-semiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática…….... 35

3.2.1.1 Significados Personales e Institucionales de los Objetos……………………… 37

3.2.1.2 Objetos que Intervienen y Emergen de los Sistemas de Prácticas……………... 38

3.2.1.3 Configuraciones de Objetos…………………………………………………… 39

3.2.1.4 Análisis Epistémico………………………………………………………….. 40

3.2.1.5 La Guía de Reflexión de Objetos y Significados………………………………. 41

3.2.1.6 La Aproximación al RAE desde el EOS……………………………………….. 42

3.2.2 Una Reflexión sobre las Competencias……………………………………..... 43

3.2.3 La Competencia de Análisis Didáctico………………………………………….. 45

3.2.4 Comunidad de Aprendizaje…………………………………………………… 46

3.2.5 La Fenomenografía…………………………………………………………… 48

3.2.6 La Observación Participante…………………………………………………... 49

3.2.6.1 Las Posturas del Observador…………………………………………………. 50

3.3 Algunas Precisiones sobre la Metodología……………………………………… 51

3.4 Contexto de la Investigación…………………………………………………. 53

3.4.1 Los Informantes……………………………………………………………….. 54

3.4.2 Recogida de Datos…………………………………………………………….. 55

3.4.3 Análisis de los Datos………………………………………………………….. 55

3.4.4 Procedimiento……………………………………………………………………. 56

3.4.5 Las Sesiones de Trabajo…………………………………………………………. 57

3.5 Conclusiones…………………………………………………………………………. 57

4. VALORACIÓN Y DESARROLLO DE COMPETENCIAS PARA EL ANÁLISIS EPISTÉMICO DE TAREAS RAE 61

4.1 Introducción………………………………………………………………………….. 61

4.2 Contexto Formativo…………………………………………………………….. 61

4.3 Tareas Discutidas……………………………………………………………….. 62

4.3.1 Análisis a Priori de Objetos y Significados……………………………………… 62

4.3.1.1 Tarea Uno……………………………………………………………………. 62

4.3.1.1.1 Análisis Epistémico…………………………………………………………. 63

4.3.1.1.1.1 Elementos Lingüísticos…………………………………………………… 64

4.3.1.1.1.2 Conceptos…………………………………………………………………. 65

4.3.1.1.1.3 Procedimientos……………………………………………………………. 65

4.3.1.1.1.4 Propiedades……………………………………………………………….. 66

4.3.1.1.1.5 Argumentos……………………………………………………………….. 66

4.3.1.2 Tarea Dos……………………………………………………………………….. 67

4.3.1.2.1 Análisis Epistémico…………………………………………………………. 67

4.3.1.2.1.1 Elementos Lingüísticos…………………………………………………… 67

4.3.1.2.1.2 Conceptos………………………………………………………………… 68

4.3.1.2.1.3 Procedimientos…………………………………………………………… 68

4.3.1.2.1.4 Propiedades………………………………………………………………. 69

4.3.1.2.1.5 Argumentos………………………………………………………………. 69

4.4 Análisis Realizados por los Maestros en Formación……………………………… 70

4.4.1 Análisis de la Primera Tarea…………………………………………………….. 70

4.4.1.1 Grupo G1……………………………………………………………………..… 70

4.4.1.1.1 Elementos Lingüísticos………………………………………………………… 71

4.4.1.1.2 Conceptos…………...…………………………………………………….. 71

4.4.1.1.3 Procedimientos……………………………………………………………. 72

4.4.1.1.4 Propiedades……………………………………………………………….. 73

4.4.1.1.5 Argumentos……………………………………………………………….. 74

4.4.1.2 Grupo G3………………………………………………………………….... 74

4.4.1.2.1 Elementos Lingüísticos……………………………………………………. 75

4.4.1.2.2 Conceptos…………...……………………………………………………... 75

4.4.1.2.3 Procedimientos…………………………………………………………….. 76

4.4.2 Análisis de la Segunda Tarea…………………………………………………… 77

4.4.2.1 Caso Estudiante Uno (E1)……………………………………………………. 77

4.4.2.1.1 Elementos Lingüísticos……………………………………………………. 77

4.4.2.1.2 Conceptos………………………………………………………………….. 79

4.4.2.1.3 Procedimientos…………………………………………………………….. 81

4.4.2.1.4 Propiedades………………………………………………………………... 83

4.4.2.1.5 Argumentos………………………………………………………………... 84

4.4.2.2 Caso Estudiante Tres (E3)……………………………………………………. 85

4.4.2.2.1 Elementos Lingüísticos……………………………………………………. 85

4.4.2.2.2 Conceptos………………………………………………………………….. 88

4.4.2.2.3 Procedimientos…………………………………………………………….. 90

4.4.2.2.4 Argumentos………………………………………………………………... 92

4.5 Comentarios sobre los Análisis….………………………………………...….. 93

5. EVALUACIÓN Y DESARROLLO DE COMPETENCIAS PARA EL ANÁLISIS COGNITIVO DE TAREAS RAE **95**

5.1 Introducción……………………………………………………………………... 95

5.2 Contexto y Toma de Datos……………………………………………………… 95

5.3 Selección de las Tareas………………………………………………………….. 96

5.4 Análisis Epistémico de Objetos y Significados……………………………………. 97
5.4.1 Tarea de Sombrillas y Gorras……………………………………………….. 98
5.4.1.1 Elementos Lingüísticos……………………………………………………….. 99
5.4.1.2 Conceptos……………..…………………………………………………..... 99
5.4.1.3 Procedimientos…………...…………………………………………………... 100
5.4.1.4 Propiedades…………………………………………………………………… 100
5.4.1.5 Argumentos…………………………………………………………………… 101
5.4.2 Tarea de las Edades……………………………………………………….. 101
5.4.2.1 Elementos Lingüísticos……………………………………………………….. 102
5.4.2.2 Conceptos……………..……………………………………………………… 102
5.4.2.3 Procedimientos…………...…………………………………………………… 102
5.4.2.4 Propiedades…………………………………………………………………… 103
5.4.2.5 Argumento……………….………………………………………………… 103
5.4.3 Tarea del Número Mayor……………………………………………………. 103
5.4.3.1 Elementos Lingüísticos……………………………………………………….. 104
5.4.3.2 Conceptos……………..……………………………………………………… 104
5.4.3.3 Procedimientos…………………...………………………………………... 105
5.4.3.4 Propiedades…………………………………………………………………… 105
5.4.3.5 Argumentos……………………...……………………………………………… 106
5.4.4 Tarea de las Velas………………………………………………………………… 106
5.4.4.1 Elementos Lingüísticos……………………………………………………….. 107
5.4.4.2 Conceptos……………..……………………………………………………… 107
5.4.4.3 Procedimientos ………………………………..……………………….... 108
5.4.4.4 Propiedades…………………………………………………………………… 108
5.4.4.5 Argumentos…………………………………………………………………… 108
5.4.5 Tarea de Completar la Tabla………………………………………………… 109
5.4.5.1 Elementos Lingüísticos……………………………………………………….. 109

5.4.5.2 Conceptos…………….……………………………………………………… 110

5.4.5.3 Procedimientos ……………………..………………………………………… 111

5.4.5.4 Propiedades………………………………………………………………….. 111

5.4.5.5 Argumentos……………...……………………………………………………. 112

5.5 Análisis Cognitivo de las Soluciones de los Niños………………………………. 112

5.5.1 Tarea de Sombrillas y Gorras…………………………………………………… 112

5.5.2 Tarea de las Edades……………………………………………………………... 115

5.5.3 Tarea del Número Mayor……………………………………………………….. 116

5.5.4 Tarea de las Velas………………………………………………………………. 118

5.5.5 Tarea de Completar la Tabla……………………………………………………. 121

5.6 Análisis Realizados por los Maestros en Formación…………………………….. 122

5.6.1 Tarea de Sombrillas y Gorras…….………..……………………………………… 123

5.6.1.1 Grupo G1……………………………………………………………………. 123

5.6.1.2 Grupo G5…………………………………………………………………… 126

5.6.1.3 Grupo G3…………………………………………………………………… 129

5.6.2 Tarea de las Edades…………………………………………………………….. 131

5.6.2.1 Grupo G1…………………………………………………………………… 132

5.6.2.2 Grupo G5…………………………………………………………………… 133

5.6.2.3 Grupo G4…………………………………………………………………… 134

5.6.3 Tarea del Número Mayor………………………………………………………. 136

5.6.3.1 Grupo G1…………………………………………………………………… 136

5.6.3.2 Grupo G5…………………………………………………………………… 137

5.6.3.3 Grupo G3…………………………………………………………………… 139

5.6.4 Tarea de las Velas……………………………………………………………… 140

5.6.4.1 Grupo G5…………………………………………………………………… 140

5.6.4.2 Grupo G3…………………………………………………………………… 142

5.6.5 Tarea de Completar la Tabla…………………………………………………… 145

5.6.5.1 Grupo G1…………………………………………………………………… 145

5.6.5.2 Grupo G5…………………………………………………………………… 146

5.6.5.3 Grupo G3…………………………………………………………………… 147

5.7 Algunas Creencias sobre la Inclusión del RAE……………………….………….. 149

5.8 Conclusiones sobre los Análisis Realizados por los Maestros……..……………… 149

5.9 Conclusiones sobre las Creencias……………………………………..……… 150

6. EVALUACIÓN Y DESARROLLO DE COMPETENCIAS PARA EL DISEÑO INSTRUCCIONAL 153

6.1 Introducción……………………………………………………………………… 153

6.2 Directrices Generales sobre el Diseño de la Unidad Didáctica……………………. 154

6.3 Descripción del Proceso de Elaboración de la Unidad…………………………... 155

6.4 Condiciones Generales……………………………………………………… 155

6.5 Los Hallazgos sobre el Conjunto de Unidades Didácticas………………………….. 156

6.5.1 Contexto Curricular…………………………………………………………... 157

6.5.2 Objetivos………………………………………………………………………… 159

6.5.3 Contenidos………………………………………………………………………. 160

6.5.3.1 Propuesta de G1……………………………………………………………….. 160

6.5.3.2 Propuesta de G2……………………………………………………………….. 161

6.5.3.3 Propuesta de G3……………………………………………………………….. 162

6.5.3.4 Propuesta de G4……………………………………………………………….. 164

6.5.3.5 Propuesta de G5……………………………………………………………….. 164

6.5.3.6 Propuesta de G6……...………………………………………………………... 165

6.5.3.7 Propuesta de G7……………………………………………………………….. 166

6.5.4 Secuencia de Actividades………………………………………………………. 171

6.5.4.1 Los Hallazgos………………………………………………………………….. 171

6.5.4.1.1 Letra Evaluada…………………………………………………………… 173

6.5.4.1.2 Letra como Objeto……………………………………………………….. 175

6.5.4.1.3 Letra como Número Generalizado………………………………………………. 176

6.5.4.1.4 Valor Faltante……………………………………………………………………. 177

6.5.4.1.5 Incógnita…………………………………………………………………………. 178

6.5.4.1.6 Problemas de Palabras……………………………………………………………. 179

6.5.4.1.7 Patrón o Regla……………………………………………………………………. 182

6.5.4.1.8 Representación de Relaciones…………………………………………………… 185

6.5.4.1.9 Valor Desconocido………………………………………………………………. 187

6.5.4.1.10 Cálculo de Expresiones………………………………………………………….. 188

6.5.4.1.11 Metodología de Trabajo en Clase………………………………………………… 189

6.5.4.2 Conocimientos que el Maestro Presentará al Final de cada Sesión………………. 190

6.5.4.2.1 Resolución de Actividades Propuestas…………………………………………… 190

6.5.4.2.2 Grupos que Usaron la GROS…………………………………………………….. 190

6.5.4.2.3 Grupos que no Usaron la GROS…………………………………………………. 200

6.5.4.2.4 Metodología que se Propone Usar con los Niños……………………………... 204

6.5.4.2.4.1 Actividades de Refuerzo y Ampliación…………………………………….. 204

6.5.4.2.4.2 Instrumentos de Evaluación………………………………………………… 205

6.6 La Idoneidad Didáctica y su Evaluación por parte de los Estudiantes………………. 206

6.6.1 La Idoneidad Didáctica…………………………………………………………... 206

6.7 Identificación de Conflictos de Significado……………………………………….. 208

6.7.1 Conflictos Identificados por G1……………………………………………….… 208

6.7.2 Conflictos Identificados por G5………………………………………………….. 212

6.8 Algunas Implicaciones para la Formación de Maestros……………………………… 212

7. ESTUDIO DE CASOS 215

7.1 Introducción………………………………………………………………………… 215

7.2 Recolección de Datos……………………………………………………………….. 215

7.3 Selección de Casos………………………………………………………………….. 216

7.3.1 Caso Uno………………………………………………………………………….. 216

7.3.1.1 Las Sesiones de Trabajo……………………………………………………….. 217

7.3.1.1.1 Segunda Sesión……………………………………………………………….. 217

7.3.1.1.2 Quinta Sesión………………………………………………………………. 220

7.3.1.1.3 Sexta Sesión………………………………………………………………... 221

7.3.1.2 Interpretación de los Resultados para el Grupo Uno………………………….. 222

7.3.2 Caso Dos…………………………………………………………………………... 223

7.3.2.1 Las Sesiones de Trabajo………………………………………………………. 223

7.3.2.1.1 Tercera Sesión……………………………………………………………… 224

7.3.2.1.2 Cuarta Sesión………………………………………………………………. 225

7.3.2.1.3 Quinta Sesión………………………………………………………………. 228

7.3.2.2 Análisis Epistémicos de una Tarea………………………………………………. 229

7.3.2.3 Identificación de Posibles Conflictos de Significado………………………….. 233

7.3.2.3.1 Sexta Sesión………………………………………………………………… 235

7.3.2.3.2 Séptima Sesión……………………………………………………………… 236

7.3.2.4 Interpretación de los Resultados para el Grupo Dos…………………………… 238

7.4 Conclusiones e Implicaciones para la Formación de Maestros en Formación……… 239

8. CONCLUSIONES E IMPLICACIONES **243**

8.1 Introducción………………………………………………………………………. 243

8.2 Preguntas de Investigación……………………………………………………….. 243

8.2.1 Respuestas a las Preguntas para el Análisis Didáctico………………………….. 244

8.2.1.1 Respuestas a las Preguntas Correspondientes a la Aproximación del Análisis Didáctico……………………………………………………………………. 244

8.2.1.1.1 Primera Pregunta: ¿Qué Interpretación dan los Estudiantes a cada uno de los Niveles del Análisis Didáctico?.. 244

8.2.1.1.2 Segunda Pregunta: ¿Qué Interpretación dan los Estudiantes al Concepto de Idoneidad?... 245

8.2.1.1.3 Tercera y Cuarta Pregunta: ¿Cuáles Niveles son Mayoritariamente Usados por los Estudiantes?, y ¿Cuáles Niveles son Ignorados por los Estudiantes?.......... 245

8.2.1.1.4 Quinta Pregunta: ¿Son los Niveles de Análisis Didáctico Apropiados para Diseñar una Unidad Didáctica?.. 245

8.2.1.2 Respuestas a las Preguntas Correspondientes a la Guía de Elaboración de la Unidad Didáctica……………………………………………………………….... 246

8.2.1.2.1 Primera Pregunta: ¿En qué Medida la Guía para el Diseño de la Unidad Didáctica Orienta al Estudiante para la Elaboración de la Unidad?................. 246

8.2.1.2.2 Segunda Pregunta: ¿Qué Interpretación Confieren a cada uno de los Incisos en los que se ha Dividido la Guía?.. 247

8.2.1.2.3 Tercera Pregunta: ¿Cuáles son los Incisos Propuestos en la Guía que los Estudiantes Cumplimentan Menos?.. 248

8.2.1.3 Respuestas a las Preguntas para la Unidad Didáctica…………………………… 248

8.2.1.3.1 Primera Pregunta: ¿Cuáles son Algunas Dificultades que los Estudiantes Enfrentan para Escribir la Unidad Didáctica?.. 248

8.2.1.3.2 Segunda Pregunta: ¿Qué Tipo de Objetivos Proponen y Cómo los Cumplimentan con las Actividades Matemáticas Propuestas?.. 249

8.2.1.3.3 Tercera Pregunta: ¿Qué Tipo de Conocimientos Matemáticos Reconocen Espontáneamente?.. 249

8.2.1.3.4 Cuarta Pregunta: ¿Qué Tipo de Recursos y Fuentes Documentales Utilizan para Apoyar la Elaboración de la Unidad Didáctica?... 250

8.2.1.4 Respuestas a las Preguntas para el Razonamiento Algebraico Elemental……….. 250

8.2.1.4.1 Primera Pregunta: ¿Cuáles son las Creencias Sostenidas por los Maestros en Formación en Relación con la Inclusión del Razonamiento Algebraico en la Escuela Primaria?... 251

8.2.1.4.2 Segunda Pregunta: ¿Qué Tipo de Tareas Matemáticas Proponen los Maestros en Formación para Promover el Razonamiento Algebraico Elemental?................ 251

8.2.1.4.3 Tercera Pregunta: ¿Qué Tipo de Elementos Algebraicos Identifican en los Ejercicios Propuestos?... 251

8.2.1.4.4 Cuarta Pregunta: ¿Cuáles Conocimientos Matemáticos Identifican cuando Valoran Tareas Resueltas por Niños de Escuela Primaria?............................... 251

8.2.1.5 Respuestas a las Preguntas para el Instrumento de Análisis de Conocimientos Matemáticos (GROS)………………………………………………………….. 252

8.2.1.5.1 Primera Pregunta: ¿Cuál es el Nivel de Uso que los Estudiantes Dan, Espontáneamente, a la GROS?.. 252

8.2.1.5.2 Segunda Pregunta: ¿Cuáles son las Dificultades que los Estudiantes Manifiestan cuando Usan la GROS?... 252

8.2.1.5.3 Tercera y Cuarta Pregunta: ¿Cuáles Aspectos de la GROS son Mayoritariamente Usados por los Estudiantes?, ¿Cuáles Aspectos de la GROS son poco Trabajados por los Estudiantes?.. 253

8.2.1.5.4 Quinta y Sexta Pregunta: ¿Usan los Estudiantes la GROS para Identificar Conflictos de Significado? ¿Usan los Estudiantes la GROS para Proponer Ejercicios de Refuerzo y Ampliación?.. 253

8.3 Logro de los Objetivos de Investigación…………………………………………. 253

8.3.1 Objetivo General………………………………………………………………... 253

8.3.2 Objetivos Específicos…………………………………………………………… 254

8.3.2.1 Para el Análisis Didáctico……………………………………………………… 254

8.3.2.1.1 O-AD1. Valorar la Pertinencia de los Cuatro Niveles para el Análisis Didáctico……………………………………………………………………. 254

8.3.2.1.2 O-AD2. Identificar Fortalezas y Debilidades de la Aproximación al Análisis Didáctico……………………………………………………………………. 256

8.3.2.2 Objetivos para el Razonamiento Algebraico Elemental (O-RAE)……………….. 257

8.3.2.2.1 O-RAE1. Identificar Tipos de Tareas que los Maestros en Formación Propone para Promover el Razonamiento Algebraico Elemental………………………. 257

8.3.2.2.2 O-RAE2. Identificar Creencias de los Maestros en Formación acerca del Razonamiento Algebraico Elemental…………………………………………. 257

8.3.2.2.3 O-RAE3. Determinar si existe Evolución en las Creencias de los Estudiantes sobre el RAE como Consecuencia de las Actividades de Asesoría y Elaboración de la Unidad Didáctica……………………………………………………... 258

8.3.3 Marco Teórico de Referencia…………………………………………………… 259

8.3.3.1 O-MT1. Valorar la Pertinencia de Algunos Conceptos del EOS Usados tanto en la Definición del Análisis Didáctico como en la Guía de Reflexión de Objetos y Significados (GROS)………………………………………………………………… 259

8.3.3.2 O-MT2. Valorar la Aproximación EOS al Razonamiento Algebraico Elemental, en tanto que es Usado por Maestros en Formación………………………………….. 261

8.4 Implicaciones para el Análisis Didáctico……………………………………………. 262

8.5 Implicaciones para la Guía de Elaboración de la Unidad Didáctica………………… 265

8.6 Implicaciones para la Inclusión del Razonamiento Algebraico Elemental………….. 268

8.7 Implicaciones para la Formación de Maestros………………………………………. 269

8.8 Limitaciones del Estudio…………………………………………………………….. 270

8.9 Contribuciones del Estudio…………………………………………………………... 271

8.10 Publicaciones Derivadas…………………………………………………………….. 273

8.10.1 Revistas Internacionales……………………………………………………………. 273

8.10.2 Congresos Internacionales………………………………………………………….. 273

8.10.3 Congresos Nacionales………………………………………………………………. 274

8.10.4 Congresos Regionales………………………………………………………………. 274

8.11 Ideas para Futuras Investigaciones………………………………………………… 274

REFERENCIAS **277**

ANEXO A. PRÁCTICAS INICIALES CON LOS MAESTROS EN FORMACIÓN **303**

A.1 Práctica 1……………………………………………………………………………. 303

A.2 Práctica 2……………………………………………………………………………. 306

A.3 Práctica 3……………………………………………………………………………. 311

ANEXO B. PRUEBA APLICADA A LOS NIÑOS DE SEXTO GRADO **315**

ANEXO C. SOLUCIONES DADAS POR LOS NIÑOS DE SEXTO GRADO Y DISCUTIDAS CON LOS MAESTROS EN FORMACIÓN 323

C.1 Soluciones Dadas……………………………………………………………….. 323

ANEXO D. GUÍA PARA LA ELABORACIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA 329

ANEXO E. OBJETIVOS PROPUESTOS EN EL REAL DECRETO 1513/2006, DE 7 DE DICIEMBRE 333

ANEXO F. ALGUNAS TAREAS DE DIFÍCIL CLASIFICACIÓN 339

F.1 Grupo Dos (G2)……………………………………………………………... 339

F.2 Grupo Cuatro (G4)…………………………………………………………... 340

F.3 Grupo Seis (G6)……………………………………………………………… 342

F.4 Grupo Siete (G7)……………………………………………………………... 342

ANEXO G. TAREAS DE REFUERZO Y AMPLIACIÓN PROPUESTAS POR LOS MAESTROS EN FORMACIÓN 343

G.1 Grupo Uno (G1)…………………………………………………………….. 344

G.2 Grupo Dos (G2)……………………………………………………………... 346

G.3 Grupo Tres (G3)……………………………………………………………... 347

G.4 Grupo Cuatro (G4)…………………………………………………………... 349

G.5 Grupo Cinco (G5)…………………………………………………………..... 353

G.6 Grupo Seis (G6)……………………………………………………………… 356

ANEXO H. EVALUACIÓN PROPUESTA POR LOS MAESTROS EN FORMACIÓN 357

H.1 Grupo Uno (G1)……………………………………………………………... 358

H.2 Grupo Dos (G2)……………………………………………………………... 360

H.3 Grupo Tres (G3)………………………………………………………………….. 361

H.4 Grupo Cuatro (G4)………………………………………………………………. 362

H.5 Grupo Cinco (G5)………………………………………………………………… 363

H.6 Grupo Seis (G6)…………………………………………………………………... 363

H.7 Grupo Siete (G7)………………………………………………………………….. 364

ANEXO I. PAUTA DE IDONEIDAD **367**

ANEXO J. INTERPRETACIÓN AL CONCEPTO DE IDONEIDAD DADA POR TRES GRUPOS **371**

J.1 Grupo Uno (G1)………………………………………………………………….. 372

J.2 Grupo Cuatro (G4)……………………………………………………………….. 373

J.3 Grupo Cinco (G5)……………………………………………………………….... 375

ANEXO K. RESUMEN Y CONCLUSIONES EN INGLÉS / Summary **377**

K.1 Introducción.. 377

K.2 The Research Problem.. 377

K.3 The Research Questions.. 378

K.4 Main Objective.. 379

K.5 Theoretic Framework.. 380

K.5.1 The Onto-Semiotic Approach (OSA).. 380

K.5.1.1 Configuration of Objects and Meanings.. 381

K.5.1.2 Didactic Epistemic Analysis... 382

K.5.1.3 Guide to Reflect on Mathematic Objects and Meanings................................ 383

K.5.1.4 Elementary Algebraic Reasoning... 383

K.5.2 Practice Communities.. 385

K.5.3 Phenomenography... 386

K.5.4 Field Observations... 386

K.6 Method.. 387

K.6.1 The Context.. 387

K.6.2 Procedure.. 388

K.6.3 Subjects... 388

K.6.4 Data Collection.. 389

K.6.4.1 First Study... 389

K.6.4.2 Second Study.. 389

K.7 General Structure of the Research Study.. 390

K.8 Some Findings.. 390

K.8.1 For the Didactic Analysis.. 390

K.8.1.1 First Question: What Interpretations assign Pre-Service Teachers to Each and Every Level of Didactic Analysis?.. 390

K.8.1.2 Second Question: What Interpretations Give Pre-Service Teachers to the Concept of Suitability?.. 393

K.8.1.3 Third and Fourth Question: Which Levels are Largely Used by Pre-service?, and Which Levels are not Used by Pre-service?.. 393

K.8.1.4 Fifth Question: Are the Levels of Didactic Analysis Appropriate to Design a Didactic Unit?.. 393

K.8.2 For the Guide to Design the Didactic Unit.. 395

K.8.2.1 First Question: Does the Guide Offer a Clear Orientation to Pre-Service Teachers to Design the Didactic Unit?.. 395

K.8.2.2 Second Question: What Interpretation Pre-Service Assign to Each Section in the Guide?.. 396

K.8.2.3 Third Question: Which are the Sections that Pre-Service Fill Out the Most?........ 396

K.8.3 For the Didactic Unit... 397

K.8.3.1 First Question: Which are Some Difficulties Pre-Service Faces when Writing Their Didactic Units?... 397

K.8.3.2 Second Question: What Kind of Objectives are Proposed and how are They Accounted for with the Mathematic Tasks?.. 397

K.8.3.3 Third Question: What Kind of Mathematic Knowledge is Recognized Spontaneously?.......... 398

K.8.3.4 Fourth Question: What Documents are Used to Design the Didactic Unit?........... 398

K.8.4 For the Elementary Algebraic Reasoning.......... 398

K.8.4.1 First Question: What are the Pre-service Teachers' Beliefs on the Inclusion of Elementary Algebraic Reasoning in Primary School Curriculum?.......... 399

K.8.4.2 Second Question: What Type of Mathematic Tasks do Pre-Service Teachers Propose to Foster Elementary Algebraic Reasoning in Pupils?.......... 400

K.8.4.3 Third Question: What Type of Elementary Algebraic Features Pre-Service Identify in their Proposed Tasks?.......... 400

K.8.4.4 Fourth Question: What Type of Mathematic Knowledge do Pre-Service Teachers Identify when Assessing Sixth Graders' Mathematic Resolutions?.......... 401

K.8.5 For the Guide to Recognise Objects and Meanings -GROM-.......... 401

K.8.5.1 First Question: How the GROM is Used Spontaneously by Pre-Service Teachers?.......... 401

K.8.5.2 Second Question: What are the Difficulties Faced by Pre-Service when Using the GROM?.......... 402

K.8.5.3 Third and Fourth Question: Which Elements in the GROM are Largely Used by Pre-Service? and Which Elements in the GROM are Barely Used by Pre-service?.......... 402

K.8.5.4 Fifth Question: Is GROM Used by Pre-service to Identify Meaning Conflicts? and Is GROM Used as a Tool for Task Re-Design by Pre-Service Teachers?........ 402

K.9 Study Limitations.......... 403

K.10 Implications for Future Research.......... 403

K.11 Derived Papers.......... 404

K.11.1 Journals.......... 404

K.11.2 International Conferences.......... 405

K.11.3 National Conferences.......... 405

K.11.4 Regional Conferences.......... 406

K.12 Contributions of the Study.......... 406

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 3.1. Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados……………………… 42

Tabla 4.1. Comparación entre Elementos Lingüísticos de Referencia y los Dados por E1……………………………………………………………………………………… 78

Tabla 4.2. Comparación entre Elementos Lingüísticos de Referencia y los Dados por E1……………………………………………………………………………………… 80

Tabla 4.3. Comparación entre los Significados Conferidos a los Procedimientos por el Estudiante y por el Análisis de Referencia………………………………………………. 82

Tabla 4.4. Comparación entre los Significados Conferidos a las Propiedades por el Estudiante y por el Análisis de Referencia………………………………………………. 84

Tabla 4.5. Comparación entre Elementos Lingüísticos de Referencia y los Dados por E3……………………………………………………………………………………… 87

Tabla 4.6. Comparación entre Elementos Conceptuales de Referencia y los Dados por E3……………………………………………………………………………………… 89

Tabla 4.7. Comparación entre Elementos Procedimentales de Referencia y los Datos por E3……………………………………………………………………………………… 91

Tabla 5.1. Elementos Lingüísticos en la Tarea de Sombrillas y Gorras…………………... 101

Tabla 6.1. Distribución de Objetivos por Grupos…………………………………………. 157

Tabla 6.2. Contenidos Matemáticos Propuestos por G1………………………………….. 161

Tabla 6.3. Contenidos Matemáticos Propuestos por G2………………………………….. 162

Tabla 6.4. Contenidos Matemáticos Propuestos por G3………………………………….. 162

Tabla 6.5. Contenidos Matemáticos Propuestos por G4………………………………….. 164

Tabla 6.6. Contenidos Matemáticos Propuestos por G5………………………………….. 164

Tabla 6.7. Contenidos Matemáticos Propuestos por G6………………………………….. 166

Tabla 6.8. Contenidos Matemáticos para Números Naturales Propuestos por G7……….. 166

Tabla 6.9. Contenidos Matemáticos para Geometría Propuestos por G7…………………. 168

Tabla 6.10. Temáticas de las Tareas Propuestas por los Grupos…………………………. 171

Tabla 6.11. Distribución de Tareas de Valores Faltantes por Grupos…………………….. 173

Tabla 6.12. Categorías en las que se Ubican las Tareas Propuestas por los Maestros en Formación……………………………………………………………………………….. 174

Tabla 6.13. Elementos Lingüísticos para la Tarea de Cambiar Letras por Números…….. 193

Tabla 6.14. Conceptos Identificados para la Tarea de Cambiar Letras por Números……. 193

Tabla 6.15. Procedimientos Identificados para la Tarea de Cambiar Letras por Números.. 194

Tabla 6.16. Propiedades Identificadas para la Tarea de Cambiar Letras por Números…… 194

Tabla 6.17. Argumentos Propuestos para la Tarea de Cambiar Letras por Números…….. 195

Tabla 6.18. Análisis Epistémico Final para una Tarea……………………………………. 197

Tabla 6.19. Correspondencia entre Objetos, Significados y Dificultades………………… 198

Tabla 6.20. Tipos de Idoneidades Consideradas por los Grupos………………………….. 207

Tabla 7.1. Objetos Lingüísticos para la Tarea de Calcular el Valor de cada Dibujo……… 229

Tabla 7.2. Objetos Conceptuales para la Tarea de Calcular el Valor de cada Dibujo…….. 230

Tabla 7.3. Elementos Procedimentales para la Tarea de Calcular el Valor de cada Dibujo.. 231

Tabla 7.4. Propiedades para la Tarea de Calcular el Valor de cada Dibujo……………….. 232

Tabla 7.5. Argumentos para la Tarea de Calcular el Valor de cada Dibujo……………….. 232

Tabla 8.1. Fuentes Documentales Usadas por los Diversos Grupos………………………. 250

Tabla J.1. Tipos de Idoneidades Consideradas por los Grupos……………………………. 371

Tabla K.1. Guide to Recognize Objects and Meanings.. 383

Tabla K.2. Documents Use by Pre-Service Teachers.. 398

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1. Esquema Jerárquico………………………………………………………… 6

Figura 1.2. Relación entre el Problema, los Capítulos, las Preguntas y los Objetivos……. 12

Figura 3.1. Significados Personales e Institucionales…………………………………... 38

Figura 3.2. Componentes y Relaciones en una Configuración Epistémica……………….. 40

Figura 3.3. Estructura General del Trabajo de Investigación…………………………... 59

Figura 4.1. Tarea de Números Cuadrados……………………………………………… 63

Figura 4.2. Tarea sobre la Diferencia de Puntos……………………………………….. 67

Figura 4.3. Solución a la Tarea de la Configuración Puntual por G1…………………….. 71

Figura 4.4. Identificación de Elementos Lingüísticos en la Tarea de Diferencia de Puntos…………………………………………………………………………..…….. 72

Figura 4.5. Conceptos Identificados por G1 en la Tarea de los Números Cuadrados……. 72

Figura 4.6. Procedimientos Identificados por G1 en la Tarea de los Números Cuadrados.. 73

Figura 4.7. Identificación de Propiedades por G1 en la Tarea de Números Cuadrados…... 73

Figura 4.8. Identificación de Argumentos por G1 en la Tarea de Números Cuadrados…... 74

Figura 4.9. Solución Dada por G3 a la Tarea de los Números Cuadrados………………… 75

Figura 4.10. Elementos Lingüísticos dados por G3 para la Tarea de los Números Cuadrados………………………………………………………………………... 75

Figura 4.11. Conceptos Identificados por G3 para la Tarea de los Números Cuadrados…. 76

Figura 4.12. Procedimientos Dados por G3 para la Tarea de los Números Cuadrados…... 76

Figura 4.13. Solución Matemática Dada por E1 a la Tarea de los Puntos………………… 77

Figura 4.14. Elementos Lingüísticos Identificados por E1…………………………….. 78

Figura 4.15. Conceptos Identificados por E1 para la Tarea de Diferencia de Puntos…….. 79

Figura 4.16. Procedimientos Identificados por E1……………………………………... 81

Figura 4.17. Propiedades Identificadas por E1……………………………………………. 83

Figura 4.18. Argumento Dado por E1………………………………………………….. 85

Figura 4.19: Solución Dada por E3 para la Tarea de los Puntos de César y Yolanda……. 85

Figura 4.20. Elementos Lingüísticos y su Significados Asociados Dados por E3………… 86

Figura 4.21. Conceptos Identificados por E3 para la Tarea de los Puntos de César y Yolanda……………………………………………………………………………….. 88

Figura 4.22. Elementos Procedimentales Identificados por E3…………………………… 90

Figura 4.23. Argumentos del Estudiante E3………………………………………………. 92

Figura 5.1. Tarea de Sombrillas y Gorras…………………………………………………. 98

Figura 5.2. Tarea sobre las Edades……………………………………………………….. 101

Figura 5.3. Tarea del Número Mayor…………………………………………………….. 104

Figura 5.4. Tarea de las Velas……………………………………………………………. 106

Figura 5.5. Tarea de Completar la Tabla…………………………………………………. 109

Figura 5.6. Solución Numérica a la Tarea de Sombrillas y Gorras………………………. 113

Figura 5.7. Solución a la Tarea de las Edades……………………………………………. 115

Figura 5.8. Solución a la Tarea del Número Mayor………………………………………. 117

Figura 5.9. Justificación de la Solución a la Tarea del Número Mayor…………………… 117

Figura 5.10. Estrategia de Resta para la Tarea de las Velas………………………………. 119

Figura 5.11. Estrategia de Agrupación para la Tarea de las Velas………………………... 120

Figura 5.12. Estrategia de División para la Tarea de las Velas…………………………… 120

Figura 5.13. Solución a la Tarea de Completar la Tabla………………………………….. 121

Figura 5.14. Solución Numérica a la Tarea de Sombrillas y Gorras………………………. 123

Figura 5.15. Solución Algebraica Dada por E1 a la Tarea de Sombrillas y Gorras………. 124

Figura 5.16. Solución Algebraica y Numérica a la Tarea de Sombrillas y Gorras………... 126

Figura 5.17. Solución Algebraica Dada por E2 a la Tarea de Sombrillas y Gorras……….. 127

Figura 5.18. Continuación Solución Algebraica Dada por E2 a la Tarea de Sombrillas y Gorras………………………………………………………………………………. 127

Figura 5.19. Solución Algebraica Dada por E3 a la Tarea de Sombrillas y Gorras………. 130

Figura 5.20. Solución Dada por G4 a la Tarea de las Edades…………………………….. 135

Figura 5.21. Solución Dada por el Niño Uno a la Tarea del Número Mayor…………….. 136

Figura 5.22. Solución Dada por el Niño Dos a la Tarea del Número Mayor…………….. 138

Figura 5.23. Estrategia de División para la Tarea de las Velas…………………………… 141

Figura 5.24. Solución Numérica Dada por G3 a la Tarea de las Velas…………………… 143

Figura 6.1. Ejemplo de Tarea de Valores Faltantes………………………………………. 172

Figura 6.2. Ejemplo de Tarea sobre Letra Evaluada……………………………………… 174

Figura 6.3. Primera parte de la Solución de la Tarea de Sombrillas y Gorras……………. 175

Figura 6.4. Tarea de Cambiar Letras por Números………………………………………. 176

Figura 6.5. Ejemplo de Tarea sobre Incógnitas…………………………………………… 178

Figura 6.6. Ejemplo de Tarea de Problemas de Palabras…………………………………. 179

Figura 6.7. Fragmento de la Solución a la Tarea de Problema de Palabras………………. 180

Figura 6.8. Fragmento Final de la Solución a la Tarea de Problema de Palabras………… 180

Figura 6.9. Ejemplo de Tarea Numérico-Algebraica……………………………………… 181

Figura 6.10. Ejemplo de Tarea de Patrón o Regla………………………………………… 182

Figura 6.11. Tarea Original que fue Modificada para ser RAE…………………………... 183

Figura 6.12. Tarea sobre la Reproducción Celular……………………………………….. 183

Figura 6.13. Tarea Original sobre Reproducción Celular………………………………… 184

Figura 6.14. Ejemplo de Tarea de Representación de Relaciones Numéricas…………..… 185

Figura 6.15. Otro Ejemplo de Tarea de Representación de Relaciones Numéricas………. 186

Figura 6.16. Ejemplo de Tarea de Valores Numéricos Desconocidos……………………. 187

Figura 6.17. Ejemplo de Tarea sobre Cálculo de Expresiones…………………………… 188

Figura 6.18. Consigna y Solución de la Tarea de Cambiar Letras por Números Propuesto por G1…………………………………………………………………………………… 191

Figura 6.19. Ejemplo de Tarea con Dos Valores Faltantes Propuesto por G4…………… 191

Figura 6.20. Ejemplo de Tarea con Dos Valores Faltantes y su Análisis Epistémico Propuesto por G4………………………………………………………………………... 196

Figura 6.21. Fragmento del Manuscrito del Análisis Epistémico Correspondiente a los Conceptos Propuesto por G4……………………………………………………………. 196

Figura 6.22. Dos Segmentos de la Propuesta de Dificultades por G2……………………. 199

Figura 6.23. Enunciado y Solución a la Tarea Propuesta por G5………………………… 201

Figura 6.24. Conflictos de Significado Propuestos por G5………………………………. 202

Figura 6.25. Enunciado y solución a la Tarea sobre Diámetro y Longitud Propuesto por G6…………………………………………………………………………………….. 203

Figura 6.26. Elementos para el Diseño de la Unidad Didáctica y Algunas Relaciones entre Ellas…………………………………………………………………………………… 203

Figura 6.27. Tarea de Cambiar Letras por Números Propuesta por G1…………………… 210

Figura 6.28. Conflictos de Significado Asociados a Elementos Lingüísticos Propuestos por G1……………………………………………………………………………………… 210

Figura 6.29. Conflictos Asociados a Conceptos Propuestos por G1……………………… 211

Figura 6.30. Conflictos Asociados a Procedimientos Propuestos por G1………………… 211

Figura 6.31. Conflictos de Significado Propuestos por G5……………………………….. 212

Figura 7.1. Primera Actividad con los Maestros en Formación…………………………... 218

Figura 7.2. Respuesta de un maestro a la Tarea…………………………………………… 218

Figura 7.3. Tarea Propuesta por un Maestro………………………………………………. 220

Figura 7.4. Análisis Epistémico Realizado por un Grupo de Maestros…………………… 222

Figura 7.5. Enunciado y Solución de la Tarea sobre Relación Numérica………………… 224

Figura 7.6. Enunciado y Solución de la Tarea sobre el Valor de cada Dibujo……………. 226

Figura 7.7. Conocimientos Matemáticos Considerados para Resolver la Tarea sobre el Valor de cada Dibujo……………………………………………………………….. 227

Figura 7.8. Enunciado y Solución de la Tarea “Calcula el Valor de cada Dibujo”……….. 229

Figura 7.9. Primera Propuesta de Conflictos de Significado……………………………… 234

Figura 7.10. Propuesta Final de Conflictos de Significado……………………………….. 235

Figura 7.11. Fotograma de la Presentación de la Unidad Didáctica……………………… 237

Figura 8.1. Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados…………………….. 260

Figura 8.2. Esquema del Análisis Didáctico……………………………………………… 264

Figura 8.3. Relación entre Guía para la Elaboración de la Unidad Didáctica y los Niveles de Análisis Didáctico y Análisis Epistémico……………………………………………. 266

Figura 8.4. Diagrama de la Nueva Propuesta de Integración del Análisis Didáctico y el Análisis Epistémico en la Elaboración de la Unidad idáctica……………….…………... 267

Figura A.1. Consigna y Solución de la Primera Tarea en la Práctica 1…………………… 303

Figura A.2. Consigna y Solución de la Segunda Tarea en la Práctica 1…………………... 305

Figura A.3. Consignas de la Práctica 2……………………………………………………. 306

Figura A.4. Práctica sobre Evaluación……………………………………………………. 312

Figura B.1. Prueba Uno…………………………………………………………………… 316

Figura B.2. Prueba Dos…………………………………………………………………… 318

Figura B.3. Prueba Tres…………………………………………………………………… 320

Figura C.1. Solución de Carácter Algebraico……………………………………………… 324

Figura C2. Solución de Carácter Aritmético………………………………………………. 324

Figura C.3. Primera Solución a la Tarea de Escribir el Número Mayor…………………... 325

Figura C.4. Segunda Solución a la Tarea de Escribir el Número Mayor………………….. 325

Figura C.5. Solución a la Tarea de las Velas Mediante la Estrategia de Resta……………. 326

Figura C.6. Solución a la Tarea de las Velas Mediante la Estrategia de División………… 326

Figura C.7. Solución a la Tarea de Completar la Tabla…………………………………… 327

Figura C.8. Solución a la Tarea de las Edades…………………………………………….. 327

Figura D.1. Guía para la Elaboración de la Unidad Didáctica…………………………….. 330

Figura E.1. Segmento del Real Decreto 1513/2006, de 7 de Diciembre que Incluye los Objetivos……………………………………………………………………………… 334

Figura F.1. Tarea de División, Potencias y Raíz Cuadrada……………………………... 339

Figura F.2. Tarea de Múltiplos y Divisores……………………………………………... 340

Figura F.3. Tarea para Completar………………………………………………………. 340

Figura F.4. Tarea de Copiar y Completar……………………………………………….. 340

Figura F.5. Tarea sobre Propiedades…………………………………………………… 341

Figura F.6. Tarea de Comparación de Enteros…………………………………………. 342

Figura F.7. Tarea de Lectura de Números Naturales……………………………………… 342

Figura F.8. Tarea sobre el Cromo……………………………………………………… 342

Figura G.1. Actividades de Refuerzo y Ampliación Propuestas por G1…………………. 344

Figura G.2. Actividades de Refuerzo y Ampliación Propuestas por G2…………………. 346

Figura G.3. Actividades de Refuerzo y Ampliación Propuestas por G3…………………. 347

Figura G.4. Actividades de Refuerzo y Ampliación Propuestas por G4…………………. 349

Figura G.5. Actividades de Refuerzo y Ampliación Propuestas por G5…………………. 353

Figura G.6. Actividades de Refuerzo y Ampliación Propuestas por G6…………………. 356

Figura H.1. Evaluación e Instrumentos Propuestos por G1……………………………… 358

Figura H.2. Instrumentos de Evaluación Propuestos por G2………………………….. 360

Figura H.3. Criterios, Evaluación e Instrumentos Propuestos por G3……………………. 361

Figura H.4. Criterios de Evaluación Propuestos por G4………………………………….. 362

Figura H.5. Los Criterios de Evaluación Propuestos por G5……………………………... 363

Figura H.6. Criterios, Instrumentos y Criterios de Calificación Propuestos por G6……… 363

Figura H.7. Criterios de Evaluación para los Números Naturales Propuestos por G7……. 364

Figura I.1. Pauta de Idoneidad………………………………………………………….…. 368

Figura J.1. Valoración de la Unidad Didáctica por G1……………………………………. 372

Figura J.2. Valoración de la Unidad Didáctica por G4……………………………………. 373

Figura J.3. Valoración de la Unidad Didáctica por G5……………………………………. 375

Figure K.1. OSA Primary Entities.. 381

Figure K.2. Didactic Analysis and Epistemic Analysis.. 384

Figure K.3. Research Structure.. 391

Figure K.4. Integration of Didactic Analysis, Epistemic Analysis and Suitability Assessment………………………………………………………………………. 392

CAPÍTULO 1
EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN: CONTEXTUALIZACIÓN, OBJETIVOS Y PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

1.1 Introducción

El diseño instruccional es una actividad cotidiana para el maestro, en la cual se involucran diversos aspectos tales como los epistémicos (contenidos), los cognitivos, los didácticos, y de manera genérica, el conocimiento pedagógico del contenido. El proceso de diseño instruccional requiere que el maestro defina el tema, determine la audiencia, adapte la instrucción al desarrollo cognitivo de los niños, proponga y desarrolle los objetivos, las estrategias de evaluación, de valoración y revisión del proceso.

John Dewey (1928) llamó la atención sobre el desarrollo de una "ciencia que vinculara" las teorías del aprendizaje y la práctica educativa. Reigeluth (2000) define el diseño instruccional como "un cuerpo de conocimiento que dictamina acciones instruccionales para optimizar los resultados instruccionales deseados, tales como el desempeño y el afecto", (p. 5). Para Andrews y Goodson (1980, p. 5) "*la formulación de una estrategia instruccional que se adecue al tema de estudio y a los requerimientos de los individuos es una parte integral de la mayoría de los modelos instruccionales*".

El diseño instruccional es una actividad que es motivo de atención en las escuelas de educación y en los programas de formación de maestros. Existen diversos procedimientos que orientan el diseño instruccional, tales como el planteamiento de objetivos o de lineamientos curriculares. En algunos estudios se proponen herramientas tipo "scaffolding" (apoyo o andamiaje) que respaldan la reflexión durante el diseño instruccional; algunos investigadores reportan que la escritura de portafolios puede ayudar en el proceso de reflexión requerido para diseñar con arreglo a objetivos (Andrusyszyn y Daive, 1997); otros sugieren que preguntas bien diseñadas y provocativas y la propuesta de diseño de actividades para que los maestros identifiquen conceptos pueden servir para motivar tanto el diseño instruccional como la reflexión en los maestros (Barrow, 1998; Griffith y Frieden, 2000; Kinchin y Hay, 2000).

En la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada, específicamente en los cursos de formación en didáctica de las matemáticas, se suele pedir a los estudiantes que diseñen unidades didácticas para ser enseñadas (potencialmente) a los niños. Esta actividad se justifica desde dos frentes: El primero es que el diseño instruccional es una competencia que debe ser desarrollada por los maestros, en tanto que formará parte cotidiana de su desempeño profesional; el segundo es que el diseño instruccional sobre un tema específico suele ser valorado en las oposiciones al cuerpo de maestros.

Algunos autores reconocen que si bien el diseño instruccional es una propuesta potencial, cuya adecuación y pertinencia se determina en el aula de clase (Rimm-Kaufman y Sawyer, 2004) también es cierto que los maestros en formación deben experimentar de primera mano los detalles y peculiaridades del diseño instruccional.

Este trabajo se ocupa del Análisis Didáctico, que se define como un proceso que comprende cuatro niveles de los cinco considerados por Font, Planas y Godino (2010, p. 3):

Nivel 1. Identificación de prácticas matemáticas.
Nivel 2. Identificación de objetos y procesos matemáticos.
Nivel 3. Descripción de interacciones en torno a conflictos.
Nivel 4. Valoración de la posible didáctica del proceso de instrucción.

El segundo nivel se ha modificado, y se ocupará ahora de la “Identificación de objetos y significados matemáticos”, igualmente se ha modificado el cuarto nivel, para adecuarlo a la población de maestros en formación y el quinto nivel: Identificación de normas, no se considera en este trabajo.

En el tercer capítulo de este informe se discute esta aproximación al análisis didáctico y se justifica su pertinencia desde el marco teórico de referencia. Así nuestro enfoque del Análisis Didáctico considera los siguientes cuatro niveles:

Nivel 1. Identificación de prácticas matemáticas.
Nivel 2. Identificación de objetos y significados matemáticos.
Nivel 3. Descripción de interacciones en torno a conflictos.
Nivel 4. Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción.

La literatura sugiere que la reflexión realizada con arreglo al diseño de una lección es un elemento importante en los procesos formativos de maestros y que varios elementos en la planeación de una unidad temática pueden ayudar a los maestros a desarrollar una actitud crítica frente a la instrucción (Andrusyszyn y Daive, 1997; Lin, X; Hmelo, C; Kinzer, C y Secules, T , 1999; Griffith y Frieden, 2000).

1.2 El Problema de Investigación

En este trabajo de investigación indagaremos sobre las competencias[1] de análisis didáctico de un grupo de maestros en formación, cuando realizan el diseño de una unidad didáctica en un tema matemático específico. Adicionalmente se indagará sobre la pertinencia de una herramienta que se ha diseñado para ayudar a identificar objetos y significados matemáticos puestos en juego durante la resolución de tareas matemáticas. El tema matemático sobre el que se propuso diseñar la unidad didáctica fue el de razonamiento algebraico elemental, específicamente el razonamiento algebraico elemental para el sexto grado de escuela elemental (11-13 años).

Es así como en este trabajo indagaremos sobre las competencias de análisis didáctico de un grupo de maestros en formación, cuando diseñan una unidad didáctica sobre el razonamiento algebraico elemental para el sexto grado de educación primaria. La literatura sugiere que la reflexión realizada con arreglo al diseño de una lección es un elemento importante en los procesos formativos de maestros y que varios elementos en el diseño instruccional pueden ayudar a los estudiantes a desarrollar una actitud crítica frente a la instrucción (Andrusyszyn y Daive, 1997; Lin et al., 1999; Griffith y Frieden, 2000).

1.3 Origen y Motivación de la Investigación

En diversos trabajos investigativos adelantados por autores tales como Carpenter y Levi (1999), Kaput (2000), Van Ameron (2002), el ICMI Study (2001); Kieran (1991) se pone de manifiesto las dificultades relacionadas con el aprendizaje y enseñanza del álgebra en la escuela.

Kaput (2000) y Davis (1985), entre otros, propusieron la inclusión del razonamiento algebraico elemental en el currículo de la escuela elemental como una vía para evitar que el álgebra se constituya en un factor de exclusión escolar. Sin embargo, la inclusión curricular del álgebra se enfrenta con algunas dificultades, entre ellas la formación de los maestros.

En el contexto investigativo del razonamiento algebraico elemental hay dos preguntas que se formulan (Carraher y Schliemann, 2007; p. 675): ¿Pueden los escolares realmente tratar con el álgebra?, y ¿Pueden los maestros de primaria enseñar álgebra? Los resultados de investigación

[1] En la sección 3.2.2 del tercer capítulo se dará una aproximación al concepto de competencia tal como lo usaremos en este trabajo.

informan que los niños ciertamente pueden resolver tareas que tradicionalmente se han considerado propias del álgebra (Carpenter, Frankle y Levi, 2003); sin embargo los resultados de las investigaciones advierten que los maestros no están igualmente preparados para reconocer y promover el razonamiento algebraico expresado por los escolares. Por tanto, la investigación acerca de la formación de profesores que promueva el pensamiento algebraico es tema de interés Borko, Frykholm, Pittman, Eiteljorg, Nelson, Jacobs, Koellner-Clark, y Schneider, (2005).

Es así como nos interesamos en explorar una variación de la segunda pregunta en el contexto de la formación de maestros de escuela primaria, y en consecuencia nos planteamos algunas cuestiones en relación con los maestros en formación[2] y el razonamiento algebraico elemental, en tanto que no muy a menudo ni la comprensión de los estudiantes en formación ni sus competencias de análisis didáctico es motivo de indagación (Ball, 1990).

En tanto que la investigación motivo de esta memoria doctoral considera varios campos imbricados, en lo que sigue se indicarán las preguntas que se plantean en cada uno de ellos.

En lo que sigue se hará una introducción general de algunos de los elementos que se han considerado en la indagación; las preguntas y los objetivos. Posteriormente se indicará la estructura del trabajo de investigación y cómo los capítulos, incluidos en esta memoria, informan sobre los elementos considerados, del proceso investigativo y de los hallazgos.

1.4 El Tema Matemático: Algebra en la Escuela Primaria

La enseñanza y el aprendizaje del álgebra ha dado origen a muchas investigaciones en didáctica de las matemáticas; la mayoría de tales investigaciones han mostrado las dificultades de los alumnos en temas diversos, tales como: El signo igual, problemas de palabras, solución de ecuaciones lineales, equivalencia de expresiones algebraicas, modelación; entre otros.

Otras investigaciones han resaltado las dificultades de los maestros para abordar la solución de tareas algebraicas así como para promover la enseñanza del álgebra y para remediar las dificultades de aprendizaje por parte de los alumnos. Se considera que para que los maestros en formación puedan reconocer y promover el razonamiento algebraico elemental en sus alumnos es necesario que ellos mismos desarrollen "conciencia" de cómo algunas prácticas aritméticas

[2] En este contexto entenderemos como "maestros en formación" a los estudiantes inscritos en la especialidad de maestro de primaria. Usaremos los términos "futuros maestros", "profesores" y "estudiantes" en acepciones equivalentes. Los niños de escuela elemental serán referidos como niños, escolares o alumnos.

pueden ser concebidas como prácticas algebraicas y ellos mismos reconozcan el entramado de significados matemáticos de carácter aritmético y algebraico presentes en tareas matemáticas en la escuela primaria.

La transformación de las competencias didácticas, por parte de los maestros, que favorezca ampliar sus concepciones acerca de lo que es el álgebra en la escuela primaria para que puedan reconocer y promover el razonamiento algebraico que sus alumnos manifiesten, además de transformar las prácticas aritméticas en la escuela elemental podría servir para tender un puente entre las prácticas aritméticas y las prácticas algebraicas presentes en la escuela secundaria.

Una visión sobre la investigación en el tema del razonamiento algebraico elemental, los niños y los maestros en formación se plantea en el segundo capítulo.

1.5 Un Instrumento de Apoyo del Análisis Didáctico

Para Blanton y Kaput (2005): "*la mayoría de los profesores de escuela elemental tienen poca experiencia con los aspectos ricos y conexos del razonamiento algebraico elemental…*" y agregan "*…debemos proveer formas apropiadas de apoyo profesional que produzca cambio en las prácticas curriculares*" (p. 414). Por tanto se ha considerado pertinente proveer a los maestros en formación con una herramienta que favorezca el reconocimiento de los conocimientos matemáticos, sus relaciones y su adecuación para la enseñanza, en el contexto del diseño de una unidad didáctica.

El Enfoque Onto-Semiótico (EOS) de la Cognición e Instrucción Matemática (Godino, Batanero y Font, 2007) ha introducido la noción de configuración de objetos y significados como un recurso para describir los conocimientos matemáticos puestos en juego en la resolución de una tarea matemática.

La noción se concreta en una herramienta denominada Guía de Reconocimiento de Objetos y Significados (GROS) que comprende la identificación de los tipos de objetos o entidades primarias referidas, puestas en juego en la solución de la tarea agrupadas en los siguientes tipos: Elementos lingüísticos (términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas), conceptos (entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición), procedimientos (técnicas, operaciones, algoritmos), propiedades (enunciados para las cuales se requiere una justificación o prueba) y argumentos (justificaciones, demostraciones, o pruebas de las proposiciones usadas). Así mismo, para cada una de estas entidades se identifican posibles conflictos de significado que podrían surgir durante la actividad de resolución de la tarea por parte de los niños.

Esta herramienta vincula la competencia referida al diseño de un proceso de estudio didáctico-matemático, en tanto que requiere la selección y resolución de tareas matemáticas con fines didácticos, con la competencia referida al uso y reconocimiento de objetos y significados matemáticos para la identificación de conflictos potenciales en el desarrollo del razonamiento algebraico elemental (RAE). En Godino, Rivas, Castro y Konic (2008) se ilustra el uso potencial de la herramienta. La herramienta y el uso planteado para ella se explicitan en los capítulos cuarto y quinto. La Figura 1.1. Muestra un esquema jerárquico que vincula los elementos mencionados.

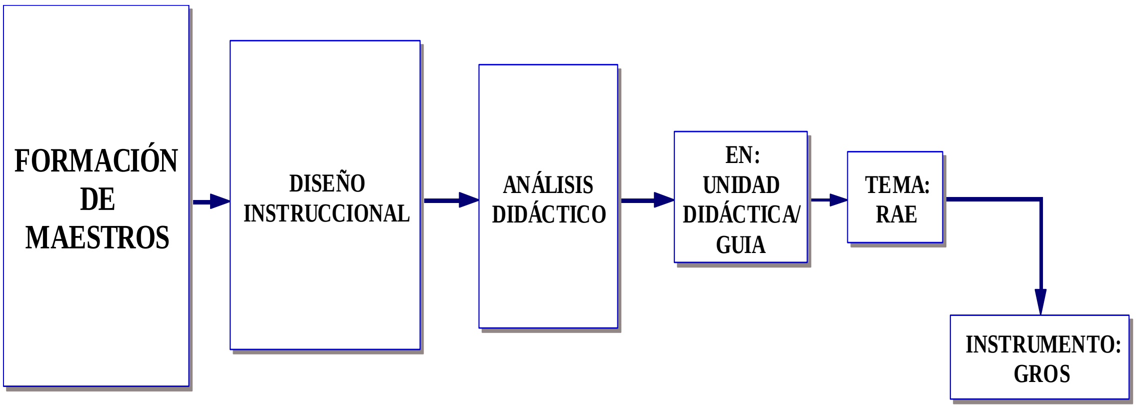


Figura 1.1. Esquema Jerárquico.

1.6 Preguntas de Investigación

Las preguntas que se indagan en la investigación se agrupan de acuerdo con algunos de los elementos mencionados en la Figura 1.1.

- **Para el Análisis Didáctico**: Las preguntas para el Análisis Didáctico se dividen en dos grupos: Aquellas para la aproximación al Análisis Didáctico y las relacionadas con su uso por parte de los maestros en formación.

   1) ¿Qué interpretación dan los estudiantes a cada uno de los niveles del Análisis Didáctico?
   2) ¿Qué interpretación dan los estudiantes al concepto de Idoneidad?
   3) ¿Cuáles niveles son mayoritariamente usados por los estudiantes?
   4) ¿Cuáles niveles son ignorados por los estudiantes?
   5) ¿Son los niveles de Análisis Didáctico apropiados para diseñar una unidad didáctica?

- **Para la Guía:**

  1) ¿En qué medida la guía para el diseño de la Unidad Didáctica orienta al estudiante para la elaboración de la Unidad?
  2) ¿Qué interpretación confieren a cada uno de los incisos en los que se ha dividido la Guía?
  3) ¿Cuáles son los incisos propuestos en la Guía que los estudiantes cumplimentan más?

- **Para la Unidad Didáctica**:

  1) ¿Cuáles son algunas dificultades que los estudiantes enfrentan para escribir la Unidad Didáctica?
  2) ¿Qué tipo de objetivos proponen y cómo los cumplimentan con las actividades matemáticas propuestas?
  3) ¿Qué tipo de conocimientos matemáticos reconocen espontáneamente?
  4) ¿Qué tipo de recursos y fuentes documentales utilizan para apoyar la elaboración de la Unidad Didáctica?

- **Para el Razonamiento algebraico elemental-RAE-**:

  1) ¿Cuáles son las creencias sostenidas por los maestros en formación en relación con la inclusión del razonamiento algebraico en la escuela primaria?
  2) ¿Qué tipo de tareas matemáticas proponen los maestros en formación para promover el razonamiento algebraico elemental?
  3) ¿Qué tipo de elementos algebraicos identifican en las tareas propuestas?
  4) ¿Cuáles conocimientos matemáticos identifican cuando valoran tareas resueltas por niños de escuela primaria?

- **Para el instrumento de análisis de conocimientos matemáticos-GROS-**:

  1) ¿Cuál es el nivel de uso que los estudiantes dan, espontáneamente, a la GROS?
  2) ¿Cuáles son las dificultades que los estudiantes manifiestan cuando usan la GROS?
  3) ¿Cuáles aspectos de la GROS son mayoritariamente usados por los estudiantes?
  4) ¿Cuáles aspectos de la GROS son poco trabajados por los estudiantes?
  5) ¿Usan los estudiantes la GROS para identificar conflictos de significado?
  6) ¿Usan los estudiantes la GROS para proponer ejercicios de refuerzo y ampliación?

A continuación se plantean los objetivos de investigación, los cuales se dividen en: Objetivo general y objetivos específicos.

1.7 Objetivos de Investigación

1.7.1 Objetivo General

El objetivo general en esta investigación es la evaluación y desarrollo de competencias de análisis didáctico de tareas sobre razonamiento algebraico elemental. Así mismo se indaga sobre las concepciones sobre el razonamiento algebraico elemental manifestadas por maestros en formación en la especialidad de maestro de primaria, en tanto que diseñan una unidad didáctica.

Este objetivo general se particulariza en los siguientes objetivos específicos:

1.7.2 Objetivos Específicos

- Objetivos para el Análisis Didáctico (O-AD):
  O-AD1. Valorar la pertinencia de los cuatro niveles para el Análisis Didáctico.
  O-AD2. Identificar fortalezas y debilidades de la aproximación al Análisis Didáctico.

- Objetivos para el Razonamiento Algebraico Elemental (O-RAE):
  O-RAE1. Identificar tipos de tareas que los maestros en formación proponen para promover el razonamiento algebraico elemental.
  O-RAE2. Identificar creencias de los maestros en formación acerca del razonamiento algebraico elemental.
  O-RAE3. Determinar si existe evolución en las creencias de los estudiantes sobre el RAE como consecuencia de las actividades de asesoría y elaboración de la Unidad Didáctica.

- Objetivos en relación con el Marco Teórico de Referencia, el Enfoque Onto-semiótico (O-MT):
  O-MT1. Valorar la pertinencia de algunos conceptos del EOS usados tanto en la definición del Análisis Didáctico como en la Guía de Reflexión de Objetos y Significados (GROS).
  O-MT2. Valorar la aproximación EOS al Razonamiento Algebraico Elemental, en tanto que es usado por maestros en formación.

1.8 Pertinencia de la Investigación

La problemática de la enseñanza y aprendizaje del álgebra en la secundaria ha sido estudiada y las dificultades de los escolares ampliamente documentada. Una propuesta de solución es incluir el álgebra en el currículo de la escuela primaria para brindar oportunidades a los escolares de trabajar con conceptos matemáticos propios del álgebra desde etapas tempranas de su desarrollo, esto en razón a que el álgebra es una herramienta tan poderosa como compleja. De acuerdo con Santrock (2001) el razonamiento simbólico se ve como un producto derivado de un proceso más general de maduración.

La implantación de una tal propuesta requiere la indagación de varios aspectos vinculados: Una ampliación de lo que se entiende curricularmente como "razonamiento algebraico elemental", identificar algunas competencias de los escolares para tratar con el álgebra elemental y, finalmente estudiar la formación de los maestros para asumir la inclusión del álgebra.

Para Doerr (2001) la articulación entre el conocimiento de los maestros y la enseñanza del álgebra es un tema pertinente de investigación, y afirma:

> *Ha habido poca investigación acerca del conocimiento y práctica de los maestros y sobre su desarrollo en relación con la enseñanza y aprendizaje del álgebra. Mucho de lo que se conoce acerca del conocimiento de los maestros señala tanto algunas deficiencias en el conocimiento matemático como las complejidades de traducir el conocimiento del contenido en formas útiles de enseñanza. (p. 285).*

Por tanto, la investigación acerca de la formación de profesores que promueva el pensamiento algebraico es tema de interés (Borko, Frykholm, et al., 2005). En dos de los seis estándares profesionales para la enseñanza de las matemáticas de la NCTM (*The Professional Standards for Teaching Mathematics*, 1991, p. 17 de la versión electrónica), se resalta el rol del maestro en el discurso matemático y en las tareas pertinentes propuestas a los estudiantes.

La relación entre el conocimiento del contenido matemático, el rol del maestro y los logros de los niños ha sido motivo de estudio; algunos investigadores han argumentado que la habilidad de los maestros para entender y para usar el conocimiento matemático adecuándolo a las tareas de la enseñanza tiene efecto en los logros de los niños (Ball, 1990; Shulman, 1986; Wilson, Shulman y Richert, 1987). Adicionalmente Fernández y Jones (2006) resaltan que los futuros profesores de primaria al estudiar matemáticas se están entrenando en el uso de las ideas que posteriormente impartirán a sus alumnos.

Diversos reportes de investigación informan sobre las competencias de los maestros en formación para reconocer y promover el razonamiento algebraico elemental. Asquith, Stephens, Knuth y Alibali (2007) reportan que los maestros activos manifiestan dificultades para identificar las concepciones erróneas relacionadas con la variable o con el signo igual. Jacobs, Franke, Carpenter, Levi y Battey (2007) reportan algunas limitaciones en las concepciones de los maestros en relación con el álgebra en la primaria. Los hallazgos de Stephens (2008) indican que los maestros vinculan el álgebra con manipulación simbólica, valoran la manipulación simbólica sobre el pensamiento relacional. Van Dooren, Verschaffel y Onghema (2002) encontraron una fuerte relación entre los métodos de solución aritméticos o algebraicos preferidos por los maestros y las valoraciones que hacen de las soluciones provistas por los niños. Blanton y Kaput (2005) reportan sus hallazgos sobre la "algebrización" del currículo hecho por una maestra de escuela elemental.

Se colige de los párrafos anteriores que una investigación que asuma como foco central a los maestros en formación, sus conocimientos matemáticos en el contexto de la planeación para la enseñanza, un enfoque particular para el razonamiento algebraico, y sus creencias en relación con el álgebra en tanto que diseñan una unidad didáctica, es de interés para la comunidad de investigación en educación matemática.

Adicionalmente, la investigación se ubica en un contexto investigativo que reconoce y asume las condiciones naturales en las que se desenvuelve un programa de formación de profesores que no se centra en la didáctica del álgebra, por tanto los hallazgos serán de interés en tanto que podrían ser aplicados a contextos educativos que compartan las especificidades de nuestro contexto.

Los resultados de una tal investigación podrían ser usados para diseñar planes de formación y proponer estrategias para que los maestros puedan asumir la inclusión curricular del álgebra en la escuela primaria.

1.9 Organización del Documento

En este primer capítulo hemos contextualizado y delimitado la investigación, planteado las preguntas y los objetivos. A continuación indicaremos la organización del documento.

El segundo capítulo hace una revisión sobre el estado del arte en el razonamiento algebraico elemental, enfatizando dos aspectos: Logros de los niños y logros de los maestros en formación.

El tercer capítulo se ocupa de explicitar el marco teórico y la metodología usada para abordar el problema. Se comentan los elementos teóricos considerados, las relaciones entre ellos, y con el problema que nos ocupa, adicionalmente se discute sobre la validez y la confiabilidad.

El cuarto capítulo versa sobre la evaluación y desarrollo de competencias de análisis epistémico de tareas tipo RAE. En este capítulo se exhiben y comentan los análisis epistémicos que los estudiantes hicieron de dos tareas tipo RAE propuestas por el formador. Los estudiantes utilizaron la herramienta GROS para efectuar los análisis.

El quinto capítulo trata sobre la evaluación y desarrollo de competencias para el análisis cognitivo de tareas RAE realizadas por maestros en formación. Los maestros analizaron las soluciones dadas por niños, de sexto grado de escuela elemental, a tareas matemáticas extraídas de su libro texto.

El sexto capítulo trata sobre el desarrollo de competencias para el análisis didáctico. En este capítulo se estudian las unidades didácticas realizadas por los maestros en formación.

El séptimo capítulo se dedica al estudio de dos casos. Se ilustra en el proceso experimentado por dos grupos de estudiantes durante el proceso de diseño y discusión de la unidad didáctica.

El octavo capítulo considera las conclusiones de la investigación. Se indica cómo se han respondido a las preguntas de investigación, cómo se han logrado los objetivos planteados, se discuten algunas implicaciones, igualmente se señalan algunas limitaciones del estudio, así como algunas contribuciones y finalmente, ideas para futuras investigaciones.

En los Anexos se incluyen prácticas con maestros, tablas, cuestionarios, soluciones de tareas por niños de escuela elemental, etc. Igualmente se encuentra un resumen en inglés de la tesis.

La Figura 1.2 ofrece un esquema que pone en relación el problema, los capítulos, las preguntas y los objetivos. Los vínculos planteados pretenden orientar pero no son los únicos que se encuentran en el trabajo.

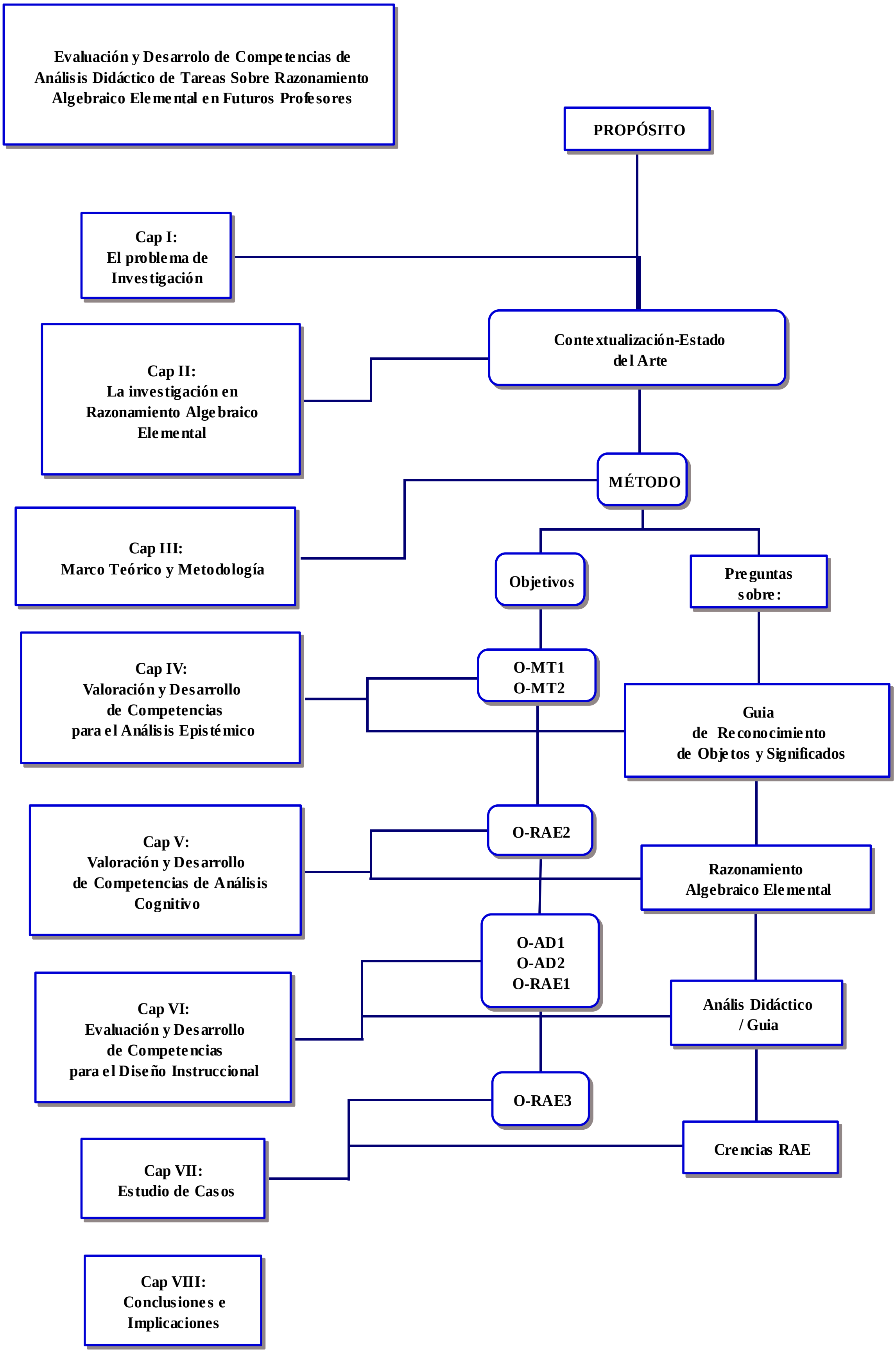


Figura 1.2. Relación entre el Problema, los Capítulos, las Preguntas y los Objetivos.

CAPÍTULO 2
LA INVESTIGACIÓN EN RAZONAMIENTO ALGEBRAICO ELEMENTAL

2.1 Introducción

En este capítulo se hará una revisión de los principales trabajos de investigación que abordan dos temáticas: El razonamiento algebraico elemental y la formación de maestros.

La revisión de la literatura que se propone en esta sección provee tanto los antecedentes para la investigación como una perspectiva del trabajo de investigación en el conjunto de problemáticas propias del campo de investigación. Las temáticas, las metodologías, las conclusiones y las propuestas de las investigaciones realizadas en dos campos diferentes pero íntimamente unidos se esbozarán en este apartado: La investigación sobre el razonamiento algebraico elemental y los niños de escuela primaria; y la investigación sobre el razonamiento algebraico elemental y los maestros en formación. Así mismo se incluyen referencias de algunos trabajos que reportan la incorporación del razonamiento algebraico elemental en los currículos de algunos países.

2.2 Algunas Aproximaciones al RAE

Diversas investigaciones, sobre la inclusión del razonamiento algebraico en la escuela elemental, se han efectuado desde que autores tales como Davis (1985,1989), Vergnaud (1988), argumentaron a favor de la enseñanza del álgebra en la escuela primaria para preparar mejor a los niños y jóvenes para tratar con los aspectos epistemológicos propios del álgebra.

Diversas investigaciones (Wagner y Kieran, 1989; Kieran, 1992; Bednarz, Kieran, y Lee, 1996; Socas, 2007) han evidenciado las dificultades de los niños en el tránsito desde la aritmética hasta el álgebra en el contexto curricular de la escuela secundaria. Estas investigaciones han señalado temas de investigación, así como caracterizaciones del razonamiento algebraico elemental que posteriormente definieron temáticas de investigación sobre la inclusión del álgebra en la escuela primaria.

Entre tales caracterizaciones se encuentran las de:

- Usiskin (1988). Propone cuatro concepciones del álgebra: Aritmética generalizada; el conjunto de procedimientos usados para resolver ciertos problemas; el estudio de las relaciones entre cantidades, y finalmente, el estudio de la estructura.
- Kaput (1998). Identificó cinco aspectos propios del álgebra: Generalización y formalización; El estudio de las funciones, relaciones y la variación conjunta; y la modelación.
- La NCTM (1998; p. 161). Propuso cuatro organizadores curriculares para el álgebra escolar: Funciones y relaciones; modelación; estructura, y finalmente, lenguaje y representación. En el año 2000 la NCTM afirma que el álgebra en la escuela primaria "*enfatiza las relaciones entre cantidades, que incluye a las funciones, formas de representar las relaciones matemáticas, y el análisis del cambio*" (p. 37).
- Bass (1998). Adoptó una definición más tradicional del álgebra, como la totalidad del sistema numérico, las operaciones aritméticas, el ordenamiento lineal y las ecuaciones.
- Kieran (1996). Propuso categorizar el álgebra escolar de acuerdo con las actividades que se pueden proponer a los niños: Actividades generativas, transformacionales, y actividades globales de meta-nivel.
- La Joint Mathematical Council of the United Kingdom (1996). Reconoce actividades que considera precursoras del álgebra y que pueden ser trabajadas tanto en la escuela primaria como en la secundaria. Afirma "*hay una necesidad de enfatizar aspectos de meta-razonamiento en el trabajo algebraico y hacerlo parte de la enseñanza*" (p. 14).
- Kaput (1998). Amplió su propuesta del año 1995 e identificó cinco formas interrelacionadas del pensamiento algebraico: Álgebra como una forma de generalizar y formalizar patrones y regularidades, en particular el álgebra como una aritmética generalizada; como una forma de manipulación simbólica, sintácticamente guiada; como el estudio de la estructura y los sistemas, abstraídos de los cálculos y las relaciones; como el estudio de las funciones, las relaciones, y la variación conjunta y finalmente, álgebra como modelación.
- Burkhardt (2001). Propuso una taxonomía para lo que significa hacer álgebra, que comprende quince aspectos. Es una propuesta amplia de inclusión del álgebra en el currículo matemático de la escuela primaria y secundaria.

Este conjunto amplio de propuestas ofrecen temáticas específicas para adelantar investigaciones sobre qué es, cómo y donde insertar el razonamiento algebraico elemental en la escuela elemental.

2.3 Razonamiento Algebraico Elemental y Niños de Escuela Elemental

Los contenidos algebraicos y dificultades asociadas han sido tema de estudio durante mucho tiempo. Kaput (2000) hizo una propuesta denominada "algebra for all", en la que sugiere tomar acción para promover al álgebra como facilitadora de una mejor comprensión de las matemáticas en lugar de ser inhibidora.

Desde que la propuesta de inclusión curricular del razonamiento algebraico interesó a la comunidad de investigadores, se han realizado muchas investigaciones en relación con el desempeño de los niños de escuela elemental cuando trabajan con actividades matemáticas definidas como algebraicas.

En lo que sigue se hará un compendio de algunos estudios sobre el razonamiento algebraico elemental.

2.4 Algunos Estudios sobre el Razonamiento Algebraico Elemental

En los apartados correspondientes al título de esta sección, referenciamos algunos estudios sobre temáticas específicas del razonamiento algebraico elemental y niños de escuela elemental. Las temáticas consideradas son: Generalización, patrones, signo igual, incógnitas, variables y cuasi-variables.

2.4.1 Algunas Aproximaciones a la Generalización

Debido, tal vez, a la naturaleza exploratoria de algunas de las investigaciones, existe un conjunto variado de enfoques hacia lo que se entiende en educación matemática como generalización.

Las definiciones sobre el concepto de generalización dadas por algunos autores son diversas: Harel y Tall (1991) utilizan la palabra "generalización" en el sentido de "*aplicar un argumento dado en un contexto más amplio*" (p. 38). Consideran tres tipos de generalización: Expansiva, donde el rango de aplicación de un esquema dado se amplia; Reconstructiva, donde el esquema existente se reconstruye para ampliar el rango; y Disyuntiva, en donde un nuevo esquema se construye cuando se va a un nuevo contexto. Sin embargo, este tipo de generalizaciones se ubican en el contexto de ampliación del campo conceptual en matemáticas, y el interés del trabajo con patrones para introducir ideas algebraicas en la escuela elemental es más modesto.

Para Skemp (1986) el proceso de la generalización matemática *"es una actividad sofisticada y poderosa"* (p. 58), que amerita ser considerada en las propuestas didácticas brindadas a los niños.

Para Radford (2006a), el punto crucial en una generalización es justificar la extensión del "*aspecto común a todos los elementos de la secuencia*" (p. 15). Por su parte, Mason (1999) afirma "*la generalización tiene que ver con notar patrones y propiedades comunes a varias situaciones*" (p. 9).

Carraher, Martinez y Schliemann (2008) anotan que la generalización contempla dos aspectos pertenecientes a campos diferentes: El primero es la generalización matemática de la regla junto con la comprobación de su validez y el segundo, la generalización en educación matemática. Nos ocuparemos de la generalización en el contexto de la educación matemática y no nos ocuparemos de los procesos formales de validación matemática.

2.4.2 Patrones y Generalización

La identificación o reconocimiento de patrones, su representación y su generalización son temas que han concentrado la atención de algunos investigadores (Kaput, 1999; Masson, 1996; Mason, Graham, Pimm, y Gower, 1985; Lee, 1996; NCTM, 2000; Stacey y MacGregor, 2001) que consideran a la identificación de patrones, su representación y generalización temas propicios para promover e introducir el razonamiento algebraico elemental en la escuela.

La NCTM (1989) sugiere el uso de patrones, relaciones y propiedades para motivar la expresión del pensamiento algebraico y de la generalización. En el mismo sentido los Principios y Estándares para las Matemáticas (NCTM, 2000) recomienda que se ofrezcan oportunidades a los niños para que analicen, extiendan, generalicen, y representen patrones como un aspecto crucial del razonamiento algebraico.

Castro (1995) trabajó con patrones numéricos, mediante configuraciones puntuales, en el contexto de la educación secundaria. Su indagación puso de manifiesto algunos hechos importantes relativos al concepto de sucesión y de término general; por ejemplo, los niños identifican el "término general" de la sucesión con "n".

Zazkis y Liljedahl (2002) consideran que la identificación de patrones es una tarea difícil, y recomiendan el uso de patrones de repetición como un medio para trabajar con símbolos en el contexto de la generalización. Sin embargo, una tendencia reciente entre los investigadores propone separar el simbolismo algebraico del pensamiento algebraico. "*Esta consideración separada es impulsada por dos factores: (1) el reconocimiento de la posibilidad de manipulación simbólica sin sentido, y (2) la tendencia en la escuela elemental de introducir el 'álgebra temprana', esto es, focalizar la atención en la estructura más bien que en el cálculo*" (Zazkis y Liljedahl, 2002, p. 398). En la perspectiva del "álgebra temprana", el reconocimiento de lo general desempeña un papel esencial como condición previa de la expresión. Blanton y Kaput (2001) ven la generalización y la expresión sistemática progresiva de la generalidad como subyacente a todo el trabajo que se hace en álgebra.

Stacey (1989) centró su estudio en patrones lineales[1] representados mediante dibujos; encontró que estos ejercicios presentaron retos para niños de entre 8 y 13 años de edad, reportó que un número significativo de niños desarrollaron erróneamente tareas de "cuasi generalización" tales como encontrar el vigésimo o el centésimo término. Para Lee (1996), el mayor problema para los niños no es "ver el patrón" sino percibir un "*patrón algebraicamente útil*" (p. 95)

English y Warren (1998) consideran que aunque la introducción al álgebra vía el trabajo con patrones parece ofrecer una vía significativa, reconocen que los patrones proponen retos para los niños, en especial en las tareas de expresión simbólica de las generalizaciones; en tal sentido Cañadas, Castro y Castro (2008) reportan que la generalización verbal cobra importancia sobre otras formas de expresión de la generalización. De acuerdo con sus resultados, la generalización verbal es una forma más accesible, al grupo particular de estudiantes, que la generalización algebraica.

Para algunos autores el simbolismo algebraico es el lenguaje que da voz al pensamiento algebraico, "el lenguaje que expresa la generalidad" (Mason, 1996). Sin embargo la naturaleza de dicho lenguaje puede ser diversa. Hay un desfase entre la habilidad de los estudiantes para reconocer un cierto grado de generalidad, expresar la generalidad verbalmente y la habilidad para emplear la notación algebraica con facilidad.

En este sentido Radford (2003), al estudiar los tipos de generalización de patrones numérico-geométricos por estudiantes de secundaria, identifica la puesta en funcionamiento por dichos estudiantes de dos tipos de generalización pre-algebraica: La generalización factual, y la generalización contextual. En el primer tipo se trata de una generalización de acciones en la forma de un esquema operacional, esquema que permanece ligado al nivel concreto de uso de los símbolos numéricos, a términos deícticos y gestos, como medios semióticos de objetivación; lo general o lo indeterminado quedan sin nombrar. Las generalizaciones contextuales suponen

[1] Llamados así porque se expresan de la forma an+b, n en los naturales.

un nivel más avanzado, sin alcanzar el nivel de las generalizaciones simbólicas algebraicas; en este caso se generalizan no solo las acciones numéricas sino también los objetos y las acciones. "*Van más allá del dominio de las figuras específicas y tratan con objetos genéricos (como la figura) que no pueden ser percibidos por nuestros sentidos*" (p. 65)

En el siguiente apartado se comentan algunos enfoques y estudios sobre la generalización en la escuela primaria.

2.4.3 Generalización en Educación Primaria

Mason (1996) afirma que la "*expresión de la generalidad es de importancia capital*" (p. 66) y es una de las raíces del álgebra y una ruta hacia la misma. Algunos estudios recientes sobre generalización en la escuela primaria reportan sobre los logros de los niños en tareas de identificación de patrones y generalizaciones.

Un primer rasgo de las investigaciones reportadas es la propuesta de construcción del álgebra y de su notación basada en estrategias numéricas y en la definición de estrategias invariantes entre ellas. En los trabajos reportados se espera que los niños logren identificar una regla, un patrón de formación, numérico o gráfico, y que lo logren expresar verbal o algebraicamente. Se busca promover un proceso de significación basado en la relación entre la expresión de la regla y la situación que la genera. Las actividades de identificación de patrones establecen una conexión entre los contextos (gráficos o numéricos) y las representaciones simbólicas.

Carraher, Martinez y Schliemann (2008), reportan la preferencia de los niños por expresiones recursivas sobre las explícitas, cuando trabajan en la generalización de relaciones funcionales lineales. Por su parte Lannin, David y Townsend (2006) trabajaron con niños de sexto grado e indagaron el uso de la generalización recursiva y explícita, con la ayuda de hojas de cálculo como herramienta instruccional. Reportan que pocos niños desarrollaron una comprensión profunda de las reglas explícitas por ellos generadas, y a medida que la indagación progresó, los niños se centraron en casos particulares más que en instancias generales para desarrollar reglas explícitas.

Yeap y Kaur (2008) indagaron sobre los factores que influencian la generalización de patrones numéricos. Los autores reportan tanto sobre factores cognitivos, de tarea y sociales, como sobre el uso de estrategias recursivas de generalización. Sus hallazgos indican que los niños tuvieron dificultades con la reorganización de sus esquemas para acomodar nuevas estrategias de solución de problemas sobre patrones.

Una indagación alternativa a los estudios antes referenciados es la de Britt e Irwin (2008), quienes estudiaron el desarrollo del razonamiento algebraico, mediante ejercicios de generalización, sin el uso de símbolos. Concluyen que un camino hacia la generalización, accesible a todos los niños, incluiría la comprensión relacional de números y operaciones; afirman "*proponemos que la generalización surja a partir de estrategias operacionales simples que no requieran el conocimiento del conteo.*" (p. 51).

Cooper y Warren (2008) reportan sobre el principio de compensación en cálculos, el principio del balance de la equivalencia y las ecuaciones, cambio y relaciones inversas con máquinas de funciones, y patrones de crecimiento. Los autores concluyen que los niños pueden "*comprender estructuras matemáticas usualmente reservadas para la escuela secundaria… si la instrucción es apropiada…*" (p. 34).

La mayoría de los estudios describen los logros y dificultades exhibidos por niños cuando discuten, descubren y representan las relaciones encontradas. Del conjunto de estudios reportados se concluye que los niños pueden, mediado el diseño y la instrucción apropiada, comprender tareas enmarcadas en la generalización.

Se reconoce que las competencias algebraicas se dirigen a traducir y a generalizar las relaciones entre los números, por lo cual los niños deben exhibir cierta competencia numérica. Al parecer el conocimiento de los números, el conteo y sus propiedades ayudan a los niños en la resolución de tareas de generalización.

2.4.4 Conclusiones sobre los Estudios de Patrones y Generalización

Del conjunto de investigaciones referenciadas se puede colegir que los investigadores consideran la "generalización" como una vía de acceso al razonamiento algebraico elemental. Estos ofrecen variedad de tareas y de enfoques sobre la generalización, desde aquellos cuyos resultados pueden ser expresados en lengua vernácula hasta aquellos en los que se pide la expresión funcional explícita de la regla. Parece conveniente ampliar la concepción del razonamiento algebraico hacia la inclusión de tareas que involucren rasgos algebraicos. La estructura de las operaciones y las relaciones, bien podrían considerarse como rasgos algebraicos, sin dejar de ser considerados como aritméticos.

La distinción propuesta por Radford (2003, 2006a) entre identificar y expresar debería ser considerada cuando se trabaja con generalización tanto con niños de escuela elemental como con profesores en formación. Otro aspecto a considerar es la justificación de la validez de la regla. La justificación, en cualquier caso, no debería ser asumida como en matemáticas formales, en donde se demuestra la validez de la regla usando, usualmente el principio de inducción matemática. Cooper y Warren (2008) sugieren que en la escuela elemental se podría trabajar con "cuasi-generalización".

Los estudios anteriores alientan y orientan el uso de tareas de generalización como una vía para introducir aspectos propios del razonamiento algebraico elemental en un sentido ampliado. Por tanto, parece pertinente brindar oportunidades de formación a los futuros maestros para que exploren las potencialidades de la generalización. Mason (1996) afirmó: "*la generalización es el corazón de las matemáticas. Si los maestros no son conscientes de su presencia, y no tienen el hábito de hacer que sus estudiantes trabajen en la expresión de sus propias generalizaciones, entonces el pensamiento matemático no toma lugar*" (p. 65).

En el reporte "Teaching and Learning Algebra pre-19" de la *Joint Mathematical Council of the United Kingdom-JMC*-(1996, p. 30) se advierte sobre el reconocimiento de patrones como una actividad aislada y sin vínculo con el álgebra.

2.4.5 Signo Igual

El signo igual concentra un enorme interés en investigaciones asociadas con la introducción del razonamiento algebraico en la escuela primaria, que han subrayado la importancia de una comprensión del mismo como relación de equivalencia más que como indicador de operación a realizar. Algunas investigaciones han reportado que los niños de escuela elemental (hasta los once años de edad) exhiben dificultades para resolver ecuaciones que tienen operaciones en ambos lados de la igualdad, en especial, en el lado derecho (Carpenter, Franke y Levi, 2003; Perry, Church y Goldin-Meadow, 1988).

Molina (2006) indagó sobre el concepto de igualdad y de "relación", expresada en lo que denomina como "pensamiento relacional". La indagación de la autora versa sobre las igualdades y relaciones establecidas entre números, expresadas en "sentencias numéricas" (p. 116). Entre los hallazgos reportados por la autora en relación con el signo igual destacan los cuatro significados del signo dados por los niños: Operador, expresión de una acción, equivalencia numérica y similitud numérica; adicionalmente se informa sobre tres niveles de comprensión del signo igual: Comprensión operacional, comprensión no estable y comprensión avanzada (p. 474).

Gelman y Gallistel (1986) encontraron evidencia que niños de entre tres y cinco años distinguen dos significados intuitivos para la igualdad entre conjuntos, y ambos basados en criterios numéricos. Al parecer cuando los niños llegan a la escuela primaria ya tienen intuiciones fuertes acerca de la adición y de la sustracción, y asumen el signo igual en términos de resultado.

Carpenter, Frankle y Levi (2003) reportaron que niños de preescolar y de primer año de escuela primaria, exhiben la creencia que después del signo igual debe ubicarse el resultado de la operación. Esta interpretación del signo igual, como una acción que se realiza sobre números que están a la izquierda y cuyo resultado se escribe a la derecha, dificulta asumirlo en términos de relación. En el mismo sentido, Knut, Alibali, McNeil, Weinberg y Stephens (2006) encontraron evidencias, en su trabajo con niños de sexto a octavo grado, que apoyan que no hay cambio en la concepción del signo igual a lo largo de los cursos de la secundaria.

En tanto que el uso del signo igual está en la base de algunas tareas tradicionalmente identificadas como propias del álgebra, tales como resolución y planteamiento de ecuaciones, equivalencia de expresiones algebraicas y problemas de palabras, es difícil no reconocer la importancia de la comprensión del signo igual como parte del proceso de introducción de los niños al álgebra (Freiman y Lee, 2004).

La correlación que existe entre la comprensión del signo igual y la resolución de ecuaciones ha sido documentada por Carpenter, Frankle y Levi (2003) quienes afirman que virtualmente todas las manipulaciones sobre ecuaciones requieren de la comprensión relacional del signo igual.

Por su parte Kieran (1991) argumenta que es probable que las dificultades que los niños tienen con los problemas de palabras esté precisamente en la dicotomía, presente en el signo igual, entre relaciones versus operaciones, y propone reducir el efecto adverso de tal dicotomía mediante la introducción de ecuaciones numéricas previa a la introducción de ecuaciones algebraicas.

No sorprenden mucho los resultados de investigación en relación con la poca comprensión relacional del signo igual, dado el poco énfasis que se le brinda en la escuela. Se considera que una mayor atención al signo igual en su dimensión relacional puede servir de entrada al razonamiento algebraico elemental; sin embargo, la habilidad para considerar una ecuación algebraica como una expresión de equivalencia, no parece ser suficiente para solventar las dificultades que se experimentan en la solución de ecuaciones.

Una alternativa es ubicar al signo igual en un contexto en donde las relaciones entre números y cantidades sean motivo de estudio y reflexión; mientra se resta importancia al cálculo de operaciones entre números. Se ofrecería así, oportunidades a los niños para mejorar el aprendizaje de la aritmética mientras se les prepara para el álgebra (Carpenter, Levi, Franke y Zeringue, 2005). Estos autores ofrecen el caso de Alex y su notable desempeño en la resolución de ejercicios del tipo: $(52\times11)=(52\times10)+m$ y conjeturan que si a Alex "*se le da la* *oportunidad de desarrollar y usar el pensamiento relacional, será menos probable que tenga que memorizar un conjunto de pasos para razonar sobre afirmaciones numéricas tales como* $a\times(b+1)=a\times b+x$ *ó que cometa errores tales como* $(x+y)^2=x^2+y^2$ *cuando inicie su estudio formal del algebra*" (p. 58).

2.4.6 Incógnitas, Variables y Cuasi-variables

Los conceptos matemáticos de incógnita y variable son muy importantes en matemáticas y se les dedica mucho esfuerzo en los cursos de matemáticas de la escuela secundaria. Usualmente el concepto de incógnita se vincula, en la escuela, a un signo "x" que denota un número desconocido que es motivo de búsqueda pero a pesar de lo cual se opera sobre él.

En un trabajo clásico, Kücheman (1981) indaga sobre los significados que los niños de escuela secundaria conceden a las letras. Kücheman reporta que las interpretaciones de los niños se ubican en las siguientes categorías[2]: Letra evaluada, letra no usada, letra usada como objeto, letra usada como incógnita específica, letra usada como número generalizado y letra como variable. Para Kücheman el concepto de variable pasa por el de incógnita, en tanto que "*el concepto de variable claramente implica alguna clase de comprensión de la incógnita así como de sus valores*" (p. 110). Así, la atención podría concentrarse en el concepto de incógnita para pasar posteriormente a la formalización del concepto de variable.

Sin embargo existe un debate acerca de sí es posible hablar de "álgebra" por la presencia explícita o encubierta de letras. Algunos consideran que no es la presencia o ausencia de letras sino el uso inherente de la letra como un recurso o estrategia para encontrar el valor desconocido, suponiéndolo conocido y operando sobre él, considerando la letra como un número (Filloy, Puig y Rojano, 2008, p. 19) lo que define en esencia al álgebra en la escuela.

Basados en el trabajo sobre sentencias numéricas, de Carpenter y Levi (1999), Fujii y Stephens (2001) proponen el uso de "cuasi-variables" (números que se pueden quitar de una sentencia numérica válida, y reemplazarlos por otros sin que la validez sea alterada) para promover el uso de variables e iniciar a los niños en su estudio. Un ejemplo de una tal sentencia numérica es: 78-49+49 =78 (Fujii y Stephens, 2001, p. 259).

[2] *Letra evaluada*: A la letra se le asigna un valor numérico desde el inicio del proceso; *Letra ignorada*: la letra se ignora, se reconoce su existencia pero sin darle significado alguno; *Letra usada como objeto*: La letra se usa como una abreviación para un objeto o como un objeto en sí mismo; *Letra usada como incógnita específica*: La letra se trata como un número desconocido sobre el cual se puede operar; *Letra como número generalizado*: La letra representa o al menos es capaz de tomar varios valores más que uno sólo; *Letra usada como variable*: La letra representa un conjunto de valores.

Estos autores consideran que el uso de las cuasi-variables es una vía de introducción del concepto de variables: "*el uso de cuasi-variables en expresiones numéricas puede ayudar a los niños de escuela elemental, secundaria básica y aún secundaria superior a profundizar su comprensión del razonamiento algebraico*" (Fujii y Stephens, 2001, p. 264).

Diversos autores (Schoenfeld y Arcavi, 1988; Radford, 1996; Tall, 2001; Carraher, Schliemann y Brizuela, 2001; Fujii, 2003) estudian los procesos de simbolización, asociados con el uso de incógnitas y de variables, efectuados por niños de escuela elemental. Fujii-ibid- desarrolla su indagación centrando la atención en la variable a la que considera "expresión numérica generalizada" y en dos ideas que actúan en tensión: El valor indefinido y el valor conocido asociado a las variables por niños de escuela elemental. Estos dos aspectos también son reconocidos por Radford (1996) quien afirma "*Mientras que la incógnita es un número que no cambia, la variable designa una cantidad cuyo valor puede cambiar*" (p. 47).

No hay consenso en la comunidad de investigadores en relación con lo que se considera "algebraico" en el trabajo con variables. Carraher et al., (2001) consideran que los niños de su estudio "operan sobre las variables"; sin embargo, Tall (2001) cuestiona tal afirmación y considera que hay evidencia de acciones aritméticas pero no de acciones algebraicas propiamente dichas.

2.5 Razonamiento Algebraico Elemental y Maestros en Formación

Un tema de interés para la inclusión del razonamiento algebraico elemental en el currículo de la escuela elemental refiere a la habilidad de los maestros de la escuela primaria para "algebrizar" tareas matemáticas y aritméticas (Blanton y Kaput, 2001; Ponte, 2006), es decir, desarrollar en los niños las bases algebraicas infusas en la aritmética (Warren y Cooper, 2001), y extender estas bases hacia el razonamiento algebraico elemental (Carpenter y Franke, 2001).

Carpenter y Levi (2000) afirman que la separación artificial entre la aritmética y el algebra "*priva a los niños de esquemas poderosos de pensamiento en los primeros años de la escuela y hace más difícil aprender álgebra en los años posteriores*" (p. 1)

De la sección anterior, se pueden identificar tanto los temas en los que se han adelantado investigaciones como el desempeño de los niños de escuela elemental frente a tareas algebraicas.

En posesión del conocimiento sobre el desempeño de los niños, se cuestionan las competencias de los maestros para reconocer y promover el razonamiento algebraico espontáneamente manifestado por los niños (Carraher y Schliemann, 2007, p. 675).

En el duodécimo ICMI Study, Doerr (2001, p. 270) plantea cuatro dilemas en relación con los maestros y el álgebra: La experiencia, qué es el álgebra, el conocimiento de los maestros y finalmente, la articulación entre el conocimiento de los maestros y la enseñanza del álgebra.

En un esfuerzo por adelantar investigaciones sobre tales dilemas, en el contexto de la formación de maestros activos y en formación, un equipo de investigadores de las Universidades de Colorado, Wisconsin y Carnegie Melon, adelantan un proyecto denominado STAAR (Supporting the Transition from Arithmetic to Algebraic Reasoning)[3] . Este proyecto aborda temáticas tales como: El aprendizaje de los niños, las creencias de los maestros, el conocimiento matemático, la práctica y el desarrollo profesional, que están relacionadas con la introducción del razonamiento algebraico elemental en el currículo de la escuela elemental.

En el siguiente apartado se hará una revisión de algunas investigaciones que han abordado el problema de la formación de maestros, en ejercicio y en formación, en el contexto del razonamiento algebraico elemental. Si bien nuestro interés se centra en los trabajos que reportan investigaciones adelantadas con maestros en formación, incluiremos algunos en donde se reportan los resultados de investigaciones adelantadas con maestros en ejercicio.

2.5.1 Maestros en Formación

En su trabajo sobre maestros en formación y razonamiento algebraico elemental Jacobs, Franke, Carpenter, Levi y Battey (2007) dan una conceptualización sobre el razonamiento algebraico elemental en donde el razonamiento matemático de los niños juega un papel central. La íntima relación entre el pensamiento de los niños y las ideas algebraicas es la seña distintiva de este trabajo. Los autores informan que el curso de desarrollo profesional focalizado en el pensamiento matemático de los niños es productivo para los maestros, en tanto que los ayuda a cambiar sus concepciones, a reconocer y a promover el razonamiento matemático de los niños.

Tal vez haciendo eco de la propuesta de Blanton y Kaput (2003) que proponen "*ayudar a los maestros a identificar y crear oportunidades para ubicar al razonamiento algebraico como parte de la instrucción regular en sus clases…*" (p. 70), el cambio de actitud y de las

[3] La dirección en la red es: http://www.colorado.edu/education/staar/ ; actualizada el 24 de diciembre del 2009.

concepciones de los maestros hacia el razonamiento algebraico elemental y hacia la valoración del pensamiento matemático de los niños suele ser uno de los objetivos de los investigadores.

Es conveniente hacer aquí un alto para tomar postura en relación con el significado que se confiere a los conceptos de creencias y concepciones. Zeichner y Liston (1987) consideran que una postura extrema afirma que las creencias son expresiones de preferencia que no pueden ser juzgadas; en el otro extremo del espectro se encuentra la postura que afirma que las creencias son estándares externos profesionales. Nespor (1987) considera las creencias "*como sistemas no completamente acotados con muchas variables y vínculos inciertos a situaciones y sistemas de conocimiento*", (p. 321). Agrega "*El desarrollo de las creencias a lo largo del tiempo, como un producto de la comprensión de diferentes contextos de enseñanza, parece difícil de predecir, controlar o influenciar*", (p. 326); este autor diferencia entre el "conocimiento" y los aspectos "afectivos" imbuidos en los sistemas de creencias.

Pajares (1998) afirma que "*distinguir entre conocimiento y creencias es tremendamente complejo*", (p. 309). Kagan (1992, p. 74) considera que las creencias están vinculadas con el conocimiento y propone tres elementos que configuran el panorama de las creencias: El contexto (relacionado con los grupos específicos de estudiantes), el contenido (relacionado con el conocimiento matemático a ser enseñado) y la persona (vinculado con el conjunto de creencias que el sujeto tiene en relación con el mundo que lo rodea).

En este documento se usarán los términos creencias y concepciones indistintamente; y consideramos, junto con Thompson (1984) que las creencias y concepciones son un constructo complejo que involucra "*conocimiento, visiones, creencias y preferencias acerca del conocimiento del contenido y su enseñanza*", (p. 106).

En el ámbito de las investigaciones sobre formación de maestros vinculadas con el razonamiento algebraico, McGowen y Davis (2002) ofrecen un listado de acciones para que los estudiantes cambien su concepción acerca del álgebra y enfrenten aquellas no examinadas sobre ella.

Asquith, Stephens, Knuth y Alibali (2007) encontraron que los maestros activos raramente identifican las concepciones erróneas relacionadas con la variable o con el signo igual. Además tampoco reconocen que tales concepciones son un obstáculo para la resolución de problemas que requieren de tales conceptos algebraicos. Los autores sugieren que la promoción del conocimiento sobre el pensamiento del niño facultará a los maestros a ser "*más atentos a las necesidades de los alumnos y reconocerán oportunidades para fomentar la comprensión*" (p. 269). Concluyen que se requiere focalizar la atención en las conexiones entre el dominio aritmético y el álgebra, consideran conveniente que los maestros aprendan más sobre el pensamiento de los niños en el campo del razonamiento algebraico elemental. Sin embargo, estos autores no proponen alguna vía para que los maestros logren ese conocimiento sobre el pensamiento de los niños.

Algunas investigaciones no enfatizan específicamente en el razonamiento algebraico elemental. Sin embargo han hecho exploraciones con ejercicios algebraicos y su relación con la formación de maestros; uno de tales estudios es el efectuado por Krebs (2005). Esta autora trabajó en un programa de desarrollo profesional en el que los maestros analizaron tareas matemáticas, predijeron respuestas de los niños, evaluaron su trabajo, escucharon el razonamiento de los niños y valoraron la comprensión manifestada por estos. Los ejercicios sobre razonamiento algebraico elemental trabajados fueron sobre patrones y generalización de reglas. La autora resalta las oportunidades ofrecidas a los maestros para reconocer el pensamiento matemático manifestado por los niños.

Stephens (2008) examinó las concepciones exhibidas por maestros de escuela elemental en formación, las "definiciones" del álgebra y los análisis de tareas diseñadas para promover el razonamiento relacional. Los hallazgos señalan que los maestros vinculan el álgebra con manipulación simbólica, valoran la manipulación simbólica sobre el pensamiento relacional, al que pocos asociaron con el álgebra. La autora considera conveniente que los maestros piensen el álgebra como una "forma de pensamiento" opuesto a una lista de procedimientos a seguir, lo cual podría ayudar a que los maestros amplíen la experiencia de los niños con el álgebra.

Las concepciones de los maestros en formación son un factor a considerar en tanto que ellas se manifiestan durante la valoración que los maestros hacen del trabajo matemático de los niños; por tanto, las creencias que los maestros exhiben sobre el contenido temático y sobre su enseñanza son determinantes en los procesos de formación. Para Pajares (1998) "*las creencias también pueden ser valores, que albergan funciones evaluativas, comparativas y sentenciosas y confieren a la predisposición de un valor imperativo para la acción*" (p. 314). Por esta razón es menester considerar la subjetividad del maestro como parte integral en el diseño de una estrategia de formación.

Van Dooren, Verschaffel y Onghema (2002) encontraron una fuerte relación entre los métodos de solución aritméticos o algebraicos preferidos por los maestros y las valoraciones que hacen de las soluciones provistas por los niños. Los futuros maestros de secundaria prefirieron el uso del álgebra tanto en sus soluciones como en las evaluaciones del trabajo de los niños. Mientras que algunos futuros maestros de primaria prefirieron aplicar sólo métodos aritméticos, algunos otros adaptaron sus estrategias al tipo de problema. Aunque no lo informan, parece que la valoración del trabajo de los niños también es adaptativa.

En el mismo sentido Espinosa (2004) investigó sobre las categorías en las que se ubican los maestros en formación como “resolutores” de problemas. Informa que los maestros preferencian la manipulación simbólica sobre otras formas alternativas, e informa sobre cuatro tipologías de resolutores de problemas algebraicos.

El uso de materiales curriculares tanto para explorar las concepciones que del álgebra tienen los maestros en formación, de primaria y secundaria como para promover el reconocimiento y promoción del razonamiento algebraico de los niños, fue investigado por Stump y Bishop (2002). Los autores consideran que “*se requiere más discusión para ayudar a los maestros en formación a fortalecer su comprensión de lo que constituye razonamiento algebraico*” (p. 1912), esfuerzos en el mismo sentido se requieren para que los maestros concentren su atención en el razonamiento algebraico de los niños.

El desempeño de maestros en activo cuando trabajan con tareas propias del razonamiento algebraico ha sido motivo de indagación. Asquith, Stephens, Knuth y Alibali (2007) reportan los resultados de un estudio realizado con maestros en activo de secundaria; el trabajo se centró en las predicciones de los maestros sobre las respuestas de niños a tareas matemáticas focalizadas en el signo igual y en la variable.

Los maestros no reconocen que las concepciones erróneas sobre la variable o sobre el signo igual son obstáculos para resolver problemas que requieren la aplicación de estos dos conceptos. Asquith, Stephens, Knuth y Alibali (2007) afirman “*incrementar el conocimiento de los maestros sobre el pensamiento de los niños- específicamente en relación con la variable y con el signo igual- los capacitaría para ser más atentos a las necesidades de los estudiantes y al reconocimiento de oportunidades para promover la comprensión*” (p. 269).

El desarrollo de competencias para diferenciar, identificar, modificar y adaptar estrategias a ideas matemáticas específicas fue uno de los aspectos indagados por Blanton y Kaput (2005). La investigación se realizó con una maestra, y exploró, durante un año, la integración del razonamiento algebraico en las clases. El álgebra se abordó como “aritmética generalizada y como razonamiento[4] funcional”.

Los autores resaltan cuatro aspectos: Primero, la habilidad de la maestra para “…*transformar espontáneamente conversaciones aritméticas en conversaciones algebraicas*” (p. 440); segundo, el desarrollo de “ojos y oídos” algebraicos, que vinculan con la habilidad exhibida por la maestra; tercero, que la aritmética generalizada y el razonamiento funcional pueden ser temas

[4] En el original en inglés se utiliza “thinking” que se ha traducido como razonamiento. Se ha hecho así en tanto que en el documento referenciado, los autores usan el término “reason algebraically”, (p. 440), en referencia al razonamiento algebraico.

para promover el razonamiento algebraico elemental en la escuela; y finalmente, que la habilidad de la maestra influyó en la habilidad de los niños para razonar algebraicamente.

Conceden que la formación de maestros de escuela primaria, que entiendan las complejidades del razonamiento algebraico elemental, es un proceso complejo que requiere investigación y que eventualmente, es alcanzable a largo plazo.

Existen dos elementos comunes en las investigaciones y en las conclusiones de los investigadores referenciadas anteriormente: La variedad de enfoques y las concepciones de los maestros, la importancia e influencia de esta última en la enseñanza del razonamiento algebraico elemental. Desentrañar las concepciones que los maestros tienen acerca del pensamiento de los niños y articularlas con su conocimiento del contenido para promover el razonamiento algebraico de los niños es un dilema ya planteado por Doerr (2001) y comentado en la sección 2.5 -Razonamiento Algebraico Elemental y Maestros en Formación- de este capítulo.

2.5.2 El Conocimiento Pedagógico del Contenido

Las concepciones de los maestros y su articulación con la enseñanza es un tema complejo, que encarna un doble proceso: Interpretación y adecuación. La interpretación del conocimiento matemático exhibido por los maestros en un marco temático específico (álgebra en nuestro caso) y la adecuación de tal conocimiento para ser enseñado en atención a las particularidades epistémicas y exigencias cognitivas del mismo.

Shulman (1986) acuñó el término "conocimiento pedagógico para la enseñanza", para referirse al conocimiento que debe ser exhibido por un maestro para enseñar y que trasciende el mero conocimiento del contenido. Este conocimiento, sin embargo es difícil de definir teóricamente. Después de 20 años de investigaciones e intentos de delimitarlo el "*puente entre conocimiento y práctica ha sido entendido inadecuadamente*" (Ball, Thames y Phelps, 2008, p. 389).

La formación de maestros para que reconozcan y promuevan el razonamiento algebraico elemental de los niños es parte de un problema de formación más amplio y complejo, en tanto que "el maestro no sólo deben saber *que* algo es así; el maestro también debe comprender *porqué* es así, sobre cuáles fundamentos se puede asegurar su validez, y bajo cuáles circunstancias la creencia en su justificación puede ser debilitada o negada" (Ball, Thames y Phelps, 2008, p. 391).

Proveer al maestro con oportunidades para que desarrolle ese conocimiento que Ball et al.; denominan "Conocimiento Matemático para la Enseñaza" (MKT[5]) es una tarea que debe ser asumida por los formadores de maestros. Algunos autores (Silverman y Thompson, 2008; Godino, 2009) han adelantado propuestas orientadas hacia el desarrollo de competencias de análisis didáctico.

El interés por abordar el problema del Conocimiento Matemático para la Enseñanza y de vincularlo con la formación de profesores de tal suerte que estos puedan promover, entre otros, el razonamiento algebraico elemental, se acrecienta en tanto que se conocen casos de inclusión del razonamiento algebraico en los currículos de algunos países.

En el siguiente apartado examinaremos algunas experiencias de implantación del razonamiento algebraico elemental en diversos países.

2.6 Propuestas Curriculares de Inclusión de Razonamiento Algebraico Elemental: Algunos Casos

Los desarrolladores del currículo y los responsables de las políticas educativas, informados sobre los resultados de investigación en el RAE de más de una década, han iniciado la implantación del razonamiento algebraico elemental en la escuela primaria.

Cai (2004) reporta que la idea de ecuación y resolución de ecuaciones comienza desde el primer grado de primaria en los libros de texto chinos; la idea de ecuación y resolución de ecuaciones se aborda desde la concepción de la resta como un procedimiento inverso a la suma. Un ejemplo de una ecuación que se pide resolver en primer grado es: "*Encontrar el número en ( ) tal que 9 + ( ) = 16*"; (Caí, 2004, p. 110).

En los grados cuatro, cinco y seis (11 a 13 años de edad), "x" se introduce como lugar para poner números desconocidos en el contexto de resolución de ecuaciones. En grado cinco, se introduce: (1) El uso de letras para representar números y relaciones cuantitativas; (2) La resolución de ecuaciones sencillas, y (3) La resolución de ecuaciones para resolver problemas de modelación. Para el currículo chino "*el propósito dominante del aprendizaje del álgebra es ayudar a los estudiantes a representar mejor y a entender las relaciones cuantitativas*", (Cai, 2004, p. 127).

[5] MKT por sus siglas en inglés: Mathematical Knowledge for Teaching.

Lew (2004) informa sobre seis clases de habilidades matemáticas relacionadas con el álgebra que son enfatizadas en el currículo matemático coreano de la educación primaria. Estas son: Generalización, abstracción, pensamiento analítico, pensamiento dinámico y organización. Para Lew "*…todos los tipos de pensamiento algebraico son enfatizados uniformemente a largo de todos los grados desde el primero hasta el sexto.*" (p. 100). Para el currículo coreano el álgebra se concibe como una manera de pensar, donde el principal foco de atención es el desarrollo de habilidades de pensamiento.

Por su parte, Fong (2004) reporta que en el currículo para la escuela primaria en Singapur, se adoptan tres enfoques para desarrollar el razonamiento algebraico elemental: Resolución de problemas; generalizar y especializar[6], y finalmente "hacer y deshacer". En primaria, los niños resuelven problemas de carácter algebraico (construcción y solución de ecuaciones) mediante el uso de modelos para representar la situación.

Los niños resuelven problemas aritméticos (con valores conocidos) en los primeros grados de la primaria, y en tanto que progresan, resuelven problemas para hallar valores desconocidos. En estos problemas, tratan las cantidades desconocidas como si fueran conocidas.

Tareas en donde los niños deben identificar, entender y extender patrones geométricos, y numéricos están presentes en todo el currículo matemático de la primaria. Adicionalmente, el currículo ofrece tareas en las que se usa la construcción de reglas mediante dos procesos: Hacer-deshacer y "operaciones hacia delante", que se ubican en el contexto del enfoque funcional.

En Japón también se han introducido algunos componentes del razonamiento algebraico elemental en el currículo de la escuela primaria. Los contenidos se pueden dividir en tres categorías (Watanabe, 2008): Ideas acerca de funciones, escritura e interpretación de expresiones matemáticas. Estas categorías de contenidos se distribuyen a lo largo del currículo propuesto para los seis años de escuela primaria. A manera de ejemplo, en el contenido correspondiente a expresiones matemáticas, se proponen tareas tales como: Escribir e interpretar expresiones matemáticas que usan las cuatro operaciones fundamentales; comparar números y cantidades; escribir y comparar expresiones matemáticas que usan paréntesis, y finalmente, el uso de los símbolos (rectángulo y triángulo) y la letra "x" en expresiones matemáticas y la evaluación de tales expresiones mediante la sustitución de valores numéricos.

Según Watanabe-ibid- "*el estudio del álgebra en la escuela primaria pretende no sólo desarrollar competencia algebraica sino también promover una comprensión más profunda de otros contenidos en el currículo de matemáticas*" (p. 192).

[6] Explorar una estructura o idea que apoya un concepto matemático particular o un objeto físico. Fong (2004, p. 42).

Moyer, Huinker y Cai (2004) reportan un caso de introducción del razonamiento algebraico elemental en la escuela primaria, en Estados Unidos, por medio de una propuesta curricular que ofrece a los niños experiencias formales e informales con el álgebra. Las ideas algebraicas centrales en esta propuesta son: El cambio; patrones y relaciones; representación y modelación. Por medio de las actividades contenidas en la propuesta curricular, se pretende "*promover procesos mentales que constituyen el hábito de pensamiento algebraico conocido como construcción de reglas para representar funciones*" (p. 6).

En Hong Kong, el álgebra se introdujo para desarrollar el sentido simbólico en los grados inferiores y el uso de ecuaciones en los superiores (Wong, 2005). Los contenidos algebraicos en la escuela primaria, de acuerdo con Wong -ibid- tienen una fuerte influencia del álgebra de la secundaria, en tanto que consideran el estudio de: Manipulación simbólica, balanceo de ecuaciones, planteamiento de ecuaciones y búsqueda de la incógnita. En el currículo matemático de la primaria el "*álgebra, particularmente los símbolos, están lado a lado con la aritmética*", (Wong, 2005, p. 29).

Los autores concluyen que:

> *Si los niños son expuestos tanto a métodos aritméticos como algebraicos para resolver ecuaciones simples y se les da la oportunidad de discutir y comparar estos métodos, los niños finalmente comenzarán a considerar problemas sencillos desde perspectivas múltiples y llegarán a ser más abiertos de mente. (p. 29)*

Esta hipótesis[7] está en línea con algunas que han sido comprobadas empíricamente por algunos estudios longitudinales sobre la inclusión del razonamiento algebraico desde la escuela elemental (Derry, Wilsman y Hackbarth, 2007; Schliemann, Carraher, Brizuela, Earnest, Goodrow, Lara-Roth y Peled, 2003) y cuyos resultados alientan la iniciación de la enseñanza del álgebra en la escuela primaria.

En este apartado se han presentado casos de introducción del razonamiento algebraico elemental en los currículos de la escuela primaria de varios países (China, Corea, Singapur, Japon, Estados Unidos, Hong Kong). Los casos muestran que existe consenso en la comunidad de investigadores y de gestores de políticas educativas en relación con la introducción del razonamiento algebraico en la escuela elemental.

De un lado parece que no existe acuerdo en relación con una respuesta a las preguntas: ¿Qué es el razonamiento algebraico elemental?, ¿Qué tipo de actividades matemáticas favorecen reconocer los elementos básicos del álgebra? y que a su vez favorezcan la superación de algunas de las dificultades reportadas en la literatura (Lenguaje: MacGregor y Price,1999; Warren ,

[7] Se estableció contacto por medio de correo electrónico con el autor de la afirmación y confirmó que no tiene bases empíricas que la soporten.

2006; Sentido operativo: Linchevski y Livneh,1999; Sentido de la estructura: Sfard y Linchevski,1994; Esty,1992; Linchevski y Livneh,1999; Signo igual: Freiman y Lee, 2004; Carpenter et al., 2003; Knut, Alibali, McNeil, Weinberg y Stephens, 2006; Problemas de palabras: Hall, Kibler, Wenger y Truxaw, 1989; Kamal y Ramzi, 2000; Weaver y Kintsch,1992; Yerushalmy y Golead, 1999; Cerdan, 2008) por alumnos de escuela secundaria.

De otro lado, parece que existe acuerdo en la comunidad de investigadores en que algunos temas son propicios para la introducción del razonamiento algebraico elemental (patrones, generalización, pensamiento relacional, signo igual, entre otros). La pertinencia de la introducción del razonamiento algebraico desde la escuela primaria para que los alumnos en la escuela secundaria superen algunas de las dificultades atávicas reportadas en la literatura parece estar aceptada.

La comunidad de investigación ha elaborado un sinnúmero de trabajos en donde reportan el desempeño que los niños de escuela elemental cuando trabajan con actividades definidas como propias del razonamiento algebraico elemental. Los resultados son adelantadores frente a las competencias algebraicas de los niños.

Resalta la ampliación de la concepción del RAE y se aprecia la extensión del adjetivo “algebraico” para tareas tradicionalmente valoradas como aritméticas.

En tanto que el razonamiento algebraico elemental se abre espacio en los currículos oficiales de la escuela primaria, parece claro que a los maestros, tanto activos como en formación, se les debe ofrecer oportunidades de formación para asumir la inclusión curricular del razonamiento algebraico en la escuela primaria.

Para Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnets (2006) *“la idea no es simplemente atribuir significado algebraico a las actividades matemáticas de la escuela primaria. Los contenidos matemáticos deben ser transformados sutilmente para resaltar su carácter algebraico”* (p. 88). La competencia de transformación o adecuación, el análisis didáctico de tareas algebraicas y la formación para que los maestros reconozcan la compleja red de relaciones entre aspectos conceptuales y procedimentales que caracterizan el razonamiento algebraico (Blanton y Kaput, 2005, p. 414) es una tarea que los investigadores y formadores de maestros deberían asumir.

Dos de los cuatro dilemas planteados por Doerr (2001) y discutidos en la sección 2.5 son Razonamiento Algebraico Elemental y Formación de Maestros. La articulación entre el conocimiento de los maestros y la enseñanza del álgebra, se asumen y se abordan en esta memoria. Es así, como en el contexto de la introducción del razonamiento algebraico en el currículo de la escuela primaria y de la formación de maestros, es que se plantea nuestro problema de investigación en el que se propone una ampliación del razonamiento algebraico elemental.

En el siguiente capítulo, se abordará el marco teórico y la metodología que se usará para responder las preguntas que se plantean con motivo de la evaluación y desarrollo de competencias de análisis didáctico de tareas sobre razonamiento algebraico en futuros profesores del diseño de una unidad didáctica para la introducción del razonamiento algebraico elemental en la escuela primaria y con la formación de los maestros para que asuman tal inclusión.

2.7 Conclusiones

Los epígrafes anteriores evidencian tanto la complejidad del tema de estudio como los diversos retos en el ámbito de la formación de maestros y el razonamiento algebraico elemental. Si bien el campo de investigación es amplio, se resalta la urgente necesidad de abordar la investigación sobre la formación de maestros, sus competencias de análisis didáctico y sus creencias sobre la inclusión del razonamiento algebraico elemental en razón de dos aspectos: La inclusión de algunos aspectos del álgebra en el currículo de algunos países y el interés que tiene estudiar alternativas para mejorar la formación de maestros.

CAPÍTULO 3
MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA

3.1 Introducción

Este capítulo contiene dos grandes apartados: Marco Teórico y Metodología. En el primer apartado se discute los diversos elementos que componen el marco teórico que orienta la investigación. En el segundo apartado se discute la metodología usada.

3.2 Algunos Elementos Teóricos Considerados

En este apartado se abordan algunos elementos que han sido considerados en la investigación tales como comunidades de aprendizaje, observación participante, enfoque onto-semiótico y fenomenografía.

El contexto particular en donde se desarrolló la investigación modula los diversos elementos metodológicos considerados, de tal suerte que estos se acomodan a las características del contexto y del problema de investigación.

3.2.1 El Enfoque Onto-semiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática

En diferentes trabajos Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1998; Godino 2002; D´Amore y Godino, 2007; Godino, Batanero y Font, 2007; Godino,Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; Wilhelmi, Godino, Lacasta, 2007) han desarrollado un conjunto de nociones teóricas que configuran un enfoque ontológico y semiótico de la cognición e instrucción matemática, que concede un papel central al lenguaje, a los procesos de comunicación e interpretación y a la variedad de objetos matemáticos intervinientes. Se trata de un marco teórico integrativo para la didáctica de las matemáticas que aborda el problema de la articulación de teorías mediante la identificación de nociones primitivas y principios epistémicos, cognitivos e instruccionales comunes.

A continuación, se ofrece una síntesis del enfoque Onto-semiótico de la Cognición y de la Instrucción Matemática (EOS), y se indicará cómo se usará para investigar el problema que es el objetivo de esta memoria de tesis doctoral.

Para evitar repetir las referencias de los artículos referidos en el primer párrafo de este apartado, se afirma que lo que a continuación se escribe se ha tomado enteramente de tales documentos; todas las ideas que aparecen en este apartado son de los autores referenciados. Aclarado el punto, y contando con la comprensión del lector, se procede al compendio.

El EOS ha afrontado el problema de la significación y representación del conocimiento matemático mediante la elaboración de una ontología matemática explícita sobre presupuestos iniciales de tipo antropológico (Bloor, 1983; Chevallard, 1992), semióticos y socioculturales (Sfard, 2000; Radford, 2003; Ernest, 1998). Esto supone asumir una cierta relatividad socioepistémica para el conocimiento matemático ya que el conocimiento se considera ligado indisolublemente a la actividad en la cual el sujeto se implica y es dependiente de la institución cultural y contexto social del que forma parte (Radford, 1997).

Esta formulación considera tres aspectos imbricados: La matemática como resolución de problemas socialmente compartida, como un lenguaje simbólico y como un sistema conceptual. El estudio del proceso de asignar significado (la significación) considera la preponderancia de varios conceptos: La práctica matemática, la institución, los objetos, los significados, las configuraciones y trayectorias didácticas.

A continuación, se comentarán y se dará una aproximación a la propuesta de vinculación de tales conceptos en el seno de una actividad de formación matemática, según es entendida por el EOS.

- **Práctica matemática** es toda actuación o expresión (verbal, gráfica, gestual, etc.) realizada por alguien para resolver un problema matemático, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994). Las prácticas pueden ser personales o institucionales.

- **Una institución** está constituida por las personas que comparten una clase específica de situaciones problemáticas. El compromiso compartido con la misma problemática conlleva la realización de prácticas sociales compartidas, las cuales están, asimismo, ligadas a la institución y a las normas implícitas que orientan y determinan la práctica. Las instituciones se conciben como “comunidades de prácticas” e incluyen, por tanto, las culturas, grupos étnicos y contextos socioculturales. En este sentido, el concepto de “institución” y su importancia en el proceso de resolución de problemas matemáticos esta íntimamente ligado con el concepto de comunidades de práctica según es usado por Lave y Wenger (1991). La institución es el sitio donde se realiza una práctica social que “*enfatiza la dependencia relacional con el mundo, la actividad, el significado, la cognición, el aprendizaje y el saber*”, (Lave y Wenger, 1991; p. 50).

- **Objeto matemático**, otro de los conceptos identificados en el EOS, al que considera como cualquier entidad o cosa referida en el discurso matemático. El objeto matemático designa a todo lo que es indicado, señalado o nombrado cuando se construye, comunica o aprende matemáticas. Esta noción tan genérica se hace operativa mediante la elaboración de una tipología de objetos para los cuales se explicita su naturaleza y función como elementos intervinientes en la práctica matemática.

Para el EOS:

> *Los objetos matemáticos necesitan ser vistos como símbolos de unidades culturales que emergen de un sistema de usos, ligado a las actividades de resolución de problemas que efectúan ciertos grupos de personas y van evolucionando con el tiempo. El hecho de que en el seno de ciertas instituciones se hagan determinados tipos de prácticas, determinan la emergencia progresiva de los objetos matemáticos y que su significado esté íntimamente relacionado con los problemas y la actividad realizada para su resolución. Por ello, no se puede reducir el significado del objeto a su mera definición matemática. (D' Amore y Godino, 2007, p. 207).*

Los objetos matemáticos, sus significados, de uso y referenciales, se articulan con las prácticas matemáticas en el seno de las instituciones en donde se localizan los problemas y los individuos que los resuelven.

3.2.1.1 Significados Personales e Institucionales de los Objetos

La Figura 3.1 exhibe la tipología básica y las relaciones entre significados personales e institucionales que se manifiestan durante actividades de resolución de problemas matemáticos.

Los significados personales propuestos son:

- **Global**: Corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto relativas a un objeto matemático.

- **Declarado**: Da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.

- **Logrado**: Corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. En el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio interesará tener en cuenta los significados iniciales o previos de los estudiantes y los emergentes.

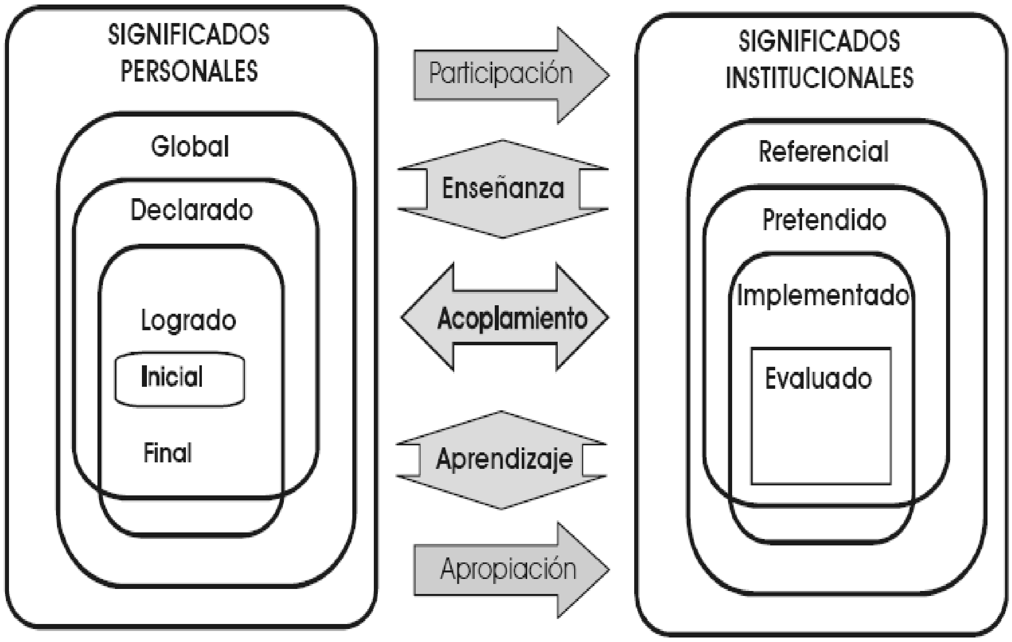


Figura 3.1. Significados Personales e Institucionales.

En relación con los significados institucionales, el EOS propone cuatro tipos:

- **Referencial**: Sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007) del objeto matemático. La determinación referencial del significado global exige de un estudio histórico y epistemológico sobre el origen y evolución del objeto considerado, así como de la consideración de la diversidad de contextos de uso en donde se manifiesta dicho objeto.

- **Pretendido**: Sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.

- **Implementado**: Sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente en un proceso de estudio específico.

- **Evaluado**: El subsistema de prácticas utilizado por el docente para evaluar los aprendizajes.

3.2.1.2 Objetos que Intervienen y Emergen de los Sistemas de Prácticas

En el seno de las prácticas matemáticas, operativas y discursivas, intervienen y emergen nuevos objetos que problematizan, organizan y estructuran la actividad de enseñanza y aprendizaje. Si las prácticas se realizan en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran “objetos institucionales”; mientras que si se realizan por una persona, se consideran como “objetos personales”. Si bien se hace una diferencia entre objetos institucionales y personales, parece claro que ambos están vinculados y actúan en mutua dependencia.

La noción de emergencia de los objetos está relacionada con la metáfora ontológica (Lakoff y Núñez, 2000), que considera acontecimientos, actividades, ideas, etc. como entidades (objetos, cosas, etc.).

El EOS propone la siguiente tipología de objetos matemáticos o entidades primarias:

- **Lenguaje**: Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, etc.
- **Situaciones-problema**: Aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, etc.
- **Conceptos**: Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición.
- **Proposiciones**: Enunciados para las cuales se requiere una justificación o prueba.
- **Procedimientos**: Técnicas de cálculo, operaciones, algoritmos.
- **Argumentos**: Justificaciones, demostraciones, o pruebas de las proposiciones usadas.

Los seis tipos de entidades primarias postuladas amplían la distinción entre entidades conceptuales y procedimentales (Silver, 1986) consideradas insuficientes para describir la dinámica y relaciones entre los objetos intervinientes y emergentes durante la actividad matemática.

3.2.1.3 Configuraciones de Objetos

Los seis tipos de entidades primarias se relacionan entre sí, formando configuraciones que se muestran en la Figura 3.2, se definen como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos.

Las configuraciones pueden ser epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales), que se construyen a partir del planteamiento y resolución de una situación problema, alrededor de la cual se construyen configuraciones epistémicas. La secuencia de estas configuraciones constituye finalmente el “sistema de prácticas matemáticas” que fija el significado institucional y personal implementado para el objeto u objetos estudiados.

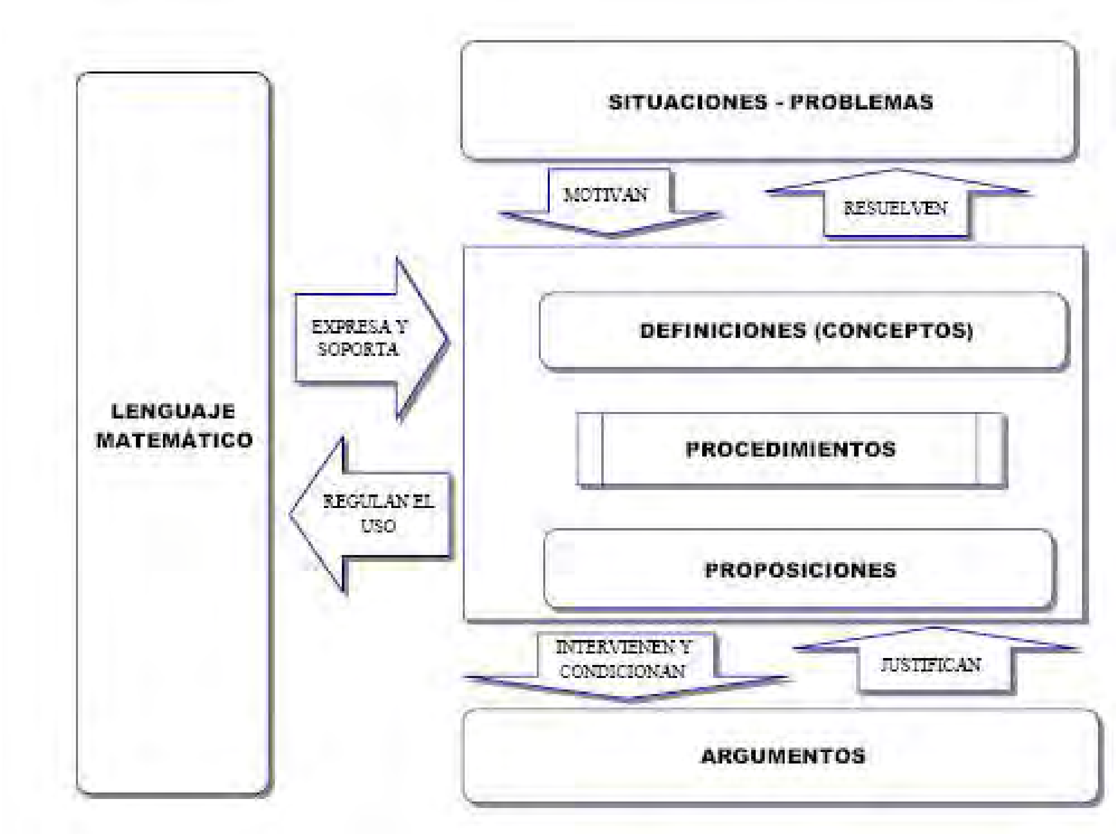


Figura 3.2. Componentes y Relaciones en una Configuración Epistémica.

3.2.1.4 Análisis Epistémico

La propuesta del EOS permite efectuar tres tipos de análisis en el marco de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Análisis epistémicos y cognitivos, análisis curriculares y de los aprendizajes y finalmente, análisis instruccionales y ecológicos.

Si bien se enumeran por separado, ellos dan cuenta de procesos íntimamente vinculados en contextos de formación matemática. En esta investigación se hace uso mayoritario de análisis epistémicos y cognitivos de configuraciones epistémicas y cognitivas. Estos análisis serán ilustrados en los capítulos cuarto, quinto y sexto.

El análisis epistémico y cognitivo es un constructo teórico complejo que pone en interacción, con motivo del estudio de problemas matemáticos, dos nociones teóricas: Las entidades primarias y las secundarias. El primero está conformado por los “conocimientos matemáticos” que comprende: lenguajes, situaciones, procedimientos, argumentos, proposiciones y definiciones; el segundo comprende las entidades duales: Unitario-sistémico, expresión-contenido, institucional-personal, intensivo-extensivo, no ostensivo-ostensivo.

El análisis de objetos y significados, potenciado por el constructo teórico formado por las entidades primarias, ha sido estudiado en varios documentos (Castro y Godino, 2009; Castro y Godino, 2011; Godino, Rivas, Castro y Konic, 2008).

El análisis epistémico tiene tres objetivos: El primero, explorar objetos y significados puestos en juego en la solución de un problema, que se asume como un análisis de referencia; el segundo, identificar posibles conflictos de significado y predecir dificultades y errores que podrían surgir en las soluciones que los niños dan al problema, y el tercero, explorar cómo el uso de las entidades primarias favorece predecir e identificar conflictos potenciales.

3.2.1.5 La Guía de Reflexión de Objetos y Significados

En Godino y et. al., (2008) se ofrece un ejemplo del uso del instrumento denominado Guía para la Reflexión de Objetos y Significados (GROS), este instrumento será comentado en la siguiente sección.

Los otros dos tipos de análisis, mencionados en este mismo apartado, que son: Los curriculares y de los aprendizajes, así como el análisis instruccional y ecológico, no son usados en este trabajo.

Los elementos comentados en los apartados anteriores, se organizan y concretan en una herramienta de análisis epistémico que se comenta a continuación y que será usada en los capítulos cuarto, quinto y sexto de esta memoria de tesis doctoral.

Se entiende el "análisis epistémico" como una caracterización de las configuraciones epistémicas, su secuenciación y articulación. Se trata de descomponer la configuración epistémica en unidades de análisis para caracterizar el tipo de actividad matemática que se implementa. Esto requiere identificar los objetos matemáticos puestos en juego, las relaciones entre ellos, los modos de organización en que se agrupan y las relaciones ecológicas que se establecen entre los mismos.

La identificación permite ampliar la atención desde las entidades referidas hasta el papel que juegan en el seno de la actividad matemática. La concreción de la identificación de los objetos y la asignación de significados presentes y emergentes en la actividad matemática de resolución se logra mediante una tabla, que se denomina la Guía de Reconocimiento de Objetos y Significados (GROS) que se ilustra en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1. Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados.

Tipos de Objetos	**Significados** (relación de referencia o de uso)
REPRESENTACIONES (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, …)	
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición)	
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
PROPIEDADES (Enunciados para las cuales se requiere una justificación o prueba)	
ARGUMENTOS (Justificaciones, demostraciones, o pruebas de las proposiciones usadas)	

Esta tabla, si bien luce estática y un poco normativa, promueve la explicitación de los objetos y los significados que intervienen y surgen en el proceso de resolución de un problema. En Castro, Godino y Rivas (2010) se informa cómo la GROS favorece dar cuenta de un proceso complejo y dinámico, y que puede ser cumplimentada de varias maneras; lo cual pone de manifiesto la relatividad de los objetos y significados matemáticos.

3.2.1.6 La Aproximación al RAE desde el EOS

La aproximación al razonamiento algebraico elemental que se dio a los maestros en formación fue:

> *Denominamos Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) al sistema de prácticas operativas y discursivas puestas en juego en la resolución de tareas abordables en la educación primaria en las cuales intervienen objetos y procesos algebraicos (simbolización, relación, variables, incógnitas, ecuaciones, patrones, generalización, modelación, etc.).*

Para valorar la pertinencia de esta aproximación, se resaltan tres elementos constitutivos de ella, y articulados en el marco del EOS.

- **El primero**: La aproximación se da en el contexto de "práctica" -personal o institucional- que concede un papel central a la interacción entre dos conocimientos: El institucional (el texto, el currículo) y el personal (el estudiante). La interacción favorece el proceso de enseñanza y aprendizaje.

- **El segundo**: Tareas "abordables" en la educación primaria, es decir, tareas que utilizan conocimientos matemáticos de los niños, que tienen el potencial de centrar su atención y, finalmente poner en juego objetos matemáticos y los significados pertinentes a la situación planteada.
- **El tercero**: Los objetos y procesos algebraicos, y se enumeran algunos: Simbolización, relación, variables, incógnitas, ecuaciones, patrones, generalización, modelación, etc.

Nótese que, en concordancia con el concepto de "práctica" se enumeran "conceptos" algebraicos en términos de "objetos" (de objetivaciones, de entes, de reificaciones) que se conciben en términos de procesos en los que intervienen las entidades primarias referidas a elementos algebraicos. A manera de ilustración se indica que una tarea matemática se concibe como algebraica cuando se pone en acto un proceso discursivo en el que se reifica, por ejemplo, la "incógnita", mediante una configuración epistémica de elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y justificaciones, todas estas o sólo algunas.

Luego una tarea matemática puede tener el carácter potencial de algebraica, pero cuando se discute con los niños, la misma puede ser resuelta con procedimientos aritméticos sin hacer referencia explícita a elementos algebraicos, sin embargo puede ser reconocido el uso implícito de algunos elementos algebraicos imbuidos en el proceso de solución de la tarea. Las prácticas aritméticas ponen en juego objetos, significados y procesos que exhiben características algebraicas.

Es así como un niño puede resolver un problema que, algebraicamente, requiera el uso de un sistema lineal dos por dos, sin embargo el niño lo resuelve por ensayo y error. El reconocimiento de dos valores desconocidos y diferentes, el planteamiento de relaciones y la búsqueda de los números, es en esencia un proceso algebraico.

3.2.2 Una Reflexión sobre las Competencias

El término competencia ha sido ampliamente discutido en educación. Uno de los primeros autores que usó el término fue Noam Chomsky (1957, 1965). Chomsky definió el término competencia como el dominio de los principios que gobiernan el lenguaje. A este término se le han conferido diversas interpretaciones, y es frecuente encontrar imprecisiones y usos contradictorios (Short, 1985).

En el contexto de reformas curriculares internacionales para las matemáticas, tales como NCTM (2000), Kilpatrick, Swafford y Findell (2001), y Niss (2003) se han planteado propuestas sobre el concepto de competencias matemáticas. Sin embargo, estas propuestas tienen el propósito de comunicar objetivos generales para el desarrollo educativo y como tales, son difíciles de usar como marco para una investigación que considere implantar su enfoque sobre competencias en instrumentos concretos en el ámbito de formación de maestros.

Diversos proyectos institucionales intentan abordar la problemática de aproximación al término de competencia (Pisa; OCDE, 2005; Tuning, González y Wagenaar, 2003). Se encuentran diversas acepciones del término en función del tema específico del cual se trata, es así como se habla de "competencias para".

El Proyecto Tuning[1] ofrece un enfoque concreto para la implementación del Proceso de Bolonia y consiste de una metodología de diseño, desarrollo, implementación y evaluación de programas de estudio para cada uno de los ciclos en los que se ha divido el Proceso de Bolonia. Tuning propone puntos de referencia que se expresan en términos de competencias y de niveles de competencias. El Proyecto discute propuestas sobre las competencias en campos diversos: Negocios, química, educación, historia, estudios europeos, geología, matemáticas, etc.; y enumera competencias tanto genéricas como específicas.

Para el Proyecto Tuning la competencia representa "*una combinación dinámica de habilidades cognitivas y meta-cognitivas, conocimiento y comprensión, habilidades interpersonales e intelectuales, a más de valores éticos*", (Tuning, General Brochure, p. 1)

En el contexto educativo español, el Ministerio de Educación y Ciencia promulgó los Reales Decretos 1513/2006 y 1631/2006 (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006b, 2006c) para las enseñanzas mínimas de los ciclos de primaria y de secundaria obligatoria, en los que se identifican ocho competencias básicas que deberían ser exhibidas por los estudiantes al finalizar tales ciclos.

Las competencias son:

- Competencia en comunicación lingüística.
- Competencia matemática.
- Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico.
- Tratamiento de la información y competencia digital.
- Competencia social y ciudadana.
- Competencia cultural y artística.
- Competencia para aprender a aprender.
- Autonomía e iniciativa personal.

[1] Proyecto Tuning, documento final, bajado el día 21 de febrero del 2010 del sitio Web http://tuning.unideusto.org/tuningeu/images/stories/template/General_Brochure_Spanish_version.pdf

El proyecto PISA (OCDE, 2005b) asume el concepto de competencia como central; sin embargo, el significado conferido ha cambiado a lo largo de varios informes (Rico, 2007, p. 42).

La competencia matemática es definida como (OCDE, 2004, p. 3): La capacidad individual para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados, utilizar las matemáticas y comprometerse con ellas, y satisfacer las necesidades de la vida personal como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo.

Para Blomhøj y Jensen (2007, p. 47) es importante enfatizar la competencia matemática en términos de "la presteza para actuar en respuesta *a cierta clase de reto matemático*[2] en una situación dada". Se resalta el acento puesto en la "acción" para responder a una situación dada. En el mismo sentido Goldin (1998) afirma que "*La competencia humana se refiere a la capacidad de realizar una tarea en un momento dado, bajo condiciones que son parcial o incompletamente especificadas*" (p. 147).

En este sentido es que se concibe el concepto de competencia que debería ser propuesto a los maestros, y en consecuencia desarrollado y exhibido por ellos; competencia expresada en términos de la capacidad para actuar y desarrollar una tarea (enseñar matemáticas) en un contexto específico (el salón de clase) para responder a acciones dadas (la manifestación de la comprensión del conocimiento matemático por niños de escuela elemental).

3.2.3 La Competencia de Análisis Didáctico

La aproximación al concepto de competencia de análisis didáctico, que debería ser desarrollada por los futuros maestros, pasa por el concepto de competencia matemática, que debe ser desarrollada por los niños al interior de la institución escolar. Parece claro que ambos conceptos deben estar alineados.

En un curso de formación didáctica para maestros, se espera ofrecer oportunidades a los maestros de experimentar, desarrollar y exhibir competencias para el "análisis didáctico" de tareas matemáticas que estimulen en sus alumnos, el desarrollo de competencias matemáticas como las propuestas por el R.D. 1513 de 2006. Tal estímulo podría ser efectivo si el análisis didáctico hecho por el maestro reconoce la complejidad del proceso de enseñanza-aprendizaje e incluye algunas entidades matemáticas primarias como las expuestas por el EOS.

Se considera como competencia el constructo cognitivo que incluye conocimiento, disposición y comprensión que supone que el sujeto sea capaz de realizar las prácticas sociales que resuelven los tipos de problemas pretendidos. El maestro debe desarrollar una tarea de enseñanza, que

[2] Cursiva en el original.

supone definir una configuración didáctica, que a su vez lleva asociada una *configuración epistémica*, esto es, una tarea, y las acciones requeridas para su solución, lenguajes, reglas (conceptos y proposiciones) y argumentaciones, las cuales pueden estar a cargo del profesor, de los niños o distribuidas entre ambos.

Al incluir la disposición en el concepto de competencia se da cabida a las concepciones que forman parte del acervo cultural de los individuos y que son determinantes en situaciones de enseñanza.

Asociada a una configuración epistémica habrá una configuración instruccional constituida por la red de objetos docentes, discentes y mediacionales puestos en juego a propósito del problema o tarea matemática abordada. La descripción de los aprendizajes que se construyen a lo largo del proceso se realiza mediante las *configuraciones cognitivas*, red de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas personales que se ponen en juego en la implementación de una configuración epistémica.

Es así como la aproximación a la competencia de análisis didáctico asumida en este trabajo de investigación se incardina en el marco de la competencia como conocimiento y comprensión para realizar prácticas sociales que resuelven problemas de enseñanza, y se asume como "la capacidad para realizar las tareas relativas a los cuatro niveles de Análisis Didáctico mencionados".

3.2.4 Comunidad de Aprendizaje

Las comunidades de aprendizaje se crean cuando un grupo de personas interesadas en una tarea común sienten la necesidad de compartir lo que saben y de aprender de los otros.

Diversos autores (Rogoff, 1993; Lave, 1988; Lave y Wenger, 1991; Beach, 1999) han investigado cómo el aprendizaje, en el seno de comunidades de aprendizaje, cambia en función del tiempo. Una comunidad de aprendizaje que promueva la participación y libre expresión de las ideas favorece tanto la transformación de la identidad y de creencias como el aprendizaje significativo.

Para Gómez y Rico (2007) "*los maestros ni trabajan ni aprenden solos*" (p. 17); para los autores esta sentencia justifica el creciente interés en el desarrollo profesional y la formación de maestros desde perspectivas socio-culturales que involucran el concepto de "comunidad de aprendizaje".

Algunos autores promueven las comunidades de aprendizaje como una manera de optimizar el tiempo invertido en la formación profesional (Louis y Marks, 1998); sin embargo los cambios en las concepciones de los profesores y la estabilidad de tales cambios no han sido sometidos a mucha indagación.

Para Wenger (1998) una teoría social del aprendizaje debe considerar cuatro componentes fundamentales: el significado, la práctica, la comunidad y la identidad. Para Wenger (1998) el concepto de práctica "*es útil para abordar una parte concreta: La experiencia de significado. Por encima de todo, la práctica es un proceso por el que podemos experimentar el mundo y nuestro compromiso con él como algo significativo*" (p. 75).

Adicionalmente, el concepto de significado es relevante en la propuesta de Wenger, quien considera al significado involucrado en dos procesos:

- Negociación de significado
- Participación y cosificación

Sin embargo, la poca atención que Wenger concede a la enseñanza en la díada enseñanza-aprendizaje es problemática en contextos en donde la enseñanza es más deliberada que incidental.

El concepto de significado y su importancia en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, también ha sido considerado ampliamente por Godino y et. al., en diversos trabajos: Godino (2002), Godino, Batanero y Font (2007), Font, Godino y D´Amore (2007) para quienes el significado se entiende como el contenido de cualquier función semiótica. Dicho contenido puede ser cualquiera de los tipos de objetos propuestos por el EOS, en particular puede estar constituido por los sistemas de prácticas puestos en juego en la resolución de un tipo de problemas o tareas matemáticas (significado sistémico o pragmático).

Godino (2002) no sólo concede un rol preponderante a la "negociación de significados" y a la relatividad del significado en función del contexto institucional donde se enmarca la práctica matemática, sino que ofrece un conjunto de elementos teóricos que favorecen el estudio sistemático y pormenorizado de las trayectorias cognitivas y epistémicas experimentadas por los "conceptos" matemáticos en tanto que son objeto de la atención y actividad de los estudiantes, inmersos en una "comunidad" de aprendizaje.

Las comunidades matemáticas de aprendizaje utilizan, en el seno de las actividades que desarrollan, artefactos culturales tales como las teorías matemáticas, las tecnologías, las metodologías y estructuras de la actividad social.

En la experiencia de formación de los maestros que concierne a esta tesis doctoral, se propuso el razonamiento algebraico elemental como tema de reflexión a un grupo de maestros. Se planteó que el razonamiento algebraico elemental, novedoso para el grupo de 28 estudiantes con los que se trabajó, fuera discutido, cuestionado y significado en el contexto académico de la elaboración de una Unidad Didáctica sobre el razonamiento algebraico elemental, con ayuda de la GROS.

La propuesta de comunidades de aprendizaje se sincroniza con la postura del EOS frente al significado en matemáticas, en tanto que el EOS considera que el significado es relativo a las instituciones; significado que se comprende como sistemas de prácticas y que se construye en el seno de prácticas grupales o individuales, cuando se discuten problemas de matemáticas. El EOS aboga por el reconocimiento y la promoción de una síntesis dialéctica entre significados personales e institucionales. El reconocimiento del papel del conocimiento personal en dialéctica con el conocimiento institucional implica la relevancia de la participación de los estudiantes y favorece la discusión y reflexión de los objetos y significados matemáticos escolares.

3.2.5 La Fenomenografía

La fenomenografía es un enfoque metodológico que se basa en la observación y en la experiencia; describe el aprendizaje como la experimentación de situaciones en maneras particulares, generalmente estudiadas en contextos educativos. El término fenomenográfico fue primeramente usado por Ference Marton (1981) para describir un programa de investigación cuya intención es describir las concepciones que las personas tienen sobre un tema en particular. Los resultados del análisis fenomenográfico son categorías de descripción en las que los estudiantes conciben el fenómeno bajo indagación (Marton, 1986). El foco tanto en la descripción de las concepciones como en la red de relaciones entre ellas y el contexto en que esas concepciones se manifiestan es lo que determina que esta metodología cualitativa sea pertinente para investigar el problema que nos ocupa.

Las fuentes de información que pueden revelar la comprensión de las personas sobre un fenómeno en particular son variadas; sin embargo el método propuesto por la fenomenografía es la entrevista abierta y profunda (Booth, 1997). Por abierta se quiere decir que el investigador está dispuesto a explorar líneas de razonamiento que el entrevistado desee proponer y que eventualmente, conducen a reflexiones fructíferas que no habían sido anticipadas por el investigador. Por profunda se quiere decir que se indaga hasta que, eventualmente, el entrevistado no aporta más información o entra en temas que no son del interés de la indagación. El investigador debe revisar, estudiar y proponer posibles relaciones e hipótesis en relación con las experiencias expresadas por el entrevistado. A partir de este trabajo de reflexión el investigador puede retomar algunos temas ya discutidos con el entrevistado para confirmar, ampliar, refutar o cerrar posibles vías de continuación.

La fenomenografía recomienda no descartar hipótesis, aunque puedan parecer descabelladas, y sugiere discutirlas con los sujetos, ya que la comprensión de estos sobre algunas ideas puede cambiar en la medida en que se les concede atención, se discute y se reflexiona sobre ellas (Marton, 1994, p. 4427).

Durante la investigación, se siguió esta sugerencia en tanto que en cada sesión de discusión se plantearon cuestiones surgidas de la lectura de las notas de campo y escucha de las grabaciones de las sesiones anteriores. Así mismo, se hicieron tres entrevistas días después que los estudiantes presentaron sus Unidades Didácticas, para indagar algunas cuestiones.

Para indagar sobre las concepciones de los maestros en formación y sobre el significado profundo de las mismas, se adoptó el enfoque investigativo fenomenográfico, enmarcado en la investigación cualitativa. Es así como la fenomenografía favorece que las concepciones de los maestros en formación, manifestadas durante el proceso de discusión grupal y elaboración de la Unidad Didáctica, pueda ser descubierta, y su estructura y matices identificados.

Marton (1986) describe la fenomenografía como un método: “*Para investigar las formas cualitativas en las que las personas experimentan, conceptualizan, perciben y comprenden varios aspectos del mundo y de los fenómenos que les rodean*” p. 31. La fenomenografía favorece identificar las concepciones e indagar sobre los significados subyacentes y las relaciones entre ellas (Entwistle, 1997); considera así mismo que “*la fenomenografía concibe el aprendizaje como una actividad relacional- que se da por medio de una interacción entre los estudiantes, el contenido objeto de aprendizaje, y todo el ambiente de aprendizaje*” (Entwistle, 1997; p. 129)

3.2.6 La Observación Participante

Para especificar el rol asumido por el investigador, se considera pertinente dar algunas de las características de la observación participante como metodología de investigación cualitativa.

La observación participante es el proceso que faculta a los investigadores a comprender las actividades de las personas en un escenario natural. La observación se da por medio de la participación en las actividades de la persona o grupo de personas objeto de estudio.

Russell (1995) considera que la observación participante requiere “*acercarse a las personas y lograr que se sientan lo suficientemente a gusto con la presencia del investigador de tal suerte que el investigador pueda observar y obtener información*” (p. 136). Entre los instrumentos que el observador participativo utiliza para apoyar la observación, se incluyen las conversaciones naturales, las entrevistas, encuestas, materiales escritos por los sujetos, audio, video y en general, métodos que no sean intrusivos.

3.2.6.1 Las Posturas del Observador

Es importante que el observador se involucre en el grupo o medio que será motivo de estudio, para ello se requiere reconocer las demandas que la postura de observador impone. Gold (1958) describe cuatro posturas que pueden ser asumidas en investigaciones de observación participante.

- **Participante completo**: En este caso el participante es un miembro del grupo que está bajo estudio. El grupo desconoce el doble papel asumido por el participante. Este rol del observador es cuestionado por el engaño a que son sometidos los miembros del grupo.
- **Participante como observador**: Este rol es parecido al anterior; el investigador es un miembro del grupo que estudia a los otros y que se interesa tanto en observar como en participar. El grupo conoce que el miembro los investiga. La principal desventaja es que los miembros se distancien de este participante.
- **Observador como participante**: El investigador participa en las actividades del grupo. Su rol como investigador es reconocido por los miembros del grupo. Una desventaja puede ser que los miembros del grupo controlen la información y mantenga cierta distancia del observador. Sin embargo, es posible asumir un rol de "membresía periférica" que permite al investigador "observar e interactuar lo suficientemente cerca con los miembros para establecer la identidad de un miembro sin participar en aquellas actividades constituyentes de la esencia de la membresía al grupo" (Adler y Adler, 1994; p. 380).
- **Observador completo**: El rol del investigador es completamente desconocido para el grupo que está siendo objeto de estudio. El tipo de observación hace innecesario que el grupo sea informado de la observación en curso. Un ejemplo de esta situación es aquella en la cual el público en un escenario deportivo es observado, pero la observación no inoportuna ni incomoda. Dos posibles desventajas son que el investigador no establece contacto con los individuos, y que sus datos se focalizan en comportamientos grupales manifestados bajo ciertas condiciones que no son fáciles de reproducir.

En esta investigación el autor asumió el rol de "observador como participante"; en tanto que el interés de un participante es ayudar a producir un trabajo colectivo. El grupo acogió algunas de las sugerencias realizadas por el "observador que participa", pero rechazó algunas otras, lo cual podría mostrar la valoración como participante más que como observador y asesor que el grupo le concedió. Su rol estuvo conformado por cuatro componentes: participante, observador, asesor e investigador.

El rol de asesor se manifestó básicamente cuando: Sugirió temas de reflexión, recordó las condiciones a cumplimentar, y actuó como la posible voz de un niño de escuela elemental al manifestar dudas sobre aspectos particulares de las soluciones matemáticas provistas por los maestros. Su rol de investigador se manifestó cuando propuso temas de reflexión para que los estudiantes manifestaran sus creencias, para que argumentaran, para que identificaran objetos matemáticos y para que reconstruyeran algunos significados.

Una de las críticas que frecuentemente se formula contra el rol del "observador como participante" reside en la validez. Se considera que, debido a su doble papel de participante y observador, las conclusiones del observador son subjetivas, en tanto que su membresía ni es completa ni posee una visión completa del fenómeno bajo estudio.

No obstante, en nuestro caso de estudio, se considera que la membresía completa es imposible, en tanto que el investigador nunca podrá ser considerado miembro del grupo en todo derecho, entre otras razones por la diferencia de edad y por el estatus de profesor que le confieren los maestros en formación. Se reconoce que es posible que los estudiantes no manifiesten todas sus inquietudes durante las sesiones de trabajo; sin embargo se hizo un gran esfuerzo por generar un ambiente cordial y de confianza mutua, en donde ni el criterio de autoridad epistémico ni deontológico fuese un obstáculo; las opiniones no se juzgaban ni se presionaba para obtener un resultado deseado. Una eventual prueba de que este ambiente se logró es que los estudiantes hicieron caso omiso a algunas sugerencias del investigador relacionadas con análisis epistémicos, conceptos matemáticos involucrados, y con la presentación de la Unidad Didáctica ante la clase, por mencionar algunos. Para dar cuenta de las creencias no manifestadas durante las sesiones se usó la triangulación.

Otra crítica que se formula contra los estudios de observación participativa es la confiabilidad, en tanto que tales estudios suelen carecer de análisis estadísticos para confirmar la significancia de las categorías encontradas. Si bien este es nuestro caso, podemos afirmar que muchos de los hallazgos de esta investigación han sido reportados en otros estudios y con otras poblaciones de maestros en formación.

3.3 Algunas Precisiones sobre la Metodología

Se reconoce que la metodología que se usa durante una investigación es un tema muy sensible para la comunidad de investigadores. La validez, la confiabilidad, y la generalización son temas de interés. Sin embargo, estos términos tienen diferentes significados en función de la postura del investigador y del contexto de la investigación.

De acuerdo con Ruthven y Goodchild (2008) "*la localización institucional ha moldeado los términos de aceptación de las investigaciones, que están influenciadas por modelos de conocimiento e indagación establecidos en el campo*" (p. 565). En un contexto positivista, se opera bajo la suposición que hay valores "verdaderos" que, en presencia de un buen instrumento, pueden ser medidos confiablemente y con validez (Kirk y Miller, 1986). En un contexto no positivista, no hay verdades absolutas o leyes universales para los procesos humanos que puedan ser capturados, medidos y valorados de manera precisa e inequívoca. En tales contextos, los procesos de validación y valoración de los resultados de la investigación son socialmente construidos.

En vista de lo anteriormente expresado, en este trabajo de investigación se ha tratado de ser estricto en el uso de los supuestos metodológicos; sin embargo es menester reconocer que la compleja realidad de un contexto investigativo que incluye variables tales como un número grande de estudiantes, que discuten tareas matemáticas, sobre un tema novedoso: Álgebra en la escuela primaria, en un contexto institucional y con diversas restricciones, entre ellas la temporal, puede desbordar la capacidad de control que un investigador podría ejercer.

Valero y Vithal (1998) sugieren que los investigadores suelen preferir la integridad metodológica sobre la relevancia educativa cuando estas parecen estar en conflicto. En este trabajo se ha tratado de lograr un balance entre la integridad y la relevancia.

A continuación, se explicita cómo se dió cuenta de los temas de validez, confiabilidad y generalización en esta investigación.

Merriam (1988) plantea dos cuestiones relacionadas con la validez: ¿Qué tan creíbles son mis hallazgos con los datos que tengo? ¿Pueden otros reconocer que mis conclusiones están soportadas por los datos?

Para alcanzar validez interna, se ha procurado:

- Hacer explicitas las suposiciones y procedimientos al plantear un "camino de auditoria" (Lincoln y Guba, 1985, p. 319) para hacer posible que otros investigadores lleguen a mis hallazgos a partir de mis datos.
- Hacer explícito el contexto, mis preconcepciones y el marco teórico.
- Sugerir y revisar explicaciones alternativas a mis hallazgos (Miles y Hubermann, 1994).
- Presentar y publicar hallazgos en eventos académicos y por tanto asegurar la revisión y crítica de mis hallazgos.

Merriam (1988) formula una pregunta sobre la confiabilidad de un estudio cualitativo: ¿Son los resultados consistentes? Se ha tratado de responder esta cuestión mediante el uso de varios modos de triangulación (Lincoln y Guba, 1985, p. 305; Miles y Huberman, 1984, p. 234; 1994, p. 279). La perspectiva sobre la triangulación usada en esta investigación es que existen varias formas de concebir un fenómeno, cada una de las cuales está inmersa en sus especificidades culturales, sociales e institucionales.

Los modos de triangulación usados en este trabajo son:

- La "triangulación entre métodos", para la exploración de los datos. Esto tiene el propósito de hallar congruencias y anomalías;
- La triangulación "dentro" de los métodos. A manera de ejemplo, los datos de las sesiones de trabajo fueron usadas para diseñar cuestiones que fueron propuestas a los estudiantes durante las sesiones siguientes, y para diseñar las entrevistas no estructuradas; así mismo se contrastaron los datos obtenidos a partir de las varias fuentes de datos;
- La triangulación "entre investigadores". Los hallazgos fueron contrastados con los reportes de investigación, con investigadores en varios congresos y en discusiones con algunos colegas.

Para dar cuenta del requisito de la generalización (validez externa), es decir para facultar a los investigadores a aplicar los hallazgos de esta investigación en la suya propia, se intentó que los datos fueran accesibles (de tal suerte que otros pudieran experimentar los fenómenos presentados aquí de manera análoga a como se experimentaron por el investigador) se ha procurado:

- Inclusión de miembros "típicos" y no "tan típicos" [3] en los grupos estudiados. Esto se logró mediante la invitación a estudiantes considerados como tales.
- Incluir una población diversa.
- Sumergirse en el contexto de la investigación.
- Hacer explícita la "teoría de la transferencia" de la investigación (Miles y Huberman, 1994, p. 279).

[3] Una aclaración en relación con el uso de los términos "típicos" y no "tan típicos" es pertinente. "Típicos" se refiere a estudiantes que tienen un desempeño medio en los cursos de matemáticas, que no se destacan del resto del grupo. No "tan típicos" se refiere a estudiantes o que son muy brillantes y aplicados en sus estudios o que experimentan dificultades con las matemáticas y que no se destacan por sus participaciones en clase. En tal sentido, estos términos no se usan en forma peyorativa o despectiva.

3.4 Contexto de la Investigación

La investigación se realizó en la Universidad de Granada, durante el primer cuatrimestre del curso 2008-2009, Facultad de Ciencias de la Educación, en el marco del curso Currículo de Matemática en Educación Primaria para maestros que cursan el segundo año de carrera en la Especialidad de Educación Primaria.

El programa de formación está articulado por tres grupos de cursos: obligatorios, troncales y optativos. Los cursos de formación en matemáticas y su didáctica son:

- "Currículo de Matemáticas en Educación Primaria", que es obligatorio y tiene dos créditos teóricos y dos punto cinco créditos prácticos.
- "Enseñanza y resolución de problemas en matemáticas", que es optativo y tiene tres créditos teóricos y tres créditos prácticos.
- "Matemáticas y su didáctica", que es troncal y tiene cuatro punto cinco créditos teóricos y cuatro punto cinco créditos prácticos.

El curso "Currículo de Matemáticas en Educación Primaria" tiene una componente práctica y una teórica; esta última se evalúa mediante un examen escrito. Para aprobar la componente práctica los estudiantes debían, entre otras tareas, diseñar una unidad didáctica para un contenido matemático de primaria. Fue en el marco de la elaboración de esta unidad didáctica que los estudiantes escogieron un tema del currículo de las matemáticas escolares para el tercer ciclo[4] y en el que se adelantó el trabajo de investigación.

Cabe mencionar que ni el conocimiento del contenido del álgebra ni su didáctica fue motivo de estudio en el curso mencionado; tampoco lo fue en ninguno de los cursos que los estudiantes tomaron durante su primer año de carrera.

3.4.1 Los Informantes

El número de estudiantes con quienes se trabajó fue de 28, que constituyen la población con la cual se llevó a cabo el proceso de formación y de orientación durante la elaboración de sus Unidades Didácticas. Los grupos fueron constituidos por ellos mismos. Dos de los siete grupos fueron invitados específicamente a participar en la experiencia. Los grupos restantes acogieron la invitación hecha por el formador a todos los estudiantes. El grupo de informantes estuvo compuesto de 86% de mujeres y 14% hombres, cuya edad promedio es de 20 años. Manifestaron gran afinidad hacia la profesión docente. Expresaron interés en el tema de

[4] Corresponde al quinto y sexto grado de la educación primaria española y a edades entre 10 a 13 años

razonamiento algebraico en la escuela primaria en tanto que “no es posible enseñar álgebra en la escuela [primaria]… queríamos saber de qué va esto”[5]. Manifiestan gusto hacia la matemática, aunque algunos estudiantes manifestaron que tienen dificultad para resolver problemas no rutinarios, no tienen experiencia docente; sin embargo suelen dar asesorías a niños de escuela primaria. Durante las sesiones de trabajo mostraron un pensamiento crítico e independiente.

La muestra para el estudio se escogió en un muestreo no probabilístico (León y Montero, 2003). La elección fue de tipo *incidental*, por lo tanto no aleatoria, ya que los estudiantes participaron en tanto que estaban inscritos en el curso de Currículo de Matemáticas en Educación Primaria y se consideraron dos criterios para incluir a los estudiantes en el estudio: El primero fue la valoración positiva que sobre su trabajo académico dieron los profesores del curso anterior (dos grupos de estudiantes fueron invitados explícitamente a participar), y el segundo que los estudiantes se ofrecieran a trabajar voluntariamente en la temática Razonamiento Algebraico Elemental como tema sobre el cual presentarían el trabajo de fin de curso.

3.4.2 Recogida de Datos

Los datos se recogieron recurriendo a varias fuentes: Entrevistas, conversaciones informales, audio de las sesiones de trabajo, revisión de trabajos escritos por los estudiantes, borradores previos de las unidades didácticas, encuesta, y video de la presentación final del trabajo.

También se recogieron datos con un grupo de niños de sexto grado de un instituto de la ciudad de Granada. Este conjunto de datos consistió en resoluciones a tareas enmarcadas en el razonamiento algebraico elemental, tomados del libro de texto en uso por los niños. De este conjunto de resoluciones se escogieron algunas que fueron analizadas por los maestros en formación. Sus análisis son tema de estudio en este trabajo y de ellos se informa en el quinto capítulo de esta memoria. Si bien es cierto que este grupo de niños de escuela elemental generaron información usada en la tesis, no se consideran informantes en todo derecho en virtud de las condiciones en las cuales se generaron los datos.

3.4.3 Análisis de los Datos

Para obtener comprensión del proceso experimentado por los estudiantes durante las asesorías y durante el curso de la elaboración de la unidad didáctica, se efectuó un proceso de triangulación.

El análisis de los datos se hizo en dos etapas. La primera tuvo lugar durante la realización de la indagación, con el análisis de las sesiones de trabajo, con la reflexión acerca de los ejercicios

[5] Afirmación hecha por un estudiante. Notas de campo.

trabajados por los estudiantes y de sus inquietudes, y con la redacción de cuestiones que eran abordadas en la siguiente sesión para buscar clarificar tanto sus inquietudes como las del investigador. La segunda cuando los estudiantes entregaron y presentaron sus unidades didácticas, con la transcripción de las grabaciones y videos, con el análisis de las unidades didácticas y de sus diversas componentes. A partir de los hallazgos preliminares de esta etapa, se citaron a algunos estudiantes a una entrevista.

3.4.4 Procedimiento

Nuestro problema y preguntas se orientan hacia el desarrollo y evaluación de competencias de análisis didáctico de tareas sobre Razonamiento Algebraico Elemental en futuros maestros, con especial interés en la determinación de lo que los maestros en formación consideran como álgebra en la escuela elemental, los tipos de tareas que propondrían a los niños, los análisis epistémicos realizados, los aspectos algebraicos identificados en las actividades propuestas y la argumentación que usan para justificar la inclusión de las actividades en la unidad didáctica.

En el contexto de la elaboración de la unidad didáctica el tema sobre razonamiento algebraico junto con asesoría, impartida por el investigador, se ofertó a los estudiantes. Un total de siete grupos, con cuatro estudiantes cada uno, escogieron voluntariamente trabajar su unidad didáctica sobre el razonamiento algebraico en el sexto grado de educación primaria.

Al inicio del proceso de asesoría, los estudiantes recibieron un material de apoyo que incluyó nuestra aproximación al razonamiento algebraico elemental (Anexo A -Prácticas Iniciales con los Maestros en Formación-). El material de apoyo incluyó ejemplos de algunas de las dificultades más frecuentes relacionadas con las letras y con el signo igual que los escolares encuentran en su aprendizaje del álgebra, adicionalmente se efectúo una práctica con ejercicios adaptados de Booth (1984).

Se brindó libertad de acción a los estudiantes; fue así como ellos determinaron el número de reuniones sostenidas, escogieron los libros de texto de matemáticas elementales, los ejercicios que se discutían en las sesiones de trabajo y decidieron cuales ejercicios incluir en la unidad didáctica final. Igualmente se sugirió el uso de la unidad de reconocimiento de objetos y significados (GROS). Durante las sesiones de trabajo, el asesor no sólo orientó a los estudiantes de cada equipo hacia la cumplimentación de las condiciones sobre el diseño de la unidad didáctica sino que discutió sobre la solución de los ejercicios, el carácter “algebraico” de los mismos y planteó cuestiones sobre las dificultades que los niños podrían enfrentar al resolver las actividades.

Asimismo se intentó crear conflictos epistémicos y se estimuló el debate sobre la explicación; los estudiantes debían tomar decisiones no sólo sobre la inclusión de los ejercicios y sobre su carácter algebraico, sino sobre los elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos que se ponían en juego en su resolución. Cabe mencionar que se hizo un gran esfuerzo para que las discusiones se realizaran en el marco de nuestra aproximación al razonamiento algebraico elemental y que los estudiantes manifestaran sus concepciones en las discusiones grupales.

3.4.5 Las Sesiones de Trabajo

En tanto que los datos analizados se tomaron durante las sesiones de trabajo, se considera conveniente especificar las características de estas.

Las sesiones de trabajo se sostuvieron en dos sitios: Un salón de clase y en la biblioteca del Departamento de Didáctica de la Matemáticas. Desde el inicio de las sesiones, y con la excepción de la primera, el control del tiempo y de la programación de las actividades fue cedida a los estudiantes. La intención de esta propuesta fue brindar a los estudiantes la certeza que la asesoría era una ayuda que se les brindaba y no clases de asistencia obligatoria, de tal suerte que se alimentara sentido de confianza entre los estudiantes y el asesor-participante desde el inicio de la experiencia.

Durante algunas de las sesiones de trabajo el asesor sugirió a los estudiantes usar la GROS para identificar los conocimientos matemáticos presentes y emergentes en la solución de los ejercicios. Asimismo sugirió la aproximación al razonamiento algebraico elemental como un posible criterio para valorar el carácter algebraico de los ejercicios. La aproximación les fue dada en la primera sesión.

En principio se acordó sostener una reunión semanal. La intención detrás de esta apretada programación fue la de disponer de más tiempo de trabajo con los sujetos lo que a su vez podría haber generado más datos. Sin embargo, debido a los compromisos académicos de los estudiantes esta programación no se cumplió, y finalmente se realizaron seis sesiones de trabajo antes de la presentación de la unidad didáctica.

En promedio cada grupo estaba conformado por cuatro estudiantes. Algunos estudiantes miembros de cada grupo no asistieron a algunas de las sesiones de trabajo.

3.5 Conclusiones

En este capítulo se ha presentado el marco y los elementos teóricos que han sido considerados con arreglo a responder las preguntas de investigación y lograr los objetivos planteados. Se ha procurado mantener en un mínimo el número de elementos considerados sin perjuicio para la validez y la confiabilidad del estudio.

Tal como se afirmó en la sección 3.3 -Contexto de la Investigación- se ha procurado mantener un equilibrio entre integridad metodológica y relevancia educativa.

La Figura 3.3 muestra la estructura general que ilustra los diversos elementos teóricos, las relaciones entre ellos así como con las preguntas y objetivos de investigación.

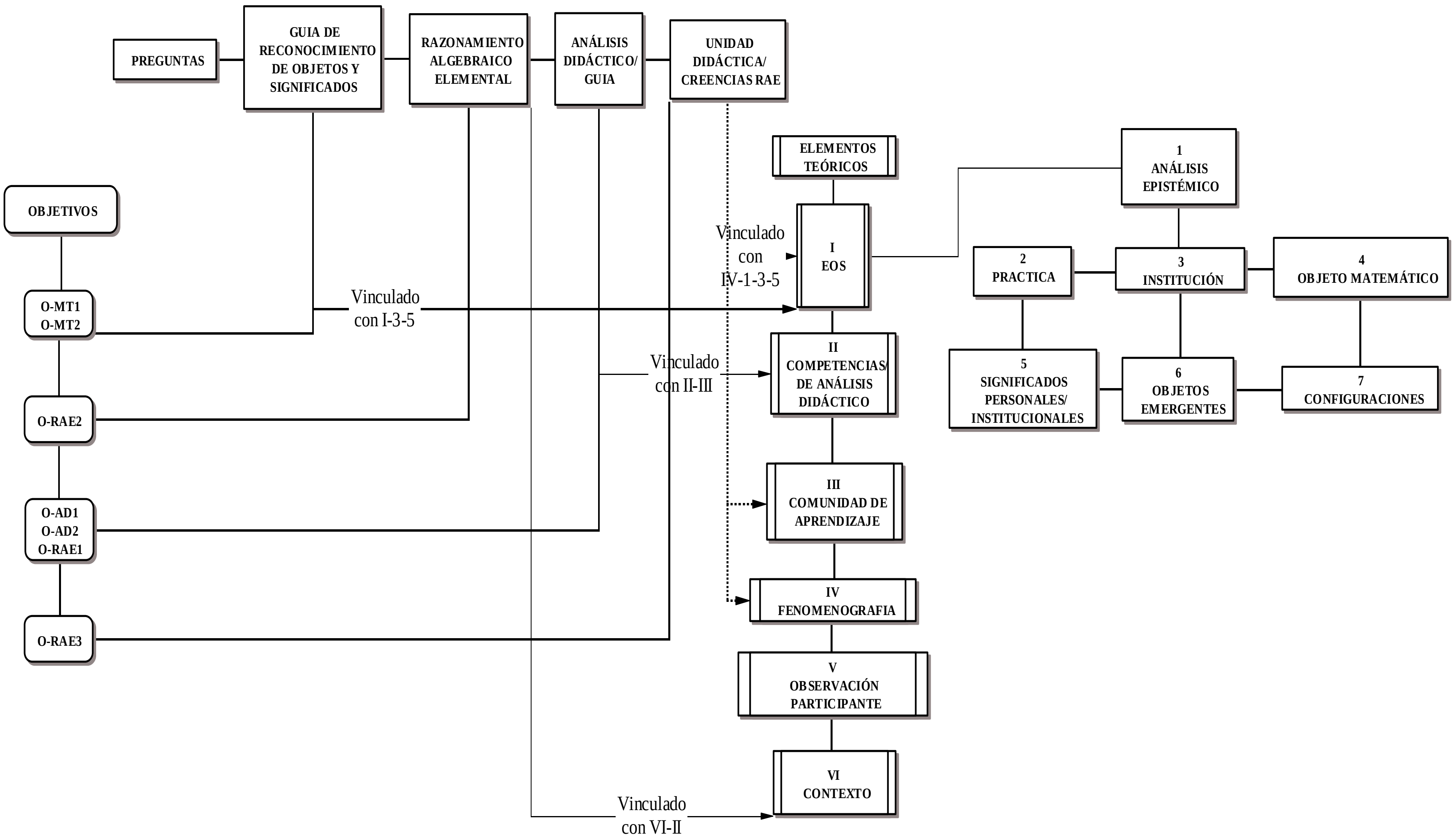


Figura 3.3. Estructura General del Trabajo de Investigación.

CAPÍTULO 4
VALORACIÓN Y DESARROLLO DE COMPETENCIAS PARA EL ANÁLISIS EPISTÉMICO DE TAREAS RAE

4.1 Introducción

Este capítulo se dedica al análisis de dos tareas propuestas a los maestros en formación: Una de ellas en situación de trabajo en grupo, otra en situación de examen. Las dos situaciones sirven para valorar el desarrollo de competencias para el análisis epistémico experimentado por los estudiantes en tanto que una actividad se realizó al inicio del curso y la otra al final del mismo.

En el intermedio de estas dos actividades, los maestros en formación sostuvieron reuniones de discusión para diseñar una unidad didáctica. Durante el transcurso de tales reuniones los maestros en formación tuvieron oportunidad de efectuar análisis didácticos de otras tareas que son documentadas en este trabajo de investigación. De esto se informará en los capítulos cinco y seis.

4.2 Contexto Formativo

Para facilitar la lectura, se repite el contexto en el cual se efectuó el trabajo. La investigación se realizó en el marco del curso “Currículo de Matemáticas en Educación Primaria” impartido en la especialidad de Maestro en Educación Primaria, en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada, España.

Este curso se ofrece a los maestros en formación que están en su segundo año de carrera, y tiene el formato teórico- práctico. Del total de 20 sesiones de dos horas de duración, impartidas en un cuatrimestre, seis tienen una orientación de “clase teórica” (en las que predomina la explicación magistral) y el resto de “clases prácticas” (trabajo en equipos). Se incluyen también seis horas semanales de tutoría personalizada y voluntaria. Para las secciones teóricas se sigue el libro texto (Godino et al., 2004) y para las secciones prácticas se siguen las guías diseñadas por el formador.

En tanto que la indagación se realizó sobre el trabajo orientado hacia el diseño, discusión y presentación de la Unidad Didáctica, que una muestra de estudiantes de magisterio realizó, se dedicaran los siguientes párrafos a dar algunas características de la Unidad y del trabajo de acompañamiento y orientación que se hizo. Durante el curso se realizaron algunas actividades grupales, durantes las clases, en donde los estudiantes utilizaron la Guía de Reconocimiento de Objetos y Significados (GROS) (Godino y et al., 2008).

La nota final de curso se asigna con base en tres notas parciales: La primera es la nota obtenida en un examen escrito de carácter teórico; la segunda es la calificación del trabajo realizado en las "clases prácticas", y la tercera es la nota dada al trabajo de diseño de la Unidad Didáctica, que se presenta al final de curso y que se elabora en grupo sobre un tema de matemáticas escolares, escogido por los estudiantes.

4.3 Tareas Discutidas

En esta sección se discuten dos tareas realizadas por los maestros en formación. Una de las tareas se discutió en grupo y la otra en situación de examen. Se quiso así incluir dos instancias de actividad matemática e indagar tanto un estado inicial como un estado posterior de dos grupos en relación con las competencias de análisis epistémico.

Los dos tareas se escogieron en tanto que la primera de ellas (números cuadrados) trata sobre patrones, un tema de mucha actividad investigativa en relación con el RAE; mientras que la segunda es una tarea de carácter aritmético-algebraico que pertenece a una categoría de problemas de palabras bastante estudiados (Cerdan, 2008).

4.3.1 Análisis a Priori de Objetos y Significados

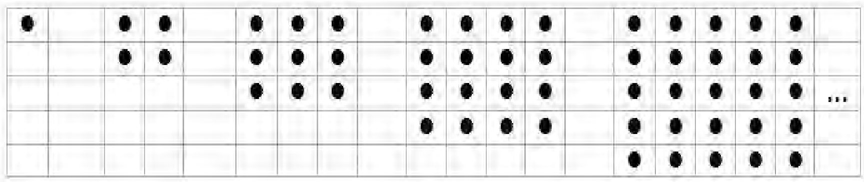
En este apartado se efectuará el análisis a priori de objetos y significados de dos tareas propuestas a los estudiantes en formación. La primera es un problema sobre números cuadrados y la segunda, un problema de carácter aritmético-algebraico.

4.3.1.1 Tarea Uno

Esta tarea discute los números cuadrados en situación de discusión grupal fue dada a los estudiantes para que fuera trabajada en grupo. Se consideró que durante la discusión grupal los estudiantes discutirían y compartirían objetos y significados identificados. Adicionalmente fue la primera experiencia de análisis didáctico de los estudiantes, por tal razón se prefirió la actividad grupal a la individual.

Esta tarea, cuyo enunciado se muestra en la Figura 4.1, se adaptó del texto Positive Algebra (2004, p. 66).

Al disponer puntos en el plano en forma cuadrada y contar el número total de éstos en cada uno de los cuadrados, obtenemos los llamados "números cuadrados": 1; 4; 9; 16; 25;…



a) Llamaremos $\mathbf{C_n}$ al número cuadrado cuya base está formada por **n** puntos; ¿Cuál es el número cuadrado que está en la posición 7?, y ¿En la posición 9?
b) ¿Cuál es el número cuadrado que está en la posición "n"?
c) Describa con detalle el procedimiento que ha usado.
d) Identifica los conocimientos matemáticos que has puesto en juego para resolver el problema

Figura 4.1. Tarea de Números Cuadrados.

Una posible solución a los dos primeros incisos se muestra a continuación:

a) ¿Cuál es el número cuadrado que está en la posición 7?

El número cuadrado ubicado en la séptima posición será: 49; dado que para obtenerlo se multiplica el número de puntos en cada lado, que en este caso es igual a 7.

b) El número cuadrado ubicado en la posición n-ésima, se obtiene mediante la multiplicación del número "n" que corresponde al número de puntos en la base, por sí mismo. Dado que el arreglo cuadrado que corresponde a la posición "n" tiene "n" puntos en la base, entonces el número de puntos en ese arreglo cuadrado es: $n \times n = n^2$, así tenemos que, el n-ésimo número cuadrado- $\mathbf{C_n}$ - es igual a n^2.

4.3.1.1.1 Análisis Epistémico

Un posible análisis epistémico de la tarea se muestra a continuación. Se indicarán los tipos de objetos y significados conferidos que corresponden a elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos. Es posible que algunos objetos y sus significados asociados puedan ser reagrupados. Igualmente es posible que sólo un número reducido de los objetos matemáticos y sus significados propuestos correspondan a una configuración usada o propuesta por los maestros en formación. A continuación se señalan algunos objetos matemáticos identificados y al frente se indicarán algunos significados asociados.

4.3.1.1.1.1 Elementos Lingüísticos

Se recuerda que los elementos lingüísticos considerados pueden ser términos y expresiones matemáticas tales como: Símbolos, representaciones gráficas. A continuación se exhiben algunos elementos lingüísticos con algunos de sus significados asociados:

- Disponer puntos en el plano: Dibujar puntos sobre la hoja de papel.
- Contar el número total de estos en cada cuadrado: Asignar un número natural a cada conjunto discreto de puntos, que corresponde a la cardinalidad del conjunto y que se obtiene mediante un proceso de conteo.
- Números cuadrados: Denominación dada al número que corresponde al cardinal de un conjunto de puntos dispuestos en forma de un cuadrado.
- En forma cuadrada: Arreglo discreto de puntos, que tiene el mismo número de puntos en cada fila y en cada columna.
- Llamaremos $\mathbf{C_n}$ al número cuadrado cuya base está formada por **n** puntos: Asignación de un “símbolo”- variable- al número que representa al cardinal de un arreglo cuadrado, cuya base tiene “n” puntos.
- Asignación funcional entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de los cuadrados de los números naturales. Que se podría escribir funcionalmente así: $C(n) = n^2$.
- ¿Cuál es el número cuadrado que está en la posición 7?, y ¿En la posición 9?: Número natural correspondiente a una disposición cuadrada discreta de puntos, en donde el número de puntos en la base es de siete y nueve respectivamente.
- ¿Cuál es el número cuadrado que está en la posición “n”? : Refiere a la regla (ley de asignación) que asigna un número natural al conjunto discreto que tiene una configuración geométrica en forma un cuadrado, de n puntos en la base.
- ¿Cuál es el número cuadrado que está en la posición “n”? : Refiere a la regla (ley de asignación) que asigna a la posición “n” el cardinal de un conjunto de puntos.
- ¿Cuál es el número cuadrado que está en la posición “n”? : Refiere a un número natural asociado al número natural “n”.
- Describa con detalle el procedimiento que has usado: Instrucción que solicita la escritura detallada del proceso de solución (argumento) que justifica y valida su respuesta.

- “n”: Corresponde a dos significados diferentes; en un caso se refiere a la posición que el arreglo numérico ocupa y en el segundo, al número natural que corresponde al cardinal del conjunto de puntos localizados en la base del cuadrado.

4.3.1.1.1.2 Conceptos

Se recuerda que los conceptos son entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal. A continuación se exhiben algunos conceptos con sus significados asociados:

- Cuadrado: Figura geométrica de cuatro lados perpendiculares dos a dos, tal que las longitudes de los lados es la misma.
- Número natural: Definición de número natural (usando los axiomas de Peano, por ejemplo).
- Número cuadrado: Número natural correspondiente al cardinal del conjunto de puntos dispuestos en forma de cuadrado.
- Número en la posición “n”: Número natural correspondiente al cardinal de un conjunto de puntos dispuestos en forma de cuadrado, en donde el número de puntos en cada lado es igual a “n”.
- Número en la posición “n”: Número natural correspondiente al cardinal de un conjunto de puntos dispuestos en forma de cuadrado y que se ubica en una posición desconocida, denominada “n”.
- $\mathbf{C_n}$ al número cuadrado cuya base está formada por **n** puntos: Función discreta, que asigna un número natural al número natural n; n representa el número de puntos en cada lado del cuadrado.
- Regla de asignación: Que hace corresponder un número natural al número natural “n”, mediante un proceso de conteo o multiplicación.

4.3.1.1.1.3 Procedimientos

Se recuerda que los procedimientos se refieren a técnicas, a algoritmos y a operaciones. A continuación se exhiben algunos procedimientos con sus significados asociados:

- Identificar patrón numérico de formación: Reconocer que para obtener el número de puntos en cada configuración, se debe multiplicar por sí mismo, el número de puntos localizados en un lado del cuadrado.
- Multiplicar números naturales: Operación de multiplicar números naturales.
- Contar: Enumeración de un conjunto discreto de puntos en correspondencia con los números naturales y asignación del último número asignado como el cardinal del conjunto.

4.3.1.1.1.4 Propiedades

Se recuerda que las propiedades se refieren a enunciados para los cuales se requiere una demostración o prueba. A continuación se exhiben algunas propiedades con sus significados asociados:

- El número de puntos en un arreglo discreto cuadrado se obtiene multiplicando por sí mismo el número de puntos ubicados en un lado.
- El número de puntos ubicados en uno de los lados: Evita contar todos los puntos en el arreglo.
- El número ubicado en la posición “n” es único: No existe otro número correspondiente al número de puntos correspondiente al número cuadrado que tenga “n” puntos en uno de los lados.
- El número ubicado en la posición “n” es único: Existe una función bien definida entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de los cuadrados de los números naturales.
- $\underbrace{n+n+n+n+...+n}_{n\ \ veces}=nxn=n^2$: Forma de contar el número de puntos en un arreglo cuadrado y propiedad que permite resumir el proceso de conteo

4.3.1.1.1.5 Argumentos

Se recuerda que los argumentos se refieren a justificaciones, demostraciones o pruebas de las propiedades utilizadas. A continuación se exhiben algunos argumentos:

- El número cuadrado ubicado en la séptima posición será: 49; dado que para obtenerlo se multiplica el número de puntos en cada lado por sí mismo, que en este caso es igual a 7.
- El número cuadrado ubicado en la séptima posición será: 49. Se multiplica 7x7 pues así se obtiene el área del cuadrado. El número cuadrado ubicado en la posición n-ésima, se obtiene mediante la multiplicación del número “n” que corresponde al número de puntos en la base, por sí mismo. Dado que el arreglo cuadrado que corresponde a la posición “n” tiene “n” puntos en la base, entonces el número de puntos en ese arreglo cuadrado es: n x n = n^2, así tenemos que, el n-ésimo número cuadrado- Cn - es igual a n^2 . Cn =C(n)= n^2= n x n.

Los análisis epistémicos de las dos tareas discutidas en esta sección no pretenden ser exhaustivos. Algunos otros objetos podrían involucrarse, así como asignaciones de significados diferentes a los que se consideran, sin embargo, de acuerdo con nuestra experiencia el conjunto de objetos y significados se adecua bien al conjunto de soluciones dadas por los estudiantes y sirve como referencia de estudio para los análisis dados por los estudiantes. Se evidencia aquí uno de los supuestos del EOS en relación con el carácter relativo del conocimiento matemático, supuesto considerado también por Radford (2006b). El análisis epistémico dado sirve como una ilustración del proceso que se ha seguido, pues en ningún caso la solución matemática a un problema considera todas las alternativas de solución posibles ni todas las entidades básicas que corresponden a las alternativas.

4.3.1.2 Tarea Dos

Esta tarea cuyo enunciado se muestra en la Figura 4.2 fue dada a los maestros en situación de examen. Se consideró que durante la situación de examen los maestros trabajarían individualmente y se esforzarían para identificar objetos y significados.

Consigna:

“Cesar tiene 148 puntos; Yolanda 12 puntos más que César. ¿Cuántos puntos tienen entre los dos?

Figura 4.2. Tarea sobre la Diferencia de Puntos.

Una posible solución es:

César tiene 148 puntos. Yolanda tiene 12 puntos más, luego habrá que añadir 12 puntos a los puntos que tiene César. Se requiere por tanto sumar 148 + 12 = 160. Luego Yolanda tiene 160 puntos. La cantidad de puntos entre los dos será la reunión de los puntos de César y Yolanda; para hallar el cardinal (número de puntos) del conjunto reunión habrá que sumar los cardinales de los conjuntos de puntos correspondientes a César y Yolanda, o sea, 148 + 160= 308. Luego entre los dos tienen 308 puntos.

4.3.1.2.1 Análisis Epistémico

A continuación se muestran algunos objetos matemáticos y significados, agrupados según las entidades primarias: Objetos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos.

4.3.1.2.1.1 Elementos Lingüísticos

Se recuerda que los elementos lingüísticos considerados pueden ser términos y expresiones matemáticas tales como: Símbolos, representaciones gráficas. A continuación se exhiben algunos elementos lingüísticos con sus significados asociados:

- César ha obtenido en un juego 148 puntos: Cantidad discreta de puntos que tiene César (valor numérico de la medida de dicha cantidad que es 148).
- Yolanda 12 puntos más que César: Comparación de cantidades.
- Incógnita: Número desconocido de puntos que corresponden a Yolanda.
- ¿Cuántos puntos han obtenido entre los dos?: Reunión de dos cantidades (número de elementos de dos conjuntos disjuntos); cardinal del conjunto unión.
- Puntos: Nombre genérico de una cantidad discreta, ganancia discreta en un juego.

4.3.1.2.1.2 Conceptos

Se recuerda que los conceptos son entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal. A continuación se exhiben algunos conceptos con sus significados asociados:

- Conjunto y subconjunto: Colecciones de puntos de César y de Yolanda, de la diferencia y de la unión.
- Cantidad de magnitud discreta: Número de puntos (cardinal) de César; número puntos de Yolanda; la cantidad de puntos de la diferencia.
- Valores numéricos de las medidas: 48, 160, 12, 308.
- Reunión de conjuntos: Unión de los conjuntos de puntos de César y los puntos adicionales de Yolanda.
- Adición en N: Resultado de la operación de adición de los cardinales de los conjuntos que intervienen.
- Sumandos: Cada uno de los números sumados (148, 12); (148,160).
- Igualdad de números naturales: Igualdad de números como resultado de operación.
- Suma: Resultado (160, 308).

4.3.1.2.1.3 Procedimientos

Se recuerda que los procedimientos se refieren a técnicas, a algoritmos y a operaciones. A continuación se exhiben algunos procedimientos con sus significados asociados:

- Reunión disjunta: Para hallar el número de puntos de Yolanda, y para hallar el número total de puntos.
- Sumar en fila: Para hallar la suma del número de puntos mediante la disposición en fila de los sumandos.
- Sumar en columna: Para hallar la suma del número puntos mediante la disposición en columna de los sumandos.

4.3.1.2.1.4 Propiedades

Se recuerda que las propiedades se refieren a enunciados para los cuales se requiere una demostración o prueba. A continuación se exhiben algunas propiedades con sus significados asociados:

- P1[1]: Yolanda tiene 160 puntos: Respuesta a una parte del problema.
- P2: El total de puntos es 308: Respuesta al problema.
- Reglas del sistema de numeración posicional decimal: Representación posicional de los números naturales.
- Asociativa de la adición de números naturales: Hace posible realizar la operación aritmética de sumar mediante la agrupación dos a dos.
- Conmutativa de la adición de números naturales: Hace posible realizar la operación aritmética de sumar.

4.3.1.2.1.5 Argumentos

Se recuerda que los argumentos se refieren a justificaciones, demostraciones o pruebas de las propiedades utilizadas. A continuación se exhiben algunos argumentos:

- Dado que César tiene 148 puntos, pero Yolanda tiene 12 puntos más, entonces el número de puntos que tiene Yolanda corresponde a la suma de 148 puntos más doce puntos, es decir, 160 puntos.
- César tiene 148 puntos. Yolanda tiene 12 puntos más, luego habrá que añadir 12 puntos a los puntos que tiene César. Se requiere por tanto sumar 148 + 12 = 160. Luego Yolanda tiene 160 puntos.

En el siguiente apartado se mostrarán los análisis de dos maestros en formación y se compararán con el análisis anterior, al que llamaremos *análisis de referencia*. La comparación no tiene la intención de valorar los análisis hechos por los maestros en términos de su semejanza o adecuación con el análisis de referencia, sólo pretende valorar aspectos tales como: El grado de apropiación de uso de la GROS por los maestros, las dificultades manifestadas por estos, el tipo y diversidad de objetos y significados identificados y la pertinencia de los mismos para la solución de la tarea.

Consideramos que la polisemia de los objetos matemáticos y la asignación de significado por parte de los maestros ameritan que se preste atención a su confluencia en una tarea matemática en tanto que los dos aspectos influyen en el diseño de la actividad matemática por parte de los

[1] P1, P2, P3: Significa propiedad uno, propiedad dos, propiedad tres y así sucesivamente.

maestros. Los objetos identificados y los significados conferidos por los maestros a las diversas entidades primarias que intervienen en la resolución de un problema se revela como un medio para determinar tanto el conocimiento del contenido y su importancia en los procesos de enseñanza (Capraro, Capraro, Parker, Kulm, y Raulerson, 2005), como para valorar el conocimiento matemático para la enseñanza y su eventual adecuación a la misma (Hill, Ball y Schilling, 2008). Los objetos y sus significados que confluyen en el análisis epistémico realizado por los maestros pueden influir a favor de la promoción de la reflexión como una competencia inherente a su papel docente en el futuro.

4.4. Análisis Realizados por los Maestros en Formación

Los criterios para elegir los tres casos de estudio, son dos: El primero, que los estudiantes hubiesen identificado un número conveniente de objetos y significados; el segundo es que hubiesen usado la GROS en el análisis de alguna tarea propuesta por ellos para ser discutida en el marco de la unidad didáctica. Se recuerda que el uso de la GROS era optativo para los maestros en formación.

4.4.1 Análisis de la Primera Tarea

En esta sección se discute el análisis epistémico realizado por el grupo G1[2].

4.4.1.1 Grupo G1

En la Figura 4.3 se exhibe la solución dada por los integrantes del grupo uno. Llama la atención que los estudiantes dan respuesta a la tarea mediante el uso de la fórmula. No hay evidencia de discusión de la misma ni de exploración numérica o geométrica de la validez de la expresión. Simplemente resuelven la tarea recurriendo a una expresión algebraica de la regla que relaciona el número de puntos en un lado del cuadrado con el número total de puntos en la configuración geométrica.

La segunda respuesta hace uso de la expresión que ya han usado para dar respuesta a los casos particulares. Desde la Figura 4.4 hasta la Figura 4.8, se exhibe la identificación de objetos y significados dada por el grupo G1. Se comentarán brevemente.

[2] Se indicará a cada grupo con la letra G seguida de un número, y cada estudiante con una letra E seguida de un número.

Parte a)

a) ¿Cuál es el número cuadrado que está en la posición 7?, y ¿En la posición 9?

Al llevar a cabo la formula $C_n = n^2$, utilizada para llegar al resultado de un determinado número al cuadrado. deducimos que en la posición 7, el número cuadrado obtenido será $C_n = 7^2 = 49$.
El número cuadrado en la posición nueve es $C_n = 9^2 = 81$.

Transcripción:

Al llegar a cabo la fórmula $C_n= n^2$, utilizada para llegar al resultado de un determinado número al cuadrado, deducimos que en la posición 7, el número cuadrado obtenido será $C_n= 7^2=49$. El número cuadrado en la posición nueve es $C_n= 9^2 = 81$

Parte b)

b) ¿Cuál es el número cuadrado ubicado en la posición "n"?

El número cuadrado ubicado en la posición "n" corresponderá a n^2. $\boxed{C_n = n^2}$

Transcripción:

El número cuadrado ubicado en la posición "n" corresponderá a n^2. $C_n= n^2$

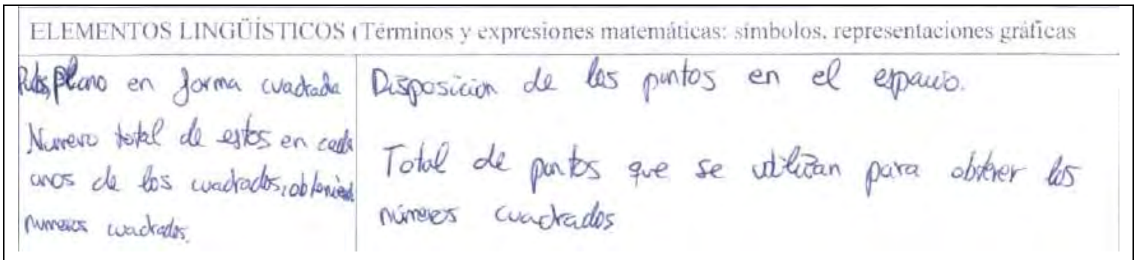
Figura 4.3. Solución a la Tarea de la Configuración Puntual por G1.

4.4.1.1.1 Elementos Lingüísticos

Los elementos lingüísticos identificados por G1, se muestran en la Figura 4.4. Los estudiantes reconocen el objeto matemático "plano en forma cuadrada" al que asignan el significado "disposición de los puntos en el espacio". Parece que tanto el objeto como el significado podrían ser ignorados y la tarea aún ser resuelta; es decir los elementos lingüísticos parecen no jugar un papel en la solución particular que los maestros en formación dan a la tarea.

4.4.1.1.2 Conceptos

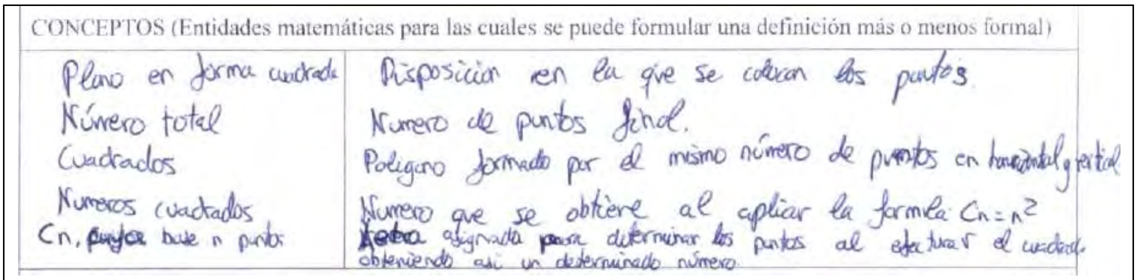
Los conceptos identificados por los estudiantes se exhiben en la Figura 4.5. Los maestros se concentran en dos aspectos: La configuración geométrica (cuadrado) y en la expresión algebraica (simbólica) que permite obtener un número cuadrado. No identifican conceptos tales como la multiplicación, la ley de asignación, relación entre el número posición indicada por "n" y el número cuadrado correspondiente.


ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS (Términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas

Puntos, plano en forma cuadrada	Disposición de los puntos en el espacio.
Número total de estos en cada uno de los cuadrados, obteniendo números cuadrados	Total de puntos que se utilizan para obtener los números cuadrados

Transcripción: Elementos lingüísticos	
Plano en forma cuadrada. Número total de estos en cada uno de los cuadrados obteniendo números cuadrados.	Disposición de los puntos en el espacio. Total de puntos que se utilizan para obtener los números cuadrados.

Figura 4.4. Identificación de Elementos Lingüísticos en la Tarea de Diferencia de Puntos.


CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)

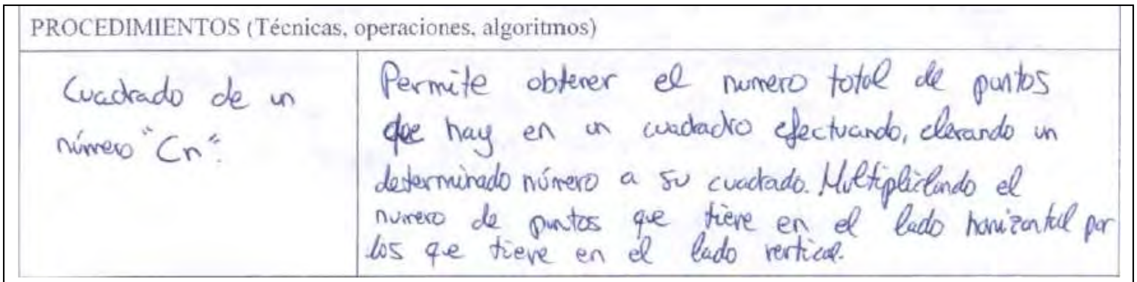
Plano en forma cuadrada Número total Cuadrados Números cuadrados Cn, ~~puntos~~ base n puntos	Disposición en la que se colocan los puntos Número de puntos final. Polígono formado por el mismo número de puntos en horizontal y vertical Número que se obtiene al aplicar la formula $C_n = n^2$ Área asignada para determinar los puntos al efectuar el cuadrado obteniendo así un determinado número

Transcripción: Conceptos	
Número en forma cuadrada.	Disposición en la que se colocan los puntos.
Número total.	Número final de puntos.
Cuadrados.	Polígono formado por el mismo número de puntos en horizontal y en vertical.
Números cuadrados.	Número que se obtiene al aplicar la formula $C_n = n^2$
C_n , cuadrado cuya base tiene **n** puntos.	Área asignada para determinar los puntos al efectuar el cuadrado obteniendo así un determinado número.

Figura 4.5. Conceptos Identificados por G1 en la Tarea de los Números Cuadrados.

4.4.1.1.3 Procedimientos

El procedimiento identificado por los maestros en formación, que se muestra en la Figura 4.6, se refiere al uso de la multiplicación para encontrar el número de puntos de un arreglo puntual.



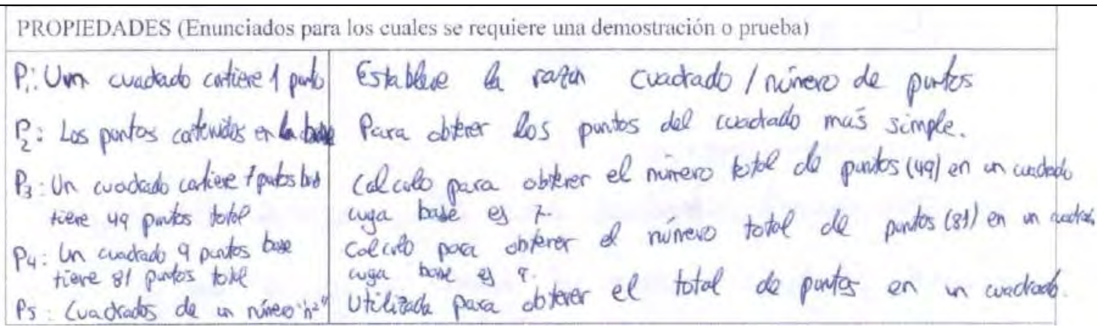
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
Cuadrado de un número "Cn"	Permite obtener el numero total de puntos que hay en un cuadrado efectuando, elevando un determinado número a su cuadrado. Multiplicando el numero de puntos que tiene en el lado horizontal por los que tiene en el lado vertical.

Transcripción: Procedimientos	
Cuadrado de un número "C_n"	Permite obtener el número total de puntos que hay en un cuadrado efectuando, elevando un determinado número a su cuadrado. Multiplicando el número de puntos que tiene en el lado horizontal por los que tiene en el lado vertical.

Figura 4.6. Procedimientos Identificados por G1 en la Tarea de los Números Cuadrados.

4.4.1.1.4 Propiedades

Los maestros proponen relaciones entre el número de puntos en la base y el número de puntos en la configuración. Se puede conceder que los maestros han identificado relaciones entre el antecedente (n) que representa número de puntos, y el consecuente (n^2), que representa el número de puntos en un arreglo como lo muestra la Figura 4.7.



PROPIEDADES (Enunciados para los cuales se requiere una demostración o prueba)	
P1: Un cuadrado contiene 1 punto	Establece la razón cuadrado / número de puntos
P2: Los puntos contenidos en la base	Para obtener los puntos del cuadrado más simple.
P3: Un cuadrado contiene 7 puntos base tiene 49 puntos total	Cálculo para obtener el número total de puntos (49) en un cuadrado cuya base es 7.
P4: Un cuadrado 9 puntos base tiene 81 puntos total	Cálculo para obtener el número total de puntos (81) en un cuadrado cuya base es 9.
P5: Cuadrados de un número "n²"	Utilizada para obtener el total de puntos en un cuadrado.

Transcripción: Propiedades	
P1: Un cuadrado contiene 1 punto.	Establece la razón cuadrado/número de puntos.
P2: Los puntos contenidos en la base.	Para obtener los puntos del cuadrado más simple.
P3: Un cuadrado contiene 7 puntos base tiene 49 puntos en total.	Cálculo para obtener el número total de puntos (49) en un cuadrado cuya base es 7.
P4: Un cuadrado contiene 9 puntos base tiene 81 puntos en total.	Cálculo para obtener el número total de puntos (81) en un cuadrado cuya base es 9.
P5: Cuadrados de un número "n^2".	Utilizado para obtener el total de puntos en un cuadrado.

Figura 4.7. Identificación de Propiedades por G1 en la Tarea de Números Cuadrados.

4.4.1.1.5 Argumentos

Para Socas (2001) "*Las 'argumentaciones algebraicas' son tanto las demostraciones para probar propiedades del Álgebra como las pruebas que empleamos para mostrar a otra persona la solución de la situación problemática o fenómeno algebraico*". Los "argumentos" enunciados por los maestros, y mostrados en la Figura 4.8, difícilmente se pueden concebir como tales, en tanto que los "argumentos" en este trabajo se asemejan a explicaciones de las propiedades o a una explicación de la solución de la tarea en donde se pone de manifiesto la pertinencia de los objetos matemáticos identificados. Al parecer los estudiantes han adecuado el significado institucional, conferido al argumento por el formador, a otro, el personal que se adecua a las condiciones de uso conferido por los maestros.

ARGUMENTOS (Justificaciones, demostraciones o pruebas de las propiedades utilizadas)

- Es una propiedad en el enunciado
- Relación que permite obtener conocer el número total de puntos de un cuadrado si se conoce el número de puntos de la base.
- Se calcula utilizando la propiedad P_5, realizando el cuadrado respectivo.

Transcripción: Argumentos

- Es una propiedad en el enunciado.
- Relación que permite obtener el número total de puntos de un cuadrado si se conoce el número de puntos de la base.
- Se calcula utilizando la propiedad P5, realizando el cuadrado respectivo.

Figura 4.8. Identificación de Argumentos por G1 en la Tarea de Números Cuadrados.

Los maestros en formación, cuando resuelven la tarea, deben argumentarlo ante sus compañeros, y por tanto la solución matemática dada es suficiente para el propósito de convencer a los colegas. Transcribir la argumentación oral usada ante sus colegas parece no tener mucho sentido para los maestros

4.4.1.2 Grupo G3

La Figura 4.9 muestra la respuesta dada por los estudiantes a los tres primeros incisos de la cuestión. La cumplimentación de la GROS, por parte de este grupo de maestros, se muestra en las Figuras 4.10 a la 4.12.

a) ¿Cuál es el número cuadrado que está en la posición 7?, y ¿En la posición 9?

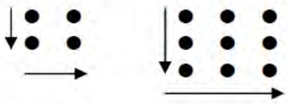
El número cuadrado de la posición 7 sería 49
El número cuadrado de la posición9 sería 81

b) ¿Cuál es el número cuadrado ubicado en la posición "n"?

El número cuadrado ubicado en la posición n sería n^2

c) Explica el procedimiento empleado:

- Podría utilizarse un método como el gráfico y solucionarse poniendo puntos hasta encontrar la solución o darnos cuenta del patrón que sigue.
- Podría representarse a través de números es decir:
  $1x1=1^2=1$; $2x2= 2^2=4$; $3x3=3^2=9$…$7x7=7^2=49$… $9x9=9^2= 81$…$nxn=n^2$
- A la solución anteriror (de 2x2 o de 3x3) es posible llegar analizando la disposición de las filas y las columnas de la figura



2x2 3x3 va aumentando cada vez una unidad

Por lo que también observamos que se trata del cuadrado de un número.
Mediante ese razonamiento:
$7x7=7^2=49$; $9x9=9^2=81$; $nxn=n^2$

Figura 4.9. Solución Dada por G3 a la Tarea de los Números Cuadrados.

4.4.1.2.1. Elementos Lingüísticos

Los estudiantes identifican dos objetos matemáticos de carácter lingüístico: La representación gráfica y la "continuación" del patrón figural de números cuadrados. Sin embargo los estudiantes no asignan significados a estos elementos, tal como se aprecia en la Figura 4.10.

ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS (Términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas	
Representación gráfica mediante puntos Serie de números	

Figura 4.10. Elementos Lingüísticos dados por G3 para la Tarea de los Números Cuadrados.

4.4.1.2.2. Conceptos

En la Figura 4.11 se exhiben los conceptos identificados por los maestros en formación. Llama la atención que han identificado cinco objetos matemáticos (número natural, multiplicación, potencias, signo igual e incógnita), sin embargo sólo asignan significado a dos de ellos. Tal vez consideran que número natural, multiplicación y potencia son conceptos ampliamente conocidos o que su definición es muy compleja y deciden omitirla.

CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)	
• Número natural • Multiplicación • Potencias • Signo igual(resultado e igualdad) • Incógnita	Que en uno de los casos representa igualdad y no resultado Valor desconocido que se pretende averiguar

Figura 4.11. Conceptos Identificados por G3 para la Tarea de los Números Cuadrados.

4.4.1.2.3. Procedimientos

Los procedimientos identificados por los estudiantes, que se muestran en la Figura 4.12, son tres: El dibujo, seguir una serie y multiplicación.

PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
• Dibujo • A través de seguir una serie • Multiplicando las filas por las columnas	Seguir el dibujo para conseguir identificar el patrón Ver como el modelo se repite a igual que en el dibujo, pero esta vez sin representación gráfica Al multiplicar nos daremos cuenta de que se trata del número al cuadrado

Figura 4.12. Procedimientos Dados por G3 para la Tarea de los Números Cuadrados.

Es interesante notar que este grupo muestra apertura hacia “nuevos” tipos de procedimientos, en tanto que enumera “dibujo” como un procedimiento, haciendo referencia a “seguir el dibujo para identificar un patrón”. El segundo objeto identificado “seguir una serie” se refiere a la representación no gráfica del modelo o patrón identificado. Identifica dos procedimientos relacionados pero con modos diferentes de representación.

Finalmente identifica la “multiplicación” de “filas” por “columnas” para “saber” que se trata de un número cuadrado. Parece que el número cuadrado se reconoce a partir de un procedimiento numérico. Los estudiantes no especifican ni propiedades ni argumentos. Se considera que los estudiantes han mostrado cierta competencia inicial para identificar objetos matemáticos pertenecientes a las tres entidades iniciales: Elementos lingüísticos, conceptos y procedimientos. Nótese que el análisis de referencia no considera los dos primeros procedimientos identificados por el grupo de estudiantes.

4.4.2 Análisis de la Segunda Tarea

Para estudiar el análisis epistémico efectuado en situación de examen se tomaron dos casos. El estudiante que corresponde al caso E1 es miembro del grupo G1, cuyo trabajo se presentó en la sección 4.4.1 -Análisis de la Primera Tarea-.

4.4.2.1 Caso Estudiante Uno (E1)

En lo que sigue se muestra el análisis epistémico realizado por un maestro en formación. La Figura 4.13 exhibe la solución matemática dada por el maestro.

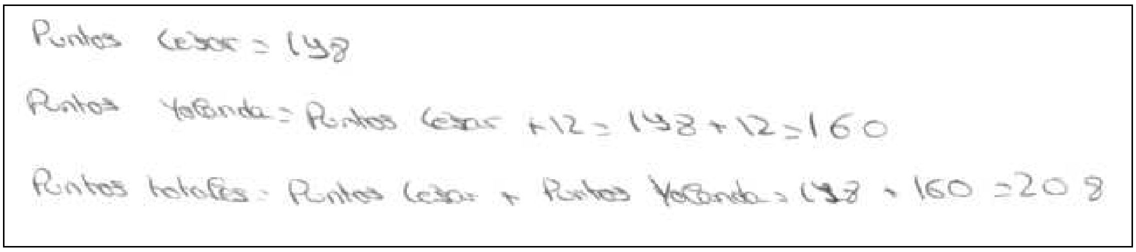
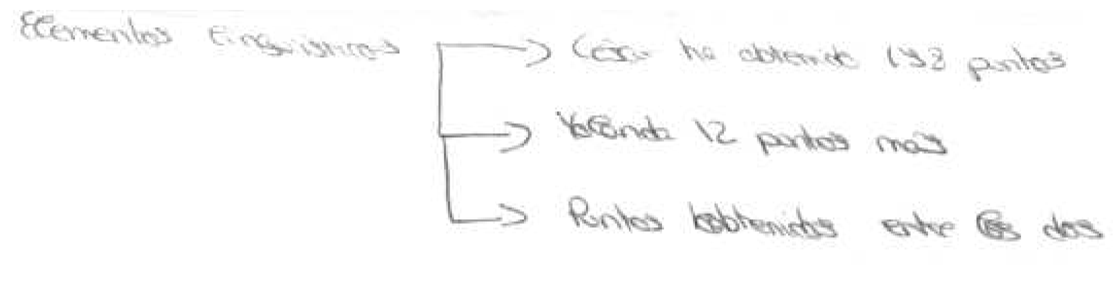


Figura 4.13. Solución Matemática Dada por E1 a la Tarea de los Puntos.

4.4.2.1.1 Elementos Lingüísticos

La Figura 4.14 muestra la respuesta dada por el estudiante para la identidad “elementos lingüísticos”. El estudiante no asigna significados a los tres elementos lingüísticos por él identificados. Entre las razones que justifican la escasa atención dada a la escritura de los significados correspondientes a los objetos matemáticos se podrían mencionar dos: La primera es que el estudiante considera que el significado es de carácter universal y que no es necesario o pertinente dar una significación diferente a la socialmente compartida; la segunda es el número de preguntas incluidas en la prueba, cinco, podría no haber permitido al estudiante dedicar más tiempo a este aspecto. En la Tabla 4.1 se compara la identificación de objetos y significados dados en el análisis de referencia y los del estudiante.

Si bien el estudiante no asignó significados a los objetos por él identificados, coincidió en la identificación de tres de los cuatro objetos propuestos en la sección 4.3.1.2.1 -Análisis Epistémico-, en el análisis de referencia.



Transcripción:

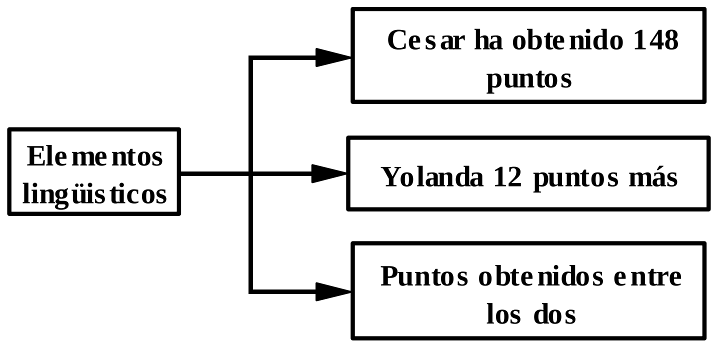


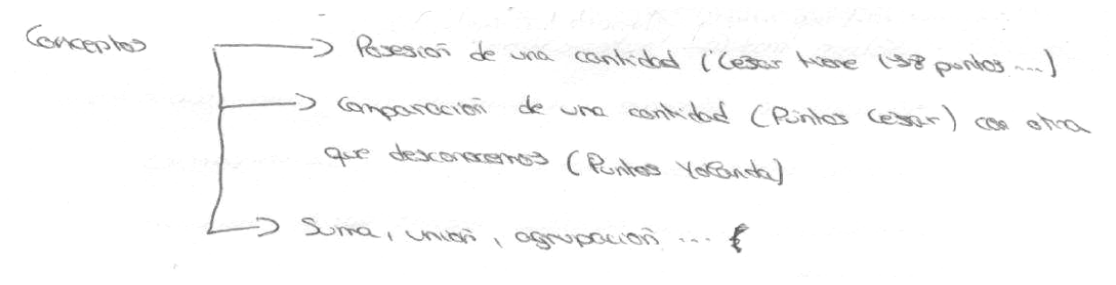
Figura 4.14. Elementos Lingüísticos Identificados por E1.

Tabla 4.1. Comparación entre Elementos Lingüísticos de Referencia y los Dados por E1.

Elementos Lingüísticos (Términos y expresiones matemáticas: Símbolos, representaciones gráficas)		
Objetos	***Significados conferidos por el estudiante***	***Significados considerados en el análisis de referencia***
César ha obtenido 148 puntos (Reconocido por el estudiante pero no asigna significados).		Cantidad discreta de puntos que tiene César (valor numérico de la medida de dicha cantidad que es 148).
Yolanda 12 puntos más (Reconocido por el estudiante pero no asigna significados).		Comparación de cantidades Incógnita (número de puntos, desconocido de Yolanda).
Puntos obtenidos entre los dos (Reconocido por el estudiante pero no asigna significados).		Reunión de dos cantidades (número de elementos de dos conjuntos disjuntos). Cardinal del conjunto unión.
Puntos.		Nombre genérico de una cantidad discreta. Ganancia discreta en un juego.

4.4.2.1.2 Conceptos

Los conceptos identificados por el maestro en formación se muestran en la Figura 4.15. En la Tabla 4.2 se compara la identificación de objetos y significados para los elementos lingüísticos dados en el análisis de referencia y los del estudiante.



Transcripción:

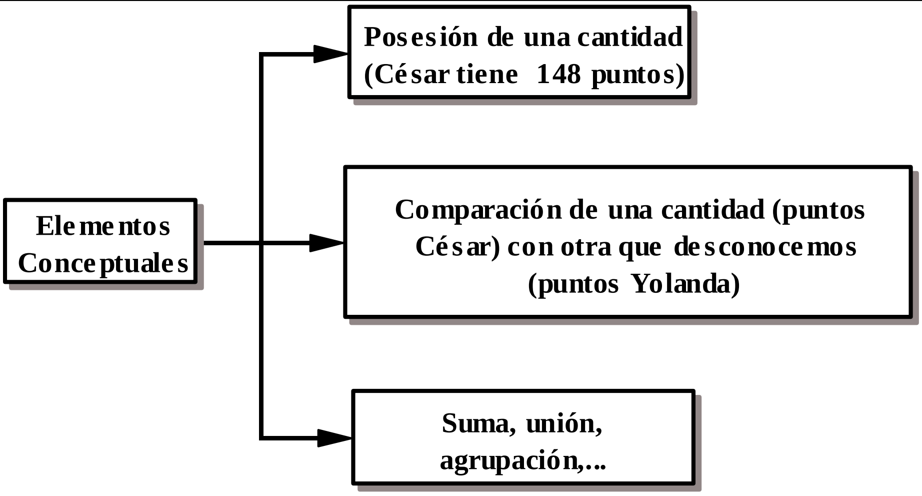


Figura 4.15. Conceptos Identificados por E1 para la Tarea de Diferencia de Puntos.

Se observa que los tres conceptos identificados por el estudiante se pueden poner en correspondencia con cada uno de los pasos propuestos para la solución de la tarea (ver Figura 4.13). Al parecer el estudiante considera que los conceptos “fundamentales” son aquellos que se evidencian a partir de la solución dada a la tarea y son los que debe nombrar.

Es cierto que la anterior es una postura práctica y de sentido común, pero desconoce que los conceptos matemáticos usados para resolver un problema suelen ser más de los que aparecen a primera vista en la solución matemática del problema; podemos, no obstante, reconocer que el proceso de identificación de las identidades matemáticas, inmersas en un problema, es complejo.

Tabla 4.2. Comparación entre Elementos Lingüísticos de Referencia y los Dados por E1.

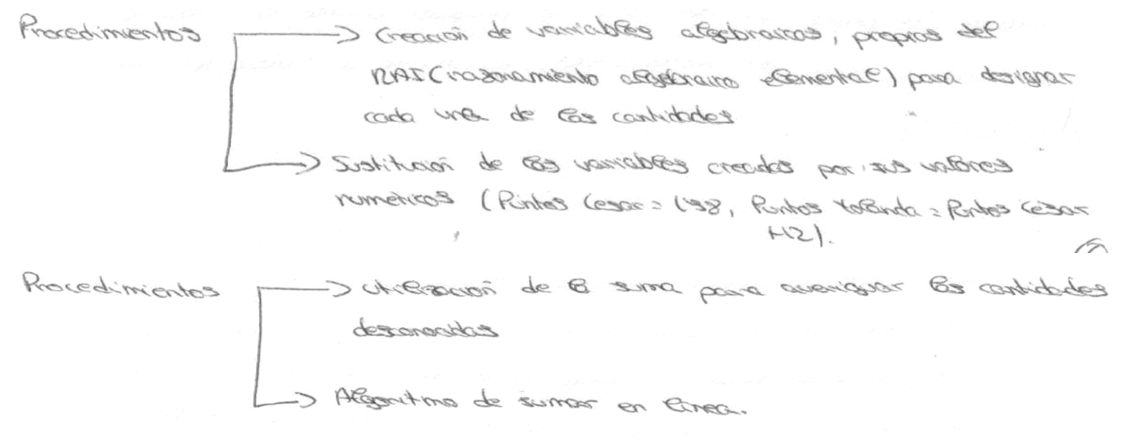
Conceptos (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)		
Objetos	***Significados conferidos por el estudiante***	***Significados considerados en el análisis de referencia***
Conjunto y subconjunto.		Colecciones de puntos de César y de Yolanda, de la diferencia y de la unión.
Cantidad de magnitud discreta.		Número de puntos (cardinal) de César, Número puntos de Yolanda, la cantidad de puntos de la diferencia y la reunión de cantidad.
Valores numéricos de las medidas.		148, 160, 12, 308.
Reunión de conjuntos.		Agrupación de los conjuntos de puntos de César y los puntos adicionales de Yolanda; agrupación de los puntos de César y de Yolanda.
Adición en N	*Adición, unión, agrupación.*	Resultado de la operación de adición de los cardinales de los conjuntos que intervienen.
Sumandos		Cada uno de los números sumados (148, 12); (148,160).
Igualdad de números naturales.		Igualdad de números como resultado de operación.
Suma		Resultado (160, 308).
César tiene 148 puntos.	*Posesión de una cantidad.*	
Comparación entre cantidades.	*Puntos de César y puntos de Yolanda.*	

Adicionalmente, se considera que es tan importante la identificación de las entidades matemáticas como su adecuación al nivel de desarrollo cognitivo y epistémico de los niños. Este conocimiento podría equipararse con el Conocimiento Matemático para la Enseñanza *(MKT*[3]*)* noción que ha sido introducida por Ball y colaboradores (Ball, 2000; Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Rowland et al., 2009; Hill, Ball y Schilling, 2008) en diversos trabajos.

[3] Siglas correspondientes a la expresión inglesa, “Mathematical Knowledge for Teaching”.

4.4.2.1.3 Procedimientos

La Figura 4.16 muestra los procedimientos identificados por el maestro. Del conjunto de procedimientos identificados por el estudiante llama la atención el correspondiente a "Creación de variables algebraicas, propias del RAE" y al que atribuye el significado de uso: "Para designar cada una de las cantidades".



Transcripción:

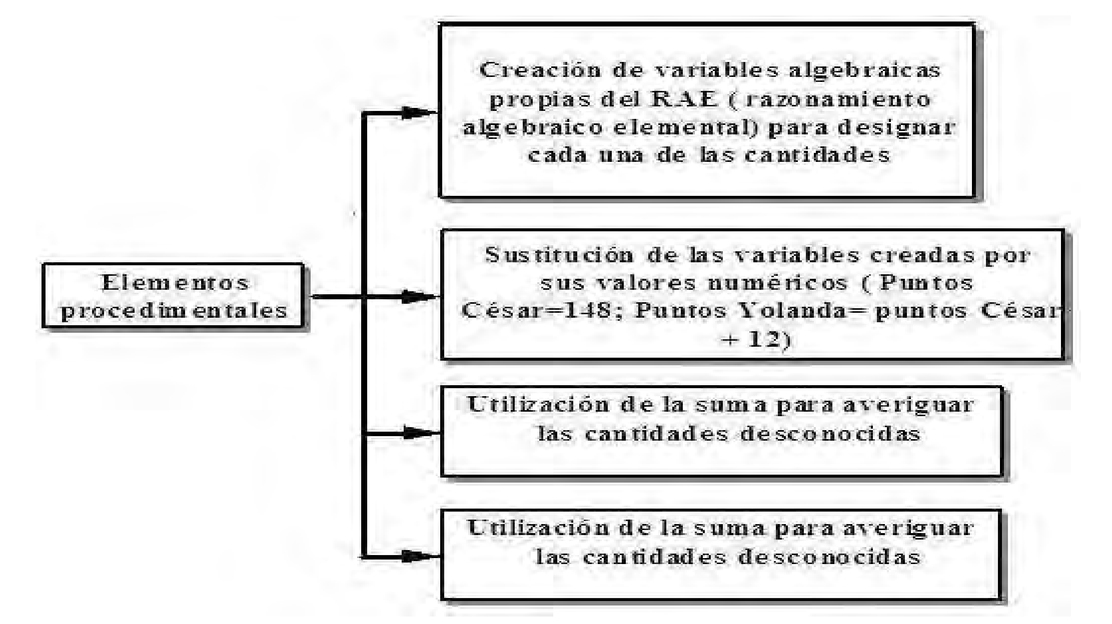


Figura 4.16. Procedimientos Identificados por E1.

Se considera que en esta identificación, el estudiante ha extendido, para la escuela primaria, la concepción de las incógnitas y variables usada en el álgebra de la secundaria. El estudiante considera la incógnita o variable en dos acepciones, la primera cuando atribuye el sentido de "letra evaluada" (Kücheman, 1981) a la construcción gramatical "puntos César" y a la que concede el valor numérico de 148; la segunda cuando considera que la *letra evaluada* “puntos César” como incógnita o variable, a pesar de tener un valor numérico unívocamente asignado.

Se podría refutar la identificación hecha por el estudiante al argumentar que confunde dos conceptos centrales en el álgebra: Variable e incógnita; sin embargo se debe considerar que se trata de un maestro en formación y que esta confusión podría ser discutida en el marco de un curso sobre didáctica del álgebra. También se resalta el procedimiento “Utilización de la suma” cuyo significado es “para averiguar las cantidades desconocidas”. El estudiante hace referencia al procedimiento para calcular el resultado “148 + 12”. Parece que el estudiante asume el signo igual en su acepción de signo de resultado además que, al parecer, considera a “148+12” como un valor desconocido.

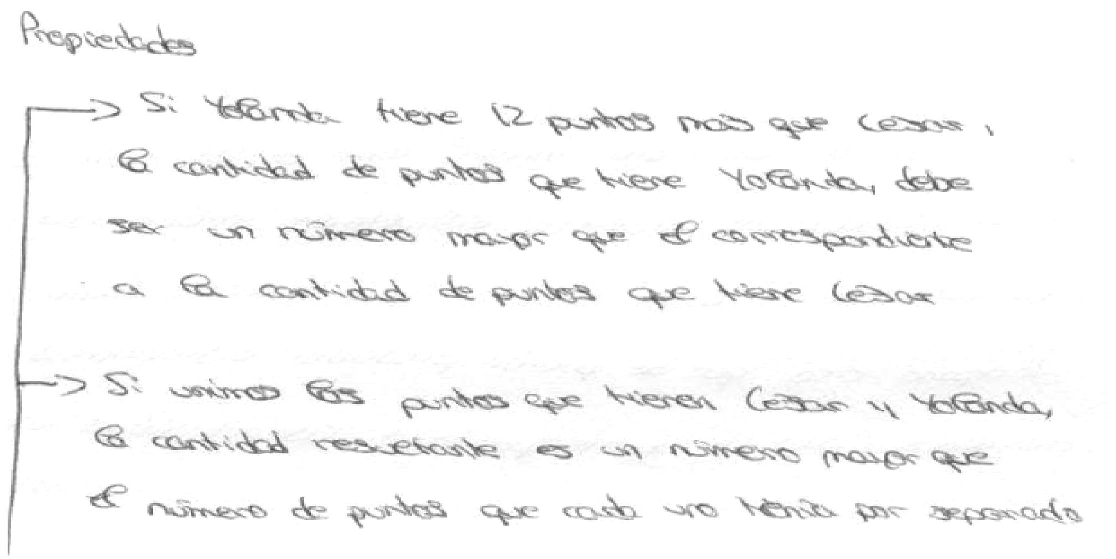
La Tabla 4.3 exhibe la comparación entre los significados conferidos a los procedimientos por el estudiante y por el análisis de referencia. Sólo hay coincidencia en uno de los objetos matemáticos identificados. Sin embargo los tres procedimientos propuestos por el estudiante: Creación de variables, sustitución y utilización de la suma son procedimientos pertinentes.

Tabla 4.3. Comparación entre los Significados Conferidos a los Procedimientos por el Estudiante y por el Análisis de Referencia.

Procedimientos (Técnicas, operaciones, algoritmos)		
Objetos	***Significados conferidos por el estudiante***	***Significados considerados en el análisis de referencia***
Reunión disjunta.		Para hallar los puntos de Yolanda, y para hallar los puntos totales.
Sumar en fila.	*Para averiguar los resultados.*	Para hallar la suma de puntos mediante la disposición en fila de los sumandos.
Sumar en columna.		Para hallar la suma de puntos mediante la disposición en columna de los sumandos.
Creación de variables algebraicas, propias del RAE.	*Designa cada una de las cantidades.*	
Sustitución de las variables creadas por sus valores numéricos.	*Puntos de César=148* *Puntos de Yolanda= puntos de César + 12.*	
Utilización de la suma.	*Para averiguar las cantidades desconocidas.*	

4.4.2.1.4 Propiedades

La Figura 4.17 muestra las propiedades identificadas por el estudiante. La Tabla 4.4, donde se comparan las propiedades identificadas por el estudiante y por las de referencia no coinciden, de hecho se considera que la propiedad propuesta por el estudiante "Yolanda tiene doce puntos más que César", es más un objeto de tipo lingüístico, en el que se da una condición de la tarea mas que un "enunciado que requiere demostración".


Propiedades
→ Si Yolanda tiene 12 puntos más que César, la cantidad de puntos que tiene Yolanda, debe ser un número mayor que el correspondiente a la cantidad de puntos que tiene César
→ Si unimos los puntos que tienen César y Yolanda, la cantidad resultante es un número mayor que el número de puntos que cada uno tenía por separado

Transcripción:

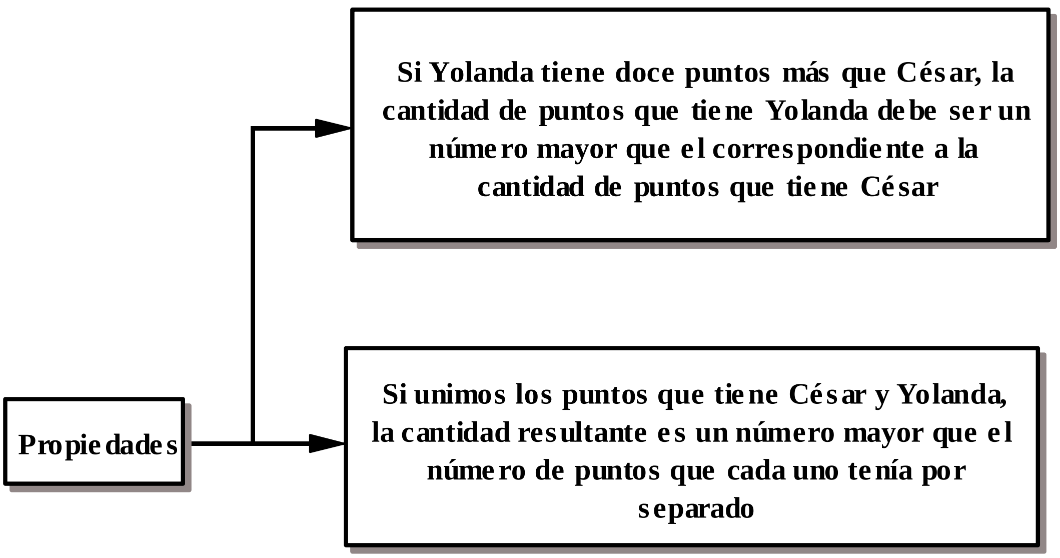


Figura 4.17. Propiedades Identificadas por E1.

Se reconoce que la tarea de identificación de propiedades es compleja. Una de las razones que justifica esta complejidad es que el concepto de "propiedad" que se usa en matemáticas suele asociarse con teorema o con una propiedad generalizable y de cierta importancia, mientras que en la GROS se asocia a una característica que debe ser argumentada, explicada o justificada a los niños, para promover un aprendizaje con comprensión.

Tabla 4.4. Comparación entre los Significados Conferidos a las Propiedades por el Estudiante y por el Análisis de Referencia.

Propiedades (Enunciados para los cuales se requiere una demostración o prueba). Afirmaciones que requieren una justificación, respuestas al problema		
Objetos	***Significados conferidos por el estudiante***	***Significados considerados en el análisis de referencia***
P1: Yolanda tiene 160 puntos.		Respuesta a una parte del problema.
P2: El total de puntos es 308.		Respuesta al problema pedido global.
Reglas del sistema de numeración posicional decimal.		Representación posicional de los números naturales.
Asociativa de la adición de números naturales.		Hacen posible realizar la operación aritmética de sumar.
Conmutativa de la adición de números naturales.		Hacen posible realizar la operación aritmética de sumar.
P1: Yolanda tiene doce puntos más que César.	*La cantidad de puntos que tiene Yolanda debe ser un número mayor que el correspondiente a la cantidad de puntos que tiene César.*	
P2: Unión de puntos de César y Yolanda.	*La cantidad resultante es un número mayor que el número de puntos que cada uno tenía por separado.*	

4.4.2.1.5 Argumentos

El argumento dado por el estudiante, que se muestra en la Figura 4.18, es una sentencia matemática válida sobre el conjunto de los números naturales; sin embargo, no es claro a que cuestión responde o la intención del mismo. Ciertamente se puede colegir una pregunta para la cual el argumento dado sea una respuesta.

> Desde un punto de vista "formal", podemos decir que en una suma, el total o resultado, es mayor que cada uno de los sumandos por separado e igual a la unión de todos los sumandos

Transcripción:

Desde un punto de vista "formal", podemos decir que es una suma, el total o resultado, es mayor que cada uno de los sumandos por separado e igual a la unión de todos los sumandos.

Figura 4.18. Argumento Dado por E1.

4.4.2.2 Caso Estudiante Tres (E3)

La Figura 4.19 exhibe la solución dada por el estudiante E3. El estudiante se escogió al azar entre el grupo de 28 estudiantes que conformaron la población bajo estudio.

Parece que el estudiante usa los nombres (César y Yolanda) como rótulos a los que asignan valores numéricos. La polisemia conferida a los nombres es clara: Representan nombres y a la vez rótulos que admiten valores numéricos.

$$\begin{array}{r} 148 \\ +\ 12 \\ \hline 160 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 160 \\ +\ 148 \\ \hline 308 \end{array}$$

César = 148

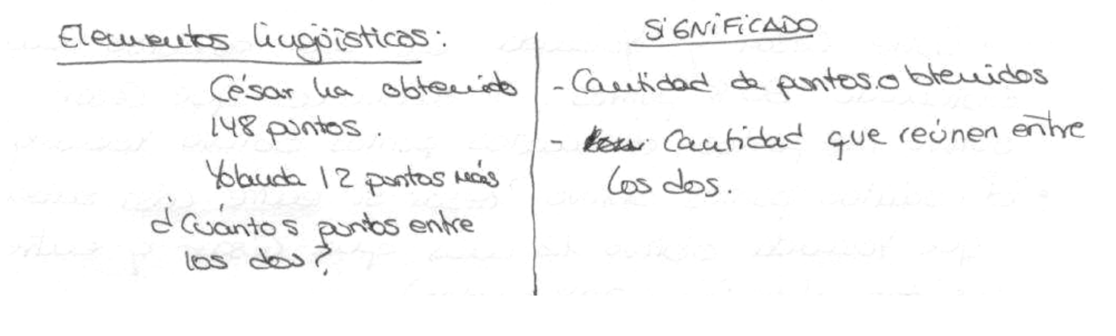
Yolanda = 148 + 12 = 160

CÉSAR + YOLANDA = 148 + 160 = $\underline{308}$

Figura 4.19: Solución Dada por E3 para la Tarea de los Puntos de César y Yolanda.

4.4.2.2.1 Elementos Lingüísticos

En la Figura 4.20 se muestran los elementos lingüísticos que el estudiante identificó en la tarea. Nótese no sólo la correspondencia entre los elementos lingüísticos identificados explícitamente por el estudiante y los exhibidos en la solución sino también cómo los primeros son traducidos en términos de operaciones aritméticas que aparecen al lado derecho, parte superior de la solución de la actividad


Elementos lingüísticos:
César ha obtenido
148 puntos.
Yolanda 12 puntos más
¿Cuántos puntos entre
los dos?
SIGNIFICADO
- Cantidad de puntos obtenidos
- Cantidad que reúnen entre
los dos.

Transcripción:

Elementos lingüísticos:	**Significado**
César ha obtenido 148 puntos. Yolanda 12 puntos más. ¿Cuántos puntos entre los dos?	- Cantidad de puntos obtenidos. - Cantidad que reúnen entre los dos.

Figura 4.20. Elementos Lingüísticos y su Significados Asociados Dados por E3.

Parece que el maestro en formación concede al signo igual dos significados (ver Figura 4.20): *Yolanda= 148+12=160*. El de asignación o correspondencia y el de resultado. El significado del signo igual muta en un contexto local, que va desde una asignación de un valor numérico a un sujeto (Yolanda= 148+12) hasta el de resultado (148+12=160). Sin embargo, parece que el estudiante ejerce un dominio, si bien no explícito, sobre esta mutación de significados asignados al signo igual en el mismo renglón.

Vale notar que el estudiante utiliza los nombres “César” y “Yolanda” como rótulos a los que les asigna el valor numérico de los puntos que les son asignados, en el sentido de letras como objetos (Kücheman, 1981)

Una revisión del conjunto de pruebas en las cuales se ofrece respuesta a esta pregunta muestra que el 70 % de ellas exhiben la misma característica. Tal hecho puede no ser sorprendente en tanto que el signo igual tiene muchos significados en matemáticas (Cajori, 1993; Boyer, 1989) y los estudiantes asignan el significado del signo igual en correspondencia con el entorno local que lo requiere. Tal asignación se hace de manera espontánea y no explícitamente.

Nótese que a pesar que el estudiante no incluye el objeto lingüístico “Yolanda 12 puntos más que César” sí que lo considera explícitamente en la expresión: “Yolanda= 148 + 12”. Se observa que no se establece una correspondencia biyectiva única entre los objetos matemáticos identificados en la GROS y los objetos matemáticos que aparecen en la solución a la tarea, más bien se espera que se de una complementariedad entre el análisis epistémico y la solución, donde el análisis epistémico exige a los estudiantes explicitar objetos y significados que surgen implícitamente durante el proceso de escritura de la solución a la tarea. La Tabla 4.5 muestra la comparación entre los elementos lingüísticos de referencia y los dados por el estudiante E3.

Tabla 4.5. Comparación entre Elementos Lingüísticos de Referencia y los Dados por E3.

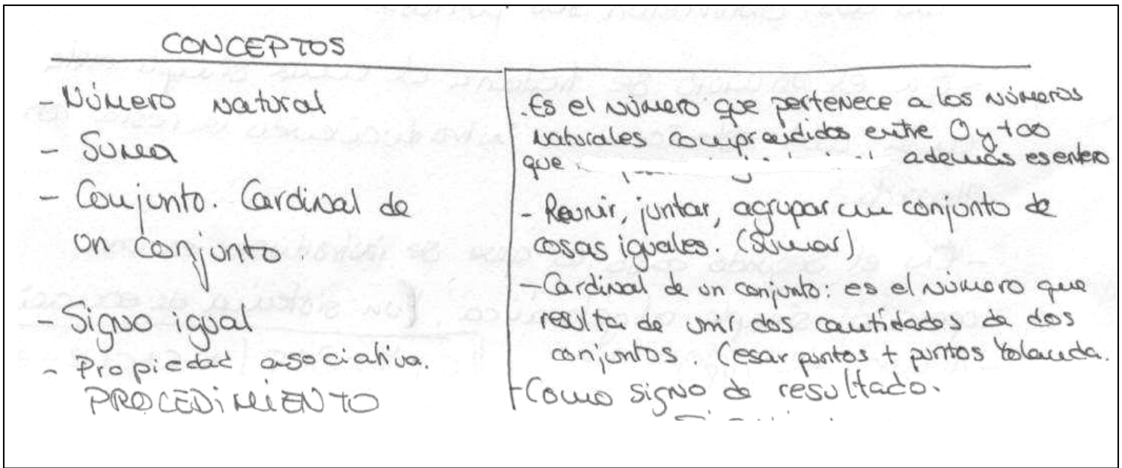
Elementos Lingüísticos (Términos y expresiones matemáticas: Símbolos, representaciones gráficas)		
Objetos	***Significados conferidos por el estudiante***	***Significados considerados en el análisis de referencia***
César ha obtenido 148 puntos.	*Cantidad de puntos obtenidos.*	Cantidad discreta de puntos que tiene César (valor numérico de la medida de dicha cantidad, 148).
Yolanda 12 puntos más.	*Cantidad de puntos obtenidos.*	Comparación de cantidades Incógnita (número de puntos, desconocido de Yolanda).
Puntos obtenidos entre los dos.	*Cantidad de puntos que reúnen entre los dos.*	Reunión de dos cantidades (número de elementos de dos conjuntos disjuntos). Cardinal del conjunto unión.
Puntos		Nombre genérico de una cantidad discreta. Ganancia discreta en un juego.

Se observa que cada una de las sentencias usadas en el enunciado de la tarea es identificada como un objeto lingüístico y sus posibles significados considerados. Su importancia en términos de resolución de problemas y de la enseñanza de las matemáticas no puede ser desconocida, en tanto que los términos lingüísticos usados: “César ha obtenido…”, “Yolanda 12 puntos más” , “Puntos obtenidos entre los dos” introducen conceptos tales como: Correspondencia, suma, comparación, desigualdad, cuyos significados, propiedades y procedimientos pueden relacionarse argumentativamente de manera compleja y en formas que favorezcan o inhiban la solución del problema (Castro y Godino, 2009).

Se resalta la identificación de elementos lingüísticos por parte del maestro cuya interpretación puede modificar el proceso de significación y solución de la tarea por parte de los niños; para MacGregor y Price (1999) “*la conciencia de las estructuras del lenguaje y la habilidad para manipular esas estructuras puede ser una manifestación de un proceso cognitivo más profundo que también subyace la comprensión de la notación algebraica*” (p. 462).

4.4.2.2.2 Conceptos

En la Figura 4.21 aparecen los conceptos identificados por el estudiante E3.


CONCEPTOS

- Número natural
- Suma
- Conjunto. Cardinal de on conjunto.
- Signo igual
- Propiedad asociativa.

PROCEDIMIENTO

. Es el número que pertenece a los números naturales comprendidos entre 0 y 100 que además es entero

- Reunir, juntar, agrupar un conjunto de cosas iguales. (Sumar)

— Cardinal de un conjunto: es el número que resulta de unir dos cantidades de dos conjuntos. César puntos + puntos Yolanda.

- Como signo de resultado.

Transcripción:

Conceptos	
- Numero natural.	- Es el número que pertenece a los números naturales comprendidos entre 0 y 100 que además es entero.
- Suma	- Reunir, juntar, agrupar un conjunto de cosas iguales (sumar).
- Conjunto. Cardinal de un conjunto.	- Cardinal de un conjunto: es el número que resulta de unir dos cantidades de dos conjuntos. César puntos + puntos Yolanda.
- Signo igual. - Propiedad asociativa.	- Como signo de resultado.

Figura 4.21. Conceptos Identificados por E3 para la Tarea de los Puntos de César y Yolanda.

La Tabla 4.6 exhibe la comparación entre los elementos conceptuales identificados por el estudiante E3 y los conceptos propuestos en el análisis de referencia.

Tal como se mencionó anteriormente, la lista de objetos matemáticos que se proponen en los análisis, no es exhaustiva; sin embargo se observa la identificación de conceptos que intervienen en la solución de la tarea, si bien, algunos otros que están en el transfondo del proceso de solución no son identificados. Vergnaud (1990) menciona el concepto “teoremas en acto” para referirse a propiedades matemáticas usadas por los estudiantes en contextos específicos, sin llegar a identificarlas o a nombrarlas explícitamente.

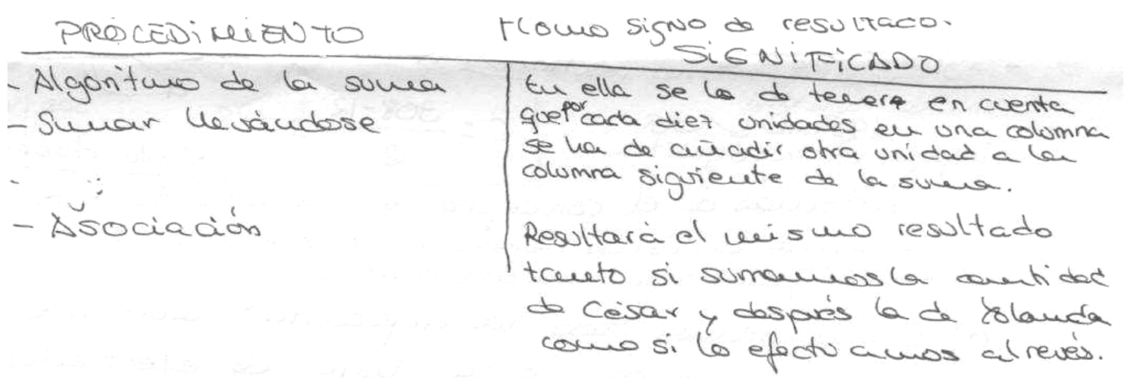
Tabla 4.6. Comparación entre Elementos Conceptuales de Referencia y los Dados por E3.

Conceptos (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)		
Objetos	***Significados conferidos por el estudiante***	***Significados considerados en el análisis de referencia***
Conjunto	*Reunir, juntar, agrupar un conjunto de cosas iguales (sumar).*	Colecciones de puntos de César y de Yolanda, de la diferencia y de la unión.
Cardinal de un conjunto.	*1) Es el número que resulta de unir dos cantidades de dos conjuntos (César puntos + puntos Yolanda).*	
	2) Cantidad que reúnen entre los dos.	
Adición en N.		Resultado de la operación de adición de los cardinales de los conjuntos que intervienen.
Cantidad de magnitud discreta.		Número de puntos (cardinal) de César, Número puntos de Yolanda, la cantidad de puntos de la diferencia y la reunión de cantidad.
Número natural.	*Es el número que pertenece a los números naturales comprendidos entre 0 y $+\propto$, que además es entero.*	
Valores numéricos de las medidas.		148, 160, 12, 308.
Reunión de conjuntos.		Agrupación de los conjuntos de puntos de César y los puntos adicionales de Yolanda; agrupación de los puntos de César y de Yolanda.
Sumandos		Cada uno de los números sumados (148, 12); (148,160).
Igualdad de números naturales.		Igualdad de números como resultado de operación.
Suma		Resultado (160, 308).
Signo igual	*Como signo de resultado.*	
Propiedad asociativa		

Se considera que la no identificación de ciertos objetos o de algunos de sus significados asociados es una característica inherente al proceso de resolución de un problema matemático, basta recordar el caso de Fermat y sus trabajos sobre la recta tangente (Boyer, 1986; p. 440) que posteriormente fueron sistematizados por Leibniz y Newton en sus trabajos sobre la derivada. Se considera que para que un maestro pueda reconocer y promover el conocimiento matemático espontáneamente manifestado por sus alumnos no sólo debe tener un cierto conocimiento de contenido matemático, sino que debe estar en disposición de reconocer la compleja red de objetos y significados alternativos que pueden surgir durante la resolución de un problema.

4.4.2.2.3 Procedimientos

La Figura 4.22 exhibe los elementos procedimentales identificados por E3. El estudiante identifica el algoritmo de la suma, específicamente el algoritmo para "sumar llevando". Igualmente identifica la propiedad asociativa pero expresada en términos de la acción de sumar en "cualquier orden". El estudiante cita la propiedad asociativa pero le confiere un significado en términos de la propiedad conmutativa de la suma.



PROCEDIMIENTO	Como signo de resultado. SIGNIFICADO
- Algoritmo de la suma - Sumar llevándose	En ella se ha de tener en cuenta que por cada diez unidades en una columna se ha de añadir otra unidad a la columna siguiente de la suma.
- Asociación	Resultará el mismo resultado tanto si sumamos la cantidad de César y después la de Yolanda como si lo efectuamos al revés.

Transcripción:

Procedimiento	**Significado**
- Algoritmo de la suma - Sumar llevándose	En ella se ha de tener en cuenta que por cada diez unidades en una columna se ha de añadir otra unidad a la columna siguiente de la suma.
- Asociación	Resultará el mismo resultado tanto si sumamos la cantidad de César y después la de Yolanda como si lo efectuamos al revés.

Figura 4.22. Elementos Procedimentales Identificados por E3.

Es interesante notar que la "conmutativa" se suele citar como una propiedad en los libros de texto, que se usa durante las operaciones, es decir, es una característica que adquiere status mediante un procedimiento.

La Tabla 4.7 exhibe la comparación entre los elementos procedimentales identificados por el estudiante E3 y los propuestos en el análisis de referencia.

Tabla 4.7. Comparación entre Elementos Procedimentales de Referencia y los Dados por E3.

Procedimientos (Técnicas, operaciones, algoritmos)		
Objetos	***Significados conferidos por el estudiante***	***Significados considerados en el análisis de referencia***
Reunión disjunta		Para hallar los puntos de Yolanda, y para hallar los puntos totales.
Sumar en fila		Para hallar la suma de puntos mediante la disposición en fila de los sumandos.
Sumar en columna		Para hallar la suma de puntos mediante la disposición en columna de los sumandos.
Algoritmo de la suma y sumar llevándose.	*En ella se ha de tener en cuenta que por cada diez unidades en una columna se ha de añadir otra unidad a la columna siguiente de la suma.*	
Asociación	*Resultaría el mismo resultado tanto si sumamos cantidad de César y después la de Yolanda como* lo efectuamos al revés.	

Si bien parece que no existe correspondencia entre los significados propuestos en la sección 4.3.1.2.1 -Análisis Epistémico- y aquellos propuestos por el estudiante, el objeto matemático "Algoritmo de la suma y sumar llevándose" se corresponde, con base en el significado conferido por el estudiante, con el objeto matemático "sumar en columna" propuesto en el análisis de referencia, bajo el encabezado Procedimientos de la sección 4.3.1.2.1.3.

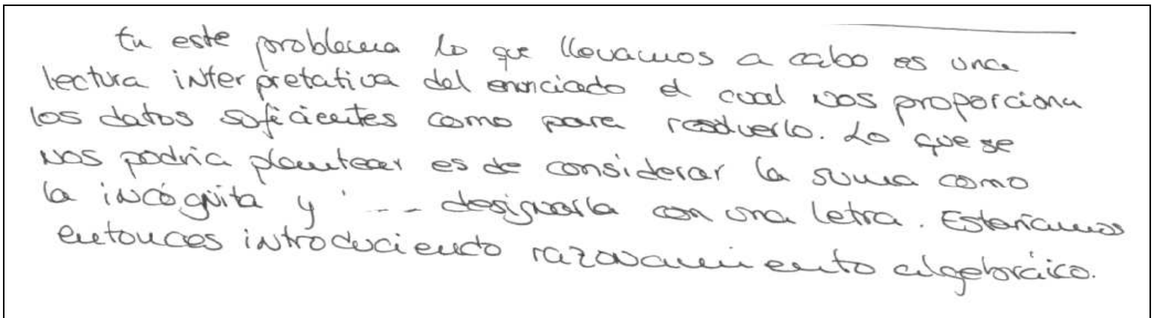
Debido a la posibilidad de nombrar los objetos de manera diversa podría darse el caso que a primera vista no existiese correspondencia entre los objetos matemáticos identificados por el estudiante y aquellos propuestos en el análisis de referencia en la sección 4.3.1.2.1 -Análisis Epistémico-; sin embargo, los significados atribuidos pueden ser similares.

Esta característica de la GROS podría ser usada en propuestas de formación de maestros en las que estos reflexionen sobre el hecho que si bien los objetos matemáticos parecen ser únicos y sus significados unívocamente definidos, la interpretación que de ellos realizan los individuos, su descripción y su uso puede generar conjuntos de objetos y significados que podrían ser disjuntos en apariencia.

Godino, Batanero y Font (2007) reconocen el carácter socio-constructivista, "*en la que la matemática es, en primer lugar, una actividad humana centrada en la solución de cierto tipo de situaciones problema*", (p. 132). Una visión antropológica como la que estos autores proponen podría ayudar a los estudiantes a reconocer que si bien la matemática suele ser identificada como arquetipo de exactitud, su enseñanza lo es de diálogo, construcción y negociación en contextos institucionales. La estudiante no cumplimentó la tabla correspondiente a Propiedades.

4.4.2.2.4 Argumentos

La respuesta del estudiante, correspondiente a la entidad "Argumentos" se muestra en la Figura 4.23.


En este problema lo que llevamos a cabo es una lectura interpretativa del enunciado el cual nos proporciona los datos suficientes como para resolverlo. Lo que se nos podria plantear es de considerar la suma como la incógnita y designarla con una letra. Estaríamos entonces introduciendo razonamiento algebraico.

Transcripción:

En este problema lo que llevamos a cabo es una lectura interpretativa del enunciado el cual nos proporciona los datos suficientes como para resolverlo. Lo que se nos podría plantear es de considerar la suma como la incógnita y designarla con una letra. Estaríamos entonces introduciendo razonamiento algebraico.

Figura 4.23. Argumentos del Estudiante E3.

El estudiante ha dado una interpretación de la entidad Argumento, que difiere del concepto discutido en clase (justificación de la validez de una proposición o de un procedimiento).

4.5. Comentarios sobre los Análisis

El trabajo que se desarrolla en esta memoria de tesis doctoral versa sobre el desarrollo de competencias de análisis didáctico que un grupo de maestros en formación realizan de tareas matemáticas sobre un tema específico.

Una componente importante del análisis didáctico es el análisis epistémico. En este capítulo se indaga sobre las competencias de análisis didáctico en dos instancias: Trabajo en grupo (problema de los números cuadrados), y en situación de examen (problema de los puntos de César y Yolanda).

El primer ejemplo se realizó en la segunda semana de clase, mientras que el segundo se realizó en la décimo quinta semana. Durante la realización de la unidad didáctica los estudiantes realizaron otros análisis epistémicos de tareas matemáticas.

La intención de mostrar dos ejemplos de análisis epistémico no es la de comparar el nivel de entrada y el nivel de salida de la competencia, sino la de mostrar dos ejemplos del uso de la herramienta GROS por parte de los estudiantes, en dos circunstancias diferentes: En grupo e individualmente. La única instancia disponible para indagar su competencia de análisis didáctico individualmente fue en situación de examen.

Se comentan ahora sobre los análisis epistémicos realizados por los maestros. Se recuerda que la actividad de análisis es el primer encuentro de los maestros con la herramienta de análisis epistémico de tareas matemáticas. El análisis epistémico realizado por los dos grupos sobre el problema de los números cuadrados se asimila entre sí.

La identificación de objetos y significados se enmarca en el uso de la Guía de Reconocimiento de Objetos y Significados (GROS) que se propuso a los maestros en formación como una herramienta para identificar los conocimientos matemáticos presentes y emergentes en tareas sobre razonamiento algebraico elemental.

El análisis realizado por los maestros en formación, durante la actividad grupal, muestra el estado inicial de la competencia y es el primer encuentro entre los estudiantes y la herramienta. Durante la discusión sostenida por y con los estudiantes, se observan las dificultades experimentadas por los maestros. El problema matemático es resuelto sin ninguna dificultad, sin embargo la identificación de los objetos matemáticos y sus significados de uso o de referencia resulta ser una actividad compleja.

Los maestros tienden a identificar conceptos matemáticos y expresarlos en términos de operaciones matemáticas, siempre apoyando su análisis en la solución matemática escrita. Es así como la identificación de elementos lingüísticos, argumentos y propiedades se torna difícil.

Adicionalmente, el establecimiento de relaciones entre los diversos objetos y sus significados es otro aspecto que resulta ser complejo para los maestros. La identificación de configuraciones de objetos y significados en correspondencia con la solución matemática resulta ser un reto que los estudiantes enfrentan.

A partir de la experiencia inicial de análisis de la tarea de las configuraciones cuadradas de puntos se programaron las reuniones de discusión y se eligió proponer a los estudiantes que elaborarán algunos análisis epistémicos parciales de las tareas que propusieron para ser incluidas en su unidad didáctica.

Para el caso de la segunda tarea motivo de análisis en este capítulo (puntos de César y de Yolanda) que fue resuelto en situación de examen, se puede apreciar cierto nivel de competencia en la identificación de objetos y significados de uso y de referencia. Durante el análisis de las respuestas de todos los estudiantes que tomaron el examen (aún de aquellos que no participaron en el estudio) se evidenció la identificación de un elevado número de objetos y significados en el grupo de estudiantes que fungieron como informantes en esta investigación.

Los dos casos expuestos que corresponden al análisis de la segunda tarea, sirven para ilustrar algunos de tales objetos y significados. Se podría afirmar que los estudiantes muestran cierto progreso en la identificación de objetos y significados, en especial en las entradas correspondientes a entidades lingüísticas, propiedades y argumentos.

Si bien la identificación de objetos y significados es importante en términos de la enseñanza, lo que parece crucial para la enseñanza del álgebra elemental en la escuela primaria es la incardinación del análisis epistémico en configuraciones algebraicas que den cuenta de los conocimientos de los estudiantes así como de los posibles conflictos que puedan surgir en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

En los siguientes capítulos se ofrecerá evidencia sobre el desarrollo de las competencias de análisis didáctico y en la incardinación de los análisis en situaciones de discusión hipotéticas de las tareas con niños de sexto grado.

CAPÍTULO 5
EVALUACIÓN Y DESARROLLO DE COMPETENCIAS PARA EL ANÁLISIS COGNITIVO DE TAREAS RAE

5.1 Introducción

El objetivo de este capítulo es evaluar el desarrollo de competencias para el análisis de configuraciones cognitivas de tareas tipo RAE efectuadas por los maestros en formación.

Inicialmente se darán las condiciones bajo las cuales se realizó el análisis, se darán los criterios para la escogencia de las tareas y se hará un análisis epistémico de algunas de las tareas tipo RAE propuestas a los niños de escuela elemental, después se muestran las soluciones dadas por los niños, posteriormente se exhiben los análisis hechos por los maestros en formación durante las sesiones de trabajo y finalmente se concluye con un análisis conjunto del análisis de referencia, de las soluciones de los niños y de las reflexiones de los maestros.

Estos tres elementos se discutirán tanto en el marco de las investigaciones sobre razonamiento algebraico elemental, desde la perspectiva de niños y de los maestros en formación, como desde el enfoque Onto-semiótico.

5.2 Contexto y Toma de Datos

La primera parte del estudio que se reporta en este capítulo se efectuó durante el primer cuatrimestre del año lectivo 2008-2009. Se acudió a un instituto mixto de educación primaria situado en Granada, España; que permitió tomar datos sobre las competencias de resolución de tareas, que incluyeran elementos de RAE, por niños de sexto grado (11 a 13 años de edad) de escuela elemental. En lo que sigue cuando se hace referencia a niño, se debe entender indistintamente niño o niña.

El director del instituto y el jefe de estudios pidieron que los alumnos no fueran perturbados por la aplicación de una prueba que incluyera tareas ajenas al programa temático estudiado, y no incluida en la programación de pruebas conocida por los niños, que podría alterar el desarrollo del plan de estudios. A continuación enumeramos las condiciones que el instituto impuso para permitir la toma de los datos:

- Las tareas incluidas en la prueba entregada a los niños deberían ser tomados del libro de texto usado por ellos.
- Las tareas incluidas en la prueba deberían corresponder a las unidades temáticas ya estudiadas durante el transcurso del año lectivo.
- El investigador no podía estar presente durante la aplicación de la prueba.
- La escogencia de las tareas fue hecha por el investigador, sin embargo la redacción de las mismas fue discutida con el jefe de estudios del instituto. Sólo se incluyó una tarea, sobre sombrillas y gorras, que no estaba propuesto en el libro texto.
- La prueba individual fue aplicada por el profesor del curso. A los niños no se les dió folios adicionales para realizar los cálculos y no utilizaron calculadora; sólo se respondieron preguntas sobre la redacción de las preguntas.
- Los niños no podían ser entrevistados.

5.3 Selección de las Tareas

Los criterios usados para la selección de las tareas propuestas a los escolares fueron:

- Que pusieran en juego algunos elementos propios del Razonamiento Algebraico Elemental incluidos en nuestra aproximación, y que se discute en la sección 3.2.1.6 -La Aproximación al RAE desde el EOS- del tercer capítulo.
- Que estuvieran propuestas en el libro texto usado por los niños. Con la excepción comentada referida a la inclusión de una tarea no incluida en el libro texto.
- Que la resolución requiriese conceptos conocidos para los niños; si bien era posible que debieran usar procedimientos novedosos para la solución y diferentes de los algoritmos y rutinas conocidos por los niños.

En el Anexo A -Prácticas Iniciales con los Maestros en Formación- se exhiben todas las tareas propuestas a los escolares, adicionalmente se ofrece una tabla en la que se identifican algunos elementos algebraicos presentes en el enunciado y emergentes en solución de las tareas.

Es menester indicar que los niños no fueron entrevistados. No se distinguió a la población por género. La edad promedio de los niños es de 12 años, el colegio pertenece a un estrato social medio de la ciudad de Granada, Comunidad Autónoma de Andalucía, España.

Del conjunto de soluciones dadas por los niños, se escogieron aquellas que cumplieran dos requisitos:

- Que los niños hubiesen escrito sus soluciones (en algunos casos sólo ofrecen la respuesta final, sin incluir procedimientos; estos no se incluyeron).
- Que las soluciones, aún sin justificación, fuesen apropiadas para su discusión con los maestros en formación.

Del conjunto de 24 documentos escritos por los escolares, escogimos nueve, que tenían el texto escrito de la solución. Vale decir que muchas soluciones dadas por los niños no ofrecían ni el procedimiento ni la justificación y sólo daban la respuesta final.

En el Anexo B -Prueba Aplicada a los Niños de Sexto Grado- se muestran las tareas escogidas para ser discutidas con y por los maestros en formación.

5.4 Análisis Epistémico de Objetos y Significados

En este apartado se mostrarán los análisis epistémicos de cada una de los tareas escogidas para ser analizadas por los maestros en formación; los análisis se efectuaron con ayuda de la Guía de Reflexión sobre Objetos y Significados GROS (Godino, Rivas, Castro y Konic, 2008).

Tal como se mencionó en la sección 4.3.1.1.1.5 -Argumentos- del cuarto capítulo, los análisis epistémicos incluidos aquí no pretenden ser exhaustivos ni únicos en sus consideraciones. La aparente multiplicidad de los objetos y sus significados se apoyan en la relatividad del conocimiento matemático escolar (Godino, Batanero y Font, 2007; Radford, 2006b). El análisis epistémico de las tareas tiene tres objetivos para el formador y para el investigador: El primero, explorar objetos y significados puestos en juego en la solución de una tarea; el segundo, identificar posibles conflictos de significado y predecir dificultades y errores que podrían surgir en las soluciones que los estudiantes brindarían a la tarea, y el tercero, explorar cómo el uso de las entidades primarias favorece predecir e identificar conflictos potenciales.

De estos tres objetivos, los dos primeros serán implementados durante los análisis de las tareas resueltas por los niños de escuela elemental, y serán usados durante las sesiones de trabajo con los maestros en formación para proponerles cuestiones vinculadas con el análisis epistémico y cognitivo; adicionalmente servirán para indagar algunas de las creencias que los maestros exhiben en relación con el RAE.

5.4.1 Tarea de Sombrillas y Gorras

La tarea discutida que se muestra en la Figura 5.1 se tomó de “Positive Algebra: A Collection of Productive Exercises” (2004), (p. 66).

Figura 5.1. Tarea de Sombrillas y Gorras.

Resalta en esta tarea el uso de representaciones visuales en el enunciado. El uso de las mismas en la resolución de tareas matemáticas es controversial, pues a pesar que ha sido usado durante siglos, y se consideró indispensable en el trabajo de los matemáticos (Rival, 1987), fue relegado por los matemáticos del siglo pasado, por considerarlo informal. Para Stylianou (2002), “*se ha hecho poco trabajo empírico que conduzca hacia una mayor comprensión de los procesos relacionados con el uso de representaciones visuales…*”, (p. 304).

En esta tarea reconocemos la importancia a los elementos gráficos y se asumen en su papel de “elementos lingüísticos” que están sujetos a asignación de significados por parte de los niños a quienes se les propone la solución de la tarea. A continuación, se enumeran algunos objetos y significados para las entidades primarias consideradas por el EOS: Elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos. Vinculados a cada enumeración se efectúan algunos comentarios.

Los elementos lingüísticos en esta tarea son de dos tipos: Los escritos y los pictóricos. Estos últimos tienen gran presencia e importancia en esta tarea, en tanto que comunican significados que no están explícitamente expresados en la redacción de la tarea ni en la pregunta. Algunos investigadores han indagado sobre las representaciones gráficas y su uso por los niños

(Goldenberg, 1988; Juraschek y Angle, 1986). Goldenberg concluyó que las gráficas tienen convenciones y ambigüedades propias y pueden ser poco accesibles a los niños que se inician en el estudio del álgebra.

5.4.1.1 Elementos Lingüísticos

La presencia de elementos pictóricos en el enunciado de esta tarea y la asignación de significados que convocan, es determinante para su solución. Algunos de los elementos pictóricos identificados en esta tarea se enumeran en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1. Elementos Lingüísticos en la Tarea de Sombrillas y Gorras.

¿Cuánto vale una sombrilla y una gorra?	Establece la pregunta en la tarea. Indica que la respuesta que corresponde al valor numérico correspondiente al precio de una sombrilla y de una gorra.
	La suma de los precios de dos sombrillas y una gorra es de 80€; el precio de cada sombrilla es el mismo.
	Las suma de los precios de dos gorras de características similares y de una sombrilla es de 70€; el precio de cada gorra es el mismo.

5.4.1.2 Conceptos

Los conceptos de incógnita, suma e igualdad son básicos en una propuesta de solución de la tarea, ya sea de carácter algebraica o aritmética, como se describen a continuación:

- Incógnita: Valor desconocido en una tarea y que debe ser hallado.
- Suma: La suma de los precios desconocidos.
- Igualdad: Relación establecida entre precios desconocidos y los valores de sus sumas.

El reconocimiento de dos valores desconocidos que pueden ser hallados a partir de la información es crucial en el carácter algebraico de la tarea, con independencia del método de solución del mismo. Se resalta el carácter relacional que el signo igual tiene en esta tarea y que es asumido como tal por los niños sin ninguna instrucción al respecto.

5.4.1.3 Procedimientos

Algunos de los procedimientos que se resaltan son:

- Procedimiento numérico de ensayo y error: Los estudiantes asignan diversos valores numéricos para los precios de las sombrillas y de las gorras, los suman y comprueban si cumplen las dos condiciones simultáneamente.
- Procedimiento gráfico: Consiste en escribir (dibujar) dos sombrillas y una gorra, más dos sombrillas y una gorra, y luego asociar dos sombrillas y una gorra y reemplazarlas por el precio combinado de ellas, de tal manera se puede obtener una gráfica en donde figuran dos gorras con un precio de 84, y como el precio de cada gorra es el mismo, se obtiene así el precio combinado de dos gorras, de donde se puede obtener el precio de una sola.
- Procedimiento algebraico: Se asignan incógnitas para los precios desconocidos de sombrillas y gorras, y se procede a resolver un sistema lineal de dos ecuaciones por dos incógnitas.

5.4.1.4 Propiedades

Las propiedades que se consideran son:

- El precio de cada sombrilla es el mismo: El precio de una sombrilla es el mismo en ambas condiciones de la tarea, lo cual reduce el número de incógnitas.
- El precio de cada gorra es el mismo: Los estudiantes asignan diversos valores numéricos para las sombrillas y las gorras, los suman y comprueban si cumplen simultáneamente las dos condiciones.
- El precio de una sombrilla y una gorra, respectivamente, es el mismo en ambas condiciones de la tarea, lo cual reduce el número de incógnitas.
- La tarea tiene solución única: La tarea tiene solución y puede ser hallada.

5.4.1.5 Argumentos

Dos argumentos se pueden dar para esta tarea: El primero de carácter aritmético y el segundo de carácter algebraico. En el primer caso, en virtud que las gorras y las sombrillas en ambas viñetas tienen el mismo precio, se asignan valores numéricos enteros para los precios de las gorras y para las sombrillas hasta encontrar dos números que satisfagan las dos condiciones expresadas en cada una de las viñetas. En el segundo caso se pueden plantear dos ecuaciones con dos incógnitas, es decir un sistema lineal de dos ecuaciones por dos incógnitas. El subsiguiente procedimiento de solución podría ser de tipo numérico (ensayo y error); algebraico (sustitución, igualación o cancelación) o uno de carácter gráfico.

5.4.2 Tarea de las Edades

La tarea que se ilustra en la Figura 5.2 fue tomada del libro texto Anaya 6 (p. 25).

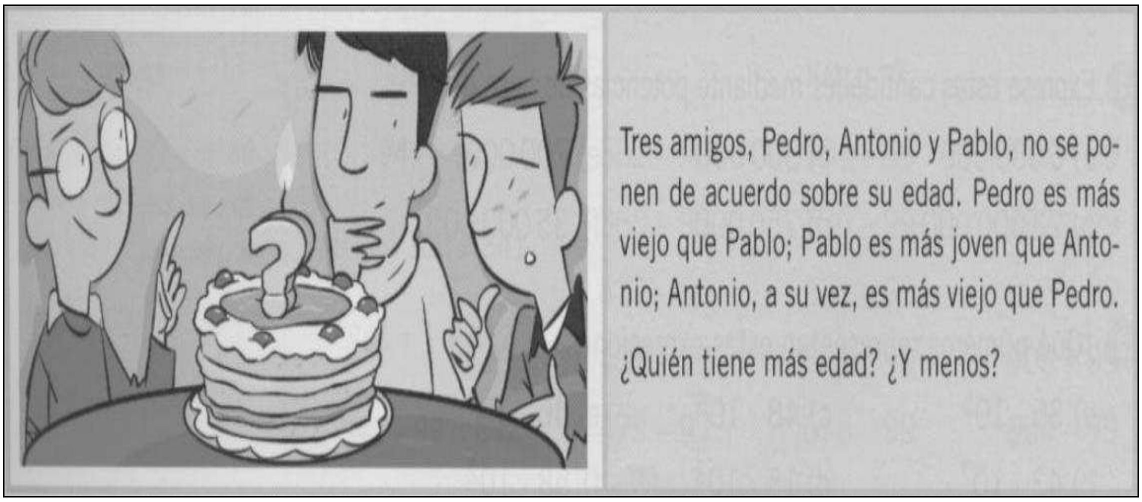


Figura 5.2. Tarea sobre las Edades.

Una posible solución a la tarea se exhibe a continuación:
La primera condición afirma que “Pedro es más viejo que Pablo”, por tanto se ubica a Pedro a la derecha de Pablo. La tercera condición afirma que “Antonio es más viejo que Pedro”, así que se ubica Antonio a la derecha de Pedro. De tal suerte que Pablo es el más joven, y Antonio es el más viejo.

La segunda condición afirma que “Pablo es más joven que Antonio”; por lo tanto, ésta no ofrece información adicional que la ya contenida en las condiciones primera y tercera. Vale decir que ninguno de los niños o de los maestros en formación se percató de este hecho.

5.4.2.1 Elementos Lingüísticos

Se recuerda que los elementos lingüísticos considerados pueden ser términos y expresiones matemáticas tales como: Símbolos, representaciones gráficas. A continuación se exhiben algunos elementos lingüísticos con algunos de sus significados asociados:

- Tres amigos, Pedro, Antonio y Pablo, no se ponen de acuerdo sobre su edad: Establece el contexto de la tarea y el dilema.
- Pedro es más viejo que Pablo: Relación de orden entre la edad de Pedro y la de Pablo.
- Pablo es más joven que Antonio: Relación de orden entre la edad de Pablo y la de Antonio.
- Antonio, a su vez, es más viejo que Pedro: Relación de orden entre la edad de Antonio y la de Pedro.
- ¿Quién tiene más edad? (Primera pregunta): Establece la cuestión que debe ser resuelta, pregunta quien tiene la mayor edad, inquiere sobre el número (desconocido) más grande.
- ¿Y menos? (Segunda pregunta): Establece la cuestión que debe ser resuelta, pregunta por quien tiene la menor edad, pregunta por el número-desconocido- menor.

Los elementos lingüísticos enumerados establecen tanto los datos de la tarea como las preguntas. A partir de los datos se pueden establecer las relaciones a partir de las cuales se pueden responder a las preguntas.

5.4.2.2 Conceptos

Los conceptos propuestos permiten establecer relaciones de orden entre las edades a pesar que no se conocen ni se pueden determinar a partir de la información provista. En esta tarea podemos reconocer rasgos de razonamiento algebraico de tipo relacional. Las edades de Pedro, Antonio y Pablo son desconocidas; sus valores pueden variar dentro de un rango. El conjunto de valores posibles de cada una de las edades es un objeto intensivo. Entre las edades hay relaciones de desigualdad; la comparación de las edades requiere poner en juego la propiedad transitiva de la relación de orden en el conjunto numérico de los naturales aplicada a conjuntos de valores. A continuación se exhiben algunos conceptos con sus significados asociados:

- Mayor que: Relación de orden establecida entre los números que corresponden a las edades.
- Menor que: Relación de orden establecida entre los números que corresponden a las edades.

Se nota que se establecen relaciones de orden entre números desconocidos pero que pueden ser ubicados en ciertos rangos numéricos. Las relaciones son generales pero pueden ser ilustradas a partir de ejemplos.

5.4.2.3 Procedimientos

A continuación se exhiben algunos procedimientos con sus significados asociados:

- Tomar dos condiciones y ubicar los números correspondientes a las edades es una recta ordenada; utilizar la tercera condición para determinar la posición final de los números desconocidos que corresponden a las edades.
- Usar las condiciones dos a dos para determinar la posición relativa de los números que corresponden a las edades.
- Es posible el uso de recursos pictóricos- un arco- para vincular las edades que se comparan, y el uso de los símbolos "más" y "menos" para indicar "mayor" y "menor" respectivamente.

5.4.2.4 Propiedades

Algunas de las propiedades usadas son:

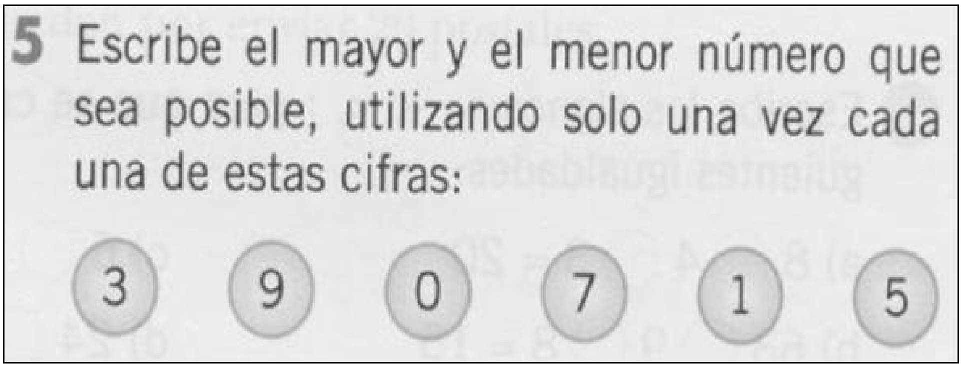
- Entre dos números naturales no consecutivos existe otro número natural: Dado que los niños no tienen la misma edad, entonces la tarea tiene solución. Existe alguien mayor y alguien menor.
- El conjunto de los números naturales es ordenado (principio del buen ordenamiento): El conjunto formado por tres números naturales tiene un elemento menor.

5.4.2.5 Argumento

El argumento que se puede dar es una réplica o variación de la solución dada anteriormente, en la que se pueden incluir aspectos pictóricos: Se representa las edades de los amigos por las iniciales de sus nombres, y se ubican en un segmento de recta, en donde se escoge la ubicación a la derecha para las edades mayores y la izquierda para las edades menores.

5.4.3 Tarea del Número Mayor

La tarea que se ilustra en la Figura 5.3 fue tomada del libro texto Anaya 6 (p. 16). Se agregó la consigna "justifica tu respuesta".



5 Escribe el mayor y el menor número que sea posible, utilizando solo una vez cada una de estas cifras:

3 9 0 7 1 5

Figura 5.3. Tarea del Número Mayor.

Una posible solución a la tarea:

La solución que se da a continuación no da cuenta del proceso de resolución, sólo de la respuesta. El mayor número posible es: 975.310, y el menor número posible es: 13.579.

5.4.3.1 Elementos Lingüísticos

Los elementos lingüísticos considerados pueden ser términos y expresiones matemáticas tales como: Símbolos y representaciones gráficas. A continuación se exhiben algunos de tales elementos con algunos de sus significados asociados:

- Escribe el mayor y el menor número que sea posible: Establece el tipo de tarea; encontrar dos números y escribirlos.
- Escribe el mayor y el menor número que sea posible: Da la condición sobre los números; que sea el mayor número posible y el menor número posible.
- Utilizando sólo una vez cada una de las cifras: Condición para la utilización de los números dados/otra condición para resolver la tarea.

Los elementos lingüísticos que se resaltan corresponden a aquellos que establecen las condiciones: Número mayor, número menor y usar cada cifra sólo una vez. Es interesante notar que al pedir tanto el número mayor como el número menor se pone en situación conceptos y procedimientos para dar la solución a ambas preguntas, que se basan en la misma propiedad del sistema posicional.

5.4.3.2 Conceptos

Estos conceptos son usados, en el contexto del sistema numérico de los números naturales, para dar solución a la tarea. Dos conceptos son importantes en la solución de esta tarea: El de ordenación y el de posición. A continuación se exhiben algunos elementos conceptuales y sus significados asociados:

- Orden de los números naturales: El conjunto de los números naturales es ordenado, dados dos números se puede decidir cual es mayor y cual es menor.
- Concepto de valor de posición de un número: El valor asociado a un número depende de la posición que tiene en un determinado arreglo.
- Concepto de mínimo de un conjunto: Un número que es menor que todos los números de un conjunto dado y que pertenece al conjunto.
- Concepto de máximo de un conjunto: Un número que es mayor que todos los números de un conjunto dado y que pertenece al conjunto.

5.4.3.3 Procedimientos

El principio del Buen Ordenamiento garantiza la existencia de un número menor y de un número mayor que son las únicas soluciones a la tarea. No se espera que los maestros ni los niños expliciten esta propiedad, que podrían no conocer, sin embargo la misma sería usada espontáneamente durante la solución. A continuación se exhiben algunos procedimientos con sus significados asociados:

- Se obtiene el conjunto cuyo cardinal es 6! números para comparar. Se ubican los números en las casillas provistas y se comparan todos los números y se encuentra el mayor y el menor: Se obtienen todos los números posibles, usando la condición de poner cada digito dado una sola vez en cada casilla, y luego se comparan entre sí, obteniéndose el mayor y el menor.
- Se utiliza el principio que afirma que el dígito más grande escrito en la primera posición de izquierda a derecha producirá el número mayor: En el sistema posicional, un número escrito más a la izquierda tiene un mayor valor que el que tendría si se escribiera en otra posición a la derecha.

5.4.3.4 Propiedades

Una propiedad que es determinante en la solución de esta tarea es el Principio del Buen Ordenamiento: Todo conjunto A de números naturales, diferente de vacío, tienen un elemento mínimo. A continuación se muestran algunas propiedades con sus significados asociados:

- Todo conjunto de números reales, acotado superiormente tiene un máximo. El número más grande, existe y puede ser hallado.

- Todo conjunto de números reales, acotado inferiormente tiene un mínimo. El número más grande existe y puede ser hallado.

5.4.3.5 Argumentos

Un argumento que puede ser dado es el siguiente: Dado que un número adquiere su valor en función de la posición que tenga, su máximo valor será aquel que considere su posición más a la izquierda. Así mismo, puestos a escoger entre dos números, cual se ha de ubicar a la derecha para obtener el número mayor, se debe ubicar el número más grande a la izquierda, pues así se obtiene el mayor valor de posición posible. Si aplicamos este criterio de manera sistemática se concluye que para obtener el mayor número posible se han de ubicar los números en orden decreciente, desde la izquierda hacia la derecha. Para obtener el número menor, se han de ubicar los números en orden creciente desde la izquierda hacia la derecha.

5.4.4 Tarea de las Velas

La tarea que se exhibe en la Figura 5.4 fue tomada del libro Anaya 6 (2006, p. 29).

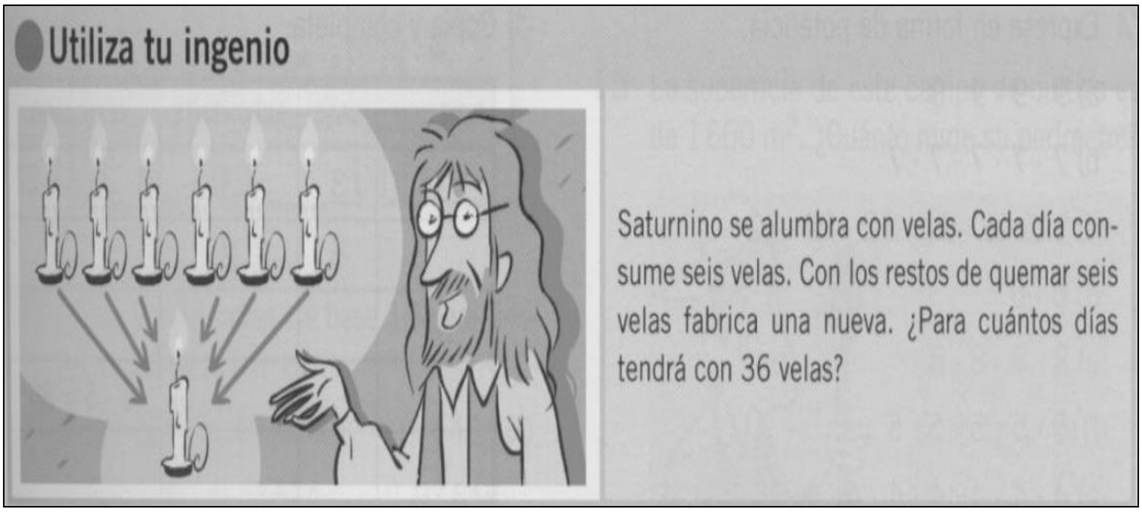


Figura 5.4. Tarea de las Velas.

A continuación se ofrece una solución a la tarea. Aún en el caso que se hiciera un listado de soluciones diversas, no hay garantía que se consideraran todas las soluciones posibles ni todas las configuraciones de objetos y significados que emergen. Esto evidencia la complejidad con la cual se enfrentan los maestros cuando preparan una actividad matemática e intentan identificar diversas configuraciones epistémicas en atención a las posibles preguntas de los niños. Tal complejidad debe ser reconocida y asumida por los maestros como un aspecto cotidiano de su labor docente. Para Morin (1977): "*La noción de conocimiento nos parece una y evidente. Pero, en el momento en que se le interroga, estalla, se diversifica, se multiplica en nociones innumerables, planteando cada una de ellas un nuevo interrogante*" (p. 18). La complejidad de los análisis de las tareas matemáticas y las diversas interpretaciones y consecuencias didácticas de los elementos primarios presentes parece clara.

Una posible solución:
El consumo diario es 6 velas por día. Como tiene 36 velas, tendrá 36 velas/6 velas por día = 6 días. Como cada uno de los 6 días logra hacer otra vela más, en total logra ahorrar 6 velas, con las cuales se alumbrará otro día más. Por tanto, podrá alumbrarse 7 días.

5.4.4.1 Elementos Lingüísticos

Algunos de los conceptos vinculados con la solución propuesta están en correspondencia con algunas de las operaciones que luego son usadas para resolver la tarea. Estos tres conceptos podrían ser considerados como el conjunto mínimo de conceptos que corresponden a la solución dada anteriormente. Los conceptos de división y de resta se corresponden con las dos soluciones dadas por los niños de escuela elemental y que fueron propuestas a los maestros en formación para su discusión. A continuación se exhiben algunos elementos lingüísticos con algunos de sus significados asociados:

- Saturnino se alumbra con velas: Información que ofrece el contexto de la tarea. Información que indica que cada día se gastan velas.
- Cada día consume seis velas: Condición que indica el número de velas que consume cada día.
- Con los restos de quemar seis velas fabrica una nueva: Establece una regla para obtener una nueva vela cada día.
- ¿Para cuántos días tendrá con 36 velas?: Plantea otra condición para resolver la tarea, el número de velas que tiene y que usará para alumbrarse, manteniendo las dos condiciones dadas inicialmente.

5.4.4.2 Conceptos

Algunos de los conceptos que se ponen en juego en la solución de la tarea son:

- Resta: Cada día se restan seis velas del conjunto de 36.
- División: El número de velas, 36, se divide entre seis, para saber el número de días que podrá iluminarse con 36 velas.

- Correspondencia: Con 6 velas se fabrica una nueva vela.
- Suma: Suma entre los números correspondientes a días para indicar el número total de días en los cuales tendrá velas para iluminarse.

5.4.4.3 Procedimientos

Los procedimientos considerados son lo que corresponden a los conceptos identificados y usados para dar solución a la tarea y que a continuación se enuncian con algunos de sus significados asociados:

- División: Entre el número de velas por el número de velas que usa cada día, para conocer el número total de días para los cuales tendrá velas.
- Resta: Del número total de velas se restan seis velas por cada día, al final del proceso no se agotan las velas y tendremos así el número total de días, correspondiente al número de restas que se efectuaron para llegar al agotamiento de las velas, en los cuales Saturnino se podrá iluminar.
- Asociación, agrupamiento: Se agrupan velas en paquetes de seis, el número de paquetes corresponde al número de días en los que Saturnino se podrá iluminar.
- Correspondencia: Del número de días que se podrá iluminar con 36 velas, si cada día usa seis, más el número de días que se podrá iluminar con el número de velas que se fabrican con los residuos de las 36 velas, siguiendo la condición que con seis velas se fabrica una nueva vela.
- Suma: Se suman los restos de las velas de cada día. Se suman el número de velas que se obtiene cada día para alumbrarse un día mas.

5.4.4.4 Propiedades

Algunas propiedades que se pueden identificar son:

- El consumo de velas es constante: Cada día se consume la misma cantidad de velas.
- Seis velas por día, como tengo 36 velas, tengo para seis días: Igualdad de razones 6/1=36/6.

5.4.4.5 Argumentos

Un posible argumento que se puede dar en este caso es: Como cada seis velas puedo fabricar una nueva, además tengo 36 puedo fabricar seis velas, entonces tendré 42, y como se usan seis por día, se tendrán velas para siete días.

5.4.5 Tarea de Completar la Tabla

La siguiente tarea que se exhibe en la Figura 5.5 fue tomada del libro texto Anaya 6 (2006, p. 17).

17 Copia y completa la tabla.

a	b	c	$(a + b) \times c$	$a + b \times c$
8	4	5		
12	7	20		
250	65	3		
400	70	9		

Figura 5.5. Tarea de Completar la Tabla.

No se dará la solución a esta tarea, en tanto que se reduce a reemplazar las letras por los números y, eventualmente, realizar las operaciones indicadas. Un análisis epistémico de la tarea anterior se muestra en el siguiente apartado.

5.4.5.1 Elementos Lingüísticos

A continuación se enuncian algunos elementos lingüísticos con algunos de sus significados asociados:

- Completa la tabla: Se pide reemplazar las letras a, b y c por los números correspondientes dados en las columnas respectivas, en el orden sugerido por la expresión algebraica.
- Completa la tabla: Se pide reemplazar las letras a, b y c por los números dados en las columnas respectivas, en el orden sugerido por la expresión algebraica, calcular el resultado y escribirlos donde corresponde.
- La propia tabla: La configuración de números y de las letras comunica acciones aritméticas que deben ser efectuadas.
- Correspondencia: Entre el conjunto de números en cada columna y la letra, reemplazar las letras por números, pero la correspondencia se mantiene hasta que las operaciones hayan sido efectuadas.

Se consideran dos tipos de elementos lingüísticos: Los escritos y los gráficos. La tabla propuesta en la tarea que asociamos a un elemento gráfico, tiene cinco columnas, tres de ellas con números y dos sin números, que se interpretan como sentencias numéricas a resolver.

La disposición de los números y de las letras parece comunicar un conjunto de acciones que pasan por asignar valores a las letras, efectuar los cálculos aritméticos correspondientes y ubicarlos de manera sistemática en las columnas. Nótese que la asignación es sistemática y obedece a un criterio que no es explícito en el enunciado, pero que se requiere para dar la solución esperada. El criterio referido es que los valores asignados a las letras se toman en ternas horizontales ordenadas y de ninguna otra manera, es decir, un estudiante no debería asignar el valor numérico de 8 para la letra "**a**", 65 para la letra "**b**" y 9 para la letra "**c**". Adicionalmente una vez que se asignan valores a las letras, se deben efectuar los cálculos manteniendo fijos los valores asignados.

Una vez que se termina de reemplazar y de efectuar los cálculos, debe asignarse otro valor a la misma letra y efectuar los cálculos correspondientes. Se nota que de esta manera, las letras son tratadas como variables. Así no solamente se utiliza, en acto, el concepto que una letra puede tomar un valor numérico, sino que la misma letra puede tomar varios valores numéricos, y que una vez fijado el valor numérico la letra tendrá tal valor hasta el final de un proceso determinado.

El enunciado de la tarea propone una diferenciación implícita entre las letras que usan como variables y las que usan como signos para denotar operaciones. Vale decir que ningún maestro y ningún niño asignaron significado de variable al símbolo de multiplicación. Adicionalmente, el símbolo " $a\,x\,b$ " no se interpreta como una concatenación de letras, sino como una operación en potencia; una sentencia matemática sobre la cual se puede operar numéricamente; en la que se reconocen que "a" y "b" se pueden reemplazar por números y "x" representa una operación binaria que se efectúa sobre los números.

A las letras se les concede sistemáticamente tanto un significado numérico como un significado de símbolo de operación, sin que medie ninguna explicación o instrucción adicional a la llana redacción de la pregunta.

5.4.5.2 Conceptos

Los conceptos involucrados en la solución de la tarea son de tipo aritmético: Multiplicación y adición, con sus resultados productos y suma. Sin embargo también se evidencian conceptos tales como: Variable, operación indicada, resultado, cerradura. A continuación se enuncian algunos conceptos con sus significados asociados:

- Operación: Acción de un operador sobre una pareja de números, a la que se le asigna un único valor.
- Suma: Operación entre números naturales.
- Producto: Operación entre números naturales.
- Producto: Resultado de efectuar la operación de multiplicación.
- Variable: Letra que puede tomar varios valores.

5.4.5.3 Procedimientos

Los procedimientos matemáticos que se requieren para dar respuesta a la tarea son sugeridos por los conceptos identificados. Algunos de los procedimientos identificados son: Correspondencia, reemplazar, adición, multiplicación. A continuación se muestra algunos procedimientos con sus significados asociados:

- Suma de números naturales: La suma o adición es la operación matemática que consiste en añadir dos números o más para obtener una cantidad final o total. La suma también ilustra el proceso de juntar dos colecciones de objetos con el fin de obtener una sola colección. Igualmente se puede considerar como una operación binaria realizada sobre el conjunto de los números naturales sometida a los axiomas de Peano.
- Multiplicación de números naturales: La multiplicación es una operación aritmética de composición que consiste en sumar reiteradamente la primera cantidad tantas veces como indica la segunda. Uso de la multiplicación de números naturales de una o dos cifras.
- Prioridad de las operaciones: Prioridad en las operaciones, convenio que le da prioridad a los productos sobre las sumas y restas.

5.4.5.4 Propiedades

Las propiedades que se usan en la solución propuesta de la tarea son las que se enuncian a continuación:

- Asociativa de la suma: Propiedad que establece que cuando se suman tres o más números naturales, el resultado siempre será el mismo con independencia del agrupamiento, dos a dos, de los números.

- Asociativa del producto: Propiedad que establece que cuando se multiplican tres o más números naturales, el resultado siempre será el mismo con independencia del agrupamiento, dos a dos, de los números.
- Conmutativa de la suma: Propiedad que establece los factores se pueden (operar) sumar en cualquier orden y que el resultado siempre es el mismo.
- Conmutativa del producto: Propiedad que establece los factores se pueden (operar) multiplicar en cualquier orden y que el producto siempre es el mismo.
- Cerradura de la suma y del producto: La suma y el producto de números naturales es siempre un número natural.

5.4.5.5 Argumentos

Un argumento podría ser: Dado que las letras se pueden reemplazar por los valores indicados en la tabla, entonces los reemplazamos y, en el primer caso, efectuamos la suma y después el producto; para la segunda expresión primero se efectúa el producto y después la suma.

5.5 Análisis Cognitivo de las Soluciones de los Niños

En este apartado se mostrarán las soluciones dadas por los niños de sexto grado a las tareas analizadas en la sección anterior. El conjuntos de soluciones a las tareas dadas por los niños de sexto grado se exhiben en el Anexo C -Soluciones Dadas por los Niños de Sexto Grado y Discutidas con los Maestros en Formación-.

El análisis que se efectúa es de tipo epistémico-cognitivo y pretende identificar el conocimiento matemático requerido para su solución así como las estrategias y las configuraciones usadas por los niños de escuela elemental. A continuación se proponen las tareas, se exhibe la respuesta dada por los niños de escuela elemental, posteriormente se comenta la solución y se ubica, cuando sea pertinente, en el contexto de investigaciones hechas en el campo del razonamiento algebraico elemental.

5.5.1 Tarea de Sombrillas y Gorras

Las soluciones dadas por los niños se agrupan en dos categorías: La aritmética y la algebraica, que corresponden al tipo de estrategia usada, con independencia de la validez matemática de la solución. La solución aritmética se caracteriza por el uso del método de ensayo y error para encontrar los precios de una sombrilla y de una gorra. En la Figura 5.6 se muestra una de tales soluciones. Del total de soluciones, el 90% corresponde a soluciones aritméticas y el 10% restante a soluciones algebraicas.

Steffe (2001) considera "*que la naturaleza algebraica potencial de la aritmética se relaci*ona *con el reconocimiento que los niños hacen de cómo operar en situaciones numéricas y en la naturaleza simbólica de las operaciones*", (p. 556).

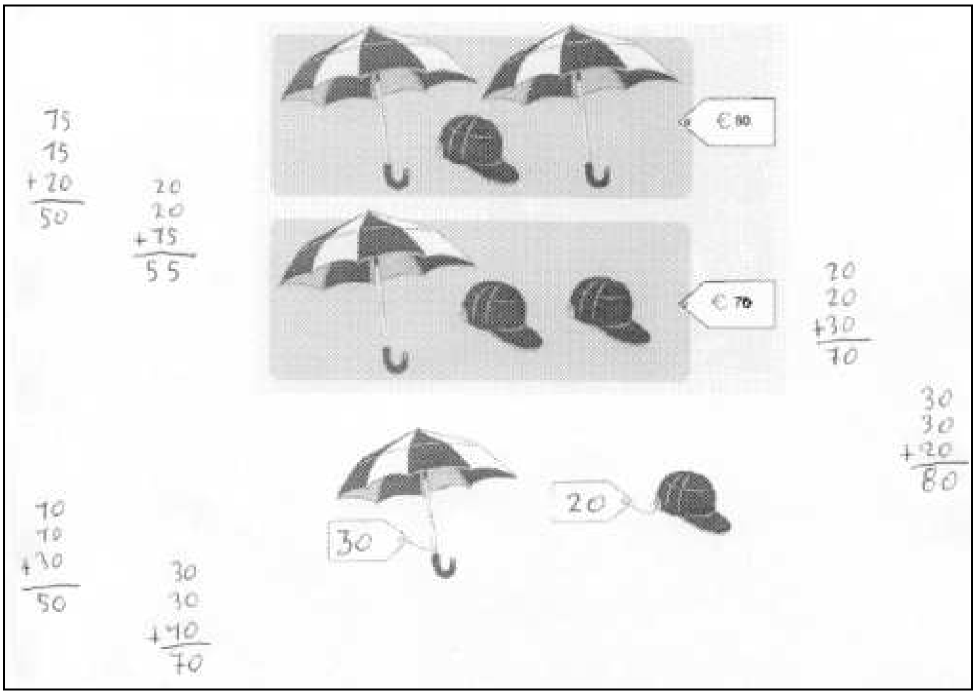


Figura 5.6. Solución Numérica a la Tarea de Sombrillas y Gorras.

La solución algebraica dada por los niños se caracteriza por el uso tanto de incógnitas para representar los precios desconocidos como de ecuaciones que relacionan tales valores. La resolución ilustrada en la Figura 5.6, dada por los niños, es numérica, en tanto que los niños no conocen métodos algebraicos para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Del conjunto de soluciones se puede colegir que los niños son capaces de resolver una tarea de naturaleza algebraica mediante el uso de sus conocimientos aritméticos.

Si bien el grupo de estudiantes que proveyeron la solución aritmética no escribió una ecuación en correspondencia con cada viñeta, si es cierto que asignaron significado algebraico a los diversos elementos lingüísticos presentados en el enunciado de la tarea. Los niños asignaron el significado de incógnita a los precios correspondientes a los objetos "sombrilla" y "gorra"; igualmente asignaron el significado de "ecuación" a cada viñeta.

Nótese como los elementos pictóricos son interpretados en términos característicos del álgebra: Cada sombrilla y cada gorra se interpretan en términos de "precios desconocidos", la conjunción de los elementos gráficos (sombrillas y gorras) con el valor numérico (80€ y 70€) se interpreta en términos de una ecuación en la que la operación de sumar precios se colige, aparentemente, de la cercanía de los objetos y de la presencia del precio "total" al lado derecho. La preferencia dada a la operación de suma sobre otra operación, por ejemplo la multiplicación, podría justificarse por la constumbre en el ámbito escolar y social.

Es de notar que la viñeta hace un uso aparente del signo igual en su aspecto de resultado: Los "precios desconocidos" aparecen a la izquierda y el "resultado" aparece a la derecha. La pregunta dada al inicio de la tarea. ¿Cuánto vale una gorra y una sombrilla?, puede reforzar el carácter numérico que se le concede a la viñeta correspondiente a sombrillas y a gorras. Los elementos lingüísticos desempeñan un rol fundamental en el proceso de solución de la tarea, tanto en su versión aritmética como algebraica.

Para Carpenter, Levi y Farnsworth (2000) el "*álgebra se construye sobre las mismas propiedades fundamentales que forman la base de la aritmética. La naturaleza abstracta del álgebra hace que sea aún más importante que los estudiantes comprendan precisamente cuando y porque las propiedades de la aritmética pueden ser aplicadas*", (pp. 3-4).

Radford (2006a) reconoce que la construcción de reglas y la escritura de ecuaciones como una forma especial de regla, se da mediante varias fases articuladas que hacen uso de varios sistemas semióticos: Palabras, gestos, dibujos, gráficas y símbolos. Mientras que Carraher (2006) argumenta en favor de la inclusión temprana de los símbolos algebraicos como una herramienta que soporta el razonamiento algebraico, algunos otros autores tales como Britt e Irwin (2008) consideran que los niños deben trabajar con varios sistemas de representación antes de la introducción a la semiótica específica propia del álgebra.

Molina (2007), define el razonamiento algebraico elemental "*como una manera de pensar y actuar en objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas, como guía hacia una enseñanza con compresión de las matemáticas*", (p. 22). Valorada de acuerdo con esta aproximación, la tarea anterior habría movilizado el "pensar y actuar sobre objetos, relaciones y estructuras" en "una situación matemática".

Steffe (2001, p. 563) argumenta que el conocimiento tanto numérico como de las operaciones que los niños exhiben es algebraico en naturaleza. Sin embargo la autora se decanta por un enfoque ontogénico en el cual la naturaleza aritmética o algebraica de una actividad se "*basa en la historia de su generación en los individuos*", (Steffe, 2001; p. 556).

El grupo de tareas resueltas por los niños pueden ser reagrupados en dos categorías: La primera, en donde se plantea un sistema de ecuaciones, y la segunda, en donde se usa exclusivamente un enfoque numérico de solución mediante el uso de un procedimiento de ensayo y error. Las soluciones incluidas en la segunda categoría no consideran ecuaciones pero efectúan un proceso de asignación de significados que se corresponde con la escritura de ecuaciones que efectúan los niños en la primera categoría.

5.5.2 Tarea de las Edades

Las soluciones de los niños se agrupan en dos categorías: Las que dan sólo la respuesta y las que dan un procedimiento de solución. El primer grupo no se consideró en esta investigación. Del segundo grupo se escogió una solución en la que los niños usan elementos pictóricos como parte del procedimiento de solución a la tarea. La confluencia de elementos pictóricos y la ausencia de una justificación escrita en español hacen de la actividad una buena tarea para que los maestros en formación reconozcan los objetos matemáticos y los significados puestos en juego en tanto que es usual que los niños den este tipo de respuestas. La propuesta de solución a la tarea que se discutió con los maestros se ilustra en la Figura 5.7.

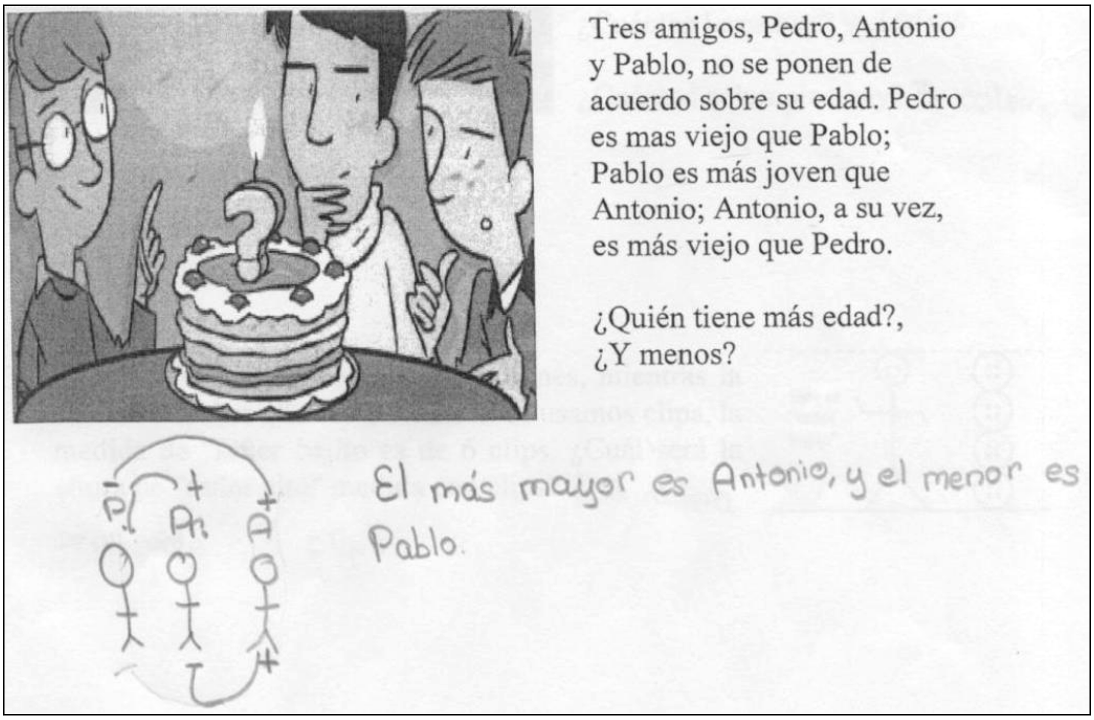


Figura 5.7. Solución a la Tarea de las Edades.

El procedimiento de solución del niño contempla el uso de cuatro elementos pictóricos relacionados entre sí:

- Viñetas que representan a los amigos: Pablo, Pedro y Antonio.
- Letras que representan los nombres de los amigos: P para Pablo, Pr para Pedro y A para Antonio.

- Los signos menos (-) y más (+) puestos en la parte superior e inferior de las viñetas.
- Arcos que conectan a las viñetas de los amigos y que se corresponden con las comparaciones dadas entre las edades.

La tarea es especialmente interesante en tanto que contempla dos procedimientos imbricados que están en la base de la relación comunicativa entre niño y maestro. El proceso de "codificación" de la solución por parte del niño y el proceso de "descodificación" que el maestro debe realizar como parte de la labor de reconocimiento de los objetos y significados puestos en juego por el niño.

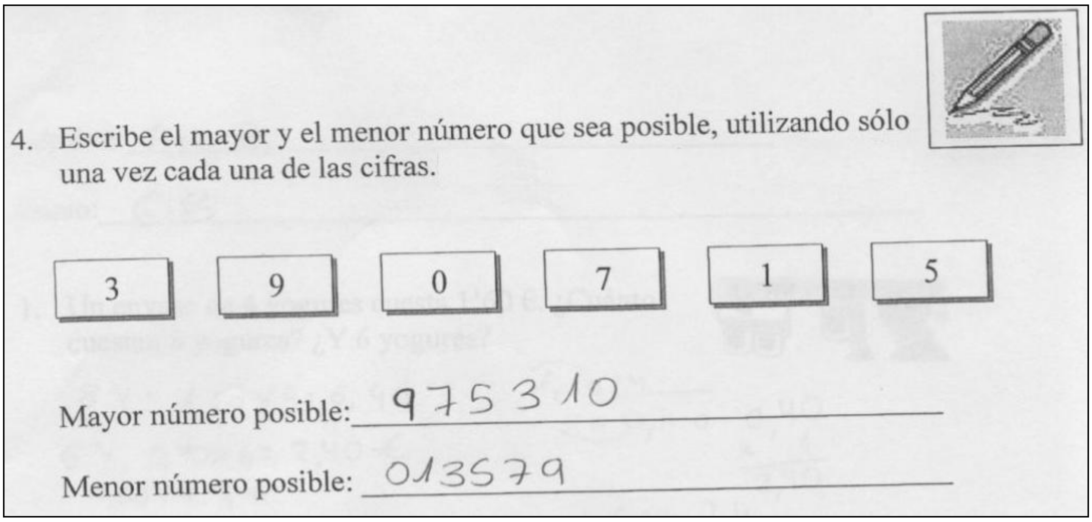
La identificación de objetos y significados imbricados en la solución pictórica dada por los niños es un reto para el maestro; Ben-Haim, Lappan y Houang (1985) y Presmeg (1986) consideran que los niños no tienen dificultad para generar imágenes visuales, sin embargo los maestros suelen manifestar dificultades para razonar sobre lo pictórico (Eisemberg, 1994). A continuación se dará la interpretación dada a la solución del niño; se usará para ello el análisis epistémico propuesto en la sección 5.4.2 -Tarea de las Edades-, en el que se han identificado los objetos y significados propuestos en la tarea. Cuando sea pertinente, se vincularán estos dos análisis con el análisis realizado por los maestros en formación.

El niño representa a los sujetos de la tarea mediante viñetas a las que asocia las iniciales de sus nombres, mediante una asignación unívoca. Posteriormente representa las relaciones entre sus edades mediante el uso de dos recursos gráficos: El signo menos (-) para indicar que el sujeto sobre o debajo del cual se ha escrito, es "más joven" y el signo más (+) para indicar que es "más viejo", las comparaciones entre dos sujetos se simbolizan mediante un arco que conecta las dos viñetas correspondientes a los nombres de los amigos cuyas edades se comparan.

La identificación de las relaciones, su simbolización y el uso que se hace de esta para dar la respuesta a la tarea estaría en la base del razonamiento algebraico elemental. Es posible identificar una "regla de signos": La viñeta a la que se le asignan dos signos menos corresponde al amigo que es más joven, la viñeta que tiene asignados un signo menos y un signo más corresponde a quien tiene la edad intermedia y finalmente, la viñeta que tiene asignados los dos signos más corresponde al amigo que tiene más edad.

5.5.3 Tarea del Número Mayor

El enunciado de la tarea es: Escribe el mayor y el menor número que sea posible, utilizando sólo una vez cada una de las cifras: 3-9-0-7-1-5. Las soluciones dadas por los niños pueden agruparse en dos grupos: Aquellas que dan la justificación y aquellas que no. El procedimiento de solución usado por los niños parece ser el mismo, y todos dan la respuesta correcta a la tarea. La solución que se escogió para ser discutida con los maestros en formación se ilustra en la Figura 5.8 y la justificación que da el niño con respecto a ésta tarea se muestra en la Figura 5.9.



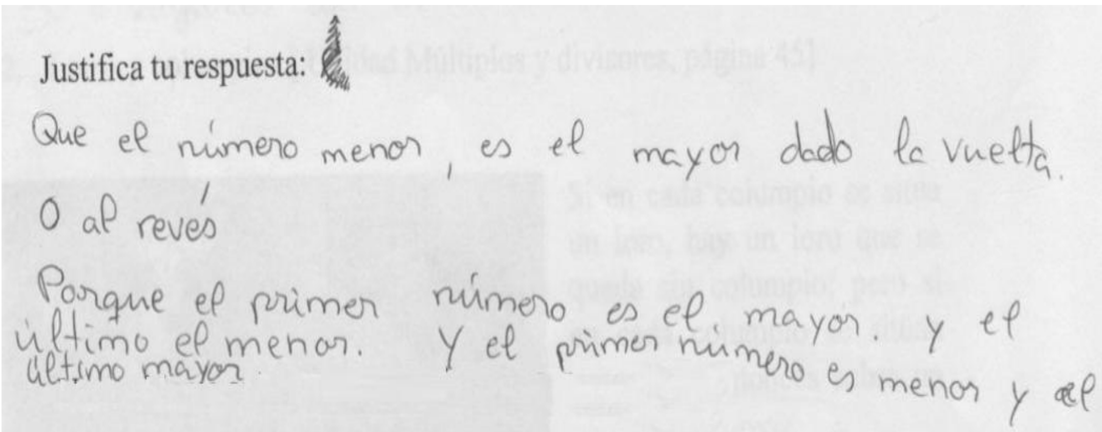
4. Escribe el mayor y el menor número que sea posible, utilizando sólo una vez cada una de las cifras.

3	9	0	7	1	5

Mayor número posible: 975310

Menor número posible: 013579

Figura 5.8. Solución a la Tarea del Número Mayor.



Justifica tu respuesta:

Que el número menor, es el mayor dado la vuelta. O al revés

Porque el primer número es el mayor. y el último el menor. Y el primer número es menor y el último mayor

Transcripción:

Que el número menor, es el mayor dado la vuelta, o al revés.
Porque el primer número es el mayor y el último el menor. Y el primer número es menor y el último mayor.

Figura 5.9. Justificación de la Solución a la Tarea del Número Mayor.

Esta tarea es un caso particular de una propuesta más general, de la que se pide explícitamente justificar la validez de la regla que permite construir el número más grande y más pequeño a partir de un conjunto de dígitos en los que éstos se usan sólo una vez. Sin embargo, en este formato el niño debe justificar la regla que le permite dar respuesta a la tarea; si bien no se pregunta sobre la generalización de la regla, parece que una vez que el caso particular se resuelve, la tarea sobre la generalización podría ser planteada a los niños.

La tarea está enmarcada en la definición del RAE que se dió en la sección 3.2.1.6 -La Aproximación al RAE desde el EOS- del tercer capítulo, en tanto que indaga sobre la identificación de una regla o patrón que debe ser hallado. La aproximación se recuerda aquí para facilitar la lectura:

> *Denominamos Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) al sistema de prácticas operativas y discursivas puestas en juego en la resolución de tareas abordables en la educación primaria en las cuales intervienen objetos y procesos algebraicos (simbolización, relación, variables, incógnitas, ecuaciones, patrones, generalización, modelación, etc.).*

La propiedad matemática que está en la base de la solución de la tarea establece que cada dígito tiene un valor en función de la posición. El mismo digito tendrá un valor superior si está en la primera posición de la izquierda, y su valor será el menor si está en la última posición a la derecha (unidades).

La solución dada por el niño, que se exhibe en la Figura 5. 8, muestra el dominio del concepto de valor de posición. La respuesta escrita que se exhibe en la Figura 5.9 evidencia que la comprensión lograda por el niño le permite escribir el número menor una vez que se ha escrito el número mayor; establece así una relación entre ambas tareas. Es interesante notar que el niño ha hecho evidente la dualidad que se establece entre la tarea de escribir el mayor y el menor número a partir de las condiciones dadas.

El niño ha identificado y usado la propiedad fundamental que permite resolver este tipo de tareas; Radford (2006a) considera que la identificación de "*una característica local común que se generaliza*" (p. 5), sirve como base para construir expresiones de elementos de una sucesión que están mas allá del campo perceptual.

5.5.4 Tarea de las Velas

Las soluciones de los niños se han agrupado en tres categorías. La primera corresponde al uso de la resta, utilizada por sólo uno de los niños; la segunda al uso de la representación de las velas mediante segmentos, y por agrupación de los mismos en grupos de seis, utilizada por un niño, y la tercera corresponde a la división utilizada por los niños restantes. Del conjunto de soluciones se escogió una solución, por la estrategia única en el conjunto de soluciones, usada para dar respuesta a la tarea. La respuesta a la tarea se exhibe en la Figura 5.10.

Figura 5.10. Estrategia de Resta para la Tarea de las Velas.

Con base en el enunciado de la tarea de las velas, la niña identifica elementos lingüísticos a los que asigna significados en términos de conceptos y operaciones. Al elemento lingüístico “consume seis velas” asigna un significado en términos del concepto “restar” seis velas, por cada día, del conjunto total de 36.

Así mismo, al elemento lingüístico “con los restos de quemar seis velas, fabrica una nueva” asigna dos significados imbricados: En el primero identifica seis restos de vela con una nueva vela, y posteriormente, en el segundo expresa “una nueva [vela]” en términos de la suma de uno al número de velas que han quedado después de restar 6. La niña repite el procedimiento hasta que eventualmente no quedan velas. Es interesante notar que de hecho queda una vela, que se fabrica con los restos de las seis últimas velas que se queman. Sin embargo la estrategia aritmética usada por la niña, daría como resultado que no quedan velas.

La niña obtiene la respuesta a la pregunta ¿Para cuántos días tendrá con seis velas? al contar el número de veces que efectúa la resta y hasta quedarse, eventualmente, sin velas. El número cinco que la niña da como respuesta, y que se aprecia en la Figura 5.10, corresponde al número de restas que efectuó. Excepto por el error numérico que se comete en una de las restas, la estrategia de solución es correcta.

La segunda estrategia de solución, ilustrada en la Figura 5.11, se caracteriza por la representación de las 36 velas con segmentos, que luego son agrupados en conjuntos de seis. A partir de esta agrupación obtiene la respuesta correcta.

Figura 5.11. Estrategia de Agrupación para la Tarea de las Velas.

La tercera estrategia de solución, que se ilustra en la Figura 5.12, se caracteriza por la identificación del elemento lingüístico "consume seis velas" en términos de la operación de división; así mismo se identifica la condición "con los restos de quemar seis velas, fabrica una nueva" con la operación de agrupar los restos de seis velas y asignarle el significado de "una vela por cada día". Finalmente al número seis, que corresponde al número de días que puede alumbrarse con 36 velas, agrega un día más, para obtener el número total de días en los que puede alumbrarse.

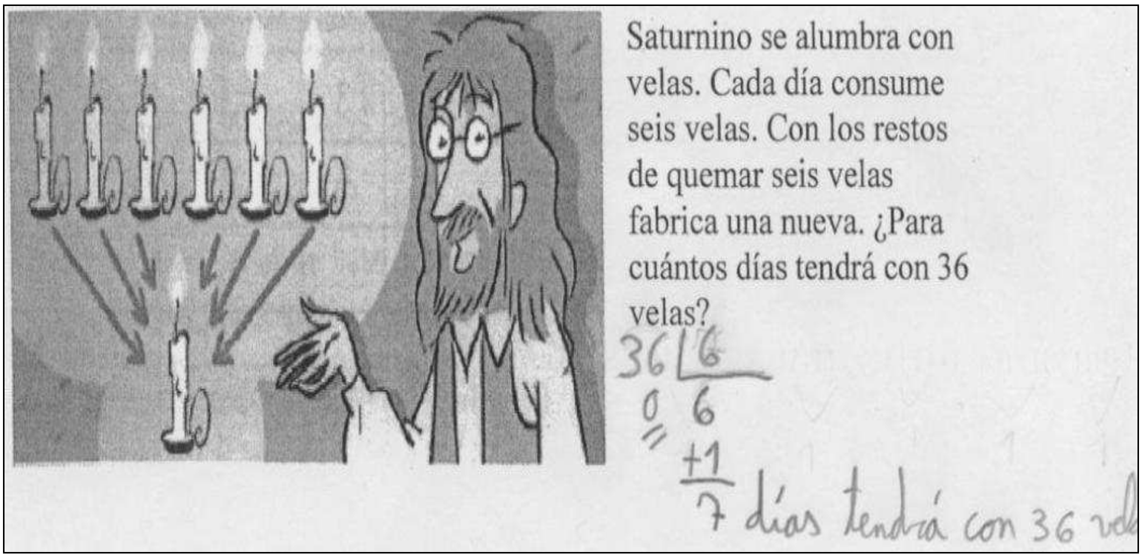
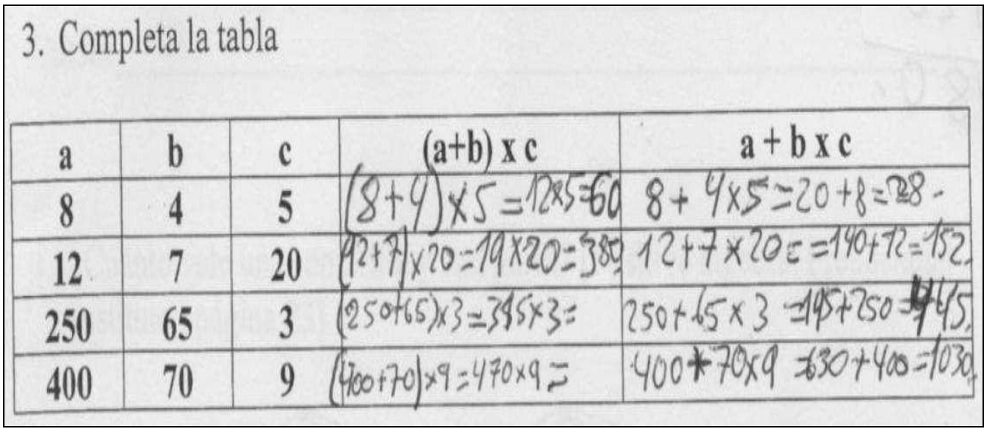


Figura 5.12. Estrategia de División para la Tarea de las Velas.

La estrategia de solución que recurre a la división es mayoritariamente usada por los niños. Si bien es cierto que la solución que hace uso de la resta es novedosa, la solución basada en la división da una solución menos compleja, si definimos complejidad en función del número de pasos. La solución por agrupación si bien es válida, no hace uso de operaciones aritméticas.

5.5.5 Tarea de Completar la Tabla

Esta tarea, a diferencia de las anteriores, sólo tuvo un tipo de respuesta. La solución que fue discutida con los estudiantes se ilustra en la Figura 5.13.



3. Completa la tabla

a	b	c	(a+b) x c	a + b x c
8	4	5	(8+4)x5 = 12x5=60	8+ 4x5=20+8=28 -
12	7	20	(12+7)x20=19x20=380	12+7x20= =140+12=152
250	65	3	(250+65)x3=315x3=	250+65x3 =195+250=445
400	70	9	(400+70)x9=470x9=	400+70x9 =630+400=1030

Figura 5.13. Solución a la Tarea de Completar la Tabla.

Es interesante notar que todos los estudiantes dieron este tipo de respuesta. Al parecer los conocimientos matemáticos requeridos para resolver la tarea, la asignación de significados a las letras, el reemplazo de letras por números, el cálculo de los resultados, la asignación del significado de variable a las letras “**a**”, “**b**” y “**c**” a las sentencias algebraicas son compartidos por todos los estudiantes, en tanto que la consigna de la tarea “completa la tabla” desencadenó la identificación de objetos matemáticos y la asignación de significados, todos ellos compartidos socialmente y en aparente armonía con el conocimiento matemático institucional.

El niño reemplaza cada uno de los valores asignados a las letras y posteriormente efectúa las operaciones indicadas. Vale decir que la consigna de la tarea no pide realizar operaciones. La naturaleza algebraica de la tarea se justifica a partir de la sustitución de letras por números, que se ajusta a la aproximación del razonamiento algebraico elemental dado en la sección 3.2.1.6 -La Aproximación al RAE desde el EOS- del tercer capítulo.

En la solución de la tarea se ponen de manifiesto tres aspectos imbricados: El primero es la identificación del concepto de variable, que es vista por Kücheman (1981) como “*letra que representa un rango de valores no especificados, y como una relación sistemática entre tales valores*”, (p. 104). El segundo aspecto está relacionado con la cerradura de las operaciones en aritmética. Los estudiantes requieren reificar las expresiones y esperan que una operación entre números se acompañe de una respuesta numérica. El tercer aspecto, vinculado con el segundo, se refiere al carácter operacional del signo igual. El niño manifiesta que el signo igual significa total (McNeil y Alibali, 2005; Baroody y Ginsburg, 1983; Behr, Erlwanger y Nichols, 1980; Kieran, 1981). Matemáticamente es válido utilizar la propiedad distributiva para expresar la operación: $(8+4)\times 5$ como $8\times 5 + 4\times 5$, sin embargo se prefiere realizar las operaciones entre paréntesis para obtener el valor total de la operación. La operación indicada: $(8+4)\times 5$ no se interpreta en términos de equivalencia numérica sino en términos de resultado.

Nótese que el niño realiza todas las operaciones requeridas para llegar al resultado final, sólo el tamaño de los números y, eventualmente, el poco espacio disponible en los recuadros, inhibe la terminación de los cálculos en dos casos. Otro aspecto que resalta es el uso de los paréntesis para la primera expresión de la izquierda, mientras que no se utilizan para la segunda. Al parecer los niños distinguen la precedencia de las operaciones.

5.6 Análisis Realizados por los Maestros en Formación

En esta sección se mostrarán los análisis epistémico-cognitivos que los maestros en formación realizaron de las tareas resueltas por los escolares. Los análisis realizados se hicieron durante una reunión de trabajo sostenida al final del cuatrimestre; las transcripciones muestran las opiniones de los estudiantes que fueron extraídas del audio de dicha reunión y de las notas de campo del investigador. Las transcripciones revelan los análisis hechos por los maestros, los cuales muestran diversas concepciones y pretenden dar una visión en conjunto de las mismas. Se informa sobres sesiones de discusión sostenidas con maestros de grupos diferentes sobre la misma tarea; esto nos permitirá contrastar las opiniones de los maestros.

En razón a la dificultad para convocar a los maestros para sostener entrevistas y debido tanto al escaso tiempo que disponían para dedicar a actividades diferentes a la asesoría como al carácter voluntario de su participación en la misma, no fue posible sostener ni un número mayor de sesiones ni prolongar las mismas por más de treinta o cuarenta minutos. Tal vez por esto se podría echar en falta algunas preguntas y algunas consideraciones. En tal sentido el análisis epistémico realizado a priori por el investigador para orientar las preguntas a los maestros en formación, no fue usado en algunas de sus dimensiones. En lo que sigue se exhibirán los análisis epistémico-cognitivos que cuatro grupos de maestros en formación realizaron sobre las tareas presentadas en la sección anterior y cuyos análisis epistémicos fueron realizados en la sección 5.4 -Análisis Epistémico de Objetos y Significados-.

En las subsecciones siguientes, se exhibirá la tarea y posteriormente las discusiones sostenidas con los maestros en formación. Se aplicó el método de entrevista semiestructurada. Los estudiantes son identificados con la letra E seguida de un número; el investigador se identifica con la letra I. Si bien sólo se consignan las intervenciones de catorce estudiantes, en las entrevistas participaron más estudiantes; sin embargo, no todos intervinieron en las discusiones.

5.6.1 Tarea de Sombrillas y Gorras

A continuación, presentamos los análisis cognitivos que los maestros en formación hicieron de tres soluciones dadas a la tarea de sombrillas y gorras, por niños de escuela elemental. Las soluciones sometidas a discusión son de carácter "algebraico" o "aritmético" y se les propuso de un tipo o de otro en función de la dinámica de la entrevista. Los estudiantes serán nombrados como E1, E2, etc., y el investigador será nombrado como I. La nomenclatura para referir a los maestros en formación es coherente en toda la memoria de tesis doctoral.

5.6.1.1 Grupo G1

Se presenta a los maestros la solución numérica que se muestra en la Figura 5.14[1] dada por uno de los niños a la tarea de sombrillas y gorras.

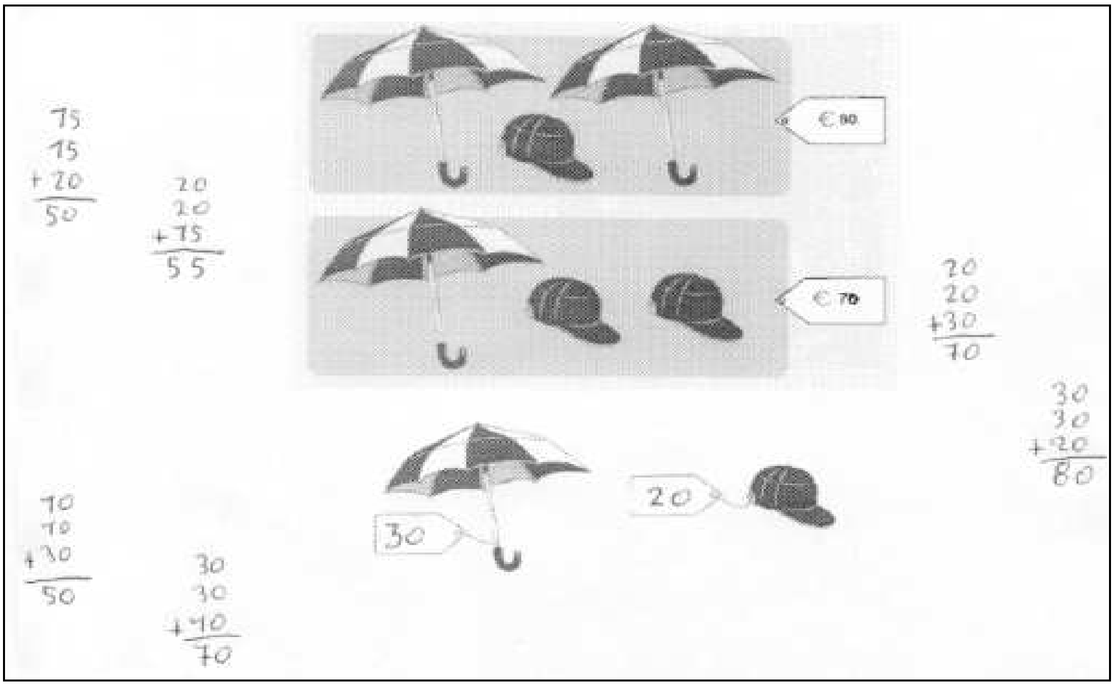


Figura 5.14. Solución Numérica a la Tarea de Sombrillas y Gorras.

[1] Se ha repetido la Figura 5.6 para facilitar la lectura.

El maestro en formación verifica que la tarea ha sido correctamente resuelta y el investigador le hace la siguiente pregunta:

I: ¿Cómo resolverías el ejercicio?

El maestro en formación da una explicación verbal y se le pide que escriba. El escrito realizado por el maestro se muestra en la Figura 5.15.

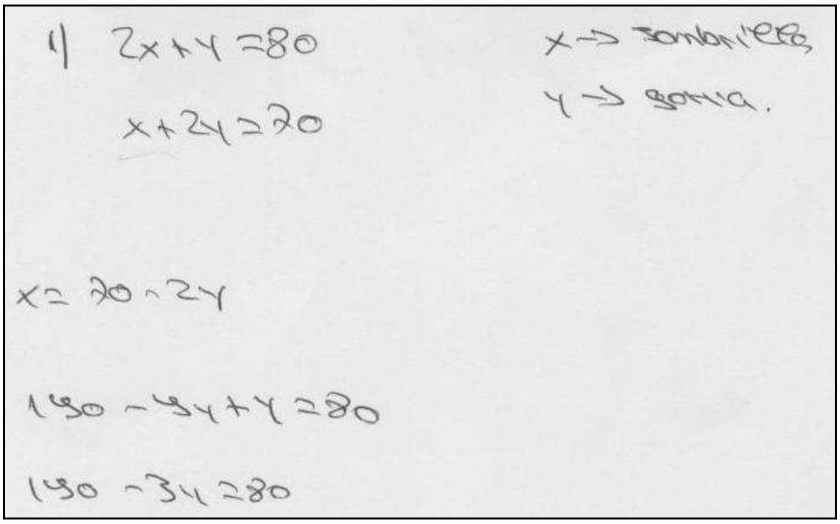


Figura 5.15. Solución Algebraica Dada por E1 a la Tarea de Sombrillas y Gorras.

Continúa la entrevista entre el Investigador y E1:

I: ¿Las respuestas que el niño dio son correctas?
E1: Si.
I: ¿Cómo crees que el estudiante resolvió el ejercicio si no ha escrito nada en el folio?
E1: Pues… cuadra los precios.
I: ¿Qué significa “cuadra los precios”?
E1: Pues que si tu le pones a la sombrilla 30€ y sumas esto con esto [señala a sombrillas y gorras en la primer viñeta] y a cada gorra le das 20€ y sumas, te da lo que aquí [señala los resultados, 80 y 70]. El niño lo hizo probando valores.

El estudiante identifica que la estrategia de solución usada por el niño fue la de ensayo y error. Nótese que el estudiante utilizó una estrategia algebraica para resolver la tarea, si bien no la concluyó. El estudiante parece que se siente cómodo al escribir las ecuaciones y al verificar que la respuesta dada por el niño es correcta.

A continuación se interroga al estudiante sobre la validez de la respuesta dada por el niño.

I: ¿Consideras que la estrategia de solución [dada por el niño] del problema es válida?

E1: Si, es válida.

I: Pero usaste una estrategia algebraica, escribiste las ecuaciones para comprobar.

E1: Si, pues el problema se resuelve más fácil usando ecuaciones, pero si no se pueden usar, entonces usaría ensayar valores hasta que cumpla las condiciones…

El estudiante valora la estrategia algebraica para asegurar la validez de la repuesta del niño, sin embargo acepta que ante la imposibilidad de usar ecuaciones, recurriría a la estrategia de ensayo y error. Al parecer considera dos niveles de validación de la solución: Una formal, mediante el uso de un sistema de ecuaciones, método en el cual confía, y otra informal, mediante el ensayo de valores numéricos.

Interrogado sobre la naturaleza algebraica de la solución dada por el niño, el estudiante afirma:

E1: hmm… no lo sé… el problema es de álgebra, pues son dos ecuaciones y dos incógnitas, pero el chaval lo resolvió ensayando valores. El estudiante no uso el álgebra, uso números…supongo que está bien resolverlo así…

El estudiante considera que la tarea es de álgebra, sin embargo valora la solución como numérica dado que no se usaron ni ecuaciones, ni incógnitas. El estudiante no percibe que para resolver la tarea el niño ha tenido que identificar objetos matemáticos y asignar significados que son propios del álgebra. Con el ánimo de confrontar al estudiante, se le mostró una solución en donde un niño utiliza ecuaciones. La solución mostrada al estudiante se ilustra en la Figura 5.16.

Continúa la entrevista entre el Investigador y el E1:

E1: ¿y de que grado es este estudiante?

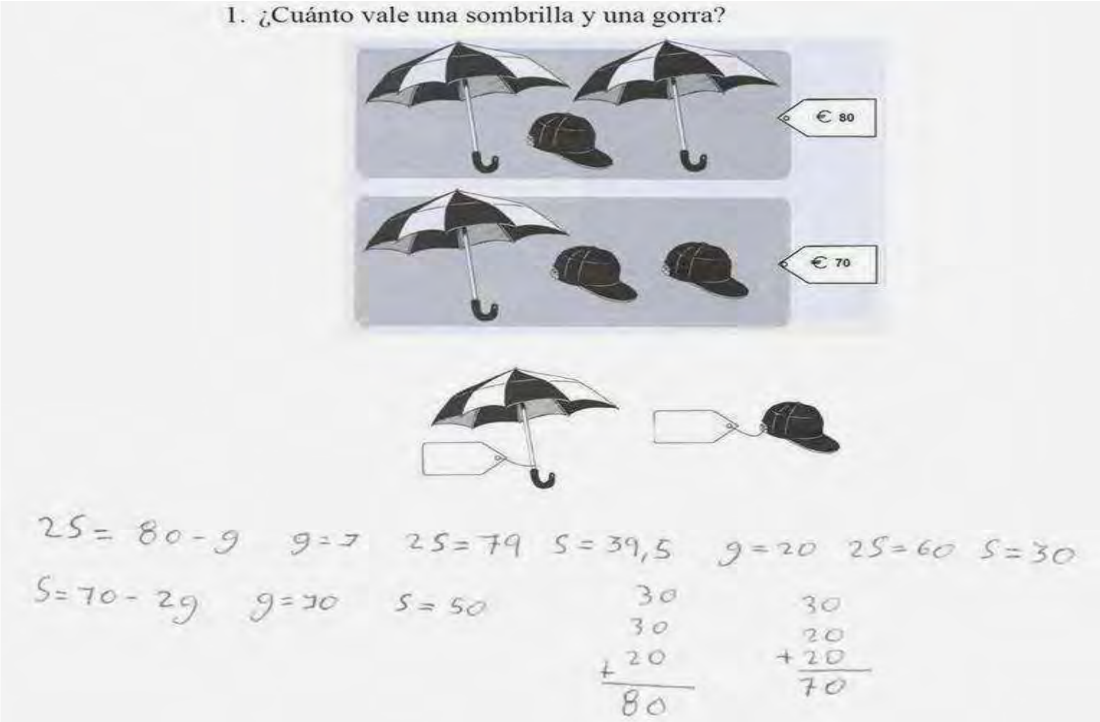
I: De quinto grado.

E1: Sorprendente que escriba ecuaciones…

I: Sin embargo observa que escribió ecuaciones pero utilizó la misma estrategia de solución que el caso anterior. ¿Consideras que este niño utilizó álgebra para resolver el problema?

E1: hmmm… yo diría que sí, pues usó ecuaciones, un sistema de ecuaciones, ¿sabes? Pero como no sabe resolverlas ensayo valores… el chaval es muy bueno… ¡que niño!

El estudiante considera que tanto el uso de ecuaciones como de incógnitas caracteriza al razonamiento algebraico elemental. No considera, por ejemplo, que para asignar números a sombrillas y gorras, el niño ha tenido que conceder el significado de incógnita a las viñetas que representan sombrillas y gorras; ha representado tales objetos pictóricos en términos de valores desconocidos, además ha interpretado el conjunto de viñetas y precio, como una ecuación que debía ser resuelta por dos valores numéricos.



Transcripción:

2s = 80-g g=1 2s=79 s=39,5   g=20 2s=60 s=30

s= 10-2g g=10 s=50   30+30+30=60   30+20+20=70

Figura 5.16. Solución Algebraica y Numérica a la Tarea de Sombrillas y Gorras.

Esto se ratifica, cuando en la segunda solución que se muestra en la Figura 5.16, afirma que el estudiante utilizó álgebra para resolverlo por el uso de ecuaciones en la representación de la tarea. Hallazgos análogos han sido reportados por Espinosa (2004).

5.6.1.2 Grupo G5

Se presenta a los maestros la tarea resuelta por los niños y se les da un folio para que escriban. El investigador continúa con el cuestionamiento:

I: ¿Cómo resolverían ustedes este ejercicio?

La solución dada por el E2 se muestra en la Figura 5.17.

$$\begin{cases} 2x + y = 80 \\ x + 2y = 70 \end{cases} \qquad \boxed{y = 80 - 2x}$$

Figura 5.17. Solución Algebraica Dada por E2 a la Tarea de Sombrillas y Gorras.

Continúa la entrevista entre el Investigador y E2:

E2: Con una ecuación sería, ¿no?

I: ¿La equis que representa?

E2: El paraguas

I: ¿El "3*x*" de donde lo obtienes?, ¿Hay un paso intermedio?

E2: Sí claro, pero me lo he saltado un poco.

Kücheman (1981) reporta que la expresión ($2m + 5b + m$) es interpretada por los niños como una abreviación que denota 2 manzanas y cinco bananas y otra manzana; evidencia que m y b se interpretan como manzanas y bananas más que como número de manzanas y número de bananas respectivamente. Se observa que el maestro interpreta "*x*" como el objeto *paraguas* en el mismo sentido reportado por Kücheman (1981).

El maestro en formación completa la solución y escribe los pasos intermedios que había omitido inicialmente, los cuales se muestran en la Figura 5.18.

$$x + 2(80 - 2x) = 70$$
$$x + 160 - 4x = 70$$
$$3x = 160 - 70 = 90$$
$$x = 30$$
$$\boxed{y = 20}$$

Figura 5.18. Continuación Solución Algebraica Dada por E2 a la Tarea de Sombrillas y Gorras.

Se observa que el estudiante exhibe dominio de los procedimientos algebraicos. Se continúa con el cuestionamiento:

I: ¿Esto que significa, x=30?

E2: Que el paraguas vale 30

I: ¿Y la gorra cuánto vale?

E2: y la gorra serían 20

La identificación de la incógnita como un "objeto" en el sentido de Kücheman (1981) parece no afectar al proceso de solución de la tarea, cuya respuesta se da en términos del costo de una sombrilla y de una gorra.

Se les muestra la solución exhibida en la Figura 5.14.

I: ¿Cómo creen ustedes que obtuvo la respuesta? ¿Qué procedimiento utilizó?

E2: Ir probando, bueno a lo mejor dice vamos a ponerle un precio, 20 al paraguas, 20 y 20 y 40 y la gorra otros 40, o [señala la ecuación x + 2y=70 y señala la viñeta que corresponde a esta ecuación], 30, 30 y 30, 60 la gorra, 60, 20 y 20, 40 y 30 y 70…también podría ser… cuando miré pensé… y ¿Cómo lo hace?

El estudiante conjetura sobre el uso del método de ensayo y error por parte del niño; sin embargo, señala las ecuaciones que ha escrito mientras justifica la sustitución numérica de valores. En este sentido parece argumentar como el estudiante identificado como E1 lo hizo, en la sección anterior. Ambos estudiantes aceptan el ensayo de diversos valores numéricos que satisfacen el sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas que ellos han propuesto, sin hacer referencia explicita a las viñetas. Han basado su argumentación en una representación algebraica de la tarea.

Al parecer se sienten cómodos al argumentar con base en el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas; en tal sentido los maestros en formación operan desde conocimientos matemáticos formalizados, y al parecer, aplican tales conocimientos para valorar el desempeño matemático de los niños, que ciertamente pueden estar exhibiendo competencias algebraicas: Simbolización, razonar acerca de relaciones, resolución de ecuaciones. Hallazgos en este sentido, son reportados por McGowen y Davis (2001).

Hay fuertes indicios que el conocimiento específico del contenido y las creencias de los maestros influencian su enseñanza (Calderhead, 1996; Carpenter, Fennema, Peterson y Carey, 1988; Fennema y Loef, 1992; Shulman, 1986; Thompson, 1992)

A continuación se aborda el aspecto didáctico:

I: ¿Cómo le explicarías este problema a un estudiante que no lo ha podido hacer?

E2: Probando valores

I: ¿Cómo probando valores?

E2: Dando valores como hice antes, así lo entiende.

I: ¿Dando valores a que?

E2: A *x* y a *y*

I: ¿Dirías que el niño resolvió un problema algebraico, a pesar que use números y no use ecuaciones, como tu lo hiciste?

E2: hmm, el niño resolvió un problema de álgebra pero usando valores, probando números…sí, diría que si resolvió un problema de álgebra, sólo que usó otra forma…

Conviene llamar la atención sobre tres aspectos, el primero es la mención que el estudiante hace de "probar" valores en referencia a la asignación de reemplazar números en las incógnitas *x* y *y*, y que no hace referencia a dar precios para las sombrillas y las gorras.

El segundo es que el estudiante hace referencia a reemplazar los números en las ecuaciones planteadas por él, sin hacer mención ni a las viñetas dadas en la tarea, ni a las consignas propuestas. Basa su argumentación en la representación algebraica que dió a la tarea.

El tercero es que E2, a diferencia del estudiante identificado como E1, concede que el niño resolvió la tarea algebraica a pesar que ni usó las ecuaciones ni hizo explicito el reconocimiento de incógnitas.

5.6.1.3 Grupo G3

Se mostró la solución exhibida en la Figura 5.14.

I: La solución que los chicos dieron a este problema se muestra aquí… [se les muestra la solución] como pueden ver no hay operaciones… sólo la respuesta… ¿consideran que la respuesta dada es correcta?

E3: Podría ser…

I: Porqué "podría ser"…

E3: 20 y 20 y 40 y 30 y 70…

I: ¿Cómo creen que el estudiante resolvió el ejercicio?

E3: Con una regla, ¿no?... dos equis…

Se aprecia que el método de solución escogido espontáneamente por la estudiante E3 es algebraico. Además expresa que ese es el método usado por el niño.

A continuación se le entrega un folio a la estudiante E3 para que escribiera allí su estrategia de solución. Lo que la estudiante escribe se muestra en la Figura 5.19.

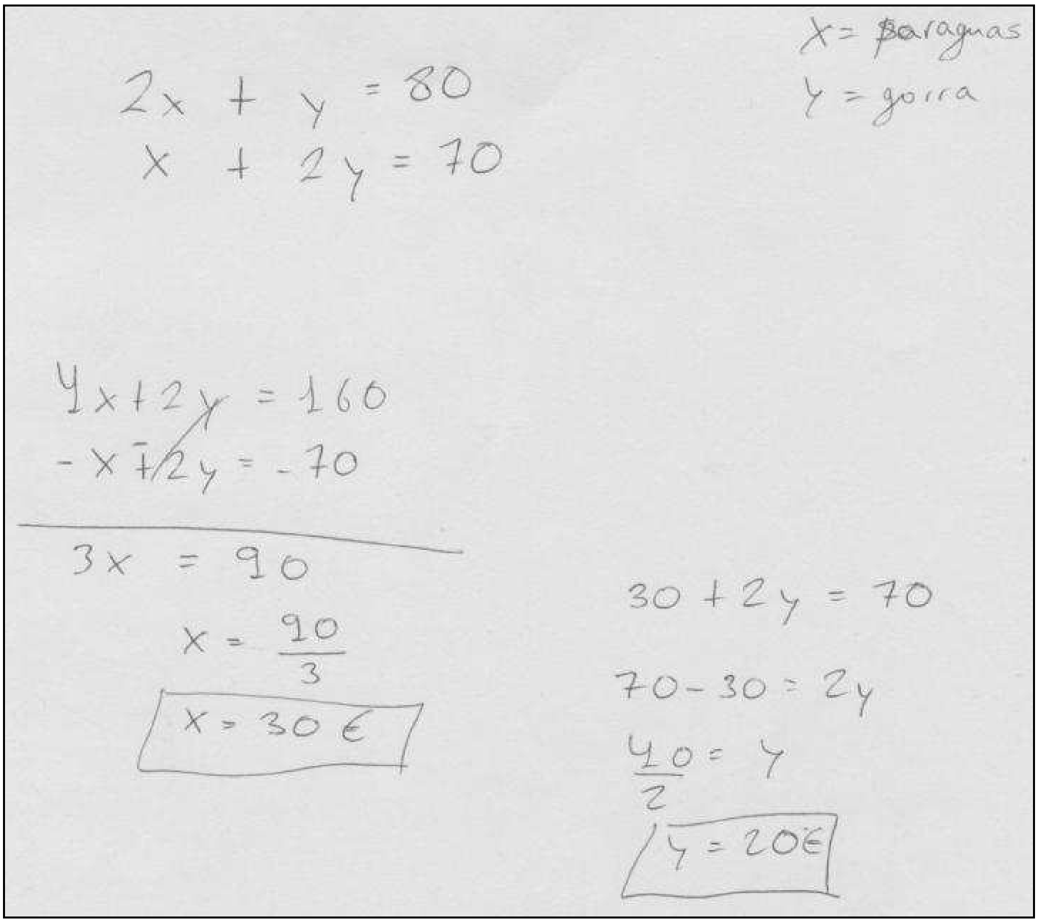


Figura 5.19. Solución Algebraica Dada por E3 a la Tarea de Sombrillas y Gorras.

El investigador cuestiona a los maestros:

I: Lee en voz alta lo que la estudiante escribió: Dos equis más *y* igual a 80; equis más *y* igual a 70.

I: ¿Y que representa *x* y *y*?

E3: La equis representa a sombrillas y la *y* representa a gorra.

I: ¿Y cómo resolvemos ese problema?

E3: Por dos incógnitas…

E3: ¿Esto lo han dado en clase: igualación, sustitución… [Inaudible]?

I: No… ahora, ¿Cómo lo resolverían ustedes?

Nótese como la referencia a las incógnitas como objetos, en el sentido señalado por Kücheman (1981) se presenta también es este grupo tal como en el grupo del apartado 5.6.1.1. -Grupo G1-.

La estudiante inquiere si los niños conocen los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones de dos ecuaciones por dos incógnitas. Si bien la pregunta no deja de ser extraña en tanto que la estudiante sabe que en la primaria no se enseña álgebra, también es cierto que podría ser evidencia de la creencia mantenida por la estudiante que un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas sólo puede resolverse mediante métodos algebraicos.

La estudiante procede a resolver la tarea cuya solución se muestra en la Figura 5.19.

> E3: Ya está…*y* vale 20 y *x* vale 30.
>
> I: ¿Qué hizo el niño?
>
> E3: Como no sabe ecuaciones lo resuelve ensayando valores… eso está bien, ¿no?

La estudiante hace referencia a la solución de la tarea sin retomar el significado asociado a las incógnitas: sombrillas y gorras.

Interrogados sobre la naturaleza algebraica de la tarea, afirman:

> I: ¿Podemos decir que el estudiante resolvió un problema algebraico?
>
> E3: hmm… no sé…, sí, creo que sí, resolvió un problema de ecuaciones probando números, usando una estrategia de ensayo de valores. Pero el chaval no sabe álgebra, pero es muy listo…

La estudiante reconoce que el niño resolvió una tarea de álgebra mediante una estrategia numérica. Sin embargo, afirma que "no sabe álgebra"; parece que la estudiante valora el álgebra de la escuela primaria usando los mismos criterios que usa para valorar el álgebra de la escuela secundaria, esto es, en términos de procedimientos simbólicos. Al parecer no reconoce que cuando el niño resuelve una tarea de álgebra mediante una estrategia numérica, ha reconocido objetos matemáticos básicos, característicos del álgebra, y que ha efectuado una asignación de significados que le ha permitido reemplazar valores numéricos en ambas ecuaciones.

El conjunto de conceptos matemáticos y operaciones que se ponen de manifiesto en la estrategia de ensayo y error sólo es posible cuando objetos y significados matemáticos propios del álgebra han sido puestos al servicio de la aparentemente inocua acción de reemplazar números.

5.6.2 Tarea de las Edades

En esta sección se exhibirá el análisis epistémico-cognitivo que cada uno de tres grupos de maestros en formación realizaron sobre la tarea de comparación de las edades.

5.6.2.1 Grupo G1

Se les da el enunciado de la tarea. Los maestros en formación lo leen y lo resuelven mentalmente.

> I: Aquí tenemos la solución dada al problema de las edades. ¿Qué interpretación le podemos dar a esta solución? ¿Qué significado tienen los signos más y los signos menos, por ejemplo?
>
> E1: Este [señalando la viñeta que representa a Pablo] es el que tiene menos edad y este [señalando la viñeta que representa a Pedro] más que el anterior, y este [señalando la viñeta que representa a Antonio] más que los dos anteriores.
>
> I: Este signo más que está encima de [la viñeta] Antonio, representa…
>
> E1: El más viejo, el de mayor edad
>
> I: ¿Y este más? [Señala el signo más encima de la viñeta que representa a Pedro]
>
> E1: Que es más viejo que el anterior que es Pablo

El estudiante identifica el significado que el niño concede a los signos más, y hace manifiesta la comprensión de la "regla de los signos" que surge en la resolución de la tarea. Para Carraher y Schliemann (2007), "*la competencia en álgebra requiere una habilidad para derivar inferencias válidas y útiles a partir de formas escritas y de su estructura subyacente*", (p. 674), en este sentido la identificación de objetos y significados realizada por el estudiante se enmarca en una visión ampliada del álgebra escolar.

Interrogado sobre la naturaleza algebraica de la tarea, el estudiante afirma:

> E1: Las incógnitas no te ayudan a resolver el problema, pero tampoco… tu sabes que la edad no se conoce pero tampoco es algo que te ayude a resolver el problema, lo que en verdad importa es la relación que hay entre los personajes, ¿no?
>
> I: ¿Pero consideras que el problema es de razonamiento algebraico elemental?
>
> E1: Los problemas de álgebra es cuando tienes una incógnita para calcular algo, pero aquí… aquí es verdad que es una incógnita…

Al parecer el estudiante, con base en su experiencia con el álgebra de la escuela secundaria, considera que las actividades que usan tanto expresiones algebraicas como operaciones, son propias del razonamiento algebraico elemental. Este grupo de estudiantes exhiben cierta preferencia por las actividades algebraicas que enfatizan el razonamiento simbólico. Este hallazgo también fue identificado por Nathan y Koedinger (2000), quienes informan que los maestros de secundaria sostienen la precedencia del razonamiento simbólico sobre el razonamiento verbal.

5.6.2.2 Grupo G5

Se entrega la solución que aparece en la Figura 5.7. El investigador continúa con el cuestionamiento:

I: La niña da esta respuesta y ofrece estos dibujos. Por favor, resuélvanlo para ver si la solución dada por la niña es correcta.

I: ¿Cómo lo resuelven ustedes?

E2: Igual que está resuelto aquí.

I: Estas rayas que unen a Pedro con Antonio, y a Pablo con Pedro, ¿Qué significan?

E2: Pedro es más mayor que Pablo, que es más joven; por eso aquí ponemos más y un menos, luego pedro es más viejo que Pablo, Pablo es más joven que Antonio, entonces Pablo también es más joven que Antonio y Antonio a su vez es Antonio más viejo que Pedro.

I: Entonces, estas rayas significan que se está relacionando y ¿este signo más?

E2: Quiere decir eso, joven y viejo.

I: ¿Ustedes ven algo más en la solución, ven más símbolos, algo más que podamos interpretar?

E2: Al ver que aquí es más y aquí es más, pues es el más mayor [El estudiante señala lo símbolos + y + que están arriba y debajo de la viñeta que representa a Antonio]. Luego al ver que aquí es más y aquí es menos porque es el mediano digamos, y aquí son los menos [Señala la viñeta que corresponde a Pablo].

Los estudiantes han asignado un significado plausible a los signos “+” y “-” usados por los niños.

I: ¿Ustedes creen que este dibujo, esta representación de [la solución] del problema lo podría uno defender ante un colega maestro de primaria como que representa una solución algebraica o que pone en juego elementos de álgebra?

E2: Yo no sé que decirte sinceramente; a lo mejor por la relación de signos… es que no lo sé.

Los maestros se muestran indecisos frente al carácter algebraico de la representación de la tarea. Desde la concepción institucional dominante del álgebra de la secundaria es difícil valorar la solución de la tarea anterior como “algebraica”, sin embargo desde una visión ampliada del álgebra, es posible identificar algunos elementos matemáticos que aparecen en la estrategia de solución dada por el niño, como algebraicos en naturaleza.

5.6.2.3 Grupo G4

Los maestros en formación al ser interrogados sobre la naturaleza algebraica de la tarea, éstos se muestran indecisos. El investigador continúa con el cuestionamiento:

I: ¿Es de razonamiento algebraico elemental?

E4: hmmm…creo que no, pues no hay números aunque si hay variables

E5: Tiene que asignar variable, por ejemplo *x* es pedro?

I: ¿x es pedro?

E5: Si *x* es Pedro

E6: *x* es la edad de Pedro o que es más viejo o joven.

Los estudiantes valoran la naturaleza algebraica de la tarea en función del concepto de "variable", que es asociado por los maestros en formación con valores desconocidos en la tarea. Kücheman (1981) establece la diferencia entre incógnitas y variables; para este autor una incógnita es una letra cuyo valor numérico puede ser determinado, mientras que una variable se ve como "*letra que representa un rango de valores no especificados, y como una relación sistemática entre tales valores*" (Kücheman, 1981; p. 104).

A continuación, se les pide a los maestros que resuelvan la tarea y que den respuesta a la pregunta. Los maestros utilizan un procedimiento pictórico ilustrado en la Figura 5.20; leen las condiciones, dibujan viñetas y asignan nombres a cada gráfica que representa a un hombre, que han dibujado más grandes o más pequeñas en función de las condiciones de la tarea. Finalmente, fijan la edad de Pedro y la de Antonio y ponen a Pablo en la mitad. Los maestros están de acuerdo con los niños tanto con el procedimiento usado, como con la respuesta dada.

A continuación se les muestra a los estudiantes la solución dada por un niño que se exhibe en la Figura 5.20 y se les interroga acerca de la solución:

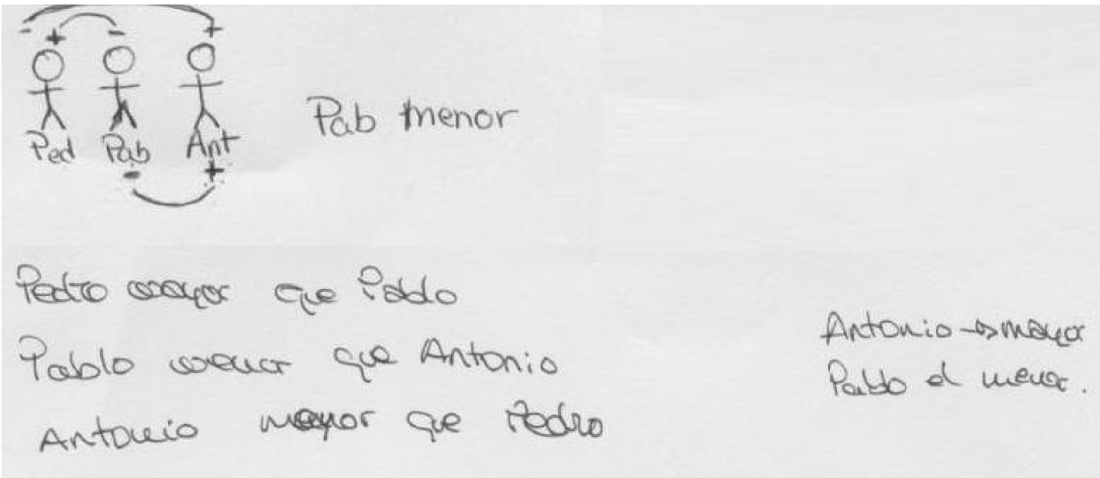
I: Pero los niños han ofrecido una solución que representan de esta manera, ¿Cómo la interpretan? ¿Qué han hecho los niños?

E6: Pues han escrito el problema de otra manera…

I: Y que significan las líneas en forma de arco que unen a las figuras? Y ¿esos signos más y menos que escriben allí?

E6: Esos arcos son las relaciones… las comparaciones que hacen cuando leen el problema.

E7: Y los signos más y menos significan mayor o menor, mire aquí [señalando las respuestas], el que tiene los dos signos más es el mayor en ambos casos, el que tiene el signo más y uno menos, que es mayor y menor, el que tiene la edad intermedio, y el que tiene los dos signos menos es que es mayor en los dos casos.



Transcripción:

Pedro mayor que Pablo

Pablo menor que Antonio

Antonio mayor que Pedro

Antonio ⟶ mayor

Pablo el menor

Figura 5.20. Solución Dada por G4 a la Tarea de las Edades.

La lectura de la solución hecha por el estudiante, logra identificar el significado asignado por el niño a los signos *más* y *menos*, que no son usados para representar operaciones sino para representar “más edad” y “menor edad”, respectivamente.

Interrogados nuevamente sobre el carácter algebraico de la tarea, los estudiantes afirman:

E5: Si, pues tienen que analizar condiciones, escribirlas y deben dar la razón de su respuesta
E4: Si, el ejercicio no tiene números pero tienen que analizar y pensar como resolverlo…

Sin embargo, durante la entrevista no se menciona ninguno de los elementos considerados en la aproximación del razonamiento algebraico elemental, presentados en la sección 3.2.1.6 -La Aproximación al RAE desde el EOS- del tercer capítulo y que les fue entregado al inicio de la asesoría, que considera algunas características del razonamiento algebraico elemental, propuestas por Burkhardt (2001) y Kaput (1998). Tampoco mencionan características que podrían ser usadas para identificar el carácter algebraico de las tareas matemáticas propuestas.

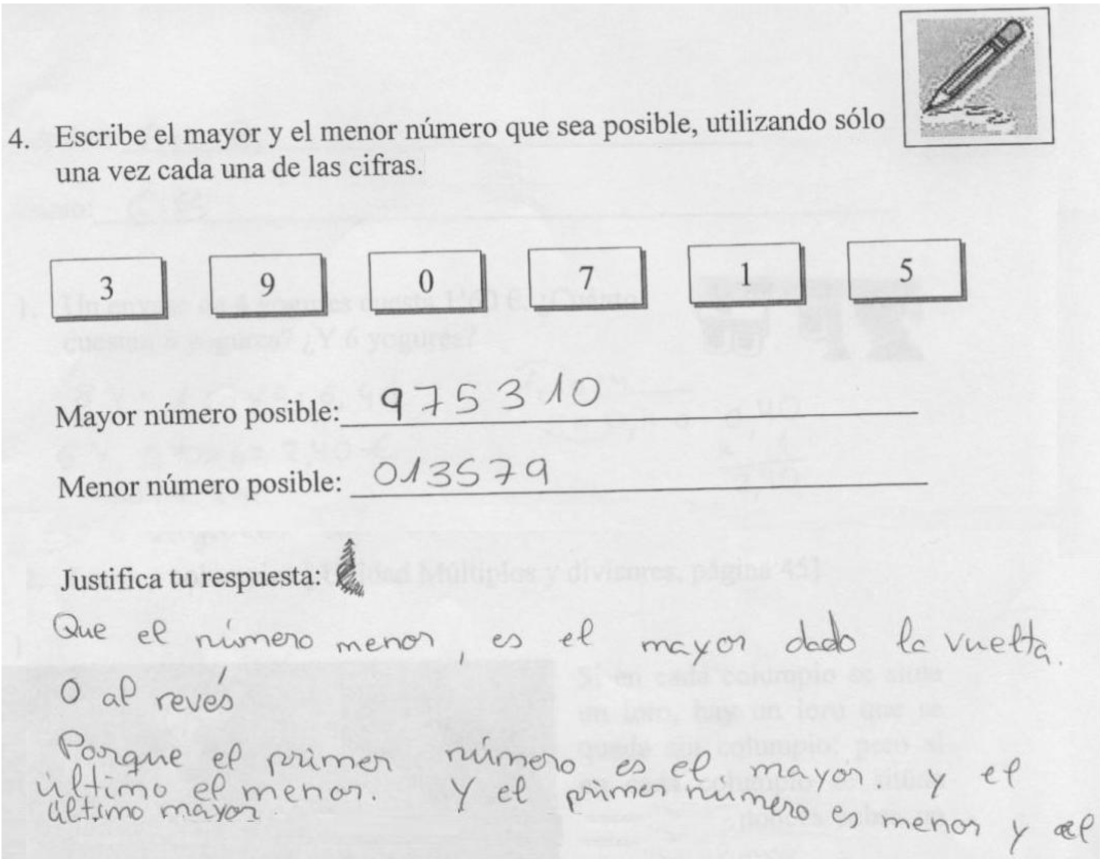
Las justificaciones dadas por los maestros se aplican casi a cualquier tarea de matemáticas escolares. Sin embargo se podría resaltar la identificación que hacen de un valor desconocido como una incógnita. Al parecer asocian el álgebra con conceptos tales como incógnita y variable; adicionalmente equiparan el álgebra con el razonamiento algebraico elemental.

5.6.3 Tarea del Número Mayor

En esta sección se exhibirá el análisis epistémico-cognitivo que cada uno de tres grupos de maestros en formación realizaron sobre la tarea del número mayor.

5.6.3.1 Grupo G1

Se presenta a los maestros de G1 la solución dada por el niño uno (ver Figura 5.21) a la tarea del número mayor, luego se interroga al grupo.


4. Escribe el mayor y el menor número que sea posible, utilizando sólo una vez cada una de las cifras.

3	9	0	7	1	5

Mayor número posible: 975310

Menor número posible: 013579

Justifica tu respuesta:

Que el número menor, es el mayor dado la vuelta. O al revés

Porque el primer número es el mayor. Y el último el menor. Y el primer número es menor y el último mayor

Transcripción:

Que el número menor, es el mayor dado la vuelta o al revés.
Porque el primer número es el mayor y el último el menor y el primer número es menor y el último mayor.

Figura 5.21. Solución Dada por el Niño Uno a la Tarea del Número Mayor.

I: ¿A que se refiere la estudiante con esa respuesta?

E1: Aquí para obtener el número mayor ha mirado la cifra más grande y la ha colocado en el primer lugar, después el segundo más grande y así… nueve es el mayor y cero es el menor, entonces los ha colocado de primero el nueve y cero de último.

El estudiante no ha dudado y ha dado la solución a la tarea.

> I: La regla que la estudiante ha dado allí… para este caso particular ¿Funciona o sirve para todos los casos? Si me dan un número arbitrario y la misma pregunta ¿Esta misma regla sirve?
> E1: Claro.
> I: ¿Y como justifica?
> E1: Ella [la niña] que, aunque en teoría las posiciones en las dos cintas valen lo mismo pero la cifra que ocupa cada posición es diferente, entonces tu sabes, por ejemplo, esta posición es de… todo lo que va aquí va multiplicado por 10000 entonces como tienes que buscar el número mas grande y esta es la posición más grande de la cifra, entonces pones el nueve.

El estudiante exhibe comprensión del conocimiento matemático y reparafrasea la solución dada por la niña; solución que valora como válida.

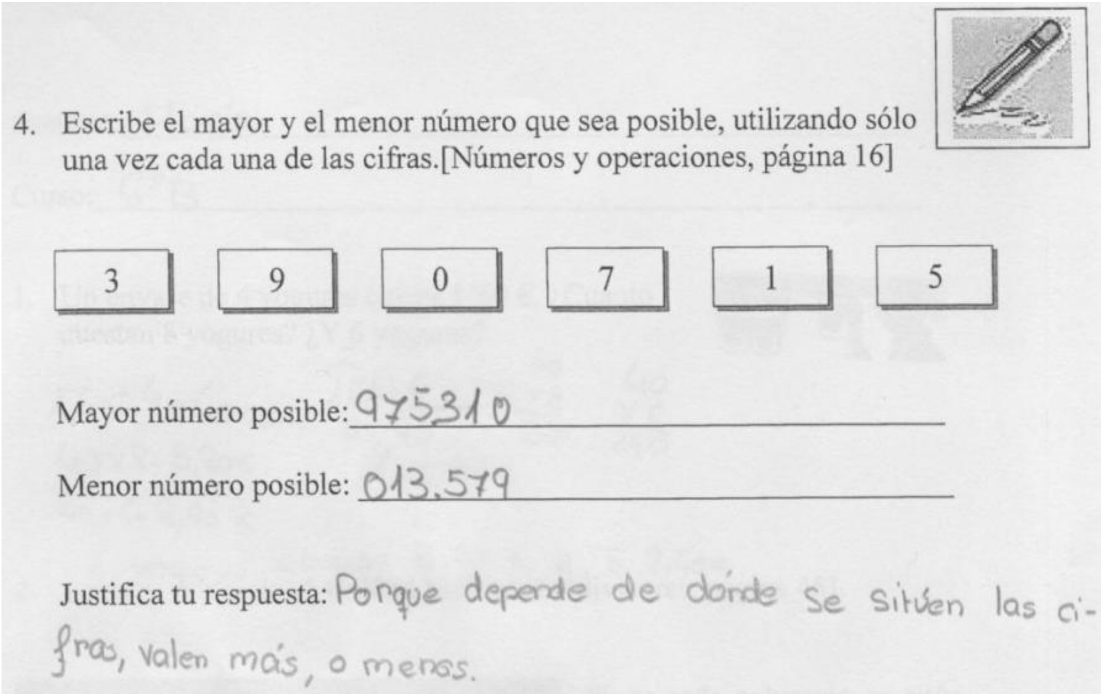
> I: ¿Cuál es el conocimiento matemático que ella exhibe allí? ¿Un conocimiento que si no se tuviera la niña no podría resolver el ejercicio?
> E1: Yo creo que el concepto que tiene… el concepto de sistema posicional, que el valor de cada cifra depende de la posición que ocupa y además del valor de esa cifra.

El maestro identifica el conocimiento matemático fundamental que permite resolver la tarea tanto en el caso particular como en el caso general. Carraher, Martinez y Schlieman (2008) consideran que la generalización en la educación elemental tiene dos aspectos: El matemático, donde se enfatiza el contenido matemático y la validación de la regla y el didáctico, donde no "*se puede ignorar el mundo sicológico del aprendiz*", (p. 3). La conjunción de estos dos aspectos muestra la complejidad del estudio de la generalización en la escuela primaria y el reto que su reconocimiento y su promoción presenta a los futuros maestros.

Existe cierto consenso entre diversos trabajos de investigación (Mason, 1996; Carraher, Martinez y Schliemann, 2008) para destacar la generalización como un proceso clave de la actividad algebraica. Para las situaciones que requieren la generalización se utiliza una forma analítica de expresión característica y eficaz, usualmente alfanumérica.

5.6.3.2 Grupo G5

Se interroga a los estudiantes de G5 acerca de la validez de la solución dada por el niño dos. Se les muestra su solución, la cual se exhibe en la Figura 5.22.


4. Escribe el mayor y el menor número que sea posible, utilizando sólo una vez cada una de las cifras.[Números y operaciones, página 16]

3	9	0	7	1	5

Mayor número posible: 975310

Menor número posible: 013.579

Justifica tu respuesta: Porque depende de dónde se sitúen las ci-fras, valen más, o menos.

Transcripción:

Porque depende de dónde se sitúen las cifras, valen más, o menos.

Figura 5.22. Solución Dada por el Niño Dos a la Tarea del Número Mayor.

Se interroga al grupo sobre la solución:

I: ¿Creen que la respuesta es correcta?

E2 y E9: Si, pues pone las centenas de millar.

I: La estudiante escribe: Depende de donde se sitúen las cifras, valen más o valen menos. ¿Se hace evidente el tipo de conocimiento que la estudiante está usando para justificar?

E2: Por lo mismo, pues hace lo de las decenas, las centenas…el sistema decimal.

En tanto que no se logra que los estudiantes señalen explícitamente el conocimiento que está en la base de la solución de la tarea por lo cual no es posible establecer un diálogo sobre los objetos y significados, se les muestra la solución exhibida en la Figura 5.21.

Los maestros leen la solución.

E2: Este número [Señalando al menor] es este [Señalando al mayor] al revés. De hecho lo que yo he hecho para ver si lo tenía bien fue mirar el número mayor y mirar el número menor.

I: Y ¿Esta regla siempre funciona? Si tengo que escribir el número menor, usando las mismas cifras que usé para escribir el número mayor, ¿Puedo seguir esta regla de invertir?

E2: Sí, es natural.

I: ¿Y porqué funciona?

E2: [Inaudible]…por las unidades y decenas

Ahora se interroga sobre la naturaleza algebraica de la tarea.

I: ¿Ustedes consideran que este ejercicio podría ser de razonamiento algebraico elemental?

E2: Asiente con la cabeza.

I: ¿Y cual es la razón?, Aquí no tenemos ecuaciones ni incógnitas.

E2: Pero bueno, tienen que buscar un patrón para poder… una regla que sirva siempre.

El maestro considera que el hallazgo de una regla para resolver este tipo de tareas, y que sea general (que sirva siempre) la califica como de razonamiento algebraico elemental. Se podría pensar que el maestro valora la tarea como de razonamiento algebraico elemental porque cree que el investigador espera una tal respuesta, sin embargo, la justificación que da posteriormente disipa cualquier duda respecto a la sinceridad de su valoración.

5.6.3.3 Grupo G3

Se interroga a los estudiantes de G3 en relación con la tarea del número mayor. Se les muestra su solución exhibida en la Figura 5.21.

En el siguiente segmento se exhibe el dialogo sostenido con una estudiante en relación con la tarea:

I: ¿A que se refiere la niña con su respuesta: Dada la vuelta al revés?

E3: Para el número mayor pone el mayor y va en orden decreciente y luego cuando es al revés el menor al revés

E8: En orden creciente, por eso dice que es al revés

I: ¿Cuál creen ustedes que es el conocimiento matemático más importante para resolver el ejercicio?

E3: Decenas, unidades y todo eso…la posición de los números

Las explicaciones dadas por las dos maestras no parecen más elaboradas que la dada por la niña. Tal vez asumen una actitud desenfadada frente a la justificación por encontrarse en una situación en donde el peso de la explicación no recae sobre ellas como docentes.

La siguiente pregunta indaga sobre el carácter algebraico de la tarea.

I: ¿Consideran que el ejercicio es de álgebra?

Las estudiantes no responden. Al parecer la pregunta no tiene mucho sentido para ellas en tanto que la tarea no exhibe las características sobresalientes del álgebra, tales como incógnitas, ecuaciones ni se requiere de procedimientos de despeje o representación mediante ecuaciones.

Stump y Bishop (2002) encontraron que las concepciones algebraicas sostenidas por los maestros en formación son bastante limitadas y describen al álgebra en términos de solución de ecuaciones, del hallazgo de valores desconocidos o como una herramienta para la resolución de tareas.

Ahora se indaga sobre la generalización que podría ser planteada a partir de esta tarea.

> I: ¿Ustedes consideran que la estrategia usada por la niña se puede usar en otros casos, con números más grandes? ¿Es una estrategia que siempre funciona?
> E3: Si
> I: ¿Y por qué funciona siempre?
> E8: Porque lo que la niña uso es el sistema de posición, siempre se tiene que usar para resolver el ejercicio, es lo mismo, sólo cambia el número o el tamaño pero el sistema de posición siempre se usa…que el número tiene un valor dependiendo de donde se ponga.

Las futuras maestras muestran seguridad frente a la identificación del conocimiento matemático que permite resolver este tipo de tareas, y aseguran que el sistema de posición "siempre" se usa. Las futuras maestras han identificado el argumento matemático que puede ser usado para extender la tarea; Harel y Tall (1991) consideran la "generalización" en el sentido de "*aplicar un argumento dado en un contexto más amplio*", (p. 38).

5.6.4 Tarea de las Velas

La solución que se dió a los maestros se muestra en la Figura 5.10.

5.6.4.1 Grupo G5

Se muestra a los estudiantes la solución exhibida en la Figura 5.10 -Estrategia de Resta para la Tarea de las Velas- .

> I: Aquí tenemos el problema y la solución que dió la niña.

Los maestros leen la tarea y hacen cuentas. Se les dió un folio, pero no lo usaron. Se continúa con el cuestionamiento:

E9: ¡Qué cosa más rara!... en verdad tiene lógica, pero…

E9: [Inaudible]… ¿Cuántos días?…divide…36…porque lo de 36 dividido 6 uno lo entiende, pero y ¿ese más uno?

E2: Yo creo que es menos uno, porque lo que tendría que hacer es… como tiene seis velas…

E9: Como dice que con seis velas fabrica una nueva entonces ha puesto uno

Los estudiantes continúan con su diálogo, y tratan de encontrar la solución a la tarea, sin embargo no escriben ningún procedimiento.

I: Traten de resolver el ejercicio siguiendo al estrategia de la niña.

E9: 31 menos 6...son 25 más uno, 26; serían 20 14 15 aquí serían 15 más… [Inaudible]

Los maestros siguen razonando hasta que se ponen de acuerdo en cuanto a la validez de la estrategia e identifican el error de cálculo cometido por la niña. Se muestra a los maestros otra solución a la tarea de las velas, que usa una estrategia de división y que se muestra en la Figura 5.23 (Esta Figura corresponde a la Figura 5.12; pero se repite para facilitar la lectura).

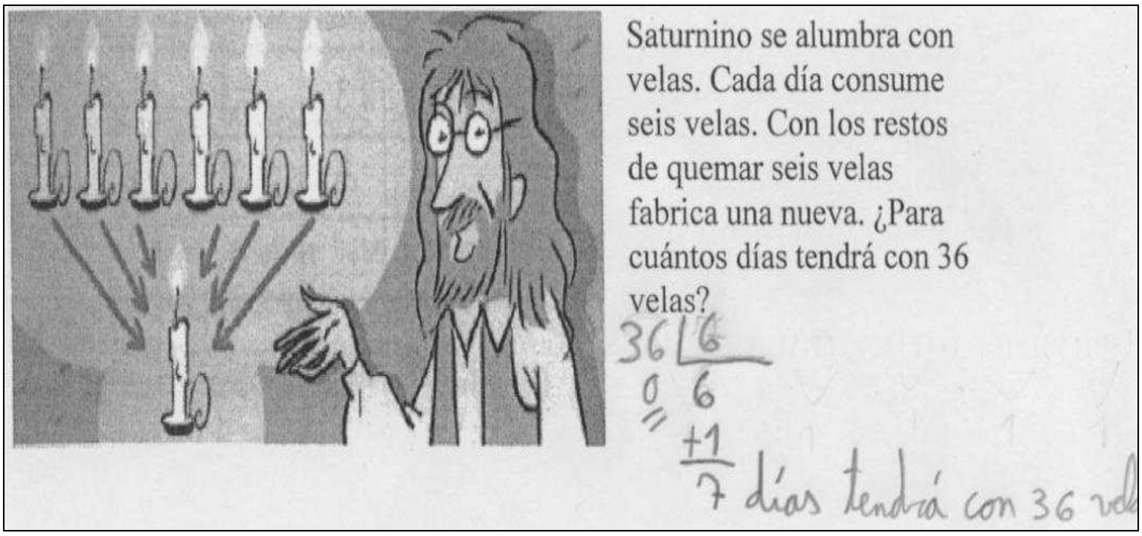


Figura 5.23. Estrategia de División para la Tarea de las Velas.

Se interroga a los estudiantes:

I: Aquí tenemos otra solución al problema de Saturnino. ¿Por qué creen ustedes que este chico utilizó la división y la niña, en el que ya discutimos antes, usó la resta?, ¿Ustedes creen que en el enunciado hay algo que le sugiera debe restar o dividir?

E2: Restando que en el fondo viene a ser una división pero ha tenido en cuenta las velas que salen de cada seis.

Al parecer los maestros no entienden la pregunta, así que se les formula de nuevo.

I: Ustedes cuando vieron el problema usaron la división, ¿Por qué la usaron? ¿Qué les hizo pensar que el problema se resolvía con esta operación?

E2: hmmm, la división es más rápida pues es mas fácil dividir 36 entre seis, es más rápido. Pero restar es más… natural, pues cuando Saturnino usa las velas, las está restando. Creo que la niña usó la resta [pues] cuando se gastan cosas [se] está quitando, está restando, creo que la palabra usar o gastar hizo que ella usara la resta, es como una palabra clave para ella… no lo sé, y sumar el uno, es lo que uno hace, hace una vela con seis [restos de vela] y agrega un día. La niña hizo el problema siguiendo las claves del problema, gastar es restar y construir una vela con restos es lo mismo que tener otra vela y suma esa vela.

I: Y el otro niño escogió la división a pesar que leyó lo mismo que leyó la niña, ¿Qué crees que hizo que ella usara la división?

E2: hmmm… que…[Inaudible] que tiene 36 velas y cada día usa seis, para cuantos días tiene… es un problema de reparto, hacer grupos de seis velas… división…, este niño interpreta los datos, interpreta todo como división…cada uno interpreta los datos según su entender, según lo que saben…

Los maestros reconocen que la asignación de significados específicos a los elementos lingüísticos son determinantes en la elección de las operaciones que los niños preferencian para resolver la tarea. Los términos lingüísticos usados evocan conceptos cuyos significados, propiedades y procedimientos pueden relacionarse argumentativamente de manera compleja y en formas que favorezcan o inhiban la solución de la tarea (Castro y Godino, 2009).

La estructura de la tarea plantea algunos retos interpretativos a los niños, y muestran cómo las estrategias de solución corresponden a configuraciones particulares de las entidades primarias, en donde estas facilitan o complican la representación de la tarea. Los objetos matemáticos en la tarea son los mismos, pero las relaciones entre ellos y los conflictos de significado son diversos para los niños.

5.6.4.2 Grupo G3

Se muestra a los estudiantes la solución exhibida en la Figura 5.10 -Estrategia de Resta para la Tarea de las Velas-, y se les interroga:

I: Tenemos aquí esta solución al problema, ¿Ustedes como lo resolverían?

En la Figura 5.24 se exhibe la solución dada a la tarea de las velas por el grupo de estudiantes.

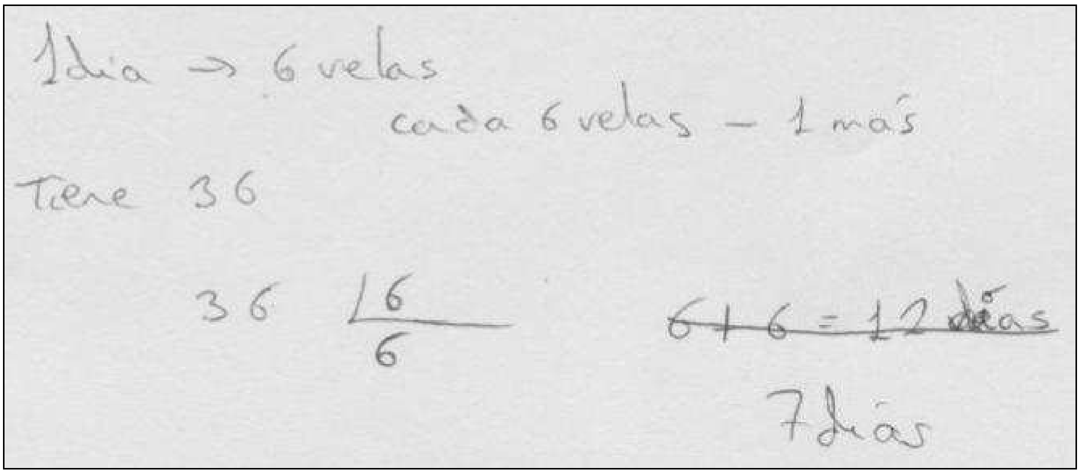

1 día → 6 velas
cada 6 velas – 1 más
Tiene 36
36 |6
6
~~6 + 6 = 12 días~~
7 días

Figura 5.24. Solución Numérica Dada por G3 a la Tarea de las Velas.

En el siguiente segmento los maestros exhiben dificultad para entender la consigna.

I: Ahora estudiemos la solución dada por la niña. ¿Es correcta su solución?

E8: No está mal, a 36 le quita el primer día seis y ella [la niña] después le suma una más que tiene y vuelve a restar treinta y uno menos seis, luego una vela más y así va…

I: La respuesta que da la estudiante es cinco días, ¿es correcto?

Las maestras hacen cálculos mentales.

E3: Pero aquí se ha confundido y ha puesto 15 en lugar de 25.

I: ¿Pero la estrategia está bien? Y ¿el número cinco, que da como respuesta, de donde se obtiene?

La estudiante cuenta el número de operaciones, de restas, que la niña hizo.

E3: Uno, dos,…, cinco, tiene los cinco días.

Las maestras comprenden tanto la estrategia de solución dada por la niña como el error que cometió.

En el siguiente segmento se indaga sobre la naturaleza algebraica de la tarea.

I: ¿Consideran ustedes que este ejercicio es algebraico?, ¿Le ven algo de algebraico a este ejercicio?

E8: No [Tímidamente]

E3: No, no necesita una fórmula para hacerlo, para poder… [Inaudible], ¿es un problema no?

E8: Yo a este [ejercicio] lo veo más de lógica que de otra cosa… no sé, que de álgebra.

Al parecer las maestras asocian el uso de fórmulas para resolver una tarea con el álgebra. La presencia de letras o de una expresión ya hecha (fórmula) parece ser el factor determinante en la valoración algebraica que una tarea puede recibir.

En oposición a esta postura se encuentra la de English y Warren (1995) que considera que los estudiantes no sólo necesita operar entre diversos modos de "*representación y exhibir un conocimiento amplio de conocimiento específico, sino que debe efectuar diversos procesos de razonamiento*" (p. 3). La autora considera que es importante conceder más importancia a otros procesos de razonamiento, entre los que cita al razonamiento espacial, lógico y el analógico.

Interrogada sobre las características sobresalientes de una tarea de lógica, la maestra responde:

> E8: Que no con una fórmula puedas sacar la solución, yo no veo que te haga falta una fórmula para sacarlo [obtener la solución al ejercicio]…si no que tienes que ir restando o dividiendo.
> I: ¿Podría decir que cuando tiene que interpretar un parte de la información, a eso le llamas "lógica"?

La estudiante asiente. La maestra refiere una tarea de "lógica" como aquella en la que se debe efectuar una interpretación de los datos, asignar significados y establecer relaciones, mismas que no se podrían expresar mediante el uso de una expresión que incluya letras (fórmula). La maestra parece que se refiere al razonamiento lógico deductivo, que involucra validar conjeturas y proponer planes de acción. En un sentido más amplio, "*la deducción sirve para desarrollar planes de acción, valorar datos, determinar las consecuencias de las suposiciones y de las hipótesis, y decidir entre ideas semejantes*" (English y Warren, 1995; p. 3).

Es cierto que el "razonamiento lógico" que incorpora la deducción y la inducción puede jugar un papel importante en la resolución de tareas (NCTM, 1989). La inducción involucra proponer conjeturas sobre propiedades numéricas o sobre patrones, mientras que la deducción involucra la formulación de reglas algebraicas y aritméticas.

Se indagó sobre la dificultad de la tarea:

> I: ¿Cuál es la información que dan en el problema que podría ser más difícil para que el niño interprete?
> E8: Con seis velas se fabrica una vela nueva… pues si te dijese que tiene 6 velas bueno en total 36, y cada día se queman seis no tiene dificultad, pero como fabricas una nueva tienes que añadir al conjunto de las seis un día más, cada seis que va consumiendo, es un día más.

La maestra afirma que la segunda condición que se da en la tarea, la que establece la relación entre el número de seis velas y el número de velas que se fabrica a partir de sus sobrantes, como la más difícil. Nótese que esta valoración concuerda con el error que ambas estudiantes cometieron cuando inicialmente leyeron e intentaron resolver la tarea. De esto se da cuenta en la Figura 5.24, en la parte que aparece tachada y que muestra que efectuaron la suma: seis más seis, y dieron 12 días como respuesta a la tarea.

5.6.5 Tarea de Completar la Tabla

A continuación se exhiben los diálogos sostenidos con los estudiantes, en relación con la tarea de completar la tabla.

5.6.5.1 Grupo G1

En lo que sigue se exhiben segmentos del dialogo sostenido con los miembros del grupo G1:

I: ¿Crees que el estudiante desarrolló bien el problema?

E1: Parece que si, ¿no?

I: ¿Qué entiendes por la expresión: Completar la tabla? ¿Qué esperarías que el estudiante haga?

E1: Yo esperaría que aquí pusiese el *resultado*, pero claro también debe justificar de donde salen estos resultados.

I: En el primer caso lo ha hecho bien, ha reemplazado… sin embargo hay dos operaciones que no termina.

E1: Claro, porqué la información es muy larga.

I: Aquí aparece $a+b\times c$ y no aparece el signo igual, básicamente la desarrolla, lo cual no se le pide explícitamente, ¿Por qué crees que la desarrolla?

E1: Si ves una operación con muchos números la haces y das el resultado, pero aquí parece que te has quedado a medias…

El maestro en formación considera, junto con el niño, que las operaciones aritméticas deben ser realizadas; además justifica que el niño no haya realizado dos operaciones en virtud del tamaño de los números.

En el siguiente segmento se indaga sobre la naturaleza algebraica de la tarea.

I: ¿Consideras que este problema es de razonamiento algebraico elemental?

E1: Si

I: ¿Por qué?

E1: Vamos, el estudiante tiene que reemplazar letras por números, trabaja con letras; sabe que las letras pueden ser números. Las letras pueden tomar varios valores.

La misma pregunta se planteó a los otros estudiantes presentes en la sesión.

I: ¿El ejercicio es de razonamiento algebraico elemental?

E10: Sí, porque se reemplazan las letras por números; la misma letra toma varios números, si los niños hacen eso es porque lo saben.

I: ¿Qué es lo que saben?

E10: Pues eso, que las letras se pueden reemplazar por números, que las letras son como números y que una misma letra puede tomar varios números

El maestro valora la tarea como de razonamiento algebraico elemental por la presencia de letras y por la sustitución de una letra por varios números. Si bien, la aproximación al razonamiento algebraico elemental dado en la sección 3.2.1.6 -La Aproximación al RAE desde el EOS- del tercer capítulo, considera esta característica como propia del razonamiento algebraico elemental, también es cierto que es una característica “externa”, de forma más que de fondo.

5.6.5.2 Grupo G5

Se interroga a los estudiantes en relación con el carácter algebraico de la tarea.

I: ¿Consideran que este ejercicio es de razonamiento algebraico elemental?

E2: Claro

I: ¿Y porque lo creen?

E2: Porqué salen letras que tienen que ser diferentes valores, que una letra puede tener diferentes valores, tiene uno de otro y de otro

De nuevo, y como en el caso anterior, los maestros reconocen el número generalizado como un elemento prototípico del álgebra.

I: ¿Porque creen ustedes que el niño realiza las operaciones, si se le pide completar?

E2: Claro, cuando uno tiene números y operaciones lo que se debe hacer es operar, ir a por el resultado.

I: Si el niño reemplaza los números pero no desarrolla las operaciones, ustedes como maestros ¿Le darían bueno el punto? ¿Cómo se lo califican?

E2: Depende, si se pone completar y resuelve, es otra cosa

E9: Como no se indica en ningún momento, no se le indica que haga las operaciones el niño lo puede dejar sin desarrollar.

Los futuros maestros reconocen que las respuestas dadas por los niños a una tarea pueden depender de la redacción de las consignas; sin embargo no ofrecen conjeturas sobre el comportamiento de los niños.

Se insiste sobre el tema del desarrollo de las operaciones.

I: No se le dice que desarrolle las operaciones, entonces ¿Por qué las hace?
E2: Porque le gusta
E9: Porque le ha apetecido.

Los maestros no ofrecen ninguna conjetura para el comportamiento del niño. La falta de conjeturas podría explicarse por la poca experiencia docente que los estudiantes tienen y por el poco conocimiento que tienen sobre los niños.

5.6.5.3 Grupo G3

Se presenta la tarea resuelta a los maestros en formación.

I: En la segunda columna donde aparece en la parte superior la expresión $a+b\times c$, el estudiante reemplaza, pero hace más, el estudiante desarrolla las operaciones sin embargo hay dos casos en donde no desarrolla las operaciones ¿porque creen que no lo hace?
Maestros: No responden
I: ¿Por qué el estudiante no efectuó las operaciones?
E3: No tendría calculadora, no sé, pues tampoco es tan difícil multiplicar… tal vez porque los números son grandes y no tiene espacio en el recuadro, él [el niño] cree que tiene que escribir allí y que no puede hacer las operaciones en otra parte…

Las respuestas de los estudiantes se ajustan a lo que puede responderse en esta situación.

I: Si se lee la consigna del problema, no se pide que desarrolle las operaciones, sin embargo el estudiante las efectúa, ¿Por qué lo hace?
E3: hmmm…cuando uno ve un listado de números con las operaciones, uno simplemente las desarrolla, uno hace las operaciones, así se hace siempre. Si uno tiene un listado [de precios] de compras, se quiere saber cuanto tiene que pagar, si no suma no sabe cuanto tiene que pagar… uno quiere saber el resultado para pagar. Cuando uno pide la cuenta en un bar, le

traen el resultado, le traen el listado de consumiciones y el resultado, las dos cosas, pero el resultado siempre tiene que estar…

La maestra justifica la realización de los cálculos numéricos que el niño realiza por la práctica social que se hace de la suma. En los dos casos citados por la estudiante, el signo igual se usa como símbolo de resultado.

La práctica social domina sobre la consigna de la tarea, donde ciertamente no se pide que se realice las operaciones, sólo completar la tabla, es decir, rellenar los espacios.

El elemento lingüístico “completa la tabla” se significa en el contexto de la institución social y en términos de la práctica cotidiana que demanda que una lista de números sea operada para obtener un resultado.

Se indaga sobre la naturaleza algebraica de la tarea:

I: ¿Es el ejercicio de razonamiento algebraico elemental?
E3: Creo que sí, pues hay incógnitas, aunque sepa los números ya tiene que sustituir las letras por dichos números…

La maestra asocia “reemplazar valores en letras”, que corresponde al concepto de Número Generalizado (Kücheman, 1981), con el concepto matemático de incógnita, si bien, reconoce que la incógnita es un valor que debe ser hallado. Sin embargo no es tan importante que el maestro en formación identifique características asociadas al álgebra sino que identifique los conocimientos matemáticos presentes y emergentes en la solución de la tarea y reconozca los eventuales conflictos de significado que pueden surgir y con los que deben enfrentarse los niños.

De otro lado, parece que los maestros en formación ignoran la aproximación de RAE que se les entregó, ya que en pocas ocasiones mencionan una visión ampliada del álgebra escolar. Este comportamiento podría estar motivado por el conjunto de creencias que los estudiantes tienen acerca del álgebra escolar.

Sería conveniente dar oportunidades a los maestros en formación de trabajar con tareas matemáticas en las que se preste atención a los objetos, a las relaciones, a los significados, a la estructura algebraica subyacente. Los conocimientos matemáticos presentes y emergentes en la solución podrían ser posteriormente asociados con características propias del razonamiento algebraico elemental.

5.7 Algunas Creencias sobre la Inclusión del RAE

Las creencias sobre la inclusión del razonamiento algebraico en la escuela primaria fueron manifestadas durante las primeras sesiones de trabajo.

Los estudiantes consideran que el razonamiento algebraico puede ser trabajado en el currículo de la primaria, pero manifiestan que:

G1: “primero se debe trabajar sobre lo numérico y después lo algebraico”.

Durante una de las sesiones de trabajo posteriores, ya avanzado el cuatrimestre, el estudiante E1 afirmó: “yo al principio, como es álgebra, entendía eso, resolución de ecuaciones. Sabia que en libros de primaria cosas así no te ibas a encontrar porque no corresponde, sino como representación de números, cantidades mediante símbolos…”.

Miembros de los grupos G4, G6 y G7 manifestaron:

G4: “el álgebra es lo que tiene que ver con letras…”
G4: “yo busqué en un diccionario y el álgebra [tiene que ver con] los números y las letras juntos ¿no?”.
G6: “tengo una duda muy grande porque a un niño de primaria no les puedes explicar el álgebra en sí y ¿Cómo planteamos nosotros eso?”.
G7: “queremos saber de que va esto”.

Las creencias de los estudiantes se adecuan al modelo de algebra escolar de la escuela secundaria.

5.8 Conclusiones sobre los Análisis Realizados por los Maestros

En el apartado anterior se presentaron los análisis que los maestros realizaron, en situación de entrevista no estructurada, de algunas tareas tomadas de las prueba aplicadas a niños de sexto grado. Por razones de disponibilidad de los estudiantes, se presentaron los análisis realizados por cuatro grupos.

Se intentó utilizar los análisis epistémico y cognitivos, presentados en las secciones 5.4 -Análisis Epistémico de Objetos y Significados- y 5.5 -Análisis Cognitivo de las Soluciones de los Niños- de este capítulo, durante las entrevistas con los maestros en formación, sin embargo la complejidad de la tarea y el poco tiempo disponible no permitió vincularlos en profundidad.

El análisis epistémico de las tareas pone de manifiesto una gran variedad de elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos y propiedades inmersos en las soluciones particulares de los mismos. Las soluciones dadas por los niños de escuela elemental ofrecen una mirada a las estrategias variadas con las cuales los niños resuelven las tareas.

A partir de las soluciones de los niños se pueden identificar configuraciones diversas de las entidades primarias que son usadas por los niños para dar respuesta a la tarea. No es fácil establecer una correspondencia detallada entre el análisis epistémico y las soluciones dadas por los niños, sin embargo el análisis epistémico detallado hace más fácil efectuar el análisis cognitivo de las soluciones dadas por los niños.

Los análisis realizados por los maestros en formación ponen en evidencia su comprensión de las soluciones dadas por los niños, logran identificar los errores de los niños y conjeturan las posibles causas de los mismos. Los objetos matemáticos que los maestros en formación identifican suelen coincidir con las entidades primarias correspondientes a elementos lingüísticos, conceptos y procedimientos. Sin embargo, se observa cierto distanciamiento entre las estrategias de solución dadas a las tareas por los maestros en formación y aquellas dadas por los niños. Los maestros manifiestan la tendencia a valorar las estrategias de los niños desde su propia solución. Hines y McMahon (2005, p. 99) reportan que los maestros en formación se muestran poco inclinados a considerar los métodos menos avanzados de los niños y consideran que las estrategias de los niños deben ser reemplazadas por las estrategias “correctas” que los maestros proponen y con las cuales están más familiarizados.

En algunos casos, los maestros no logran proponer hipótesis factibles en relación con las estrategias o errores de los niños. Sin embargo se debe decir que en algunos casos las soluciones de los niños son parcas y poco elaboradas en términos de la escritura; tal vez esto dificulta la labor de reconocimiento de conocimientos matemáticos, usados por los niños, por parte de los maestros. Durante las sesiones se intentó que los estudiantes expresaran sus creencias en relación con los rasgos algebraicos que podrían ser atribuidos tanto a las tareas como a las estrategias de solución dadas por los niños. En el siguiente apartado se comentan las creencias de los maestros sobre el RAE.

5.9 Conclusiones sobre las Creencias

Algunos autores han informado que las creencias de los maestros tienen influencia sobre su enseñanza (Calderhead, 1996; Carpenter, Fennema, Peterson y Carey, 1988; Fennema y Loef, 1992; Shulman, 1986; Thompson, 1992). Calderhead (1996; p. 709) afirma:

Cómo los maestros dan sentido a su mundo profesional, el conocimiento y las creencias que exhiben cuando enseñan, y cómo la comprensión del maestro sobre la enseñanza, el aprendizaje y el conocimiento del contenido informa su práctica cotidiana y son preguntas importantes que necesitan investigación…".

Al planear las clases, el conocimiento del currículo junto con el conocimiento matemático del contenido parece interactuar con el "sistema de creencias". "*Conocimiento y creencias están inextricablemente entrelazados*" (Pajares, 1998; p. 325). Las creencias se han desarrollado en el transcurso de la vida académica de los maestros, se activan mientras resuelven y planean las tareas a ser discutidos con los niños y se ponen en acto cuando enseñan.

En la sección anterior se han evidenciado algunas de las creencias de los maestros en formación en relación con la inclusión del razonamiento algebraico en la escuela elemental. Las creencias se han manifestado en acto, al escoger y valorar tareas y soluciones como propias del álgebra.

Los hallazgos señalados en este trabajo indican que existe una marcada tendencia a identificar el razonamiento algebraico elemental con: Encontrar valores desconocidos cualitativos o cuantitativos, mismos que asocian con el concepto de "incógnita"; simbolizar relaciones numéricas y resolver tareas verbales, reemplazar letras por números y encontrar "valores faltantes", los procedimientos efectuados sobre letras, la precedencia de la aritmética sobre el álgebra, la cerradura de las operaciones en aritmética contra la no cerradura en álgebra.

En relación con el signo igual los maestros exhiben la creencia que este significa resultado. Se ha reportado que para muchos niños el signo igual indica acción de resultado (MacGregor y Stacey, 1997) o es un símbolo sintáctico, que muestra el lugar donde se debe escribir la respuesta de una operación aritmética (Filloy y Rojano, 1989). Estos resultados de estudios realizados con niños de escuela secundaria coinciden con las creencias de los maestros. En contraste, los maestros en formación exhiben buena comprensión de la precedencia de las operaciones en aritmética y usan apropiadamente las propiedades aritméticas.

Estos hallazgos coinciden con los resultados de Stump y Bishop (2002), quienes encontraron que las concepciones algebraicas sostenidas por los maestros en formación son bastante limitadas y describen al álgebra en términos de solución de ecuaciones, del hallazgo de valores desconocidos o como una herramienta para la resolución de tareas.

CAPÍTULO 6
EVALUACIÓN Y DESARROLLO DE COMPETENCIAS PARA EL DISEÑO INSTRUCCIONAL

6.1 Introducción

En tanto que la selección, planeación y discusión de actividades matemáticas forma parte integral de las tareas que un maestro ejecuta como parte de su trabajo, se ha considerado importante indagar sobre las competencias de diseño instruccional que exhiben los maestros en formación. A menudo se afirma que "*El conocimiento de los maestros sobre los procedimientos didácticos*[1] *han sido aprendidos mayoritariamente en los salones de clase donde han sido estudiantes*" (Fennema y Franke, 1992, p. 160), en tal sentido es menester ofrecer a los maestros en formación experiencias sobre el proceso de planeación y diseño instruccional que puedan ser contrastadas con sus experiencias estudiantiles cotidianas.

La estrategia escogida para problematizar el diseño instruccional fue el diseño de una unidad didáctica, "*los maestros que operan en ambientes que promueven que sean reflexivos y que hagan su práctica problemática podrían proponer construcciones «más poderosas» de la práctica instruccional*" (Millsaps, 2000, p. 48). Lloyd and Frykholm (2000) encontraron que los maestros en formación necesitan desarrollar una amplia experiencia tanto en el conocimiento del contenido matemático como en conocimiento didáctico. Es por tanto pertinente que los maestros en formación puedan acceder a prácticas de diseño de unidades didácticas.

La unidad didáctica que se propuso a los estudiantes es una actividad que tiene un carácter global e integrativo, en la que se ponen en juego de manera coordinada los conocimientos adquiridos en la asignatura de Matemáticas y su Didáctica de primer curso de la titulación, en la asignatura de Currículo de Matemáticas y en otras asignaturas de áreas de conocimiento relacionadas. Es una actividad de dominio imprescindible en la profesión de maestro, y forma parte de las pruebas de acceso al cuerpo de maestros de cualquier comunidad autónoma.

[1] Se ha traducido conocimiento pedagógico como conocimiento didáctico.

En la última convocatoria de oposiciones de la Junta de Andalucía el BOJA nº 43 del 3 de marzo del 2005 se lee: “Tendrá por objeto la comprobación de la aptitud pedagógica del/de la aspirante y su dominio de las técnicas necesarias para la tarea docente y consistirá en la defensa de una programación didáctica y en la elaboración y exposición oral de una unidad didáctica[2]” y se agrega “*En la elaboración de la citada unidad didáctica deberán concretarse los objetivos de aprendizaje que se persiguen con ella, sus contenidos, las actividades de enseñanza y aprendizaje que se van a plantear en el aula y sus procedimientos de evaluación.*” (p. 21).

Si bien es cierto que la estructura de la unidad didáctica que se propone a los maestros en formación es particular y puede no coincidir con la unidad didáctica exigida por un jurado de oposiciones, también lo es que la práctica que aquí se documenta intenta servir de experiencia problematizadora para los estudiantes y contempla todos los incisos requeridos.

También se puede afirmar que los maestros en formación, una vez en el campo profesional, no tendrán que elaborar una unidad didáctica que considere los diversos aspectos considerados aquí, pero en tanto que los maestros están en formación, es pertinente ofrecerles la oportunidad de elaborar una unidad didáctica que reúna diversos elementos que forman parte de la labor de planeación didáctica de un maestro activo.

En este capítulo usaremos indistintamente las expresiones “estudiantes”, “maestros” o “maestros en formación” para hacer referencia a los estudiantes que son los sujetos de nuestro estudio.

6.2 Directrices Generales sobre el Diseño de la Unidad Didáctica

En este apartado se especifican las directrices que los estudiantes siguieron para elaborar la unidad didáctica, que considera los siguientes apartados: Contexto curricular, objetivos, contenidos, secuencia de actividades y metodología, actividades de refuerzo y ampliación, instrumentos de evaluación, bibliografía usada, y entre los anexos a incluir se pidió: Solución de actividades, contenidos trabajados en las actividades y comparación con los previstos, dificultades previstas y valoración de la idoneidad didáctica.

En el apartado 6.6 -La Idoneidad Didáctica y su Evaluación por parte de los Estudiantes- de este capítulo se indicará lo que se entiende en el contexto de este trabajo por “idoneidad didáctica”. En el Anexo D -Guía para la Elaboración de la Unidad Didáctica- se muestra la guía de

[2] Nuestro subrayado.

orientación para la elaboración de la unidad didáctica que se dio a los estudiantes. Vale decir que las condiciones fueron interpretadas de manera diversa por los maestros, fue así como algunos grupos no cumplimentaron algunas de las directrices o dieron interpretaciones propias de las mismas. En lo que sigue se dedicará un apartado para informar sobre la respuesta dada por los grupos a cada una de las directrices que debían cumplimentar. Al final de cada apartado se darán algunas conclusiones que serán recogidas al final de este capítulo en la sección 6.8 -Algunas Implicaciones para la Formación de Maestros-.

6.3 Descripción del Proceso de Elaboración de la Unidad

Asesoría para elaborar la unidad didáctica sobre el tema del razonamiento algebraico elemental fue ofrecida a los estudiantes. Cada grupo de informantes definió la agenda de trabajo, pero en promedio se sostuvieron 6 reuniones con cada grupo distribuidas durante 15 semanas. No explicitaremos las sesiones individuales sostenidas con cada grupo. Se indicarán algunas de las condiciones generales que orientaron la discusión que condujo a los estudiantes a la elaboración de la unidad didáctica.

6.4 Condiciones Generales

Tal como se indicó en la sección 3.3 -Algunas Precisiones sobre la Metodología- del tercer capítulo, se asumió una aproximación metodológica adecuada a las condiciones particulares de la investigación. Con el propósito de lograr que los estudiantes manifestaran sus creencias y sus cuestionamientos sin cortapisas, requisito para lograr los objetivos de la investigación, se ofreció libertad de acción a los estudiantes y fue así como ellos:

- Determinaron el número de reuniones sostenidas.
- Propusieron los horarios de reunión.
- Escogieron los libros de texto de matemáticas elementales.
- Escogieron las tareas que se discutían en las sesiones de trabajo.
- Interpretaron algunas condiciones sobre la guía de elaboración de la unidad didáctica según sus creencias y conocimientos.
- Decidieron los ejercicios a incluir en la unidad didáctica final.
- Adaptaron la guía de reflexión sobre objetos y significados.

Una vez que los estudiantes establecieron sus condiciones de trabajo, el investigador:

- Orientó a los estudiantes de cada equipo hacia la cumplimentación de las condiciones sobre el diseño de la unidad didáctica.
- Discutió sobre la solución de las tareas resueltas por los estudiantes.
- Invocó y cuestionó el carácter “algebraico” de las tareas y de las soluciones.
- Planteó cuestiones sobre las dificultades que los niños podrían enfrentar al resolver las actividades propuestas.
- Planteó posibles conflictos epistémicos que podrían surgir en la eventual discusión con los niños.
- Sugirió realizar análisis epistémicos usando la GROS y cuestionó los análisis realizados por los estudiantes.

Cabe mencionar que se hizo un gran esfuerzo para que, tanto las discusiones se realizaran en el marco de la aproximación al razonamiento algebraico elemental como que los estudiantes manifestaran sus concepciones en las discusiones grupales. Se trabajó con siete grupos, cada uno con cuatro integrantes. Durante la interacción con los maestros se procuró no ejercer autoridad epistémica o deontológica y se estimuló el debate sobre la explicación.

6.5 Los Hallazgos sobre el Conjunto de Unidades Didácticas

A continuación se informará sobre los hallazgos hechos sobre el conjunto de unidades didácticas presentadas por los grupos en relación con: Contexto curricular, objetivos, contenidos, secuencia de actividades y metodología, actividades de refuerzo y ampliación, e instrumentos de evaluación. También se informará sobre: La solución de las actividades, contenidos trabajados en las actividades y comparación con los previstos, dificultades previstas y valoración de la idoneidad didáctica.

Los grupos se han nombrado desde G1 hasta G7. Cuando se haga referencia a la unidad didáctica correspondiente a uno de los grupos, se indicará con la letra G y a continuación el número correspondiente al grupo.

6.5.1 Contexto Curricular

En la Guía para la elaboración de la unidad didáctica, el contexto curricular hace referencia a los decretos oficiales de Educación primaria con relación al tema, importancia del mismo y conexiones con otros temas y áreas curriculares.

En todos los casos, los estudiantes hicieron referencia a dos decretos: El R.D. 1513 del siete de diciembre del 2006 del Ministerio Español de Ciencia y Tecnología y la Orden del diez de agosto del 2007 de la Junta de Andalucía.

Es menester indicar, que por razones de presentación, no se exhiben, en este apartado, los escritos originales escaneados de los estudiantes.

El grupo G1 afirma:

> *"El álgebra no constituye un contenido propio de la enseñanza de matemáticas en Educación Primaria, por ello nos es imposible vincular esta unidad didáctica con cualquier decreto de enseñanzas mínimas que esté vigente en la actualidad. Aún siendo así si tocamos bloques de contenidos que aunque no son de álgebra propiamente dicha, si pueden estar relacionados y están presentes en los decretos curriculares actuales".*

El grupo G2 no utilizó la denominación Razonamiento Algebraico Elemental, sino que usó la expresión "pre-álgebra" y afirmó:

> *"La Pre-álgebra no es una materia que se da concretamente en educación primaria sino que partir de las diferentes unidades didácticas que se estudian se sacan tareas para la iniciación al álgebra, por lo tanto, y por este motivo, no encontramos una referencia concreta sobre este tema en los decretos oficiales de educación primaria; con una pequeña excepción, en el de la Junta de Andalucía, en el apartado de "Relevancia y Sentido Educativo" [sic] nos indica "el desarrollo del sentido numérico y el de la simbolización algebraica, el estudio de las formas y sus propiedades, en especial las de nuestro entorno, y la interpretación de los fenómenos ambientales y sociales a través del tratamiento de la información y la probabilidad, completan la propuesta de contenidos para esta etapa educativa".*

El grupo G3 afirma:

> *"El Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria junto con Orden de 10 de Agosto de 2007, por la que se desarrolla el Currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía no contemplan[3] como tal el desarrollo específico del Razonamiento Algebraico Elemental por lo que no encontramos instrucciones ni indicaciones en cuanto a Objetivos, Contenidos y Criterios de Evaluación. No obstante podemos comprobar en los distintos libros de matemáticas que de una manera u otra se comienza a introducir en el razonamiento algebraico de una manera sencilla, creando así una base para una futura profundización en los primeros cursos de la Educación Secundaria Obligatoria y posteriores".*

[3] Subrayado de los estudiantes.

El grupo G4 afirma:

> *"Actualmente la sociedad responde a unos criterios sociales, políticos, culturales, económicos…, que dan forma al marco en el que han de desarrollarse las relaciones interpersonales. De aquí se deriva una de las razones que justifican la importancia y trabajo con razonamiento algebraico elemental desde niveles tempranos como iniciación al manejo de la terminología y herramientas que se harán indispensables para la comprensión de los casos de la vida cotidiana en los que el empleo de los mismo tienen una razón de peso".*

El grupo G6 afirma:

> *"La enseñanza de las Matemáticas en la etapa de Educación Primaria no aparece el álgebra en sí como contenido independiente sino que está como oculto en los diferentes contenidos que se tienen en el currículo de matemáticas" y continua: "Algunos de estos contenidos se dan en las formas geométricas (cálculo de las áreas de un paralelogramo, de un trapecio, triángulo etc.), en las que se pone de manifiesto la utilidad de emplear formulas de cálculo de las diferentes figuras planas. Éstas están compuestas por letras (incógnitas) que hacen referencia a las dimensiones de la figura como la altura o la base que refleja el desconocimiento de sus proporciones".*

Estas afirmaciones como tal no aparecen explícitamente en los dos documentos curriculares referidos y son elaboraciones hechas por los estudiantes a partir de su interpretación de los documentos curriculares oficiales.

Por su parte, los grupos G5 y G7 no cumplimentan esta sección de la unidad didáctica. El conjunto de grupos no hacen elaboraciones posteriores acerca del contexto curricular que ayude a plantear alguna hipótesis respecto a la eventual influencia que la ausencia de referencias al razonamiento algebraico elemental, en los documentos curriculares oficiales, podría ejercer en las creencias de los estudiantes en relación con la pertinencia de la inclusión curricular del álgebra en la escuela elemental.

Sin embargo, parece factible que la ausencia de referencias del razonamiento algebraico elemental, tanto en los documentos curriculares oficiales como en los libros de texto ejerza algún tipo de influencia en las creencias de los maestros en formación.

La relación de dependencia que los maestros establecen con los libros de texto ha sido indagada por diversos autores. Nathan y Koedinger (2000), manifiestan que "*es razonable conjeturar que el uso de textos en la planeación diaria de las clases, las tareas semanales, y las organizaciones curriculares anuales influyen en la internalización de las imágenes sobre las matemáticas que los libros implícitamente consideran*", (p. 228); por su parte la investigación realizada por Cooney (1985), reveló que el libro es la influencia primaria para las concepciones curriculares de los maestros, así como para su estilo de presentación en clase. Por tanto parece factible que los libros de texto puedan influenciar tanto la manera como los maestros enseñan así como lo qué aprenden y cómo aprenden los niños (Herbel-Eisenmann y Difanis, 2005).

6.5.2 Objetivos

Los objetivos que los estudiantes deben cumplimentar se refieren a objetivos de aprendizaje que se pretenden.

En las condiciones propuestas para la realización de la unidad didáctica no se pidió a los estudiantes diferenciar entre objetivos específicos y generales, es así como los objetivos propuestos por los grupos pueden ser ubicados en tres categorías, de acuerdo con la denominación usada en sus unidades didácticas: Objetivos, objetivos generales y objetivos específicos.

La Tabla 6.1 muestra la distribución de objetivos generales y específicos propuestos por los estudiantes y el número de objetivos por grupo. Se observa que cuatro de los grupos copiaron los objetivos del R.D. 1513 de 2006 (Ver Anexo E -Objetivos Propuestos en el Real Decreto 1513/2006, de 7 de Diciembre-).

Tabla 6.1. Distribución de Objetivos por Grupos.

	G1	**G2**	**G3**	**G4**	**G5**	**G6**	**G7**
Número de objetivos propuestos.	4			4	8	4	6*
Número de objetivos generales.		8*	6*				
Número de objetivos específicos.		4					
Objetivos generales tomados del R.D. 1513/ 2006.		8*	6*		4		6*

Nota: Los números marcados con asterisco indican que los objetivos correspondientes son los mismos.

Los grupos G3 y G7 copiaron todos los objetivos del R.D. 1513 de 2006 (Ver Anexo E - Objetivos Propuestos en el Real Decreto 1513/2006, de 7 de Diciembre-) excepto dos de ellos. El grupo G3 no consideró los objetivos O4 y O5, mientras que el grupo G7 no consideró O2 y O8.

Una indagación sobre los objetivos de los textos usados por los grupos G1, G4 y G6 evidencia que estos no fueron extraídos de aquellos. Parece que los estudiantes propusieron sus objetivos en función de las tareas escogidas.

6.5.3 Contenidos

Los contenidos que los estudiantes deben cumplimentar se refieren a: Contenidos matemáticos a desarrollar (tipos de problemas a estudiar, modos de representación, conceptos, propiedades, procedimientos y sus respectivas justificaciones).

A continuación se muestran las interpretaciones que cada uno de los grupos dio a la propuesta de contenidos matemáticos.

6.5.3.1 Propuesta de G1

La Tabla 6.2 muestra la propuesta de contenidos matemáticos del grupo uno. Es evidente la adhesión del grupo a la dualidad: Conceptos-Procedimientos. Si bien es cierto que "*ser competente en matemáticas involucra conocer conceptos, conocer símbolos y procedimientos, y la manera como ellos están relacionados*" (Hiebert y Lefreve, 1986, p. 16) también lo es que la competencia en matemáticas no suele ser equiparable a la competencia didáctica requerida para enseñar.

Este grupo además incluye las "actitudes" en los contenidos matemáticos, el listado es el siguiente:

- Incorporación al lenguaje habitual de las distintas formas de expresión algebraica.
- Autonomía intelectual para enfrentarse a situaciones nuevas.
- Confianza para tomar decisiones y aceptar responsabilidades.
- Atención reflexiva.
- Tenacidad.
- Espíritu de colaboración activa y con responsabilidad en un trabajo en grupo, respetando las estrategias y soluciones distintas a las propias.
- Gusto por el trabajo bien hecho.
- Aprecio de la satisfacción que produce la resolución de un problema o encontrar una nueva vía de trabajo válida.
- Valoración de los métodos de trabajo matemáticos por su generalidad (capacidad de síntesis...).
- Valoración crítica de las informaciones expresadas en lenguaje matemático.

Tabla 6.2. Contenidos Matemáticos Propuestos por G1.

CONCEPTOS	**PROCEDIMIENTOS**
Expresiones algebraicas.	Traducción de lenguaje ordinario a lenguaje algebraico.
Traducción de frases al lenguaje algebraico.	Traducción de expresiones algebraicas a lenguaje ordinario.
Traducción al lenguaje ordinario de expresiones algebraicas.	Cálculo del valor numérico de una expresión algebraica.
Valor numérico de una expresión algebraica: • Expresiones con sumas, restas y multiplicaciones con valores enteros. • Expresiones con cualquier operación y valores enteros.	Resolución de la ecuación de primer grado con una incógnita con y sin denominadores, con y sin paréntesis, siendo los denominadores números naturales.
Operaciones con expresiones algebraicas: • Suma y resta. • Multiplicación. • División.	Resolución de ecuaciones de primer grado con varias incógnitas con y sin denominadores, con y sin paréntesis, siendo los denominadores números naturales.
Concepto y comprobación de ejemplos con números enteros.	Utilización de la combinatoria para averiguar el número de soluciones posibles de una ecuación de primer grado con varias incógnitas.
Problemas de ecuaciones de primer grado con una incógnita: • Concepto de datos, pregunta, planteamiento, resolución. • Problemas sencillos con pocos datos y una sola pregunta. • Comprobación de problemas.	Descomposición de un número en factores primos.
	Resolución de problemas por medio de ecuaciones.

6.5.3.2 Propuesta de G2

La propuesta de contenidos matemáticos del grupo dos se muestran en la Tabla 6.3. Si se acepta que los “modos de representación” propuestos por G2, “simbolización numérica y de letras”, se asemeja a la entidad “elementos lingüísticos” entonces se podría afirmar que el grupo utilizó cuatro de las seis entidades primarias propuestas por el formador y por el investigador: Elementos lingüísticos, conceptos, propiedades y procedimientos. Este grupo, a diferencia del grupo G1 no considera el contenido Actitudes.

Tabla 6.3. Contenidos Matemáticos Propuestos por G2.

CONCEPTOS	
Tipos de problemas.	Resolución de problemas. Calculo: • Operaciones con números naturales. • División. Potencias y raíz cuadrada. • Múltiplos y divisores. • Ángulos • Números enteros. • Proporcionalidad y fracciones. • Números decimales, operaciones.
Modos de representación.	Por medio de la simbolización numérica y de letras.
Conceptos.	Igualdad, suma, total, multiplicación, división, concepto de incógnita, proporcionalidad y fracción, numero natural, números enteros, decimales, ángulo, múltiplo y divisor, minuendo, sustraendo, base, exponente…
Propiedades.	Conmutativa, asociativa, distributiva.
Procedimientos.	Algoritmo de sumar llevándose y con números decimales. Algoritmo de restar llevándose y con números decimales. Algoritmo de la multiplicación llevándose. Algoritmo de la división llevándose. Cambio de unidades. Operar con raíz cuadrada.

6.5.3.3 Propuesta de G3

El grupo tres por su parte propone cinco tipos de "conocimiento". En la Tabla 6.4 se muestran cuatro de ellos; el quinto tipo de conocimiento, Actitudes, se muestran después de dicha tabla.

Tabla 6.4. Contenidos Matemáticos Propuestos por G3.

Resolución de problemas	**Representación**	**Razonamiento**	**Contenidos Procedimentales**
Uso de estrategias de resolución de problemas.	Mostrar las relaciones visual, simbólica, numérica y verbalmente.	Razonamiento inductivo.	Utilización de diferentes estrategias para resolver problemas numéricos y operaciones.

Tabla 6.4. Contenidos Matemáticos Propuestos por G3 (Continuación).

Resolución de problemas	**Representación**	**Razonamiento**	**Contenidos Procedimentales**
Exploración de múltiples enfoques/ de múltiples soluciones.	Traducción entre diversas representaciones.	Razonamiento deductivo.	Explicación oral del proceso seguido en la realización de cálculos y en la resolución de problemas numéricos u operatorios.
Resolución de problemas aritmético-algebraicos: Significado de las variables, expresiones con variables; comprensión y uso de las propiedades del sistema numérico.	Interpretación de información en cada tipo de representación.		Representación matemática de una situación utilizando sucesivamente diferentes lenguajes (verbal, gráfico y numérico) y estableciendo correspondencias entre los mismos.
	Identificación y representación (verbal y algebraicamente) de patrones numéricos y figurales.		Estimación del resultado de un cálculo y valoración de sí una determinada respuesta es o no razonable.
	Identificación y uso de reglas aritméticas; su expresión verbal, simbólica y su uso en problemas sencillos.		

Las actitudes consideradas por los integrantes de G3 son:

- Rigor en la utilización precisa de los símbolos numéricos y de las reglas de los sistemas de numeración, e interés por conocer estrategias de cálculo distintas a las utilizadas habitualmente.
- Tenacidad y perseverancia en la búsqueda de soluciones a un problema.
- Confianza en las propias capacidades y gusto por la elaboración y uso de estrategias personales de cálculo mental.
- Gusto por la presentación ordenada y clara de los cálculos y sus resultados.
- Confianza y actitud crítica en el uso de la calculadora.

- Interés en la búsqueda de soluciones a los problemas cotidianos.
- Interés y curiosidad por descubrir las relaciones entre los nuevos conceptos matemáticos.

Los grupos cuyas propuestas se muestran a continuación asumieron una propuesta un poco “económica” para sus contenidos matemáticos.

6.5.3.4 Propuesta de G4

Los contenidos matemáticos propuestos por el grupo cuatro se muestran en la Tabla 6.5.

Tabla 6.5. Contenidos Matemáticos Propuestos por G4.

CONTENIDOS	
Concepto de número.	Orden de las operaciones.
Multiplicación, división, suma y resta.	Utilización de operaciones matemáticas básicas.
Concepto de total.	Aplicación de los conocimientos sobre las propiedades de los números.
Propiedad conmutativa.	Resolución de problemas algebraicos.
Propiedad asociativa.	Valoración de las propiedades de los números para realizar operaciones en la vida cotidiana.
Operación con las reglas de prevalencia de operaciones.	Confianza en las propias capacidades para afrontar y resolver problemas numéricos.
Propiedad distributiva.	

6.5.3.5 Propuesta de G5

El grupo cinco propone cuatro tipos de “conocimiento”. En la Tabla 6.6 se muestran tres de ellos y el cuarto, Actitudes, se muestra después de dicha tabla.

Tabla 6.6. Contenidos Matemáticos Propuestos por G5.

CONTENIDOS	**CONCEPTUALES**	**PROCEDIMENTALES**
Uso de estrategias para resolver problemas.	Concepto de número.	Comprobación en casos de la vida real de las propiedades del álgebra (actitudinal, identificar actividades cotidianas que se pueden modelar por álgebra).

Tabla 6.6. Contenidos Matemáticos Propuestos por G5 (Continuación).

CONTENIDOS	CONCEPTUALES	PROCEDIMENTALES
Identificación y uso de reglas aritméticas.	Concepto de suma.	Cálculo y comprobación de los resultados.
Identificación y representación de patrones numéricos y figurales.	Concepto de incógnita.	Explicación de las estrategias para calcular ejercicios de álgebra sencillos.
Representar situaciones y patrones numéricos con tablas, gráficas reglas verbales y ecuaciones.	Concepto de igualdad.	Los procedimientos de suma, multiplicación, raíz cuadrada a partir de la definición.
Analizar tablas y gráficas para identificar propiedades y relaciones.	Concepto de potencias.	
La ecuación.	Concepto de raíz cuadrada.	
Las potencias.		
Sistema posicional.		
Sistema de numeración decimal.		

Los conceptos actitudinales propuestos por este grupo son:

- Valoración positiva del álgebra como medio para resolver situaciones reales próximas.
- Incitar interés en la búsqueda de soluciones a los problemas de la vida real.
- Estimular la curiosidad para descubrir las relaciones entre los nuevos conceptos matemáticos.

6.5.3.6 Propuesta de G6

El grupo seis propuso tres tipos de conocimientos matemáticos: Conceptuales, procedimentales y actitudinales; la Tabla 6.7 ilustra los dos primeros, el último se muestra después de dicha tabla.

Tabla 6.7. Contenidos Matemáticos Propuestos por G6.

CONCEPTUALES	PROCEDIMENTALES
Operaciones básicas para resolver problemas en los que esté presente el álgebra.	Utilizar las operaciones básicas (suma, resta multiplicación y división).
Formulas para calcular problemas algebraicos.	Conocer y practicar fórmulas algebraicas.
Utilizar el álgebra en problemas de fracciones.	Adquisición de estrategias para calcular el área y el perímetro de las figuras planas.
Áreas y perímetros de las figuras planas, según la unidad de superficie utilizada.	

Los conceptos actitudinales propuestos por este grupo son:

- Valorar la utilidad de las formulas para resolver diferentes problemas de la vida real.
- Interés por la adquisición de estrategias personales de cálculo.
- Desarrollo y perfección de sus propias estrategias para resolver diferentes problemas de la vida cotidiana.
- Confianza en sus propias capacidades.

6.5.3.7 Propuesta de G7

Los contenidos matemáticos propuestos por el grupo siete se dividen en dos: Números Naturales y Geometría. Los contenidos matemáticos propuestos para los Números Naturales se muestran en la Tabla 6.8; los correspondientes a Geometría se muestran en la Tabla 6.9. Debajo de cada tabla se enumeran los contenidos Actitudinales correspondientes.

Tabla 6.8. Contenidos Matemáticos para Números Naturales Propuestos por G7.

CONTENIDOS: LOS NÚMEROS NATURALES	
Procedimientos	**Hechos, Conceptos y Sistemas Conceptuales**
Observación, manipulación y experimentación: • Lectura, escritura, comparación, ordenación… de números naturales. • Adición y sustracción de números naturales. • Multiplicación de números naturales.	• El número natural. Conjuntos infinitos. • Sistemas de numeración. • Sistemas de numeración posicional. Bases de numeración. • Serie ordenada de números naturales. • Decimales (décimas, centésimas, milésimas).

Tabla 6.8. Contenidos Matemáticos para Números Naturales Propuestos por G7 (Continuación).

CONTENIDOS: LOS NÚMEROS NATURALES	
Procedimientos	**Hechos, Conceptos y Sistemas Conceptuales**
• Manejo de las propiedades de la multiplicación en la realización de cálculos. • Automatización de los algoritmos escritos en la adición, substracción, de la multiplicación y de la división, con números naturales. • Automatización de los algoritmos de adicción, substracción y multiplicación de números decimales por un número natural. • División de números naturales. • Aplicación de la prueba de la división. • Obtención de divisiones equivalentes mediante la propiedad fundamental. • Utilización del paréntesis y la jerarquía de las operaciones en operaciones combinadas. • Utilización de las propiedades conmutativa y asociativa de la suma para la resolución de cálculos matemáticos. • Resolución de problemas utilizando los algoritmos de la suma, resta, multiplicación y división. • Ordenación de números naturales, de decimales y de fracciones sencillas. • Representación de números naturales, y de números decimales sobre una recta. • Elección del origen y de la unidad. • Expresión de los números naturales en diferentes bases (dos, cinco, diez…) utilizando el valor posicional de las cifras. • Cálculo mental de operaciones con números naturales, aproximando el resultado.	• Los puntos de la recta como representaciones de los números naturales y de los números decimales. • Múltiples y divisores de un número natural. Criterios de divisibilidad. • La suma. Las propiedades conmutativa y asociativa de la suma. • La resta. Las propiedades conmutativa y asociativa de la resta. • La multiplicación. Propiedades de la multiplicación: conmutativa, asociativa y distributiva. • La división. • La propiedad fundamental de la división. • Tipos de divisiones: División de un número decimal entre uno entero. • Máximo común divisor, y mínimo común múltiplo de dos o más números naturales. • Operaciones combinadas. • Cálculo mental. • Resolución de problemas.

Las actitudes hacia los números naturales propuestas por este grupo son:

- Interés y curiosidad por desarrollar estrategias de cálculo escrito y mental.
- Gusto por la presentación ordenada y clara de los trabajos.
- Interés por la elaboración de estrategias personales para la resolución de problemas.

- Valorar la importancia del sistema de numeración para resolver situaciones problemáticas de la vida cotidiana.
- Comprensión de la existencia de situaciones diferentes que arrojan un mismo resultado.
- Aceptación del máximo común divisor, mínimo común múltiplo y la propiedad distributiva como dos formas de expresión de una misma realidad.
- Interesarse por las reglas del juego matemático y esforzarse para encontrar estrategias personales y apreciar las que utilizan los compañeros y compañeras.
- Habituarse a intercambiar y argumentar los descubrimientos y soluciones de problemas utilizando progresivamente el lenguaje matemático con precisión.
- Reaccionar con progresiva autonomía delante de situaciones matemáticas seleccionando los medios correctos.
- Mostrar interés a la hora de desarrollar el razonamiento algebraico elemental.
- Ser consciente de sus limitaciones y ver que el error es parte del proceso de aprendizaje.
- Valorar la matemática como herramienta para la expresión y el conocimiento de la vida cotidiana.
- Interesarse por las reglas del juego matemático y esforzarse para encontrar estrategias personales y apreciar las que utilizan los compañeros y compañeras.
- Habituarse a intercambiar y argumentar los descubrimientos y soluciones de problemas utilizando progresivamente el lenguaje matemático con precisión.
- Reaccionar con progresiva autonomía delante de situaciones matemáticas seleccionando los medios correctos.
- Mostrar interés a la hora de desarrollar el razonamiento algebraico elemental.
- Ser consciente de sus limitaciones y ver que el error es parte del proceso de aprendizaje.

Tabla 6.9. Contenidos Matemáticos para Geometría Propuestos por G7.

CONTENIDOS: FORMAS Y RELACIONES GEOMÉTRICAS	
Procedimientos	**Hechos, Conceptos y Sistemas Conceptuales**
Observación, manipulación y experimentación: • Cálculo del perímetro de distintos polígonos mediante la medición de sus lados. • Cálculo del área de cuadrados, rectángulos, rombos y romboides aplicando los algoritmos adecuados.	Nociones básicas: • Los polígonos: elementos. • El perímetro de un polígono. • Los poliedros. • Cálculo del área de los cuerpos geométricos. • Cálculo del volumen de cuerpos geométricos.

Tabla 6.9. Contenidos Matemáticos para Geometría Propuestos por G7 (Continuación).

CONTENIDOS: FORMAS Y RELACIONES GEOMÉTRICAS	
Procedimientos	**Hechos, Conceptos y Sistemas Conceptuales**
• Cálculo de superficies de triángulos y trapecios. • Cálculo del área de polígonos regulares. • Cálculo del área de polígonos irregulares mediante la descomposición en triángulos y paralelogramos. • Distinción de poliedros y cuerpos redondos y sus principales elementos. • Construcción de prismas y pirámides a partir de sus desarrollos. • Construcción de poliedros regulares a partir de sus desarrollos. • Trazado de los desarrollos del cilindro y el cono. • Construcción de cilindros y conos a partir de sus desarrollos. • Utilización de la unidad de medida más adecuada en cada caso para la expresión del volumen de un cuerpo. • Localización de figuras geométricas en la realidad: Enumeración y descripción de los elementos de la figura. • Localización y diseño de líneas de figuras planas sobre superficies. • Transformación de modelos (hechos con materiales de tipo dinámico o recortable) para obtener nuevos. • Obtención de disecciones de polígonos y formación de uno nuevo.	• Cilindro, cono y esfera: conceptos y elementos. • Identificación y desarrollo plano de prismas y pirámides. • Identificación y desarrollo plano de poliedros regulares. • Identificación y desarrollo plano de cilindro y cono. • El volumen. • Unidades de volumen: metro, decímetro, centímetro y milímetro cúbico. • Relación entre capacidad y volumen. • Cálculo mental: resolver operaciones y problemas calculando tantos por ciento de distintas cantidades. • Resolución de problemas aplicando los procedimientos de resolución aprendidos. • Relaciones geométricas: incidencia, intersección, separación, inclusión, paralelismo, perpendicularidad, convexidad. • Figuras equivalentes según criterios topológicos. • El orden de los elementos geométricos y de las figuras. • Proyección de cuerpos sobre superficies planas.

Las actitudes hacia la geometría propuestas por este grupo son:

- Curiosidad por desarrollar estrategias relacionadas con el cálculo de superficies.
- Valoración de la precisión en el manejo de instrumentos de medida.
- Gusto por la presentación ordenada y clara de los trabajos.
- Interés por identificar las formas geométricas en el entorno.
- Reconocimiento de la presencia de los poliedros y de los cuerpos redondos en el entorno vital cotidiano.
- Gusto por la propia construcción de poliedros y cuerpos redondos.

- Valoración de la precisión y de la limpieza en el proceso de elaboración de construcciones geométricas.
- Aprecio de la necesidad de expresar el volumen con la unidad de medida más adecuada para cada situación.
- Gusto por el rigor y el orden en la presentación y comunicación de resultados.
- Valoración de la aplicación de la geometría a la vida cotidiana.
- Interesarse por las reglas del juego matemático y esforzarse para encontrar estrategias personales y apreciar las que utilizan los compañeros y compañeras.
- Habituarse a intercambiar y argumentar los descubrimientos y soluciones de problemas utilizando progresivamente el lenguaje matemático con precisión.
- Reaccionar con progresiva autonomía delante de situaciones matemáticas seleccionando los medios correctos.
- Mostrar interés a la hora de desarrollar el razonamiento algebraico elemental.
- Ser consciente de sus limitaciones y ver que el error es parte del proceso de aprendizaje.

El conjunto de objetivos propuestos por los grupos, evidencia la concepción que los estudiantes exhiben en relación con los “contenidos matemáticos”, articulada alrededor de un listado de temas que resalta la dualidad conceptos-procedimientos. Se considera que una concepción de las matemáticas y de su enseñanza basada en tal dualidad puede ser un obstáculo para que los maestros reconozcan y promuevan el razonamiento algebraico elemental en los niños. “*Los maestros efectivos son capaces de guiar a sus estudiantes desde sus comprensiones presentes hacia un nivel superior que los prepare para el viaje futuro*” (National Research Council, 2001, p. 12); un maestro con una concepción limitada bien podría no ser “efectivo” en los términos anteriormente expresados.

Durante las sesiones de clase teórica y durante algunas sesiones de asesoría, se discutió con los estudiantes sobre la limitación del concepto de “contenidos matemáticos” como un listado de temas, y se intentó que reflexionaran sobre esta concepción y que la contrastaran con la propuesta de contenidos matemáticos en términos de las entidades primarias propuestas por el EOS: Elementos lingüísticos, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos. Adicionalmente se plantearon discusiones sobre la importancia de efectuar conexiones entre las entidades primarias para conseguir una visión un poco más estructurada del conocimiento matemático.

En la sección 7.3.2.1 -Las Sesiones de Trabajo- del séptimo capítulo se muestra la interpretación que algunos grupos dieron a esta sugerencia.

A continuación se muestran algunas interpretaciones que los grupos dieron a la propuesta de contenidos matemáticos.

6.5.4 Secuencia de Actividades

Las actividades a las que se refiere este apartado son las que "se prevé realizar en cada una de las sesiones de clase planificadas, indicando los recursos didácticos pertinentes".

El conjunto de grupos propuso actividades diversas que se enmarcan, de acuerdo con su propuesta, en el razonamiento algebraico elemental. En lo que sigue daremos una mirada al conjunto de actividades propuestas e indicaremos algunas de las características que tal conjunto de actividades tienen.

6.5.4.1 Los Hallazgos

La Tabla 6.10 muestra las temáticas de las tareas propuestas por el conjunto de grupos.

Tabla 6.10. Temáticas de las Tareas Propuestas por los Grupos.

Bloques Temáticos[4]	***Bloque 1*** Números y operaciones	***Bloque 2*** La medida: Estimación y cálculo de magnitudes	***Bloque 3*** Geometría	***Bloque 4*** Tratamiento de la información, azar y probabilidad
Número de ejercicios	19	1	3	0

El número de las actividades que se localizan en el bloque de números y operaciones, sugiere el carácter fuertemente aritmético que los estudiantes conceden a las actividades relacionadas con el razonamiento algebraico en la escuela elemental. Parece que los maestros consideran que la base del pensamiento algebraico se encuentra en lo numérico y en lo operativo; postura que es documentada por Stanley (2002).

Dentro del conjunto de tareas propuestas para el bloque uno, Tabla 6.10, resaltó por su numerosidad un tipo de tarea denominada por los estudiantes como de "valores faltantes"; vale notar que en la literatura se encuentran ejemplos de uso de este tipo de tareas (Kieran, 1991; Carpenter, Franke y Levi, 2003) sin embargo los estudiantes plantearon tareas para todas las operaciones aritméticas: Suma, resta, división, multiplicación y exponenciación, adicionalmente

[4] Estos bloques temáticos están propuestos por el R.D. 1513 del 2006 sobre las enseñanzas mínimas.

propusieron tareas con uno y dos valores faltantes. Las tareas de dos o tres valores faltantes o de exponenciación son novedosas en el contexto de tareas reportadas en la literatura.

A manera de ilustración se exhibe en la Figura 6.1 una tarea con varios valores faltantes.

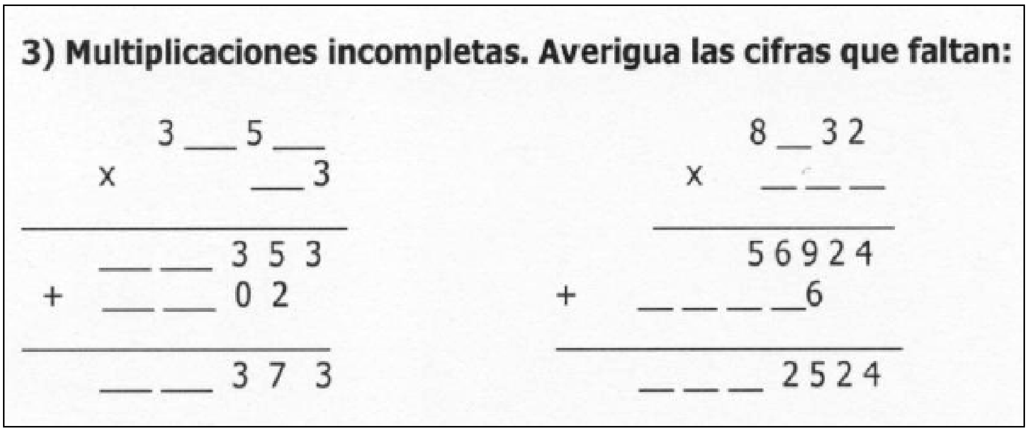


Figura 6.1. Ejemplo de Tarea de Valores Faltantes.

Kieran (1991) sugiere la introducción de las ecuaciones mediante identidades aritméticas a las que se les “oculta” un número (valor faltante), la autora sugiere reducir el efecto negativo que la transición entre la aritmética y el álgebra tiene en los niños. Otros autores han explorado el uso de este tipo de ecuaciones con niños de escuela elemental (Carpenter, Franke y Levi, 2003). Al parecer los estudiantes consideran que aquellas tareas en las cuales se debe encontrar un valor desconocido son características del razonamiento algebraico; tal vez asocian el valor faltante con el concepto de incógnita. Vale la pena mencionar que Cai (2004, p. 110) reporta la inclusión de este de tipo de tareas en el currículo matemático chino.

Parece que la atención de los maestros en formación se centra en tareas de carácter aritmético, en tanto que contrasta el menor número de tareas de carácter geométrico que de carácter aritmético. En este sentido Charbonneau (1996) encontró que las principales raíces del álgebra estuvieron en el razonamiento geométrico más que en las generalizaciones aritméticas y rechaza la visión del álgebra como una generalización de la aritmética. Empero el énfasis de los libros de texto es sobre todo aritmético. Aunque no se realizó un análisis de contenido de los libros texto usados por los grupos, se evidencia a partir de una revisión de los contenidos temáticos de aquellos, el énfasis puesto en las tareas aritméticas y en el uso de fórmulas (para calcular el área, el perímetro, etc.). La Tabla 6.11 muestra la distribución de las tareas de este tipo de acuerdo con el número de valores faltantes, así como el tipo de operaciones que se deben realizar para encontrarlos.

Tabla 6.11. Distribución de Tareas de Valores Faltantes por Grupos.

	Suma	**Resta**	**Producto**	**División**	**Algoritmo de la División**	**Algoritmo del Producto**	**Exponentes**
Varios valores faltantes					X_{G2} X_{G3}	X_{G2} X_{G7}	
Único valor faltante	X_{G3} X_{G4} X_{G7}	X_{G7}	X_{G2} X_{G3} X_{G7}	X_{G3} X_{G7}			X_{G3} X_{G7}

Nota: X_{G3}: Significa que el grupo G3 propuso tareas en esa entrada de la Tabla.

El conjunto de actividades propuestas por los estudiantes pueden ser ubicadas en diez categorías que se ilustran en la Tabla 6.12. La agrupación se basa en tres criterios: El primero fue que se pusieran en cuestión elementos propios del razonamiento algebraico, como los considerados por Kücheman (1981); el segundo, que se pusiera en cuestión uno o varios de los elementos del razonamiento algebraico elemental considerados en la propuesta de Burkhardt (2001) y el tercero, que pusieran en cuestión nuevos elementos diferentes de los anteriores y propuestos por los estudiantes.

Es menester indicar que algunos grupos propusieron tareas cuya clasificación es difícil; se trata de tareas en donde se pide, por ejemplo, que el niño complete las palabras que hacen falta en enunciados de propiedades numéricas de los diversos sistemas numéricos. En el Anexo F -Algunas Tareas de Difícil Clasificación- se muestran algunas de tales tareas, que no fueron incluidas en las categorías anteriores. En lo que sigue, se presentarán algunas tareas (por razones de presentación, en algunos casos, se ha transcrito la propuesta de los estudiantes) que ilustran cada una de las diez categorías propuestas en las tablas anteriores y se comentará su carácter algebraico y se ubicarán en el contexto de las investigaciones sobre el razonamiento algebraico elemental.

6.5.4.1.1 Letra Evaluada

La definición dada por Kücheman (1981; p. 104) es: "*La letra puede ser evaluada inmediatamente, su valor puede ser determinado directamente por ensayo y error, no hay pasos intermedios*".

Tabla 6.12. Categorías en las que se Ubican las Tareas Propuestas por los Maestros en Formación.

	Kücheman (1981)						**Burkhardt (2001)**				**Maestros en Formación**		
	Letra evaluada	Letra ignorada	Objeto	Letra desconocida	Número generalizado	Variable	Valor faltante	Incógnita	Problemas de palabras	Encontrar regla o patrón	Cálculo de expresiones	Representación de relaciones	Valor desconocido
G_1	x				x			x	x		x	x	
G_2			x				x		x				
G_3	x						x	x		x		x	
G_4	x						x					x	x
G_5								x	x	x			
G_6							x		x			x	
G_7	x						x						

La mayoría de las actividades propuestas por los estudiantes para esta categoría se ubican en la temática de geometría; una de tales tareas con su correspondiente solución se muestra en la Figura 6.2.

2. Ejercicio ampliación/ refuerzo.

Nacho quiere poner una valla alrededor de un centro de flores circular de 2m de radio. ¿Cuanto medirá la valla?

Solución:

La valla medirá lo siguiente:

L = ∏ x r2= 3,14 x 22= 12,56m

Figura 6.2. Ejemplo de Tarea sobre Letra Evaluada.

Tanto en esta tarea como en las otras de la misma categoría, los estudiantes suelen favorecer el cálculo numérico sobre los conceptos geométricos que deben ser reconocidos para una aplicación significativa de la fórmula. Consideran de esta forma que el reemplazo de valores numéricos en fórmulas y el subsecuente desarrollo de los cálculos son prototípicos del razonamiento algebraico elemental.

6.5.4.1.2 Letra como Objeto

De acuerdo con Kücheman (1981), la letra como objeto hace referencia a que la letra actúa como nombre o rótulo más que como número.

Las experiencias de los estudiantes con el álgebra a menudo los conducen a que consideren las letras como abreviaciones de objetos. Clement (1982) y Kieran y Chalouh (1993) han señalado que tales experiencias conducen a su uso con significaciones diferentes a las usadas en álgebra. En aritmética los niños experimentan el uso de las letras para denotar medidas, por ejemplo 5m denota 5 metros, sin embargo, en álgebra 5m puede denotar cinco veces un número no especificado.

Kücheman (1981) reporta que la expresión (2m + 5b + a) es interpretada por los niños como una abreviación que denota dos manzanas y cinco bananas y otra manzana; evidencia que m y b son interpretadas como manzanas y bananas en lugar de número de manzanas y número de bananas respectivamente.

La misma interpretación se manifiesta cuando los maestros en formación resuelven algunas tareas. En la Figura 6.3 se muestra la primera parte de la resolución de la siguiente tarea:

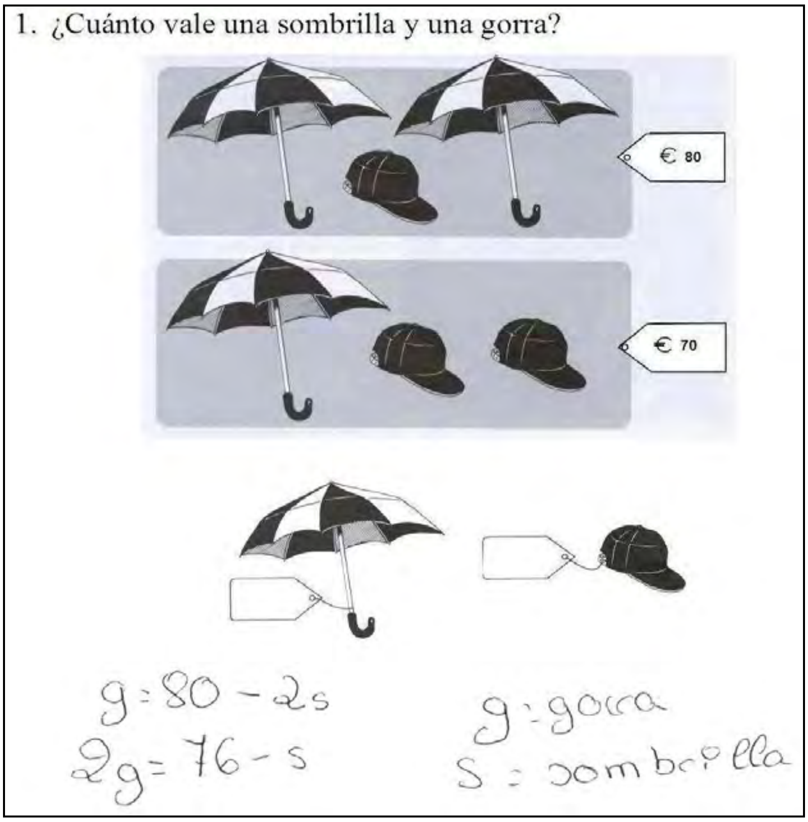


Figura 6.3. Primera parte de la Solución de la Tarea de Sombrillas y Gorras.

Se observa que "g" y "s" son interpretadas como gorras y sombrillas respectivamente; en el mismo sentido reportado por Kücheman (1981); sin embargo esto parece no afectar al proceso de solución de la tarea, cuya respuesta es dada en términos del costo de una sombrilla y de una gorra.

Podría ser que los maestros usen un convenio implícito que acepta la co-existencia de letra como objeto y letra como incógnita, pero que mantienen el "control" sobre la incógnita ya que al final del proceso de solución ofrecen la respuesta correcta a la tarea, indicando tanto el valor numérico como la incógnita que corresponde al valor numérico hallado. Lo que los maestros hacen recuerda el convenio de sumación de Einstein en el que se suprime el símbolo de la sumatoria.

6.5.4.1.3 Letra como Número Generalizado

Para Kücheman (1981; p. 104) la letra representa un conjunto de números más que un sólo valor. En el conjunto de tareas propuestas por los estudiantes, sólo se encuentran tres tareas que corresponden a la letra como número generalizado. Una de las actividades propuestas por los estudiantes y que encajan en esta categoría se exhibe en la Figura 6.4.

2. Cambia las letras por números del 1 al 16 de manera que sumados en cualquier dirección, el resultado sea 34.

A	3	B	13
5	10	C	D
E	6	7	F
4	G	H	1

Figura 6.4. Tarea de Cambiar Letras por Números.

Para la categoría variable tampoco propusieron actividades, esto podría estar motivado por la ausencia de referencias al concepto de variable en los lineamientos curriculares españoles (MEC 2006)[5], que no lo incluyen en la educación matemática para el tercer ciclo de primaria. Adicionalmente, los maestros mismos podrían tener dificultades para identificar, usar y resolver actividades matemáticas que involucren el concepto de variable. Asquith et al., (2007) reportan que los maestros de secundaria tuvieron dificultades para resolver algunas tareas y para predecir

[5] Se hace referencia al R. D. 1513/2006, de 7 de diciembre, se usarán indistintamente.

las dificultades experimentadas por los niños cuando resolvían tareas que requerían el uso del concepto de variable. Es posible que lo mismo ocurra con los maestros de primaria.

Ninguno de los grupos propuso actividades para las categorías de "letra desconocida" (la letra representa un número desconocido que no puede ser evaluado) y "letra ignorada" (la letra puede ser ignorada cuando se resuelve la tarea). Parece que los maestros consideran que los niños deben operar con las letras o reemplazarlas por valores numéricos y en modo alguno ignorarlas o no asignarles significado.

6.5.4.1.4 Valor Faltante

La expresión "valor faltante" hace referencia a uno o a varios valores numéricos que hacen falta y que deben ser encontrados siguiendo diversos procedimientos aritméticos. Esta categoría reúne el mayor número de actividades propuestas por los estudiantes. Una de tales tareas es: "*completa y calcula:__ x 38 = 5396*".

En la Tabla 6.11 se muestra el tipo de actividades sobre valores faltantes según: Operaciones usadas, cantidad de valores faltantes (uno o varios). El subíndice indica el grupo que propuso la tarea. El total de actividades propuestas en esta categoría corresponden a ecuaciones aritméticas en tanto que la interpretación aritmética (Gallardo y Rojano, 1988) del signo igual como resultado es suficiente para resolverlos.

Uno de los grupos (G2) sólo propuso tareas de valor faltante para todas y cada una de las unidades temáticas[6] consideradas. Los grupos G1 y G4, también proponen este tipo de tareas. Al parecer consideran que tales tareas son esenciales en una presentación temprana del razonamiento algebraico en la escuela elemental en tanto que pueden ser asociados con el concepto de valor desconocido que debe ser encontrado, es decir, con el concepto de incógnita.

El siguiente segmento muestra la postura de los estudiantes del grupo G2 frente a su escogencia de este tipo de tareas como de razonamiento algebraico elemental:

> I: ¿Por qué creen que este [ejercicio] que dice "calcula el término que hace falta" es de razonamiento algebraico elemental?
>
> E13: Aunque no aparezcan letras, aparece una incógnita, un hueco en blanco no aparece como una letra ni como…tienes que averiguar lo que falta por una operación, una división o algo y a partir de ahí tiene que averiguar el hueco en blanco que depende de cómo lo quieras poner; pero en lugar de un hueco en blanco también puedes poner una letra.

[6] Números naturales, enteros, fraccionarios y decimales. Igualmente propone este tipo de ejercicios en el caso de operaciones de suma y resta entre ángulos, minutos y segundos.

Las ecuaciones cuyo valor faltante corresponde a un exponente amplía el tipo de ecuaciones aritméticas que se podrían resolver en la escuela elemental (Gallardo y Rojano, 1988; Filloy y Rojano, 1989) ya que se agrega un nuevo tipo de ecuaciones: Las ecuaciones exponenciales aritméticas. Una revisión de algunos libros de texto usados por los estudiantes evidenció que no consideraban tales tipos de tareas. Podría ser el caso que los estudiantes propusieron estas tareas como una creación propia.

6.5.4.1.5 Incógnita

El término “incógnita” se refiere a uno o varios valores numéricos desconocidos representados con letras y que pueden ser hallados mediante un procedimiento (el valor puede determinarse con exactitud, considerando las restricciones propias de la tarea). Una tarea propuesta para esta categoría se muestra en la Figura 6.5.

2.-Efectúa la siguiente suma.

$$\begin{array}{r} \text{ba8} \\ +\ \text{42a} \\ \text{ab4} \\ \hline \text{1a15} \end{array}$$

Figura 6.5. Ejemplo de Tarea sobre Incógnitas.

Varios aspectos llaman la atención en esta actividad; el primero es la redacción de la consigna, en tanto que los estudiantes piden encontrar el resultado de la suma, pero en verdad deben encontrar los valores de las letras de tal suerte que la igualdad sea válida. El segundo es que la concatenación entre números y letras debe ser interpretada por los niños en términos del sistema posicional y en modo alguno como un producto no indicado. Es de notar la metonimia “algebraica” espontáneamente usada por los maestros en formación.

El tercero es que se pide efectuar la suma, misma que ya está efectuada; al parecer los estudiantes consideran que la operación no está cerrada y es esta falta de cierre (Kieran, 1981) lo que convoca la búsqueda de los valores que las letras tienen. El cuarto aspecto está relacionado con el significado relacional del signo igual, resaltado por Subramaniam y Banerjee (2004), y que faculta la solución de la tarea pero que no es reconocido por los maestros en formación.

El quinto es que el procedimiento usado para resolver la tarea hace uso del algoritmo de la suma y requiere resolver un conjunto de ecuaciones anidadas lineales y paramétricas, una de las cuales es: $8+a+4=t5$, en donde t es el parámetro que toma valores en el conjunto de los números que van desde el cero hasta el nueve. La solución de este conjunto de ecuaciones recuerda el método simplex (Sinha, 2006) usado en programación lineal.

Ni la dificultad de este tipo de actividades ni las oportunidades que ofrecen para discutir algunos aspectos algebraicos elementales es reconocida explícitamente por los futuros maestros en su planeación de la actividad matemática. En términos generales, parece que han alcanzado cierto nivel de identificación de aspectos algebraicos que pueden ser abordados por los niños. Sin embargo, la preferencia de algunos significados sobre otros sin que medie justificación o explicitación alguna revela cierto desconocimiento de la compleja red de relaciones entre aspectos conceptuales y procedimentales que caracterizan el razonamiento algebraico (Blanton y Kaput, 2005, p. 414).

6.5.4.1.6 Problemas de Palabras

Se refiere “problemas de palabras” a la solución de una tarea de enunciado verbal, que pueden incluir el uso de procesos numéricos o algebraicos. Una de las tareas propuestas se ilustra en la Figura 6.6.

3. El autobús sale de Villamenor con cierta cantidad de pasajeros, en la primera parada bajan 4 pasajeros, en la segunda suben 12, en la tercera bajan 7, en la cuarta bajan 9 y llegan a Casanueva 14 pasajeros. ¿Con cuántos pasajeros salió el autobús de Villamenor?

Figura 6.6. Ejemplo de Tarea de Problemas de Palabras.

La actividad es valorada por los maestros como de razonamiento algebraico elemental, en tanto que puede resolverse mediante una ecuación lineal; método que es usado por los estudiantes para la resolución.

Los maestros afirman al inicio del proceso de resolución, pensado para ser explicado a los niños: “*Tenemos un autobús con una cantidad de pasajeros que desconocemos y a la cual llamaremos A*” (G1). La Figura 6.7 muestra como traducen cada sentencia del enunciado de la tarea a una expresión algebraica.

Solución

2) En la primera parada bajan cuatro pasajeros, con lo cual tras haber realizado esta parada el número de pasajeros con los que cuenta el autobús son → Los pasajeros con los que salió de Villamenor – 4 que se han bajado → A – 4

Figura 6.7. Fragmento de la Solución a la Tarea de Problema de Palabras.

Así continúa la solución de la tarea, hasta que finalmente obtienen la ecuación: $A - 4 + 12 - 7 - 9 = 14$; el proceso de solución de la ecuación usado por los estudiantes se muestra en la Figura 6.8. Finalmente afirman: *"El autobús salió de Villamenor con 22 pasajeros"*.

6) Finalmente sabemos que llegan a Casanueva 14 pasajeros, por lo que no tenemos más que igualar los pasajeros que tiene el autobús tras realizar la cuarta parada a 14 y podremos hallar el número de pasajeros A con los que salió de Villamenor:

$$A - 4 + 12 - 7 - 9 = 14$$

$$A - 8 = 14$$

$$A = 22$$

7) El autobús salió de Villamenor con 22 pasajeros

Figura 6.8. Fragmento Final de la Solución a la Tarea de Problema de Palabras.

Los problemas verbales aritmético-algebraicos han sido ampliamente estudiados tanto en el ámbito curricular (Bell, 1996) como en el ámbito cognitivo. Diversos autores han estudiado los problemas de palabras en el proceso de transición desde la aritmética hacia el álgebra (Bednarz y Janvier, 1996; Filloy, Rojano y Rubio, 2001; Puig y Cerdan, 1990; Cerdan, 2008).

Puig y Cerdan (1990) consideran que un problema verbal es aritmético o algebraico en función del proceso de traducción; si este conduce a una expresión que sólo involucra los datos o a una expresión que involucra una incógnita o ecuación, el problema se dice aritmético o algebraico, respectivamente. Un problema aritmético puede resolverse mediante el proceso de análisis-síntesis, mientras que uno algebraico mediante el método cartesiano.

Valorados con la propuesta de Puig y Cerdan-ibid- los problemas verbales propuestos por los estudiantes son aritméticos. Sin embargo, los estudiantes los consideran algebraicos en tanto que pueden ser resueltos mediante el uso de ecuaciones.

Un ejemplo de una actividad cuyo carácter aritmético resalta pero que es valorada como "algebraica" por los estudiantes, se ilustra en la Figura 6.9.

5.-En esta tabla se recogen las preferencias deportivas de los niños y niñas del colegio de María. Completa la tabla y contesta.

a) ¿Cuántos niños/as prefieren el tenis?
b) ¿Qué significa el número 18 de la tabla? ¿Y el número 20?
c) ¿Cuál es el deporte preferido por las niñas? ¿y por los niños?
d) ¿Cuál es el deporte que menos prefieren los niños? ¿Y las niñas?

	Niñas	niños	total
natación	23	25	
Tenis	12	10	
Futbol	18		45
Esquí		20	41
balonmano	19	21	40
Total	93	103	

Figura 6.9. Ejemplo de Tarea Numérico-Algebraica.

Los estudiantes la valoran como algebraica ya que puede ser resuelta mediante una ecuación lineal. Sin embargo, los estudiantes conceden que la tarea puede ser resuelta mediante un proceso aritmético de resta sin usar ecuaciones. El método sugerido por los estudiantes es el de "reversa" en donde la operación efectuada se "deshace".

A diferencia de los hallazgos de Van Dooren, Vershaffel, y Onghema (2003) que reportan que las estrategias usadas por los maestros en formación para resolver tareas de palabras, se ubican en dos grupos: Las que se adaptan a la naturaleza aritmética o algebraica de la tarea y las de tipo numérico que se muestran insuficientes para abordar las tareas de naturaleza eminentemente algebraica, los estudiantes en nuestro estudio parece que preferencian la solución algebraica para justificar su inclusión en la unidad didáctica, aunque reconocen que los niños usarán una estrategia numérica para resolver la tarea.

Los estudiantes afirman que la tarea propuesta es para la "*Introducción a la notación algebraica mediante el uso de incógnitas*" y contemplan dos aspectos imbricados en la solución de tareas algebraicas: La traducción de la lengua vernácula al lenguaje algebraico y posteriormente, del lenguaje algebraico a la lengua vernácula.

Posteriormente afirman que la “traducción de frases al lenguaje algebraico” tiene como propósito:

> *“Representar una información determinada de manera algebraica, para poder realizar un trabajo matemático con ella”, y viceversa “Traducción al lenguaje ordinario de expresiones algebraicas”, ya que “Una vez realizado el trabajo matemático con la información que hemos traducido al lenguaje algebraico, es necesario ‘retraducir’ la solución hallada al lenguaje ordinario con el objeto de poder comunicarla” (G1).*

6.5.4.1.7 Patrón o Regla

Se hace referencia a la identificación tanto de una regla o propiedad como de un patrón numérico. Los estudiantes proponen actividades numéricas en las que se pide generalizar un principio aritmético. Una tarea del tipo fue propuesta por (G3) y se exhibe en la Figura 6.10.

4.-Calculo mental

i. Efectúa estas sumas intentado llegar a una regla. Explica dicha regla y a continuación hazlas mentalmente para ensayar dicha regla.

175+101

567+201

685+401

Figura 6.10. Ejemplo de Tarea de Patrón o Regla.

La regla a la cual se refieren los estudiantes (G3) es: “*para sumar 101, 201, 301… a un número, se suman primero 100, 200, 300… y después se suma 1*”. [Sic]

Si bien es cierto que se puede cuestionar que la tarea anterior sea considerada como de identificación de patrones en toda regla, también es cierto que los maestros han modificado la tarea originalmente propuesta y han modificado la consigna. Han propuesto obtener una regla a partir de un listado de operaciones aritméticas. Parece claro que a partir de lo numérico se pretende avanzar hacia el álgebra al identificar estructuras sencillas pero que bien podrían ser generalizadas en toda regla.

La Figura 6.11 exhibe la tarea original tomada del libro texto Anaya (2006; p. 9), que fue modificada por los maestros en formación.

Cálculo mental

REGLA	EJEMPLO	HAZLO TÚ		
Para sumar 101, 201, 301,... a un número, se suman, primero, 100, 200, 300,... y, después, se suma 1.	**462 + 201**	175 + 101	583 + 301	296 + 601
	462 + 200 = 662	567 + 101	264 + 401	372 + 601
	662 + 1 = 663	243 + 201	356 + 401	153 + 701
	462 + 201 = 663	685 + 201	132 + 501	245 + 701
		307 + 301	474 + 501	121 + 801

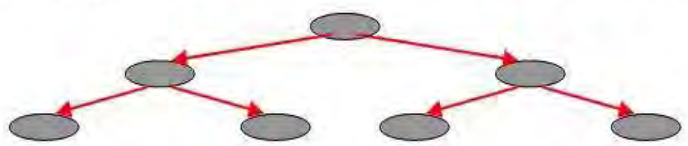
Figura 6.11. Tarea Original que fue Modificada para ser RAE.

La solución de la tarea sobre el cálculo mental requiere utilizar la propiedad asociativa y generalizar la regla. Las operaciones y sus propiedades se han localizado entre algunas dificultades en el estudio del álgebra (Williams y Cooper, 2001). En este sentido los maestros en formación ponen en situación la identificación de una “regla” numérica.

Otra tarea que fue propuesta por los estudiantes (actividad número dos, grupo G5) se exhibe en la Figura 6.12.

❖ **ACTIVIDAD Nº 2**

Una bacteria se reproduce por división celular: de cada una se obtienen dos.



¿Cuántas bacterias forman la 5ª generación? ¿En la 8ª generación? Exprésalo en forma de potencia.

Figura 6.12. Tarea sobre la Reproducción Celular.

La solución de la tarea sobre la reproducción celular requiere, en un enfoque particular, establecer una correspondencia entre cada “generación” y un número natural obtenido inicialmente por suma de varios números “dos”, posteriormente expresar este número, de manera equivalente, usando el concepto de potencia entera de un número.

Esta tarea aparece propuesta en el libro texto Anaya (2006, p. 31) y su enunciado se exhibe en la Figura 6.13.

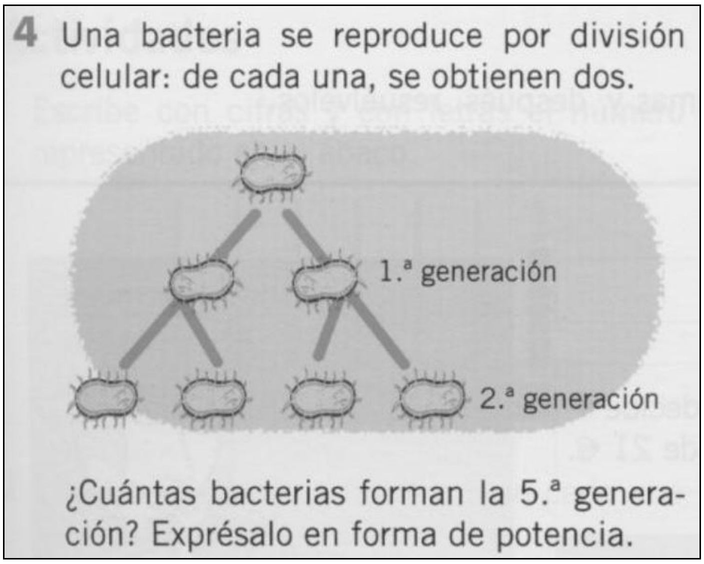


Figura 6.13. Tarea Original sobre Reproducción Celular.

Nótese que se pide identificar el número de bacterias en la quinta generación, pero los maestros agregaron la consigna “en la octava generación” y en ese sentido modifican la tarea, que puede catalogarse como de cuasi-generalización. Los maestros no piden, por ejemplo, identificar el número de bacterias en el caso general.

Se colige de los resultados de las investigaciones (Lee, 1996; English y Warren, 1998; Cooper y Warren, 2008; Carpenter, Frankle y Levis , 2003; Becker y Rivera, 2008) que los niños pueden resolver tareas matemáticas propias de la generalización; sin embargo, parece que el grupo de maestros en formación no consideran este tipo de actividades como propicias para desarrollar el razonamiento algebraico elemental, en tanto que sólo se identifican dos actividades relacionadas con la generalización.

Al parecer los maestros no reconocen de manera espontánea las tareas de generalización o cuasi-generalización porque su concepción del razonamiento algebraico elemental está basado en dos elementos: El primero es que el álgebra está vinculada al uso de letras en donde median operaciones numéricas y el segundo es que los libros de texto no proponen tareas para encontrar o justificar reglas o patrones.

A continuación se exhiben tareas que corresponden a propuestas novedosas. En esta parte se quiso recopilar las tareas que no corresponden estrictamente a las categorías anteriores. Si bien, en algunos casos se podrían incluir las “nuevas propuestas” en las categorías ya consideradas, se ha decidido conceder relevancia a los argumentos expuestos por los maestros en defensa del carácter algebraico de sus propuestas.

6.5.4.1.8 Representación de Relaciones

Este apartado hace referencia a la representación numérica o algebraica de relaciones entre números o letras, tales como el doble, el triple, etc. Uno de los grupos (G1) propuso la tarea que se muestra en la Figura 6.14.

Actividades de refuerzo[1]

1. Información condensada

Utilizando operaciones aritméticas y letras, expresa lo más concisamente que puedas cada una de las siguientes informaciones:

- La edad de Roberto es cinco años menos que la de Arturo.
- Antonio tiene 200 euros más que Juan.
- Carmen supera a Concha en tres años.
- Marisa tiene triple dinero que Eva.

Figura 6.14. Ejemplo de Tarea de Representación de Relaciones Numéricas.

Los maestros consideran que las representaciones numéricas y algebraicas de relaciones del tipo “más que”, “menos que”, “el doble” son propias del razonamiento algebraico elemental. Es de resaltar la identificación hecha por los estudiantes de elementos lingüísticos cuya interpretación puede modificar el proceso de significación y solución de la actividad matemática por parte de los niños; el efecto que tienen ciertas palabras clave en los procesos de “traducción” de formulaciones verbales a las correspondientes expresiones matemáticas ha sido estudiado por Nesher y Teubal (1975).

Hainley (1978) afirma que la solución de tareas que involucran situaciones en donde se debe responder a la pregunta “cuánto más” supera un número a otro, o “cuánto menos” es menor un número, y que se resuelven mediante un procedimiento que el autor denomina “suma complementaria”, (p. 28) son complejas para los niños en tanto que usan palabras que tienen múltiples significados.

Los maestros reconocen que algunas estructuras del lenguaje pueden afectar la comprensión y la solución de las actividades matemáticas lo cual podría ser evidencia de su propia evolución en la comprensión de la notación algebraica. Para MacGregor y Price (1999) “*la conciencia de las estructuras del lenguaje y la habilidad para manipular esas estructuras puede ser una manifestación de un proceso cognitivo más profundo que también subyace la comprensión de la notación algebraica*” (p. 462).

Otro de los grupos (G6), propuso la tarea ilustrada en la Figura 6.15.

2. Ejercicio propuesto (mismo con tabla):

Las clases de 5º y 6º están recogiendo juguetes para la campaña de Navidad. La información se muestra en la tabla siguiente.

Grados	5A	5B	5C	6A	6B	6C
Cantidad de juguetes recogidos	160	90	130	140	120	90

Responder a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos juguetes recogió cada clase de 5º? ¿y cada clase de 6º?
2. ¿Qué clase recogió más juguetes? ¿y menos?
3. ¿Cuántos juguetes recogió 6º A más que 6º C? ¿Y cuántos recogió 5º B menos que 6º B?

Figura 6.15. Otro Ejemplo de Tarea de Representación de Relaciones Numéricas.

Estos dos grupos de maestros coinciden en valorar el establecimiento de relaciones "más que" o "menos que" como parte del razonamiento algebraico elemental. En el primer ejemplo los maestros en formación piden usar letras mientras que el segundo sólo piden responder a las preguntas de carácter aritmético. Se identifica aquí el uso tanto de lo simbólico como de lo numérico para representar relaciones.

Boulton-Lewis, Cooper, Atweh, Wilss y Mutch (1997) proponen representar números, operaciones aritméticas, manipulación de símbolos operativos y paréntesis en la aritmética, y resaltan la relación entre estas actividades aritméticas y las correspondientes algebraicas. Los autores consideran que las demandas cognitivas crecientes de las actividades y el reconocimiento de las relaciones facilitan el trabajo con incógnitas y posteriormente, con variables.

Al parecer los maestros, en consonancia con las investigaciones de Boulton-Lewis et al., -Ibid- consideran que el reconocimiento de estas relaciones en la aritmética potencia su posterior uso en el álgebra; esto también coincide con los hallazgos de diversos autores (Chevallard, 1989; Sfard, 1991) que conceden importancia al conocimiento aritmético sobre el cual se fundamenta el conocimiento algebraico.

6.5.4.1.9 Valor Desconocido

Se hace referencia a cualquier valor numérico desconocido en la tarea. En esta categoría se agrupan las actividades matemáticas en las que se debe hallar un valor numérico desconocido. Otro grupo (G6) propuso un ejemplo que ilustra este tipo de categoría y se muestra en la Figura 6.16.

A) RESOLUCION DE PROBLEMAS:

1. Ejercicio propuesto:

Lee el problema y da la solución correcta.

Paula tiene una tienda de ropa de deporte. Hoy ha hecho un pedido de 24 camisetas a 19€ cada una, 15 chándales a 38€ cada uno y 30 zapatillas deportivas a 42€ cada par. ¿Cuánto tiene que pagar Paula por el pedido?

Solución:

1 camiseta ______________ 19€
24 camisetas______________ ?

1 chándal _______________ 38€
15 chándales ____________ ?

1 par zapatillas___________ 42€
30 pares zapatillas ________ ?

(19 x 24)+(38 x 15)+(42 x 30)=

=2286 €. Paula tiene que pagar esa cantidad por el pedido.

Figura 6.16. Ejemplo de Tarea de Valores Numéricos Desconocidos.

Los maestros tienen una postura clara en relación con el carácter algebraico de este tipo de actividades:

> I: Cuando se plantea este ejercicio, el de Paula y las camisetas: una camiseta vale 19€, 24 camisetas….aquí aparece un interrogante, ¿Qué significa este interrogante?
> E3: Es una incógnita, vamos, el número que no conocemos y tenemos que encontrar, claro…

Si bien este tipo de tareas podrían ubicarse en el grupo Incógnita se le ha concedido una entidad propia por la conjunción de dos elementos identificados por los maestros: Un valor desconocido y el proceso para determinarlo.

La propuesta de este tipo de actividades como propias del razonamiento algebraico elemental podría estar fundamentada en la creencia que el álgebra trata con valores desconocidos -incógnitas- y con procedimientos para hallarlos. Dado que el álgebra es un sistema abstracto en el cual las operaciones reflejan la estructura aritmética (Cooper, Williams y Baturo, 1999), entonces un valor numérico desconocido que debe ser hallado comparte las características algebraicas básicas de la incógnita.

6.5.4.1.10 Cálculo de Expresiones

Se refiere a la simplificación de expresiones de carácter algebraico. Una de las actividades propuestas en esta categoría (G1) se muestra en la Figura 6.17.

4º- Calcula las siguientes expresiones:

a) $a + \frac{a}{2} =$

b) 2 x (a+3)=

Figura 6.17. Ejemplo de Tarea sobre Cálculo de Expresiones.

Este tipo de tarea tiene un carácter procedimental muy marcado; uno de los miembros del grupo G1 que propuso la tarea, afirmó: "Los problemas de álgebra es cuando tienes una incógnita y la tienes que utilizar para calcular algo".

Al parecer los maestros, con base en su experiencia con el álgebra de la escuela secundaria, consideran que este tipo de actividades, que usan tanto expresiones algebraicas como operaciones, son propias del razonamiento algebraico elemental. El grupo de estudiantes que propusieron esta actividad exhiben cierta preferencia por las actividades algebraicas que enfatizan el razonamiento simbólico. Este hallazgo también fue identificado por Nathan y Koedinger (2000), quienes informan que los maestros de secundaria sostienen la precedencia del razonamiento simbólico sobre el razonamiento verbal.

El conjunto de actividades propuestas exhibe una variedad de tareas que alienta a pensar que los maestros en formación han avanzado hacia una propuesta ampliada del razonamiento algebraico en la escuela elemental. Si bien se debe reconocer que se evidencia cierta dependencia del modelo del álgebra escolar para la secundaria también se aprecia que los maestros en formación se han desvinculado un poco de la propuesta de tareas de carácter puramente algebraico y han propuesto actividades que bien pueden ubicarse en una "zona de transición" entre la aritmética y el álgebra.

6.5.4.1.11 Metodología de Trabajo en Clase

La metodología de trabajo en clase hace referencia a los modos de interacción entre profesor y alumno. La metodología propuesta por el conjunto de grupos está articulada con la referencia al constructivismo, seis de las siete unidades didácticas lo mencionan.

Sin embargo se aprecia que algunos grupos confían en el formato: Profesor explica, estudiantes hacen. De hecho uno de los grupos (G2) afirma "*en lugar de transmitir conceptos abstractos se resuelve un problema; es decir, desde el punto de vista metodológico es idéntica a las clases magistrales*". Si bien los estudiantes no explicitan lo que entienden como "clases magistrales" se podría colegir que clase magistral la asocian con clase "explicativa" a la que definen en los siguientes términos "*explicación breve, pero completa, de los contenidos del tema. La teoría de toda la vida, basta con una tiza y una pizarra, aunque también se utilizan presentaciones por ordenador, videos y la pizarra electrónica*" (G2).

Uno de los grupos (G5) afirma: "*Partiremos de los conocimientos previos para ir poco a poco facilitando al alumnado la conexión de lo que ya conoce con los nuevos conocimientos que se pretenden trabajar" para lograrlo "plantearemos una serie de problemas que, a través de un diálogo conjunto, resolveremos entre todos*" y agregan "*Posteriormente, este trabajo colectivo se realizará de forma autónoma lo que nos permitirá conocer la comprensión e interiorización de los contenidos y procedimientos trabajados por parte de cada alumno*".

Otro de los grupos (G7) afirma "*apostamos por una concepción constructivista. Por lo tanto, con nuestra propuesta didáctica queremos conseguir que el alumnado se mueva por la curiosidad hacia el aprendizaje, y ello les lleve no sólo a buscar soluciones a problemas ya dados, sino a construir y descubrir soluciones a problemas prácticos nuevos de nuestra sociedad*".

El grupo (G4) es más directo y propone "*los alumnos con los acontecimientos previos que tienen que realizar la tarea* [sic], *por lo que seguidamente nos vamos directamente a la instrucción, en el cual el docente corregirá el ejercicio en la pizarra*".

A partir de estas afirmaciones se pueden colegir las creencias de los estudiantes en relación con la metodología usada para la instrucción. Fenstermacher (1986) las considera como un criterio válido y las define como silogismos cuya conclusión es una acción o la determinación para actuar.

Las creencias que los maestros exhiben sobre el contenido temático y sobre su enseñanza son determinantes en los procesos de formación. Para Pajares (1998) "*las creencias también pueden* *ser valores, que albergan funciones evaluativas, comparativas y sentenciosas y confieren a la predisposición de un valor imperativo para la acción*", (p. 314).

En tanto que la mayoría de los estudiantes no tienen experiencia docente, más allá de tutorías a niños de escuela primaria, es comprensible que sean parcos en relación con la descripción tanto de la metodología como con los modos de interacción que consideran apropiados para ser usados con sus futuros alumnos.

Las creencias de los maestros en relación con la metodología a ser usada durante sus clases parecen reflejar las teorías cognitivas sobre el aprendizaje que han sido motivo de discusión en cursos previos de formación.

6.5.4.2 Conocimientos que el Maestro Presentará al Final de cada Sesión

A los maestros se les pidió completar esta parte con tres anexos: Resolución de las actividades propuestas, los conocimientos deben abarcar al menos los contenidos previstos y previsión de dificultades de los alumnos.

En lo que sigue se informará sobre lo que se encontró en la revisión a este apartado en el conjunto de unidades didácticas. Se mostrarán algunos ejemplos tomados de las unidades didácticas.

6.5.4.2.1 Resolución de Actividades Propuestas

En lo que sigue se informará sobre los hallazgos hechos en la revisión del conjunto de unidades didácticas. Los grupos G1 y G4 utilizaron la GROS para analizar epistémicamente la solución a la tarea y para derivar dificultades del mismo análisis. El resto de los grupos no usaron la GROS en la unidad didáctica final, si bien durante el proceso de elaboración de la unidad didáctica hicieron varios análisis que no incluyeron en su trabajo final. A continuación se darán cuatro ejemplos, dos de los grupos que usaron la GROS y dos de grupos que no la usaron.

6.5.4.2.2 Grupos que Usaron la GROS

G1 utilizó la GROS para identificar los objetos y significados matemáticos presentes y emergentes en la tarea. Se muestra a continuación, a manera de ejemplo, la solución que dieron de una de las actividades que propusieron. Primero resuelven la actividad y después proponen el análisis epistémico usando la GROS. En el séptimo capítulo, sección 7.3.2 -Caso Dos- se aprecia la evolución de este grupo en el uso de la GROS. El análisis que se muestra aquí evidencia el estado final de su competencia de análisis epistémico lograda durante el curso. La consigna de la tarea y su solución final se exhibe en la Figura 6.18.

2. Cambia las letras por números del 1 al 16 de manera que sumados en cualquier dirección, el resultado sea 34.

A	3	B	13
5	10	C	D
E	6	7	F
4	G	H	1

Solución:

Para resolver el problema empezaremos por calcular aquellas incógnitas en cuya fila, columna o diagonal haya tres datos conocidos. En principio observamos que en la segunda columna tan solo nos es desconocida la incógnita G, con lo cual resulta sencillo calcularla mediante el siguiente procedimiento:

$$3 + 10 + 6 + G = 34$$

O lo que es lo mismo

$$34 - 3 - 10 - 6 = G \longrightarrow G = 15$$

Una vez conocida G, nos resulta fácil calcular el valor de H (colocada en la 4ª fila) mediante un procedimiento similar al anterior:

$$4 + 15 + H + 1 = 34$$

O lo que es lo mismo

$$34 - 4 - 15 - 1 = H \longrightarrow H = 14$$

A continuación observamos que en la diagonal que va desde A hasta 1, tan solo desconocemos el valor de A, con lo cual tenemos que:

$$A + 10 + 7 + 1 = 34$$

O lo que es lo mismo

$$34 - 10 - 7 - 1 = A \longrightarrow A = 16$$

Ahora de la primera fila del cuadro, tan solo desconocemos el valor de B, con lo cual ya puede ser calculado:

$$16 + 3 + B + 13 = 34$$

O lo que es lo mismo

$$34 - 16 - 3 - 13 = B \longrightarrow B = 2$$

Figura 6.18. Consigna y Solución de la Tarea de Cambiar Letras por Números Propuesto por G1.

Continuación de la Solución:

Si seguimos tal y como estamos operando, vemos que en la primera columna, ahora tan solo desconocemos un dato:

$$16 + 5 + E + 4 = 34$$
O lo que es lo mismo
$$34 - 16 - 5 - 4 = E \longrightarrow \quad E = 9$$

Seguidamente nos fijamos en la tercera fila y vemos que tan solo desconocemos el valor de F, que ya puede ser calculado, y una vez conocido nos permitirá calcular el valor de D, situado en la última columna junto a F:

$$9 + 6 + 7 + F = 34$$
O lo que es lo mismo
$$34 - 9 - 6 - 7 = F \longrightarrow \quad F = 12$$

Por último calculamos el valor de D y C, ya que en ambas columnas tan solo nos queda un valor por desvelar:

$$13 + D + 12 + 1 = 34$$
O lo que es lo mismo
$$34 - 13 - 12 - 1 = D \longrightarrow \quad D = 8$$

$$2 + C + 7 + 14 = 34$$
O lo que es lo mismo
$$34 - 2 - 7 - 14 = C \longrightarrow \quad C = 8$$

El cuadro queda como mostramos a continuación:

16	3	**2**	13
5	10	**11**	**8**
9	6	7	**12**
4	**15**	**14**	1

Figura 6.18. Consigna y Solución de la Tarea de Cambiar Letras por Números Propuesto por G1 (Continuación).

El análisis epistémico realizado por los maestros se muestra en las siguientes Tablas numeradas desde la 6.13 hasta la 6.17.

Los elementos lingüísticos identificados por los maestros: "*Cambia las letras por números… resultado sea 34*" se significa en términos del procedimiento que requiere sumar los números en cada casilla para que cumplan la condición impuesta.

Tabla 6.13. Elementos Lingüísticos para la Tarea de Cambiar Letras por Números.

Tipos de objetos	**Significados** (relación de referencia o de uso)
REPRESENTACIONES (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, …)	
Cambia las letras por números del 1 al 16 de manera que sumados en cualquier dirección, el resultado sea 34.	Si sumamos los números colocados en cada una de las casillas de una fila, columna o diagonal, el resultado debe ser 34.

Tabla 6.14. Conceptos Identificados para la Tarea de Cambiar Letras por Números.

Tipos de objetos	**Significados** (relación de referencia o de uso)
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición)	
Introducción a la notación algebraica mediante el uso de incógnitas.	Los valores numéricos con los que debemos rellenar el cuadro son desconocidos, por ello usamos las incógnitas A, B, C, D, E, F, G y H para designarlos.
Suma →	Operación que nos permite encontrar el total, o suma, a partir de la unión de dos o más números a los que llamamos sumandos.
Resta →	Operación utilizada para encontrar la diferencia, o proceso de quitar un número de otro para encontrar la cantidad restante.
Ecuaciones de primer grado con una incógnita.	Expresión matemática que establece una relación de igualdad entre dos términos, cada uno de los exponentes que acompañan a las cifras que componen cada uno de los dos términos son 0 o 1.

Se podría afirmar que los maestros identifican conceptos tanto algebraicos como numéricos. Los conceptos algebraicos refieren a la incógnita en referencia a los valores desconocidos, que son representados por letras. Igualmente identifican conceptos, igualmente refieren a las ecuaciones que se plantean para resolver la tarea. Los conceptos aritméticos de suma y resta se significan en términos de las operaciones que se realizan para resolver las ecuaciones y encontrar los valores de las incógnitas.

Los procedimientos identificados por los maestros en formación muestran que se han considerado otros "tipos" de procedimientos tales como: Traducir de lenguaje ordinario al lenguaje algebraico, resolución de ecuaciones de primer grado y asignación de un valor a una incógnita que era desconocida en un principio. Al menos en este caso, se nota que no sólo se identifican los procedimientos asociados a las operaciones. Es decir, que se concede identidad propia a procedimientos que forman parte integral de la actividad de resolución de la tarea matemática y que no siempre reconocen.

Tabla 6.15. Procedimientos Identificados para la Tarea de Cambiar Letras por Números.

Tipos de objetos	**Significados** (relación de referencia o de uso)
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
Traducción de lenguaje ordinario a lenguaje algebraico.	Al leer en el enunciado: “Los sumandos en cualquier dirección tienen que sumar 34…”, el alumno lo traduce al lenguaje algebraico, buscando ecuaciones en las que solo desconozca un dato y las iguala a 34 que sabe que debe ser el resultado de cada suma. *Ej: 3 + 10 + 6 + G = 34*
Algoritmo de sumar.	Nos permite establecer las relaciones entre los sumandos y el total.
Algoritmo de restar.	Nos permite calcular el valor de cada una de las letras, ya que restamos al total (que es un valor constante y conocido), el valor de cada uno de los sumandos salvo uno, que es el sumando cuyo valor deseamos conocer.
Resolución de ecuaciones de primer grado.	Para hallar el valor de cada una de las incógnitas.
Asignación de un valor numérico a una incógnita que era desconocida en un principio.	Se sustituye cada una de las letras del crucigrama, por el valor numérico calculado mediante los procedimientos que se indican.

Tabla 6.16. Propiedades Identificadas para la Tarea de Cambiar Letras por Números.

Tipos de objetos	**Significados** (relación de referencia o de uso)
PROPIEDADES(Enunciados para las cuales se requiere una justificación o prueba)	
P1: Cada una de las incógnitas tiene un único valor numérico.	A cada una de las letras del cuadro le corresponde un único valor numérico, que debe estar comprendido entre 1 y 16.
P2: Solo podemos calcular el valor de aquellas incógnitas situadas en una fila, columna o diagonal en la que el resto de los datos son conocidos.	Por trabajar con ecuaciones de primer grado con una sola incógnita, para tratar de hallar el valor numérico de las letras del cuadro, debemos saber que el resto de valores situados en la misma fila, columna o diagonal deben ser conocidas.

Las propiedades reconocidas por los maestros refieren a la unicidad de la solución: Cada letra tiene un único valor; lo cual se ratifica por la condición, reconocida por los maestros, de trabajar con ecuaciones de primer grado con una sola incógnita.

Tabla 6.17. Argumentos Propuestos para la Tarea de Cambiar Letras por Números.

Tipos de objetos	**Significados** (relación de referencia o de uso)
ARGUMENTOS (Justificaciones, demostraciones, o pruebas de las proposiciones usadas)	
P1: Cada una de las incógnitas tiene un único valor numérico.	Es debido a que las operaciones que nos llevan a hallar el valor de cada una de ellas tan solo tienen un resultado posible, además este resultado es un número natural, por tratarse de operaciones cerradas dentro del conjunto de los naturales (como es el caso de la suma y la resta cuando el sustraendo es menor que el minuendo).

El argumento propuesto justifica la existencia de una única solución para cada una de las incógnitas.

A continuación se muestra la interpretación que G4 hizo de la GROS. Una de las tareas que proponen en una de las sesiones de trabajo se ilustra en la Figura 6.19. El mismo fue presentado tal como aparece sin incluir su solución ni un análisis epistémico.

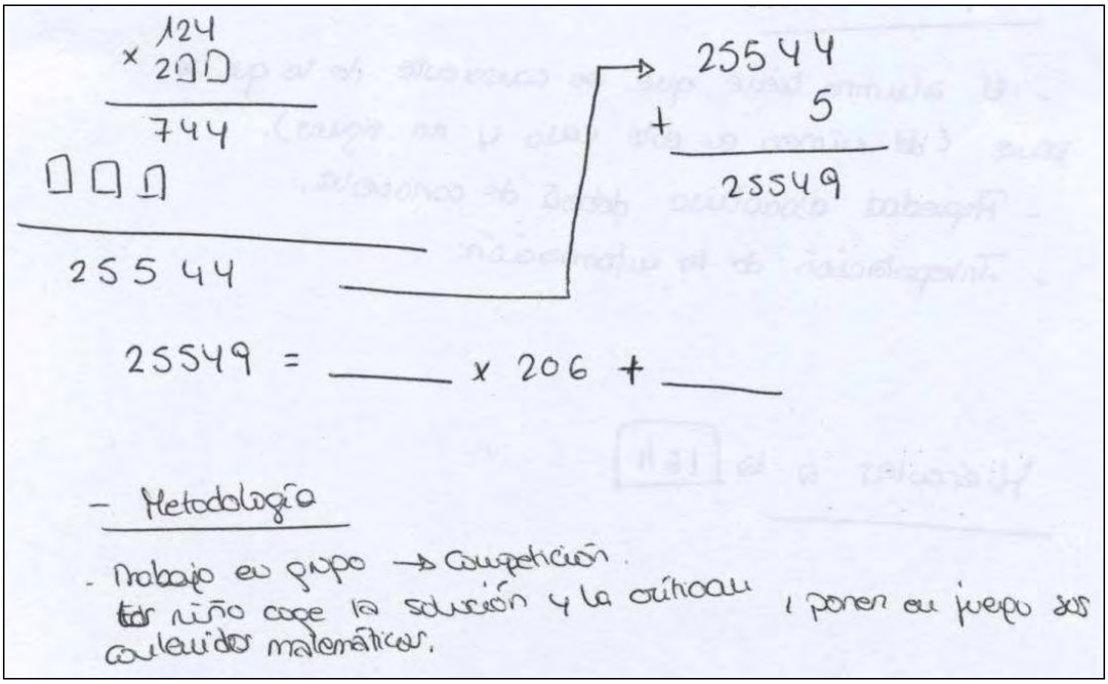


Figura 6.19. Ejemplo de Tarea con Dos Valores Faltantes Propuesto por G4.

Se pidió a los maestros que acompañaran la propuesta de la tarea y su solución con un análisis epistémico, realizado con ayuda de la GROS. Los maestros propusieron una tarea del mismo tipo. La solución matemática dada a la tarea se exhibe en la Figura 6.20.

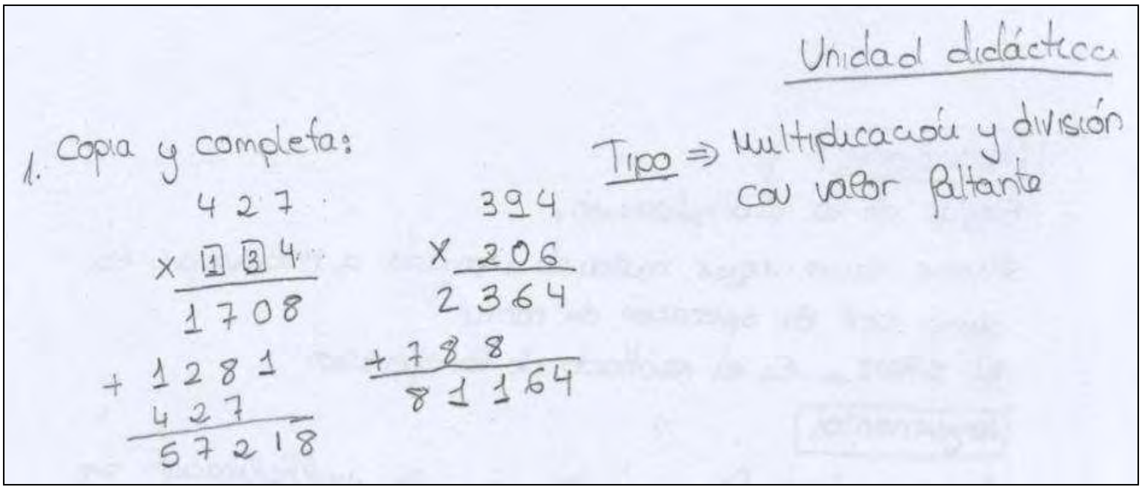


Figura 6.20. Ejemplo de Tarea con Dos Valores Faltantes y su Análisis Epistémico Propuesto por G4.

La Figura 6.21 exhibe una parte del manuscrito de los maestros. El análisis epistémico realizado por los maestros se muestra agrupado por elementos lingüísticos, procedimientos, proposiciones y argumentos. Se indican los objetos matemáticos identificados y al frente los significados conferidos por los maestros en formación.

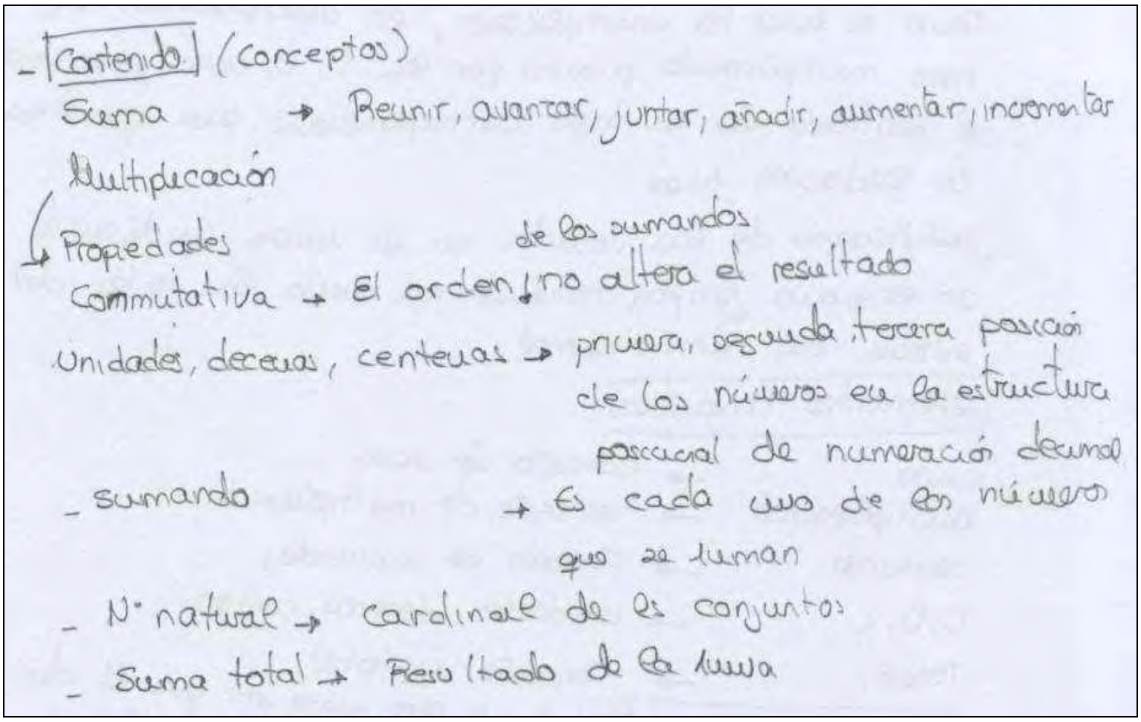


Figura 6.21. Fragmento del Manuscrito del Análisis Epistémico Correspondiente a los Conceptos Propuesto por G4.

La Tabla 6.18 muestra el análisis epistémico final que los maestros propusieron.

Tabla 6.18. Análisis Epistémico Final para una Tarea.

Elementos Lingüísticos.	• Suma: Concepto de suma. • Multiplicación: Concepto de multiplicación. • Sumando: Concepto de sumandos. • U, D, C: Unidades, decenas, centenas. • Total: Concepto del total.
Procedimientos.	Se multiplica por las unidades, decenas, centenas y así sucesivamente, después el resultado se va colocando en su lugar correspondiente, para que luego se pueda llevar a cabo la suma.
Proposiciones.	• Reglas de la multiplicación. • Sumar como seguir contando: Ayuda a relacionar la suma con la operación de contar. • El 57218 y 81164: Son los resultados de la operación.
Argumentos.	Como se hace la multiplicación, la multiplicación se hace multiplicando primero por las unidades, después por las decenas y luego por las centenas, poniendo el resultado en su lugar correspondiente para que luego lo podamos sumar. Justificación de las llevadas en la suma mediante un esquema gráfico, teniendo en cuenta las reglas del sistema del número decimal.
Dificultades asociadas a la tarea.	• Que los niños no sepan el concepto de multiplicación. • Que no sepa cuáles son las U, D, C. • Que no sepa la regla de la multiplicación, es decir, que primero se multiplica por U, D, C, y el resultado se pone debajo en su columna correspondiente. • Dificultad a la hora de averiguar el número de los huecos. • Dificultad de no ver que el segundo número es el cero, ya que a la hora de multiplicar el cero, no han dejado hueco para poner el resultado de multiplicar cero por 394.

Las dificultades propuestas por los maestros en formación, y que se muestran en la Tabla 6.18, podrían ponerse en correspondencia con las entidades primarias usadas para identificar objetos y significados intervinientes y emergentes. Los maestros propusieron un listado de dificultades que, al parecer fueron identificadas a partir del análisis epistémico. En la Tabla 6.19 se intenta establecer, a posteriori, una correspondencia entre los objetos, significados y las dificultades identificadas por los maestros en formación.

Tabla 6.19. Correspondencia entre Objetos, Significados y Dificultades.

	OBJETOS	SIGNIFICADOS	DIFICULTADES
Elementos Lingüísticos	Suma	Concepto de suma.	
	Multiplicación	Concepto de multiplicación.	No saben concepto de multiplicación/orden en la multiplicación.
	Sumando	Concepto de sumandos.	
	U, D, C	Unidades, decenas, centenas.	No saben cuales son las U, D, C.
	Total	Concepto del total.	
Conceptos	Multiplicación	Suma repetida.	
	División	División reiterada.	No saben regla de la división.
	Resta	Apartar, separar, extraer, sobrar, quedar, retirar, quitar, eliminar.	
	Suma	Añadir, agregar, reunir, unir, avanzar, juntar, ganar, combinar.	
	Nº Natural	Cardinal de los conjuntos.	
	U, D, C	Primera, segunda, tercera,…posición de los números en la estructura posicional de números decimales.	

Se aprecia que las dificultades propuestas por los maestros son un poco genéricas y se focalizan en “no saber el concepto”. Parece que los maestros concentran su atención en lo conceptual, sin reconocer que en algunas ocasiones los niños pueden conocer el concepto pero no identificarlo en la situación problemática que lo requiere. Nótese que no todos los objetos matemáticos ni sus significados asociados son reconocidos como fuente de dificultad para los maestros, esto podría ser evidencia que los maestros están en el proceso de apropiación del análisis epistémico.

De otro lado, algunos grupos dieron poca importancia a la identificación de dificultades asociadas a las tareas propuestas en sus unidades didácticas. Incidentalmente estos mismos grupos no hicieron uso de la GROS en sus trabajos finales, si bien hay evidencia que hicieron algunos usos de la misma durante su proceso de asesoría. Es menester afirmar que algunos grupos responden al requisito de identificar “dificultades” pero tal identificación es demasiado general para ser considerada de utilidad en un proceso real de instrucción a niños sexto grado de escuela elemental.

Un ejemplo de tales identificaciones se puede apreciar en la Figura 6.22, que ilustra dos segmentos de la propuesta de G2.

Segmento 1:

*** Previsión de dificultades de los alumnos:**

Es importante que el profesor conozca los resultados de las investigaciones realizadas en torno a las dificultades de comprensión durante la enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos correspondientes. Uno de los datos que surgen en estos estudios son los errores de los alumnos, tanto en los aspectos conceptuales como en los procedimentales, así como los problemas u obstáculos de aprendizaje que se detectan o plantean para cada concepto.

Segmento 2:

La dificultad mayor que podemos encontrar, es la que los alumnos no entiendan la “X” como incógnita o los huecos en blanco, es decir k aunque sea una letra, dibujos, huecos en blanco, se puede operar con ella, que tenga un valor (en el fondo sea un número). Y no puedan resolver estos problemas.

Otras dificultad, es que no sepa reconocer los números racionales.

Estas son las dos dificultades mayores que podemos encontrar en la pre-álgebra, al tratarla dentro de otras unidades didácticas podemos encontrar otras dificultades en los alumnos pero no tan relacionadas con este tema.

Figura 6.22. Dos Segmentos de la Propuesta de Dificultades por G2.

En el segmento uno, los maestros valoran el conocimiento que el “profesor” debe tener “en torno a las dificultades de comprensión” de los niños, y dan relevancia a “los errores de los alumnos, tanto en los aspectos conceptuales como procedimentales…”. De nuevo se centran sólo en dos entidades primarias del conocimiento matemático.

En el segmento dos se evidencia que tan sólo dos dificultades son reconocidas por los estudiantes: La primera, que los alumnos no reconozcan la “*x*” como una incógnita y la segunda, es que no “sepa[n] reconocer los números racionales”. Se considera que la identificación de dificultades realizada por este grupo no está en correspondencia con la complejidad de las tareas de naturaleza algebraica elemental, aún para los casos en los cuales los maestros plantean la resolución de ecuaciones lineales, en el conjunto de los números naturales o enteros, mediante el recurso de dejar un espacio en blanco.

Se considera que el poco o ningún uso del análisis epistémico, dado por estos grupos, puede tener su origen en dos factores: El primero es la dificultad del análisis epistémico y el segundo es la falta de experiencia docente y la ausencia del "conocimiento del niño (Shulman, 1986) que los ayude a adaptar el análisis epistémico al contexto real del aula de clase.

El uso y adecuación del análisis epistémico y su sincronización con el desarrollo cognitivo de los niños es una competencia que los maestros en formación y activos deben exhibir, y cuyo desarrollo puede iniciarse en los cursos de formación de maestros, pero que requiere de la necesaria contrastación con las comprensiones matemáticas y las dificultades manifestadas por los niños.

En el caso de los grupos G1 y G4 las dificultades identificadas por los maestros, si bien obtenidas a partir del análisis epistémico, aún deben ser aceptadas por los maestros como un instrumento valioso de análisis y reflexión. Se considera que en tanto que los futuros maestros no tienen la oportunidad de someter a prueba ni su planeación ni la pertinencia de las dificultades identificadas, no logran reconocer el eventual valor que tanto el análisis como la previsión de posibles dificultades o conflictos de significado, tiene en los procesos de enseñanza.

6.5.4.2.3 Grupos que no Usaron la GROS

Los grupos que no usaron la GROS fueron G2, G3, G5, G6 y G7. Se mostrarán dos tareas de los grupos G5 y G6.

A continuación se hará la cumplimentación de la solución, identificación de conocimientos y de dificultades asociadas a una actividad propuesta por G5. La tarea y su solución propuesta por los maestros se exhiben en la Figura 6.23.

Al parecer la tarea fue escrita tal como aparece en el libro texto usado por los maestros en formación. Dos aspectos llaman la atención: El primero es que la tarea pone en juego varios elementos propios del razonamiento algebraico elemental, tales como: Variable, ecuación, solución de una ecuación; el segundo es que la solución dada no es fácil de entender, en tanto que no se ha especificado cómo, a partir de las condiciones dadas, se obtiene una ecuación, tampoco se ha asignado significado a las letras "*x*" e "*y*" ni se indica cómo, a partir de los valores asignados a estas letras, se puede dar la respuesta a la tarea planteada.

❖ **ACTIVIDAD Nº 1**

¿Qué números pueden ser?

$$? + ? + ? + ? = 13$$

Busca todos los números que cumplan estas condiciones:

- La suma de sus cuatro cifras es 13
- La cifra de las decenas es 0
- La cifra de las unidades de millar es el triple que la de las unidades.

Solución

$3x + y + 0 + x = 13$

$4x + y = 13$

$y = 13 - 4x$

RESULTADOS:

$x = 0 \quad y = 13$

$x = 1 \quad y = 9$

$x = 2 \quad y = 5$

$x = 3 \quad y = 1$

Figura 6.23. Enunciado y Solución a la Tarea Propuesta por G5.

Aún cuando se deduce, del planteamiento de la tarea y de su resolución, un conocimiento implícito de los elementos propios del razonamiento algebraico referidos, la competencia didáctica de los maestros, referida específicamente a la selección de tareas matemáticas pertinentes y a la definición, enunciación y justificación de los conceptos, procedimientos y propiedades en función su enseñanza, está pobremente manifestada en este caso.

La identificación de dificultades o de conflictos de significado (término este usado durante las sesiones de discusión y durante las clases teóricas) se hace sin la ayuda de la GROS. La propuesta de los estudiantes se muestra en la Figura 6.24.

Dificultades previstas:

-) Los niños no reconocerán las tres condiciones.
-) En el enunciado nos indica que busquemos "todos" los números, y les resultará un problema saber si los que han puesto serán todos, o si les falta alguno.
-) Los niños van a suponer que todos los números que van a buscar para que les den 13, serán números naturales, y en cambio, a partir de x=4, se obtienen números negativos.
-) La interrogación puede confundir a los niños, ya que puede que piensen que al ser el mismo símbolo, también será el mismo número.
-) Las condiciones segunda y tercera son confusas porque sus enunciados, muestran a todos los sumandos, como si se tratase de una cifra de 4 dígitos, aspecto que no se aprecia en la representación gráfica, ya que se consideran números individuales.

Figura 6.24. Conflictos de Significado Propuestos por G5.

Parece que este grupo considera que es suficiente proveer una solución a la tarea para enseñarlo; los problemas didácticos convocados por la actividad no han sido reconocidos por el grupo G5, cuyos integrantes podrían no estar del todo preparados para abordar con pertinencia su enseñanza para niños de sexto curso de primaria (11-13 años).

Para Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnets (2006) "*la idea no es simplemente atribuir significado algebraico a las actividades matemáticas de la escuela primaria. Los contenidos matemáticos deben ser transformados sutilmente para resaltar su carácter algebraico*", (p. 88). La competencia de transformación referida anteriormente no se evidencia en el trabajo realizado por el G5.

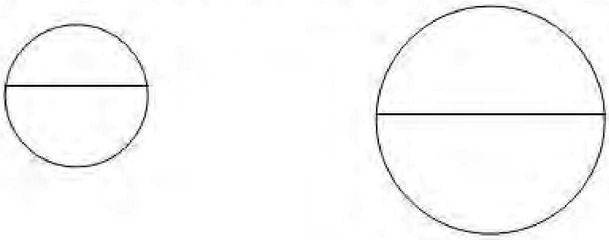
A continuación se hará la cumplimentación de la solución, identificación de conocimientos y de dificultades asociados a una actividad propuesta por G6.

La tarea y su solución propuestas por G6, que se exhiben en la Figura 6.25, pide "medir" el diámetro y "calcular" la longitud de la circunferencia. Parece que los estudiantes consideran la tarea como de razonamiento algebraico elemental con base en el procedimiento de reemplazo de letras por números. Las dificultades propuestas por G6, se exhiben en la Figura 6.26.

Este grupo identifica "errores" que localizan en la "confusión" que los niños podrían manifestar en el uso de radio y diámetro, lo cual a su vez, según los estudiantes, impediría que pudieran establecer la relación $L/d = \pi$, que valoran típicamente como conocimiento algebraico. Si bien los maestros logran identificar algunos elementos eventualmente conflictivos para los niños, tales elementos aún deben ser ubicados en relación con las entidades primarias que intervienen y surgen en la solución de la tarea matemática. La fijación de los maestros en aspectos parciales del conocimiento matemático podría ser un obstáculo para que puedan reconocer y gestionar las dificultades que los niños manifiesten en aspectos diversos a los señalados por los maestros en su diseño.

1. Ejercicio propuesto:

Mide el diámetro y calcula la longitud de cada circunferencia.



Solución:

Utilizando una regla normal se sabe que la primera circunferencia tiene un diámetro

de 5 cm y la segunda de 10 cm.

Aplicando la fórmula, se obtiene que:

$L = \prod x\, r2 = 2\prod x\, r = \prod x\, d$, donde $d = r2$, $d = 2\, x\, r$ y $\prod = 3{,}14$

En la 1º circunferencia, $L = \prod x\, 5 = 3{,}14 \times 5 = 15{,}7$ cm
En la 2º circunferencia $L = \prod x\, 10 = 3{,}14 \times 10 = 31{,}4$ cm

Figura 6.25. Enunciado y solución a la Tarea sobre Diámetro y Longitud Propuesto por G6.

- **Expresión del enunciado, dificultades que se le presentan al niño al resolver, los errores mas frecuentes.**

En este contenido que hemos añadido en la unidad didáctica es uno de los cuales, los niños cometen mas errores, pues pueden suelen confundir los conceptos de diámetro y de radio. Al no tener los conceptos claros, no puede establecer la relación de la formula $L = \prod x\, r2 = 2\, x\prod x\, r = \prod x\, d$ y por tanto no deduce que $L/d = \prod$ que es signo de la utilización de elementos algebraicos en la resolución de los problemas que se han puesto de manifiesto en los dos ejercicios.
A su vez y aunque el libro lo recoge, incluye el signo de la operación multiplicar a lo largo de la formula, tratando así de evitar el error que le pueda ocurrir al niño.

Figura 6.26. Dificultades Identificadas para la Tarea de Diámetro y Longitud Propuesto por G6.

Se aprecia en las cuatro tareas exhibidas anteriormente en las secciones 6.5.4.2.2 -Grupos que Usaron la GROS- (G1 y G4) y 6.5.4.2.3 -Grupos que no Usaron la GROS- (G5 y G6) cierta diferencia tanto en el nivel de análisis realizado como en la identificación de dificultades. En las dos tareas iniciales, planteadas por los grupos G1 y G4, se aprecia el señalamiento de conflictos de significado que tienen su origen en las entidades primarias: Elementos lingüísticos, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos, mientras que en los dos grupos siguientes, G5 y G6, las dificultades identificadas se ubican en dos categorías: Las procedimentales y las conceptuales.

En la solución ofrecida por G5 se hecha en falta una ampliación de la discusión, en tanto que no responde a cuestiones como: ¿Qué representan las letras “x, z, w, y”?, ¿Cómo se obtiene la expresión $3x + y + 0 + x = 13$? ¿Cómo se obtienen los números inventariados bajo el titulo “resultados”? -ver Figura 6.23-.

Los maestros han dado una “solución matemática” que no tiene en cuenta al lector de la solución o a un interlocutor, mucho menos a un niño que eventualmente tenga dificultades con la interpretación de las letras y con el papel que desempeñan en la solución de la tarea. A continuación se comentará sobre la cumplimentación del apartado relacionado con la metodología que los maestros proponen usar durante sus clases con los niños.

6.5.4.2.4 Metodología que se Propone Usar con los Niños

Se refiere el término “metodología” a: Actividades de refuerzo y ampliación, adaptación a la diversidad; aspectos afectivos y de motivación. Se indicarán por separado la respuesta que los maestros dieron, en sus unidades didácticas, a cada una de estas condiciones.

6.5.4.2.4.1 Actividades de Refuerzo y Ampliación

La revisión de este apartado en el conjunto de unidades didácticas, muestra que los grupos no proponen tareas diferentes de aquellas que propusieron en el apartado de “actividades”. Tal vez ponen en práctica el concepto de “variables de tarea” y de “variantes de tarea”, conceptos que fueron discutidos por el formador.

El conjunto de propuestas de tareas de refuerzo y ampliación se muestran en el Anexo G -Tareas de Esfuerzo y Ampliación Propuestas por los Maestros en Formación-. Algunos grupos (G4, G5, G6) no propusieron justificaciones para incluir dichas tareas.

Algunos otros sí las propusieron. Uno de los grupos (G1) afirmó:

> *"Con el objeto de adaptarnos a la diversidad de alumnos con la que nos podemos encontrar, a continuación exponemos una serie de actividades encaminadas a reforzar el aprendizaje tanto de aquellos alumnos que presentan dificultades (actividades de refuerzo) como de aquellos que dominan de manera óptima los contenidos tratados y queremos que sigan profundizando en el aprendizaje del álgebra".*

Otro de los grupos (G2) afirmó:

> *"Por las características especiales de esta unidad didáctica de razonamiento algebraico elemental (RAE) las actividades de refuerzo se irán impartiendo simultáneamente con el resto de actividades de otros contenidos. Haciendo un mayor hincapié en las actividades de ampliación puesto que es en este tipo donde podremos anticipar actividades y contenidos de Razonamiento Algebraico Básico (RAB)"*

Otros (G7), por el contrario, no cumplimentaron este apartado de la unidad didáctica.

6.5.4.2.4.2 Instrumentos de Evaluación

En este apartado se informará acerca de la evaluación que los estudiantes proponen para los alumnos. La evaluación es uno de los apartados que los maestros deben cumplimentar. Se da libertad para que interpreten la evaluación. Sólo en una actividad realizada por el formador (Anexo A -Prácticas Iniciales con los Maestros en Formación-) se afirma que los objetivos de la práctica son:

- Conocer las orientaciones generales para la evaluación de los aprendizajes matemáticos incluidas en los currículos oficiales.
- Conocer las orientaciones específicas para la evaluación de la unidad temática asignada incluidas en los currículos oficiales.

Los dos párrafos anteriores pueden interpretarse como una sugerencia de documentos donde es posible encontrar significados para el concepto de "evaluación". Al revisar el conjunto de propuestas de evaluación, resaltan dos propuestas diferentes. Los grupos G1 y G3 propusieron exámenes finales de evaluación de su unidad, mientras que los grupos restantes dieron criterios genéricos de evaluación, sin llegar a proponer un examen.

En el Anexo H -Evaluación Propuesta por los Maestros en Formación- se muestran las propuestas de evaluación elaboradas por los diversos grupos.

6.6 La Idoneidad Didáctica y su Evaluación por parte de los Estudiantes

En la primera sección del siguiente apartado se hará una síntesis sobre la Idoneidad Didáctica siguiendo los lineamientos del enfoque onto-semiótico (EOS) del conocimiento matemático. Posteriormente se indicarán las instancias en las cuales los maestros fueron expuestos a tal concepto, por el formador y por el investigador. Finalmente se estudiará la interpretación que los estudiantes dieron a este concepto, esto se hará por medio de la valoración del uso que dieron a estos conceptos en el seno de su unidad didáctica.

6.6.1 La Idoneidad Didáctica

El EOS ha introducido la noción de idoneidad didáctica, que se concibe como la articulación coherente y eficaz de las distintas dimensiones implicadas en los procesos de estudio matemático: Epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica.

En Godino, Contreras y Font (2006) se introducen cinco criterios a tener en cuenta para valorar la idoneidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático, usando en su formulación nociones teóricas del EOS. A continuación describimos estos criterios:

- *Idoneidad epistémica*, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o previstos), respecto de un significado de referencia.
- *Idoneidad cognitiva*, expresa el grado en que los significados pretendidos/implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados.
- *Idoneidad interaccional*, grado en que las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori), y, por otra parte, resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción mediante la negociación de significados.
- *Idoneidad mediacional*, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- *Idoneidad afectiva*, grado de implicación (interés, motivación) del alumnado en el proceso de estudio.
- *Idoneidad ecológica*, grado de adaptación del proceso de estudio al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social, etc.

Estas idoneidades se deben integrar considerando las interacciones entre las mismas, lo cual requiere considerar a la *idoneidad didáctica* como un criterio sistémico. El principal indicador empírico para valorar la *idoneidad didáctica* puede ser la adaptación entre los significados personales adquiridos por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos e implementados (Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005).

El formador dió una clase magistral sobre el tema de idoneidad didáctica y se dió a los estudiantes un material de apoyo (Anexo I -Pauta de Idoneidad-). Posteriormente, durante las sesiones de asesoría y cuando se consideró oportuno y hubo lugar para ello, se abordó la discusión de la idoneidad epistémica de algunas sesiones de sus unidades didácticas.

Para valorar la interpretación y adecuación del concepto de idoneidad didáctica se usarán dos fuentes de información: Las intervenciones de los maestros durante las sesiones de asesoría y las propias unidades didácticas escritas, que fueron entregadas al formador, en cumplimiento de las condiciones impuestas sobre ellas. En el Anexo J -Interpretación al Concepto de Idoneidad Dada por tres Grupos- se muestra la interpretación que tres de los siete grupos dieron de la idoneidad. La Tabla 6.20 muestra los diversos tipos de idoneidades que los grupos consideraron.

Tabla 6.20. Tipos de Idoneidades Consideradas por los Grupos.

	Epistémica	**Cognitiva**	**Mediacional**	**Afectiva**	**Interaccional**	**Ecológica**
G1	x	x	x	x	x	x
G4	x		x	x	x	x
G5	x		x	x	x	x

Los maestros afirman que han considerado en el diseño de su unidad didáctica las idoneidades indicadas en la tabla anterior. Dado que la idoneidad didáctica es un concepto sistémico y complejo, y ante la respuesta de los estudiantes, se puede colegir que los maestros en formación o consideran que la idoneidad es una característica inmersa en la propia actividad de diseño, la cual se cumple implícitamente o consideran que es un concepto complejo sobre el cual aún deben reflexionar. No se dispone de datos para apoyar alguna de las dos opciones indicadas.

El grupo G5 no incluyó la Idoneidad Cognitiva, en tanto que según afirmaron en una de las sesiones de trabajo, no la considerarían ya que “no tenían alumnos”. Esta afirmación podría ser indicativo que este grupo considera que la planeación dirigida a niños hipotéticos no merece incluir todos los aspectos propuestos para la unidad didáctica y que la idoneidad del proceso de estudio que planean no es relevante. Kagan (1992) considera que la formación de maestros carece de la necesaria confrontación de las creencias de los maestros con la realidad de un salón de clase, además que los maestros aún deben aprender acerca de la complejidad del proceso de enseñanza y aprendizaje.

La Figura 6.26 muestra algunos de los elementos que deben ser considerados por los maestros en el diseño de la Unidad Didáctica, y permite apreciar la complejidad del proceso de planeación que se solicita a los maestros en formación. Sólo se resaltan los elementos intervinientes en el proceso y en modo alguno las relaciones que se pueden plantear entre ellos y que se dan en función de circunstancias diversas.

6.7 Identificación de Conflictos de Significado

A partir de la discusión de los objetos y de sus significado intervinientes y emergentes durante la resolución particular dada a la tarea, se pueden señalar posibles conflictos de significado que podrían surgir durante la interacción didáctica. Desde la perspectiva del desarrollo del conocimiento didáctico-matemático (Godino, 2009; Hill, Ball y Schilling, 2008) se considera que la preparación de una actividad matemática con fines instruccionales no solamente debe considerar la “solución matemática” sino un conjunto de posibles conflictos y modos de abordarlos. Esto se hace aún más pertinente cuando se trabaja con maestros en formación quienes posiblemente carecen del conocimiento de los niños (Shulman, 1986) y de los conflictos que estos suelen manifestar.

6.7.1 Conflictos Identificados por G1

Los conflictos de significado identificados por G1 refieren a elementos lingüísticos, conceptos y procedimientos, y refieren a la solución de la tarea exhibida en la Figura 6.27, la cual corresponde a la Figura 6.4, pero se repite aquí para facilitar la lectura.

A continuación se señalan algunos conflictos para: Elementos Lingüísticos, conceptos y procedimientos. Se efectúan comentarios para cada tipo de conflicto. En la Figura 6.28 se exhiben los conflictos de significado propuestos por G1.

Nótese que estas identificaciones podrían ubicarse preferentemente en “procedimientos”, pero han sido ubicadas por el G1 en “elementos lingüísticos” en tanto que fueron originadas en las consideraciones motivadas por estos. Desde un punto de vista didáctico, no importa en que categoría se rotule un objeto, sus significados y los eventuales conflictos; sino la identificación de los mismos.

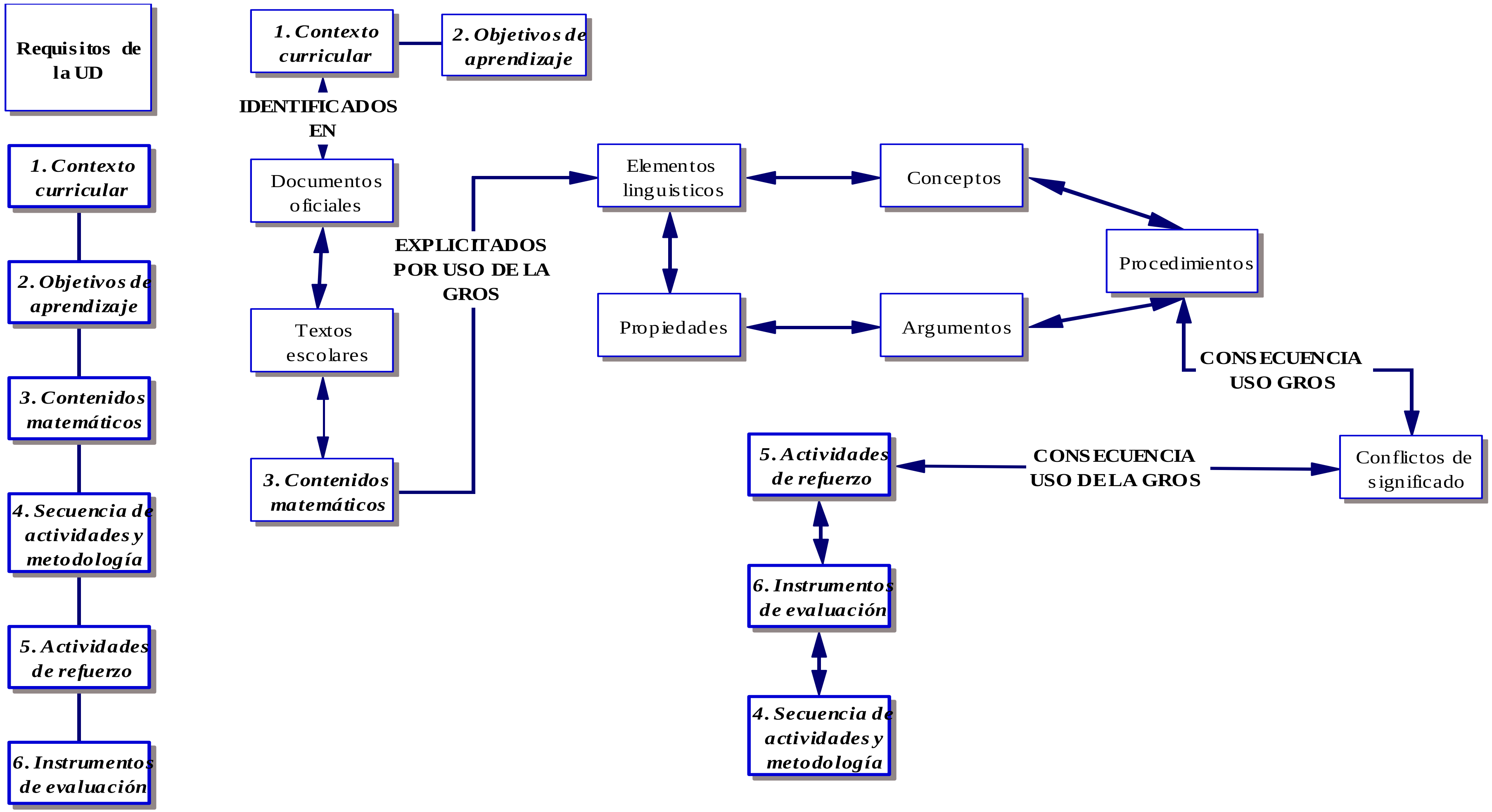


Figura 6.26. Elementos para el Diseño de la Unidad Didáctica y Algunas Relaciones entre Ellas.

2. Cambia las letras por números del 1 al 16 de manera que sumados en cualquier dirección, el resultado sea 34.

A	3	B	13
5	10	C	D
E	6	7	F
4	G	H	1

Figura 6.27. Tarea de Cambiar Letras por Números Propuesta por G1.

Conflictos de significado

Para el enunciado:

- La instrucción "en cualquier dirección" podría ser interpretada también, en el sentido "diagonal"; que sólo es valida para las diagonales principales pero no para las diagonales secundarias.
- Si los niños resuelven el problema algebraicamente, obtendrán "muchas" ecuaciones e incógnitas, lo cual podría desmotivarlos dado que hay muchas incógnitas y los niños podrían pensar que no es posible resolver el problema.
- Si resuelven el problema aritméticamente, por ensayo y error, podrían presentarse dos soluciones:
- En la primera, los niños podrían no tener en cuenta que aunque los valores de las letras no se conocen, estos son únicos; de tal suerte que podrían dar valores diferentes a la letra A en la ecuación de la primera fila (A+3+B+13=34), y un valor diferente cuando se considera la misma letra en la correspondiente ecuación de la primera columna (A+5+E+4=34).
- En la segunda solución, por ensayo y error, los niños podrían desanimarse en tanto que algunos valores de las letras asignados por ellos, en unos casos no servirán para resolver las ecuaciones en otros casos.

Figura 6.28. Conflictos de Significado Asociados a Elementos Lingüísticos Propuestos por G1.

Se resalta la identificación de elementos lingüísticos cuya interpretación puede modificar el proceso de significación y solución de la tarea por parte de los niños; para MacGregor y Price (1999) "*la conciencia de las estructuras del lenguaje y la habilidad para manipular esas estructuras puede ser una manifestación de un proceso cognitivo más profundo que también subyace la comprensión de la notación algebraica*" (p. 462).

La Figura 6.29 muestra los conflictos de significado asociados por los maestros a la entidad conceptos.

Para los conceptos:

- El concepto de ecuación será muy difícil para los niños.
- Los niños no han visto ecuaciones y no se les ha enseñado cómo resolverlas.
- Lo mismo sucede con el concepto de "sistema de ecuaciones".

Figura 6.29. Conflictos Asociados a Conceptos Propuestos por G1.

La solución algebraica de la tarea propuesta por G1, conlleva al uso de conceptos (ecuaciones, sistemas de ecuaciones) en un sentido algebraico avanzado, lo cual se considera difícil para el nivel de primaria. Este reconocimiento debe conducir a buscar formas alternativas para la planificación y desarrollo de la actividad de enseñanza, por ejemplo; modificar las variables de la tarea, hacerla resoluble por medio de una asignación sencilla de valores. La Figura 6.30 muestra los conflictos de significado asociados por los maestros a la entidad procedimientos.

Para los procedimientos

- En la resolución algebraica la "resolución del sistema" de ecuaciones y el "orden" en que se deben resolver, es la mayor dificultad para los niños; ya que los niños deben elegir el orden en que se deben escoger las ecuaciones, siempre buscando tener una ecuación con una incógnita;
- Deben resolver todas las ecuaciones en pirámide
- Si los niños resuelven el problema por ensayo y error, entonces el problema es mas difícil, pues los niños ensayarán valores en desorden y se liaran mucho con la solución.

Figura 6.30. Conflictos Asociados a Procedimientos Propuestos por G1.

G1 no refiere a que los niños podrían tener dificultades para resolver las ecuaciones con una sola incógnita. Al parecer consideran que el procedimiento de "operar en reversa" o de "transponer" términos será naturalmente desarrollado por los niños. (Filloy, Rojano y Puig, 2008).

6.7.2 Conflictos Identificados por G5

Los conflictos que fueron identificados por G5 se presentan en la Figura 6.31.

Dificultades previstas:

-) Los niños no reconocerán las tres condiciones.
-) En el enunciado nos indica que busquemos "todos" los números, y les resultará un problema saber si los que han puesto serán todos, o si les falta alguno.
-) Los niños van a suponer que todos los números que van a buscar para que les den 13, serán números naturales, y en cambio, a partir de x=4, se obtienen números negativos.
-) La interrogación puede confundir a los niños, ya que puede que piensen que al ser el mismo símbolo, también será el mismo número.
-) Las condiciones segunda y tercera son confusas porque sus enunciados, muestran a todos los sumandos, como si se tratase de una cifra de 4 dígitos, aspecto que no se aprecia en la representación gráfica, ya que se consideran números individuales.

Figura 6.31. Conflictos de Significado Propuestos por G5.

Si bien es cierto que G5 identifica eventuales conflictos que podrían ser manifestados por los niños durante el proceso de resolución, también es cierto que algunos de ellos son tan difíciles de comprender como la solución matemática que dieron a la tarea. La identificación de conflictos hecha por G5 parece no dar importancia al subsiguiente proceso de explicación y discusión de la tarea con niños reales.

La comparación con el trabajo de identificación del G1 no puede ser evitada. Se considera que un proceso de identificación de posibles conflictos de significado como el realizado por G1 es más deseable, por la especificidad de sus identificaciones, en contraste con la generalidad de las identificaciones realizadas por G5.

6.8 Algunas Implicaciones para la Formación de Maestros

Parece que ambos grupos G1 y G5 manifiestan competencia para seleccionar tareas de razonamiento algebraico elemental en libros de texto para sexto curso de primaria. Sin embargo, G1 también manifiesta competencia para el análisis didáctico; para reconocer, definir, y enunciar los conceptos, procedimientos y propiedades en función de su enseñanza. Mientras que G5 no lo hace.

El análisis didáctico efectuado por G1 le permite identificar posibles conflictos de significado más pertinentes y específicos, implicados en la tarea considerada. La idoneidad potencial del proceso de enseñanza planificado por el G1 es mejor que la correspondiente al G5, al no exhibir, este último, competencia para el análisis didáctico que debería preceder a la enseñanza de un tema matemático.

A pesar que ambos grupos tuvieron la oportunidad de discutir la pertinencia del análisis didáctico y epistémico (uso de la GROS) para el diseño de la unidad didáctica, el G5 no lo utilizó para identificar los conocimientos matemáticos intervinientes y emergentes durante la solución de la tarea, ni reconocer algunos conflictos potenciales más específicos y pertinentes. Podría ser el caso que este grupo no considere necesario realizar el análisis epistémico en tanto que la tarea propuesta y su análisis no serán puestos en práctica con niños en un contexto escolar real. También podría ser que las creencias dominantes de los futuros maestros entren en conflicto con las exigencias del análisis epistémico en tanto que cambiar las creencias es una tarea difícil que demanda un esfuerzo continuado (Wubbels, Korthagen y Broekman, 1997).

La puesta en práctica de la GROS ha permitido al G1 efectuar un reconocimiento más específico de algunos elementos propios del razonamiento algebraico elemental; siendo la mera solución de la tarea insuficiente, tanto para reconocer los diversos objetos y significados puestos en juego, como para planificar su enseñanza para los niños.

Se debe reconocer que la puesta en práctica de la GROS es un reto para los futuros maestros. La identificación y discriminación de los tipos de objetos y significados resulta conflictiva, ya que supone un cierto nivel de actividad metacognitiva a la que no están habituados. Sin embargo, la actividad de análisis epistémico enmarcado en la formación inicial de maestros promueve el desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza (Ball, Thames y Phelps, 2008; Godino, 2009) en tanto que se ofrece una herramienta que promueve el reconocimiento de los diversos tipos de entidades y los significados que intervienen en la actividad de la instrucción matemática.

En consecuencia, este tipo de actividades de reflexión y análisis podría ayudar a profundizar la comprensión de los objetos y procesos de significación matemáticos en el contexto de la didáctica, que a su vez coadyuvan al reconocimiento y promoción del razonamiento algebraico elemental.

Se considera que la identificación de conflictos de significado y su puesta en práctica en tareas de razonamiento algebraico elemental, mediante el uso de la GROS, ha favorecido, si bien parcialmente, el reconocimiento del complejo entramado de objetos y significados inmersos en la solución de una tarea algebraica.

CAPÍTULO 7
ESTUDIO DE CASOS

7.1 Introducción

Durante la asesoría ofrecida a los estudiantes para la elaboración de la unidad didáctica se encontraron algunos estudiantes o grupos de estudiantes que se destacaron en el conjunto de sujetos que participaron en el estudio.

En este apartado de la tesis se mostrarán y discutirán los casos de dos grupos de estudiantes, sus opiniones, sus creencias y sus competencias para el diseño instruccional. Se comentarán los eventuales cambios en relación tanto con sus competencias de análisis didáctico como con sus creencias en relación con la inclusión del RAE en la escuela elemental, que manifestaron durante el periodo en el que se realizo la investigación.

Al final del capítulo en la sección 7.4 -Conclusiones e Implicaciones para la Formación de Maestros en Formación- se darán algunas conclusiones para la formación de maestros.

7.2 Recolección de Datos

Para obtener comprensión del proceso experimentado por los grupos de estudiantes se efectuó un proceso de triangulación y usamos varias fuentes de datos: Conversaciones informales, tareas escritas y audio de las discusiones.

Para Wenger (1998) la participación de los individuos en actividades colectivas está modulada por dinámicas grupales; "*los miembros de una comunidad están informalmente unidos por lo que hacen juntos-desde participar en charlas durante la hora de la cena hasta resolver problemas difíciles- y por lo que ellos han aprendido por medio de sus mutuas relaciones en estas actividades*" (Wenger, 1998; p. 2). Es así como se dará una mirada a las competencias y creencias de los dos grupos de sujetos por intermedio de los de sus integrantes, uno en cada grupo, Julia y David[1], ejercieron liderazgo y fueron la voz del grupo.

[1] Los nombres de los estudiantes han sido cambiados.

7.3 Selección de Casos

Los dos casos que se discutirán se podrían valorar como antagónicos: El primero presenta a un grupo de estudiantes inseguros frente a la resolución de tareas matemáticas; el segundo se compone de un líder brillante cuyos conocimientos matemáticos están por encima de la media del grupo poblacional de 28 estudiantes con los cuales se llevo cabo la investigación. Sin embargo ambos grupos mostraron un gran interés en la tarea de diseño de la unidad didáctica sobre el RAE. Los nombres de los líderes informantes se han cambiado para preservar su anonimato. Los otros estudiantes se rotulan con la letra “E” seguida de un número para distinguirlos.

7.3.1 Caso Uno

El caso que se ilustra en este apartado es el de un grupo formado por tres chicas y un chico, cuya experiencia en la enseñanza está limitada a clases particulares a niños de escuela primaria.

Tres comentarios son especialmente importantes en relación con la experiencia de los miembros de este grupo como maestros en formación. El primero refiere a cierto temor que la estudiante líder, Julia, manifiesta hacia las matemáticas; afirma que “se siente insegura cuando tiene que resolver problemas de matemáticas[2]”, en especial cuando “no ha tenido tiempo de estudiarlos o prepararlos con anticipación[3]”, este temor es secundado por sus compañeros; sin embargo manifiesta gran afinidad hacia la profesión docente. El segundo versa sobre el interés que expresó en el tema de razonamiento algebraico en la escuela elemental en tanto que “no es posible enseñar álgebra en la escuela [elemental]… quería saber de que va esto[4]”. Durante las reuniones de trabajo mostraron un pensamiento crítico e independiente. El tercero es que aunque el grupo tiene cuatro estudiantes, básicamente sólo dos estudiantes asistieron a todas las sesiones; los otros dos estudiantes participaban poco en las sesiones de trabajo a las que asistieron y se limitaban a escuchar y a asentir. Es por esto que las transcripciones sólo informan de las intervenciones de las dos estudiantes que asistieron a todas las sesiones de trabajo.

Se sostuvieron seis reuniones, cuya duración oscilo entre 30 y 40 minutos, que fueron grabadas en audio. Durante la primera sesión se discutió la aproximación al razonamiento algebraico elemental propuesta a partir del EOS, que fue presentada en la sección 3.2.1.6 -La Aproximación al RAE desde el EOS- del tercer capítulo de esta memoria de tesis doctoral; en la segunda sesión se trabajó sobre errores en el contexto del razonamiento algebraico elemental, en las sesiones tercera, cuarta y quinta (Anexo A -Prácticas Iniciales con los Maestros en

[2] Notas de campo.
[3] Notas de campo.
[4] Notas de campo.

Formación-), se trabajó sobre el análisis epistémico de tareas que los maestros en formación identificaron como de razonamiento algebraico en el libro texto que escogieron, y en la sexta se efectúo una discusión previa a la presentación de la unidad didáctica. Entre la segunda y la tercera sesión transcurrieron dos semanas; entre la tercera y la sexta transcurrieron cinco semanas.

En el siguiente apartado informamos sobre tres momentos que sucedieron en tres sesiones, los cuales han sido valorados como importantes en el proceso formativo que experimentó la estudiante. La razón que justifica la escogencia de estos tres momentos es que marcaron puntos de inflexión en los análisis realizados por los maestros en formación. De la segunda sesión se presentan un fragmento del análisis que la estudiante efectuó de una tarea sobre el perímetro de un rectángulo. De la quinta sesión se presentan un segmento sobre el análisis que los estudiantes efectuaron sobre una tarea escogida por ellos de un libro texto para primaria. De la sexta sesión se presentan algunos segmentos del análisis epistémico sobre objetos y significados que los estudiantes propusieron para una tarea. Las otras sesiones se dedicaron a discutir algunas tareas de su unidad didáctica y a la interpretación de las condiciones de diseño de la unidad didáctica.

El análisis epistémico se efectúo con la guía de reflexión de objetos y significados (GROS) provista por el enfoque onto-semiótico de la cognición y la instrucción matemática (Godino, Batanero, y Font, 2007) y cuyo uso se ilustra en Godino, Rivas, Castro, y Konic (2008). Esta herramienta fue ejemplificada en la componente teórica del curso, se hizo una práctica en clase y se evaluó en un examen. Sobre estas dos tareas se informó en el cuarto capítulo de esta memoria de tesis doctoral.

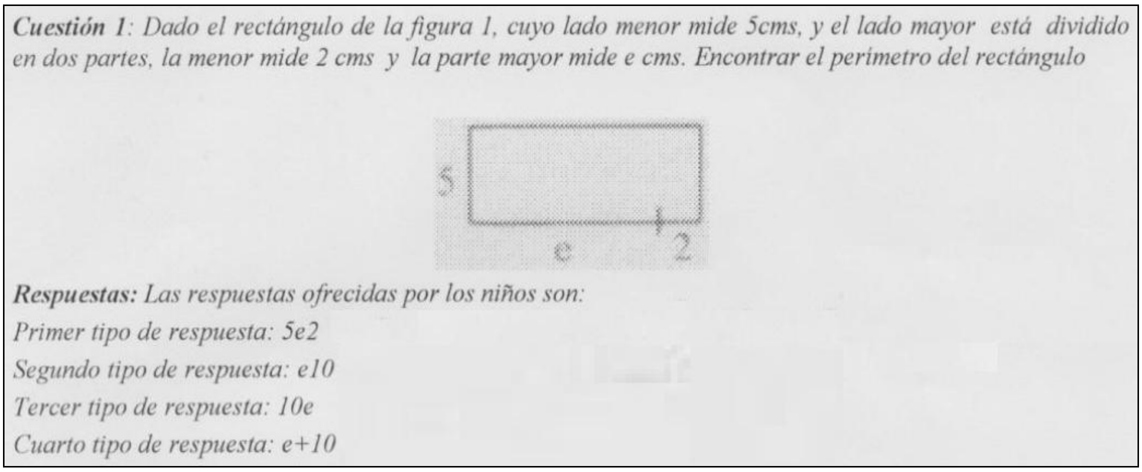
7.3.1.1 Las Sesiones de Trabajo

En esta sección se informará sobre algunas de las sesiones de discusión y asesoría sostenidas con dos grupos de maestros en formación.

7.3.1.1.1 Segunda Sesión

A continuación en la Figura 7.1 se muestra una de las tareas[5] y su consigna, propuestas a los maestros en formación en la segunda sesión. La tarea fue correctamente resuelta en ambos casos.

[5] Tarea adaptada de Booth (1984).

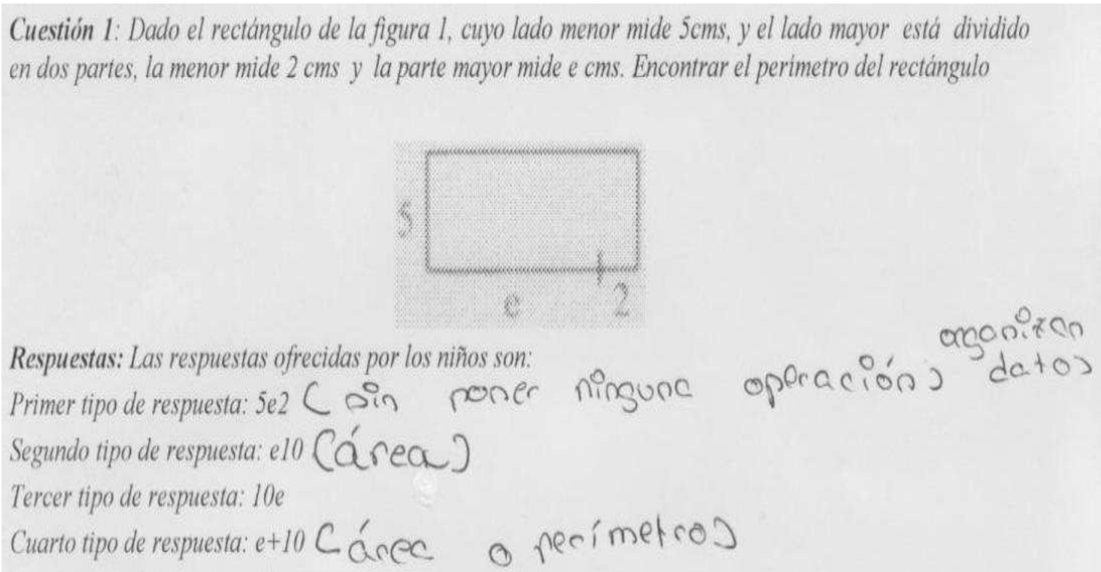


Cuestión 1: Dado el rectángulo de la figura 1, cuyo lado menor mide 5cms, y el lado mayor está dividido en dos partes, la menor mide 2 cms y la parte mayor mide e cms. Encontrar el perímetro del rectángulo

***Respuestas:** Las respuestas ofrecidas por los niños son:*
Primer tipo de respuesta: 5e2
Segundo tipo de respuesta: e10
Tercer tipo de respuesta: 10e
Cuarto tipo de respuesta: e+10

Figura 7.1. Primera Actividad con los Maestros en Formación.

Pregunta para los maestros: Analiza y explica los eventuales errores de los niños. En la Figura 7.2 se da la respuesta ofrecida por uno de los maestros.



Cuestión 1: Dado el rectángulo de la figura 1, cuyo lado menor mide 5cms, y el lado mayor está dividido en dos partes, la menor mide 2 cms y la parte mayor mide e cms. Encontrar el perímetro del rectángulo

***Respuestas:** Las respuestas ofrecidas por los niños son:*
Primer tipo de respuesta: 5e2 (sin poner ninguna operación) organizan datos
Segundo tipo de respuesta: e10 (área)
Tercer tipo de respuesta: 10e
Cuarto tipo de respuesta: e+10 (área o perímetro)

Transcripción*:*

***Respuestas:** Las respuestas ofrecidas por los niños son:*
Primer tipo de respuesta:5e2 (sin poner ninguna operación organizan datos)
Segundo tipo de respuesta: e10 (área)
Tercer tipo de respuesta:10e
Cuarto tipo de respuesta: e+10 (área o perímetro)

Figura 7.2. Respuesta de un maestro a la Tarea.

A continuación se presenta un segmento de la discusión sostenida con las estudiantes (aunque el grupo tiene cuatro miembros; la participación de dos de ellos se redujo a comentarios inaudibles y a confirmar lo que sus dos compañeras afirmaban):

> I: En la primera respuesta: 5*e*2. ¿El niño…que tiene en mente para dar este tipo de respuesta? Tenemos que ir mas allá que sólo decir “ésta no es la respuesta correcta”, tenemos que tratar de identificar en qué estaba pensando el niño.
>
> E12: ¿Estas [señala las opciones de respuesta] son operaciones?, pero ¿no hizo nada más?
>
> E14: Pero ¿de que nivel son, ciclo superior, medio?
>
> I: Son de quinto grado de escuela elemental
>
> E12: ¿Pero saben la ecuación?, ¿los estudiantes sabían la formula del área… del rectángulo?

En esta primera parte los maestros en formación tratan de identificar el nivel en que están ubicados los niños y los conocimientos matemáticos que tienen. Les interesa saber si conocen la fórmula del área del rectángulo [sic]; al parecer consideran que este conocimiento sería suficiente para dar respuesta satisfactoria a la tarea.

Los siguientes segmentos evidencian el esfuerzo de las estudiantes para explicar las respuestas de los niños.

> E12: En la primera respuesta, han hecho el área.
>
> E14: Sólo han organizado los datos, los números aparecen en el mismo orden que en la figura.
>
> I: ¿Y en cuanto al segundo tipo de respuesta?
>
> E12: Eso es base por altura, ¿no?, esa es el área, aquí sí que lo ha hecho, ha hecho el área.
>
> E14: En el primer caso no ha multiplicado, sólo ha ordenado.
>
> I: Y en la tercera respuesta, ¿Cómo se justifica esa respuesta 10*e*?
>
> E14: Lado por lado.
>
> I: Si nos preguntamos ¿qué diferencia en el tipo de error entre la segunda y la tercera?
>
> E14: No sabemos si está multiplicando, ¿no?

Las maestras no consideran dificultades que podrían tener su origen en los diversos significados, objetos y procesos de significación que se ponen en juego en la solución de la tarea. Por ejemplo, no cuestionan el uso de la letra “*e*” a la que no mencionan ni vinculan con alguna respuesta errónea dada por los escolares. Sin una herramienta de análisis a su disposición, los estudiantes concentran su atención en aspectos superficiales de las respuestas de los niños y no valoran la complejidad que la tarea tiene en términos de elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos y convenciones de notación.

7.3.1.1.2 Quinta Sesión

La siguiente tarea fue escogida por las estudiantes del libro texto Ferrero et al. (1995; p. 13) y se muestra en la Figura 7.3:

> 2 Escribe con símbolos y signos matemáticos, y comprueba si es cierta cada igualdad:
> - "Ciento noventa y siete menos la suma de cincuenta y ocho y sesenta y dos es igual a doscientos uno".
> - "Cinco mil seiscientas veintitrés es igual a veintitrés más el producto de ochenta y setenta".

Figura 7.3. Tarea Propuesta por un Maestro.

A continuación se muestra un segmento del análisis epistémico que los estudiantes realizan:

E12: Hemos tomado este que va más con letras, que yo pensé que era álgebra, porque era pasar de la letra al número, ¿sabes? porque es de transcribir y pasar y encontrar la solución en base a estos números según como estaba escrito… Yo pienso que es interesante de comentar…

E14: Las comas, ¿seguro que lo podría leer un niño?

I: ¿Cómo es lo de las comas?

E14: Como no hay coma…

E12: No hay una coma que separe, si este es noventa y siete coma menos la suma de… no hay ningún elemento lingüístico que de claro…

E12: Lo que hicimos nosotros es como el [niño] puede entender… nos pusimos un poco al nivel del niño…

….

E12: Si cambia la coma cambia el ejercicio… y como no hay coma el niño puede ponerla donde él quiera…Las comas son como… paréntesis; hay que poner las comas como los paréntesis…

En este segmento se encuentran dos aspectos para resaltar: El primero es la identificación de elementos lingüísticos cuya interpretación puede modificar el proceso de significación y solución de la tarea por parte de los niños; para MacGregor y Price (1999) "*la conciencia de las estructuras del lenguaje y la habilidad para manipular esas estructuras puede ser una manifestación de un proceso cognitivo más profundo que también subyace la comprensión de la notación algebraica*", (p. 462).

Si bien es cierto que la tarea escogida por los estudiantes es aritmética y no involucra el uso de variables, expresiones algebraicas o ecuaciones, también lo es que los maestros han centrado su atención en el uso de signos de puntuación, los han vinculado con paréntesis y con las operaciones. Podríamos decir que los maestros han "algebrizado" una tarea aritmética (Kaput, 1988).

El segundo elemento es la sensibilidad para "ubicarse en la posición de los niños" reconociendo a sus futuros alumnos como sujetos actuantes en la solución de la tarea. Esto es lo que Conway (2001) denomina la "reflexión prospectiva", (p. 90) que requiere "parar y pensar" antes de de afrontar la enseñanza de un tema. En este momento específico del proceso de formación parece evidenciarse un desplazamiento del foco de atención de los maestros en formación desde la solución de la tarea hasta consideraciones sobre las posibles significaciones que los niños atribuirían a las entidades lingüísticas.

7.3.1.1.3 Sexta Sesión

En esta sesión se discutieron algunos análisis epistémicos que se efectuaron con la ayuda de la herramienta de análisis de objetos y significados. Aunque este instrumento propuesto por el enfoque onto-semiótico se comenta en el cuarto capítulo de esta memoria de tesis doctoral, se recuerda que se trata de una tabla a dos columnas, en el lado izquierdo se ubican las entradas corresponden a los elementos de significado: Elementos lingüísticos, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos, y en lado derecho se ubican los eventuales significados identificados por los estudiantes como aquellos que son intervinientes y emergentes durante la práctica matemática. Este instrumento favorece ampliar el foco de atención desde las representaciones hacia el conglomerado de entidades referidas por las mismas y los roles que desempeñan en la actividad matemática (Font, Godino y D'Amore, 2007).

En la Figura 7.4 se muestra parte del análisis realizado por las estudiantes para la tarea discutida en la quinta sesión. Si bien es cierto que a primera vista proponen propiedades que al parecer no están directamente vinculadas con la solución de la tarea, también es cierto que se incluye un apartado que denominan "otras propiedades por parte del alumnado", que hace referencia a "acciones" que el niño debe desarrollar para resolver la tarea. Por motivos de presentación, en la Figura 7.4 no se ha puesto toda la información que el grupo propone; en tanto que tal información no es pertinente al tema en discusión.

4.- Escribe el enunciado de dos problemas que se resuelvan con estas operaciones:

(759 + 3.525) X 3 = 12.852 (100.000 – 78.926): 257 = 82

	PROBLEMA 1	**PROBLEMA 2**	**PROBLEMA 3**	**PROBLEMA 4**
Problemas-situaciones ⋮	Resolver el área de esos dos ⋮	Calcula el área de estos dos ⋮	Escribe con símbolos y signos matemáticos, y ⋮	Escribe el enunciado de ⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Propiedades ⋮	Propiedad de la división: - División exacta: a:b=C si bXc=a División entera o Euclidea: A:b=c y r Y se cumple que c X b +r= a La fórmula de las área de estos polígonos son en sí, una propiedad. ⋮	Propiedad de la división: - División exacta: a:b=C si bXc=a División entera o Euclidea: A:b=c y r Y se cumple que c X b + r= a La fórmula del área del rombo es en sí una propiedad. ⋮	**Propiedades de la suma:** Conmutativa: Al unir dos conjuntos da igual b+ a que a + b, la solución va a ser la misma. A + b = B + a Asociativa: Da igual donde pongamos el paréntesis, la solución también será la misma. (a +b) + c = a + (b + c) Elemento neutro: No actúa, no funciona, no hace nada. Por el hecho de no incidir se llama neutro. a + 0 = a ⋮	Conmutativa Asociativa **Otras propiedades por parte del alumnado:** Aquí se trabaja el lenguaje, podemos ver su importancia. El alumnado tiene que transformar el lenguaje simbólico de los números por la palabra, y dotarla de significado. ⋮
Argumentos	Deductivo: Fase posterior al	Deductivo: Fase posterior	Deductivo: Fase posterior al razonamiento inductivo,	Inductivo: El alumno juega

Figura 7.4. Análisis Epistémico Realizado por un Grupo de Maestros.

El grupo identifica el conjunto de propiedades que desde el “conocimiento” matemático consideran relacionadas con la tarea, pero también reconocen las “transformaciones de significado” que los alumnos deben efectuar para resolverla.

7.3.1.2 Interpretación de los Resultados para el Grupo Uno

En la segunda sesión las estudiantes evidencian cierta limitación en la amplitud de sus consideraciones sobre las soluciones de las tareas; no identifican los objetos ni el rol del significado de los mismos que emerge durante la solución de una tarea.

En la sexta sesión de trabajo, los análisis epistémicos de las tareas involucran elementos tales como elementos lingüísticos, propiedades y sus diversos significados en el contexto de la tarea.

A pesar de que el uso que hacen de la herramienta de análisis epistémico es limitado, esta facilita tanto el reconocimiento de elementos implicados en el proceso de significación y de solución de las tareas como la creación de conciencia en los maestros acerca del complejo entramado de significados que se pone en juego durante la solución de tareas aritméticas. Se considera que la herramienta ha favorecido que los estudiantes concedan carácter algebraico a tareas que involucran, en apariencia, sólo a la aritmética.

7.3.2 Caso Dos

El segundo caso es el de grupo de David, estudiante de 20 años, quien tiene muy poca experiencia en la enseñanza, aún en clases particulares.

David ha se destacado en sus estudios y podría ser catalogado como estudiante brillante. Siente gusto por las matemáticas y por resolver tareas. Participó en la experiencia porque fue invitado por el formador y porque el tema de la enseñanza del álgebra en la escuela primaria le pareció un tema interesante y un poco extraño. Durante las reuniones de trabajo mostró un pensamiento crítico e independiente.

Se sostuvieron siete reuniones, de entre 30 y 40 minutos de duración, aproximadamente, que fueron grabadas en audio. Una octava sesión se realizó después de la presentación de la unidad didáctica y en ella se entrevistó al estudiante sobre algunas de sus afirmaciones durante las sesiones anteriores. Durante la tercera sesión se discutió la aproximación al razonamiento algebraico elemental propuesta a partir del EOS (Anexo A -Prácticas Iniciales con los Maestros en Formación-). No se informa sobre la segunda sesión -dedicada a la discusión sobre errores en el contexto del razonamiento algebraico elemental- en tanto que las identificaciones de errores no se diferencian mucho de las identificaciones hechas por el grupo de Julia. Sin embargo se informa sobre las otras sesiones de trabajo ya que se puede evidenciar tanto cierta apropiación en el uso de la GROS como perseverancia en la identificación y propuesta de tareas que los estudiantes consideran como de razonamiento algebraico elemental.

7.3.2.1 Las Sesiones de Trabajo

En la tercera sesión se discutió sobre la solución de una tarea propuesta por los estudiantes y se sugirió el uso de la guía GROS para analizar objetos y significados que surgen en la solución de la misma.

En las sesiones cuarta y quinta se discutieron tareas que los estudiantes propusieron y se comentaron los análisis epistémicos de ambas tareas. Durante la sexta sesión se discutió sobre la sección de evaluación de la unidad didáctica y sobre el concepto de Idoneidad Didáctica.

Entre la segunda y la tercera transcurrió una semana, entre la tercera y la cuarta, transcurrieron dos semanas. Entre la cuarta y la quinta transcurrieron tres semanas. Entre la quinta y la sexta, dos semanas. Se considera una séptima sesión, que corresponde a la presentación, ante la clase, de la unidad didáctica.

7.3.2.1.1 Tercera Sesión

Los estudiantes proponen discutir una tarea, que se muestra en la Figura 7.5, con su correspondiente solución.

Tarea propuesta por los maestros en formación:

- Completa el siguiente enunciado: A la fiesta de cumpleaños de María van un total de 27 amigos, hay tres niñas más que niños. ¿Cuántos niños y niñas van a la fiesta?

$\square$ = niños.
$\bigcirc$ = niñas

$$\bigcirc = \square + 3$$

$$\bigcirc + \square = 27$$
$$\square + 3 + \square = 27$$
$$\square + \square = 24$$
$$\square + \square = 27 - 3$$
$$\square = 12.$$

Figura 7.5. Enunciado y Solución de la Tarea sobre Relación Numérica.

David propone “representar con un dibujo” (un cuadrado) al número de niños. Luego, “como hay tres niñas más que niños entonces el número de niñas es el círculo más tres y esto da el total de 27 amigos”.

El investigador cuestiona la propuesta de solución:

I: Pero parece un recurso discutible, pues si es válido usar un cuadrado, uno podría usar una letra.

D: El número de niños es un cuadrado, usamos círculos y cuadrados… así lo resolvemos sin usar letras.

I: Pero el niño tiene que interpretar el cuadrado como número de niños, valor que no conocemos. ¿No crees que sea lo mismo que usar una letra, digamos *x*?

D: hmmm, creo que si, pero es un recurso diferente, no usamos letras, sino objetos, conocidos para los estudiantes, las letras los podrían confundir…

En el segmento anterior el estudiante considera que el uso de “objetos conocidos” en lugar de letras para denotar incógnitas podría evitar dificultades a los niños. El estudiante reconoce que el uso de letras es una dificultad para los niños, sin embargo parece desconocer que no es sólo el recurso usado (letras o dibujos) sino los significados conferidos a tales recursos lo que genera dificultades a los niños.

La estructura aritmética de las relaciones entre número de niños y número de niñas y la eventual generalización de esa relación podrían ser aspectos que los maestros en formación escogieran para discutir con los niños en primera instancia. La estrategia de solución planteada por el estudiante desconoce estos aspectos y se centra en una solución que básicamente hace uso de la representación simbólica de la “incógnita” y de procedimientos algebraicos de despeje de incógnitas. Este énfasis podría tener su origen en las concepciones, adquiridas por los estudiantes en sus estudios previos, que son una fuente de inspiración cuando están basadas en experiencias de vida (Kagan, 1992; Stofflett y Stoddart, 1994).

Al finalizar la tercera sesión se pidió a los estudiantes que escogieran otra tarea de razonamiento algebraico elemental para ser discutida en el transcurso de la siguiente sesión de trabajo, sostenida dos semanas más tarde. Se les sugirió resolver la tarea e identificar los conocimientos matemáticos tales como elementos lingüísticos, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos requeridos para resolverlo.

7.3.2.1.2 Cuarta Sesión

El enunciado de la tarea que los estudiantes propusieron para discutir en esta sesión con su correspondiente solución, se muestra en la Figura 7.6.

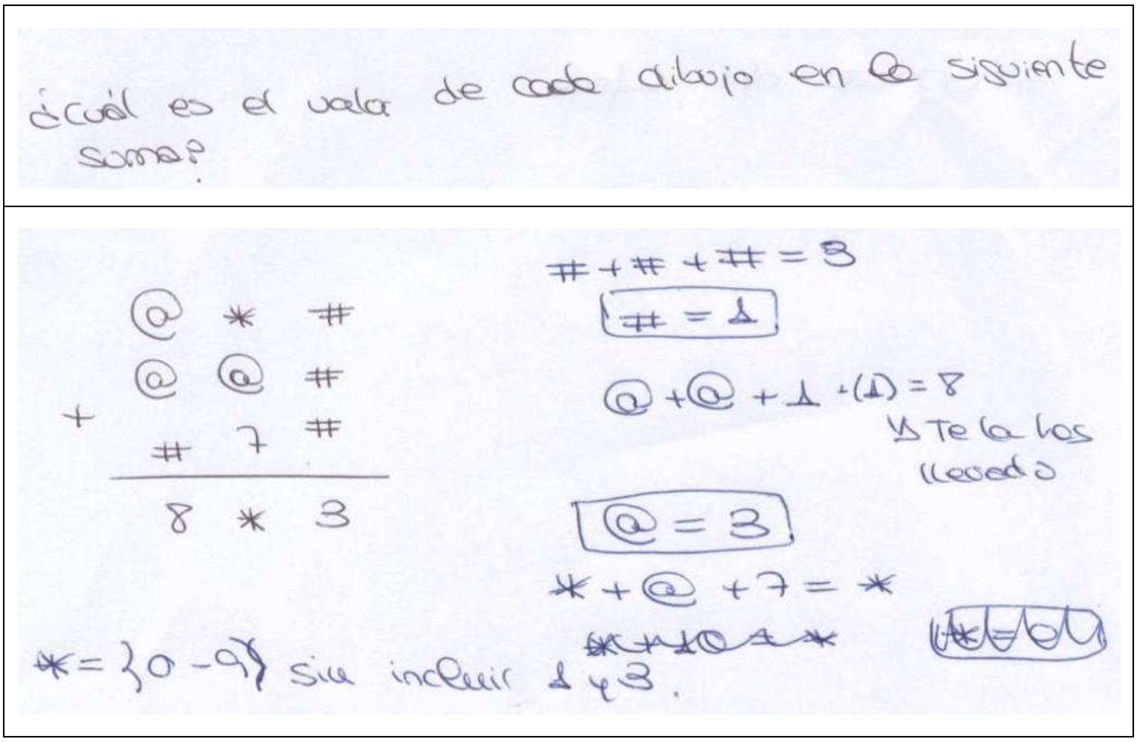


Figura 7.6. Enunciado y Solución de la Tarea sobre el Valor de cada Dibujo.

Los estudiantes son interrogados sobre la solución de la tarea, y específicamente sobre el valor del signo “almohadilla” - # - David afirma:

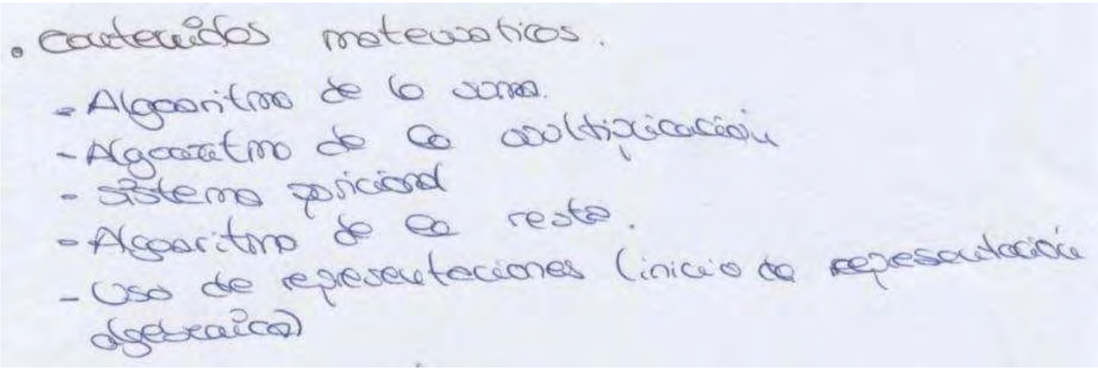
> D: Porque si… si tu desarrollas la tabla de multiplicar del tres te das cuenta, porque este tres puede ser en principio de trece, de veintitrés, de treinta y tres, pero el único número que al multiplicarlo por tres, la última cifra es un tres es uno. Porque dos por tres seis, por tres nueve, así que este ni puede ser trece ni treinta y tres… [Inaudible].

El estudiante argumenta numéricamente para justificar la asignación del valor a la incógnita discutida. Al parecer acepta que los argumentos basados en las propiedades aritméticas son válidos para efectuar la justificación. Tal aceptación representa tanto un cambio frente al uso de argumentos procedimentales de carácter algebraico para resolver la tarea discutida en la sesión anterior como un avance en el uso de las propiedades del sistema numérico para apoyar lo algebraico.

Para Fujii (2003) una vía hacia el razonamiento algebraico elemental es “*introducir el álgebra mediante el uso y generalización de expresiones numéricas*”, (p. 59); la autora agrega “*el uso de expresiones numéricas generalizables puede proveer un puente importante entre el pensamiento aritmético y el algebraico, que los niños deben cruzar permanentemente durante sus años de escuela primaria y secundaria*”, (p. 59).

La solución dada por los estudiantes mediante el uso de ecuaciones, que se ilustra en la Figura 7.6, muestra la estrategia que han usado. La semejanza entre los dos tipos de tareas propuestas por los estudiantes: El que corresponde a la tercera sesión, sobre la relación entre número de niños y niñas, y el que corresponde a esta sesión, podría sugerir la dependencia de un modelo de "álgebra elemental" asociado al álgebra de la escuela secundaria.

En relación con la identificación de conocimientos matemáticos (elementos lingüísticos, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos), la respuesta del grupo de estudiantes se exhibe en la Figura 7.7.



Transcripción:

Contenidos Matemáticos

- Algoritmo de la suma
- Algoritmo de la multiplicación
- Sistema posicional
- Algoritmo de la resta
- Uso de representaciones (inicio de representación algebraica)

Figura 7.7. Conocimientos Matemáticos Considerados para Resolver la Tarea sobre el Valor de cada Dibujo.

Tres aspectos resaltan en el listado de contenidos matemáticos exhibidos en la Figura 7.7: La identificación mayoritaria de procedimientos, las representaciones algebraicas y la ausencia de significados asociados a los conocimientos identificados.

Los estudiantes continúan identificando "conocimientos matemáticos" con un listado de procedimientos o conceptos matemáticos, a pesar que tanto en las clases teóricas y prácticas el formador insistió en asociar conocimientos matemáticos con objetos matemáticos y significados, según son definidos por el marco teórico EOS. Se evidencia cierto apego a su concepción sobre que son "conocimientos matemáticos".

Para la siguiente sesión de trabajo los estudiantes proponen la agenda de trabajo. Se les pidió que usaran la GROS para analizar objetos y significados matemáticos emergentes en el proceso de solución de las tareas, esto para cumplimentar la exigencia de incluir este tipo de análisis en la unidad didáctica final.

7.3.2.1.3 Quinta Sesión

Para esta sesión, los estudiantes propusieron dos temas: El primero sobre la sección correspondiente a la evaluación que debía ser incluida en la unidad didáctica, y el segundo sobre la discusión de una tarea que querían incluir en tal sección, para evaluar a los niños. En lo que sigue se mostrará la solución dada por los maestros a la tarea, posteriormente se discutirá el análisis epistémico propuesto por los futuros maestros, mediante el uso de la GROS e incluida en su unidad didáctica final.

Adicionalmente se mostrará evidencia de la identificación de conflictos de significado, asociados a la tarea en discusión. Inicialmente mostraremos algunas dificultades que los estudiantes asociaron a la tarea, y posteriormente mostraremos la versión final de tales conflictos de significado, tal como aparecen en su unidad didáctica. Posteriormente se comentará sobre tal identificación de conflictos en el contexto de la formación de maestros en el marco del análisis didáctico y tareas de razonamiento algebraico elemental.

El enunciado de la tarea con su correspondiente solución, que los estudiantes propusieron para discutir en esta sesión, se muestra en la Figura 7.8. Durante esta sesión de trabajo sólo se discutió la solución a la tarea de la suma.

Cuando se interrogó a los estudiantes acerca de la posibilidad de usar el método de solución para proponer variaciones de la tarea, ellos responden: *Claro, es válido, el método es el mismo. Sólo cambia el ejercicio.* Sin embargo David anotó: *hmmm…habría que resolverlo, a lo mejor hay casos en donde no funciona, pero uno se entera cuando lo hace*.

La solución dada por los maestros ciertamente resuelve la tarea; consideran que durante el proceso de solución de este tipo de tareas se pueden enterar si hay casos que no admiten el procedimiento de solución usado.

Algunos aspectos de la solución llaman la atención. El primero es la recurrencia del uso de elementos característicos del álgebra de la secundaria en la solución; permanece el carácter algebraico de la estrategia de solución de las tres tareas correspondientes a las sesiones tercera, cuarta y quinta. El segundo es la apropiación de la herramienta GROS para el análisis epistémico de las tareas matemáticas. Vale notar el incremento entre sesión y sesión del número de objetos y significados identificados por los estudiantes.

3. Calcula y averigua el valor de cada dibujo

Solución:

En primer lugar, resolveremos la suma:

Si nos fijamos en la columna de las unidades, tenemos la siguiente ecuación:

2 x ♥ = 6 → ♥ = 6/2 → ♥ = 3

Una vez hallado este valor, ya conocemos un dato más que nos permite escribir la ecuación que resulta de la columna donde se suman las centenas:

3 + 1 = ❂ → ❂ = 4

Finalmente, nos fijamos en la columna de las decenas y obtenemos la siguiente expresión:

✚ + 4 = 6 → ✚ = 6 – 4 → ✚ = 2

Es decir, la suma que se nos presenta en el enunciado es la siguiente:

$$\begin{array}{r} 323 \\ +121 \\ \hline 466 \end{array}$$

Figura 7.8. Enunciado y Solución de la Tarea “Calcula el Valor de cada Dibujo”.

7.3.2.2 Análisis Epistémicos de una Tarea

En la Tabla 7.1, se muestran los objetos lingüísticos nombrados como “representaciones” por el grupo de maestros, que corresponden a esta tarea.

Tabla 7.1. Objetos Lingüísticos para la Tarea de Calcular el Valor de cada Dibujo.

Tipos de objetos	**Significados** (relación de referencia o de uso)
REPRESENTACIONES (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, …)	
Calcula y averigua el valor de cada dibujo.	Cada uno de los dibujos empleados para designar las cifras cuyo valor desconocemos, son incógnitas que deberemos hallar tratando de resolver la suma y la resta que nos propone el enunciado.

Los estudiantes reconocen un único objeto lingüístico "calcula y averigua el valor de cada dibujo". A cada dibujo asignan el significado de "incógnita" cuyo valor debe ser hallado mediante el uso de la "suma y la resta", es decir a partir de la identificación de estos dos conceptos, de los procedimientos asociados y de las propiedades pertinentes. Posteriormente, en la sección 7.3.2.3 -Identificación de Posibles Conflictos de Significado- de este capítulo, se discute sobre los conflictos que los maestros en formación asignan a la consigna "calcula y averigua el valor de cada dibujo".

La Tabla 7.2 muestra los conceptos, que corresponden a esta tarea, identificados por los maestros en formación.

Tabla 7.2. Objetos Conceptuales para la Tarea de Calcular el Valor de cada Dibujo.

Tipos de objetos	**Significados** (relación de referencia o de uso)
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición)	
Introducción a la notación algebraica mediante el uso de incógnitas.	Los valores numéricos con los que debemos completar la suma y la resta vienen designados por incógnitas, que son dibujos en este caso.
Suma →	Operación que nos permite encontrar el total, o suma, a partir de la unión de dos o más números a los que llamamos sumandos.
Resta →	Operación utilizada para encontrar la diferencia, o proceso de quitar un número de otro para encontrar la cantidad restante.
Multiplicación →	La multiplicación es una operación aritmética de composición que consiste en sumar reiteradamente la primera cantidad tantas veces como indica la segunda. Así, 4 × 3 = 4 + 4 + 4.
División →	Proceso que nos permite calcular cuántas veces se encuentra contenida una cantidad en otra.
Ecuaciones de primer grado con una incógnita →	Expresión matemática que establece una relación de igualdad entre dos términos, cada uno de los exponentes que acompañan a las cifras que componen cada uno de los dos términos son 0 o 1.

El concepto de incógnita, inmerso en la solución de la tarea, es mencionado, y reconocido como un "dibujo" que representa "valores numéricos". Los otros conceptos identificados, corresponden a operaciones matemáticas.

En relación con la identificación de conflictos potenciales, el grupo no refiere que los niños podrían tener dificultades para resolver las ecuaciones con una sola incógnita. Al parecer consideran que el procedimiento de “operar en reversa” o de “transponer” términos (Filloy, Rojano y Puig, 2008) será espontáneamente desarrollado por los niños. Los maestros no consideran posibles conflictos derivados de una solución aritmética.

La Tabla 7.3 muestra los procedimientos identificados por los maestros en formación, que corresponden a esta tarea.

Tabla 7.3. Elementos Procedimentales para la Tarea de Calcular el Valor de cada Dibujo.

Tipos de objetos	**Significados** (relación de referencia o de uso)
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
Traducción de lenguaje ordinario a lenguaje algebraico.	Al leer en el enunciado: “Calcula y averigua el valor de cada símbolo…”, el alumno lo traduce al lenguaje algebraico, buscando ecuaciones en las que pueda relacionar datos desconocidos (el valor da cada uno de los símbolos) con datos conocidos.
Algoritmo de sumar	Nos permite establecer las relaciones entre los sumandos y el total, y calcular el valor de  .
Algoritmo de restar	Nos permite calcular el valor de ,  y  .
Algoritmo de multiplicar	Nos permite establecer la relación entre y su valor.
Algoritmo de dividir	Permite calcular el valor de .
Resolución de ecuaciones de primer grado	Utilizadas para establecer las relaciones entre los símbolos, así como para calcular su valores numéricos.
Técnica de ensayo - error	En la resta permite calcular el valor de los símbolos que actúan como incógnitas, para cada uno de ellos tenemos 6 posibles valores, que descartamos o no en función de si se ajustan a la condición extraída del problema.
Asignación de un valor numérico a una incógnita que era desconocida en un principio.	Al calcular el valor de cada símbolo se sustituye en la operación de suma o resta el símbolo por el valor hallado.

Los procedimientos identificados se corresponden con los usados por el grupo en la solución matemática de la tarea, y los significados conferidos se adecuan a la resolución mostrada en la Figura 7.8. Nótese que los significados para “algoritmo de sumar” se expresan en términos de lo que el procedimiento “permite” hacer. Mientras que el procedimiento de “resolución” se indica en términos de “propósito”. El significado conferido a “asignación de un valor numérico…” se da en términos de sustitución de letras por números. Llama la atención el uso de la “técnica de ensayo y error” pero orientada por la “condición extraída del problema”. Los estudiantes consideran válida esta técnica pero toman distancia de considerarla un proceso de ensayo sin sentido ni orientación. Se ensayan valores pero con una regla que oriente la escogencia de los valores considerados.

La Tabla 7.4 muestra las propiedades identificadas por los maestros, que corresponden a esta tarea.

Tabla 7.4. Propiedades para la Tarea de Calcular el Valor de cada Dibujo.

Tipos de objetos	**Significados** (relación de referencia o de uso)
PROPIEDADES(Enunciados para las cuales se requiere una justificación o prueba)	
P1: Cada una de las incógnitas tiene un único valor numérico.	A cada una de las letras del cuadro le corresponde un único valor numérico, que debe estar comprendido entre 0 y 9.
P2: Solo podemos calcular el valor de aquellas incógnitas con las que podemos crear ecuaciones de primer grado con una sola incógnita.	Por trabajar con ecuaciones de primer grado con una sola incógnita, para tratar de hallar el valor numérico de de los símbolos que componen la suma y la resta, debemos establecer relaciones en forma de ecuaciones, en las que solo sea uno el dato desconocido.

Resalta el reconocimiento que los maestros en formación hacen de la unicidad de las soluciones a las ecuaciones planteadas, así como de la propiedad que establece que sólo se puede encontrar los valores numéricos de las incógnitas de las cuales se tenga suficiente información.

La Tabla 7.5 exhibe el argumento propuesto por el grupo. Se aprecia que el significado conferido al argumento “Cada una de las incógnitas tiene un único valor numérico” es extenso y podría ser asociado a una “explicación en detalle”.

Tabla 7.5. Argumentos para la Tarea de Calcular el Valor de cada Dibujo.

Tipos de objetos	**Significados** (relación de referencia o de uso)
ARGUMENTOS (Justificaciones, demostraciones, o pruebas de las proposiciones usadas)	
P1: Cada una de las incógnitas tiene un único valor numérico.	Es debido a que las operaciones que nos llevan a hallar el valor de cada una de ellas tan solo tienen un resultado posible, además este resultado es un número natural, por tratarse de operaciones cerradas dentro del conjunto de los naturales (como es el caso de la suma y la resta cuando el sustraendo es menor que el minuendo) . Además tan solo hay un valor que al sustituir al símbolo que actúa como incógnita, hace que se cumpla la operación de suma y resta, que nos propone el enunciado, de manera correcta.

A primera vista resalta el mayor número de objetos matemáticos y significados identificados y discutidos en los análisis exhibidos desde la Tabla 7.1 hasta la Tabla 7.5 comparados con los objetos y significados exhibidos en la Figura 7.7. Se podría conjeturar cierto desarrollo en las competencias de análisis didáctico correspondiente a este grupo de maestros.

La identificación de objetos y significados matemáticos asociados, en el marco de la solución de una tarea, es un paso importante en el proceso de planeación de una clase. Krainer (2003) considera que "*la confrontación de los individuos con tareas matemáticas desafiantes debería ser considerada como una componente esencial de la enseñanza*", (p. 93); se podría agregar que la confrontación de los maestros con actividades exigentes de planeación debería ser, igualmente, una componente esencial del proceso de formación de maestros.

Si bien los maestros de nuestro estudio sólo realizaron la planeación, se considera importante proveerlos con experiencias en las que se pongan en práctica algunas competencias que deberán desarrollar en su ámbito profesional.

Se considera que una manera de adelantarse a los cuestionamientos matemáticos de los niños es efectuar una planeación que considere la diversidad de objetos y significados presentes y emergentes durante la solución de una tarea matemática. Para Carraher y Schliemann (2007) los maestros de primaria deben tener la capacidad de reconocer y estimular el razonamiento algebraico manifestado espontáneamente por sus alumnos.

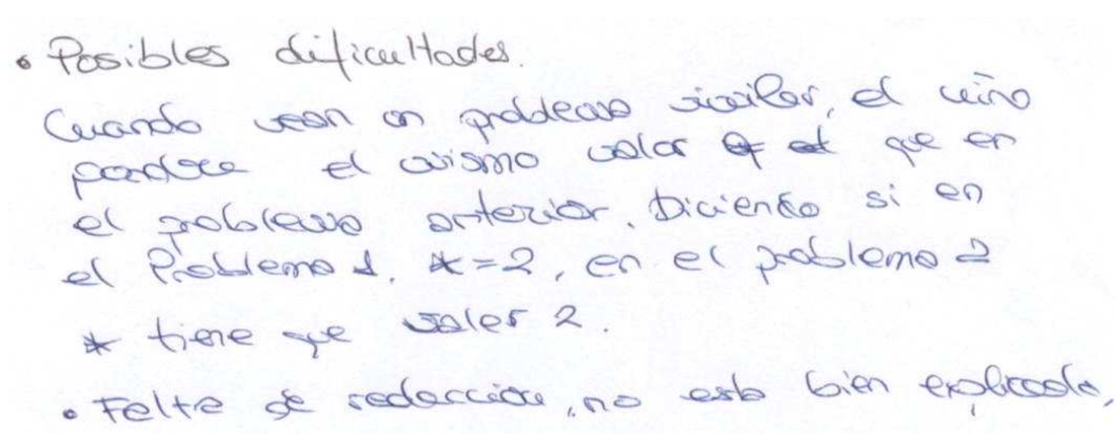
No se valora aquí la identificación de objetos y significados realizada por los maestros, sin embargo se puede decir que los estudiantes han hecho una buena identificación de objetos y significados, cuya pertinencia se podría valorar una vez que la tarea fuese discutida con los niños.

7.3.2.3 Identificación de Posibles Conflictos de Significado

A partir de la identificación de los objetos y de sus significados intervinientes y emergentes durante la resolución particular dada a la tarea, se pueden señalar posibles conflictos de significado que podrían surgir durante la interacción entre maestro y alumnos. Desde la perspectiva del desarrollo del conocimiento didáctico-matemático se considera que la preparación de una actividad matemática con fines instruccionales no solamente debe considerar la "solución matemática" sino la identificación de posibles conflictos y modos de abordarlos. Esto es aún más pertinente cuando se trabaja con maestros en formación inicial, quienes posiblemente carecen del conocimiento de los niños y de los conflictos matemáticos que estos suelen manifestar.

Durante la discusión de la tarea “calcular y averiguar el valor de cada dibujo”, los estudiantes identificaron algunas “dificultades” con las cuales los niños se encontrarían

La primera propuesta de conflictos de significado que los estudiantes elaboraron se muestra en la Figura 7.9.


• Posibles dificultades.
Cuando vean un problema similar, el niño pondrá el mismo valor que en el problema anterior. Diciendo si en el Problema 1, * = 2, en el problema 2 * tiene que valer 2.
• Falta de redacción, no está bien explicado.

Transcripción:

Posibles dificultades

- Cuando vean un problema similar, el niño pondrá el mismo valor que en el problema anterior. Diciendo si en el problema 1, $*=2$, en el problema 2, ***** tiene que valer 2.
- Falta de redacción, no está bien redactado.

Figura 7.9. Primera Propuesta de Conflictos de Significado.

Durante esta sesión de trabajo, se les pidió a los estudiantes ampliar la identificación de “dificultades”, e incluirlas en la Unidad Didáctica final. Se les pidió ampliar la actividad de identificación a otras tareas por ellos trabajadas e incluidas en su Unidad Didáctica final. Se discutió sobre la importancia de identificar conflictos de significado, a partir del análisis epistémico, y vincularlos con sus propuestas de discusión en clase con los supuestos niños.

La Figura 7.10 exhibe la propuesta final de identificación de conflictos de significado para esta tarea, tal como fue reelaborada por los estudiantes y presentada en la unidad didáctica final.

El grupo no refiere que los niños podrían tener dificultades para resolver las ecuaciones con una sóla incógnita. Al parecer consideran que el procedimiento de “operar en reversa” o de “transponer” términos (Filloy, Rojano y Puig, 2008) será naturalmente desarrollado por los niños. Los maestros no consideran posibles conflictos derivados de una solución aritmética, lo cual parece apenas natural, dado que los estudiantes resolvieron la tarea mediante un procedimiento que combina tanto elementos algebraicos como aritméticos. Su actitud es por lo menos natural, en tanto que la identificación de conflictos surge de la solución matemática planteada y del análisis epistémico realizado.

- Los niños se pueden liar pues se pide que calculen y averigüen, tal vez se les debe decir sólo una cosa, o que calculen o que averigüen. Tal vez quitar averiguar, pues podrían adivinar y poner números sin pensar en las operaciones que deben hacer.
- Si lo niños resuelven el problema por ensayo y error, entonces el problema es más difícil, pues los niños ensayaran valores en desorden y se liaran mucho con la solución.
- Los niños pueden pensar que en cada dibujo pueden colocar un número diferente, no piensan que cada dibujo representan un número, pero que es el mismo número y no diferentes. En el mismo dibujo colocan dos números diferentes.

Figura 7.10. Propuesta Final de Conflictos de Significado.

El grupo realiza un análisis epistémico mediante el uso de la "Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados" (GROS) (Godino et al., 2008) que previamente se les había proporcionado en el módulo de "clases de teoría" de la asignatura. A partir de la identificación de los objetos y de sus significado intervinientes y emergentes durante la resolución particular dada a la tarea, se pueden señalar posibles conflictos de significado que podrían surgir durante la interacción entre maestro y alumnos. Desde la perspectiva del desarrollo del conocimiento didáctico-matemático (Hill, Ball y Schilling, 2008) se considera que la preparación de una actividad matemática con fines instruccionales no solamente debe considerar la "solución matemática" sino la identificación de posibles conflictos y modos de abordarlos. Esto es aún más pertinente cuando se trabaja con maestros en formación inicial, quienes posiblemente carecen del conocimiento de los niños y de los conflictos matemáticos que estos suelen manifestar.

7.3.2.3.1 Sexta Sesión

Esta sesión se dedicó a la discusión de aspectos relacionados con la presentación de la unidad didáctica y sobre la evaluación de la idoneidad didáctica de la misma; sin embargo se aprovechó para formular algunas preguntas relacionadas con el razonamiento algebraico elemental.

I: Ahora, después que ya casi tienen la unidad hecha, ¿Crees que los ejercicios que incluyan razonamiento algebraico elemental puede enseñarse en la escuela elemental?, ¿Es factible?

E: Dentro de la programación de álgebra debería ser el último…porque siempre lo ponen para resolver una multiplicación, una suma, para nombrar algo… y directamente habría que haber dado lo anterior y después el álgebra.

El estudiante exhibe la creencia que primero debe enseñarse la aritmética y después el álgebra, que ese es el orden natural de aparición en el currículo matemático de la escuela elemental. Es de resaltar cómo la creencia del estudiante, en relación con la inclusión del razonamiento algebraico elemental en la escuela primaria, persiste. No parece claro que considere que el álgebra tenga cabida en la escuela elemental aún si se amplia la concepción de álgebra como método para resolver tareas mediante el uso ecuaciones e incógnitas.

Para Wubbels, Korthagen y Broekman (1997) "*cualquier intento de cambiar las creencias de los estudiantes acerca de algún tema en particular en relación con la enseñanza es una tarea difícil*", (p. 19).

7.3.2.3.2 Séptima Sesión

En esta sesión, los maestros presentaron su unidad didáctica al grupo de sus compañeros de clase. Incluimos esta sesión en tanto que los estudiantes efectuaron afirmaciones que ratifican sus creencias en relación con el razonamiento algebraico elemental.

La presentación de la unidad didáctica se grabó en video y durante la misma el formador efectúo algunos comentarios complementarios a la presentación y formuló algunas preguntas a la clase en relación con la inclusión del razonamiento algebraico elemental. El investigador no tuvo oportunidad de formular preguntas a los estudiantes.

Durante la presentación los maestros en formación escogieron presentar una "secuencia de actividades". Para la primera sesión de clase (con los hipotéticos niños), los maestros escogieron trabajar con un crucigrama, en el que según los estudiantes, los niños "deben cambiar las letras por números"

Finalmente, consideran una tarea donde "se da la vuelta a la tortilla, en donde se presenta una información algebraica y cómo esa información puede representar a cualquier situación ordinaria…[6]", en la que se da una ecuación lineal y se pide "inventar una historia que se ajuste a las siguientes ecuaciones".

La Figura 7.11 exhibe una captura del fotograma del video en donde los maestros en formación presentan esta tarea.

[6] Segmento tomado del video de la presentación de la unidad didáctica.

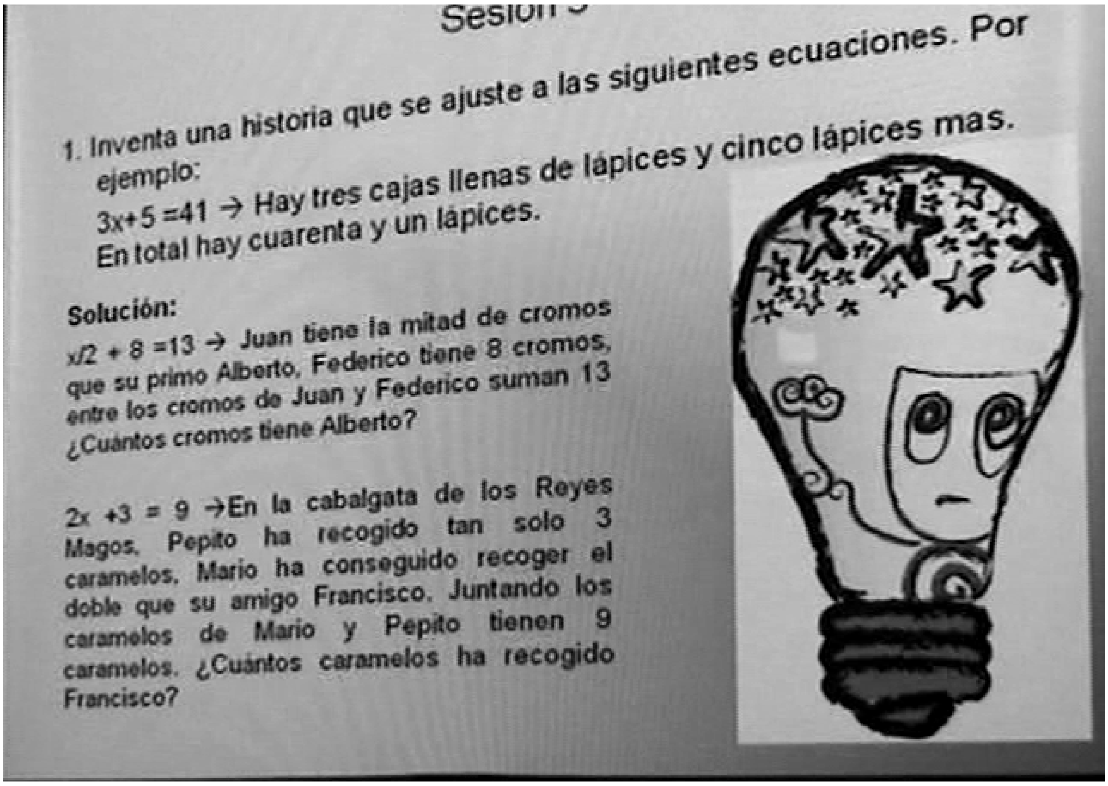


Figura 7.11. Fotograma de la Presentación de la Unidad Didáctica.

La primera tarea (la que corresponde a la ecuación $3x+5=41$) aparece en la unidad didáctica final; sin embargo los otros dos ejemplos, que se aprecian en la Figura 7.11, y de los cuales los estudiantes dan una solución, no se incluyen en la misma pero aparece en la presentación final. Aunque no se hará un análisis de las dos nuevas tareas propuestas, se quiere llamar la atención sobre el hecho que la "correspondencia" entre la ecuación ($\frac{x}{2}+8=13$) y el enunciado propuesto por los maestros en formación dista de ser diáfana o fácilmente comprensible para un niño de escuela elemental. La segunda tarea (la que corresponde a la ecuación $2x+3=9$) sigue el mismo patrón.

Si bien es cierto que se podrían cuestionar las soluciones dadas por los estudiantes, al parecer dirigidas a sus compañeros de clase más que a niños hipotéticos de sexto grado de escuela elemental, también es cierto que las tareas pretenden "dar vuelta a la tortilla" y proponen dar "contenido" a expresiones algebraicas. Al parecer la intención de los maestros es mostrar que es posible dar "significado" o sentido real a ecuaciones que en principio no tienen un referente en el mundo cotidiano. Se podría afirmar que la inclusión de las nuevas tareas en la presentación oral final, mismas que no habían sido discutidas durante la última sesión de discusión previa a la presentación oral, podría ser evidencia que el proceso de reflexión de los maestros en formación estaba aún activo al momento mismo de elaborar la presentación de su trabajo.

Vale decir que la presentación de la unidad didáctica hecha por el grupo presentado como el caso uno, no fue comentada en este trabajo, en tanto que las estudiantes, aduciendo ansiedad, no permitieron la grabación ni en video ni en audio, tampoco permitieron la presencia del investigador. Las estudiantes no atendieron la invitación del investigador para sostener una reunión posterior.

7.3.2.4 Interpretación de los Resultados para el Grupo Dos

El análisis epistémico realizado por los maestros en la quinta sesión muestran cierta elaboración en comparación con el análisis realizado en la cuarta sesión; el número y pertinencia de objetos y significados asociados a ellos y relacionados con la tarea discutida muestra un incremento. Esta competencia aún debe ser articulada con la identificación de conflictos de significado y con la propuesta de tareas de refuerzo y ampliación. Para esta tarea los estudiantes no identificaron conflictos ni propusieron modificaciones del mismo. Sin embargo lo hicieron en la tarea que se mostró en la sección 6.7.1 -Conflictos Identificados por G1-, del sexto capítulo. Es posible que los estudiantes no hayan hecho la tarea de identificar conflictos y proponer tareas de refuerzo y ampliación por la dificultad inherente que entraña la identificación, adicionalmente ya mostraron tal competencia en una tarea de su unidad didáctica y no tienen tiempo para hacerlo con todos. Sin embargo, han exhibido evidencia sobre la puesta en juego de la competencia.

También resalta que las creencias del grupo en relación con el razonamiento algebraico elemental parece que se mantienen a lo largo del proceso. Consideran que el razonamiento algebraico en la escuela elemental está relacionado con conceptos tales como: Incógnitas, variables, ecuaciones, despeje de valores desconocidos. Sin embargo, las tareas que proponen para introducir el razonamiento algebraico elemental ponen en juego elementos matemáticos identificados por diversos investigadores como propios del RAE (relaciones entre números, incógnitas, problemas de palabras), e identifican objetos y significados de carácter algebraico propuestos en la aproximación que se discutió con ellos. Al parecer los maestros están en el proceso de modificar y ampliar su concepción del álgebra para adaptarla a la propuesta curricular de su inclusión en la primaria. Las oportunidades de planear y cuestionar actividades matemáticas que estén orientadas a los futuros alumnos de los maestros en formación "*ofrece un medio para que los maestros en formación desplieguen sus inquietudes, sus teorías personales y para que las integren en sus decisiones docentes*" (Poulou, 2007, p. 92).

7.4 Conclusiones e Implicaciones para la Formación de Maestros en Formación

La experiencia de orientación a los futuros estudiantes ha promovido que éstos valoren de manera diversa las tareas de razonamiento algebraico en la escuela elemental.

Para el primer caso, entre la segunda sesión y la quinta se evidenció cambio en los análisis epistémicos realizados, además que se manifestó sensibilidad frente a la complejidad de algunas tareas matemáticas. Sin embargo, es posible que la actitud mostrada por los estudiantes no sea estable en el tiempo y que se requiera de trabajo posterior para lograr su consolidación.

De acuerdo con la investigación, la falta de conocimiento del contenido algebraico no es un obstáculo en sí mismo para la introducción del razonamiento algebraico en la escuela elemental desde la perspectiva de los estudiantes en formación. Sin embargo parece deseable un conocimiento relativamente estructurado del álgebra para reconocer y promover el razonamiento algebraico manifestado por los escolares durante su actividad matemática.

Gattegno (1967) identifica "*la actividad matemática* con aquella actividad del espíritu, que, en las situaciones que vive, permite tomar conciencia[7] particularmente de las relaciones entre sí", (p. 8). Se considera que el maestro requiere "tomar conciencia" que le faculte no sólo para apreciar la complejidad del conocimiento matemático presente y emergente durante la actividad matemática sino para reconocer el entramado de relaciones entre objetos y significados, además de los procesos de significación que se ponen en juego.

A pesar que el trabajo aquí reportado para el primer caso sólo se condujo con dos grupos de maestros, los resultados son alentadores y anima a sugerir que se ofrezcan oportunidades a los estudiantes en formación para discutir la naturaleza algebraica de tareas matemáticas en el contexto de las matemáticas de la escuela elemental. Para el segundo caso, el grupo mantiene sus creencias en relación con el razonamiento algebraico elemental desde las primeras sesiones hasta la presentación de su unidad didáctica.

Si bien el interés no está focalizado en los cambios que la experiencia produjo en las concepciones de los estudiantes acerca del razonamiento algebraico elemental, también es cierto que el segundo caso llama la atención, ya que las actitudes de David y de su grupo fueron contrarias a las conjeturas planteadas por el investigador referente a este grupo. Se consideró que, desde la concepción del álgebra como ecuaciones, incógnitas y procedimientos se avanzaría hacia una concepción del álgebra escolar, que considerara su inclusión en el currículo matemático de la escuela primaria, pero desde una visión ampliada de la misma.

[7] El subrayado es nuestro.

Se consideran varias razones que podrían estar en la base de la casi inmutabilidad de las creencias manifestadas por el segundo grupo de estudiantes sobre el razonamiento algebraico elemental.

La primera es el eventual efecto que sobre las creencias del estudiante puede tener la escasa atención que la propia institución escolar, representada en la propuesta curricular que el MEC[8] (2006) y la Junta de Andalucía (2007), concede al razonamiento algebraico elemental en la educación primaria.

La relación de dependencia que los maestros establecen con los materiales curriculares y con los libros de texto ha sido indagada por Nathan y Koedinger (2000), quienes manifiestan: "*Es razonable conjeturar que el uso de los textos en la estructuración de las lecciones diarias, en la asignación de tareas, y en la secuencia anual del curriculum conduce a los maestros a internalizar las imágenes que implícitamente expresan*", (p. 228).

Las referencias al razonamiento algebraico son nulas en el documento del MEC (2006) y exiguas, en el documento de la Junta de Andalucía, que tan sólo afirma: "*El desarrollo del sentido numérico y de la simbolización algebraica, el estudio de las formas y sus propiedades,…*", (p. 2), afirmación que luego no se amplia.

La segunda razón se relaciona con la confianza que el maestro líder del segundo grupo tiene en sus competencias matemáticas, y que el grupo podría asociar con competencias didácticas. Tal vez los maestros consideren que obtener una solución matemática correcta a una tarea equivale a tener una solución didácticamente adecuada a un niño o a un grupo de niños; de tal suerte que el grupo de maestros no se esfuerza en buscar otros métodos de solución que hagan un uso extenso de propiedades, conceptos, estructuras y argumentos de carácter numérico en lugar de preferenciar los métodos procedimentales propios del álgebra de la secundaria.

La tercera razón es la escasa experiencia docente de este grupo de estudiantes y por tanto, el exiguo conocimiento que podrían tener acerca de los niños y las dificultades que manifiestan cuando aprenden matemáticas. Shulman (1987, p. 6) identificó una taxonomía de siete tipos de conocimiento del maestro, entre los cuales se destacan "el conocimiento de los aprendices y sus características" que es el conocimiento que el maestro debe tener de los niños, de sus dificultades y de sus inquietudes de tal suerte que le permita crear condiciones para que los niños experimenten las matemáticas adecuadas al nivel escolar en el cual se encuentran.

Los grupos de maestros en formación, cuyo trabajo fue motivo de este capítulo, muestran semejanzas y diferencias en sus actitudes. Ambos grupos exhiben cierta limitación en su concepción acerca de la inclusión del razonamiento algebraico elemental, influenciada, tal vez,

[8] Ministerio de Educación y Ciencia de España.

por sus experiencias escolares con el álgebra de la escuela secundaria y por los materiales curriculares por ellos consultados (Decretos oficiales y textos escolares).

En el caso del primer grupo, se podría afirmar que su actitud abierta y su interés por aprender favoreció el reconocimiento de algunos objetos y significados que si bien no son exclusivos del razonamiento algebraico elemental sí se reconocen como importantes en el proceso de resolución de tareas matemáticas. Se conjetura que el reconocimiento efectuado también estuvo motivado por el instrumento provisto (la guía GROS) y no tanto por la aproximación del razonamiento algebraico elemental que le fue dado y discutido con el grupo.

Se puede colegir que si bien el grupo no asumió completamente la aproximación al razonamiento algebraico, dada al inicio de la experiencia, a la que se hizo referencia repetidas veces durante las sesiones de trabajo, sí amplió su concepción sobre el razonamiento algebraico elemental que al parecer estaba limitada a incógnitas y a la solución de ecuaciones.

En el segundo grupo se evidenció la perseverancia de sus concepciones relacionadas con el razonamiento algebraico elemental, manifestadas desde el inicio de la experiencia y expresadas por la escogencia y solución de tareas que se pueden reconocer como propias del álgebra de la secundaria. Adicionalmente, David (el líder del grupo) considera que el álgebra debe incluirse al final de un proceso de formación en donde el conocimiento aritmético precede al conocimiento algebraico. Sin embargo la identificación de objetos, significados y conflictos hecha por este grupo es mucho más rica que la realizada por el primero.

Los dos casos exhibidos sugieren que estos maestros en formación no están del todo preparados para asumir la inclusión curricular del álgebra en la escuela elemental. Parece que tienen conocimientos algebraicos que los facultan para resolver tareas que incluyen incógnitas y resolución de ecuaciones, sin embargo parece que su conocimiento matemático para la enseñanza no está a la par con sus conocimientos matemáticos. Adicionalmente la apropiación de la guía de análisis de objetos y significados es débil y se requiere de un trabajo más intenso para que faculte a los maestros en formación para la planeación de tareas matemáticas, para la identificación de conflictos de significado, y para el reconocimiento y promoción del razonamiento algebraico elemental manifestado por los niños.

Se considera que haría falta que en un curso de formación de maestros se hiciera énfasis en la inclusión del razonamiento algebraico elemental y en donde la guía de análisis de objetos y significados-GROS-tuviera más peso en actividades de discusión y planeación de tareas matemáticas enmarcadas en el RAE. Un maestro debería ser consciente del conocimiento matemático que el niño debe poner en juego para resolver una tarea, además de reconocer los diversos objetos y significados que el niño propone en acto cuando discute las tareas matemáticas. La organización y orientación del proceso de aprendizaje requiere no sólo del conocimiento del contenido matemático, sino del conocimiento especializado del contenido así como del conocimiento del niño, además de una actitud abierta hacia el aprendizaje y hacia la construcción social del conocimiento.

Se considera que las tareas algebraicas en el contexto curricular de la escuela elemental deberían ser diseñadas teniendo en cuenta el conocimiento aritmético, predominante en la primaria, pero resaltando el carácter algebraico que puedan tener. Adicionalmente, parece conveniente que los maestros acepten que se puede hablar de un tema, plantear discusiones matemáticas e intentar resolver tareas de temáticas cuyos conceptos y procedimientos no hayan sido explícitamente presentados a los niños.

Adicionalmente sería interesante explorar si la modificación de las condiciones sobre el trabajo de diseño de la guía, por ejemplo, sobre la entrega periódica de avances de la unidad didáctica tiene algún efecto en la ampliación en la calidad de las reflexiones de los maestros en formación.

CAPÍTULO 8

CONCLUSIONES E IMPLICACIONES

8.1 Introducción

En este capítulo se responderán las preguntas de investigación, se indicará en qué medida se han logrado los objetivos de la investigación, se reflexionará sobre el trabajo que ha ocupado al autor durante los últimos cuatro años. Igualmente se señalarán algunas limitaciones del trabajo y nuevas líneas de indagación abiertas.

En la sección 8.2 -Preguntas de Investigación- se responderá a las preguntas de investigación y se referirá a la validez y confiabilidad de los hallazgos.

En la sección 8.3 -Logro de los Objetivos de Investigación- se reflexionará sobre la confluencia particular de las competencias de análisis didáctico, el razonamiento algebraico elemental, análisis didáctico.

En la sección 8.4 -Implicaciones para el Análisis Didáctico- se discutirán las limitaciones de la investigación y algunas dificultades que se encontraron durante el proceso de investigación.

8.2 Preguntas de Investigación

En este trabajo de investigación se abordó el estudio de las competencias de análisis didáctico de un grupo de maestros en formación, cuando realizan el diseño de una unidad didáctica sobre el tema de razonamiento algebraico en la escuela elemental, específicamente, para el sexto grado de escuela elemental (11-13 años).

Abordar las competencias de análisis didáctico plantea una tarea difícil, que se torna compleja cuando se trabaja con maestros en formación, y se agrega aún más complejidad cuando se incluye el razonamiento algebraico elemental. Así una respuesta al problema debe considerarse en términos de respuestas dadas a las diversas componentes en las que el problema se divide.

Se abordarán ahora respuestas a las preguntas de investigación que se originan a partir del problema y de su implantación. Las preguntas de investigación fueron enumeradas en la sección 1.6 -Preguntas de Investigación- del primer capítulo.

8.2.1 Respuestas a las Preguntas para el Análisis Didáctico

Se recuerda que las preguntas para el análisis didáctico se dividieron en dos grupos, las correspondientes a nuestro enfoque de análisis didáctico y las correspondientes a la Guía para el diseño de la unidad didáctica.

8.2.1.1 Respuestas a las Preguntas Correspondientes a la Aproximación del Análisis Didáctico

Las preguntas para el Análisis Didáctico se dividen en dos grupos: Aquellas para nuestra aproximación al Análisis Didáctico y las relacionadas con su uso por parte de los estudiantes. Se responderán inicialmente las preguntas que se formularon para nuestra aproximación al Análisis Didáctico en el orden en que fueron enunciadas.

8.2.1.1.1 Primera Pregunta: ¿Qué Interpretación dan los Estudiantes a cada uno de los Niveles del Análisis Didáctico?

Se recuerda que el Análisis Didáctico considera cuatro niveles: Identificación de prácticas, identificación de objetos y significados, descripción de interacciones y valoración de la idoneidad. Los maestros cumplimentaron el primer nivel *Identificación de prácticas* sin mostrar dificultad aparente. La diversidad de ejercicios escogidos da evidencia de la solvencia en la identificación de prácticas matemáticas.

En relación con el segundo nivel *Identificación de objetos y significados matemáticos* algunos grupos (cinco) no consignaron este nivel del análisis didáctico en sus unidades didácticas finales, si bien se dispone de evidencia sobre su uso durante algunas sesiones de asesoría. Sus unidades didácticas dan evidencia de identificación algunos conceptos y procedimientos matemáticos que podrían constituirse en conflictivos para los niños, pero no justificaron sus identificaciones.

Del conjunto de siete grupos, el rotulado como G1 efectuó una identificación que hizo un uso extensivo del la GROS. Este análisis fue motivo de discusión en la sección 6.7.1 -Conflictos Identificados por G1- del sexto capítulo y en las secciones 7.3.2.2 -Análisis Epistémicos de una Tarea- y 7.3.2.3 -Identificación de Posibles Conflictos de Significado- del séptimo capítulo.

En relación con el tercer nivel *Descripción de interacciones en torno a conflictos,* los grupos interpretan la “identificación de conflictos de significados” en términos de “dificultades”. En ese sentido identifican dificultades en torno a conceptos y a procedimientos. De manera genérica consideran que los niños “no manejan” o “no saben” el concepto. La interpretación del cuarto nivel *valoración de la idoneidad* se discute a continuación.

8.2.1.1.2 Segunda Pregunta: ¿Qué Interpretación dan los Estudiantes al Concepto de Idoneidad?

En relación con la Valoración de la Idoneidad, se puede afirmar que tres grupos efectuaron la valoración de la idoneidad de su unidad didáctica en los términos propuestos por la guía e ilustrado por el formador durante las clases correspondientes a la discusión de tal concepto.

El anexo J -Interpretación al Concepto de Idoneidad Dada por tres Grupos- muestra las interpretaciones que algunos grupos dieron al concepto de Idoneidad. Los estudiantes no usan este concepto conforme a la propuesta del formador. La valoración que le dan al mismo, en acto, es baja.

8.2.1.1.3 Tercera y Cuarta Pregunta: ¿Cuáles Niveles son Mayoritariamente Usados por los Estudiantes?, y ¿Cuáles Niveles son Ignorados por los Estudiantes?

Todos los niveles son usados por el conjunto de grupos de maestros en formación, sin embargo, diferencialmente usan el primero: Identificación de prácticas, posteriormente el segundo: Identificación de objetos y procesos; en tercer lugar dan cuenta de la valoración de la idoneidad y por último, la descripción de interacciones en términos de conflictos.

Vale decir que sólo dos grupos hacen un uso amplio e integrado de los cuatro niveles. El resto de los grupos (cinco) sólo usan uno o dos, e ignoran el resto. En tanto que los estudiantes no aceptaron las invitaciones para sostener una reunión posterior a la presentación de sus unidades didácticas, no se pudo indagar sobre las razones que esgrimieron para desestimar algunos niveles del análisis.

8.2.1.1.4 Quinta Pregunta: ¿Son los Niveles de Análisis Didáctico Apropiados para Diseñar una Unidad Didáctica?

Se considera que los cuatro niveles propuestos son apropiados para diseñar la unidad didáctica sobre el tema del razonamiento algebraico elemental. Sin embargo cuando se valoran los niveles en términos del uso dado por los maestros, la respuesta puede ser un poco diferente. El uso conferido a los niveles por los maestros es diverso. Algunos grupos usaron todos los niveles y se aprecia esfuerzo para ponerlos en acto, sin embargo otros grupos sólo usaron dos niveles del análisis. Al parecer estos grupos consideran que la propuesta de análisis didáctico es muy compleja y sólo usan aquellos niveles que les representa menos esfuerzo o con los que se sienten más familiarizados. Es pertinente mencionar que los niveles dos y tres del análisis didáctico están vinculados con el análisis epistémico, que se realiza con ayuda de la GROS. Es el análisis epistémico el que favorece no sólo la identificación de objetos y significados sino también la descripción de conflictos de significado.

El análisis epistémico favorece la identificación de objetos y significados, que a su vez conforman configuraciones obtenidas a partir de las interacciones entre ellos. La identificación de objetos y significados, y por tanto de configuraciones, es consecuencia del análisis epistémico; si no se realiza el análisis epistémico la identificación no tiene lugar. De tal suerte que la no cumplimentación del análisis epistémico por algunos grupos se refleja en la escasa presencia que los niveles dos y tres del análisis didáctico tiene en sus unidades didácticas.

8.2.1.2 Respuestas a las Preguntas Correspondientes a la Guía de Elaboración de la Unidad Didáctica

A continuación se enumeran las preguntas para la Guía y se efectúan algunos comentarios.

8.2.1.2.1 Primera Pregunta: ¿En qué Medida la Guía para el Diseño de la Unidad Didáctica Orienta al Estudiante para la Elaboración de la Unidad?

La Guía ciertamente orienta a los maestros en formación para la elaboración de la unidad didáctica, en tanto que especifica cada uno de los incisos que deben ser cumplimentados. Sin embargo, se considera que se debería enfatizar la condición de realizar el análisis epistémico de las tareas propuestas mediante el uso de la GROS. La guía solicita, en el inciso tres, (Anexo D - Guía para la Elaboración de la Unidad Didáctica-) que se identifiquen "*Contenidos matemáticos a desarrollar (tipos de problemas a estudiar, modos de representación, conceptos, propiedades, procedimientos y sus respectivas justificaciones)*".

La petición de dar "sus respectivas justificaciones" no hace mención explícita al análisis epistémico realizado con la ayuda de la GROS; es así como algunos grupos de maestros, con base en su conocimiento previo, identifican conceptos y procedimientos genéricos, sin hacer uso de la GROS, y por tanto sin identificar objetos matemáticos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos, ni sus significados ni las relaciones entre ellos.

Los cuatro niveles del Análisis Didáctico, no están explícitamente encajados en las instrucciones dadas en la Guía. Por ejemplo, no se explicita que el maestro deba establecer relaciones entre objetos y significados, ni que los ejercicios de refuerzo y ampliación deban justificarse desde el análisis epistémico realizado con la GROS.

Tal vez debido a esta falta de énfasis, algunos grupos de maestros ignoraron las sugerencias dadas por el investigador de usar asiduamente la GROS para identificar objetos matemáticos y sus significados. Es menester indicar que la Guía fue escrita para todos los estudiantes del curso, y no únicamente para los grupos que fueron los participantes en este estudio.

8.2.1.2.2 Segunda Pregunta: ¿Qué Interpretación Confieren a cada uno de los Incisos en los que se ha Dividido la Guía?

Para responder a esta pregunta, se enumera cada uno de los seis incisos en los que se dividió la guía y acto seguido se responderán con base en la información recavada de las unidades didácticas. El primer inciso corresponde a la “motivación”. No comentaremos sobre este inciso. El segundo inciso corresponde a “la organización y el contenido”:

- **Contexto Curricular**: Los estudiantes citan los dos documentos sugeridos por el formador, el decreto del MEC 2006 y el decreto de enseñanzas mínimas, emitido por la Junta de Andalucía BOE 2007. Los estudiantes coinciden en afirmar que los documentos no hacen mención explícita al álgebra en la escuela primaria.
- **Objetivos**: Los objetivos que los estudiantes proponen tienen dos fuentes documentales, la primera es el listado de objetivos propuestos en el documento del MEC 2006. Algunos transcriben literalmente todos los objetivos o parte de ellos. Evidencia de esto se dio en la sección 6.5.2 -Objetivos- del sexto capítulo. La segunda fuente documental son algunos objetivos de los libros de texto, esto se comprobó sólo con los grupos G2 y G7 y con sólo dos libros de texto. Es posible que los otros grupos hayan hecho lo mismo, sin embargo no se indagó este aspecto.
- **Contenidos**: El conjunto de tareas que los estudiantes propusieron fue variado e ilustran las diversas concepciones que tienen en relación con la inclusión del álgebra en el currículo matemático de la escuela primaria. Este conjunto de tareas fue comentado en el sexto capítulo, sección 6.5.3 -Contenidos-.

Se logró identificar diez categorías de tareas, algunas de las cuales fueron vinculadas con reportes de investigación, con segmentos de las sesiones de trabajo y con segmentos de las entrevistas que se sostuvieron con los maestros.

- **Secuencia de actividades y metodología**: La secuencia que los maestros proponen, en términos generales, intenta ir desde ejercicios “sencillos” (operaciones elementales sobre naturales) hasta ejercicios más complicados, que requieren modelación u operaciones sobre números decimales.

En cuanto a la metodología que usarán con sus alumnos en situación de clase, los maestros en formación mencionan dos: Trabajo en grupo y presentación de las temáticas por parte del maestro. Parece que hay dos posturas metodológicas que conviven en el imaginario de los futuros maestros: La primera refiere al papel protagónico del maestro quien explica el tema y los niños desarrollan ejercicios para practicar y, la segunda, concede importancia al trabajo en grupo. Vale mencionar sin embargo, que durante la presentación de las unidades didácticas, la referencia a la primera postura es muy frecuente.

Sin embargo ningún grupo cumplimenta la instrucción que pide “comparar los objetivos con los contenidos previstos”. A partir de la nula respuesta que esta instrucción tuvo, sería conveniente revisar su pertinencia, su redacción o su ubicación en el conjunto de instrucciones de la guía.

8.2.1.2.3 Tercera Pregunta: ¿Cuáles son los Incisos Propuestos en la Guía que los Estudiantes Cumplimentan Menos?

En orden creciente, el inciso que no fue cumplimentado por los estudiantes fue el correspondiente a “Contenidos trabajados en las actividades y comparación con los previstos”, el siguiente fue el correspondiente a instrumentos de evaluación, seguido por dificultades previstas.

8.2.1.3 Respuestas a las Preguntas para la Unidad Didáctica

A continuación se enumeran cada una de las preguntas planteadas y se indicará la respuesta que se obtuvo a partir de los datos recabados durante la investigación.

8.2.1.3.1 Primera Pregunta: ¿Cuáles son Algunas Dificultades que los Estudiantes Enfrentan para Escribir la Unidad Didáctica?

La principal dificultad manifestada por los maestros se localiza en el uso de la GROS para efectuar el análisis epistémico de las tareas y en la subsecuente identificación de conflictos que podrían surgir cuando las tareas sean discutidas con niños de escuela elemental.

La puesta en práctica de la GROS es un reto para los futuros maestros. La identificación y discriminación de los tipos de objetos y significados resulta conflictiva, ya que supone un cierto nivel de actividad meta-cognitiva a la que no están habituados.

Una dificultad derivada de esta es la resolución del ejercicio matemático en función de su presentación a los alumnos. Parece que los estudiantes se limitan a dar solución al ejercicio pero sin considerar estrategias alternativas, consideran que "sus" soluciones son las correctas y las que deberían ser trabajadas por los alumnos. La estrategia que el maestro utiliza es la elegida para ser explicada a los alumnos. Hines y McMahon (2005, pp. 99) reportan que los maestros en formación se muestran poco inclinados a considerar los métodos menos avanzados de los niños y consideran que las estrategias de los niños deben ser reemplazadas por las estrategias "correctas" que los maestros proponen y con las cuales están mas familiarizados.

Del conjunto de siete grupos; cinco no utilizaron la GROS para identificar conocimientos matemáticos y dificultades. De acuerdo con nuestros datos, los grupos que no la utilizaron lo hicieron basados en la dificultad que se deriva de su uso, y tal vez, ante la ausencia de una instrucción explícita que demande la importancia de su uso. Vale decir los maestros localizan las dificultades de los ejercicios en la dualidad conceptos-procesos. De esto se informó en la sección 6.7 -Identificación de Conflictos de Significado- del sexto capítulo.

8.2.1.3.2 Segunda Pregunta: ¿Qué Tipo de Objetivos Proponen y Cómo los Cumplimentan con las Actividades Matemáticas Propuestas?

Se encontró que los objetivos propuestos por los maestros corresponden mayoritariamente a los planteados por el decreto del R.D. 1513 de 2006. Los objetivos son agrupados de acuerdo con la propuesta consignada en los decretos oficiales. De esto se informó en la sección 6.5.2 -Objetivos- del sexto capítulo. No se investigó la procedencia de los objetivos enunciados que no correspondían a los enunciados en los decretos oficiales. Por tanto no se puede informar si algunos de tales objetivos fueron redactados por los estudiantes.

8.2.1.3.3 Tercera Pregunta: ¿Qué Tipo de Conocimientos Matemáticos Reconocen Espontáneamente?

El reconocimiento espontáneo al que se hace referencia es el "conocimiento" que los maestros identifican cuando usan la GROS, y que cumplimentaron en el trascurso de las sesiones de trabajo.

El tipo de conocimientos que identifican espontáneamente se ubica en las entradas: Elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos mayoritariamente; en menor grado identifican “propiedades” y en último lugar, “los argumentos”.

El uso de la GROS ha permitido que los estudiantes extiendan el reconocimiento de conocimientos matemáticos, usualmente limitada a la dualidad conceptos-procedimientos. Sin embargo los estudiantes conceden poca importancia a la entidad “argumentos”. Al parecer no comprenden bien a que se refiere y en consecuencia consideran que “los argumentos” o las “justificaciones” se asemejan a las explicaciones que se dan en entornos de clase, con niños reales. Tal vez esta creencia es la que justifica que no se cumplimente la entrada de argumentos.

8.2.1.3.4 Cuarta Pregunta: ¿Qué Tipo de Recursos y Fuentes Documentales Utilizan para Apoyar la Elaboración de la Unidad Didáctica?

Las fuentes documentales que los diversos grupos usaron se indican en la Tabla 8.1.

Tabla 8.1. Fuentes Documentales Usadas por los Diversos Grupos.

FUENTES DOCUMENTALES	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7
Libros texto	x	x	x			x	x
Libros propuestos por los estudiantes	x		x				x
Documentos curriculares oficiales: Decretos	x	x	x	x		x	x
Otros							
Internet						x	x

Se pidió a los maestros que escogieran libros texto que fueran usados en algún centro educativo. Si bien es cierto que los estudiantes dan cuenta de las fuentes documentales usadas, no suelen dar las referencias de las mismas; lo cual no parece extraño, en tanto que los grupos mostraron cierta independencia de algunas sugerencias planteadas tanto por su formador como por el asesor; esta actitud ha sido reportada por algunos autores; Remillard (2005, p. 212) afirma: “*Algunos estudios dan ejemplos de maestros que rechazan o alteran las recomendaciones consignadas en sus guías*…”.

8.2.1.4 Respuestas a las Preguntas para el Razonamiento Algebraico Elemental

A continuación se enumeran cada una de las preguntas planteadas y se comentan a partir de los datos recabados durante la investigación.

8.2.1.4.1 Primera Pregunta: ¿Cuáles son las Creencias Sostenidas por los Maestros en Formación en Relación con la Inclusión del Razonamiento Algebraico en la Escuela Primaria?

Se debe indicar que la pregunta se dirige hacia las creencias que los estudiantes manifiestan sobre la inclusión del razonamiento algebraico elemental, que es diferente de las creencias sobre el tipo de actividades que promueven el razonamiento algebraico elemental. Esta pregunta fue respondida en la sección 5.7 -Algunas Creencias sobre la Inclusión del RAE- del quinto capítulo.

8.2.1.4.2 Segunda Pregunta: ¿Qué Tipo de Tareas Matemáticas Proponen los Maestros en Formación para Promover el Razonamiento Algebraico Elemental?

Esta pregunta fue respondida en la sección 6.5.4.1 -Los Hallazgos- del sexto capítulo.

8.2.1.4.3 Tercera Pregunta: ¿Qué Tipo de Elementos Algebraicos Identifican en los Ejercicios Propuestos?

Esta pregunta fue respondida en el sexto capítulo, sección 6.5.4.1 -Los Hallazgos-. Los elementos algebraicos identificados se usaron para dar nombre y agrupar los ejercicios que propusieron. Los enumeramos a continuación: Evaluar una letra, letras como objetos, letra como número generalizado, valor faltante, incógnita, problemas de palabras, encontrar regla o patrón, cálculo de expresiones, representación de relaciones, y finalmente, valor o característica desconocida.

8.2.1.4.4 Cuarta Pregunta: ¿Cuáles Conocimientos Matemáticos Identifican cuando Valoran Tareas Resueltas por Niños de Escuela Primaria?

Esta pregunta se respondió con la sección 5.6 -Análisis Realizados por los Maestros en Formación- del quinto capítulo. En dicha sección los maestros hicieron los análisis de soluciones a ejercicios dadas por niños de escuela elemental.

Es menester reconocer que durante la programación de la investigación, se supuso que los maestros en formación acogerían el uso de la GROS, y que durante las sesiones de trabajo, y por fuera de ellas, usarían el análisis epistémico. Era por intermedio de este instrumento que planeamos identificar los conocimientos matemáticos (elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades, argumentos). Sin embargo no se tuvo en consideración que los estudiantes podrían no usar la GROS, y tampoco se consideró el tiempo que los estudiantes podían dedicar a esta actividad extra. Sobre las limitaciones se comentará en la sección 8.8 -Limitaciones del Estudio- de este capítulo.

8.2.1.5 Respuestas a las Preguntas para el Instrumento de Análisis de Conocimientos Matemáticos (GROS)

A continuación se enumeran cada una de las preguntas planteadas y se comentan a partir de los datos recabados durante la investigación.

8.2.1.5.1 Primera Pregunta: ¿Cuál es el Nivel de Uso que los Estudiantes Dan, Espontáneamente, a la GROS?

Los maestros en formación tuvieron oportunidad de experimentar el uso de la GROS en tres contextos diferentes: En situación de trabajo en grupo; durante las sesiones de asesoría para la elaboración de la unidad didáctica, y finalmente, en situación de examen.

El cuarto capítulo se dedicó a informar sobre la experiencia en situación de trabajo en grupo y en situación de examen. Se podría afirmar que los estudiantes muestran cierto progreso en la identificación de objetos y significados, en especial en las entradas correspondientes a entidades lingüísticas, propiedades y argumentos.

En relación con el segundo contexto: Asesoría, se puede afirmar que los maestros en formación identifican elementos lingüísticos, conceptos y procedimientos sin mucha dificultad, pero encuentran difícil cumplimentar las entradas correspondientes a propiedades y a argumentos. Se puede afirmar que el nivel de uso que los estudiantes dan, espontáneamente a la GROS, es bajo. Sin embargo, de acuerdo con los datos disponibles, y con la comparación entre los análisis que los maestros hicieron durante la experiencia en situación de trabajo en grupo, se puede decir que el nivel de uso de la misma, incremento durante el transcurso del cuatrimestre.

8.2.1.5.2 Segunda Pregunta: ¿Cuáles son las Dificultades que los Estudiantes Manifiestan cuando Usan la GROS?

La principal dificultad es la identificación de objetos y sus significados matemáticos. Esta dificultad se pueden considerar dividida en dos niveles: El primero se refiere a la identificación de objetos y significados. El proceso de identificación puede ser secuenciado; inicialmente los estudiantes suelen identificar conceptos y procedimientos sin aparente dificultad, posteriormente identifican elementos lingüísticos, finalmente propiedades y en último lugar, argumentos.

El segundo se refiere a identificación de conflictos de significado vinculados con los objetos y significados propuestos. Se podría afirmar que los maestros en formación carecen de la experiencia que les permita proponer conflictos de significado plausibles, sin embargo la oportunidad para que identifiquen conflictos basados en un análisis didáctico de las tareas es conveniente.

8.2.1.5.3 Tercera y Cuarta Pregunta: ¿Cuáles Aspectos de la GROS son Mayoritariamente Usados por los Estudiantes?, ¿Cuáles Aspectos de la GROS son poco Trabajados por los Estudiantes?

Como se indicó anteriormente, los aspectos más trabajados por los estudiantes son en orden de uso: Conceptos, procedimientos y elementos lingüísticos; posteriormente propiedades y por último argumentos.

8.2.1.5.4 Quinta y Sexta Pregunta: ¿Usan los Estudiantes la GROS para Identificar Conflictos de Significado? ¿Usan los Estudiantes la GROS para Proponer Ejercicios de Refuerzo y Ampliación?

Al inicio de la experiencia los estudiantes no usaban la GROS para identificar conflictos, pero el uso de la GROS para identificarlos se hizo más frecuente durante el transcurso de la experiencia. Algunos grupos de maestros utilizan la GROS para proponer ejercicios de refuerzo y ampliación, que proponen en términos del cambio de énfasis en un determinado concepto o proceso, que de acuerdo con los maestros podría constituirse en un conflicto para los niños. Sin embargo, no todos los grupos usaron la GROS para identificar los conflictos de significado. De siete grupos, dos usaron la GROS para identificar conflictos, mientras que los restantes cinco la usaron durante algunas sesiones de trabajo, pero no la incluyeron en la unidad didáctica final.

8.3 Logro de los Objetivos de Investigación

A continuación se recuerdan los objetivos de investigación y se indican sobre el logro de los mismos.

8.3.1 Objetivo General

Se recuerda que el objetivo general es “El estudio tanto de las competencias de análisis didáctico como de las concepciones sobre el razonamiento algebraico elemental manifestadas por maestros en formación en la especialidad de maestro de primaria, en tanto que diseñan una unidad didáctica".

Este objetivo se logró en tanto que se investigó sobre las competencias de análisis didáctico que los estudiantes pusieron en acto durante la realización de una unidad didáctica. Las competencias de los maestros fueron estudiadas en el contexto de realización de una unidad didáctica, con la ayuda de una guía de identificación de objetos y significados, y el marco de la aproximación al análisis didáctico ofrecido por el marco teórico EOS.

Las competencias de análisis didáctico se estudiaron en el contexto de diseño de una unidad didáctica. Se recuerda que la competencia de análisis didáctico se define en términos del conocimiento y de la comprensión que supone que el maestro sea capaz de resolver una tarea de enseñanza. Las competencias de análisis didáctico exhibidas por los maestros fueron motivo del sexto capítulo. En la sección 6.8 -Algunas Implicaciones para la Formación de Maestros- se efectúan algunos comentarios.

Igualmente se identificaron las concepciones tanto sobre la inclusión del razonamiento algebraico elemental como con los tipos de ejercicios que promueven el razonamiento algebraico elemental. Esto fue consignado en la sección 5.6 -Análisis Realizados por los Maestros en Formación- del quinto capítulo.

8.3.2 Objetivos Específicos

Los objetivos específicos se han discriminado en tres grupos: Para el análisis didáctico, para el razonamiento algebraico elemental y para el marco teórico de referencia (Enfoque onto-semiótico). Se abordarán en ese orden.

8.3.2.1 Para el Análisis Didáctico

A continuación se enumeran cada uno de los objetivos propuestos y se comentan a partir de los datos recabados durante la investigación.

8.3.2.1.1. O-AD1. Valorar la Pertinencia de los Cuatro Niveles para el Análisis Didáctico

Los niveles de análisis didáctico fueron discutidos en la sección 1.1 -Introducción- del primer capítulo, y se enumeran a continuación:

Nivel 1. Identificación de prácticas matemáticas.
Nivel 2. Identificación de objetos y significados matemáticos.

Nivel 3. Descripción de interacciones en torno a conflictos.
Nivel 4. Valoración de la posible idoneidad didáctica del proceso de instrucción.

En términos generales, y apoyados en la evidencia disponible, se puede afirmar que los cuatro niveles son apropiados para encauzar un proceso de análisis didáctico. Los tres primeros niveles están fuertemente vinculados, en este trabajo, al uso de la Guía de reconocimiento de objetos matemáticos y significados- GROS-.

El primer nivel es común a cualquier actividad de diseño instruccional y de planeación de actividades para los niños y no amerita comentario alguno. Es interesante notar que los estudiantes, mediante el uso de la GROS identificaron los "conocimientos matemáticos" en términos de las entidades primarias: Elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades; sin embargo se ha de decir que mayoritariamente en términos de conceptos y procedimientos. Parece ser que la dualidad concepto-procedimiento tiene un peso importante en las consideraciones de los estudiantes.

Sin embargo el nivel tres "descripción de interacciones en torno a conflictos" está débilmente representado en el conjunto de unidades didácticas elaboradas por los maestros en formación. Del conjunto de siete unidades didácticas estudiadas, dos hicieron identificaciones de conflictos de significado en algunos de los ejercicios. Resalta un grupo de estudiantes que, basados en el análisis hecho con la ayuda de la GROS, propuso tanto conflictos de significado como ejercicios de refuerzo y ampliación. Sin embargo el trabajo del grupo no es representativo del conjunto de grupos con los cuales se trabajó.

En relación con el cuarto nivel, la valoración de la idoneidad didáctica hay dos aspectos que merecen ser comentados. Uno es el uso de la Idoneidad Didáctica por parte de los estudiantes como criterio para evaluar la adecuación de su unidad didáctica al contexto y a los niños para los cuales fue planeada; otro es el valor que confieren a la idoneidad.

Se puede afirmar con base en los datos disponibles, que todos los grupos que respondieron a la consigna de valoración de la Idoneidad Didáctica, en tanto que consideran que sus unidades son idóneas, que es equivalente a decir que están bien elaboradas y cumplen con los requisitos planteados en la guía para la elaboración de la misma (Anexo D -Guía para la Elaboración de la Unidad Didáctica-).

Sin embargo, no usan el concepto de Idoneidad para valorar sus unidades, parece que lo mencionan en tanto que deben cumplir con este requisito. Una de las estudiantes afirmó que: "es claro que la unidad cumple todos los requisitos, pues de lo contrario no la presentaríamos" y otra agregó: "¿idoneidad?... pues como no tenemos estudiantes…"

Este uso responde al segundo aspecto mencionado anteriormente (el valor conferido a la herramienta), del que se puede decir que es poco.

Se debe indicar sin embargo, que dado que los estudiantes tienen poca experiencia docente, y por tanto carecen del conocimiento de los niños, es apenas natural que consideren que sus unidades didácticas se adecuan al grupo poblacional para el cual lo planearon. Los estudiantes consideran que su propuesta será bien acogida por los niños.

Se considera que se requiere que el uso de la GROS sea enfatizado tanto en las clases teóricas como en las prácticas por parte del formador para cada una de las unidades temáticas en las que está estructurado el curso de “Currículo de Matemáticas en Educación Primaria”. El reto que representa su uso para los maestros en formación así como las potencialidades que el mismo tiene, y que se mostraron en el sexto capítulo, sección 6.7 -Identificación de Conflictos de Significado-; amerita concederle más relevancia.

8.3.2.1.2. O-AD2. Identificar Fortalezas y Debilidades de la Aproximación al Análisis Didáctico

Este objetivo de investigación se logró, en tanto que se identificaron fortalezas y las debilidades de la propuesta de Análisis Didáctico. Algunas de las fortalezas identificadas son:

- Favorece ampliar la dualidad conceptos-procedimientos a un espectro más amplio de objetos matemáticos tales como: Elementos lingüísticos, propiedades, y argumentos.
- Favorece que los conocimientos identificados se expresen en términos de interacciones, en torno a conflictos de significado.
- Favorece establecer relaciones entre los diversos objetos matemáticos y sus significados, lo que a su vez permite identificar configuraciones.

Algunas de las debilidades identificadas son:

- El análisis didáctico, con sus cuatro niveles, resulta ser muy complejo para los maestros en formación.
- El cuarto nivel de análisis didáctico “Valoración de la posible idoneidad didáctica del proceso de instrucción” resulta ser poco usado y escasamente valorado por los maestros, quienes no identifican su pertinencia.
- La complejidad de la integración entre la herramienta de análisis epistémico y el nivel de identificación de interacciones alrededor de conflictos.
- La identificación de las interacciones entre los diversos objetos matemáticos identificados y los significados conferidos.

8.3.2.2 Objetivos para el Razonamiento Algebraico Elemental (O-RAE)

A continuación se presentan y discuten los objetivos para el Razonamiento Algebraico Elemental (RAE).

8.3.2.2.1 O-RAE1. Identificar Tipos de Tareas que los Maestros en Formación Propone para Promover el Razonamiento Algebraico Elemental

Este objetivo se cumplió satisfactoriamente, en tanto que se lograron identificar diez categorías que corresponden a criterios de carácter algebraico que se pueden identificar en las tareas propuestas por los maestros. Esta categorización y la subsecuente justificación se discutió en el sexto capítulo, sección 6.5.4.1 -Los Hallazgos-.

Adicionalmente se identificaron las temáticas de los ejercicios, de acuerdo con los bloques temáticos propuestos por el R. D. 1513 (2006) sobre las enseñanzas mínimas. Los datos muestran concentración de ejercicios en el bloque de Números y Operaciones, seguido lejanamente, por el bloque de geometría. Los maestros en formación no incluyeron ningún ejercicio para el bloque de Tratamiento de la información, azar y probabilidad.

Asimismo se encontró que los estudiantes proponen un gran número de ejercicios denominados “de valor faltante” (ejercicios donde se debe encontrar uno o varios números de tal suerte que una operación sea válida) que involucran: Las cuatro operaciones, los algoritmos de división y multiplicación y el cálculo de potencias. Este último tipo de ejercicios no aparece reportado en la literatura revisada sobre el RAE.

8.3.2.2.2 O-RAE2. Identificar Creencias de los Maestros en Formación acerca del Razonamiento Algebraico Elemental

Este objetivo se cumplió satisfactoriamente, en tanto que a partir de las sesiones de trabajo, las unidades didácticas y algunas entrevistas, se identificaron algunas creencias explícita o implícitamente manifestadas por los maestros en formación. De esto se informó en la sección 5.6 -Análisis Realizados por los Maestros en Formación- y se comenta en la sección 5.7 -Algunas Creencias sobre la Inclusión del RAE- del quinto capítulo.

Los hallazgos indican que existe una marcada tendencia a identificar el razonamiento algebraico elemental con: Encontrar valores desconocidos cualitativos o cuantitativos, mismos que asocian con el concepto de “incógnita”; simbolizar relaciones numéricas y resolver problemas verbales, reemplazar letras por números y encontrar “valores faltantes”, los procedimientos efectuados sobre letras, la precedencia de la aritmética sobre el álgebra, la cerradura de las operaciones en aritmética contra la no cerradura en álgebra.

La Tabla 6.10 en la sección 6.5.4.1 -Los Hallazgos-, del sexto capítulo, muestra tanto la concentración de los ejercicios según los bloques temáticos, como los tipos de operaciones en los que se enmarca la búsqueda de los números faltantes.

En relación con el signo igual los maestros exhiben la creencia que este significa resultado. Algunos estudios han reportado que para muchos niños el signo igual indica acción de resultado (MacGregor y Stacey 1997) o es un símbolo sintáctico, que muestra el lugar donde se debe escribir la respuesta de una operación aritmética (Filloy y Rojano, 1989). Estos resultados de estudios realizados con niños de escuela secundaria coinciden con las creencias de los maestros.

Estos hallazgos coincide con los resultados de Stump y Bishop (2002), quienes encontraron que las concepciones algebraicas sostenidas por los maestros en formación son bastante limitadas y describen al álgebra en términos de solución de ecuaciones, del hallazgo de valores desconocidos o como una herramienta para la resolución de problemas.

Este énfasis podría tener su origen tanto en las concepciones adquiridas por los estudiantes en sus estudios previos que son una fuente de inspiración cuando están basadas en experiencias de vida (Kagan, 1992; Stofflett y Stoddart, 1994), como en la falta de atención que el símbolo igual recibe en los materiales curriculares disponibles para los estudiantes (McNeil, Grandau, Knuth, Alibali, Stephens, Hattikudur ; 2006).

8.3.2.2.3 O-RAE3. Determinar si existe Evolución en las Creencias de los Estudiantes sobre el RAE como Consecuencia de las Actividades de Asesoría y Elaboración de la Unidad Didáctica

No se puede afirmar que se dio una evolución en las creencias de los maestros sobre la inclusión del razonamiento algebraico elemental en el currículo de la escuela primaria y sobre sus rasgos distintivos. Los datos disponibles permiten indicar las concepciones que los maestros manifestaron durante las sesiones de trabajo, durante las entrevistas y en la unidad didáctica final. Sin embargo, con base en el tipo de tareas que propusieron en sus unidades didácticas, en las soluciones de las mismas y en el uso de la GROS, se puede afirmar que los estudiantes ampliaron sus concepciones acerca del tipo de ejercicios que pueden ser considerados como “algebraicos”.

8.3.3 Marco Teórico de Referencia

En relación con el marco teórico de referencia, el enfoque onto-semiótico, se propusieron dos objetivos (O-MT).

8.3.3.1 O-MT1. Valorar la Pertinencia de Algunos Conceptos del EOS Usados tanto en la Definición del Análisis Didáctico como en la Guía de Reflexión de Objetos y Significados (GROS)

En este objetivo se ha propuesto evaluar la pertinencia de conceptos teóricos del EOS que fueron usados en el Análisis Didáctico y en la Guía de Reflexión de objetos y significados.
Para el Análisis Didáctico la pertinencia del uso se ha de valorar con base en su potencialidad teórica y con base en los resultados favorables obtenidos, y no tanto por el número de grupos que la hayan usado. La pertinencia teórica fue argumentada en el tercer capítulo.

Los grupos que la usaron, a pesar de los retos que significa su uso, lograron efectuar un análisis epistémico con ayuda de la Guía de Reflexión de Objetos y Significados (GROS) que se adecua a la complejidad de la identificación de conocimientos matemáticos y de conflictos de significado que se derivan del estudio de un ejercicio matemático.

Para la Guía de Reflexión de objetos y significados se pusieron en juego las entidades primarias: Elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos. Se dió evidencia en el sexto capítulo que estos elementos agrupados y articulados en la GROS favorecieron las siguientes acciones:

- Reconocimiento de objetos matemáticos.
- Reconocimiento y asignación de significados a objetos matemáticos.
- Reflexión sobre el papel que objetos y significados juegan en la solución de tareas matemáticas.
- Reconocimiento de objetos y significados que pueden constituirse en conflictos para los niños; es decir, el reconocimiento del reto que una configuración particular de objetos y significados puede presentar a los niños; y actuando en concordancia, los maestros modifican la configuración conflictiva para que pueda ser resueltas por los niños.

La tabla que se muestra en la Figura 8.1, con la que se identifica la GROS, luce estática y un poco rígida, sin embargo ella favorece descomponer la solución matemática en entidades primarias, lo que a su vez permite localizar los conflictos de significado entre un conjunto más amplio de objetos y significados matemáticos que usualmente no se reconocen como intervinientes en la solución de tareas matemáticas. La GROS es instrumental para lograr cumplimentar los niveles dos y tres de la propuesta de Análisis Didáctico.

Tipos de Objetos	**Significados** (relación de referencia o de uso)
REPRESENTACIONES (Términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas, …)	
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición)	
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
PROPIEDADES (Enunciados para las cuales se requiere una justificación o prueba)	
ARGUMENTOS (Justificaciones, demostraciones, o pruebas de las proposiciones usadas)	

Figura 8.1. Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados.

Se ofrece a los maestros en formación una herramienta que favorece trascender la dualidad conceptos-procedimientos, en tanto que al identificar un conjunto amplio de objetos y sus significados -de uso o referencia- los maestros pueden a su vez identificar posibles configuraciones epistémicas que sean conflictivas para los niños.

Aunque uno de los intereses de los estudiantes es elaborar la unidad didáctica, lo cual algunas veces parece dejar de lado la conveniencia de involucrarse en tareas de reflexión didáctica, y en la re-contextualización de las entidades primarias, los maestros en formación mostraron cierto grado de comprensión de la correspondencia entre el análisis didáctico, el uso de la GROS y la preparación previa de tareas matemáticas para ser discutidas con niños de escuela elemental.

Por ejemplo, fueron capaces de efectuar análisis epistémicos de las tareas, identificar configuraciones "conflictivas" que podrían constituirse en conflictos para los estudiantes, en proponer tareas que dieran cuenta de tales conflictos potenciales. Se puede evidenciar cierto progreso en la competencia de análisis a medida que avanzaron las sesiones durante el semestre. De esto se dio evidencia en la sección 6.5.4.2 -Conocimientos que el Maestro Presentará al Final de cada Sesión- del sexto capítulo; en donde se efectuó una comparación entre los conflictos de significado propuestos por los grupos que usaron la GROS y aquellos que no.

Dicha comparación sugiere que los estudiantes, al menos parcialmente, se apropiaron autónomamente de la herramienta de análisis epistémico, en el contexto del Análisis Didáctico, lo cual podría mejorarse con más práctica.

8.3.3.2 O-MT2. Valorar la Aproximación EOS al Razonamiento Algebraico Elemental, en tanto que es Usado por Maestros en Formación

La aproximación que se dió a los maestros en formación fue:

> *Denominamos Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) al sistema de prácticas operativas y discursivas puestas en juego en la resolución de tareas abordables en la educación primaria en las cuales intervienen objetos y procesos algebraicos (simbolización, relación, variables, incógnitas, ecuaciones, patrones, generalización, modelación, etc.).*

Una discusión sobre la aproximación se efectuó en la sección 3.2.1.6 -La Aproximación al RAE desde el EOS-. Si bien los maestros no hacen mención explícita de la aproximación en las discusiones o en sus unidades didácticas, se puede colegir que la misma no sólo fue usada por los maestros en formación tanto para escoger ejercicios como para reconocer en ellos elementos algebraicos que dieran lugar a configuraciones de carácter algebraico, sino que también extendieron la aproximación dada, al proponer ejercicios que no están explícitamente descritos en dicha aproximación al razonamiento algebraico elemental.

Las afirmaciones consignadas en el párrafo anterior se basan en dos fuentes de datos: El conjunto de tareas propuestas por los maestros en formación y los análisis epistémicos disponibles. Dos de estos análisis epistémicos se mostraron tanto en la sección 6.5.4.2 -Conocimientos que el Maestro Presentará al Final de cada Sesión- como en la sección 6.7 -Identificación de Conflictos de Significado- del sexto capítulo. En el Anexo G -Tareas de Esfuerzo y Ampliación Propuestas por los Maestros en Formación- se exhiben los ejercicios de refuerzo y adaptación que los maestros en formación proponen y justifican con base en la identificación de conflictos de significado que logran con el uso de la GROS.

En la sección 6.5.4.2 -Conocimientos que el Maestro Presentará al Final de cada Sesión- del sexto capítulo se mostraron dos instancias de trabajos de un grupo de estudiantes y el análisis epistémico que hacen de tareas matemáticas mediante el uso de la GROS, y la identificación de entidades primarias que usan para justificar la valoración del ejercicio como de razonamiento algebraico elemental.

Durante las sesiones de trabajo, los estudiantes reflexionaron sobre la inclusión de diversas tareas en su unidad didáctica. Durante las mismas se discutieron tanto las resoluciones de las mismas como la presencia de “objetos” algebraicos en sus enunciados y soluciones. Tal tipo de actividades pretende transmitir un mensaje a los maestros: No es el señalamiento de objetos o elementos algebraicos en el enunciado de un problema o en su solución, sino la puesta en acto de esos elementos en las prácticas discursivas y operativas, su manifestación en configuraciones epistémicas, lo que concede carácter algebraico a las tareas.

Sin embargo, no se logró que todo el conjunto de los siete grupos asumiera el uso de la GROS y del análisis didáctico, esto se debió parcialmente a dos circunstancias: La primera fue el poco interés mostrado por algunos grupos en involucrarse en las discusiones y en las reflexiones que se proponían durante las sesiones de trabajo. Parece que su principal interés estaba en cumplimentar el trabajo, en presentar un documento escrito y no tanto en asumir la experiencia como una componente formativa importante de su proceso educativo; la segunda, el poco tiempo que, en términos generales, disponen los maestros para dedicar a actividades extras, diferentes a sus clases, al estudio, a la preparación de exámenes y a la discusión de otros trabajos. Parece que las sesiones extras de trabajo exigen mucho tiempo a los maestros.

8.4 Implicaciones para el Análisis Didáctico

El análisis didáctico como se ha propuesto en esta memoria de tesis doctoral se puede concebir constituido por cuatro componentes articuladas, que se muestran en la Figura 8.2, enumeradas del uno hasta el cuatro. Con base en los datos recopilados y en la experiencia de trabajo con los siete grupos, se puede afirmar que la propuesta de Análisis Didáctico es un instrumento pertinente para desarrollar competencias de análisis didáctico en los maestros en formación. El primer nivel del proceso de Análisis Didáctico, identificación de prácticas, es común a cualquier actividad de enseñanza por parte de un maestro.

En esta investigación se les dio a los maestros una aproximación al razonamiento algebraico elemental que puede ser interpretada como una orientación para “identificación de prácticas”. En razón a los objetivos O-RAE1 (Identificar tipos de tareas que los maestros en formación proponen para promover el razonamiento algebraico elemental, y O-RAE2 (Identificar creencias de los maestros en formación acerca del razonamiento algebraico elemental) no se les dio una instrucción más explícita sobre la “identificación de prácticas”.

Se consideró que al hacerlo se podría predisponer a los maestros en formación y limitar sus exploraciones sobre tipologías de ejercicios. El segundo nivel del proceso de análisis didáctico, se inicia con la resolución de las tareas identificadas para determinar la adecuación de las mismas a los objetivos de enseñanza, al programa curricular, al nivel de conocimientos matemáticos de los niños, entre otros aspectos.

Como se ha discutido en esta memoria de tesis doctoral, la solución matemática de las tareas no es suficiente para discutirla con los niños; se requiere que los maestros identifiquen configuraciones de objetos matemáticos, sus significados de uso o referencia, las relaciones entre ellos, su organización y ecología que se establecen entre los mismos. Es así como se concede relevancia a los recuadros numerados dos y tres en la Figura 8.2.

En respuesta a la naturaleza compleja de la tarea que se pide a los estudiantes en los recuadros numerados dos y tres en la Figura 8.2, es que se propone la herramienta GROS. Una vez que los niveles dos y tres del análisis didáctico se completan, el maestro debe considerar la idoneidad del proceso que ha planteado. Para determinar la idoneidad didáctica del proceso se requiere considerar, a su vez, varias componentes del mismo: Cognitiva, mediacional, afectiva, interaccional y ecológica.

Si bien es cierto que la actividad matemática, su adecuación a los conocimientos de los niños, a su desarrollo cognitivo, a los recursos que se utilizarán y las relaciones entre estos elementos deberían ser considerados por el maestro, la investigación realizada señala que la inclusión de todos los niveles de idoneidad plantea un problema tremendamente complejo al maestro en formación.

Su respuesta ante tal nivel de complejidad es ignorar aquellos aspectos que considera más problemáticos. Sólo tres grupos incluyeron comentarios sobre la idoneidad en sus unidades. El Anexo J -Interpretación al Concepto de Idoneidad Dada por tres Grupos- muestra las diversas interpretaciones que los maestros dieron a la idoneidad.

Se sugiere que se limite el número de las componentes de idoneidad que los estudiantes deben considerar en su unidad didáctica. Por ejemplo, que sólo se considere la idoneidad cognitiva y la mediacional. Es decir, se debe pedir que los estudiantes consideren la pertinencia y adecuación de los objetos matemáticos, sus significados y sus relaciones a la edad de los niños; y que determinen los “medios” para lograr sus objetivos instruccionales.

Se debe mencionar que los maestros consideran la idoneidad didáctica separada de los niveles dos y tres del análisis didáctico. En una réplica del curso de formación “Currículo de Matemáticas en Educación Primaria”, se podría vincular simultáneamente la implementación de los tres primeros niveles del análisis didáctico, con las consideraciones sobre la idoneidad que se derivan de los niveles dos y tres. Esto se podría hacer en una práctica integradora, que tuviese lugar en una sección de la programación de las sesiones prácticas que se consideran en la programación del curso.

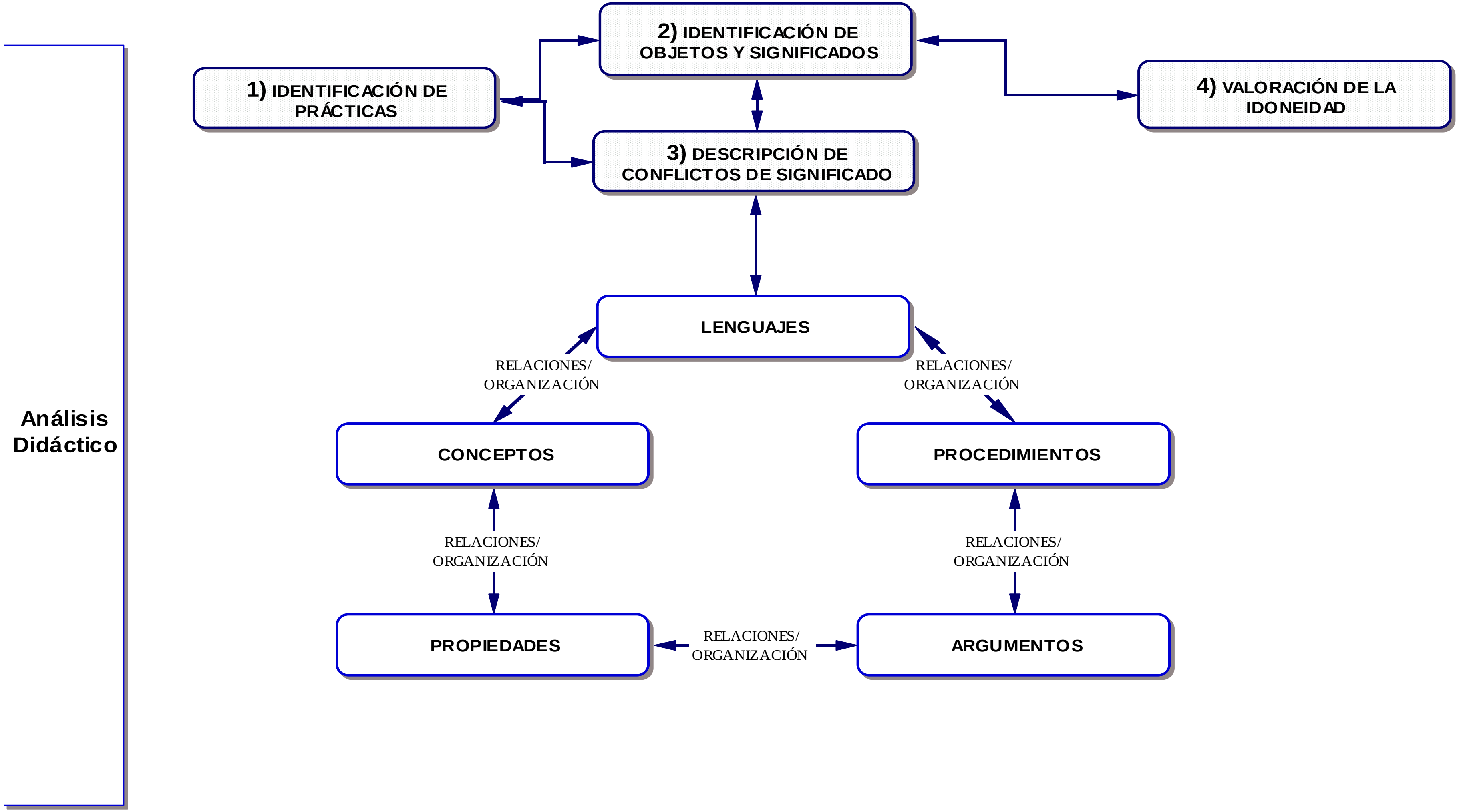


Figura 8.2. Esquema del Análisis Didáctico.

8.5 Implicaciones para la Guía de Elaboración de la Unidad Didáctica

En la Figura 8.3 se muestra la relación entre las fases del proceso de diseño de la unidad didáctica, y su relación con los cuatro niveles de Análisis Epistémico; además de los aspectos diversos que deben considerar los estudiantes, las relaciones entre los diversos componentes de la unidad didáctica, la guía y el análisis didáctico.

Retrospectivamente, el trabajo propuesto a los estudiantes es muy complejo, y la propuesta de formación es muy ambiciosa. Se ofrece a los maestros la oportunidad de experimentar los diversos aspectos incluidos en el diseño de una unidad didáctica, bajo el enfoque del Análisis Didáctico; adicionalmente se les ofrece dos herramientas poderosas: El análisis epistémico y la GROS; el uso de esta última ha probado representar un reto para los maestros en formación.

El uso de la GROS se relaciona íntimamente con dos de los cuatro niveles de análisis didáctico. Dado que a partir del análisis epistémico realizado con la GROS se responden algunos requisitos pedidos para la unidad didáctica- identificación de conocimientos matemáticos, identificación de conflictos de significado - sería conveniente concederle más importancia a la GROS en el proceso formativo de los maestros.

Las sugerencias para el diseño de una unidad didáctica sobre la inclusión del razonamiento algebraico elemental se enumeran a continuación:

- Establecer un límite razonable para el número de ejercicios que los estudiantes deben analizar.
- Los objetivos instruccionales que los estudiantes proponen deberían surgir del análisis epistémico y no tanto de los documentos curriculares oficiales.
- Se debe pedir explícitamente- debería aparecer como un inciso primario del trabajo y no como uno secundario- que los conocimientos matemáticos, los conflictos, los ejercicios de refuerzo y ampliación y la evaluación se vinculen y justifiquen con el análisis epistémico que se genera con la aplicación de la GROS.
- La secuenciación de las actividades y la valoración de la idoneidad cognitiva y mediacional deberían surgir del análisis epistémico.

La Figura 8.4 muestra la nueva propuesta y cómo se integran los requisitos para la elaboración de la unidad didáctica, el análisis didáctico y el análisis epistémico.

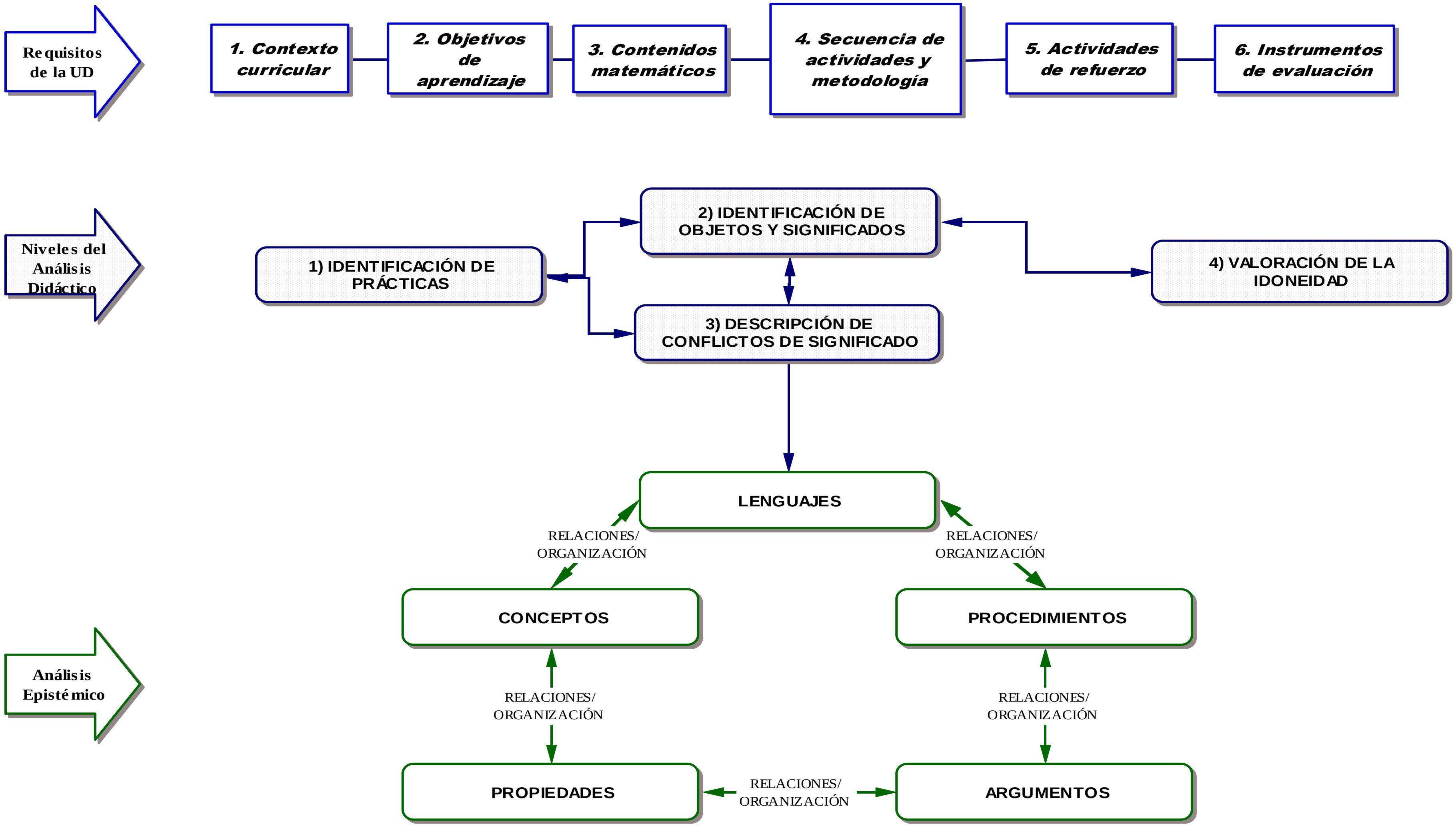


Figura 8.3. Relación entre Guía para la Elaboración de la Unidad Didáctica y los Niveles de Análisis Didáctico y Análisis Epistémico.

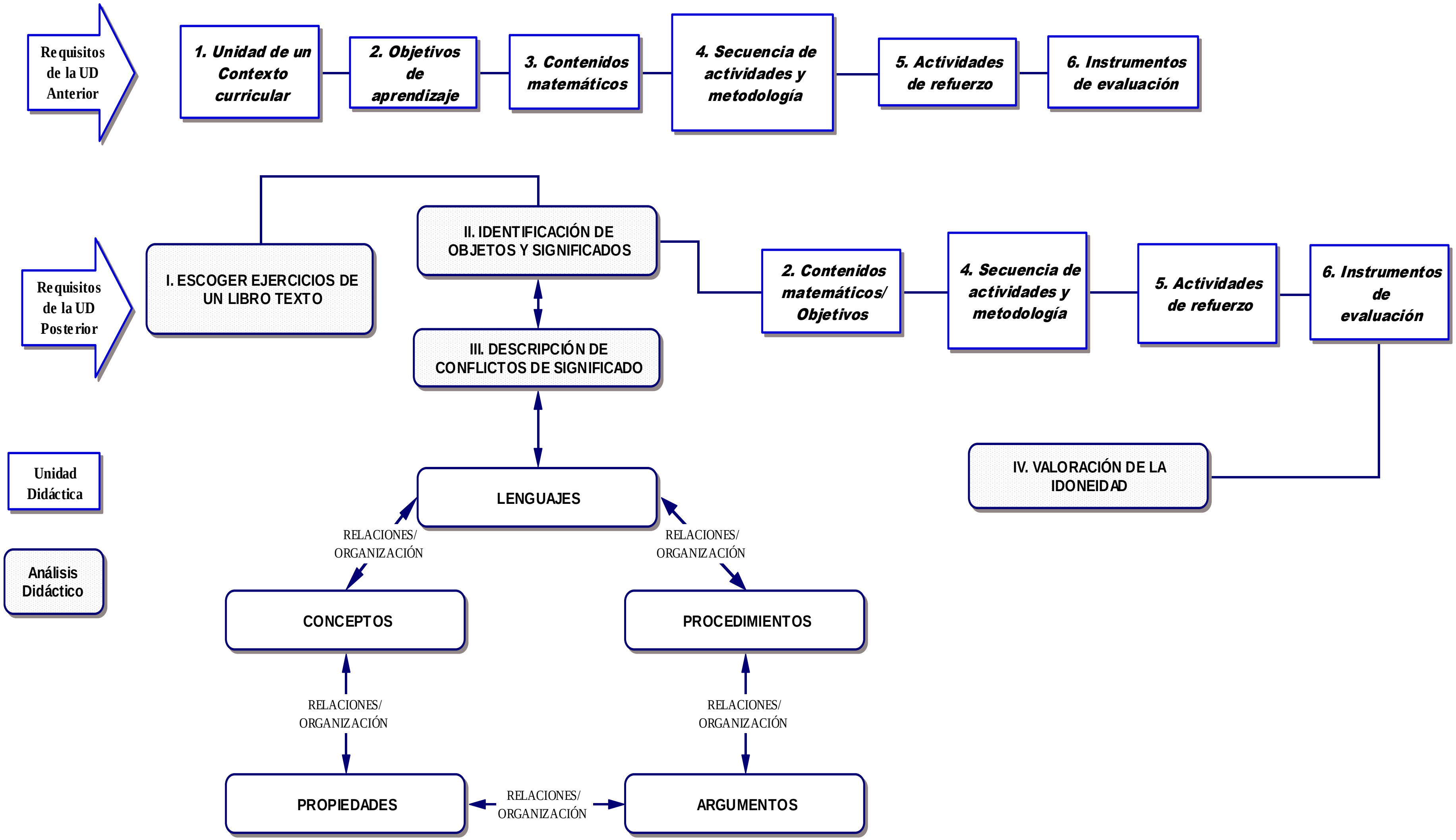


Figura 8.4. Diagrama de la Nueva Propuesta de Integración del Análisis Didáctico y el Análisis Epistémico en la Elaboración de la Unidad Didáctica.

8.6 Implicaciones para la Inclusión del Razonamiento Algebraico Elemental

Nos referimos ahora al razonamiento algebraico elemental como un tema de estudio para ser incluido en el contexto de la formación de maestros. Se ha discutido en esta memoria de tesis doctoral que existe diferencia entre el álgebra que se enseña en la escuela secundaria y la que se pretende enseñar en la escuela primaria.

Se puede afirmar que la diferencia entre el álgebra de los matemáticos y el álgebra de la escuela secundaria está en que la primera se centra en estructuras y en el formalismo para demostrar la validez general de tales estructuras, mientras que la segunda se centra en procesos de resolución de ecuaciones y modelaciones.

Establecer una diferenciación entre el álgebra de la secundaria y el álgebra de la primaria, pasa por indicar cuáles objetos y significados matemáticos consideramos algebraicos en naturaleza y en qué medida deberían ser manifestados por los niños para afirmar que están operando en los dominios del álgebra. Sin embargo, es muy difícil delinear la actividad algebraica de la actividad matemática en general. La delimitación tendría elementos subjetivos dependientes de la postura epistémica de quien la efectúa.

Sería pertinente considerar que en el proceso de transición desde la aritmética hasta al álgebra se transita por una "zona transicional", en donde las tareas matemáticas exhiben características precursoras del álgebra. Es decir se puede considerar que un ejercicio exhibe características preliminares del álgebra, pero con el paso del tiempo y en el trascurso de los cursos de la primaria, más características algebraicas se pueden identificar y agregar, hasta llegar a considerar que un ejercicio exhibe características avanzadas del álgebra. Esto está alineado con el desarrollo cognitivo de los niños, y con el hecho que el razonamiento simbólico se ve como resultado de un proceso más general de maduración (Santrock, 2001).

Se puede lograr consenso en la comunidad de investigadores en relación con el hecho que la presencia de incógnitas, variables, solución de ecuaciones, simbolización, generalización, entre otros, podrían ser característicos de actividad algebraica, sin embargo responder a la pregunta ¿Qué nivel de uso o de manifestación de uso es suficiente para valorar como algebraica la actividad matemática realizada por un niño? no es fácil, y la respuesta divide a la comunidad de investigadores en el tema del razonamiento algebraico elemental.

Se considera que la condición de ser o no algebraica para una actividad matemática es una cuestión de grado; una actividad puede ser "más algebraica o menos algebraica" en función que incluya algunas características y en función del nivel educativo en el cual se discuta. Una actividad en la cual se debe encontrar un número faltante (__+ 5=7) podría ser considera algebraica cuando se discute en segundo o tercer grado de educación primaria (Carpenter, Frankle, Loef y Levi, 2003), pero no si se discute en sexto grado.

Adicionalmente se debe distinguir entre el carácter algebraico "potencial" que un ejercicio pueda contener y el uso por parte de los niños de los objetos y significados algebraicos que se hayan reconocido, como instrumentos en la resolución del ejercicio. Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnets (2006) quienes consideran que "*…la idea no es simplemente atribuir significado algebraico a las actividades matemáticas de la escuela primaria. Los contenidos matemáticos deben ser transformados sutilmente para resaltar su carácter algebraico*" (p. 88), pero para resaltar el carácter algebraico se debe ampliar la concepción del álgebra para reconocerla presentes en actividades preliminares que conducen hacia actividades avanzadas.

8.7 Implicaciones para la Formación de Maestros

Las implicaciones que se derivan de este estudio se hacen en consideración a las condiciones en las cuales se realizó esta investigación. En esta memoria de tesis doctoral se exploró una aproximación al análisis didáctico de tareas sobre razonamiento algebraico elemental, igualmente se puso a prueba una herramienta de análisis epistémico.

La aproximación al análisis didáctico y la herramienta de análisis epistémico, se exploraron en el contexto de una investigación sobre la evaluación y desarrollo de competencias de análisis didáctico de tareas sobre razonamiento algebraico elemental. En relación con la aproximación al análisis didáctico, aún en el caso en que no se considere pertinente asumir los cuatro niveles del análisis didáctico que se proponen en el trabajo, se estima que el segundo y el tercer nivel: Identificación de objetos y significados y, descripción de interacciones e identificación de conflictos de significado, son convenientes en procesos de diseño instruccional.

En relación con el análisis epistémico se ha encontrado que ha permitido efectuar un reconocimiento más específico de algunos elementos propios del razonamiento algebraico elemental. En ese sentido las actividades de análisis epistémico de tareas matemáticas parece ser una buena actividad para los maestros. Parece que esta actividad, enmarcada en la formación inicial de maestros, podría ayudar a promover el desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza (Ball, Thames y Phelps, 2008) en tanto que se ofrece una herramienta que promueve el reconocimiento de los diversos tipos de objetos y los significados que intervienen en la instrucción matemática.

Este tipo de actividades de reflexión y análisis podría ayudar a profundizar la comprensión de los objetos y procesos matemáticos, que a su vez contribuyen al reconocimiento y promoción del razonamiento algebraico elemental por parte de los maestros. Similar al trabajo de Gómez (2007) se propone evaluar el desarrollo del conocimiento didáctico en la formación inicial de profesores, sin embargo, avanzamos hacia la elaboración y puesta en práctica de herramientas dirigidas al desarrollo de esa forma de conocimiento. A pesar que nuestra experiencia se focalizó en tareas valoradas como de razonamiento algebraico elemental, los instrumentos usados podrían ser usados con otros temas matemáticos.

En la sección 6.7 -Identificación de Conflictos de Significado- del sexto capítulo, se compararon los trabajos de dos grupos, uno de los cuales utilizó el análisis epistémico para identificar objetos, significados y conflictos de significado y uno que no usó el análisis epistémico. Si bien el trabajo de los estudiantes de G1 no es representativo, también es cierto que la experiencia demuestra las bondades del análisis epistémico y la eventual conveniencia que dicha experiencia sea replicada con otros grupos de estudiantes. Se hizo evidente la alineación entre la solución matemática de la tarea, la identificación de objetos y significados y el reconocimiento de posibles conflictos de significado. Los resultados obtenidos apoyan el vínculo entre el desarrollo positivo de la competencia de análisis didáctico y el uso del análisis epistémico. Se puede apreciar la diferencia entre los análisis a favor del grupo que utilizó la herramienta. Sin embargo se reconoce que más evidencia podría ser requerida para concluir sin reservas a favor del uso del análisis didáctico y del análisis epistémico en planes de formación de maestros de matemáticas.

8.8 Limitaciones del Estudio

Varias limitaciones han surgido durante la investigación. Una fue la poca libertad que se tuvo para diseñar la prueba que se les aplicó a los niños de escuela elemental, de sexto grado, en la ciudad de Granada. Hubiera sido interesante diseñar una prueba que incluyera tareas matemáticas con un carácter algebraico más acentuado. Igualmente hubiera sido interesante entrevistar a algunos de los niños. Los resultados de tal prueba, junto con los resultados de las entrevistas hubieran aportado más datos para indagar sobre las competencias de los niños de escuela elemental para abordar tareas del razonamiento algebraico y confrontarlas con las creencias de los maestros en formación y con sus valoraciones de las soluciones de los niños.

Otra limitación fue la falta de tiempo durante las sesiones de trabajo con los maestros, que no permitió que se discutiera y reflexionara más sobre las soluciones de las tareas. Adicionalmente se enumera tanto la negativa de algunos grupos de atender la invitación a una entrevista, justo después que presentaron su unidad didáctica como la inasistencia de algunos maestros a todas las sesiones de asesoría, lo que no permitió efectuar un seguimiento más detallado del proceso de evolución de las competencias de análisis epistémico y didáctico ni de las creencias en relación con la inclusión del razonamiento algebraico elemental.

Adicionalmente uno de los grupos no permitió que el investigador estuviera presente en la presentación de la unidad didáctica. Adujo ansiedad. Vale decir que después de la terminación del periodo académico, ningún maestro en formación respondió a las solicitudes de reuniones para indagar sobre algunos aspectos.

Otra eventual limitación es la negativa de algunos estudiantes a responder a los cuestionamientos planteados por el investigador durante las sesiones de trabajo. A pesar que se hizo todo lo posible para que las sesiones trascurrieran en un ambiente relajado de cooperación y aprendizaje, los estudiantes tuvieron dificultades para articular sus pensamientos y para manifestarlos. Estas limitaciones fueron inevitables bajo las condiciones en las que se realizó la investigación.

8.9 Contribuciones del Estudio

La investigación ha indagado sobre el desarrollo de competencias de análisis didáctico en un tema matemático específico. En el proceso de análisis didáctico se ha considerado el uso de una herramienta -el análisis epistémico-.

Los resultados indican que el análisis didáctico y, específicamente, el análisis epistémico es un reto para los maestros. Sin embargo basados en dos casos, uno de ellos motivo del séptimo capítulo y el otro, discutido en la sección 6.5.4.2.2 -Grupos que Usaron la GROS- y la sección 6.5.4.2.3 -Grupos que no Usaron la GROS- del sexto capítulo, se evidencia que los estudiantes que asumieron el uso de la GROS, han exhibido un nivel de análisis didáctico que los faculta para proponer conflictos de significado, y proponer nuevas tareas matemáticas a partir del análisis epistémicos de las tareas, realizados con la ayuda de la GROS.

Igualmente, los datos respaldan el uso tanto de tres niveles de análisis didáctico como del análisis epistémico. La propuesta de análisis didáctico comprende cuatro niveles, dos de los cuales se ponen en juego con el análisis epistémico, ha resultado interesante pero muy compleja, por eso se propone reducir los cuatro niveles a los niveles segundo y tercero, que son: *Identificación de objetos y significados matemáticos, y descripción de interacciones en torno a conflictos*.

Se considera que el primer nivel “Identificación de prácticas matemáticas”, se retroalimenta de los niveles segundo y tercero, en tanto que con la práctica en la identificación de objetos, significados e interacciones en torno a conflictos, el maestro escoja ejercicios adecuados a los objetivos instruccionales.

El cuarto nivel “valoración de la idoneidad didáctica del proceso” se sugiere vincularlo con la identificación de conflictos. En tanto que al identificar conflictos el maestro podría definir acciones y escoger recursos para dar cuenta de ellas. Es decir, se debería pedir a los maestros en formación que no sólo identifiquen los conflictos que resultan de las configuraciones propuestas, sino que también propongan acciones en dos frentes: Nuevos ejercicios-refuerzo y ampliación- y materiales o recursos que se requieren.

La identificación de diez categorías de actividades de carácter algebraico, algunas de ellas respaldadas por investigaciones diversas, ofrece un conjunto de actividades cuyos elementos algebraicos son reconocidos por los maestros. Si bien no se poseen datos para apoyar el reconocimiento de estas categorías por parte de otras poblaciones de maestros en formación, parecen prometedoras.

Adicionalmente, el análisis epistémico que hemos propuesto en este trabajo ha permitido que los maestros adecuen sus conocimientos matemáticos a las condiciones de sus futuros alumnos. En ese sentido el Análisis Didáctico parece ser instrumental en la adecuación del conocimiento matemático para la enseñanza y se encauza en la propuesta de Ball, Thames y Phelps (2008); Godino (2009).

Consideramos que el análisis didáctico articulado con el epistémico ha favorecido no sólo el reconocimiento del complejo entramado de objetos y significados inmersos en la solución de una tarea algebraica, sino que ha permitido avanzar hacia una respuesta a la pregunta: ¿Qué tipo de formación debe ser ofrecida a los maestros en formación para que puedan reconocer tanto el carácter algebraico de las tareas matemáticas como promover el razonamiento algebraico en los niños?

Para Steele (2005, p. 292) “*el reto que enfrentan los formadores de maestros es asegurar que los maestros en formación y los maestros en activo tengan niveles apropiados de conocimiento para la enseñanza de las matemáticas*”. Consideramos que nuestro trabajo hace un aporte en el contexto de proveer dos herramientas, el análisis didáctico y el análisis epistémico, para apoyar el desarrollo de competencias vinculadas orientadas a cualificar el conocimiento matemático para la enseñanza.

En este sentido, la presente memoria de tesis doctoral aporta alguna información para apoyar la urgente necesidad de revisar los planes de formación de maestros en el área de matemáticas y de contemplar el razonamiento algebraico y su didáctica en el desarrollo de los distintos bloques de contenido.

8.10 Publicaciones Derivadas

Del presente trabajo de investigación se han derivado las siguientes publicaciones en revistas internacionales (en revisión), congresos internacionales, nacionales y regionales:

8.10.1 Revistas Internacionales

- Castro, W. F., Godino, Juan D. (2011). Prospective elementary teacher's thinking about algebraic reasoning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1-23. En revisión.

- Castro, W. F., Godino, Juan D., & Rivas, M. (2011). Razonamiento algebraico en educación primaria: un reto para la formación inicial de profesores. *Revista Unión*. Argentina, 1-18. En revisión.

8.10.2 Congresos Internacionales

- Castro, W. F., Godino, Juan D. (2009). Cognitive configurations of pre-service teachers when solving an arithmetic-algebraic problem. *Proceedings of the Sixth Conference of European Research in Mathematics Education*. Université Claude Bernard, Lyon, France. Disponible en Internet: http://www.inrp.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg4-04-castro-godino.pdf.

- Castro, W. F., Godino, Juan D. (2009). Identifying epistemic and cognitive configurations in the elementary algebraic reasoning. *En Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tzekaki, M; Kaldrimidou, M; Sakonidis, H (Eds.), Vol. 1: p. 351. Tesalónica, Grecia.

- Rivas, M., Castro, W. F., & Konic, P. (2009). Epistemic and cognitive configurations of preservice teachers when solving a missing value problem. *En Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tzekaki,M; Kaldrimidou, M; Sakonidis, H (Eds.) Vol.1: p. 457. Tesalónica, Grecia.

- Rivas, M., Godino, Juan D., & Castro, W. F. (2010). Developing prospective teachers´ mathematical knowledge to teach proportionality. *En Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Pinto M.M.F & Kawasaki, T.F (Eds.) Vol.1: p. 96. Belo Horizonte, Brazil.

8.10.3 Congresos Nacionales

- Castro, W.F y Godino, J.D (2008). Evaluación del razonamiento algebraico elemental en futuros maestros: un estudio exploratorio. *Actas del XII Simposio Español de Investigación en Educación Matemática*, pp. 273-282.
- Castro, W. F., y Godino, J.D., Rivas, M (2010). Competencias de maestros en formación para el análisis epistémico de tareas de razonamiento algebraico elemental. *Actas del XIV Simposio Español de Investigación en Educación Matemática*, pp. 259-270.

8.10.4 Congresos Regionales

- Castro, W. F., Godino, Juan D., Rivas, M., & Roa, R. (2008). La reflexión epistémicas y cognitiva como recurso para el desarrollo del sentido numérico en futuros profesores. *XIII Jornadas de Investigación en el Aula de Matemáticas*. Formación de profesores. Granada.

- Rivas, M., Castro, W. F., Godino, Juan D., & Konic, P. (2008). El sentido numérico en problemas de linealidad y no-linealidad en la formación inicial de maestros. *XIII Jornadas de Investigación en el Aula de Matemáticas*. Formación de profesores. Granada.

- Castro, W. F., Godino, Juan D. (2009). Razonamiento algebraico en educación primaria: el desafío de la formación de profesores. *XV Jornadas de Investigación en el Aula de Matemáticas*. Dimensión Histórica, Social y Cultural de las Matemáticas. Granada.

- Castro, W. F., Godino, Juan D., Rivas, M. (2009). Relatividad socio-cultural de los significados del álgebra y los procesos de transposición didáctica en el marco del álgebra escolar. *XV Jornadas de Investigación en el Aula de Matemáticas*. Dimensión Histórica, Social y Cultural de las Matemáticas. Granada.

8.11 Ideas para Futuras Investigaciones

En relación con la aproximación al Razonamiento Algebraico Elemental, en tanto que no se tiene evidencia sobre su uso instrumental por parte de los maestros en formación, se considera que podría incluir en una investigación posterior.

En relación con las tareas matemáticas de carácter algebraico presentes en los libros de texto, se sugiere que se investigue si las diez categorías de actividades matemáticas discutidas en el sexto capitulo son apropiadas para catalogar las actividades matemáticas de carácter algebraico que se proponen en los libros de texto. Un análisis de textos podría ser adelantado usando este criterio en el cual se definieran niveles y grados de algebrización en función de la presencia de objetos, significados y procesos de carácter algebraico.

La propuesta sobre una zona transicional entre aritmética y álgebra, en la que los ejercicios exhiban objetos, significados y procesos algebraicos es concomitante con la inclusión del razonamiento algebraico elemental. Esta propuesta está alineada con reportes de estudios longitudinales acerca de la inclusión del razonamiento algebraico desde la escuela elemental (Derry, Wilsman y Hackbarth, 2007), sobre las competencias algebraicas de niños de escuela elemental (Carpenter,Levi and Farnsworth, 2000; Warren y Cooper, 2005; kaput, 2000) que conceden que el desarrollo del razonamiento algebraico se logra a lo largo del tiempo, con las propuestas cognitivas (Santrock, 2001) que concede que el razonamiento simbólico se logra como resultado de un proceso de maduración, y también con los reportes acerca del desempeño de los maestros en formación cuando resuelvan y valoran ejercicios sobre álgebra (Verchaffel y Onghema, 2003; Espinosa, 2004).

Diversos trabajos de investigación y reportes (Fong, 2004; Watanabe, 2008, Moyer, Huinker y Cai, 2004; Wong 2005; Lew, 2004) dan cuenta de la inclusión del razonamiento algebraico elemental en los currículos de varios países y del enfoque curricular particular que le han dado al mismo.

Se podría considerar que “tipos y niveles” de álgebra aparecen en la experiencia matemática de la escuela primaria. Tales tipos y niveles de algebrización pueden definirse en términos de objetos, significados y configuraciones algebraicas que se requieren y surgen en su solución.

También se proponen que estudios posteriores indaguen sobre el vínculo entre el análisis epistémico, con énfasis en el segundo y tercer nivel (identificación de objetos y significados y, descripción de interacciones en torno a conflictos) y el reconocimiento de elementos algebraicos en tareas matemáticas.

Otro aspecto que merece indagación posterior es la alineación entre el análisis epistémico- específicamente el reconocimiento de configuraciones epistémicas- y el señalamiento de conflictos de significado.

Estudios posteriores sobre el reconocimiento y promoción del razonamiento algebraico en los niños, se puede beneficiar de una recolección de datos más amplia sobre más lecciones y que considere más criterios. Un estudio longitudinal de carácter experimental con maestros en activo podría arrojar más evidencia tanto sobre el desarrollo de competencias de análisis didáctico como sobre la promoción del reconocimiento de objetos y significados asociados al uso del análisis epistémico y específicamente a la Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados.

Como se ilustró en el marco teórico, muchos componentes del conocimiento matemático y factores institucionales están involucrados en el desarrollo de competencias para la enseñanza del razonamiento algebraico elemental. Ahora que se ha ganado más conocimiento tanto sobre el papel que desempeña el análisis didáctico como en el uso del enfoque onto-semiótico como marco teórico, sería interesante investigar:

- ¿Cómo se desarrolla esta competencia a lo largo del tiempo y en el contexto del salón de clase?
- ¿Cómo influye la interacción entre niños y maestros en el reconocimiento del razonamiento algebraico elemental por parte de los maestros?
- ¿Qué tan efectiva y útil es la GROS en el contexto del salón de clase?

Investigaciones futuras podría continuar el estudio de profesores mientras enseñan álgebra elemental en un ambiente regular de clase. Dicha investigación podría por ejemplo, aclarar el papel del uso de la Guía de Reconocimiento de Objetos y Significados -GROS- como instrumento que ayude a comprender el entramado de objetos y significados que surgen durante la interacción entre maestro y alumnos.

Podría extenderse la indagación, desde los objetos y significados hasta los procesos algebraicos que se ponen en juego mientras se resuelven tareas de razonamiento algebraico elemental.

La relación entre el conocimiento matemático para la enseñanza y el análisis didáctico podría ser investigada. Nuestra hipótesis es que la propuesta de análisis didáctico y su vínculo con el análisis epistémico es una herramienta potencial para desarrollar el conocimiento matemático para la enseñanza en los términos que propone Ball, Thames y Phelps (2008) y Godino (2009).

REFERENCIAS

Andrews, D., & Goodson, L. A. (1980). A comparative analysis of models of instructional design. *Journal of Instructional Development, 3*(4): 2-16.

Andrusyszyn, M.A., & Daive, L. (1997). Facilitating reflection through interactive journal writing in an online graduate course: A qualitative study. *Journal of Distance Education, 12*(1): 103-126.

Arcavi, A., & Schoenfeld, A. H. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics Teacher, 81*, 420-427.

Asquith, P., Stephens, A. C., Knut Stephens, M. N., & Alibali, M. (2007). Middle school mathematics teachers´ knowledge of students´ understanding of core algebraic concepts: Equal sign and variable. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(3): 249-272.

Ball, D., Lubienski, S. T., & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching(4th ed)*. New York: Macmillan.

Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? . *Journal for Research in Mathematics Education*, *59*(5): 389-407.

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers´ understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*, 132-144.

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Artículo presentado* en *Mathematics education beyond 2000 Proceedings of the 23rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*.

Baroody, A. J., & Ginsburg, H. P. (1983). The effects of instruction on childrens´s understanding of the "equals" sign. *The Elementary School Journal, 84*(2): 199-212.

Barrow, H. (1998). The essentials of problem-based learning. *Journal of Dental Education, 62*(9): 630-633.

Bass, H. (1998). Algebra with integrity and reality. In M. S. E. Board (Ed.), *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: Proceedings of the National Research Council Symposium,* 9-15. Washington DC: National Research Council.

Beach, K. (1999). Consequential transitions: A sociocultural expedition beyond transfer in education. *Review of Research in Education, 24*(1): 101-139.

Becker, J. R., & Rivera, F. D. (2008). Generalization in algebra: The foundation of algebraic thinking and reasoning across the grades. *ZDM The international Journal on Mathematics Education, 40*(1): 1.

Bednarz, N., & Janvier, C. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra,* 115-136. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (Eds.). (1996). *Approaches to algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Behr, M., Khoury, H. A., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1997). Conceptual units analysis of pre-service elementary school teachers' strategies on a rational-number-as-operator task. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(1): 48-69.

Behr, M., Erlwanger, & Nichols, E. (1980). How children view the equal sign. *Mathematics teaching, 92,* 13-15.

Bell, A. (1996). Problem-solving in algebra: Two aspects. In N. Bernarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra:Perspectives to research and teaching,* 167-187. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Ben-Haim, D., Lappan, G., & Houang, R. T. (1985). Visualising rectangular solids made of small cubes: Analysing and effecting students´ performance. *Educational Studies in Mathematics, 16*, 389-409.

Stump, S., Bishop, J., & (2002, October, 26-29). Pre-service elementary and middle school teachers´ conceptions of algebra revealed through the use of exemplary curriculum materials. *Proceedings of the Annual Meeting (of the) North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Athens, GA.

Blanton, M. L., & Kaput, J. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience. In H. L. Chick & K. Stacey (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. Proceedings of the 12th ICMI* (Vol. 1): 344-352. Melbourne: University of Melbourne.

Blanton, M. L., & Kaput, J. (2003). Developing elementary teachers´ "algebra eyes and ears". *Teaching Children Mathematics*(October), 70-77.

Blanton, M. L., & Kaput, J. (2004). Elementary grades students´capacity for functional thinking. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3): 49-56. Bergen, Norway: PME.

Blanton, M. L., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5): 412-446.

Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2007). Whats's all the fuss about competencies? In *Modelling and Applications in Mathematics Education New ICMI Study Series* (Vol. 10, Part 2): 45-46.

Bloor, D. (1983). *Wittgestein: A social theory of knowledge*. New York: Columbia University Press.

Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children´s strategies and errors. A report of the strategies and errors in secondary mathematics project*. Windsor, Berkshire: Nfer-Nelson.

Booth, L. R. (1988). Children´s difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), *The Ideas of Algebra, K-12: 1988 Yearbook,* 20-32. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Booth, S. (1997). On the phenomenography, learning and teaching. *Higher Education Research & Development*, *16*, 135-159.

Borko, H., Frykholm, J., Pittman, M., Eiteljorg, E., Nelson, M., Jacobs, J., et al. (2005). Preparing teachers to foster algebraic thinking. *ZDM The international Journal on Mathematics Education, 37*(1): 43-52.

Boulton-Lewis, G. M., Cooper, T. J., Atweh, H. P., Wilss, L., & Mutch, S. (1997). The transition from arithmetic to algebra: A cognitive perspective. En Pehkonen, Erkki (Ed) *Proceedings of 21th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Lahti, Finland.*

Boyer, C. B. (1989). *A history of mathematics, 2nd ed*. New York: Reverte.

Britt, M., & Irwin, K. (2008). Algebraic thinking with and without algebraic representation: A three-year longitudinal study. *Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematic, 40*(1): 39-53.

Burkhardt, H. (2001). Algebra for all: What does it mean? How are we doing? In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra* (Vol. 1): 140-146. Melbourne: University of Melbourne, Australia.

Cai, J. (2004). Developing algebraic thinking in the earlier grades: A case study of the chinese elementary school curriculum. *The Mathematics Educator, 8*(1): 107-130.

Cajori, F. (1993). *A history of mathematical notations*. New York: Dover.

Calderhead, J. (1989). Reflective teaching and teacher education. *Teaching and Teacher Education, 5*(1): 43-51.

Cañadas, M. C., Castro, E., y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de educación secundaria obligatoria en el problema de las baldosas. *Pensamiento Numérico y Algebraico, 2*(3): 137-151.

Capraro, R. M., Capraro, M. N., Parker, D., Kulm, G., & Raulerson, T. (2005). The mathematics content knowledge role in developing preservice teachers pedagogical content knowledge. *Journal of Research in Childhood Education, 20*(2): 102-118.

Carpenter, T., Fennema, E., Peterson, P., & Carey, D. (1988). Teachers' pedagogical content knowledge of students' problem solving in elementary arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(5): 385-401.

Carpenter, T., & Levi, L. (1999). Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades. *Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association.*

Carpenter, T., & Levi, L. (2000). Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades. *Madison, MA: Wisconsin University,Madison.National Center for Improving.* Reporte Eric 470 471.

Carpenter, T., Levi, L., & Farnsworth, V. (2000). *Building a foundation for learning algebra in the elementary grades* (No. ED 449 015 SE 064 363). Washington, DC: NCISLA.

Carpenter, T., Levi, L., Franke, M. L., & Zeringue, J. K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematic, 37*(December): 53-59.

Carpenter, T. P., Frankle, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically. Integrating arithmetic and algebra in elementary school*: Heinemann, Portsmouth, NH.

Carraher, D. W., Martinez, M., & Schliemann, A. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 40*(1): 3-22.

Carraher, D. W., & Schlieman, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester & K. Jr (Eds.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2): NCTM..

Carraher, D. W., & Schlieman, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester, K. Jr (Ed.), *Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2): NCTM.

Carraher, D. W., Schlieman, A., & Brizuela, B. (2001). Can young students operate on unknowns? In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1): 130-140. Utrecht.

Carraher, D. W., Schlieman, A., Brizuela, B., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(2): 87-115.

Castro, M. E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales: Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14 años).* Granada: Comares.

Castro, W. F., & Godino, J. D. (2009). Cognitive configurations of pre-service teachers when solving an arithmetic-algebraic problem. *Artículo presentado en la European Research In Mathematics Education (CERME 6)*, Université Claude Bernard, Lyon, France. Retrieved 25 july, 2010, from http://www.inrp.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg4-04-castro-godino.pdf.

Castro, W. F., & Godino, J. D. (2011). Prospective elementary teachers' thinking about elementary algebraic reasoning *Journal of Mathematics Teacher Education, (En revisión).*

Castro, W. F., Godino, J. D., & Rivas, M. (2010). Razonamiento algebraico en educación primaria: Un reto para la formación inicial de profesores. *UNIÓN, (En revisión).*

Cerdan P, F. (2008). *Estudios sobre la familia de problemas aritmético-algebraicos.* Tesis doctoral. Universitat de Valencia, Valencia.

Chapman, O. (1999). Inservice teacher development in mathematical problem solving. *Journal of Mathematics Teacher Education, 2*(2): 121-142.

Charbonneau, L. (1996). From euclid to descartes: Algebra and its relations to geometry. In C. K. Nadime Bednarz, Lesley Lee (Ed.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching,* 15-37. Utrech: Kluwer academic publishers.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collége. *Petit x, 5*, 51-94.

Chomsky, N. (1957). *Syntactic structures*. New York: Mouton.

Chomsky, N. (1965). *Aspects of the theory of syntax*. Cambridge, MA: MIT Press.

Clement, J. (1982). Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*(1): 16-30.

Conway, P. F. (2001). Anticipatory reflection while learning to teach: From a temporary truncated to a temporally distributed model of reflection in teacher education. *Teaching and Teacher Education, 17*, 89-106.

Cooney, T. J. (1985). A beginning teacher´s view of problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education, 16,* 324-336.

Cooper, T. J., & Warren, E. (2008). The effect of different representations on Years 3 to 5 students´ ability to generalise. *Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematic, 40*(1): 23-37.

Cooper, T. J., Williams, A. M., & Baturo, A. (1999). Equals, expressions, equations, and the meaning of variable: A teaching experiment. *Proceedings of the 22nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, Adelaide, SA.

D´Amore, B., & Godino, J. D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10*(2): 191-218.

Davis, R. B. (1985). ICME-5 Report: Algebraic thinking in the early grades. *Journal of Mathematical Behavior, 4*, 195-208.

Davis, R. B. (1989). Theoretical considerations: Research studies in how humans think about algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (Vol. 4): 266-274. Reston, VA: NCTM y Laurence Erlbaum Associates.

Derry, S. J., Wilsman, M. J., & Hackbarth, A. J. (2007). Using constrasting case activities to deepen teacher understanding of algebraic thinking and teaching. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(3): 305-329.

Dewey, J. (1928). *Cómo pensamos*. Madrid: Espasa-Calpe.

Doerr, H. M. (2001). Teachers´ knowledge and the teaching of algebra. In K. Stacey, H. L. Chick & M. Kendall (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12th ICMI study* (Vol. 8). Boston/Dordrecht/New York/London: Kluwer Academic Publishers.

Dooren, W. V. L., Verschaffel; Patrick, Onghema. (2003). Preservice teachers` preferred strategies for solving arithmetic and algebra word problems. *Journal of Mathematics Teacher Education, 6,* 27-52.

Eisemberg, T. (1994). On understanding the reluctance to visualize. *ZDM The international Journal on Mathematics Education, 4,* 109-113.

English, L., & Warren, E. (1995). General reasoning processes and elementary algebraic understanding: Implications for initial instruction. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 17*(4): 1-19.

English, L. D., & Warren, E. (1998). Which is larger, t+t or t+4? *The Mathematics Teacher, 91*(2): 166-170.

Entwistle, N. (1997). Introduction: Phenomenography in higher education. *Higher Education Research & Development*, *16*, 127-134.

Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. New York: State University of NY.

Espinosa. V, M. E. (2004). *Tipología de resolutores de problemas de álgebra elemental y creencias sobre la evaluación con profesores en formación inicial*. Tesis Doctoral, Granada.

Esty, W. W. (1992). Language concepts of mathematics. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 22*(3): 170-218.

Fennema, E. F., & Loef, F. M. (1992). Teacher´s knowledge and its impact In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on mathematics teaching and learning,* 147-164. New York: Macmillan.

Fenstermacher, G. D. (1986). Philosophy or research on teaching:Three aspects. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3 ed.), 37-49. New York: Macmillan.

Fernandez, E., & Jones, M. A. (2006). Emphasizing the NCTM content standards in undergraduated courses for prospective teachers. *Mathematics and Computer Education, 40*(3): 237-247.

Ferrero, L., I. Gaztelou, et al. (2006). Sexto de primaria:tercer ciclo Matemáticas. Madrid, Anaya.

Filloy, E., Puig, L., & Rojano, T. (2008). *Educational algebra: A theoretical and empirical approach* (Vol. 43): Springer.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*(2): 19-25.

.

Filloy Yague, E., Rojano, T., & Rubio, G. (2001). Propositions concerning the resolution of arithmetical-algebraic problems. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra*, 155-176. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

Fong, N. S. (2004). Developing algebraic thinking in early grades: Case study of the Singapore primary mathematics curriculum. *The Mathematics Educator, 8*(1): 39-59.

Font, V., Godino, J. D., & D´Amore, B. (2007). An ontosemiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 27*(2): 3-9.

Font, V., Planas, N., & Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje, 33*(2).

Freiman, V., & Lee, L. (2004). Tracking primary students' understanding of the equality sign. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2): 415-422. Bergen, Norway: PME.

Fujii, T. (2003). Probing students´s understanding of variables through cognitive Cconflict: Is the concept of a variable so difficult for students to understand. In N. Pateman, B. Dougherty & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1): 47-64. Honolulu, HI.

Fujii, T., & Stephens, M. (2001). Fostering an understanding of algebraic generalisation through numerical expressions: The role of quasi-variables. In H. L. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference. The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (Vol. 1): 258-264. Melbourne: University of Melbourne.

Gallardo, A., & Rojano, T. (1988). Áreas de dificultades en la adquisión de lenguaje aritmético-algebraico. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(2): 155-188.

Gattegno, C. (1967). La percepción y la acción como bases del pensamiento matemático. In C. Gattegno, W. Servais, E. Castelnuovo, J. L. Nicolet, L. Fletcher, L. Motard, L. Campedelli, A. Biguenet & A. Puig (Eds.), *El material para la enseñanza de las matemáticas*. Madrid: Aguilar.

Gelman, R., & Gallistel, C. R. (1986). *The child´s understanding of number*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Godino, J. D. (1991). Hacia una teoría de la didáctica de la matemática. In A. Gutierrez (Ed.), *Área de Conocimiento Didáctica de la Matemática,* 105-149. Madrid: Síntesis.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 22*(2/3): 237-284.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *UNIÓN* (20): 13-31.

Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significados institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3): 325-355.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A search for Identity,* 177-195. Dordrecht: Kluwer, A.P.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2): 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C., & Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics, 60*(1): 3-36.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V., y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma, 27*(2): 221-252.

Godino, J. D., Contreras, A., y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *26*(1): 39-88.

Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. F., & Konic, P. (2008). Epistemic and cognitive analysis of an arithmetic-algebraic problem solution. In *ICME 11*. Morelia: ICME.

Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., & Bencomo, D. (2005). Suitability criteria of a mathematical instruction process. A teaching experience of the function notion. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 4*(2): 1-26.

Gold, R. (1958). Roles in sociological field observations. *Social Forces, 36*, 217-223.

Goldenberg, E. P. (1988). Mathematics, metaphors and human factors: Mathematical, technical and pedagogical challenges in the educational use of graphical representations of functions. *Journal of Mathematical Behavior*, *7*, 135-173.

Goldin, G. A. (1998). Representational system, learning, and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2): 137-165.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Tesis doctoral. Universidad de Granada, Granada.

Gómez, P., & Rico, L. (2007). *Learning within communities of practice in preservice secondary school teachers education PNA*, *2*(1): 17-18.

González, J., & Wagenaar, R. (2003). *Tuning educational structures in europe. Informe final. Fase uno*. Bilbao: Universidad de Deusto y Universidad de Groningen.

Griffith, B., & Frieden, G. (2000). Facilitating reflective thinking. *Counselor Education and Supervision, 40*(2): 82-92.

Hainley, A. (1978). Verbal mathematics. *Mathematics in School, 7*(27): 27-30.

Hall, R., Kibler, D., Wenger, E., & Truxaw, C. (1989). Exploring the episodic structure of algebra story problem solving *Cognition and Instruction, 6*(3): 223-283.

Harel, G., & Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematics, 11*(1): 38-42.

Herbel-Eisenman, B., & Difanis, E. (2005). Using Student work to develop teachers knowledge of algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School, 11*(2): 62-66.

Hiebert, J., & Lefreve, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in Mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*, 1-27. Hills Dale, N.J: Lawrence Erlbaum Associates.

Hill, H. C., Ball, D., & Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers´ topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4): 372-400.

Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambos, Y., Lewis, J. M., Phelps, G., Sleep, L., et al. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instrucional: An exploratory study. *Cognition and Instruction, 26*, 430-511.

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on students achievement. *American Educational Research Journal, 42*(2): 371-406.

Hines, E., & McMahon, M. T. (2005). Interpreting middle school students´s proportional reasoning strategies: Observations from preservice teachers. *School Science and Mathematics, 105*, 288-105.

Jacobs, J., Carpenter, T., Franke, M. L., & Battey, D. (2007). A large-scale study of professional development focused on children´s algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3): 258-288.

Joint Mathematical Council of the United Kingdom. (1996). *Teaching and learning algebra pre-19*. London: Royal Society/JMC Working Group.

Juraschek, B., & Angle, N. S. (1986). The binomial grid. *Mathematics Teacher, 5*, 337-339.

Kagan, D. (1992). Implications of Research on Teacher Belief. *Educational Psychologist*, *27*(1), 65-90.

Kamal, A., & Ramzi, N. (2000). *The role of presentation and response format in understanding, preconceptions and alternative concepts in algebra problems*: ERIC Number 438 174.

Kaput, J. (Ed.). (1998). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by algebrafying the K-12 curriculum*. Washington D.C: National Academy Press.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. F. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding,* 133-155. Maswah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*: National Center of Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. Dartmouth, MA.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*(3): 317-326.

Kieran, C. (1991). A procedural-structural perspective on Algebra Reseach. *Paper presented at the Fifteeth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Assisi, Italia*.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. Alvarez, C. Hodgson, C. Laborde & A. Pérez (Eds.), *8 th International Congress on Mathematical Education: Selected lectures,* 271-290. Seville, Spain: S.A.E.M. Thales.

Kieran, C., & Chalouh, L. (1993). The transition from arithmetic to algebra. In T. D. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics,* 179-198. New York: MacMillan

Kilpatrick, J., Swafford, J. O., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington: National Academy Press.

Kinchin, I., & Hay, D. (2000). How qualitative approach to concept map analysis ca be used to aid learning by illustrating patterns of conceptual development. *Educational Research, 42*(1): 45-57.

Kirk, J., & Miller, M. L. (1986). *Reliability and validity in qualitative research*. Beverly Hills: Sage Publications.

Knuth, E. J., Alibali, M., McNeil, N. M., Weinberg, A., & Stephens, A. C. (2006). Does understanding the equal sign matter?Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(4): 297-312.

Krainer, K. (2003). Teams, communities and networks. *Journal of Mathematics Teacher Education, 6*(2): 93.

Krebs, A. (2005). Analyzing student work as a professional development activity. *School Science and Mathematics, 105*(8): 402-411.

Kücheman, D. (1981). Algebra. In K. Hart (Ed.), *Children´s understanding of mathematics: 11-16* , 102-119. London: John Murray.

Lakoff, G., & Nuñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.

Lannin, J. K., David, B., & Townsend, B. (2006). Recursive and explicit rules: How can we build student algebraic understanding? *Journal of Mathematical Behavior, 25*, 299-317.

Lave, J. (1988). *Cognition in practice: Mind, mathematics and culture in everyday life*. Cambridge, England: Cambridge University Press.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. New York: Cambridge University Press.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic activities culture through generalization activities. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (Vol. 18): 87-106. Kluwer academic publishers.

León, O. G., y Montero, I. (2003). *Métodos de investigación en psicología y educación* (3 ed.): Mc Graw Hill.

Lew, H.-C. (2004). Developing algebraic thinking in early grades: Case study of Korean elementary school mathematics. *The Mathematics Educator, 8*(1): 88-106.

Lin, X., Hmelo, C., Kinzer, C., & Secules, T. (1999). Designing technology to support reflection. *Educational Technology Research and Development, 47*(3): 43-62.

Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relation between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics, 40*, 173-196.

Lincoln, Y. S., & Guba, E. (1985). *Naturalistic inquiry*. Beverly Hills, California: Sage Publications.

Lloyd, G. M., & Frykholm, J. (2000). On the development of "Book Smarts" in mathematics: Prospective elementary teachers´experiences with innovative curriculum materials. Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers. *The Journal, Vol.2* Bajado el 25 de enero, 2010, de http://www.k-12prep.math.ttu.edu/journal/pedagogy/lloyd01/article.pdf.

Louis, K. S., & Marks, H. M. (1998). Does professional learning community affect the classroom? Teachers´ work and student experiences in restructuring schools. *American Journal of Education, 106*(4): 532-575.

Mac Gregor, M., & Price, E. (1999). An exploration of aspects of language proficiency and algebra learning. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(4): 449-467.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11-16. *Educational Studies in Mathematics, 33*(1): 1-19.

Marton, F. (1981). Phenomenography-describing conceptions of the world around us. *Instructional Science, 10*, 177-200.

Marton, F. (1986). Phenomenography a research approach to investigating different understandings of reality. *Journal of Thought 31*(3): 28-42.

Marton, F. (1994). Phenomegraphy. In T. Husen & N. Postlewaite (Eds.), *International Encyclopedia of Education*, 4424-4429. Oxford: Pergamon.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In C. K. Nadime Bednarz, Lesley Lee (Ed.), *Approaches to algebra: Perspectives for Research and Teaching*, 65-86. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J., Graham, A. T., Pimm, D., & Gower, N. (1985). *Routes to/roots of algebra*. London: Open Publisher, Milton Keynes.

McGowen, M., & Davis, G. E. (2001). Changing pre-service elementary teachers´attitudes to algebra. *Artículo presentado en la International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) Study Conference 12 th*.

McNeil, M. N., & Alibai, M. W. (2005). Why won´t you change your mind? Knowledge of operational patterns hinders learning and performance on equations. *Child Development, (76):* 1-17.

McNeil, M. N., Grandau, L., Knut , E. J., Alibai, M. W., Stephens, A. C., Hattikudur, S., et al. (2006). Middle-school students´ understanding of the equal sign: The books they read can´t help. *Cognition and Instruction, (24):* 367-385.

Merriam, S. (1988). *Case study research in education-A qualitative approach*. San Francisco: Jossey-Bass Inc., Publishers.

Miles, M. B., & Huberman, M. (1994). *Qualitative data analysis* (2 ed.). Thousand Oaks, London: Sage Publications.

Millsaps, G. (2000). Secondary mathematics teacher´s mathematics autobiographies: Definitions of mathematics and beliefs about mathematics instructional practice. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 22*(1): 45-67.

Molina, G. M. (2006). *Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Morin, E. (1977). *El método: La naturaleza de la naturaleza*. Madrid: Cátedra.

Moyer, J., Huinker, D., & Cai, J. (2004). Developing algebraic thinking in the earlier grades: A case study of the U.S investigations curriculum. *The Mathematics Educator, 8*(1): 6-38.

Mullens, J. E., Murmane, R. J., & Willet, J. (1996). The contribution of training and subject matter knowledge to teaching effectiveness: A multilevel analysis of longitudinal evidence from Belize. *Comparative Educational Review, 40*(2): 139-157.

Nathan, M. J., & Koedinger, K. R. (2000). An investigation of teacher beliefs of students´ algebra development. *Cognition and Instruction, 18*(2): 209-237.

NCTM. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.

NCTM. (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Sevilla: SAEM Thales.

NCTM. (1991). *The professional standars for teaching mathematics*. Reston, VA. Autor.

NCTM. (1998). *Principles and standards in school mathematics: Discussion draft*. Reston (Virginia): NCTM.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Va:Autor.

NCTM. (2001). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Va: NCTM.

Nesher, P., & Teubal, E. (1975). Verbal cues as an interfering factor in verbal problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 6,* 41-51.

Nespor, J. (1987). The role of beliefs in the practice of teaching. *Journal of Curriculum Studies, 19*(4): 317-328.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The danish KOM project.. *Artículo presentado en la Third Mediteranean Conference on Mathematics Education.*

OCDE (Ed.). (2004). *Learning for tomorrow´s world: First results from PISA 2003*. Paris: OECD.

OCDE. (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana*. Madrid: Editorial Santillana.

Pajares, P. (1998). Teacher beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research, 62*(3): 307-332.

Perry, M., Church, R. B., & Goldin-Meadow, S. (1988). Transitional knowledge in the adquisition of concepts. *Cognitive Development, 3,* 359-400.

Ponte, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Eds.), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de profesores,* 5-28. Lisboa.

Presmeg, N. (1986). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics, 6*(3): 42-46.

Puig E, L., y Cerdan P, F. (1990). Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales. *Artículo presentado en el Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática, Cuernavaca, Morelos*.

Radford, L. (1996). The role of geometry and arithmetic in the development of algebra:Historical remarks from a didactic perspective. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra,* 39-53. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *17*(1): 26-33.

Radford, L. (2003). Gestures, speech and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1): 37-70.

Radford, L. (2006a). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In J. L. Alatorre, M. Sáiz & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (Vol. 1): 2-21. Mérida: Universidad Pedagógica Nacional, Méjico.

Radford, L. (2006b). The anthropology of meaning. *Educational Studies in Mathematics, 61* (1-2): 39-65.

Reigeluth, C. M. (Ed.). (2000). *Diseño de la instrucción: Teoría y modelos: Un nuevo paradigma de la teoría de la instrucción* Madrid: Santillana.

Remillard, J. T. (2005). Examining key concepts in research on teachers´ use of mathematics curricula. *Review of Educational Research, 75*(2): 211-246.

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA, 1*(2): 47-66.

Rimm-Kaufman, S. E., & Sawyer, B. E. (2004). Primary grade teachers´ self-efficacy beliefs, attitudes toward teaching, and discipline and teaching practice priorities in relation to the responsive classroom approach. *The Elementary School Journal*, *104*(4): 321-341.

Rival, I. (1987). Picture puzzling: Mathematicians are rediscovering the power of pictorial reasoning. *Sciences, 27*(1): 40-46.

Rogoff, B. (1993). Children´s guided participation and participatory appropiation in socio or cultural activity. In R. H. Wozniak & K. W. Fisher (Eds.), *Development in context*. Hillsdale, NJ: LEA.

Russell, B. H. (1994). *Research methods in antropology: Qualitative and quantitative approachs.* Thousands Oaks, California: Sage.

Ruthven, K., & Goodchild, S. (2008). Linking researching with teaching: Toward synergy of scholarly and craft knowledge. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education,* 581-598. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Santrock, J. W. (2001). *Psicología de la educación*. México: McGraw-Hill.

Schlieman, A., Carraher, D. W., Brizuela, B., Earnest, D., Goodrow, A., Lara-Roth, S., et al. (2003). Algebra in elementary school. In N. Pateman, B. Dougherty & J. Zillion (Eds.), *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PME-NA. CRDG, College Education* (Vol. 4): 127-134. Honolulu, HI: University of Hawaii.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same Coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1): 1-36.

Sfard, A. (2000). On the reform movement and the limits of mathematical discourse. *Mathematical Thinking and Learning*, *2*(3): 157-189.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and pitfalls of reification. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 191-228.

Shoenfeld, A. H., & Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of profiency in teaching mathematics. In D. Tirosh & T. Wood (Eds.), *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education*, 321-354. Rotterdam: Sense Publishers.

Short, E. (1985). The concept of competence: Its use and misuse in education. *Journal of Teacher Education, 36*(2): 2-6.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2): 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1): 1-22.

Silver, E. (1986). Using conceptual and procedural knowledge: A focus on relationships. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*. Hillsdale: Erlbaum.

Silverman, J., & Thompson, P. W. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(6): 499-511.

Sinha, S. M. (2006). *Mathematical programming: Theory and methods*. New Delhi: Elsevier Inc.

Skemp, R. (1986). *The psychology of learning mathematics*: Penguin Books.

Socas, M. (2001). *Investigación en didáctica de la matemática vía modelos de competencia*. Departamento de Análisis Matemático: Universidad de la Laguna.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. *Actas del XI Simposio Español Investigación en Educación Matemática, pp. 19-52.*

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2): 147-164.

Stacey, K., & Mac Gregor, M. (2001). Curriculum reform and approaches to algebra. In R. Lins (Ed.), *Perspectives on school algebra,* 141-153. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Steele, M. D. (2005). Comparing knowledge bases and reasoning structures in discussions of mathematics and pedagogy. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(4): 291-328.

Steffe, L. P. (2001). What is algebraic about children´s numerical operating? . In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th Conference of the International Commission on Mathematical Instruction:The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (Vol. 2): 556-563. Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Stofflett, R., & Stoddart, T. (1994). Teachers´ ability to understand and use conceptual change teaching as a function of prior content learning experience. *Journal of Research in Science Teaching, 31*(1): 31-51.

Stump, S., & Bishop, J. (2002). Preservice elementary and middle school teachers' conceptions of algebra revealed through the use of exemplary curriculum materials. *Articulo presentado en la Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Athens, GA. Reporte Eric 471 781.

Stylianou, D. A. (2002). On the interaction of visualization and analysis: The negotiation of a visual representation in expert problem solving. *Journal of Mathematical Behavior, 21,* 303-317.

Subramaniam, K., & Banerjee, R. (2004). Teaching arithmetic and algebraic expression. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3): 121-128. Bergen, Norway, Bergen University College.

Tall, D. (2001). Reflections on early algebra. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1): 149-152. Utrech, Netherlands.

Thompson, A. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics, 15*(2): 105-127.

Thompson, A. (1992). Teachers´s beliefs, and conceptions: A synthesis of the research. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Learning and Teaching Mathematics,* 127-146. New York: Macmillan.

Thompson, P. W. (1994). Concrete materials and teaching for understanding. *Arithmetic Teacher, 41*(9): 556-558.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford (Ed.), *The Ideas of Algebra K-12,* 8-19. Reston, VA: NCTM.

Valero, P., & Vithal, R. (1998). Research methods of the "north" revisited from the "south". In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22th International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4): 153-160. Stellenbosch, South Africa.

Van Ameron, B. A. (2002). *Reinvention of early algebra: Developmental research on the transition from arithmetic to algebra*. Utrech: CD-B Press.

Van Dooren, W., Verschaffel, L., & Onghema, P. (2002). The impact of preservice teachers´ content knowledge on their evaluation of students´ strategies for solving arithmetic and algebra word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5): 319-351.

Van Dooren, W., Verschaffel, L., & Onghema, P. (2003). Preservice teachers´ preferred strategies for solving arithmetic and algebra word problems. *Journal of Mathematics Teacher Education, 6,* 27-52.

Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l' apprentissage de l'algebre. *Articulo presentado en las Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des matematiques et de l' informatique,* 189-199, Paris: La Pensée Sauvage.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Récherches en Didactique des Mathématiques, 10*(23): 133-170.

Wagner, S., & Kieran, C. (1989). Research issues in the learning and teaching of algebra. *Reston,VA: National Council of Teachers of Mathematics, Hillsdale, NJ*: Lawrence Erlbaum.

Warren, E. (2006). Comparative mathematical language in the elementary school: A longitudinal study. *Educational Studies in Mathematics, 62*, 169-189.

Warren, E., & Cooper, T. J. (2001). Theory and practice: Developing an algebra syllabus for P-7. *Articulo presentado en The future of the Teaching and Learning of Algebra.Proceedings of the 12th ICMI Study Conference, Melbourne*: Australia.

Warren, E., & Cooper, T. J. (2005). Young children´s ability to use the balance strategy to solve for unknowns. *Mathematics Education Research Journal, 17*(1): 58-72.

Watanabe, T. (2008). Algebra in elementary school: A japanese perspective. In C. E. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics. Seventieth Yearbook*. Reston, VA: NCTM.

Weaver, C. A., & Kintsch, W. (1992). Enhancing students´ comprehension of the conceptual structure of algebra word problems. *Journal of Educational Psychology, 84*(4): 419-428.

Wenger, E. (1998). Communities of practice: Learning as a social system. *The Systems Thinker, 9/5*.

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D., y Lacasta, E. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de desigualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 27*(1): 77-120.

Williams, A. M., & Cooper, T. J. (2001). Moving from arithmetic to algebra under the time pressures of real classrooms. *Articulo presentado en Proceedings fo the 12th ICMI Study Conference*: The future of the Teaching and Learning of Algebra.

Wilson, S. M., Shulman, L. S., & Richert, A. E. (1987). 150 different ways' of knowing: Representations of Knowledge in teaching. In J. Calderhead (Ed.), *Exploring Teacher Thinking*, 104-124. London: Cassell.

Wong, N.Y. (2005). The positioning of algebraic topics in the Hong Kong elementary school mathematics curriculum. *Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematic, 37*(1): 23-33.

Wubbels, T., Korthagen, F., & Brokeman, H. (1997). Preparing teachers for realistic mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 32*(1): 1-28.

Yeap, B.-H., & Kaur, B. (2008). Elementary school students engaging in making generalization: A glimpse from a Singapore classroom. *Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematic, 40*(1): 55-64.

Yerushalmy, M., & Golead, S. (1999). Structure of constant rate word problems: A functional approach analysis. *Educational Studies in Mathematics, 39*, 185-203.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics, 49*, 379-402.

Zeichner, K. M., & Liston, D. P. (1987). Teaching student teachers to reflect. *Harward Educational Review, 57*, 23-48.