ANÁLISIS EPISTEMICO Y COGNITIVO DE TAREAS DE PROPORCIONALIDAD EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Mauro A. Rivas

Tesis doctoral

Director: Juan D. Godino

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

2013

RESUMEN

Esta investigación aborda la formación inicial de profesores de educación primaria sobre el razonamiento proporcional. El marco teórico y metodológico en el que se plantea y aborda el problema es el "enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática". Teniendo en cuenta la amplitud y complejidad del área problemática, la atención se centra en la faceta epistémica y cognitiva del conocimiento didáctico-matemático sobre la proporcionalidad en educación primaria. La investigación aplica y desarrolla una herramienta teórica para el análisis epistémico y cognitivo de los procesos de resolución de tareas matemáticas, que facilita el reconocimiento de los objetos matemáticos y significados a tener en cuenta en los procesos de enseñanza - aprendizaje.

Tras el estudio y sistematización de la bibliografía existente sobre razonamiento proporcional y formación de profesores, y de la descripción del marco teórico y metodológico, se presentan dos estudios empíricos con estudiantes. El primero de ellos es una exploración inicial del conocimiento del contenido sobre proporcionalidad de un grupo de 60 estudiantes de primer curso de Magisterio de la Facultad de Educación de la Universidad de Granada, que muestra las dificultades que tienen dichos estudiantes para distinguir y resolver situaciones de proporcionalidad, y la persistencia de tales dificultades tras un proceso formativo. Los resultados indican que el conocimiento matemático de los futuros profesores sobre proporcionalidad es desarticulado, y basado en aspectos parciales, que no terminan de integrarse en un conocimiento significativo sobre esa noción.

El segundo estudio diseñado para cumplir el objetivo central de la investigación explora el proceso de apropiación de la herramienta teórica "guía para el reconocimiento de objetos y significados" por parte de un grupo de 62 estudiante de segundo curso de Magisterio en el mismo contexto educativo. Con dicho fin se diseñó, implementó y evaluó una acción formativa centrada en el análisis epistémico de tareas de proporcionalidad propias de educación primaria. Los análisis epistémicos realizados por los profesores en formación son contrastados con los realizados por el equipo de investigación. Esto ha permitido concluir, por una parte, la utilidad de la herramienta

para desarrollar conocimiento especializado del contenido, y por otra, la complejidad del dominio instrumental de dicha herramienta.

AGRADECIMIENTOS

Debo comenzar reconociendo que el desarrollo de este trabajo ha contado con la contribución de varias instituciones y muchísimas personas. Seguramente la omisión no haga justicia a aquellos a quienes ahora no voy a referir. No obstante, quiero expresar mi más sincero agradecimiento a quienes me conocen y me acompañaron en esta compleja empresa y especialmente a quienes más directamente se involucraron en su realización.

Expreso mi total gratitud al Dr. Juan D. Godino, por ser mi tutor, por haber sido el arquitecto de esta construcción, he tratado de recoger en este documento lo que pude interpretar de su ingenio y capacidad para producir nuevas ideas, he intentado emular esa capacidad de trabajo incansable y esa preocupación por hacer las cosas bien y con calidad. Al lado de esas condiciones invalorables para hacer su trabajo académico, se encuentra su alta calidad humana; he tenido la oportunidad de conocer una excelente persona, con profunda convicción moral y permanente generosidad para compartir sus saberes y proveer de formación a quienes le acompañan.

A mi familia; mis padres, mis hermanos, mis suegros y mis cuñados, quienes siempre apoyaron esta iniciativa. Merecen mención aparte mi esposa Luz Sthella y mi hija Génesis, gracias a su amor, incondicional apoyo, sus acciones en el día a día, su comprensión y el aliento brindado en momentos difíciles, crearon condiciones que favorecieron la culminación de este trabajo.

A los profesores Carmen Batanero y Rafael Roa por su apoyo y orientaciones, quienes no tuvieron ningún escatimo en colaborar con el desarrollo de la investigación.

A los profesores del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada: Luis Rico, Pablo Flores, Enrique Castro, Isidoro Segovia, Francisco Fernández, Encarnación Castro y Moisés Coriat, por proveerme de información relevante, actual y pertinente en torno a la educación matemática y por haberme dado la oportunidad de aprender sobre sus conocimientos y experiencias.

Al profesor Joao Pedro Da Ponte, quien con su visión sobre la formación de futuros profesores fomentó parte importante de las rutas que se han recorrido en el desarrollo de este trabajo.

En general, debo hacer un debido reconocimiento a la Universidad de Granada, por acogerme como estudiante de doctorado y proveer de los recursos y espacios: aulas, bibliotecas, oficinas, lugares en los que se dieron las actividades relativas a la realización de este trabajo.

A mis amigos y compañeros de doctorado; Walter, Patricia, Agustín, Luis, Lilia, quienes con sus comentarios y observaciones ayudaron a tener otras perspectivas sobre el informe que se presenta. Especialmente a Walter y Patricia. Walter, más que un compañero, fue un amigo con quien tuve oportunidad de compartir buena parte de las experiencias reportadas en este trabajo, quien sin restricciones expresó sus opiniones e hizo aportaciones importantes provenientes de su dedicación y preocupación por el estudio de la educación matemática. A Patricia, mi amiga, debo el tiempo y esfuerzo dedicado a la revisión de varios de los escritos iniciales, y las observaciones y contribuciones que muy acertadamente realizó para el avance de la investigación que aquí se informa.

A mis amigos de Granada Rogelio, Teresa, Samuel, Paco y Ana a quienes considero parte de mi familia, gracias por sus atenciones, por hacer de Granada un lugar agradable, en el que se cuenta con personas que emanan aprecio y estima por quienes le rodean.

A la Universidad de Los Andes de Mérida, Venezuela, quien aportó los recursos económicos requeridos para la realización de estudios doctorales en la Universidad de Granada, España, por medio del programa de formación de profesores, dirigido a este tipo de actividades. Para ese programa vayan mis deseos de larga vida y fortalecimiento para que siga contribuyendo con la formación de profesores de nuestra universidad.

A la facultad de Humanidades y Educación de la Universidad de Los Andes, a sus autoridades, quienes sin menoscabo han brindado el apoyo necesario para llevar a feliz término el programa de doctorado del cual este informe es uno de sus productos esenciales.

A mis compañeros de trabajo: Nolberto Dugarte, Carlos Dávila, Yazmary Rondón, Jonathan Linares, Reinaldo Cadenas, quienes apoyaron esta iniciativa, especialmente aquellos quienes colaboraron asumiendo responsabilidades directas y proveyeron del tiempo requerido para la conclusión de este trabajo.

TABLA DE CONTENIDOS

LISTA DE TABLAS

Pág.

LISTA DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

La importancia del razonamiento proporcional en el ámbito escolar se puede observar considerando básicamente dos aspectos: el primero porque ésta forma de razonamiento constituye la base de un adecuado desenvolvimiento de la persona en actuaciones comunes de la vida diaria (por ejemplo, considerar la relación precio/peso o precio/número de piezas para elegir un producto), el segundo porque representa el fundamento de diversos contenidos científicos del currículo escolar (por ejemplo, la resolución de problemas de valor faltante[1] proporcionales, de comparación, de porcentajes, de escala,…), y otros correspondientes a niveles avanzados de la instrucción (Lamon, 2005; Lesh, Post y Berh, 1988). A pesar de ello, sigue siendo una compromiso sin satisfacer por parte de la escuela, lograr que el sujeto construya-adquiera un desarrollo adecuado de este tipo de razonamiento (Cramer, Post y Currier, 1993; Godino y Batanero, 2004; Hoffer, 1988; Lamon, 2007).

Si consideramos esta forma de razonamiento como una actividad de índole cognitiva, puesta en juego al resolver problemas relativos a la proporcionalidad, diremos que su estudio debería restringirse a lo meramente psicológico. No obstante, deben reconocerse aspectos que entran en juego, cuyas características, proveen al estudio del razonamiento proporcional una entidad propia y determinada. Encontramos, al menos, los siguientes aspectos: (a) epistémicos, propios del contenido matemático relativo a la proporcionalidad, (b) instruccionales-mediacionales, relativos a la enseñanza-aprendizaje como fenómeno que puede iniciarse-gestionarse por la relación del profesor/alumno/proporcionalidad en el aula de clase, haciendo uso de medios y recursos pertinentes, (c) ecológicos, relativos a las interacciones del sujeto con el ambiente que le rodea, de las condiciones contextuales en que se desenvuelve, pero al mismo tiempo, las relaciones entre esas interacciones y esas condiciones con los tipos de situaciones que se gestionen para el aprendizaje de la proporcionalidad.

El reconocimiento de los aspectos descritos en el párrafo anterior, nos sitúa en una perspectiva didáctico-matemática sobre el estudio del razonamiento proporcional, que

[1] Utilizamos la expresión ―problema de valor faltante" para traducir del inglés la nominación ―missing value problem".

utilizaremos como marco teórico y de reflexión en el desarrollo de nuestro estudio. Es así, como concebimos el razonamiento proporcional como un constructo teórico, cuyo estudio comprende diferentes facetas, a saber: epistémica, cognitiva, instruccional-mediacional y ecológica. Desde esta perspectiva didáctico-matemática, observando la problemática general de referencia acerca de la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad, nos dirigimos a describir la manifestación y desarrollo de un proceso de formación de futuros profesores de primaria, que pretende hacerlos capaces de realizar análisis didácticos en torno a la resolución de problemas matemáticos y desarrollar conocimientos matemáticos necesarios para la enseñanza de la proporcionalidad. Lo cual pretende, como objetivo final, desarrollar en los futuros profesores conocimiento matemático necesario para la enseñanza de este tema.

Al observar la literatura especializada, desde la perspectiva referida, es posible reconocer una considerable diversidad de estudios realizados. Si utilizamos la instrucción como aspecto central, existen estudios que se han hecho previos a procesos de instrucción, durante procesos de instrucción y posteriores a procesos de instrucción. Si consideramos los niveles educativos como criterio, podemos identificar estudios en todos los niveles: primaria, secundaria y universitario. Sin embargo, la mayor concentración de estos estudios tiene lugar en la observación de los efectos asociados a la instrucción en educación media (lo que se denomina en inglés “middle school”), el cual es un nivel educativo que se ubica al final de la educación primaria e inicios de la educación secundaria. En este orden de ideas, lo referente a la formación inicial de profesores se observa como uno de los ámbitos menos explorados.

Si consideramos los medios utilizados para la instrucción, observamos que la mayoría de las investigaciones se dirigen al estudio de los procesos de instrucción sin intervención, mayoritariamente como exploratorios o de diagnóstico. Es decir, la otra parte, en la que se encuentran, el uso de materiales con actividades y situaciones-problema novedosas, el uso de representaciones y el uso de nuevas tecnologías es la menos abordada.

En este sentido, nuestro estudio se inscribe en un proceso de investigación que se centra en el ámbito de formación de futuros profesores de educación primaria, y que comprende: (a) un diagnóstico inicial, (b) descripción de resultados de un proceso “natural” de formación, en torno a la proporcionalidad, de futuros profesores de primaria, y (c) un estudio sobre una intervención formativa basada en la aplicación de una herramienta de análisis epistémico/cognitivo de situaciones problemas, relativas a la proporcionalidad.

Esta investigación se plantea, como reto inicial, realizar un estudio sobre el “estado de la cuestión”, referido a la problemática del desarrollo del razonamiento proporcional en el ámbito de la educación matemática, observando sus implicaciones en el contexto particular de la formación de profesores. Se trata de identificar líneas de trabajo enmarcadas en los problemas actuales de la didáctica en torno al desarrollo del conocimiento del futuro profesor acerca del razonamiento proporcional.

Al emprender esta línea inicial de trabajo, nos encontramos con la necesidad de asumir una postura respecto al desarrollo que se ha venido presentando en las teorías dirigidas al estudio del *conocimiento del profesor*. Constructo que tiene sus raíces en el planteamiento hecho por Shulman (1986, 1987) y que ha encontrado un profundo y extenso eco en un considerable número de trabajos en las últimas tres décadas. La generalidad del planteamiento de Shulman ha tenido como forma particular, en el campo de la educación matemática, lo que se ha denominado *conocimiento matemático necesario para la enseñanza*. Uno de los principales grupos de investigación, que ha asumido un estudio sostenido de esta forma de conocimiento es el conformado por Ball y colaboradores, quienes, a partir de la propuesta de Shulman, han ido identificando y caracterizando algunas de las facetas que constituyen esta forma de conocimiento (Ball y Bass, 2003; Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008; Hill, Sleep, Lewis y Ball, 2007).

En este orden de ideas, se reconoce la existencia de un nutrido trabajo desarrollado por este grupo de investigadores, en la última década, encaminado a proveer de mayor precisión al reconocimiento de algunas de las facetas del conocimiento del profesor, necesario para enseñar matemáticas. En Hill, Ball y Schilling (2008), se identifican seis de estas facetas, siendo las de mayor interés para nuestro trabajo las referidas al *conocimiento común y especializado del contenido*, y el *conocimiento del contenido y de los estudiantes*. El trabajo desarrollado en torno a estas facetas del conocimiento matemático necesario para la enseñanza está teniendo un extenso eco en la comunidad de investigadores en educación matemática (Adler, 2009; Kotsopoulos y Lavigne, 2008; Sullivan, 2008a; 2008b).

Es necesario señalar que no pretendemos entrar en un estudio detallado de la problemática relativa al conocimiento del profesor, ni en la identificación de las diferentes propuestas que han surgido, encaminadas a explicar el tipo de conocimiento necesario para la enseñanza de la matemática. En el desarrollo de nuestro trabajo sólo presentamos una primera aproximación a lo que representa este vasto campo de conocimiento, con el fin de aproximarnos al desarrollo de algunas de sus facetas por medio de la intervención formativa antes referida.

En este orden de ideas, Godino (2009) propone una forma de operacionalización del conocimiento del profesor, específicamente del conocimiento matemático necesario para la enseñanza, en las diferentes facetas propuestas por Ball y colaboradores (Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008). De acuerdo con Godino el desarrollo del conocimiento matemático necesario para enseñar se encuentra vinculado con el desarrollo de herramientas de análisis didáctico basadas en el Enfoque Onto-Semiótico (EOS), (Godino, Batanero y Font, 2007).

Particularmente, en la línea propuesta por el EOS, Godino y colaboradores han desarrollado una herramienta de análisis epistémico/cognitivo denominada ―Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados" (GROS) (Godino, Rivas, Castro y Konic, 2008a; 2008b), que consiste en: (a) la identificación de objetos matemáticos y los significados de referencia o uso, dados a los mismos en el enunciado y durante la resolución de una situación problema matemática específica, y (b) la identificación de posibles conflictos de significado que pueden manifestarse en tal proceso de resolución.

El uso de la GROS se inscribe en la línea de investigación del análisis didáctico (Font, Planas y Godino, 2010; Godino, 2009), el cual comprende básicamente aspectos de las prácticas matemáticas en un contexto de enseñanza, relativos a los dos primeros niveles del análisis didáctico propuesto por Godino y colaboradores. Específicamente, en términos del modelo de análisis didáctico descrito por Godino (2009, pp. 20-22), esta herramienta se inscribe en el estudio de la faceta epistémica, proveyendo de indicios sobre posibles manifestaciones relativas a la faceta cognitiva, por medio de la formulación de conflictos potenciales, cuya manifestación se puede hacer presente en la práctica del estudiante.

El desarrollo de estas prácticas tiene lugar en un proceso formativo de futuros profesores de primaria, en el que se ha utilizado, como indicador fundamental, el desarrollo de competencias de análisis didáctico, las cuales refieren, específicamente, a las acciones involucradas en la puesta en juego de un estudio del proceso de significación desarrollado en torno a la resolución de problemas de proporcionalidad a nivel de 6º curso de primaria. El estudio de ese proceso de significación, en este contexto, refiere al reconocimiento de objetos y significados matemáticos activados en la resolución de un problema de la matemática escolar, es decir, la aplicación de la GROS.

El uso de esta herramienta se viene consolidando por medio de su aplicación en el estudio de la formación de futuros profesores, cuyos resultados han sido objeto de documentos publicados en revistas y eventos académicos y científicos (Castro y Godino, 2009 Castro, Godino y Rivas, 2011; Godino et al., 2008a; 2008b; 2008c; Konic, Godino y Rivas, 2010; Rivas y Godino, 2010; Rivas, Godino y Castro, 2012; Rivas, Godino y Konic, 2009). Estos estudios dan cuenta de la potencialidad de la GROS para el desarrollo del conocimiento matemático necesario para la enseñanza en tres de sus diferentes tipos o facetas, a saber: (a) conocimiento común del contenido, (b) conocimiento especializado del contenido, y (c) conocimiento del contenido y de los estudiantes[2].

En el contexto del desarrollo del trabajo de investigación reportado en el presente informe, el uso de esta herramienta es observado en dos tipos de prácticas:

(a) A nivel del formador, con la participación de un grupo de investigadores noveles, en la producción de análisis epistémicos expertos, los cuales son utilizados en cuatro sentidos; (i) como herramienta que coadyuva en la actuación del formador al permitir la identificación previa de posibles conflictos de significados, en la resolución de una tarea matemática específica, (ii) en la producción de posibles categorías de respuestas en torno a una resolución de un problema matemático particular, (iii) en la identificación de elementos matemáticos-didácticos relevantes, asociados a la producción de conocimiento

[2] En el apartado 2.3 del capítulo 2, presentamos una descripción de estas facetas del conocimiento del profesor.

especializado del contenido, y (iv) como referente para la valoración de los análisis epistémicos producidos por una muestra de futuros profesores.

(b) A nivel de futuros profesores, como herramienta para desarrollar competencias de análisis didáctico (en la faceta epistémica) de futuros profesores, y el conocimiento necesario para la enseñanza de la proporcionalidad a nivel de 6º curso de primaria.

Así, en este trabajo, reportamos los resultados obtenidos mediante la aplicación de la GROS, relativos al desarrollo de competencias de análisis didáctico, en su faceta epistémica, y de algunas de las facetas del conocimiento necesario para la enseñanza de la matemática, en el contexto de la formación de futuros profesores, al considerar la proporcionalidad de 6º curso de primaria como contenido matemático.

Origen y motivación de la investigación

El razonamiento proporcional constituye uno de los ocho esquemas del razonamiento formal expuestos por Piaget y colaboradores (Inhelder y Piaget, 1966). En trabajos precedentes (Rivas, 1998; 1999), resultados de un estudio de maestría en matemática, abordamos la revisión de la relación entre el nivel de desarrollo formal, el rendimiento escolar y otros factores de índole social y demográfica, en alumnos que inician la educación secundaria. Los resultados relativos al razonamiento proporcional, indicaron un bajo desarrollo de este tipo de razonamiento.

En la literatura sobre este tema, encontramos estudios que, en diferentes momentos, reseñan el desarrollo del razonamiento proporcional como un fin educacional complejo y que buena parte de los adultos no lo logran (Allain, 2000; Cramer, Post y Currier, 1993; Lawson, 1982; Lo y Watanabe, 1997; Olhson, 1988). Más recientemente, los resultados observados en las pruebas PISA, indican que el desempeño de los alumnos, al resolver problemas que involucran el uso del razonamiento proporcional, es limitado (OECD, 2004). En consonancia con estos resultados, se ha fomentado nuestra preocupación sobre el problema de minimizar el efecto negativo del factor enseñanza en el logro del desarrollo de un razonamiento proporcional adecuado, lo cual nos ha conducido a continuar realizando investigación sobre esta temática.

Por otra parte, nuestro trabajo profesional se ha desarrollado en el ámbito de la formación de profesores. Buena parte de ese desarrollo ha tenido lugar en la formación de profesores de matemáticas. En este orden de ideas, debemos reseñar que diversos estudios realizados con estudiantes universitarios (BenChaim, Keret e Ilany, 2007; Berk, Taber, Gorowara y Poetzl, 2009; Kolodiy, 1975; Lawson y Snitgen, 1982; Niaz, 1989; Vass, Schiller y Nappi, 2000) convergen al señalar que estos estudiantes muestran un desempeño deficiente al resolver problemas que involucran el razonamiento proporcional. El trabajo de Vass, Schiller y Nappi (2000) es realizado mayoritariamente con futuros profesores y los trabajos de BenChaim, Keret e Ilany (2007); Berk et al. (2009); Lawson y Snitgen (1982), son realizados exclusivamente con futuros profesores.

La simbiosis de la problemática relativa al desarrollo del razonamiento proporcional y la formación de profesores da lugar a nuestra preocupación por estudiar cómo desarrollar el conocimiento del futuro profesor para enseñar con pertinencia lo relativo a la proporcionalidad a nivel de 6º curso de primaria.

Ante esta cuestión, observamos, desde el desarrollo de herramientas que vienen gestándose en el marco del EOS, una preocupación por caracterizar qué conocimiento se pone en juego al resolver un problema matemático escolar. Esta preocupación nos ha dirigido a reconocer la identificación de objetos y significados, activados al resolver un problema tal, como una tarea esclarecedora sobre los conocimientos puestos en juego en la resolución de un problema. El proceso que tiene lugar en esa identificación involucra el desarrollo de un conocimiento y una reflexión de interés didáctico-matemático que encamina hacia el reconocimiento de elementos inmersos en el problema de la enseñanza y aprendizaje de la matemática implicada.

En este orden de ideas, hemos considerado pertinente el uso de herramientas de reconocimiento de objetos y significados, en torno a la resolución de problemas que involucran el razonamiento proporcional, como una tarea en la que se conjugan los elementos de la simbiosis (razonamiento proporcional/formación de futuros profesores) antes referida, dando oportunidad al desarrollo de experiencias formativas que aproximan al futuro profesor a reconocer más profundamente la complejidad implicada en la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad. La reflexión y toma de conciencia relativa a ese reconocimiento puede actuar como elemento generador de acciones dirigidas a enseñar con pertinencia lo relativo a la proporcionalidad a nivel de 6º curso de primaria.

Pertinencia de la investigación

Posicionados desde una perspectiva general, se pueden identificar cuatro grandes momentos que han determinado el desarrollo de la producción de conocimiento, en torno a la problemática de la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad. El *primer momento* lo podemos situar, tomando como referencia lo expuesto por Bosch (1994), en una enseñanza clásica de la proporcionalidad, en la que se trataba de reproducir en la escuela el legado matemático proveniente sobre todo de la matemática griega, en la que una proporción era interpretada desde una posición formalista y lo aritmético una aplicación particular de reglas generales alrededor de la expresión: *a : b :: c : d*. Desde este enfoque, la proporcionalidad gozaba de un aparato teórico que le proveía de personalidad propia, prácticamente desvinculada de las fracciones y con un álgebra que se fundaba sobre reglas propias de la proporcionalidad, lo que denomina Bosch (1994) el “álgebra de las proporciones”.

Un *segundo momento* lo ubicamos cuando se produce la evolución del álgebra (a finales del siglo XVII), específicamente lo relativo al desarrollo de la teoría de funciones, con la cual se inicia una nueva interpretación de la proporcionalidad, como función lineal.

Este segundo momento va a determinar cambios importantes en lo que será el desarrollo de la enseñanza de la proporcionalidad, se inicia el uso de lo que denomina Bosch “modelos algebroides” (Bosch, 1994) para la resolución de problemas relativos a la proporcionalidad, que luego conducen a la identificación de una razón con una fracción, perdiéndose, de acuerdo con Freudenthal (1983), buena parte de la identidad propia de la proporcionalidad. La proporción *a : b :: c : d* pasa a ser interpretada como una igualdad entre fracciones y en la resolución de problemas del tipo a/b = c/x, las reglas de la proporcionalidad son sustituidas por reglas aritmético-algebraicas de resolución de ecuaciones, dando lugar a algoritmos del tipo “producto cruzado” o “regla de tres”.

Con la llegada de estas nuevas técnicas de resolución de problemas de proporcionalidad, además de la pérdida generada sobre la identidad de la proporcionalidad, desde el punto de vista educativo se produce el fenómeno en el cual es posible realizar la resolución de problemas proporcionales sin que ello amerite una comprensión en sí de lo que es la proporcionalidad. Es decir, con una noción proveniente del lenguaje común de lo que es una proporción y el uso mecánico de una regla (producto cruzado o regla de tres) era suficiente para resolver problemas proporcionales.

Simultáneamente a estos hechos, pero desde el campo de la psicología, nos llega el *tercer momento*, marcado por los estudios de Piaget y Vygotski (Inhelder y Piaget, 1996; Vygotski, 2000). Los estudios de Piaget y Vigotsky, sobre el desarrollo intelectual de la persona, promovieron una revisión sobre lo que se estaba haciendo en la escuela en dos direcciones: (a) la pertinencia de las exigencias cognitivas demandadas a los niños en las diferentes etapas de su desarrollo, al tiempo que, (b) generó una reflexión sobre qué estaba haciendo la escuela para fomentar ese desarrollo. En particular nos interesa esta segunda dirección, la cual, ajustada a nuestros intereses, permite reformular la cuestión diciendo: ¿qué estaba haciendo la escuela para desarrollar el razonamiento proporcional de los alumnos?

La respuesta a esta cuestión es lo que marca el *cuarto momento*, pues es a partir de ella cuando se genera un gran movimiento alrededor de la enseñanza de la matemática, en la que se concibe que ésta ―debe ser enseñada para que sea comprendida”, lo cual en términos originarios, de la lengua inglesa de este movimiento, se escribe: ―Mathematics teaching for understanding”. Esto ha implicado la propuesta de una larga y lenta transformación de la enseñanza, particularmente lo concerniente a la enseñanza de la proporcionalidad.

Cuando hablamos de larga y lenta transformación referimos a que se tiene aproximadamente más de tres décadas de este movimiento y aún en buena parte de las escuelas se sigue realizando la enseñanza de la proporcionalidad sin que en ella medie el desarrollo del razonamiento proporcional. Entre algunas de las características de ese principio del aprendizaje matemático encontramos: ―Aprender con comprensión es esencial para hacer capaces a los alumnos de resolver los nuevos tipos de problemas a los cuales ellos inevitablemente tendrán que enfrentarse en el futuro” (NCTM, 2000; p. 21). Lo más preocupante se presenta cuando el mismo profesor no ha llegado a alcanzar niveles adecuados en esta forma de razonamiento (Ben-Chaim, Keret e Ilany, 2007; Berk et al., 2009; Cai y Wang, 2006).

En esta amplia panorámica, situamos la pertinencia de nuestra investigación, la cual persigue, como fin último, facilitar procesos de formación que aproximen a futuros profesores a adquirir conocimientos necesarios para realizar, de manera pertinente, una actividad de enseñanza dirigida al desarrollo del razonamiento proporcional en futuros alumnos, requerido para que los alumnos aprendan las matemáticas de manera comprensiva.

Presentación

La comunidad de investigadores en educación matemática es un espacio que se nutre cada día más con el arribo de nuevos investigadores, cuya inclusión puede proceder de diferentes vías, generalmente caracterizadas por la producción de escritos publicados en los órganos de difusión científica. Las iniciativas que sirven de sustento a dicha comunidad son de diferente índole: institucionales, individuales/grupales, de diversos enfoques o perspectivas, de múltiples temáticas, de estilos y métodos de investigación diferentes.

Una de las iniciativas cuya institucionalidad garantiza una producción permanente para dicha comunidad son los estudios doctorales. Los estudios de doctorado constituyen, a todas luces, la inscripción de quien los realiza en una comunidad de investigación. Es, posiblemente, esta la vía más expedita que permite involucrar cada día más personas en tareas de investigación. Si bien, la ruta que conduce a ese involucramiento puede estar precedida de otros estudios (diplomados, especialización, másteres), son los estudios doctorales los que generalmente dan mayor pertinencia a tal comunidad.

La trayectoria descrita anteriormente, que permite la inclusión de nuevos miembros en una comunidad de investigación, es la que ha servido al autor del presente trabajo. Es decir, la realización del estudio doctoral, del cual el presente trabajo es uno de los productos fundamentales, es la que ha permitido a su autor involucrarse de manera más pertinente en la comunidad de investigación de educación matemática. En efecto, la realización del doctorado en didáctica de la matemática ha servido de espacio para producir una moderada cantidad de trabajos parciales de investigación, inscritos en el desarrollo de una investigación más general, cuyos resultados parciales (algunos de ellos) fueron publicados. La investigación más general a la que nos referimos, es, precisamente, el trabajo que ha conducido a la elaboración de esta tesis doctoral.

De manera que el presente trabajo constituye el momento de acoplamiento, ordenación y síntesis de varios de los estudios parciales realizados, informados y publicados en diversos medios de difusión e información científica, específicamente en revistas especializadas e indizadas, en eventos científicos específicos, nacionales e internacionales.

Una vez especificado el ámbito y la trayectoria global en la que se han desarrollado las acciones que han conducido a la elaboración del presente trabajo, debemos referirnos a algunos aspectos más particulares. En este sentido, nos referiremos a continuación al ambiente material, a la temática particular de la cual se ocupa y el marco teórico de referencia en que se basa.

En cuanto al *ambiente material*, este trabajo se desarrolla en el ámbito de la formación inicial de profesores, específicamente en el espacio de la formación de futuros maestros que desarrolla la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada. Tiene lugar con un grupo de estudiantes de la carrera de magisterio, durante dos cuatrimestres, de sus dos primeros años de estudio. En este trabajo tratamos de diagnosticar, describir e intervenir en ese proceso de formación, en el que participan, además del grupo de futuros profesores, el profesor formador (director del presente estudio) y varios investigadores colaboradores, uno de ellos autor del presente informe. Los materiales utilizados constituyen una conjunción de los habitualmente utilizados por los formadores de la carrera de magisterio de esa universidad, algunas modificaciones y ajustes de esos materiales[3] y la puesta en juego de herramientas de análisis epistémico/cognitivo de problemas y sus resoluciones, relativos a la proporcionalidad de 6º curso de primaria.

Este trabajo se inscribe en la *temática* del estudio de la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad, específicamente en la formación inicial de profesores, campo en el que se suele aplicar un eclecticismo teórico relativo al uso de diferentes teorías educativas, sobre la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad y el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático del futuro profesor de primaria. Particularmente nuestra investigación se orienta a la puesta en práctica de herramientas desarrolladas en el enfoque ontosemiótico (EOS), para el estudio, comprensión y desarrollo de

[3] Sobre esto informaremos en el apartado 3.8 del capítulo 3 de este informe.

conocimiento didáctico-matemático, en torno a la proporcionalidad, en la formación de futuros profesores de primaria.

Estructura de la tesis

Hemos organizado la información, que responde al desarrollo de lo que venimos exponiendo, en siete capítulos. En el primer capítulo presentamos lo que comúnmente se denomina el “estado de la cuestión”, en él exponemos lo relativo a la problemática de estudio, sus antecedentes, su evolución, realizando una breve descripción de algunas de las diferentes áreas y temas de investigación: tipos de problemas, estrategias de resolución, errores, dificultades y obstáculos, relación entre razón y fracción, razonamiento aditivo y multiplicativo, factores que afectan el desarrollo del razonamiento proporcional, lo relativo a propuestas curriculares, y la investigación en torno a la formación inicial de profesores y el razonamiento proporcional. La exposición que se realiza en ese capítulo trata de mostrar la complejidad implicada en el estudio del razonamiento proporcional en el ámbito educacional, la cual, aunque ocupa una extensa exposición sobre los aspectos indicados, deja sin abordar muchos otros aspectos referidos a esa problemática.

En el capítulo 2 presentamos lo relativo al marco teórico, en el cual exponemos algunos de los significados dados al constructo razonamiento proporcional desde diferentes perspectivas teóricas, organizadas de acuerdo con una de las propuestas del enfoque ontosemiótico. Exponemos en este capítulo una aproximación al estudio del conocimiento del profesor y la interpretación que hacemos sobre algunas de sus facetas desde la perspectiva de ese enfoque. Asimismo, presentamos la interpretación que hacemos de los términos “competencia” y “análisis didáctico”, en función del uso que se hace de los mismos en el desarrollo de este trabajo. Finalmente, presentamos una caracterización del razonamiento proporcional como producto de los estudios teóricos precedentes, referidos en los capítulos 1 y 2.

En el capítulo 3 referimos a la metodología que se ha seguido en el desarrollo del proceso de investigación implementado. Presentamos en primer lugar un modelo general de investigación, que comprende dos campos de acción en los cuales consideramos se encuentran inscritas la totalidad de las acciones que se realizan en este trabajo. En segundo lugar presentamos un diseño general de investigación en el que esquematizamos, de manera secuencial, esas acciones, proveyendo de una visión global del proceso que se sigue en el desarrollo de la investigación. Luego, como guías que conducen y conectan las distintas acciones, formulamos los objetivos tanto teóricos como empíricos. La parte empírica está caracterizada por la realización de tres estudios, dedicamos el resto del capítulo a especificar el contexto, el rol del investigador, los participantes y los instrumentos aplicados en estos tres estudios.

En este sentido, los estudios empíricos, reportados en este informe de investigación, fueron realizados con dos grupos de futuros profesores, que cursan la carrera de magisterio, durante el primer cuatrimestre, de los dos primeros años de esa carrera, en la Universidad de Granada. El dictado de dos asignaturas sirven de contexto curricular-material al desarrollo de las acciones realizadas: “Matemática y su Didáctica” (primer curso) y “Currículo de Matemáticas en Educación Primaria” (segundo curso). Los dos grupos de futuros profesores, refieren básicamente a los mismos estudiantes, cuyas variaciones se encuentran sujetas a que participen en las aplicaciones de los instrumentos respectivos.

En el capítulo 4 presentamos lo correspondiente al primer estudio empírico. Este primer estudio consistió en la realización de un diagnóstico relativo al conocimiento de la proporcionalidad de una muestra de futuros profesores que inician la carrera de magisterio. Ese diagnóstico se hizo por medio de la aplicación de un instrumento regularmente utilizado por el profesor formador para ese fin. La información de interés de este capítulo se encuentra en el uso de la GROS, como herramienta de análisis didáctico, en sus facetas epistémica y cognitiva, en torno a la resolución de problemas de proporcionalidad. El uso de la GROS se hace a nivel del formador; se trata de un estudio inicial de las configuraciones epistémicas y cognitivas, referidas a la proporcionalidad, en un contexto instruccional, y se observan posibles contribuciones a la práctica realizada por el formador.

En el capítulo 5 reportamos los resultados de la aplicación de un ítem de una prueba de control. El ítem considerado (entre otros ítems de la prueba de control) está dirigido a la valoración del posible progreso registrado por la muestra de futuros profesores, en cuanto a la adquisición de conocimientos sobre proporcionalidad, durante el primer cuatrimestre del primer año de la carrera de magisterio. El ítem en cuestión constituye, para efectos de nuestro trabajo, uno de los instrumentos de recogida de datos. En él se solicita la valoración de cuatro situaciones problemas en cuanto a la proporcionalidad o no-proporcionalidad de las mismas, y la resolución de aquellas que sean consideradas de proporcionalidad. La inclusión de este tipo de ítem se hizo tomando en cuenta algunos de los resultados observados en la aplicación de la prueba diagnóstico, informados en el capítulo anterior.

Antes de la aplicación del instrumento, se realizó un estudio previo de las configuraciones epistémicas/cognitivas, por medio del uso de la GROS, por parte del profesor formador y tres investigadores noveles, en el que se analizan algunas resoluciones de los problemas que constituyen el instrumento y se observan algunos resultados de ese uso en cuanto a la identificación de aspectos de interés didáctico-matemático (lingüísticos, conceptuales, procedimentales, proposicionales y argumentativos) relativos a la resoluciones de las cuatro situaciones problema incluidas en el instrumento. El estudio basado en el análisis epistémico/cognitivo constituye una actividad que nos aproxima a identificar aspectos relativos al conocimiento necesario para la enseñanza de la matemática.

Asimismo, se muestran en este quinto capítulo, los resultados de la realización de un análisis cognitivo de las respuestas dadas por los sujetos al instrumento. Ese análisis indica que no fue posible registrar el progreso esperado en cuanto a la adquisición de conocimientos sobre la proporcionalidad en los sujetos de la muestra.

En el capítulo 6 presentamos los resultados de dos estudios en los que se investiga sobre el desarrollo de competencias de análisis didáctico, en su faceta epistémica, por medio del uso de la GROS por parte de dos muestras de futuros profesores. Cada estudio se realiza siguiendo procedimientos similares, en la que participan prácticamente los mismos sujetos pero conformando grupos diferentes. Las situaciones problema en cada estudio son distintas; una refiere a un problema de valor faltante y la otra a un problema de comparación. Los análisis epistémicos realizados por los futuros profesores se hacen sobre las resoluciones de cada una de las situaciones problema consideradas.

Como tarea previa a la aplicación de los instrumentos se realizaron los análisis epistémicos de una resolución para cada problema, por parte del profesor formador y del grupo de investigadores noveles. Este análisis es considerado como el análisis experto, y es utilizado como referente para valorar los realizados por los futuros profesores. Las valoraciones se hacen sobre la base de comparaciones de los análisis respectivos y sobre el reconocimiento de elementos matemático-didácticos relevantes por medio del uso de la GROS. Tales valoraciones permiten obtener información sobre las manifestaciones de competencias de análisis didáctico exhibidas por la muestra de futuros profesores.

En el capítulo 7 presentamos la síntesis y conclusiones de la totalidad de la investigación realizada. Referimos en ese capítulo a lo logrado con nuestro trabajo en relación con las preguntas de investigación, los hallazgos y aportaciones y las cuestiones abiertas que consideramos pueden ser objeto de estudio como posible continuación de la investigación realizada.

CAPÍTULO 1

Área problemática antecedentes

1.1. Introducción

Nuestro trabajo se desarrolla en el contexto de la formación inicial de profesores de primaria, atendiendo específicamente al problema del desarrollo del razonamiento proporcional en dicho contexto. El estudio de los antecedentes de esta temática, particularmente lo relativo a la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad, nos ha dirigido a observar que tal temática se encuentra íntimamente relacionada con una variedad de aspectos, que aún cuando han sido ampliamente estudiados en la literatura especializada, en buena parte de ellos, persisten problemas relativos a diversos usos, interpretaciones e inconvenientes no resueltos, que obstaculizan la realización de procesos de enseñanza y aprendizaje efectivos, eficaces y eficientes.

En este sentido, nos hemos abocado a realizar una descripción sobre algunos de esos aspectos, que consideramos de interés, para desarrollar con pertinencia las siguientes acciones: (a) observar y describir el proceso de formación de un grupo de sujetos que se inician en la carrera de magisterio, para luego (b) intervenir con el uso de una herramienta de análisis, que pretende (c) desarrollar competencias didáctico-matemáticas relativas a la proporcionalidad.

Concretamente, con el fin de desarrollar ese conjunto de acciones (observar, describir, intervenir y desarrollar), encaminadas básicamente a aproximar a los futuros profesores a desarrollar conocimiento matemático necesario para la enseñanza en torno a la proporcionalidad, a nivel del 6º curso de primaria, hemos considerado pertinente y necesario describir lo relativo a esos –aspectos de interés”, ampliamente referidos en la literatura especializada, puesto que tal descripción nos provee de información pertinente para asesorar ese proceso de elaboración de manera adecuada. Asimismo, consideramos que lo relativo a la puesta en práctica de propuestas curriculares y experiencias de enseñanza, así como lo que refiere a la formación inicial de profesores, constituyen antecedentes relevantes para llevar a efecto las acciones antes referidas.

De manera que, para el desarrollo del presente capítulo, hemos tenido que extendernos posiblemente un poco más allá de lo que algunos podrían considerar apropiado.

Iniciamos este primer capítulo con una breve descripción de la problemática en torno a la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad. Luego presentamos, de manera muy resumida, cómo se ha venido desarrollando el estudio del razonamiento proporcional, los principales problemas abordados, a lo largo de las últimas cinco décadas. Seguidamente referimos a los aspectos de interés, relativos a la problemática de enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad. Concluimos este capítulo haciendo mención al desarrollo del conocimiento del profesor en la formación inicial de profesores, particularmente, en el apartado 1.14, presentamos lo referente al estudio de la proporcionalidad en ese ámbito de formación.

1.2. Descripción de la problemática

La enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad constituye un espacio de investigación de amplia extensión; lograr que los alumnos resuelvan problemas en los que la noción de proporcionalidad se encuentra involucrada, constituye una tarea inscrita dentro de una problemática para la cual no se ha encontrado aún solución. La tarea de enseñanza, cuya responsabilidad descansa en gran parte en manos del profesor, no parece haber alcanzado los niveles de suficiencia para garantizar ese aprendizaje. Aún cuando muchos estudios han abordado este asunto, la búsqueda de posibles soluciones a esta problemática aún continúa vigente.

Diversas investigaciones (Behr, Harel, Post y Lesh, 1992; Ben-Chaim, Fay, Fitzgerald, Benedetto, y Miller, 1998; Lo y Watanabe, 1997) convergen al señalar que los alumnos de 6º grado de primaria a 3º de educación secundaria presentan dificultades para resolver problemas que involucran el razonamiento proporcional, y, en correspondencia con este hecho, la tarea de los profesores para ayudar a sus alumnos a construir, consolidar y vincular esta forma de razonamiento no es fácil (Dole y Shield, 2008, p. 19).

Resultados similares han sido obtenidos en estudios realizados con alumnos de enseñanza elemental (1º a 5º grado) (Kenney, Lindquist y Heffernan, 2002; Kenny y Silver, 1997; Misailidou, y Williams, 2003b), así como también los mostrados por la aplicación de PISA 2009, los cuales señalan que tal dificultad es exhibida por alumnos de 15 años de edad, de los países de la OCDE[4]. Estos resultados nos conducen a reconocer esta problemática como un fenómeno que se manifiesta a lo largo de los diferentes cursos de primaria y secundaria.

Nuestro interés particular se centra en el estudio de esta problemática en el nivel de educación primaria, específicamente en el campo de formación inicial de futuros profesores que se desenvuelven en ese nivel educativo.

Ubicados en este campo de estudio observamos en la literatura especializada el reconocimiento de la necesidad de desarrollar procesos de formación adecuados, que faculten a los futuros profesionales de la docencia a ejercer su tarea de enseñanza de manera apropiada (Ben-Chaim et al., 1998; Ben-Chaim, Keret e Ilany, 2007; Ilany, Keret y Ben-Chaim, 2004; Sowder, Armstrong, Lamon, Simon, Sowder y Tompson, 1998).

En este orden de ideas, nuestro problema de estudio se inscribe en el desarrollo y descripción de una experiencia de formación inicial, encaminada a desarrollar conocimientos sobre la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad, en un grupo de futuros profesores de educación primaria, lo cual será observado por medio de las tareas realizadas por ese grupo en el contexto de los dos primeros cursos de su formación inicial como profesores.

Desde una perspectiva general, observamos que el estudio de la problemática sobre la enseñanza y a aprendizaje de la proporcionalidad, ha sido abordado de diversas maneras, desde distintas perspectivas, y con diferentes enfoques. Se trata en adelante, en el desarrollo de este primer capítulo, iniciar un estudio de la misma, señalar algunas de sus aproximaciones y explicitar diversos aspectos, dirigiendo la atención al contexto de

[4] En OECD (2010) se muestran los resultados de las repuestas de dos ítems, relativos al razonamiento proporcional, uno de nivel 1 y otro de nivel 4. Para el ítem de nivel 1 el 79,9% de los sujetos responden correctamente, mientras, para el ítem de nivel 4, sólo el 40,5% responde correctamente. Debe decirse que mientras el ítem de nivel 1 puede ―resolverse" utilizando un algoritmo de manera mecánica; para resolver el ítem de nivel 4, se requiere poner en juego un razonamiento proporcional.

la formación inicial de profesores de primaria, núcleo de interés de la presente investigación.

1.3. Desarrollo del razonamiento proporcional como espacio de investigación de la educación matemática

El estudio de la proporcionalidad constituye una actividad que data desde la antigüedad. Desde la llamada época dorada de los griegos (Eudoxio, Euclides y Apolonio) se conoce de la teoría de las proporciones; en el Libro V de los *Elementos*, Euclides trata sobre esta teoría. De acuerdo con Ben-Chaim, Keret e Ilany (2007) ―Las nociones de razón y proporción y sus aplicaciones en la resolución de problemas de la vida real aparece desde la antigüedad en el Papiro Matemático de Rhind (1600 A.C.)" (p. 334).

A partir del desarrollo de las teorías educativas, el estudio general de la teoría de las proporciones, viene siendo un espacio explorado por la educación matemática, dándose lugar a un campo de problemas que puede ser denominado: estudio de la problemática de la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad.

Situados en este campo específico de problemas, es decir, en el caracterizado por el estudio de la proporcionalidad desde el punto de vista didáctico, se reconoce como un campo sumamente amplio, que involucra no sólo los estudios en el ámbito de la educación matemática, sino también en el terreno de las ciencias naturales y físicas. En este contexto, existe un considerable número de estudios sobre la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad, asociadas generalmente al uso que se hace del razonamiento proporcional en la resolución de problemas propios de esas ciencias (Westrich y Berg, 2011).

Es menester precisar que la presente investigación está suscrita al ámbito de la educción matemática, donde se tiene conocimiento de una considerable cantidad de trabajos dirigidos al estudio de esa temática (Adjiage y Pluvinage, 2007; Litwiller y Bright, 2002). Adjiage y Pluvinage (2007) al referirse al estudio de la proporcionalidad en el contexto didáctico, señalan: ―Existe una enorme cantidad de investigaciones y recursos relacionados con este dominio." (p. 149).

Como ejemplo del desarrollo de iniciativas de investigación en torno a esta temática, cabe señalar el considerable trabajo realizado por un grupo de investigadores de las

Universidades de Minnesota, Purdue y California (San Diego), denominado ―The Rational Number Project". Este grupo de investigadores desarrolló, durante 23 años aproximadamente (1979-2002), un trabajo continuo y sostenido sobre la enseñanza y aprendizaje de los números racionales, en el que se incluye el estudio de la razón y la proporción como una de las líneas principales. Algunos de los productos de su investigación se encuentran disponibles en: http://www.cehd.umn.edu/rationalnumberproject/archive/default.html.

A continuación referiremos a algunos aspectos del desarrollo de este campo particular, haciendo mención específica a algunos de los problemas estudiados que nos aproximan a una caracterización del mismo.

1.3.1. Estudios y problemas iniciales: Piaget y colaboradores

Los estudios de Piaget y colaboradores sobre el razonamiento proporcional, encuentran su exposición más completa y sistemática en Inhelder y Piaget (1996), (publicado originalmente en francés en 1955) en este trabajo proponen la necesidad de un desarrollo secuencial de procesos cognitivos que dirigen a la construcción del razonamiento proporcional.

En otro trabajo, Piaget, Grize, Szeminska y Bang (1977), distinguen una forma de razonamiento pre-proporcional basado en una estrategia de compensación global, de naturaleza aditiva, que precede a estrategias multiplicativas. Esta forma de razonamiento pre-proporcional, en los términos propuestos por estos autores, ha sido objeto de estudio en diversos trabajos (Lamon, 1993; Lesh, Post y Behr, 1988; Misailidou y Williams, 2003a, entre otros).

Otro de los problemas de investigación en el ámbito del razonamiento proporcional, abordado en términos piagetianos, ha sido la existencia de un razonamiento proporcional cualitativo que precede al razonamiento proporcional cuantitativo (Inhelder y Piaget, 1996). Se plantea como problema de investigación didáctica la necesidad de buscar una secuencia de procesos cognitivos que permitan poner en relación ambas formas de razonamiento (cualitativo — cuantitativo) y con ello la consolidación del razonamiento proporcional. El estudio de las relaciones entre estas dos formas de razonamiento ha sido objeto de diversos trabajos (Allen, Moore y Dixon, 1992; Behr et al., 1992; Ruiz y Valdemoros, 2006).

Los planteamientos piagetianos sobre la búsqueda de esa secuencia de procesos cognitivos que condujera hacia la consolidación del razonamiento proporcional en la persona sirvieron para impulsar diversas investigaciones: Case (1979); Chapman (1975); Noelting (1980a, 1980b); Niaz (1988); Wollman, y Lawson (1978); entre otras, proponen estudios que buscan completar la propuesta de Piaget.

En los trabajos realizados por Karplus y colaboradores[5] (Karplus, Adi y Lawson, 1980; Karplus, Karplus, Formisano y Paulsen, 1977; Karplus, Karplus y Wollman, 1974; Karplus y Peterson, 1970) se reconoce el interés mostrado por la comunidad de investigadores de la época, décadas de los setenta y ochenta, por los planteamientos piagetianos: “Los investigadores en educación en muchos países han fijado directamente su atención en lo que Inhelder y Piaget (1996) han llamado *pensamiento formal*.” (Karplus, et al., 1977, p. 411).

Una de las contribuciones realizadas por Karplus y colaboradores, al estudio del razonamiento proporcional, basados en planteamientos piagetianos, refieren a la identificación de niveles en el razonamiento proporcional exhibidos por alumnos de educación media (Karplus, Adi y Lawson, 1980; Karplus, Karplus y Wollman, 1974; Karplus y Peterson, 1970). Los niveles de razonamiento proporcional propuestos por estos investigadores, serán utilizados como fundamento para identificar niveles de razonamiento proporcional en el desarrollo de uno de los estudios de nuestra investigación.

Si bien los estudios piagetianos tuvieron gran influencia sobre las investigaciones realizadas durante los años 60, 70 y parte de los ochenta, de acuerdo con Hart (1988), “Desde 1975 las investigaciones sobre razón y proporción se alejan de los fundamentos teóricos piagetianos y se dirigen hacia estudios más empíricos basados sobre cuestionamientos que surgen de sus resultados” (p. 202).

[5] Buena parte del trabajo de Karplus y colaboradores (27 artículos, 1962-1981) es recogido en un libro llamado "A love of discovery: science education, the second career of Robert Karplus", editado por Robert G. Fuller, en el año 2002 (Fuller, 2002). Una reseña de este libro y algunos detalles sobre su publicación pueden verse en la sección “Book Reviews” de la revista “American Journal of Physics”, realizada por Burciaga (2007). Nos interesa informar que en ese libro se presenta una serie de ocho artículos, relativos a la problemática de la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad, cuya vigencia está refrendada por estas recientes producciones en torno al trabajo de Karplus y colaboradores (Burciaga, 2007; Fuller, 2002).

El interés por el estudio del razonamiento proporcional durante los años precedentes a los noventa es recogido por Tourniaire y Pulos (1985), quienes presentan una reseña sobre las investigaciones realizadas durante los veinticinco años anteriores a la publicación de su trabajo. En el mismo refieren a trabajos llevados a efecto en los que se estudia la proporcionalidad desde diferentes perspectivas. El estudio presentado por estos autores, además de dar una idea de las dimensiones que había alcanzado la investigación sobre razonamiento proporcional, presenta una clasificación de los tipos de problemas que habían sido utilizados en las diferentes investigaciones, logrando caracterizar con tal clasificación una tipología de problemas (de la cual se hará una breve reseña más adelante), que informa de manera sucinta sobre el estado de la investigación relativa al tema, y se convierte de este modo en referencia para el desarrollo de posteriores investigaciones.

1.3.2. Estudios y problemas a finales del siglo XX

Luego del trabajo de Tourniaire y Pulos, y hasta finales del siglo XX continúan llevándose a efecto investigaciones sobre el razonamiento proporcional: Behr et al. (1992); Ben-Chaim, et al. (1998); Cramer y Post (1993a; 1993b); Hart (1988); Kaput y West (1994); Lamon (1993a; 1993b; 1995; 1996); Lesh, Post y Behr (1988); Lo y Watanabe (1997); Resnick y Singer (1993); Sowder et al. (1998), entre algunos de los más citados.

Los aportes fundamentales de este periodo se encuentran recogidos en tres libros y un handbook, a saber: Carpenter, Fennema y Romberg (Eds.) (1993); Grouws (Ed.) (1992); Harel y Confrey (Eds.) (1994), Hiebert y Behr (Eds.) (1988). En el cuarto de estos textos se encuentra el trabajo de Lesh, Post y Behr (1988) cuya cita es una constante en prácticamente todos los trabajos referidos a la problemática de la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad. Similar mención debe darse a los trabajos de Cramer y Post (1993a); Hart (1988); Kaput y West (1994), Lamon (1999)[6], cuya referencia aparece en buena parte de los estudios publicados. El impacto del trabajo de Lamon (1999) ha ameritado una reedición reciente, publicada en el año 2006.

[6] Este trabajo ha sido reeditado en 2006. En el desarrollo de nuestro trabajo referiremos a esa segunda edición. Asimismo en el apartado referencias presentamos los datos correspondientes a esa segunda edición.

Los temas alrededor de los cuales se desarrollan los estudios de este periodo corresponden a:

a. Efectos de cantidades continuas y discretas (Spinillo, y Bryant, 1999).

b. Elaboración de instrumentos para el diagnóstico y evaluación del razonamiento proporcional (Bart y Williams-Morris, 1990).

c. Estrategias utilizadas por escolares en la resolución de problemas de razón y proporción (Cramer y Post, 1993a; Lamon, 1993b; 1996; 1999; Lamon y Lesh, 1992; Mellar, 1991)

d. Estudio de las relaciones entre razonamiento proporcional cualitativo y cuantitativo (Allen, Moore, y Dixon,1992; Behr et al., 1992)

e. Evaluación del razonamiento proporcional en experiencias curriculares diferentes (Ben-Chaim, et al., 1998)

f. Factores contextuales que afectan el desempeño en problemas de proporcionalidad (Lawton,1993)

g. Formación de profesores, conocimiento matemático para enseñar la razón y la proporción (Thompson y Thompson, 1996; Thompson y Thompson, 1994)

h. Modelización funcional de la proporcionalidad, lo funcional y aritmético, la búsqueda de su articulación curricular (Bosch, 1994).

i. Propuestas teóricas que fundamentan el estudio del razonamiento proporcional en la educación (Behr et al., 1992; Hart, 1988; Lamon, 1995; Lesh, Post y Behr, 1988)

j. Relaciones del razonamiento proporcional y el campo conceptual de las estructuras multiplicativas (Lo y Watanabe, 1997; Kaput y West, 1994; Vergnaud, 1988)

k. Relaciones entre el razonamiento proporcional y los números racionales (Behr et al., 1992; Post, Cramer, Harel, Kieren y Lesh, 1998)

l. Uso de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad (Kaput, 1994; Kaput y Roschelle, 1998; Lesh, Post y Behr, 1988; Noss y Hoyles, 1996)

En relación con el uso de la tecnología, cabe hacer mención al trabajo desarrollado por Kaput a inicios de los años 90 (Kaput, 1994) al diseñar el software SimCalc[7]. En este sentido, la SRI International en la página web http://math.sri.com muestra los resultados de algunos estudios en el que se ha hecho uso de este programa.

James J. Kaput, Ph.D., de la Universidad de Massachusetts, Dartmouth,, diseñó el programa SimCalc con el fin de llevar a efecto uno de sus visionarios objetivos como lo es la ―democratización de las matemáticas de cambio" (Kaput, 1994), es decir, hacer que los conceptos de proporcionalidad, linealidad y tasa[8] de cambio, estuvieran al alcance de estudiantes de todas las culturas y procedencias demográficas. La producción del programa referido y su implementación en las aulas de clase ha generado la participación de diversos investigadores, quienes han producido un considerable número de trabajos, algunos de ellos pueden verse en http://math.sri.com/publications/SimCalcpubs_july%202010.pdf.

La referencia que hacemos al uso de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad se limita a breves comentarios acerca de su aparición. Este aspecto no será desarrollado en nuestro trabajo. Se presenta como información para que sea conocida por los futuros maestros en el transcurso de su formación.

Aún cuando no se ha pretendido ser exhaustivos, el listado de temas anterior refiere a la riqueza que ha venido adquiriendo, desde finales del siglo XX, el estudio del razonamiento proporcional como campo de investigación dentro de la educación matemática.

1.3.3. Estudios y problemas en la actualidad

En el siglo actual, se tiene información sobre diversas investigaciones realizadas sobre el razonamiento proporcional. Los temas alrededor de los cuales se han realizado algunas de estas investigaciones refieren a:

a. Análisis de textos (Dole y Shield, 2008).

[7] El software SimCalc MathWorlds™ es un programa informático, que realiza manipulaciones de cálculos y gráficos relativos a situaciones de proporcionalidad. Versiones de este producto pueden ser obtenidas en la Universidad de Massachusetts, Dartmout, por medio del sitio web: http://www.simcalc.umassd.edu.

[8] Utilizaremos el término tasa para traducir del inglés el término ―rate"

b. Efectos de cantidades continuas y discretas (Boyer, Levine, y Huttenlocher, 2008; Fernández y Llinares, 2011; Jeong, Levine, y Huttenlocher, 2007).

c. Estrategias utilizadas por escolares al resolver problemas de proporcionalidad, más específicamente las relativas a los errores que comenten los alumnos (Kenney, Lindquist y Heffernan, 2002; Koellner-Clark y Lesh, 2003; Lannin, Barker y Townsend, 2007).

d. Estudio de las relaciones entre razonamiento proporcional cualitativo y cuantitativo (Díaz de León, Soto Mayorga y Martínez Sánchez, 2007; Ruiz y Valdemoros, 2006).

e. Evaluación del razonamiento proporcional en experiencias curriculares diferentes, efectos de los procesos de instrucción (Adjiage y Pluvinage, 2007; Ben-Chaim, Keret e Ilany, 2007; Vass, Schiller, y Nappi, 2000).

f. Elaboración de instrumentos para la medición y diagnóstico del razonamiento proporcional (Allain, 2000; Baxter y Junker, 2001; Misailaidou y Williams, 2003).

g. Factores contextuales que afectan el desempeño en problemas de proporcionalidad; los efectos de las variables de las tareas (Alatorre y Figueras, 2005; Smith, 2002, Peled y Bassan-Cincinatus, 2005; Steinthorsdottir, 2006).

h. Formación de profesores; el conocimiento pedagógico del contenido en maestros en formación, estrategias utilizadas en la resolución de problemas (Ben-Chaim, Keret e Ilany, 2007; Berk, Taber, Gorowara y Poetzl, 2009; Cai y Wang, 2006; Rivas, 2009, Rivas y Godino, 2010; Valverde, 2008).

i. Identificación de niveles en el razonamiento proporcional (Khoury, 2002; Steinthorsdottir, 2005).

j. Modelización funcional de la proporcionalidad, lo funcional y aritmético, la búsqueda de su articulación curricular (Bolea, Bosch y Gascón, 2001; García, 2005; García, Bosch, Gascón y Ruiz, 2007; Ohtani, 2009).

k. Propuestas teóricas que fundamentan el estudio del razonamiento proporcional en la educación (Kilpatrick, Swafford, y Findell, 2001; Lamon, 2007; Smith, 2002).

l. Relaciones del razonamiento proporcional y el desarrollo de estructuras multiplicativas (Fernández, Llinares, Van Dooren, De Bock y Verschaffel, 2010; Fernández y Llinares, 2011; Kenney, Lindquist y Heffernan, 2002; Norton, 2005).

m. Relaciones entre escala, superficie, volumen y razonamiento proporcional (Taylor y Jones, 2009).

n. Relaciones entre el razonamiento proporcional y los números racionales (Clark, Berenson y Cavey, 2003; Confrey, Maloney, Nguyen, Mojica y Myers, 2009; Lamon, 2007; Nabors, 2003; Davis, 2003).

o. Uso de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad (Hegedus, Kaput y Lesh, 2007; Nabors, 2002; Norton, 2006; Roschelle, Knudsen y Hegedus, 2010; Roschelle, Shechtman, Tatar, Hegedus, Hopkins, Empson, Knudsen y Gallagher, 2010; Ruiz y Lupiáñez, 2010; Silvestre y Ponte, 2008).

En buena parte de los casos estos temas son transversales y constituyen aspectos comunes de diferentes investigaciones. Por ejemplo, en la página web de la SRI International (http://www.sri.com/) se pueden ver algunos de los trabajos dirigidos al estudio de la potencialidad del programa SimCalc para fomentar un aprendizaje de la proporcionalidad más allá de procedimientos algorítmicos como los del tipo ―producto cruzado”. Pero, al mismo tiempo, algunos estudios consideran la manifestación de variables referidas al profesor; tales como: el conocimiento matemático para enseñar, sus actitudes y experiencia profesional, así como también, variables referidas a los alumnos (Roschelle et al., 2010).

Por otro lado, existen trabajos como el realizado por Lamon (2007) que constituyen estudios de especial importancia, en los que se sintetizan buena parte de los avances logrados sobre la enseñanza y aprendizajes de la proporcionalidad, reseñando aspectos de interés para futuras investigaciones.

En relación con las temáticas antes referidas, queremos centrarnos en una temática más específica, como lo es el de la formación de profesores en relación con el razonamiento proporcional. Este tema se presenta como uno de los menos explorados (Person, Berenson y Greenspon, 2004). No obstante, los trabajos consultados (Ben-Chaim, Keret e Ilany, 2007; Berk, et al., 2009; Ilany, Ben-Chaim, y Keret, 2004; Lo, 2004; Sowder et al., 1998; Tompson y Tompson, 1994, 1996) convergen al señalar la necesidad de llevar a efecto actividades de investigación y desarrollo en el mismo. Este hecho es considerado como uno de los aspectos impulsores de la investigación desarrollada, de la cual se informa en esta tesis.

1.4. Aproximaciones al razonamiento proporcional. Áreas y temas de investigación

Los enfoques y aproximaciones al estudio del razonamiento proporcional han sido muy diversos. En el apartado 1.3 de este capítulo tuvimos oportunidad de ver una muestra de los diversos temas que se han venido estudiando y algunos de los trabajos de investigación que se han venido realizando. Colocarse en el estado actual de la temática relativa a la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad, en la que se trate de abarcar todos estos temas, aún cuando otros no han sido ni siquiera mencionados, es una empresa bastante onerosa.

En este orden de ideas, estamos conscientes que una referencia detallada a cada uno de los estudios antes referidos, está fuera de los objetivos del presente trabajo. En consecuencia, con el objeto de centrarnos en algunos de los aspectos de interés de nuestro trabajo, presentamos a continuación una breve reseña sobre algunos de los temas que han sido tratados desde varios enfoques y aproximaciones.

Es así como hemos convenido, desde una perspectiva signada por lo didáctico, identificar aspectos de interés para el desarrollo de un proceso de formación de futuros profesores de primaria, que consideramos relevantes para desarrollar conocimiento matemático necesario para la enseñanza de la proporcionalidad, en el contexto de formación de futuros profesores. En este orden de ideas, consideramos como aspectos sintetizadores de la problemática referida en el contexto aquí descrito, los siguientes:

a) De lo intuitivo a lo formal, como elementos del desarrollo del razonamiento proporcional (Behr et al., 1992; Inhelder y Piaget, 1996; Koellner-Clark y Lesh, 2003; Ruiz y Valdemoros, 2006; Smith, 2001; Streefland, 1984; 1985).

b) Los tipos de problemas, cuya variedad constituye uno de los aspectos de la complejidad involucrada en el estudio del razonamiento proporcional (Cramer y Post, 1993a; Harel y Behr, 1989; Kilpatrick, Swafford, y Findell, 2001, Lamón, 2007; Tourniaire y Pulos, 1985).

c) Estrategias de resolución, cuyos análisis pretenden allanar el camino hacia la construcción-descubrimiento del conocimiento didáctico-matemático necesario para la enseñanza y aprendizaje de este tópico (Hill, Ball y Schilling, 2008; Sullivan, 2008). Estos análisis generalmente puestos en juego para reconocer aspectos de índole lingüística-representacional, conceptual y procedimental que tienen lugar en los procesos de resolución (Cramer y Post, 1993a; Harel y Behr, 1989; Hart, 1984; Karplus, Pulos y Stage, 1983b; Lamon, 2007; Noelting, 1980b; Vergnaud, 1983; 1988).

d) Estudio de los errores, las dificultades y los obstáculos; que constituye una de las vías para observar manifestaciones de procesos cognitivos, formas de razonamiento o configuraciones personales, generalmente asociados a conflictos de significado, puestos en juego por los sujetos (Adjiage, 2005; Alatorre y Figueras, 2003; Cramer y Post, 1993a; Lamon, 1995; Lannin, Barker y Townsend, 2007; Li, 2006; Modestou y Gagatsi, 2007; Rico, 1992).

e) Razón y proporción y su relación con los números racionales, en la que se observa la identificación de la razón con una fracción, como una reducción del concepto de razón, y la proporción como una equivalencia entre fracciones (Block, 2001; Clark, Berenson y Cavey, 2003; Confrey et al., 2009; Freudenthal, 1983; Norton, 2005).

f) El razonamiento aditivo y multiplicativo, relaciones e implicaciones en el aprendizaje de la razón y la proporción (Fernández et al., 2010; Fernández y Llinares, 2011; Kenney, Lindquist y Heffernan, 2002; Norton, 2005)

g) Factores que afectan el razonamiento proporcional, en el que se desatacan los que refieren al contexto de las tareas, los tipos de razón y naturaleza de los números involucrados (Abramowitz, 1975; Adjiage, 2005; Alatorre y Figueras, 2003; 2005; Cramer y Post, 1993a; Heller, Ahlgren, Post, Behr y Lesh, 1989; Heller, Post y Behr, 1985; Karplus, Pulos y Stage, 1983b; Lamon, 1993; Lawton, 1993; Person, Berenson y Greenspon, 2004; Smith, 2002; Steinthorsdottir, 2006)

h) La implementación de propuestas curriculares y experiencias de enseñanza, cuya intención es fomentar vivencias escolares dirigidas a especificar condiciones adecuadas para el logro de la simbiosis enseñanza-aprendizaje de la proporcionalidad (Adjiage y Pluvinage, 2007; Ben-Chaim, et al., 1998; Ben-Chaim, Keret e Ilany, 2007; Ferrucci, y Carter, 2009; Kaput y Hegedus, 2002; Kaput y Roschelle, 1998; Lamon, 2007; Moss, 2002; Roschelle et al., 2010).

A continuación describimos estos aspectos de interés a la luz de la revisión de la literatura correspondiente.

1.5. De aspectos intuitivos-cualitativos a algebraicos-formales

Una revisión de la evolución del razonamiento proporcional podría enfocarse desde dos vertientes, una de índole filogenética en la que se observa el avance de una noción que nace de la propia necesidad de desarrollo social de la especie humana, desde las intuiciones más primitivas, hacia una organización teórica, de carácter intelectual, abstracto y formal, más allá de la realidad tangible y concretamente sensible. Otra vertiente de índole ontogenética en la que se observa la evolución y uso del razonamiento proporcional en la persona, desde sus intuiciones incipientes, relacionadas con los inicios del sentido numérico (Dehaene, 1997), hasta el conocimiento formal y rigurosamente constituido a lo largo del crecimiento y desarrollo intelectual de la persona. Como veremos, las investigaciones identificadas en la literatura se ubican dentro de esta segunda vertiente, observándose la primera vertiente prácticamente inexplorada. Una descripción de una relación entre estas dos vertientes y sus posibles contribuciones a la enseñanza de la proporcionalidad la ofreceremos en el sub-apartado 2.2.3 del capítulo 2.

Situándonos en esta segunda vertiente, como hemos señalado en el sub-apartado 1.3.1., en la literatura especializada se encuentra difundida una interpretación sobre la proporcionalidad, en la que se acepta la existencia de elementos intuitivos-cualitativos que sirven de base al desarrollo del razonamiento proporcional (Allen, Moore, y Dixon,1992; Behr et al., 1992; Inhelder y Piaget, 1996; Koellner-Clark y Lesh, 2003; Ruiz y Valdemoros, 2006; Smith, 2001; Streefland, 1983; 1985).

Allen, Moore, y Dixon (1992) llaman la atención sobre la necesidad de profundizar en el estudio de la relación entre razonamiento intuitivo y numérico, puesto que, según los resultados de su estudio, los sujetos muestran dificultad para conectar ambas formas de de razonamiento.

En relación con lo intuitivo y numérico, en el caso del desarrollo del razonamiento proporcional, se reconoce además lo cualitativo, que posiblemente se encuentre como elemento que conecta lo intuitivo y lo cuantitativo-numérico. En este orden de ideas, Lamon (2007) haciendo referencia a la tarea de la balanza de platillos, analizada por Behr et al. (1992, p. 332), señala la manifestación de una forma de razonamiento cualitativo que va más allá del conocimiento intuitivo[9]. Haciendo mención a las demandas cognitivas requeridas para el desarrollo de esta tarea, concluye que un “razonamiento cualitativo no es necesariamente intuitivo” (Lamon, 2007, p. 631), zanjando una distinción entre el razonamiento cualitativo y lo intuitivo, puesto que lo cualitativo involucra la puesta en juego de principios de comparación o de reglas de cambio de orden o de dirección.

Estas afirmaciones son fácilmente observables en la Fig. 1.1, que hemos tomado del trabajo de Lamon (2007), en la cual se muestran las relaciones multiplicativas posibles (producto cartesiano) entre un número de personas y el número de galletas que podrían ser repartidas entre esas personas. Este es un claro ejemplo en el que lo cualitativo se manifiesta sobre la base de lo cuantitativo, pero sin hacer uso de procedimientos numéricos, que vayan más allá de lo involucrado en las relaciones de orden de los números naturales.

Cambio de cantidad de galletas por persona			
	Cambio del número de personas		
Cambio del número de galletas	+	–	0
+	?	+	+
–	–	?	–
0	–	+	0

Fig. 1.1: Cambios de orden o dirección en una razón. (Tomado de Lamon (2007, p. 631))

Observamos en la Fig. 1.1, cómo, para este ejemplo de “repartición”, se ponen en juego principios de comparación o reglas de cambio de orden o de dirección en la razón “galletas por personas”, en el que lo positivo (+), en las celdas producto, refiere a la situación de “repartición positiva” (más galletas que personas) y lo negativo (–) a lo contrario.

Respecto al uso de situaciones de este tipo, en el ámbito escolar, Behr et al. (1992), sostienen:

> El propósito de la instrucción inicial en números racionales y proporciones debería ser colocar al niño en situaciones donde ellos sean capaces de construir

[9] Consiste en aquel conocimiento que es evidente en sí mismo y obvio para la persona que lo posee (Resnick, 1986, p. 188, citado por Lamon, 2007, p. 631).

> principios para aplicarlos cualitativamente a cuestiones de orden, equivalencia y tamaños de fracciones y razones. El objetivo de ayudar a los niños a construir principios de razonamiento cualitativo está basado en la creencia de que este conocimiento puede guiar su razonamiento cuantitativo… (pp. 321-322).

Estos autores refieren a la necesidad de realizar investigación que dé sustento a esta creencia, y hacen referencia a los trabajos realizados por Mack (1990) y Van den Brink y Streefland (1979).

Van den Brink y Streefland (1979) y Streefland (1985, p. 84) proponen la necesidad de desarrollar una secuencia didáctica partiendo de aspectos intuitivos-cualitativos con niños en edades tempranas. Van den Brink y Streefland (1979) informan sobre los resultados obtenidos en torno al desarrollo del concepto de razón, con niños en edades entre 6 a 8 años, por medio de dibujos a escala. Los dibujos elaborados por los niños mostraron semejanza con una escala propuesta, en la que debían tomar como referencia a Liz Pulgar (una niña del tamaño de un pulgar). Esta forma intuitiva del concepto de razón fue referida luego por Freudenthal (1983), a la cual haremos mención más adelante, sub-apartado 1.8.2.1, en este capítulo.

Streefland (1985, p. 84) plantea, por ejemplo, utilizar comparaciones cualitativas proporcionales del tipo: ‗A es más grande que B‘, ‗C es más pequeño que D‘…; basadas en el desarrollo de actividades como ‗contar grandes cantidades‘, ‗medir áreas‘… Estas acciones podrían comenzar al inicio de la escuela primaria, de modo que se vayan consolidando para servir de base al desarrollo posterior del razonamiento proporcional. Generalmente, este tipo de actividades se dejan para más tarde, quedando postergado su uso como un prerrequisito necesario para introducir aspectos funcionales, como el concepto de razón como una relación entre magnitudes, o el reconocimiento de semejanzas entre segmentos o de figuras geométricas, los cuales se encuentran muy próximos a procesos de algoritmización y formalización de las nociones relativas a la proporcionalidad.

Se observa entonces, a partir de los resultados y propuestas de diferentes investigaciones, el desarrollo de una especie de línea evolutiva en la construcción del razonamiento proporcional, que comprende ir desde lo intuitivo-cualitativo a lo cuantitativo (Koellner-Clark y Lesh, 2003; Lesh, Post y Berh, 1988; Norton, 2005). Koellner-Clark y Lesh (2003), señalan: ―… la inclusión de una variedad de experiencias que motiven enfoques cualitativos ayuda al desarrollo del razonamiento proporcional de los estudiantes” (p. 93). Asimismo, Norton (2005), al referirse a uno de los resultados de su estudio, afirma que: “Eso es… un hallazgo que confirma que los esquemas cualitativos se desarrollan antes que los esquemas cuantitativos” (p. 23). En esta misma línea de investigación, Ruiz y Valdemoros (2006) refieren a la posibilidad de dotar de sentido al uso de algoritmos relativos a la proporcionalidad, al poner en juego situaciones en las que se relacionan aspectos cualitativos y cuantitativos de ese contenido.

Es claro que existen diversos aspectos concomitantes al desarrollo que va de lo cualitativo-proporcional a lo cuantitativo-proporcional. Una de las herramientas fundamentales en ese proceso evolutivo es el número; su construcción conceptual (Piaget, 1981; Piaget et al., 1977), el desarrollo de su sentido (Dantzig, 2008); lo cual deberá conducir a la configuración de las estructuras aditivas y multiplicativas necesarias para dar fundamento al razonamiento proporcional (Fernández y Llinares, 2011; Kenney, Lindquist y Heffernan, 2002; Norton, 2005).

Condon, Landesman, y Calasanz-Kaiser (2006) muestran un ejemplo de una situación problema en la que se coloca al alumno en el papel de un controlador aéreo, quien debe tomar decisiones relativas al tráfico de aviones en el aire. La situación problema específica, que se propone a una sección de alumnos de 6º curso para que la resuelva, intenta generar una secuencia que va desde lo intuitivo y cualitativo hacia lo cuantitativo y numérico, es decir, va desde comparaciones intuitivas-cualitativas (mayor velocidad, mayor recorrido, en un mismo instante de tiempo) hacia la necesidad del uso de algoritmos numéricos-algebraicos (a qué distancia va un avión respecto a otro en un instante de tiempo dado) para obtener la solución correspondiente. En la Fig. 1.2 presentamos la situación problema planteada.

Aún cuando este problema es utilizado como una situación introductoria al estudio de razón y proporción, existen diversos aspectos que se pueden resaltar de esta rica situación y del desarrollo de las acciones a partir de ella (recomendamos su estudio en la fuente original). Referiremos solo a los resultados de las actuaciones iniciales de los alumnos al resolver el problema, en torno a las relaciones entre lo cualitativo y lo numérico.

Al respecto, Condon, Landesman, y Calasanz-Kaiser (2006) reportan que la mayoría de los alumnos fueron capaces de responder correctamente las preguntas 1 y 2 inmediatamente. No obstante, pocos alumnos dieron una respuesta correcta a la pregunta 3, y ninguno de ellos dio respuesta a la pregunta 4. Estos resultados indican que aún cuando los alumnos logran hacer predicciones cualitativas en las que comparan cantidades intensivas o razones de “pie por segundo” (distancia-longitud por tiempo), los aspectos numéricos involucrados en las respuestas de las preguntas 3 y 4, requieren ser enseñados-aprendidos. No obstante, el uso de situaciones como la descrita, aproximan lo cualitativo y lo numérico, sirviendo lo cualitativo como elemento impulsor de las acciones necesarias para avanzar en la resolución del problema hacia lo numérico.

Problema:

Dos aviones están volando en la misma altitud sobre rutas que convergen. Cada avión está a 20 pies de la intersección. Un avión está volando a razón de ½ pie por segundo. El otro avión está volando a razón de 1/3 pie por segundo.

Preguntas:

Pregunta 1: ¿Se encontrarán los aviones en el punto donde las rutas se intersectan?
Pregunta 2: Si no, ¿cuál de los aviones llegará primero?
Pregunta 3: ¿Cuántos segundos tardará el primer avión en llegar al punto de intersección?
Pregunta 4: En ese tiempo, ¿qué tan lejos estará el segundo avión?

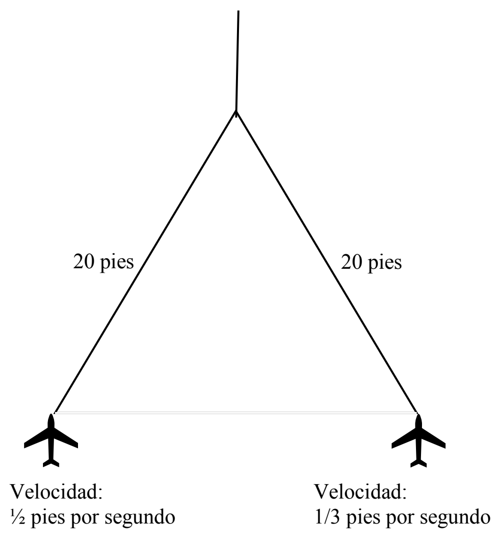


Fig. 1.2: Problema de control del tráfico aéreo. (Adaptado de Condon, Landesman, y Calasanz-Kaiser (2006, p. 7)

En esta línea de ideas, además de lo aritmético-numérico, encontramos un aspecto que entra en el juego del desarrollo del razonamiento proporcional como lo es lo relativo a lo algebraico. Se podría pensar en una evolución que va desde lo aritmético-numérico a lo algebraico-funcional. No obstante, se ha observado en la literatura reciente (Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006; Carpenter, Frankle y Levi, 2003; Castro, 2011;

Watanabe, 2008) una fuerte tendencia hacia el fomento del desarrollo del razonamiento algebraico elemental, es decir, el desarrollo del razonamiento algebraico desde los primeros años de escolaridad de la persona. Por lo que, cada vez más y con mayor fuerza, se acepta la hipótesis de un desarrollo simultáneo, de lo aritmético y lo algebraico, en relación con el desarrollo del razonamiento proporcional. Claramente, será necesario realizar más investigación al respecto.

Siguiendo la línea de esta hipótesis, pero refiriendo específicamente al aspecto funcional, interpretado como un proceso de generalización de la correspondencia entre dos variables que están en relación, este se considera como un aspecto que se debe ir construyendo de manera simultánea a los mencionados: lo intuitivo-cualitativo y aritmético-numérico-algorítmico. En este sentido, encontramos que Behr et al. (1992, p. 316) refieren a la construcción de principios para el razonamiento cualitativo como el de la “variabilidad matemática”, que deben ser construidos por la persona desde edades tempranas, los cuales al ser utilizados por los niños en tareas de comparación cualitativa, se convierten en reglas generales que guardan relación con la construcción del aspecto funcional referido.

Otros aspectos, que guardan relación con esta línea de ideas, son los involucrados en los procesos de unitización[10] (Lamon, 1993a; 1993b; 1994; 1995: 1996; 2006; 2007) y normalización[11] (Freudenthal, 1983; Lamon, 1993a; 1993b; 1994; 1995; 1996; 2006; 2007). Sobre estos procesos referiremos más adelante, en el sub-apartado 1.7.3.

Por otra parte, situándonos en el escenario de la formación de profesores, consideramos necesario proveer a los futuros profesores de formación suficiente para que puedan moverse de manera fluida entre las dos formas de registros o articulaciones: el que modela la proporcionalidad desde un punto de vista funcional (Bolea, Bosch y Gascon, 2001; García, 2005; García et al., 2007) y el que observa la proporcionalidad como una construcción inductiva que va de lo intuitivo-cualitativo, a lo aritmético-cuantitativo-algorítmico y a lo algebraico-funcional-formal. Puesto que el profesor, en su labor profesional, está llamado a prestar atención a los aspectos funcionales-algebraicos

[10] Traducción que hacemos del término en inglés “unitizing”, extensamente estudiado por Susan J. Lamon, que consiste en la construcción de nuevas unidades.

[11] Traducción que hacemos del término en inglés “norming”, originalmente propuesto por Frudenthal (1983), estudiado por Susan J. Lamon, que consiste en la reconceptualización de un sistema en relación con una unidad fijada o estándar.

implícitos a lo largo de esa construcción. De la misma manera, se debe informar al futuro profesor, sobre el potencial desarrollo-construcción simultáneo (aritmético-numérico/algebraico-funcional) de nociones relativas a la proporcionalidad.

En lo relativo a la formalización de la proporcionalidad, como meta educacional, debemos referir a la escasa investigación al respecto. En Bosch (1994) encontramos referencia a la existencia de un tratamiento formal sobre la proporcionalidad, desde la cual, de acuerdo con esta autora, se podría hacer todo un desarrollo formal de la aritmética elemental, por medio de la noción de proporcionalidad.

Otro trabajo que provee de algunos elementos relativos a un posible tratamiento formal de la teoría de la proporcionalidad, desde un punto de vista educacional, lo encontramos en Freudenthal (1983) y Fernández Lajusticia (2009).

No obstante, estas dos últimas aproximaciones consisten en una tarea de análisis fenomenológico, que trata de mostrar una organización de los objetos matemáticos en torno a la proporcionalidad, cuyos efectos en la enseñanza aún no han sido estudiados. Valga señalar una excepción; debido a la producción de una estimación hipotética sobre la dificultad implicada en tres clases de fenómenos identificados por Freudenthal (1983), en los cuales está involucrada la razón o proporción. Esta estimación, obtenida de acuerdo con la complejidad que subyace en los tres fenómenos identificados (exposiciones, composiciones y constructos) por medio del análisis fenomenológico, permite determinar la clase de fenómenos menos compleja. La identificación de la clase de fenómenos menos compleja —las exposiciones— es utilizada por Fernández Lajusticia (2009) en la realización de su trabajo.

Además debemos reconocer que existe cierta distancia entre los objetivos de nuestro trabajo y el estudio de la proporcionalidad desde un punto de vista formal. Consideramos que tal contenido pertenece a un nivel matemático avanzado, objeto de estudio de matemáticas superiores y especializadas, la cual requerirá, sin lugar a dudas, del dominio de los planteamientos precedentes: intuitivo-cualitativo, aritmético-numérico-algorítmico y algebraico-funcional.

Incluso, si interpretamos lo algebraico-funcional como aspecto formal, en el que se fundamenta la concepción de proporcionalidad (Fernández García, 2008; Godino y Batanero, 2004), cuyo estudio podría ser iniciado desde la escuela primaria, se observa poca investigación sobre lo algebraico-funcional en este nivel educativo. En cualquier caso, las aproximaciones que pueden hacerse al concepto de proporcionalidad, lo relativo a lo algebraico-funcional en sentido estricto de este concepto, desde las prácticas de enseñanza-aprendizaje de la escuela primaria, guardan una distancia considerable. Coincidimos con Fernández Lajusticia (2009) al referir que la distancia entre los aspectos relativos a la proporcionalidad, tratados en la escuela primaria, y el concepto mismo de proporcionalidad ―…es demasiado grande para intentar conectarlos … en esta investigación" (p. 57).

1.6. Tipos de problemas

Uno de los aspectos involucrados en la complejidad de la proporcionalidad lo constituye la existencia de varios tipos de problemas. Existe una clasificación general de problemas de proporcionalidad, ampliamente difundida en la literatura y comúnmente utilizados en las investigaciones, que comprende tres categorías de problemas: (a) problemas de valor faltante, (b) problemas de comparación y (c) problemas cualitativos de predicción o de comparación. (Cramer y Post, 1993a; Kaput y West, 1994; Kilpatrick, Swafford, y Findell, 2001; Lamón, 2007). A continuación exponemos una breve descripción de cada uno de estos tipos de problemas.

Problemas de valor faltante: un problema de valor faltante se caracteriza por estar constituido por cuatro valores que están en relación, en la que tres de ellos son conocidos y uno desconocido. Resolver el problema consiste en encontrar el valor que falta. Si el problema es de proporcionalidad dos de los valores conocidos forman una razón y el tercer valor conocido con el que falta forman otra razón. Uno de los problemas clásicos de este tipo, ampliamente citado en la literatura (Cramer, Post y Currier, 1993; Fernández Lajusticia, 2009; Hart, 1981), es el de ―Mr. Tall and Mr. Short" (Sr. Alto y Sr. Bajo). En la misma línea de investigación en que se desarrolla el presente trabajo y como una continuación del mismo, hemos hecho uso de este problema para realizar un estudio de casos, el cual ha sido reportado en Rivas, Godino y Castro (2012).

Problemas de comparación: en un problema de comparación son dados cuatro valores, en el que se relacionan de manera multiplicativa, dos a dos, formando dos razones. El problema consiste en determinar cuál de las condiciones de la tricotomía es válida entre ellas, es decir, determinar si las razones que se forman son iguales o si una es mayor (o menor) que la otra. Uno de los problemas típicos de este tipo es el de las mezclas (jugo de naranja/agua; jugo de limón/azúcar) utilizados en los estudios realizados por Karplus, Pulos y Stage (1983b), Noelting (1980a; 1980b), referido por Lamon (2007, p. 637).

Problemas cualitativos de predicción o de comparación: los problemas de este tipo tienen una estructura similar a problemas de valor faltante o de comparación, respectivamente, pero su solución no requiere del uso explícito de cálculos numéricos.

Ejemplos de estos tipos de problemas son presentados en la Fig. 1.3, que hemos transcrito de Cramer y Post (1993a, p. 405).

Problema 1: Valor-faltante: velocidad
Lisa y Rachel conducen a igual velocidad a lo largo de una carretera de la ciudad. Lisa tarda 6 minutos en recorrer 4 millas. ¿Cuánto tardará Rachel en recorrer 6 millas?

Problema 2: Comparación numérica: escala
Anne y Linda están utilizando dos mapas de carreteras de la ciudad. En el mapa de Anne una carretera de 3 pulgadas de longitud es en realidad de 15 millas. En el mapa de Linda una carretera de 9 pulgadas de longitud es en realidad de 45 millas. ¿Quién está utilizando el mapa más grande? (a) Anne (b) Linda (c) Sus mapas son el mismo (d) La información es insuficiente para dar una respuesta.

Problema 3: Predicción cualitativa: mezcla
Si Nick mezcla menos concentrado de limonada con más agua que la que él preparó ayer, su limonada tendrá un gusto (a) Más fuerte (b) Menos fuerte (c) Exactamente el mismo gusto o (d) La información es insuficiente para dar una respuesta.

Problema 4: Comparación cualitativa: densidad
Dos amigos colocan una línea de clavos en dos tablas diferentes. Bill coloca más clavos que Greg. La tabla de Bill es más pequeña que la de Greg. ¿En cuál de las tablas los clavos están más juntos? (a) En la tabla de Bill (b) En la tabla de Greg (c) Sus clavos están igualmente espaciados (d) La información es insuficiente para dar una respuesta.

Fig. 1.3: Ejemplos de tipos de problemas de razón y proporción (Adaptado de Cramer y Post, 1993a, p. 405)

Aún cuando buena parte de la literatura de educación matemática se ha limitado al uso de los tres tipos de problemas referidos (Cramer y Post, 1993a; Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001; Lamon, 2007), se observa también algunas clasificaciones presentadas expresamente en algunos trabajos. Aún cuando los criterios de clasificación no son expresados directamente por los autores que las proponen, hemos identificado un criterio que consideramos pertinente para diferenciar las clasificaciones propuestas. Así por ejemplo encontramos clasificaciones debidas a: (a) tipos de problema según las variables de la tarea, (b) tipos de problemas de acuerdo con el proceso de resolución requerido, y (c) tipos de problemas utilizados en la educación primaria.

A continuación se hace referencia a estas tres clasificaciones. Se podrá observar que en general todas las clasificaciones tienen tipos de problemas que son comunes y que se diferencian solo por el significado de uso, atribuido de acuerdo con el contexto del enunciado, al proceso de resolución específico, o al nivel de la escuela al que se aplica. Estas características singulares son las que nos han permitido establecer los criterios de clasificación antes referidos.

Nos hemos limitado a comentar sólo estos tres tipos de clasificación porque las consideramos suficientes para el trabajo que nos hemos propuesto desarrollar. Una clasificación más prolija sobre los tipos de problema relativos a la proporcionalidad pueden verse en Fernández Lajusticia, (2009, pp. 58-64).

1.6.1. Tipos de problemas según las variables de la tarea

Tourniaire y Pulos (1985, p. 182) hacen una clasificación de las diferentes tareas y problemas que se han propuesto a los estudiantes en distintas investigaciones y, de acuerdo con las variables de las tareas involucradas, distinguen tres categorías de problemas: a) tareas de física, b) problemas de tasa, y c) problemas de mezcla.

La resolución de las *tareas de física* involucra, además de conocimientos relativos a razón y proporción, algunos conocimientos elementales de la física. Dentro de esta categoría agrupan tres tipos de problemas, a saber: problemas con la balanza de platillos, problemas con dos poleas y problemas de proyección de sombras. En buena parte de las investigaciones, estos tipos de problemas, son utilizados para plantear cuestiones de predicción cualitativa.

En la categoría de *problemas de tasa* se observa la agrupación de once tipos de problemas, a saber: doctores y pacientes, pescado y comida, consumo de combustible, cajas de bolas de chicle, cintas de pelo y antenas, maquina operadora, Señor Alto y Señor Bajo, naranjas y jugo de naranja, pintores y paredes, patrones, problemas estándares de palabras. Para estos tipos de problemas, en las investigaciones, se han elaborado problemas de valor faltante y/o de comparación.

En la categoría de *problemas de mezcla* se han agrupado problemas de: limonada, surtidos diversos, jugo de naranja, arenas de dos colores. Nuevamente para estos tipos de problemas han sido elaborados problemas de valor faltante y de comparación.

Fernández Lajustucia (2009, p. 60) refiere a una carencia identificada por Fiol, Fortuny (1990) en la clasificación propuesta por Tourniaire y Pulos, como lo es la no consideración de problemas proporcionales del campo de la geometría, los cuales habían sido estudiados por Freudenthal (1983); Hart (1984) y Streetfland (1984).

En general si consideramos los problemas identificados por Tourniaire y Pulos (1985), de acuerdo con la estructura de sus enunciados, observamos que se reducen a los tres tipos de problemas antes referidos, a saber: problemas de valor faltante, de comparación y problemas de tipo cualitativo.

1.6.2. Tipos de problemas según el procedimiento requerido para su solución

Lesh, Post y Behr (1988, pp. 95-96) proponen, de acuerdo con el procedimiento requerido para su solución, la siguiente tipología de problemas relativos a la proporción:

1. Problemas de valor faltante: dados tres valores (incluyendo el par que forman una razón), la meta es encontrar el valor desconocido (faltante-equivalente) de la otra razón. Por ejemplo: dados a,b,c; llamando x el valor faltante, la proporción es $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$.

2. Problemas de comparación: dados los valores a,b,c,d ; la meta es juzgar cuál de las relaciones $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ o $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ o $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$ es verdadera.

3. Problemas de transformación: se presentan dos casos, a saber:

   a) Juicios de cambio de dirección: dada una equivalencia de la forma $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, luego uno o dos de los cuatro valores $a,b,c,$ o d, se incrementa o se hace más pequeño en una cierta cantidad, la meta es juzgar cuál relación (<, > ó =) es verdadera.

b) Transformaciones para producir igualdad: dada una desigualdad de la forma $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, luego para uno de los cuatro valores se debe encontrar un valor *x*, de manera que la relación sea una igualdad. Por ejemplo: $\frac{a+x}{b} = \frac{c}{d}$.

4. Problemas de valor medio: dados dos valores *a, b*, la meta es encontrar un tercer valor *x* tal que:

   a) $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$, media geométrica.

   b) $\frac{a}{b} = \frac{a-x}{x-b}$, media armónica.

5. Proporciones que involucran conversiones de razones; a tasas de cambio o a fracciones: La razón de niñas a niños en la clase es 14 a 12, ¿Qué fracción de la clase eran niños?

6. Proporciones que involucran tanto números como unidades de magnitud: por ejemplo: (3 pies)/(2 segundos) $= x$ millas por hora o 5 pies/segundo = *x* millas/hora.

7. Problemas de traslación del modo ―entre": Dada una razón (fracción o tasa de cambio o cociente) en un sistema de representación, la meta es trasladar la misma relación usando otro sistema de representación.

En esta clasificación, más amplia que la anterior, se observan 3 tipos de problemas que de acuerdo con sus autores, han prácticamente desaparecido tanto de la investigación como de la enseñanza. Específicamente, los problemas menos frecuentes o casi inexistentes son los correspondientes a los numerales 3, 4 y 7. Con lo cual se observa en esta clasificación el predominio que ejercen dos de los tres tipos de problemas inicialmente identificados.

Un tipo de problema que consideramos necesario agregar a esta última lista, que han sido identificados en la clasificación propuesta por Tourniaire y Pulos (1985), son precisamente los problemas de índole cualitativa, que es el tercero de los tipos de problemas inicialmente propuestos por nosotros.

Existe en la literatura una clasificación que consideramos obedece también al criterio del procedimiento requerido para su resolución, pero guiada por aspectos más específicos del problema, como lo son las variaciones en la estructura de sus enunciados y las estrategias de resolución más comúnmente utilizadas. Se trata en este caso de la clasificación elaborada por Harel y Behr (1989). Aún cuando tal clasificación refiere solo a problemas de valor faltante proporcionales, estos autores, mediante un análisis minucioso, logran observar que al hacer variaciones en la estructura del enunciado del problema, pueden formularse 512 diferentes tipos de problemas de valor faltante proporcionales.

Pero, además de identificar esta variedad de enunciados de problemas de valor faltante proporcionales, se deben destacar dos aportaciones adjuntas que emergen de este trabajo, las cuales conducen a una clasificación jerarquizada de estos tipos de problemas, a saber: (a) identificaron 15 estrategias de resolución que jerarquizaron de acuerdo con la preferencia de uso comúnmente asumida por parte de resolutores, y (b) basados en esa jerarquización, proponen niveles hipotéticos de dificultad que puede manifestarse en la resolución de estos 512 tipos de problemas. Estos niveles hipotéticos de dificultad constituyen una nueva jerarquización de estos 512 tipos de problemas identificados.

Tomando en cuenta la jerarquización propuesta por Harel y Behr (1989), en la parte empírica de esta investigación, se propone observar el desarrollo del conocimiento sobre razón y proporción en una muestra de futuros profesores durante su primer año de formación. De manera que, se incluye en el primer instrumento (diagnóstico) un ítem de valor faltante proporcional cuyo índice de dificultad es menor que el incluido en el segundo instrumento (prueba de control).

Volviendo sobre los tipos de problemas, hacemos ahora mención a algunos tipos de problemas cuyo criterio de clasificación atiende al uso del concepto de razón o de los diferentes tipos de razón que han sido identificados y difundidos en la literatura.

En este sentido, es posible distinguir tres tipos de razón: (a) razón como relación parte-parte, (b) razón como relación parte-todo y (c) razón como relación parte-parte-todo. A continuación presentamos una descripción sobre estos tres tipos de problemas.

Un problema de razón parte-parte es aquel que involucra una relación entre dos cantidades que forman parte de conjuntos disjuntos, cuyas unidades de magnitud pertenecen a diferentes espacios de medida. La relación numérica entre distancia recorrida y tiempo utilizado por un móvil en movimiento rectilíneo uniforme, de velocidad constante.

Un problema de razón parte-todo es aquel que involucra una relación entre dos cantidades en la que una es parte de la totalidad y la otra es la totalidad de la que la anterior es una parte. Por ejemplo la relación numérica entre alumnos o alumnas respecto a la totalidad de personas en un aula de clases. La parte corresponde al número de alumnos o alumnas, y el todo corresponde a la totalidad de las personas en el aula de clase. Más adelante en la Fig. 1.4, mostramos una representación gráfica de este tipo de problemas.

Un problema de razón parte-parte-todo es aquel que involucra una relación entre dos cantidades disjuntas dentro de un todo. Por ejemplo la relación numérica entre alumnos y alumnas en un aula de clase respecto a todos los alumnos de la clase, constituye una relación del tipo parte-parte-todo. Una característica notable de estos tipos de problemas es que la suma de las partes es el todo. En un sentido estricto, la estructura parte-parte-todo es una partición de un conjunto universo en dos subconjuntos, cuya intersección es vacía y su unión es todo el universo.

1.6.3. Tipos de problemas utilizados en primaria

Por su parte Cramer y Post (1993a), Kaput y West (1994), Kilpatrick, Swafford, y Findell (2001), Lamón (2007), proponen tres tipos de problemas de proporción que corresponden a los utilizados en la escuela primaria, a saber:

- Valor faltante
- Comparación numérica
- Problemas de predicción y comparación cualitativa

Esta clasificación es precisamente a la que hemos referido al inicio de este apartado, como la más común y generalmente referida en la literatura. En general pareciera que todas las clasificaciones pudieran ser reducidas a estos tres tipos de problemas, en el sentido que han acaparado la mayor atención tanto de la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela primaria, como de las investigaciones realizadas. Además, el amplio espectro abarcado por estos tres tipos de problemas, hacen que su uso se encuentre extendido a un lato campo de problemas tanto de la matemática como de otras ciencias.

No obstante, existe un tipo de problemas en los cuales se pone en práctica un razonamiento proporcional, que refieren al uso de la razón como relación parte-todo, que no se encuentra incluido en la clasificación precedente. Vale señalar por ejemplo algunos tipos de problemas de porcentaje y de escala cuyo enunciado particular no refiere a ninguno de los procedimientos de resolución anteriormente referidos.

Un caso de este tipo de situaciones lo podemos observar en problemas de razón de la forma parte-todo (Fig. 1.4), que se resuelven respondiendo a la pregunta “¿qué proporción representa una parte?” de un todo dado o conocido. Aún cuando se hace un uso no conveniente del término “proporción” en ese enunciado, pues en su lugar debería estar el término “razón”, la factibilidad de uso de este tipo de problemas en educación primaria es elevada. Más aún para el caso de porcentaje de una cantidad o del factor de una escala.

Qué proporción representa la parte sombreada

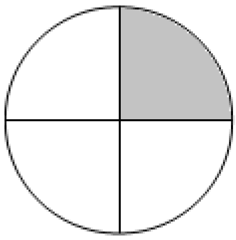


Fig. 1.4: Un problema de razón parte-todo, adaptado de un libro de texto

Precisamente, este problema puede expresarse en términos de porcentaje, incluso una respuesta correcta al problema puede ser dada como un porcentaje, quedando la proporción expresada en términos de porcentaje: “la proporción es del 25%”.

Notemos también que el problema se puede resolver haciendo uso de una fracción, lo cual inclusive parece más natural, más aún si reconocemos que en el currículo de primaria el estudio de las fracciones precede al estudio de la razón y la proporción. Pero la fracción ¼ como respuesta, en la frase: “la proporción es ¼”, puede restar significado al objeto de la pregunta en el sentido al cual refiere la frase: “qué proporción”, pues esta está refiriendo a una relación multiplicativa entre la parte y el todo, “…. es una función de un par ordenado de números o valores de magnitud” (Freudenthal, 1983, p. 179), porque si interpretamos en su justa medida a qué refiere el término “proporción” aquí, no es más que el término “razón”, y de acuerdo con Freudenthal (1983) interpretar la razón como una fracción o como un cociente es erróneo. Sobre la relación fracción-razón referiremos en el apartado 1.9.

Hemos escogido este problema de manera deliberada, para señalar un uso inadecuado del término proporción que posiblemente proviene del lenguaje común; del uso que se hace de este término en diversas ocasiones de la vida diaria. Así encontramos por ejemplo, la “proporción” de una cantidad de pintura sobre una pared, de una alfombra sobre el suelo de la habitación, de un ingrediente sobre una comida,…, que son situaciones comunes en las que el término proporción es utilizado con un significado específico (Fernández García, 2008).

En un sentido estricto tal significado corresponde al término razón. En favor de su uso, en algunos contextos (el de lo bello, por ejemplo), se podría reconocer que lo que se hace es una comparación de la razón que se observa con una “razón” no ostensiva (en la psiquis de quien la observa), que se utiliza como referente, que luego, esta forma de pensamiento, se generaliza a otros contextos. Es tan común este uso que en algunos casos lo encontramos en el discurso del profesor, en los libros de texto e inclusive la Real Academia Española, en su vigésima segunda edición, en la primera acepción del término proporción, señala: “Disposición, conformidad o correspondencia debida de las partes de una cosa con el todo o entre cosas relacionadas entre sí.”[12]

Los tipos de problemas identificados en las clasificaciones precedentes, aún cuando no se ha pretendido ser exhaustivos, nos proporciona un panorama suficiente y una muestra representativa sobre los diferentes tipos de problemas que han sido identificados, estudiados y reconocidos en el ámbito de la educación matemática. Específicamente, nos centraremos en el estudio y uso de dos tipos de problemas identificados en las investigaciones, a los cuales hemos referido como de uso común en la educación primaria, es decir, a problemas de comparación (cualitativa y cuantitativa) y valor faltante (cualitativo y cuantitativo). Nótese que en este caso, quedan incluidos los tres tipos de problemas inicialmente referidos.

[12] http://buscon.rae.es/draeI/SrvltConsulta?TIPO_BUS=3&LEMA=proporción

Consideramos que estos dos tipos de problemas abarcan buena parte de los curricularmente prescritos y comúnmente utilizados en la educación primaria y una parte del inicio de la educación secundaria. Además, en la literatura especializada (Cramer y Post, 1993a; Kaput y West, 1994; Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001; Lamón, 2007) encontramos que el estudio de la proporcionalidad a este nivel educacional, está en buena parte caracterizado por el uso de estos dos tipos de problemas.

Sobre estos dos tipos de problemas presentamos en los capítulos 4, 5 y 6 algunos ejemplos, para los cuales hemos realizado unos análisis en los que identificamos algunos de los objetos matemáticos, y los correspondientes significados, puestos en juego en su resolución.

1.7. Tipos de solución o estrategias de resolución de problemas de proporcionalidad

Diversas estrategias, utilizadas por escolares al resolver problemas de razón y proporción, han sido identificadas en la literatura de educación matemática (Fernández Lajusticia, 2009; Gualdron Pinto y Gutiérrez Rodríguez, 2007; Hart, 1981; 1984; Karplus, Pulos y Stage, 1983a; Levin, 2002; Noelting, 1980b).

Entre las estrategias más difundidas se encuentran aquellas que refieren al tipo de razón empleada en la resolución (estrategia “dentro” y estrategia “entre”), las denominadas de “construcción progresiva” como traducción del término en inglés “building-up”, la reducción a la unidad o razón unitaria y las relativas al uso de un algoritmo del tipo “producto cruzado” o “regla de tres”.

A continuación referiremos algunos detalles sobre los usos que se han hecho de estas estrategias en el campo de la investigación en educación matemática, haciendo particular énfasis en cierto conflicto de significados observado en el uso de las estrategias que refieren al tipo de razón empleada.

1.7.1. Estrategias “dentro” (within) y “entre” (between)

Noelting (1980b), presenta un trabajo en la que 321 sujetos de 6 a 16 años, resuelven tareas de proporcionalidad (de densidad o mezcla), propuestas en un experimento denominado: “Experimento del Jugo de Naranja” (The Orange Juice Experiment).

Basándose en la teoría piagetina del desarrollo cognoscitivo, y según el desempeño exhibido por los sujetos en ese experimento, este autor categoriza las diferentes actuaciones de los sujetos en diferentes estadios y niveles del desarrollo (Noelting, 1980a; pp. 228-229). Luego, en cada nivel de desarrollo, observa la manifestación de dos estrategias de resolución de las tareas del experimento, a las que él llama: estrategia ―dentro” (within) y la estrategia ―entre” (between).

Se debe señalar que estas nominaciones, utilizadas por Noelting, tienen un significado diferente al utilizado por otros autores en la literatura (Fernández Lajusticia, 2009; Freudenthal, 1983; Vergnaud, 1983; 1988;). Estas estrategias se definen en función del tipo de comparación que se realiza entre dos razones (o estados de razones) que utilizan los sujetos al resolver las tareas, siendo los ―estados de razones dentro” aquellas en las que la comparación entre razones se realiza por medio de una división o un cociente, mientras los ―estados de razón ―entre”, la comparación entre razones se interpreta como una covariación.

Lo que debemos observar aquí es que Noelting provee de un significado cognitivo a estos términos, en el que las comparaciones se realizan siguiendo dos esquemas: (a) el esquema ―dentro”, el cual refiere a que la comparación se hace entre cocientes y no entre razones, diferenciando cociente y razón en el sentido en que Freudenthal (1983, pp. 179-180) diferencia el uso de razón y de cociente, aún cuando el mismo Noelting las llama ―estado de razón dentro”, y (b) el esquema ―entre”, el cual refiere al uso de la idea de razón en el sentido propuesto por Freudenthal, de covariación entre razones, las cuales son comparadas sin necesidad de conocer el ―tamaño de las razones”. En la Fig. 1.5 tratamos de ilustrar esta idea sobre las estrategias ―dentro” y ―entre”.

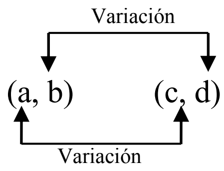
En un trabajo similar al elaborado por Noelting, otro grupo de notables investigadores, Karplus, Pulos y Stage (1983a; 1983b) proveen de una explicación alternativa para el uso de estrategias ―dentro” y ―entre”. De acuerdo con Karplus y colaboradores, ―….para el término *entre*… la operación inicial combina valores de variables correspondientes entre[13] dos usos de la función lineal… para el segundo término [*dentro*] la operación inicial combina valores de dos variables dentro de una aplicación de la función lineal” (Karplus, Pulos y Stage, 1983a, p. 221).

13 El subrayado de los términos ―entre” y ―dentro”, en esta cita, es nuestro.

<table>
<tr><th>Razones</th><th>Comparaciones</th><th>Estrategias</th></tr>
<tr><td rowspan="2">(a, b); (c, d)

Notación de Noelting

Razones externas en el sentido de Freudenthal (1983), en las que cada término de una razón pertenece a sistemas o espacios de medida diferentes</td><td>Calculo del cociente
a ÷ b = r ; c ÷ d = s

Se comparan r y s</td><td>Dentro (Within)</td></tr>
<tr><td>

Se observan las variaciones de los términos de las razones y se trata de concluir sobre las covariaciones entre ellas</td><td>Entre (Between)</td></tr>
</table>

Fig. 1.5: Estrategias “dentro” (*within*) y “entre” (*between*) de acuerdo con Noelting (1980b)

Este significado asignado para las estrategias “entre” y “dentro”, desde la perspectiva de estos autores, de acuerdo con lo expuesto en la Fig. 1.6, coincide con el utilizado por Noelting. La diferencia se encuentra en los términos utilizados para cada interpretación. Noelting basa sus interpretaciones en términos de índole cognitiva, mientras la interpretación mostrada por Karplus y colaboradores se basa en las relaciones entre la función lineal de proporcionalidad y las variables que tomen lugar.

Si consideramos la interpretación dada a los términos “dentro” y “entre” por otros autores, para referir al uso de estrategias de resolución de problemas de proporcionalidad, observaremos prácticamente lo contrario que lo expuesto hasta ahora respecto a este asunto. Para observar este uso diferente es necesario referir a los tipos de razones identificados por Freudenthal.

Freudenthal (1983) refiere a dos tipos de razones, las razones internas y las razones externas. Las “razones internas a las formadas *dentro* de un sistema” (p. 183) [14]. Mientras las “externas a las razones *entre* dos sistemas” (p. 183). Interpretamos que a partir de estas nociones y el uso de los términos “dentro” y “entre” que caracterizan la diferencia entre estos dos tipos de razón, se ha dado sustento a una interpretación,

[14] La cursiva en los términos “dentro” y “entre”, en estas dos citas a Freudenthal (1983), es nuestra.

difundida en la literatura, en la que se denomina “estrategia dentro” al procedimiento de resolución en el que se hace uso de razones internas. Mientras, “estrategia entre” al proceso de resolución en el que se usan razones externas (Fernández Lajusticia, 2009).

Razones	Comparaciones	Estrategias
a/b ; c/d Notación de Karplus, Pulos y Stage (1983a) Razones externas en el sentido de Freudenthal (1983), en las que cada término de una razón pertenece a sistemas o espacios de medida diferentes	Operación inicial: f(a) = b combina los valores de a y b dentro de una aplicación de la función lineal f. La operación inicial coincide con el cálculo del cociente. Por tanto la comparación se realiza entre cocientes, lo cual coincide con lo señalado por Noelting, respecto a esta estrategia	Dentro (Within)
	Operación inicial: f(a) = f(c) combina los valores de a y c entre dos usos de la aplicación lineal f. La operación inicial coincide con la comparación de las variaciones entre términos correspondientes de dos razones Variación (a, b) (c, d) Variación La comparación se realiza entre razones, se trata de observar las variaciones de los términos de las razones y se intenta concluir sobre las covariaciones entre ellas. Esto coincide con el planteamiento de Noelting, respecto al uso de este tipo de estrategia.	Entre (Between)

Fig. 1.6: Estrategias “dentro” (*within*) y “entre” (*between*) de acuerdo con Karplus, Pulos y Stage (1983a).

Más aún el trabajo desarrollado por Vergnaud (1983; 1988) sobre el campo conceptual de las estructuras multiplicativas y la idea de “isomorfismo de medidas”, a partir de lo cual produce dos interpretaciones sobre el uso de uno u otro tipo de razón, en términos de estrategias para abordar la resolución de un problema. En este sentido, Vergnaud denomina estrategias “escalares” a los procedimientos en la que la resolución del problema se aborda utilizando razones internas, y estrategias “funcionales” para el caso de uso de razones externas.

Un esquema utilizado por Vergnaud para ilustrar estas ideas se presenta en la Fig. 1.7. De manera que, para las interpretaciones de las estrategias “dentro” y “entre” (diferentes a las de Noelting, 1980a, 1980b; Karplus, Pulos y Stage, 1983a; 1983b) existe una equivalencia, con lo propuesto por Vergnaud, en la que la estrategia “dentro” se puede también llamar estrategia “escalar” y la estrategia “entre” se puede llamar estrategia “funcional”.

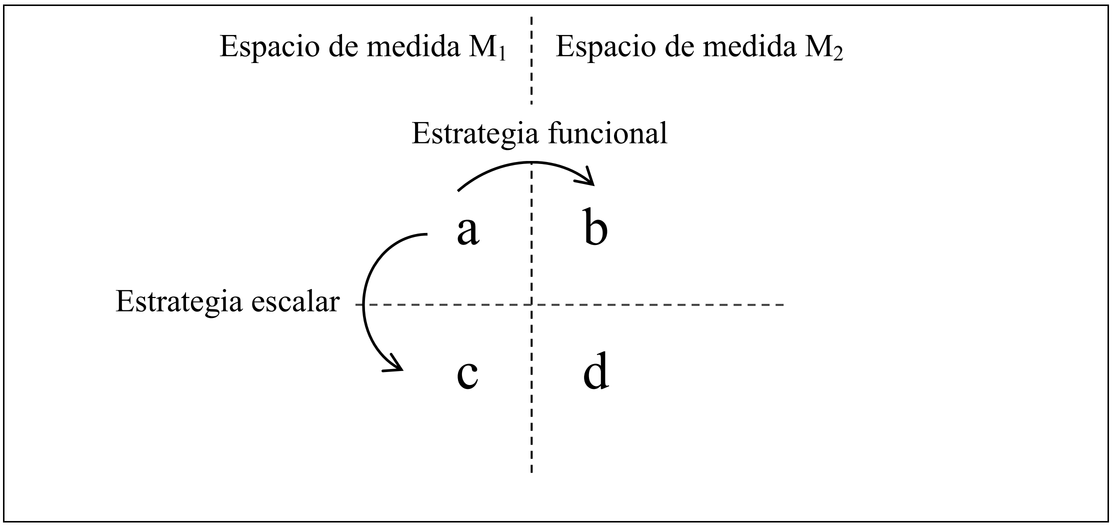


Fig. 1.7: Estrategias escalar y funcional de acuerdo con el modelo de Vergnaud.

Ahora bien, de acuerdo con el mismo Vergnaud (1983), el uso de estas ideas en los problemas de mezcla (del tipo utilizado en las investigaciones de Noelting, 1980a; 1980b; Karplus, Pulos y Stage, 1983a; 1983b), no es del todo adecuado. Al respecto el autor señala: “….problemas de comparación de gustos, concentraciones, o densidades, como los usados en la mayoría de los estudios sobre el desarrollo de razón (por ejemplo, Noelting, 1980a; 1980b) son diferentes a problemas de proporcionalidad directa (isomorfismo de medidas).” (Vergnaud, 1983, p. 165).

Según Vergnaud el problema está en que en el modelo de isomorfismo de medidas existen dos variables relacionadas y un invariante que es la función-relación. Mientras que en los problemas de mezcla utilizados por Noelting la función es también una variable.

Autores como Tourniaire y Pulos (1985) no refieren a esta problemática del uso de los términos “dentro”/“entre”. Asumen de manera directa la propuesta de Vegnaud (1983; 1988), de modo que utilizan las relaciones: (razón interna → método escalar) y (razón externa → método funcional). Es decir, en correspondencia con razones internas está el uso de la estrategia escalar, mientras para razones externas corresponde el uso de la estrategia funcional.

Además, estos autores, basándose en los resultados de los trabajos de Karplus, Pulos y Stage (1983a; 1983b), señalan que la preferencia de los sujetos en el uso de una u otra estrategia está en relación con el contexto del problema: “Algunos contextos conducen al uso de estrategias escalares, mientras otros sugieren relaciones funcionales” (Tourniaire y Pulos, 1985, p. 185).

Otros autores como Lamon (2007) reconocen la complejidad existente en la diversidad de significados-usos que se ha hecho de los términos “dentro” y “entre” para designar estrategias de resolución de problemas de proporción. Para Lamon (2007, p. 632):

> Otro asunto persistente es el de la confusión en la nominación de las estrategias de los estudiantes para determinar la equivalencia de razones —la estrategia *dentro* o la estrategia *entre*— que resultó de los diferentes usos de estos términos en investigaciones iniciales, dependiendo de si el investigador provenía del ámbito matemático o del ámbito de las ciencias.

De manera que, con el objeto de aclarar la confusión percibida en el uso de estos términos, Lamon (2007) provee de una explicación en la que identifica el uso de un significado alternativo para el término “sistema”. Lamon sostiene que Karplus Pulos y Stage (1983a; 1983b), Noelting (1980a; 1980b) utilizan el término “sistema” como: “un conjunto de elementos interactuando” (Lamon, 2007, p. 634). Luego la estrategia “dentro” implica el uso de razones en las que interactúan elementos (dentro de un sistema: vasos de jugo de naranja por vasos de agua), por lo que un tipo de razón externa en los términos de Freudenthal (1983), es una razón interna en los términos de Karplus Pulos y Stage (1983a; 1983b), Noelting (1980a; 1980b). Esta aclaratoria de Lamon, aún cuando provee de una explicación sobre la confusión existente en la nominación de estas estrategias, no da respuestas a lo señalado por Vergnaud (1983, p. 165), antes referido.

En consecuencia, el uso de una terminología estándar en cuanto a lo que refieren las estrategias “dentro” y “entre”, para diferentes contextos (problemas de mezclas, problemas de otros tipos), aún requiere de mayores aclaraciones. Lo que parece gozar de consenso en el ámbito de la investigación, lo que interpretamos de la exposición de Lamon, es hacer un uso diferenciado de estas estrategias, de acuerdo con el contexto de los problemas que se trate. En este sentido, parece que lo más conveniente es utilizar una interpretación relativa para las estrategias “dentro” y “entre”, según se trate de problemas de mezcla o no. Además debe observarse que en los problemas de mezcla, debido a su naturaleza de “mezcla”, las razones siempre son de tipo externas y las razones internas no tienen sentido. Asimismo, el enfoque funcional es el único posible y el escalar no tiene lugar. Reconociendo este aspecto inherente a este tipo de problemas, adquiere mayor pertinencia el uso diferenciado de los términos “dentro” y “entre” en función del problema que se trate.

1.7.2. Estrategias de construcción progresiva (Building-up strategies)

Posiblemente haya sido Piaget y colaboradores los primeros en referir a la existencia de un razonamiento pre-proporcional de compensación global y de naturaleza aditiva, que precede a estrategias multiplicativas (Piaget et al., 1977). Una forma de manifestación de este tipo de razonamiento es la realización de una adición en lugar de una multiplicación en los casos en que las razones son enteras. Un ejemplo de este tipo de situación lo presentamos en la Fig. 1.8.

Tourniare (1986), quien inicialmente no había considerado este tipo de estrategia entre las previstas para su estudio, encontró que la estrategia de “adición repetida” fue la más ampliamente utilizada por los sujetos, concluyendo que esto se puede deber a dos falencias: (a) falta de dominio de la multiplicación y/o (b) no poder vincular la adición repetida con la multiplicación. No obstante, otras investigaciones (Fischbein, Deri, Nello y Marino, 1985; Kaput y West, 1994; Lamon, 1995) reconocen el uso de la adición repetida, como una manifestación informal e intuitiva, requerida para el desarrollo del razonamiento multiplicativo, el cual es esencial para la construcción del razonamiento proporcional.

En este orden de ideas, nos interesa observar la relación (proximidad y pertinencia) del uso de este tipo de estrategia (aditiva correcta) y el desarrollo del razonamiento proporcional.

Problema:

Pedro ha comprado 3 barras de pan por 1,80 euros. ¿Cuánto deberá pagar Cristina por 6 barras del mismo pan?

Resolución:

3 barras de pan valen 1,80 €
\+ <u>3 barras de pan valen 1,80 €</u>
6 barras de pan valen 3,20 €

Cristina debería pagar 3,20 € por las 6 barras de pan.

Fig. 1.8: Ejemplo de un razonamiento pre-proporcional

En el trabajo de Karplus, Karplus y Wollman (1974), en el cual estos investigadores describen las estrategias de resolución exhibidas por un grupo de escolares, ante el problema ―Mr. Tall y Mr. Short”, identifican el uso de este tipo de estrategia como ―proporción incompleta” y la describen como: ―…una explicación en la que se usa una razón correcta pero esta se aplica por adición” (p. 478). Un ejemplo del uso de esta estrategia fue exhibido por Florencio un alumno de 6º curso de primaria, durante la aplicación de una prueba exploratoria, puesta en juego para la realización de un trabajo de investigación cuyos resultados fueron informados en Rivas, Godino y Castro (2012).

Resulta interesante observar la nominación que dan Karplus y colaboradores a esta estrategia (proporcional incompleta). Lo cual provee de mayor fuerza la concepción de esta estrategia como la manifestación de un razonamiento pre-proporcional, inmediatamente inferior al proporcional propiamente dicho.

En Karplus, Pulos y Stage (1983b), Karplus y colaboradores sintetizan en cuatro grandes categorías las respuestas dadas por lo sujetos de su estudio, pero en esta síntesis la estrategia aditiva correcta es incluida en la categoría P (proporcional).

En la Fig. 1.9 presentamos una transcripción de las mismas, así como un ejemplo de una de las explicaciones dada por uno de los sujetos del estudio, calificada por Karplus y colaboradores como una explicación proporcional. Esta inclusión refuerza conceder carácter proporcional a esta estrategia y su proximidad con el uso de un razonamiento proporcional avanzado. Podría decirse que este tipo de estrategia corresponde con un razonamiento proporcional inicial o de escolares en edades tempranas (Tourniare, 1986), lo que justifica más aún el uso de la nominación ―pre-proporcional" utilizada en varios estudios por diversos investigadores (Lamon, 1993b; Lesh, Post y Behr, 1988; Piaget et al., 1977).

Categoría	Significado
Categoría I Incompleta, ilógica	No sabe, adivina, inapropiado uso de operación numérica.
Categoría Q Cualitativa	Comparación cualitativa de cuatro cantidades dadas, utilizando lo términos más, menos, u otros equivalentes.
Categoría A Aditiva	Uso de los datos para calcular y comparar diferencias y los restos de esas diferencias.
Categoría P Proporcional	Uso de los datos para calcular y comparar relaciones proporcionales, posiblemente con errores aritméticos

Ejemplo del uso de la estrategia aditiva correcta, por parte de uno de los sujetos del trabajo de Karplus y colaboradores, al comparar las razones 4/10 y 6/15, en la situación del ―rompecabezas de la limonada":

―Tienen el mismo gusto: 4 y 4 y la mitad de 4 es 10, 6 y 6 y la mitad de 6 es 15"

Fig. 1.9: Categorías de respuestas y un ejemplo de una respuesta incluida en la categoría P (proporcional), en el estudio de Karplus y colaboradores (Adaptado de Karplus, Pulos y Stage (1983b, pp. 54-55))

Con respecto a la categorización de estrategias de resolución propuesta por Karplus y colaboradores (Fig. 1.9), consideramos pertinente aclarar que la categoría A (aditiva), a la que refieren, es aquella en la que se pone en juego un tipo de estrategia aditiva errónea, ampliamente mencionada en la literatura (Hart, 1981; 1984; Kenny y Silver, 1997; Kilpatrick, Swafford, y Findell, 2001; Lesh, Post, y Behr, 1988; Misailidou y Williams, 2003a; Oliveira, 2009; Tourniaire y Pulos, 1985), en la que se reemplaza una comparación de índole multiplicativa por una comparación de diferencias ―dentro" y ―entre" razones. Sobre este tipo de estrategia damos mayores detalles en el sub-apartado 1.8.1.3 de este capítulo.

Con el fin de evitar confusiones conjuntaremos constantemente al término ―estrategia aditiva" los adjetivos ―correcta" o ―errónea". En el primer caso para referir a las estrategias fruto de un razonamiento pre-proporcional y en el segundo caso para referir al uso de comparaciones de diferencias dentro y entre razones.

En Khoury (2002), encontramos que esta investigadora, al referir a los niveles de razonamiento proporcional identificados por medio del problema ―Mr. Tall y Mr. Short", presenta una categorización similar a la propuesta por Karplus, Pulos y Stage (1983b) (Fig. 1.9), pero dejan sin lugar la categoría referida al uso de razonamientos cualitativos y se incluye el uso de la estrategia aditiva correcta como el penúltimo nivel de razonamiento proporcional, lo cual refuerza la hipótesis de la proximidad del uso de esta estrategia y el arribo a un nivel de razonamiento proporcional más avanzado.

Hart (1981; 1984) refiere a un uso de estrategias de construcción progresiva (building up strategies), en el que se incluye el uso de la estrategia aditiva que hemos venido refiriendo, pero, además distingue varias formas en que esta estrategia puede ponerse en juego. Específicamente refiere al uso del doble, el triple, la mitad, contar de cinco en cinco, de diez en diez el número de veces indicado por la razón, inclusive un uso en el que se conjugan dos de estos procedimientos. Por ejemplo, el caso del problema de 2cm de comida para una anguila de 10 cm, cuántos cm de comida se necesitan para una anguila de 25cm. Primero se duplica y luego se suma la mitad, como mostramos en la Fig. 1.10.

Luego de los trabajos de Hart (1981; 1984), se hace común referir al uso del razonamiento pre-proporcional o la puesta en juego de la estrategia aditiva correcta combinada con el uso del doble, la mitad, conteo de 5 en 5 … de 10 en 10 …, como estrategias de construcción progresiva, conocida en el habla anglosajón como ―building up strategies" (Koellner-Clark y Lesh, 2003; Lamon, 1993b; 2007; Lesh, Post y Behr, 1988; Kaput y West, 1994; Tourniaire y Pulos, 1985). De acuerdo con Tourniaire y Pulos (1985): ―Dos tipos básicos de estrategias correctas han sido identificadas en la literatura: multiplicativa y construcción progresiva" (p. 184). Además estos autores señalan:

> Las estrategias de construcción progresiva son frecuentemente observadas durante la niñez y la adolescencia… y se presenta como la estrategia dominante para muchos grupos de niños durante esas edades. Estas estrategias conducen a soluciones exitosas en problemas simples, pero son poco eficientes cuando los problemas contienen razones no enteras. Pocos estudiantes son exitosos

aplicando estrategias de construcción progresiva en problemas con números no enteros (Tourniaire y Pulos, 1985, p. 185).

Problema:

10 cm. de largo

Anguila X

25 cm. de largo

Anguila Y

Si la anguila X se come un tira de comida de 2cm de largo ¿de qué largo debería ser la tira de comida para la anguila Y?

Resolución:

2cm de comida para la anguila X de 10cm

Doble

Mitad

Una anguila de 20cm se come 4cm de comida

Una anguila de 5cm se come 1cm de comida

+

Una anguila de 25cm se come 5cm de comida

La tira de comida para la anguila Y debería ser de 5cm.

Fig. 1.10: Ejemplo de la puesta en juego de la estrategia de construcción progresiva en la que se hace uso del “doble” y la “mitad”. Adaptado de Hart (1981, pp. 91-92)

Se debe observar, en el ejemplo mostrado en la Fig. 1.10, un uso incipiente de un razonamiento multiplicativo, asociado a los términos doble y mitad. El uso de este tipo de patrones de razonamientos, así como los conteos en los que se utilizan unidades compuestas, asociados al desarrollo de estructuras multiplicativas ha sido estudiado ampliamente por diferentes investigadores (Charles y Nason, 2000; Kaput y West, 1994; Lamon, 1996; Moss, 2002; Steffe, 1988).

Según la literatura especializada, la adquisición de estos patrones puede proveer de un avance desde las formas de razonamiento aditivo al multiplicativo, necesario para el desarrollo del razonamiento proporcional. La iteración de la suma del mismo número y la repartición en partes iguales constituyen patrones de razonamiento que deben ser tomados en cuenta para el desarrollo del razonamiento proporcional.

De acuerdo con Kaput y West (1994; pp. 244-245)[15]:

> Observamos tres amplios tipos de competencias, de un razonamiento proporcional informal, de las cuales consideramos la primera como la más fundamental:
> 1. Coordinación de procesos de construcción aditiva ascendente/descendente.
> 2. Abreviación de procesos de construcción progresiva.
> 3. Enfoques sobre el factor unidad.

Para Kaput y West el segundo de estos patrones de razonamiento es una consecuencia directa del primero, basado en la versión de la multiplicación como adición repetida, lo cual, en su momento, se origina en el conteo con unidades diferentes de 1. Es decir, en el conteo 2 en 2, 3 en 3, 4 en 4, 5 en 5…

Lo correspondiente a la estrategia ―factor unidad” refiere a la reducción a la unidad, al precio unitario, la cual, según estos autores, se encuentra relacionada con las estrategias de construcción progresiva. Sobre el uso de la estrategia reducción a la unidad referiremos más adelante.

Las implicaciones del posible uso de este tipo de estrategias en la instrucción han sido referidas en diversas investigaciones (Hart, 1981; 1984; Lamon, 1993b; Kaput y West, 1994; Kenney, Lindquist y Heffernan, 2002). La literatura correspondiente coincide al señalar la necesidad de utilizar en la instrucción situaciones en las que los alumnos pongan en juego tales estrategias, puesto que esta puesta en juego puede contribuir con la comprensión inicial de situaciones multiplicativas.

El avance de las investigaciones ha ido enriqueciendo las descripciones sobre las actuaciones de los estudiantes y con ello la concepción de las estrategias de construcción progresiva. De acuerdo con Koellner-Clark y Lesh (2003, p. 93) una estrategia ―building up” se pone en juego cuando el sujeto es capaz de organizar la

[15] Hemos convenido utilizar la frase ―construcción aditiva ascendente/descendente” para traducir del inglés la expresión ―building-up/building-down”.

información de tal modo que determina un patrón, como un gráfico, una representación gráfica, una tabla de proporcionalidad. Luego, haciendo uso de tal patrón, es capaz de identificar la solución.

Los resultados referidos por las investigaciones referenciadas muestran, al menos, dos aspectos sobre las estrategias de construcción progresiva, a saber: (a) el carácter pre-proporcional de estas estrategias, que pueden actuar como medio para avanzar a un razonamiento proporcional más especializado, y (b) una evolución de este término en unísono con los avances de las descripciones de las actuaciones de los escolares, observadas en las investigaciones.

Además de estos aspectos, podemos observar ciertas características que hacen de este tipo de estrategias algo interesante. Entre las características observadas se encuentran:

(a) Son informales e intuitivas
(b) Se manifiestan de manera espontánea, han sido observadas en las actuaciones de los alumnos antes de los procesos de instrucción correspondientes
(c) Contribuyen con el desarrollo del razonamiento proporcional
(d) Son aplicables cuando las razones son enteras, pocos alumnos las aplican exitosamente en problemas cuyas razones no son enteras.
(e) Pueden ser objeto de planificación en la enseñanza, para guiar y fomentar el desarrollo del razonamiento proporcional desde edades tempranas.

En consecuencia, en la formación de futuros profesores de primaria, debería tomarse en cuenta el estudio de estrategias de construcción progresiva; uso, características, ventajas y limitaciones.

1.7.3. Procesos de unitización

Susan Lamon, profesora de la Universidad de Marquette-Milwaukee, ha venido trabajando durante las dos últimas décadas sobre el problema de la enseñanza y aprendizaje de la razón y la proporción. Su tesis doctoral, titulada: ―Ratio and proportion: Preinstructional cognition", presentada en el año 1989, bajo la dirección de Elizabeth Fennema, en la Universidad de Wisconsin-Madison, posiblemente marca el inicio de su producción científica en torno a esa problemática.

En este orden ideas, hemos observado una considerable producción de investigaciones (Lamon, 1989; 1993a; 1993b; 1994; 1995; 1996; 1999: 2006; 2007; Lamon y Lesh, 1992), en las que estudia las actuaciones de escolares al resolver distintas clases de problemas relativos a la proporcionalidad, lo cual refrenda su preocupación por esta problemática.

Uno de los aspectos comunes, presente en buena parte del trabajo de Lamon, es la identificación, ventajas y usos del proceso de unitización[16] en la construcción de razonamientos multiplicativos y, por ende, en el desarrollo del razonamiento proporcional. Este proceso consiste en el reagrupamiento cognitivo de una cantidad dada en paquetes o grupos de tamaño conveniente que serán usados como unidades. Otro de los procesos estudiados por Lamon es el de normalización[17], originalmente propuesto por Freudenthal (1983), consiste en la reinterpretación de una situación en términos de alguna unidad elegida. En las Fig. 1.11 y Fig. 1.12 se muestra un ejemplo del uso de estos dos procesos. Una forma alternativa y equivalente a la resolución presentada en la Fig. 1.11 la presentamos en la Fig. 1.12.

Se observa en estas figuras la manifestación de los procesos de unitización y normalización. El primero se observa al considerar la razón 2 : 3 como una unidad, el segundo proceso se observa al utilizar tal razón como elemento de comparación entre las relaciones de número de entradas por precio entre ambos grupos, chicas y chicos.

Otro aspecto de interés, que se observa en las Fig. 1.11 y Fig. 1.12 es que la aritmética que se utiliza en estas resoluciones es una aritmética en la que las razones, más que fracciones, se comportan como elementos de un espacio vectorial y las operaciones que se aplican son la adición de vectores y el producto de un escalar por un vector, propias de este tipo de estructura. Siguiendo esta línea de ideas, es posible observar una complementariedad entre las formas intuitivas y naturales de razonamiento de los sujetos y las estructurales-matemáticas que caracterizan las operaciones entre razones.

Esta identificación proporciona al sub-constructo razón una cualidad epistémica/cognitiva que lo faculta como elemento con mayor potencial didáctico (en

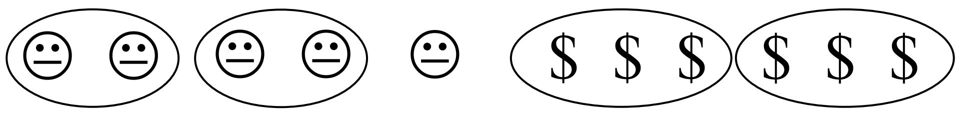
[16] Traducción del inglés que hacemos del término ―unitizing" propuesto por Lamon (1993a; 1993b; 1996; 2006; 2007).
[17] Traducción del inglés que hacemos del término ―norming" propuesto por Lamon (1993a; 1993b; 1996; 2006; 2007)

relación con los otros sub-constructos: parte-todo, medida, cociente y operador) para la planificación y desarrollo de la enseñanza y aprendizaje de los números racionales.

Problema:

¿Cuál grupo ha hecho el mejor negocio, el de las chicas o el de los chicos? 2 chicas obtuvieron 2 entradas al teatro por 3 dólares, mientras 5 chicos obtuvieron 5 entradas al teatro por 6 dólares.

Una resolución exhibida por un alumno:



Yo hice: (5 : 6) – 2(2 : 3) = (1 : 0)

(5 : 6) – (4 : 6) = (1 : 0)

El precio pagado por los chicos es mejor porque por la misma cantidad de dinero ellos tienen una entrada más

Fig. 1.11: Una estrategias de resolución ingeniosa (Adaptado de Lamon (2007, p. 657))

Este aspecto podría ser una de las características de este sub-constructo, que ha contribuido a reconocerlo como más apropiado para la introducción de la enseñanza de los números racionales, observado por diversos investigadores (Block, 2001; Clark, Berenson y Cavey, 2003; Lamon, 2007).

1.7.4. Reducción a la unidad

La reducción a la unidad consiste en un procedimiento por medio del cual se calcula la razón unitaria para luego multiplicar por el factor dado para obtener el resultado solicitado. En algunos casos, debido a un uso bastante frecuente del contexto de ―compras en el mercado” en los problemas de razón y proporción, en educación primaria, a esta estrategia se le conoce como ―estrategia del precio unitario”.

De acuerdo con Cramer y Post (1993a) esta estrategia se presenta como una de las más intuitivas, en las que se conjugan la comprensión de la situación a resolver y un uso apropiado de las relaciones numéricas involucradas. Esta característica de este tipo de estrategia ha sido reconocida en otros trabajos (Bosch, 1994; Kaput y West, 1994; Kilpatrick, Swafford, y Findell, 2001).

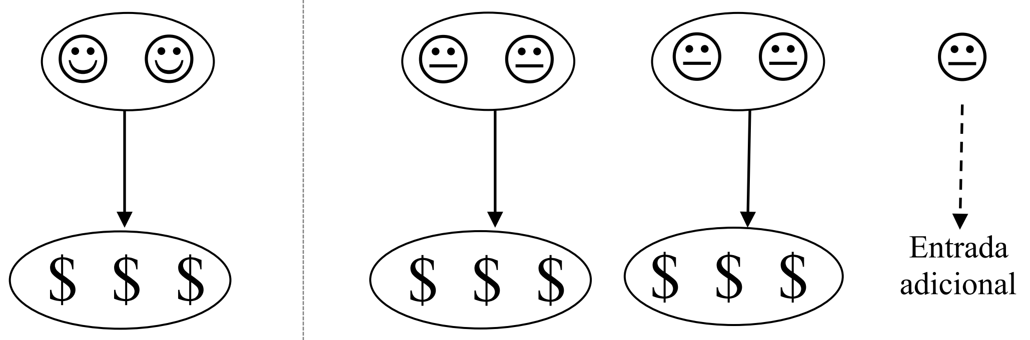
Chicas	Chicos
	
Aritméticamente:	
Las chicas: (2 : 3)	Los chicos (5 : 6) = (2 : 3) + (2 : 3) + (1 : 0)
Lo que se interpreta como: El precio pagado por los chicos es mejor porque por la misma cantidad de dinero ellos tienen una entrada más	

Fig. 1.12: Una estrategias de resolución ingeniosa alternativa, equivalente a la presentada en la Fig. 1.11.

Bosch (1994) reconoce el potencial intuitivo involucrado en el uso de esta forma de resolución, pero llama la atención sobre lo inadecuado que resulta el uso general de esta modelización en situaciones en las cuales las unidades no son fraccionables, y la reducción a la unidad conduce a que tales unidades queden expresadas por una fracción.

Por ejemplo, el problema del club de las canicas, en el cual, para pertenecer a este, cada 2 niños deben aportar 5 canicas ¿cuántos niños pueden afiliarse con 25 canicas? Observamos que calcular cuántas canicas debe aportar cada niño no tiene sentido práctico. Bosch (1994, p. 232) cita un ejemplo de la fábrica de cuchillos a principios del siglo XX, en el cual se señala que para fabricar 52 cuchillos se necesitaban 7 obreros, situación en la cual resulta absurdo preguntarse cuántos obreros eran necesarios para fabricar un cuchillo.

De manera que, siendo conscientes de esta limitación de la reducción a la unidad, el (futuro) profesor puede hacer un uso provechoso de la misma en dos sentidos: (a) iniciar y fomentar su uso con problemas de unidades discretas donde las razones siempre sean enteras, o con cantidades continuas en las que las razones pueden ser no-enteras, y (b) iniciar el avance hacia otra estrategia de resolución, reconociendo su limitación al trabajo con cantidades discretas/razones enteras o razones no-enteras/cantidades continuas.

Kaput y West (1994) consideran la reducción a la unidad como una estrategia del tipo construcción progresiva, a la cual hemos referido anteriormente, puesto que se observa que cumple con las características de este tipo de estrategias, a saber; se manifiesta como una estrategia intuitiva, exhibida por algunos alumnos previamente a su enseñanza, y, evidentemente, contribuye con el desarrollo del razonamiento proporcional.

La importancia del reconocimiento de estas estrategias de tipo intuitivas, utilizadas por los sujetos al resolver problemas relativos a la proporcionalidad, se encuentra en la posibilidad de fomentar, de manera natural, el desarrollo del razonamiento proporcional a través de la instrucción.

Karplus, Pulos y Stage (1983a); Lo y Watanabe (1997); Van Dooren, De Bock, Gillard y Verschaffel (2009), coinciden al señalar que la sustitución de estrategias intuitivas, presentes en los niños desde 4º y 5º curso de primaria, por el uso de algoritmos, fomentado generalmente por la instrucción, empobrece el desarrollo del razonamiento proporcional. Al respecto Lamon (2007) señala: ―Así pues, hacer que la instrucción se construya sobre la base de esas intuiciones preinstruccionales debería ser un aspecto de alta prioridad" (p. 645).

En este orden de ideas, los procesos de instrucción en la educación primaria, deberían ser planificados y desarrollados considerando el empleo de estrategias intuitivas como las descritas (construcción progresiva, unitización, normalización, reducción a la unidad), de tal modo, que su puesta en juego, provea de condiciones instruccionales favorables al desarrollo del razonamiento proporcional. Es por ello que cualquier programa de formación inicial de profesores debería comprender el estudio de este tipo de estrategias.

1.7.5. Uso de algoritmos

El uso de algoritmos en la resolución de problemas relativos a la proporcionalidad constituye una tecnología versátil y con sólidos fundamentos, tanto matemáticos como didácticos. Los fundamentos matemáticos refieren al uso de reglas como la del producto cruzado y la operación de división. Esta regla se muestra como equivalente a la regla: “el producto de los extremos es igual al producto de los medios”, la cual permitía resolver la “ecuación de proporcionalidad” de la forma $a : b : : c : d$, siendo a, d los extremos y b, c los medios, en la que generalmente uno de ellos es un valor desconocido.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$Esta forma de la ecuación de proporcionalidad evolucionó a la forma:

(1)

instituyéndose esta expresión como una nueva ecuación de proporcionalidad (Bosch, 1994). En esta expresión, la ecuación de proporcionalidad se traduce como una equivalencia de fracciones, o igualdad de fracciones.

En el caso en que uno de los números de la expresión es desconocido (problemas de valor faltante), la resolución de la ecuación se realiza por la regla del producto cruzado y la operación de división. Un ejemplo del uso de esta regla lo podemos ver en la Fig. 1.13. Este uso involucra una traducción del enunciado del problema a la forma “a es b como c es d”, que se traduce, en algunos casos, a la antigua forma de la ecuación de proporcionalidad ($a : b : : c : d$), o directamente a la nueva forma de la ecuación de proporcionalidad (1). En cualquier caso, el uso de la antigua forma se traduce en la nueva forma, quedando sin efecto la regla: “el producto de los extremos es igual al producto de los medios”.

De acuerdo con Gómez (2006), las diferentes formas en las que se presenta el uso de estas reglas, corresponden con manifestaciones particulares de lo que se denomina “regla de tres”. Una de las formas usuales de esta regla, posiblemente la más difundida desde el ámbito escolar actual, la presentamos en la Fig. 1.14. La potencialidad de la aplicación de esta forma de la regla de tres, consiste en que parece aproximar el enunciado de una situación problema de proporción con una simbolización que facilita su resolución con procedimientos aritméticos.

Enunciado	Resolución			Resultado o solución
	Traducción 1	Traducción 2	Ecuación	
	Modelado del tipo “*a* es *b* como *c* es a *d*”	Modelado ecuación (nueva)	Resolución de la ecuación	
José va al mercado y compra 3 barras de pan por 1,80 euros. ¿Cuánto dinero necesita Cristina si quiere comprar 5 barras del mismo pan?	Se verbaliza: 3 es 1,80 como 5 es a x Se escribe: (en algunos casos) 3 : 1,80 : : 5 : x En otros casos se escribe directamente la nueva ecuación	$\frac{3}{1,80} = \frac{5}{x}$	$3 \times x = 5 \times 1,80$ $x = \frac{9}{3}$ $x = 3$	Cristina necesita 3 euros para comprar 5 barras de pan.

Fig. 1.13: Procedimiento involucrado en la aplicación del “producto cruzado” en la resolución de un problema de proporción.

En términos más específicos, “la regla de tres” provee de un proceso de modelización, como el descrito en la Fig. 1.14., en el cual el enunciado del problema se traduce a un enunciado “más técnico” (Traducción 1), que luego se traduce a un enunciado de una ecuación (Traducción 2), que se resuelve con una multiplicación y una división. El resultado que se obtiene (un número) debe ser interpretado en función del contexto específico del enunciado del problema.

Enunciado	Resolución			Resultado o solución
	Traducción 1	Traducción 2	Ecuación	
	Modelado del tipo Si … entonces…	Modelado ecuación	Resolución de la ecuación	
José va al mercado y compra 3 barras de pan por 1,80 euros. ¿Cuánto dinero necesita Cristina si quiere comprar 5 barras del mismo pan?	Se verbaliza: Si 3 barras cuestan 1,80 euros entonces 5 barras cuántos euros cuestan Se simboliza: Si 3 barras →1,80 € 5 barras → x €	$x = \frac{5 \times 1,80}{3}$	$x = \frac{5 \times 1,80}{3}$ $x = \frac{9}{3}$ $x = 3$	Cristina necesita 3 euros para comprar 5 barras de pan.

Fig. 1.14: Procedimiento involucrado en la aplicación de la “regla de tres” en la resolución de un problema de proporción.

Respecto al uso de la regla de tres, existen diversos aspectos a los cuales es necesario referir. Uno de ellos es la presencia y evolución del uso de esta regla en el ámbito escolar. Sobre este aspecto recomendamos ver el trabajo realizado por Gómez (2006). Otro de los aspectos es el referido a lo aritmético y lo algebraico involucrado en su uso. Lo aritmético está expresado en el uso de dos operaciones básicas: multiplicación y división realizadas con valores numéricos específicos. Lo algebraico se reconoce en el uso de una ecuación y su resolución, particularmente consideraremos hacer uso de la noción de incógnita como un indicador de un razonamiento de tipo algebraico. La baja exigencia de abstracción y lo relativamente superficial de este tipo de razonamiento conduce a considerarlo como un razonamiento de tipo algebroide (Bosch, 1994).

Otro aspecto que se observa es su potencial uso por parte de los alumnos. Solar y Zamorano (2007) sostienen que el algoritmo de la regla de tres (en la forma como se presenta en la Fig. 1.14) es uno de los más utilizados por los alumnos para resolver problemas del tipo valor faltante, como el enunciado en dicha figura. Esta forma de uso de la regla de tres ha suplantado en buena medida el uso de la ecuación de proporcionalidad.

Los fundamentos didácticos del uso de estas reglas se encuentran en que ofrecen procedimientos generales, con pasos específicos, que al ser reproducidos por los alumnos les permiten resolver problemas de proporción. Lo general de la aplicación de estas reglas, lo especifico de los pasos y la posibilidad de ser aplicadas y reproducidos les provee de una potencial mecanización.

En este sentido, diversos investigadores han reconocido que, debido al uso mecánico de algoritmos y reglas, puede resolverse un problema de proporción sin tener garantía de que un razonamiento proporcional haya tenido lugar (Cramer y Post, 1993a; Hoffer, 1988; Lamon, 2007; Lesh, Post, y Berh, 1988). Al respecto, Hoffer (1988) señala:

> La capacidad de realizar operaciones mecánicas con proporciones no necesariamente significa que los estudiantes entienden las ideas subyacentes al pensamiento proporcional... la capacidad de comprender firmemente la proporcionalidad es un punto decisivo en el desarrollo mental (p. 293).

En esta misma línea de ideas, en un trabajo más reciente, Lamon (2007) sostiene:

> Frecuentemente, las proporciones pueden ser resueltas utilizando un conocimiento mecánico acerca de las fracciones equivalentes o relaciones numéricas, o aplicando un algoritmo (por ejemplo la regla del producto cruzado) que evitan el uso de la constante de proporcionalidad (p. 638).

Asimismo, Lesh, Post, y Berh (1988, p. 97) señalan que los estudiantes hacen uso de algoritmos como el del producto cruzado ($a/b = c/x \rightarrow ax = cb$, donde x es el valor a ser determinado) para evitar realizar un razonamiento proporcional. Un algoritmo análogo al producto cruzado lo representa el uso de la ―regla de tres”.

La posibilidad de llegar a resolver un problema de proporción sin que haya tenido lugar un razonamiento proporcional, representa una dificultad para el trabajo de enseñanza, pues engañosamente, a ―conveniencia” de alumnos y maestros, puede darse por sentado la adquisición del razonamiento proporcional cuando este, en realidad, no ha tenido lugar.

En este sentido, la búsqueda de procedimientos que garanticen la realización de un razonamiento proporcional debe constituir una inquietud permanente del profesor. Además, es requerida la realización de investigación que permita establecer las condiciones en las que el uso de tales algoritmos sea producto de la realización de un auténtico razonamiento proporcional.

Por otra parte, además de no garantizar la puesta en práctica de un razonamiento proporcional, el uso generalizado de algoritmos como la regla de tres conlleva a su utilización para resolver problemas que no son de proporcionalidad. Se potencia de esta manera la posibilidad de la manifestación de la ―ilusión de la linealidad”, introducida por De Bock y colaboradores (De Bock, Van Dooren, Janssens y Verschaffel, 2007; Van Dooren, De Bock, Depaepe, Janssens y Verschaffel, 2003). Sobre la manifestación de este tipo de error referiremos más adelante, en el sub-apartado 1.8.3.

1.7.6. Uso de representaciones

Uno de los aspectos incluidos en la resolución de los problemas, que no goza del beneficio de ser reconocido como una estrategia de resolución de acuerdo con la literatura consultada, lo encontramos en el uso de las representaciones.

No obstante, si compartimos que ―Las representaciones pueden ser vistas como facilitadores que hacen posible la vinculación entre el mundo real y el mundo matemático.” (Post y Cramer, 1989, p. 223), entonces deberíamos estar de acuerdo con que el uso de representaciones puede ser una estrategia de resolución de problemas, o al menos, formar parte de alguna estrategia.

Aún cuando aceptamos la interpretación del término representaciones como un constructo de índole cognitiva no-ostensiva, en nuestro trabajo, el significado al cual referiremos, se centra en la manifestación ostensiva de las representaciones, en las utilizadas de manera expresa y observable en las resoluciones de problemas. En esta línea de ideas es posible reconocer varias formas de representación, que van desde las más informales (representaciones icónicas o dibujos que representan objetos concretos) hasta las epistémicamente establecidas para representar, de manera formal, las relaciones de proporcionalidad (tablas de proporcionalidad, representaciones gráficas: sagitales, tabulares, cartesianas; aritméticas y algebraicas).

De acuerdo con Peltier (2003), al referir a las modalidades de las representaciones, señala:

> —El niño se desprende de la representación icónica para interesarse ahora sólo en las relaciones entre objetos. Entre las representaciones simbólicas, se encuentran modos de representación esquemáticos (diagramas de Venn, esquemas con flechas, cuadros, recta numérica, segmentos, tablas de proporcionalidad, etc.). Estos esquemas constituyen un medio para identificar con mayor claridad los objetos matemáticos decisivos para la conceptualización. Constituye una modalidad más abstracta y más rica en el plano operativo.” (pp. 40-41).

Identificamos en este caso una secuencia que va de lo icónico → a lo esquemático → a lo simbólico propiamente dicho, que es posiblemente necesaria desarrollar para el aprendizaje conceptual y procedimental de lo relativo a la proporcionalidad. Estas formas de representación forman parte de configuraciones semióticas que, desde nuestra perspectiva, son interpretados como elementos lingüísticos que se ponen en juego en los procesos de resolución de problemas matemáticos.

En el caso de nuestra investigación, el énfasis está puesto en el uso de representaciones icónicas y esquemáticas, utilizadas generalmente para traducir la situación problema y su resolución a un dibujo o un esquema, aquellas que son de mayor utilidad para la comprensión del problema por parte de los niños. En este orden ideas Kent, Arnosky y McMonagle (2002) presentan algunos ejemplos de estos tipos de representaciones, las cuales, además de facilitar la comprensión de situaciones multiplicativas-proporcionales, pueden coadyuvar al desarrollo del razonamiento multiplicativo y proporcional.

Asimismo, de acuerdo con NCTM (1989; 2000) la conexión de múltiples representaciones fomenta una mejor comprensión del contenido matemático. Particularmente, Cramer y Post (1993b) muestran que el uso de múltiples representaciones (tablas, gráficas formales, simbólicas, algebraicas), en torno a la proporcionalidad, permite distinguir entre situaciones proporcionales y no-proporcionales. Por tanto, en el desarrollo de nuestro trabajo, se estará observando y fomentando permanentemente el uso y comprensión de las representaciones formales (tablas de proporcionalidad, representaciones gráficas: sagitales, tabulares, cartesianas) y simbólicas-algebraicas relativas a la proporcionalidad, por parte de los futuros profesores, con el fin de mejorar su conocimiento del contenido matemático.

La potencialidad del uso de “buenas representaciones”, en el sentido que son de mayor utilidad para la comprensión del problema por parte de los niños, puede observarse en la Fig. 1.15 que hemos transcrito del trabajo de Empson, Junk, Domínguez y Turner (2005, p. 23), en la que se observa cómo un niño de 4º curso de primaria desarrolla un razonamiento proporcional haciendo uso de un dibujo, insertando en él modificaciones (reparticiones) que le conducen a resolver el problema propuesto.

Se puede ver en la Fig. 1.15 una primera aplicación intuitiva del concepto de razón, al hacer corresponder la mitad de las galletas con la mitad de los niños. Luego, el trabajo de resolución se concentra sobre una de las mitades, representando con la palabra “mirror” (espejo en inglés), la equivalencia entre las dos mitades, puesto que lo realizado con una mitad es reproducible con la otra mitad. Finalmente, una división gráfica de las galletas, en el sentido de “repartición equitativa”, que garantiza que a cada niño le corresponda igual cantidad de galleta, permite obtener una solución del problema. En esta última repartición lo que se busca es la razón unitaria “cantidad de galleta por niño”.

De acuerdo con Lamon (2007, p. 643), las representaciones de los estudiantes sobre proporciones se manifiestan sobre bases informales y cualitativas, las cuales, a la larga, se convierten en el fundamento de la capacidad de ellos para comprender este tópico cuantitativamente. Misailidou y Williams (2003a; 2004), en sus trabajos con alumnos en edades de 10 a 11 años, concluyen que el uso de dibujos les ayuda a comprender y a argumentar sobre sus actuaciones en situaciones de proporcionalidad.

No obstante, el estudio realizado por Cai y Wang (2006) parece mostrar que el uso de representaciones informales, cualitativas y concretas proveen de un limitado desarrollo conceptual y de pensamiento de los alumnos, relativo a la razón y la proporción. El carácter específico de estas formas de representación las imposibilita de ser generalizables. Mientras, el uso de representaciones simbólicas parece proveer a los alumnos de un desarrollo conceptual y de pensamiento que les posibilita utilizar estrategias generalizables para y en la resolución de problemas.

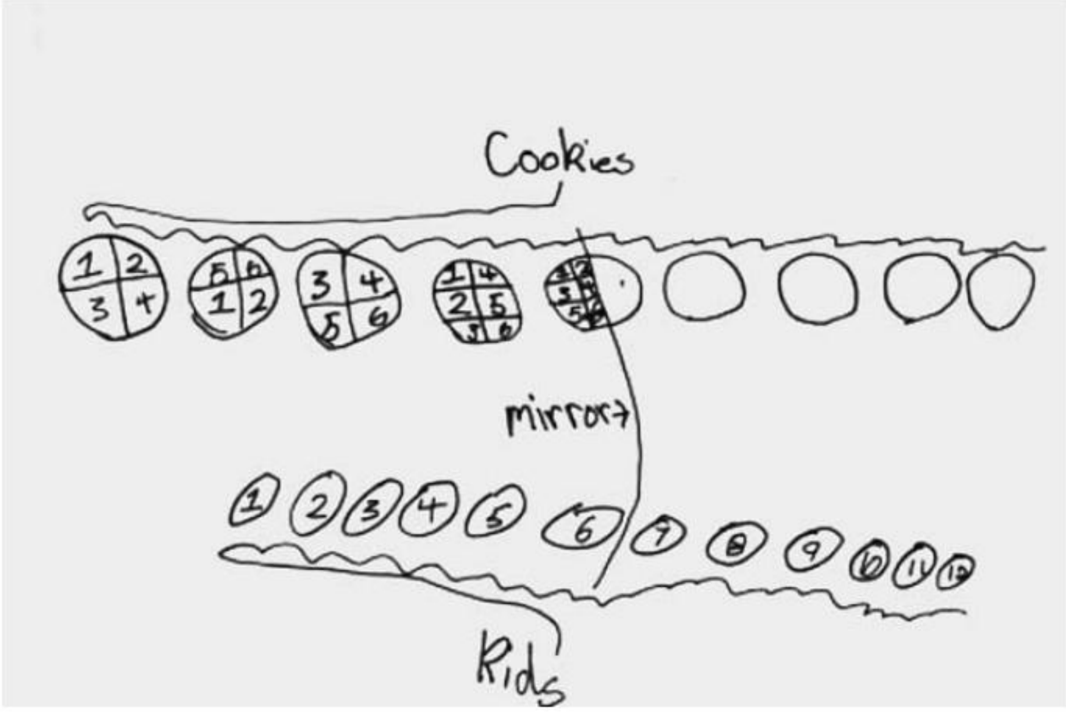


Fig. 1.15: uso de ―razón partitiva” en niños de cuarto curso: 9 galletas para 12 niños. (Tomado de Empson et al., 2005, p. 23)

Así pues, observamos el uso de representaciones como un recurso útil para el desarrollo de la comprensión de nociones relativas a la proporcionalidad desde edades tempranas, que puede dirigirse a formas más sofisticadas, hasta alcanzar el uso y comprensión del tipo de representaciones formales (tablas de proporcionalidad, representaciones gráficas: sagitales, tabulares, cartesianas) y simbólicas-algebraicas relativas a ese tópico. Esta trayectoria debería ser considerada en el desarrollo de la instrucción correspondiente.

1.8. Estudios de errores, dificultades y obstáculos

Uno de los aspectos de la enseñanza y aprendizaje que ha obtenido una atención considerable en el ámbito de la investigación de la educación matemática, es el estudio de los errores, dificultades y obstáculos en el aprendizaje de la matemática (Lannin, Barker y Townsend, 2007; Li, 2006; Rico, 1992; 1997). De acuerdo con Lannin, Barker y Townsend (2007, p. 44), ―La investigación sobre los errores de los alumnos tiene una extensa historia en educación matemática”. Más específicamente, según Li (2006):

> …existen tres enfoques en torno a la investigación de las concepciones de los estudiantes: el enfoque piagetiano…; la aplicación de la filosofía de la ciencia sobre la investigación en educación enfocada en la percepción de los estudiantes, sus concepciones erróneas, y cambio conceptual; y la investigación sobre errores sistemáticos. (p. 26).

Lo cual indica que el estudio de concepciones erróneas[18], errores, dificultades y obstáculos, representa buena parte del trabajo dirigido a investigar las concepciones de los estudiantes. De manera más general, se puede observar cómo ha ido imponiéndose, como una tendencia dominante, la referencia a las resoluciones de los sujetos participantes en los trabajos de investigación, con el fin de informar sobre el desarrollo del razonamiento, del pensamiento o en general de las capacidades cognitivas de tales sujetos.

Por otra parte, es un hecho conocido en la didáctica de la matemática, que el estudio de los errores, concepciones erróneas, dificultades y obstáculos, ha permitido establecer características de sistematicidad en su manifestación. Al respecto, Behr y Harel (1990) sostienen: ―Es un hecho probado que los errores de los estudiantes y las concepciones erróneas en diferentes campos de matemáticas y ciencia no suceden por azar, sino que hay uniformidad y un patrón en los comportamientos erróneos de los estudiantes" (p. 75).

Más aún, Rico (1992) agrega a esta característica, a partir del estudio de los planteamientos del racionalismo crítico, que se debe ―…admitir el error como parte constituyente de nuestra adquisición del conocimiento." (p. 5). Esta característica del error es reseñada por NCTM (2000) y convalidada en el desarrollo de diversos estudios realizados por Rico y colaboradores, Rico (1992; 1997).

Diversas investigaciones han identificado algunos de los errores más comúnmente manifestados por escolares al resolver problemas de proporcionalidad (Boyer, Levine y Huttenlocher 2008; Castro, Rico y Castro, 1992; Fernández Lajusticia, 2009; Fernández Lajusticia, Figueras, Gómez, Monzó y Puig, 2009; Hart, 1984; Karplus, Pulos y Stage, 1983a; Karplus, Pulos y Stage, 1983b; Lesh, Post y Behr, 1988; Tourniaire y Pulos, 1985).

[18] Utilizaremos la frase ―concepciones erróneas" para traducir del inglés el término ―misconceptions".

Con el objeto de mostrar algunos de los errores, dificultades y obstáculos, que más frecuentemente son manifestados por los sujetos participantes en las investigaciones, al resolver problemas relativos al razonamiento proporcional, presentamos a continuación una descripción de algunos de ellos.

1.8.1. Errores

De acuerdo con Tourniaire y Pulos (1985) los errores al resolver problemas relativos a la proporcionalidad pueden observarse en dos casos diferentes: (a) uso incorrecto de una estrategia apropiada, y (b) uso de una estrategia inapropiada.

El primer caso puede conducir a una considerable variedad de errores, puesto que supone un uso incorrecto de al menos una de las diferentes estrategias de resolución, expuestas en el apartado 1.7 en este capítulo. Generalmente los errores de este tipo son reportados como uso incorrecto de la estrategia correcta o por medio de una descripción específica del error que se comete al hacer un uso inapropiado de la estrategia respectiva.

El segundo caso es más acotado, puesto que refiere a procedimientos que siempre conducen a una resolución incorrecta del problema. De acuerdo con la literatura consultada se han identificado básicamente tres tipos de estrategias erróneas, a saber: (a) ignorar parte de los datos del problema, (b) uso de operaciones al azar con parte de los datos, y (c) estrategia aditiva errónea. A continuación ofrecemos una breve explicación de estos tres tipos de estrategias.

1.8.1.1. Ignorar parte de los datos

Este tipo de estrategia ha sido reportada por Fernández Lajusticia (2009); Fernández Lajusticia et al. (2009); Hart (1981); Karplus, Pulos y Stage (1983a; 1983b); Tourniaire y Pulos (1985). Esta se pone en juego cuando se comparan solo los antecedentes de dos razones, o los consecuentes y se da una respuesta basada en una de esas comparaciones parciales. Este tipo de estrategia no solo se observa en niños sino también en adolescentes. Fernández Lajusticia y colaboradores han incluido este tipo de estrategia en la clase: ―Comparación de cantidades de la misma especie" (Fernández Lajusticia, 2009; Fernández Lajusticia et al., 2009). Estos autores observaron en su estudio diferentes manifestaciones de este tipo de estrategia, puesta en juego por niños de cuarto, quinto y sexto curso de primaria.

1.8.1.2. Operaciones al azar con parte de los datos

Este tipo de estrategia ha sido reportado por Abramowitz (1975); Fernández Lajusticia (2009); Fernández Lajusticia et al. (2009); Karplus y Peterson (1970); Lamon (1993b), generalmente observado en problemas de valor faltante, en el cual la búsqueda del valor desconocido demanda realizar una operación con los otros tres datos del problema. Esta operación es realizada por el alumno (generalmente multiplicación o división) con parte de los datos dados, obteniendo un resultado numérico, el cual es presentado como solución. En el trabajo de Fernández Lajusticia y colaboradores este tipo de estrategia es reconocida dentro de la subcategoría “Predominio de la operatividad”, en la clase: “Operación con parte de los datos” (Fernández Lajusticia, 2009; Fernández Lajusticia et al., 2009). De acuerdo con estos autores, en el uso de esta estrategia por niños del segundo tercio de educación primaria “…no se pone de manifiesto una intención de relacionar los datos, sino que solamente intentan dar un resultado y la operación que realizan carece de significado con respecto a la demanda planteada” (Fernández Lajusticia, 2009, p. 123).

1.8.1.3. Estrategia aditiva errónea

Este tipo de estrategia se manifiesta cuando “…la relación entre las razones es calculada a través de la sustracción entre sus términos, y luego la diferencia es aplicada para obtener la segunda razón.” (Tourniaire y Pulos, 1985, p.186). De manera más general, se ha reconocido el uso de esta estrategia, haciendo el cálculo de la diferencia no sólo entre los términos de una misma razón, sino entre los términos correspondientes de dos razones diferentes (Fernández Lajusticia, 2009; Fernández Lajusticia et al., 2009)

Este tipo de error es el más ampliamente reportado en la literatura (Fernández Lajusticia, 2009; Fernández Lajusticia et al., 2009; Hart, 1981; 1984, 1988; Kenny y Silver, 1997; Kilpatrick, Swafford, y Findell, 2001; Lesh, Post, y Behr, 1988; Misailidou y Williams, 2003a; Oliveira, 2009). Debido a que su uso se basa en utilizar una diferencia dentro y entre los términos de las razones, esta es denominada por algunos investigadores como la estrategia de las diferencias constantes (Fernández

Lajusticia, 2009; Fernández Lajusticia et al., 2009; Kaput y West, 1994; Tourniaire y Pulos, 1985; Van Dooren et al., 2009).

Una característica interesante de esta estrategia es que dicha diferencia exhibe características similares a la constante de proporcionalidad, tanto que puede suplantarla casi por completo produciendo resultados “equivalentes” a los que es posible obtener con la constante de proporcionalidad. Por ejemplo, haciendo uso de la diferencia (suplantando la constante de proporcionalidad o razón unitaria) se puede obtener una sucesión de magnitudes pseudo-proporcionales, por medio de un procedimiento totalmente semejante al desarrollado para calcular una sucesión de magnitudes proporcionales.

Una segunda característica, que le provee de potencial manifestación, es su condición de presentarse como una estrategia de tipo informal-intuitiva, puesto que su puesta en juego no se presenta como resultado directo de conflictos de significado asociados a un procedimiento de instrucción particular (Kaput y West, 1994). Si bien es cierto que ha sido observada con mayor frecuencia en sujetos que tienen mayor familiaridad con el uso de estrategias aditivas, lo cual constituye uno de sus fundamentos claves, luego, en sujetos adultos, familiarizados con el uso de estrategias multiplicativas, también se hace presente.

Una tercera característica observada, que fomenta su uso, es la presencia de razones no enteras en los enunciados de los problemas (Hart, 1981; Kaput y West, 1994; Tourniaire y Pulos, 1985; Van Dooren et al., 2009). Una cuarta y última característica identificada, a la cual hemos referido antes, es que el uso de esta estrategia se manifiesta no sólo en niños y adolescentes. En Rivas, Godino y Castro (2012) mostramos cómo una de las futuras maestras, del grupo de estudio, hace uso de esta estrategia al tratar de resolver el problema “Mr. Tall y Mr. Short”.

1.8.2. Dificultades

Dentro de esta nominación hemos querido referir a tres interpretaciones diferentes del significado atribuido al término dificultades. En una primera parte, referiremos a ciertos aspectos epistémicos-cognitivos que deben ser alcanzados por los sujetos, pero que se “resisten” a ser logrados. En algunos casos estos aspectos guardan relación con conceptos adquiridos previamente que dificultan la adquisición-construcción de los mismos.

En una segunda parte, como segunda interpretación al término dificultades, asumimos lo más comúnmente reconocido en la literatura como dificultades, lo cual se encuentra asociado a las características de los problemas: tipos de números, de razón y de contextos (Abramowitz, 1975; Adjiage, 2005; Alatorre y Figueras, 2003; 2005; Cramer y Post, 1993a; Heller et al., 1989; Heller, Post y Behr, 1985; Karplus, Pulos y Stage, 1983b; Lamon, 1993; Lawton, 1993; Person, Berenson y Greenspon, 2004; Smith, 2002; Steinthorsdottir, 2006).

En tercer lugar, interpretamos el término dificultad como asociado a la complejidad involucrada en el desarrollo del razonamiento proporcional, lo que significa llegar a razonar proporcionalmente de manera adecuada (Cramer y Post, 1993a; 1993b; NCTM, 1989; 2000; Tourniaire y Pulos, 1985). De acuerdo con Godino (2002), esta complejidad es observada mediante el análisis de los conocimientos empíricos y matemáticos puestos en juego en la resolución de una tarea matemática.

1.8.2.1.Dificultades relativas a componentes claves involucrados

En esta primera interpretación que hacemos de las dificultades, encontramos en Lamon (1995, pp. 174-177) la identificación de tres componentes críticos asociados a la adquisición-construcción del razonamiento proporcional, los cuales, a nuestro entender constituyen aspectos epistémicos-cognitivos que deben ser alcanzados por los sujetos, pero que se resisten a ser logrados. Estos componentes son: (a) cambios absolutos y relativos, (b) sentido de razón, y (c) covariancia e invariancia: equivalencia operacional.

Cambios absolutos y relativos

Un primer aspecto esencial del desarrollo del razonamiento proporcional es comprender la razón como un índice comparativo, que generalmente expresa una relación multiplicativa entre dos medidas. Dar sentido a esta relación requiere del desarrollo del pensamiento relativo, para lo cual es necesario que la persona resuelva problemas en los que se requiere discriminar entre cambios absolutos y relativos (Lamon, 1995).

En la literatura se reconoce el uso de un tipo de problemas en los cuales se compara la diferencia del crecimiento entre dos seres (árboles, personas, plantas, serpientes…), cuya solución puede ser obtenida según dos perspectivas; una absoluta, desde la cual la solución se obtiene calculando la diferencia entre los tamaños finales alcanzados por los dos seres, y una relativa, desde la cual la solución se obtiene calculando la razón de crecimiento de cada ser y luego se realiza la comparación correspondiente (Allain, 2000; Kilpatrick, Swafford, y Findell, 2001; Lamon, 1995; Lamon, 2006; Lamon, 2007; Lamon y Lesh, 1992).

En cada caso la solución es correcta, de acuerdo con la perspectiva desde la cual se observe la resolución respectiva, puesto que se ponen en juego formas de pensamiento que explican cambios bien sea absolutos, o relativos, según sea el caso. Aún cuando se reconoce que ambas formas de pensamiento son necesarias, la forma absoluta se presenta con mayor frecuencia y actúa como una manifestación que sustituye la puesta en juego de la forma relativa (Kilpatrick, Swafford, y Findell, 2001; Lamon, 2006; Lamon, 2007). Es claro que el razonamiento aditivo, con el cual el sujeto se encuentra generalmente más familiarizado, actúa como base de la manifestación de la forma absoluta, este es en realidad el desencadenante de esa frecuente manifestación.

Como resultado de las investigaciones consultadas se observa: (a) la necesidad de realizar investigaciones que permitan describir con mayor precisión las manifestaciones de ambas formas de razonamiento, qué elementos específicos permiten identificar la puesta en juego de una u otra forma de razonamiento, cómo lograr que el sujeto desarrolle el razonamiento relativo, (b) la necesidad de una actuación intencionada, desde la instrucción, con el fin de desarrollar este tipo de razonamiento, y (c) hacer consciente al (futuro) profesor de las manifestaciones de estas formas de razonamiento y su legitimidad de acuerdo con la perspectiva desde la cual se observe.

Sentido de razón

En la literatura consultada hemos observado la manifestación de un uso de una razón intuitiva por parte de niños en edades muy tempranas, en contextos específicos (Empson et al., 2005; Freudenthal, 1983; Spinillo y Bryant, 1999; Streefland, 1985). No obstante, esta manifestación no ostensiva de la razón no parece ser suficiente para el desarrollo posterior del sentido de la razón requerido para el desarrollo del razonamiento proporcional propiamente dicho (Fernández y Llinares, 2011).

De acuerdo con Lamon (1995) es necesario que: “Los estudiantes sean capaces de distinguir entre situaciones que son organizadas de manera apropiada por razones, de aquellas que no lo son” (p. 176). El uso de la noción de razón a este nivel de sofisticación dista bastante del uso de esta noción en la forma intuitiva reconocida en otras investigaciones, antes referidas. Se reconoce entonces, en estos términos, la necesidad de conectar esa manifestación intuitiva, con esa forma sofisticada de la noción de razón.

La descripción de cómo debe darse esa conexión demanda mayor investigación. Asimismo, esa conexión debería ser lograda por medio de la instrucción. Entre algunos de los elementos identificados, dirigidos a alcanzar la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales, es decir aquellas organizadas por la noción de razón de aquellas que no lo son, encontramos:

(a) darse cuenta que una razón requiere de la existencia de una relación entre dos cantidades,
(b) dada una relación entre dos cantidades, se debe identificar si dicha relación es siempre verdadera, que los cambios sobre una de las cantidades implica cambios en la otra cantidad,
(c) que esa covariación es constante, que al conocer el cambio sobre la primera cantidad se tiene la idea de poder encontrar el cambio sobre la segunda cantidad, y
(d) que esa relación entre las cantidades es de tipo multiplicativa.

Esta última condición, sobre esa relación, parece sintetizar las anteriores, pero las anteriores condiciones constituyen procesos de reconocimiento necesarios para que esa síntesis se produzca.

De acuerdo con Lamon (1995), el desarrollo de estos procesos de reconocimiento puede ser iniciado con el uso de una diversidad de ejemplos de situaciones proporcionales y no proporcionales, referidas a distintos contextos, en los cuales los sujetos realicen análisis informales de esas situaciones, que podrían conducir al desarrollo de un sentido intuitivo sobre los contextos y las relaciones matemáticas asociadas a la proporcionalidad.

En este sentido, en el trabajo de Lamon (1995, p. 186), se observa una lista de diez situaciones proporcionales y no-proporcionales que pueden ayudar a desarrollar el sentido de razón, en los términos aquí expuestos.

Covariancia e invariancia.

En una proporción se manifiestan de manera simultánea la covariancia y la invariancia. La covariancia se manifiesta entre los términos de ambas razones, en la cual la relación-variación multiplicativa entre los términos de cada razón, determina cómo se manifiesta tal covariación. Mientras que la invariancia se manifiesta entre las razones de la proporción. De manera que la invariancia entre las razones se mantiene, debido a que la covariación en cada razón es la misma.

La covariancia constituye uno de los aspectos fundamentales de la manifestación de un razonamiento proporcional. Diversos trabajos (Godino y Batanero, 2004, p. 274) señalan que los escolares presentan dificultades para abordar con pertinencia la resolución de problemas en los que se pone en juego una relación de covariancia. Al referirse a esta problemática, Smith (2002, p. 15) sostiene que la literatura de investigación, acerca del aprendizaje de las razones y razonamiento proporcional, muestra que los alumnos tienen dificultades para entender lo que sucede en una situación de proporcionalidad; al intentar dar una respuesta, los estudiantes parecen no dar lugar a los razonamientos necesariamente implicados para acceder a un tratamiento adecuado de la situación; cómo las cantidades están relacionadas y cómo cambian.

Según este autor existe evidencia de que los estudiantes, durante su infancia, adquieren ideas importantes que más tarde sirven de fundamento a una comprensión más sólida de las razones y la proporción. Los investigadores han encontrado que los niños de preescolar tienen nociones intuitivas de covariación (Lamon, 1995). Por ejemplo, una manifestación de una idea intuitiva de covariación, puesta en juego en una situación de escala o semejanza, se observa en Freudenthal (1983), quien señala:

> Sin vacilación alguna los niños aceptan que se dibujen objetos en la pizarra diez veces más grandes que los de la hoja de trabajo… Sin embargo, los niños protestarían inmediatamente ante las modificaciones estructurales que violan la semejanza de la imagen… (p. 191)

En este tipo de razonamientos realizados por niños desde temprana edad, notamos no sólo una manifestación de una idea intuitiva de covariación (entre la imagen y el objeto original), en la que las reglas de la misma se basan en las condiciones estructurales de la semejanza: ―…. lo que es mutuamente igual en el original, debe ser mutuamente igual en la imagen…” (Freudenthal, 1983, p. 191), sino también la invariancia de las razones internas. El sujeto hace un uso implícito, no exteriorizado, intuitivo-cualitativo de la noción de razón y de proporción. Este uso de la noción de razón y proporción, de acuerdo con Lamon (1995), se manifiesta en un nivel visual e intuitivo en el que el niño ―…evalúa la adecuación de las relaciones de los tamaños entre las partes de un mismo objeto o entre diferentes objetos” (pp. 178-179)

No obstante, la utilización intuitiva-cualitativa inicial e implícita de estas ideas no parece ser suficiente. No llegar a manejarlas de manera más precisa parece dirigir, por ejemplo, al uso de reglas de covariación cualitativa de la forma ―más en A, más en B”, utilizadas para decidir cuándo una situación problema es de proporcionalidad y para caracterizar (erróneamente) la proporcionalidad. La reducción de la dinámica implicada en la construcción de la proporcionalidad al uso de una regla como la señalada, genera conflictos de comprensión y dificulta la puesta en juego de elementos lingüísticos, procedimientos y razonamientos involucrados.

Para efectos de este trabajo la regla de covariación cualitativa ―más en A, más en B”, tiene un uso diferente al propuesto por Tirosh y colaboradores (Tirosh y Stavy, 1999; Stavy, Babai, Tsamir, Tirosh, Lin y Mcrobbie, 2006). Para el desarrollo de nuestra investigación esta regla se aplica cuando en una situación, las variables A y B covarían, estando implícita, en las condiciones del problema, la implicación de tal covariación. De acuerdo con Bosch (1994), esta es una de las condiciones necesarias, utilizadas en el contexto escolar, para juzgar si una situación es de proporcionalidad o no. El error se produce cuando esta única condición es considerada como suficiente para sustentar tal juicio. Mientras que una regla de la forma ―más en A, más en B” en el sentido propuesto por Tirosh y colaboradores, refiere a poner en juego una implicación del tipo ―más en A → más en B” para decidir lo que sucederá con B, basado en lo que sucede con A. En el primer caso lo que importa es la covariación, mientras en el segundo lo importante es la implicación.

Un último aspecto que encontramos en esta primera línea de interpretación sobre las dificultades, es el referido al proceso de modelización que permite hacer las transformaciones requeridas para moverse con facilidad entre el uso de una razón como una fracción y viceversa. Un resultado interesante sobre la este proceso es reportado por Person, Berenson y Greenspon (2004), quienes señalan que una vez que el sujeto modela la situación de proporcionalidad por medio de fracciones, muestra dificultad para reconectar sus ideas con las que previamente había utilizado sobre razón.

1.8.2.2. Dificultades debidas al contexto

En esta segunda interpretación que hemos asumido para el término dificultades, Adjiage (2005) considera que la dificultad de las situaciones de razón puede ser descrita por dos variables; una referida al dominio físico-empírico y otra al dominio matemático, entendiendo por dominio físico-empírico a los tipos de razón que se manifiestan de acuerdo con las situaciones: razones de dos cantidades heterogéneas (por ejemplo, la velocidad), de medida, de mezcla, de alargamiento y de cambio de unidad. Con respecto al dominio matemático refiere al uso de la recta numérica, la escritura de fracciones y números decimales.

En este sentido, este autor asume como uno de sus supuestos que: ―Debido a sus características físicas y matemáticas, la recta numérica, en un ambiente informático, permite actualizar los tres niveles de separación/articulación dentro y entre el dominio físico y el dominio matemático" (Adjiage, 2005, p. 1). En la Fig. 1.16 hemos querido ilustrar el planteamiento de este autor respecto a los tres niveles de separación/articulación en torno al concepto de razón en los dominios físico y matemático, siendo los niveles: (a) dentro del dominio físico, (b) dentro del dominio matemático, y (c) entre los dominios físico y matemático.

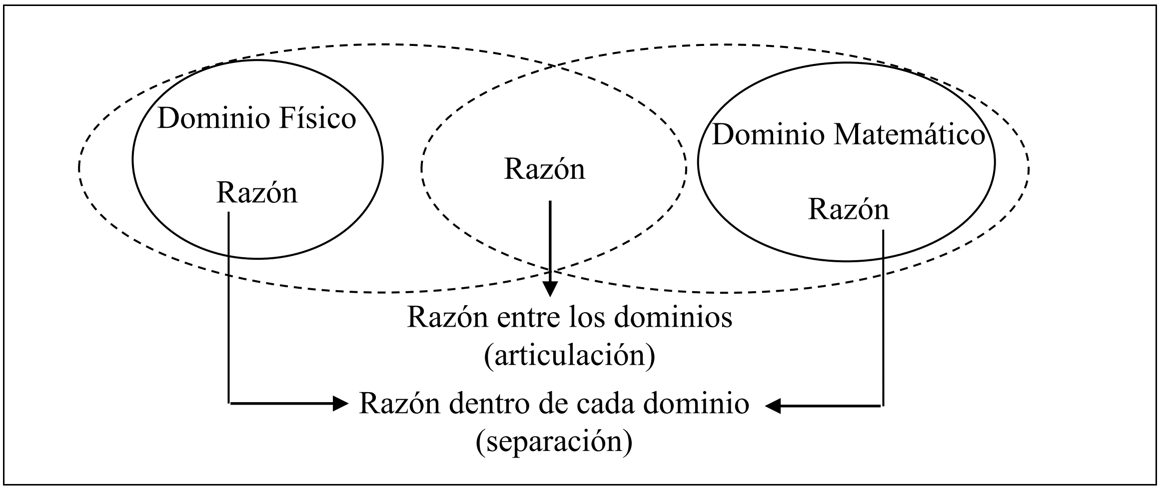


Fig. 1.16: Niveles de separación/articulación de razón en los dominios físico y matemático.

En términos más específicos a los señalados por Adjiage, diversos trabajos se han dirigido a estudiar el efecto de factores contextuales y de los tipos de razón (entera y no-entera) en la dificultad de los problemas de proporcionalidad, coincidiendo en buena parte en que los factores contextuales y numéricos tienen un efecto importante en la determinación de la dificultad que exhiben los sujetos al resolver los problemas (Alatorre y Figueras, 2003; 2005; Cramer y Post, 1993a; Heller et al., 1989; Heller, Post y Behr, 1985; Karplus, Pulos y Stage, 1983b; Lamon, 1993b; Person, Berenson y Greenspon, 2004; Sanz et al., 1996; Smith, 2002; Steinthorsdottir, 2006).

Al respecto, Cramer y Post (1993a) señalan: ―Los investigadores encontraron que el contexto del problema, así como también la naturaleza de las relaciones numéricas, influye en la dificultad del problema.” (p. 405) Sobre este asunto hacemos una exposición más detallada en el apartado 1.11, más adelante.

1.8.2.3. Dificultades como complejidad del contenido

En la tercera interpretación que hemos dado al término dificultades, relativo a la *complejidad involucrada* en torno al aprendizaje de la proporcionalidad, encontramos que el avance de los estudios sobre el razonamiento proporcional, ha proveído de información relevante sobre esa complejidad. De acuerdo con Tourniaire y Pulos (1985) aprender a razonar proporcionalmente es un proceso lento que se logra a lo largo de varios años. Asimismo, NCTM (1989, p. 82) señala: ―La capacidad de razonar proporcionalmente se desarrolla a lo largo de los años 5 – 8. Es de gran importancia… los alumnos necesitan enfrentar muchas situaciones… haciendo uso del razonamiento proporcional”

Razonar proporcionalmente implica comprender las relaciones matemáticas involucradas en las situaciones proporcionales (Cramer y Post, 1993a; 1993b; Lamon, 2007), lo cual incluye:

(a) relaciones de índole multiplicativa entre dos variables (razón) o entre relaciones de parejas de variables relacionadas (proporción),
(b) dichas relaciones pueden venir dadas en un mismo espacio de medida o entre diferentes espacios de medida,
(c) los números involucrados son de diferente naturaleza (enteros o racionales),

(d) se enuncian de manera diversa, de acuerdo con estructuras lingüísticas que varían según el contexto al que refieren,
(e) se modelizan por medio de sistemas de símbolos que involucran la combinación de procedimientos tanto aritméticos como algebraicos,
(f) se pueden representar algebraicamente por una ecuación de la forma $y = kx$, donde k es la constante de proporcionalidad o la razón unitaria de la proporcionalidad,
(g) geométricamente se representan por una línea recta que pasa por el origen del sistema de coordenadas cartesianas,
(h) analíticamente k representa la pendiente de la recta $y = kx$,, y cada punto (x, y), de esa recta, representa a cada pareja de valores que están en relación proporcional.

Esta complejidad va más allá de lo que consideramos el desarrollo del razonamiento proporcional, es la complejidad que está implicada en el dominio de la proporcionalidad como noción más general, que involucra aspectos matemáticos más avanzados que los implicados en la comprensión de situaciones de razón y proporción, generalmente enunciadas por medio de problemas de valor faltante y de comparación[19]. No obstante, el (futuro) profesor de educación primaria está llamado a estar consciente y desenvolverse adecuadamente en el manejo de los ítems de esta complejidad.

Esta complejidad se nutre de la diversidad de situaciones que pueden ser modelizadas por medio de la proporcionalidad. En la literatura se reconoce la existencia de una variedad considerable de problemas para los cuales se usa el razonamiento proporcional: problemas de valor faltante proporcionales, de comparación numérica, de predicción y comparación cualitativa, de porcentajes, de escalas, de conversión-transformación de unidades de medidas, entre otros tipos de situaciones-problema.

Otro aspecto, anexo a la complejidad señalada y la diversidad de problemas referida, consiste en que razonar proporcionalmente debe conducir a distinguir entre situaciones proporcionales y no-proporcionales (Cramer y Post, 1993a; 1993b; De Bock et al., 2007; Fernández y Llinares, 2011; Lamon, 2007).

De acuerdo con Cramer y Post (1993b) el conocimiento de las características matemáticas de las situaciones proporcionales, a las que referimos antes como relaciones matemáticas involucradas en tales situaciones, específicamente lo

[19] Sobre este aspecto referimos con más detalle en el sub-apartado 2.1.1 del capítulo 2.

concerniente a las representaciones (tablas, gráficos cartesianos, algebraicas), facultan para distinguir situaciones proporcionales y no-proporcionales. En estudios recientes, Fernández y Llinares (2011) concluyen que la distinción entre problemas proporcionales y de estructura aditiva puede ser lograda atendiendo a la relación multiplicativa entre las cantidades involucradas en la situación que se trate, específicamente, sus resultados ―subrayan la complementariedad de la comprensión de las relaciones proporcionales y aditivas en el desarrollo de la conceptualización de la idea de razón como una nueva unidad.” (Fernández y Llinares, 2011, p. 67).

En consonancia con la complejidad antes descrita, nuestro trabajo se dirige y se limita básicamente a tratar de desarrollar en futuros profesores competencias que le permitan desenvolverse con pertinencia en aspectos relativos a la enseñanza de la razón y proporción en la escuela primaria. A corto plazo, y como fruto de su proceso de formación, se persigue hacer consciente al futuro profesor de esta complejidad, por medio del reconocimiento de los objetos y significados matemáticos activados en el proceso de resolución de problemas proporcionales de educación primaria, en el que el uso de la idea de razón como una nueva unidad (cantidades intensivas) se manifiesta como un objeto clave para ese reconocimiento.

1.8.3. Obstáculos

Asumiremos la noción de obstáculo epistemológico de acuerdo con la idea desarrollada por Sierpinska (1994), cuyo origen se debe a los trabajos desarrollados por Bachelard y Brousseau, a mediados de la década de los setenta, del siglo pasado. En tal sentido, un obstáculo corresponde con un conocimiento que tiene el sujeto, que funciona bien en ciertas situaciones, pero que es aplicado en situaciones donde no es pertinente. Una de sus características esenciales es la persistencia de su manifestación, que obstaculiza la puesta en juego de un nuevo conocimiento; el que realmente corresponde.

Somos conscientes que esta aproximación al significado de la noción de obstáculo epistemológico, es una interpretación simplificada de la compleja exposición realizada por Sierpinska (1994), no obstante, un involucramiento más profundo sobre el uso de esa noción queda fuera de los objetivos de nuestro trabajo. Para mayores detalles sobre este tema recomendamos la revisión del trabajo de Villamil Mendoza (2008), quien expone detalladamente una tipología de obstáculos propuesta por Bachelard. Este trabajo está disponible en: http://www.ucm.es/info/especulo/numero38/index.html

En la literatura consultada observamos el estudio de las concepciones erróneas (en inglés: misconceptions) de los alumnos, término con el cual se ha referido a una noción similar a la de obstáculo epistemológico. Por ejemplo, la tendencia de las personas a usar la linealidad en contextos donde no es aplicable fue considerada por Leinhardt y colaboradores como una concepción errónea (Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990). Mientras, estudios más recientes se considera tal tendencia como un obstáculo epistemológico (Modestou y Gagatsi, 2007). Este uso diverso de interpretaciones obscurece el uso franco de estos términos.

Para efectos del desarrollo de nuestro trabajo, una concepción errónea es una idea errada acerca de un objeto o un proceso matemático, que se manifiesta con cierta sistematicidad, en condiciones similares. Haciendo uso de esta interpretación y de cómo ha sido interpretada la noción de obstáculo epistemológico, al inicio de este sub-apartado, consideramos sin lugar posibles confusiones en sus usos.

Hemos referido en el apartado anterior a la manifestación de diversas acciones como: (a) la falta de precisión, (b) el uso generalizado de una idea de covariación, y (c) el uso de reglas cualitativas del tipo "más en A, más en B" como caracterizadora de una situación de proporcionalidad directa; las cuales representan fuentes de error al momento de enfrentar situaciones problema relativas a la proporcionalidad. Particularmente este tipo de acciones sirven de sustento para considerar situaciones no-proporcionales, como proporcionales.

Este tipo de manifestaciones ha sido ampliamente estudiada por Van Dooren y colaboradores, quienes advierten sobre una sobrevaloración de la linealidad que ha dado lugar a un uso erróneo de la linealidad que ellos han denominado "ilusión de la linealidad", la cual consiste en aplicar procedimientos lineales en la resolución de problemas no lineales (De Bock et al., 2007; Van Dooren et al., 2003; Van Dooren et al., 2009; Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens y Verschaffel, 2005; Van Dooren, De Bock, Janssens, y Verschaffel, 2008).

Existen diferentes situaciones en las cuales puede manifestarse el uso de este error. De Bock et al, (2007) identifican tres tipos de estudios en los que ha sido observado este fenómeno:

> “(1) estudios sobre la falta de sentido de los estudiantes al resolver problemas matemáticos, (2) estudios sobre el razonamiento de los estudiantes en tareas de razón y proporción, y (3) estudios explícitamente enfocados a la sobrevaloración que dan los estudiantes a la linealidad” (p. 6).

En el primer tipo de estudios se encuentran aquellos en los cuales alumnos de 4º y 5º curso resuelven problemas pseudo-proporcionales[20] del tipo: “Si el mejor tiempo de Carlos al recorrer 100 metros es de 17 segundos ¿cuánto tardará Carlos en recorrer 1 km?”. El segundo tipo de estudios no requiere mayor explicación, constituye el más abordado en la literatura especializada. El tercer tipo de estudios refiere a investigaciones de la sobrevaloración de la linealidad que hacen los estudiantes al resolver problemas no-proporcionales del tipo aditivo, afín y constantes (De Bock et al, 2007, p. 9)

Una de las característica de los problemas pseudo-proporcionales es que buena parte de ellos no tienen una solución matemática sencilla y, al ser planteados en el ámbito escolar, son asumidos como situaciones proporcionales (Van Dooren et al., 2008, p. 317). Esta condición sugiere que este tipo de problemas sean utilizados solo para que los sujetos emitan juicios sobre su condición de linealidad (proporcionalidad/no-proporcionalidad), sin que se demande su resolución.

En este orden de ideas, uno de nuestros intereses particulares se dirige a determinar si un grupo de futuros profesores adquieren, durante su proceso de formación inicial, la posibilidad de discriminar entre situaciones proporcionales y no proporcionales. Para ello, tomando en cuenta lo expuesto sobre este asunto, hemos aplicado, en dos momentos diferentes, ítems en los que se incluyen de tres tipos: (a) del tipo pseudo-proporcionales, (b) no proporcionales del tipo: “relación lado del cuadrado y su superficie”, y (c) proporcionales del tipo identidad, cuya razón es igual a uno (capítulos 4 y 5). En tal aplicación, para los ítems del tipo pseudo-proporcionales o no-

[20] En general se refiere a problemas cuya estructura lingüística es similar a uno de proporcionalidad (Modestou, et al., 2008, p.134). Para efectos de nuestro estudio, este tipo de problemas generalmente refieren a situaciones que no tienen una solución matemática sencilla, en los términos expuestos por Van Dooren et al. (2008, p. 17), ejemplificado en el problema de Carlos.

proporcionales, no se solicita su solución, únicamente se pide que se juzgue si son proporcionales o no.

1.8.3.1. La ilusión de la linealidad como obstáculo

Las investigaciones desarrolladas por Van Dooren y colaboradores han dado pie a observar la persistencia de la sobrevaloración de la linealidad al resolver problemas pseudo-proporcionales o no-proporcionales en diversos contextos. Esa aplicación incorrecta de la linealidad es generalmente fomentada por la presencia de la idea de covariación en la estructura lingüística de los problemas (De Bock et al., 2007; Modestou et al., 2008).

En un sentido más avanzado, en el que se trata de estudiar el efecto de esa sobrevaloración de la linealidad al resolver problemas aditivos, Modestou y Gagatsi (2007) consideran este error como un obstáculo epistemológico que dificulta llegar a resolver de manera apropiada problemas no lineales que involucran el sentido de covariación en sus enunciados. Este hecho ha sido corroborado por Fernández y Llinares (2011; p. 77). Según Modestou, et al. (2008, p.134), la manifestación de la ilusión de la linealidad tiende a resistir, persistir y reaparecer, cuando la estructura lingüística del problema es similar a la estructura de un problema de proporcionalidad, que obstaculiza un desempeño adecuado ante problemas no proporcionales. Esta interpretación de la ilusión de la linealidad es coherente con el uso que hemos propuesto para el término obstáculo epistemológico. No obstante, debemos ser conscientes que este obstáculo no está directamente vinculado con el desarrollo del razonamiento proporcional a nivel escolar, se presenta más bien como una consecuencia de la falta de su desarrollo.

1.8.3.2. Concepciones erróneas y obstáculos potenciales del razonamiento proporcional

Queremos exponer en este sub-apartado algunas ideas que han sido deducidas a partir de lo expuesto hasta ahora sobre errores, dificultades y obstáculos relativos al razonamiento proporcional. Exponemos estas ideas de manera conjetural, las cuales requieren de estudios más profundos y detallados para su aceptación.

Si bien las dificultades referidas en el sub-apartado 1.8.2, constituyen potenciales conflictos para el desarrollo del razonamiento proporcional, hemos logrado identificar, de acuerdo con la literatura consultada, que son aquellas en las que interviene una idea de fundamentación intuitiva y/o cualitativa (estrategia aditiva, estrategias de construcción progresiva, uso de reglas del tipo “más en A, más en B”) las que se manifiestan con mayor frecuencia. De manera que, aquellas dificultades que se manifiestan basadas en el uso de ideas como las señaladas, constituyen potenciales obstáculos epistemológicos para el desarrollo del razonamiento proporcional.

En este orden de ideas, observamos en algunos estudios (Rivas, 2009; Rivas, Castro, Godino y Konic, 2009), el uso de la regla cualitativa de covariación “más en A, más en B”, como una de las manifestaciones que se utiliza para sustituir la puesta en práctica del razonamiento proporcional y el reconocimiento de la linealidad en una situación problema dada. Somos conscientes que esta manifestación se encuentra asociada a un uso incorrecto de la causalidad involucrada en la implicación: “situación proporcional → covariación de la forma “más en A, más en B””, en la que la regla de covariación es una condición necesaria, mas no suficiente.

Una referencia similar puede hacerse al uso de estrategias de construcción progresiva o el uso de algoritmos en la resolución de problemas de razón y proporción, puesto que pueden constituirse en manifestaciones que obstaculizan la puesta en juego de un razonamiento proporcional.

Por otro lado, observamos el uso de la estrategia aditiva errónea, la cual constituye una concepción errónea, como un denominador común de algunas de las dificultades identificadas: cambios absolutos y relativos, sentido de razón, covariancia e invariancia. Insistimos que buena parte de estas deducciones se realizan de manera conjetural y que requieren de mayor investigación.

Finalmente, queremos referirnos a algunas relaciones que hemos identificado entre el uso de la regla de covariación cualitativa “más en A, más en B” y la puesta en juego de la “ilusión de la linealidad”. Primero observamos la existencia de una diferencia entre el uso de esta regla y la sobrevaloración de la linealidad, la cual consiste en que la primera constituye una regla de razonamiento intuitivo-cualitativo, que es usada por los sujetos en el desarrollo de estrategias informales de resolución, es decir, esta puede formar parte del desarrollo-construcción de la noción de proporcionalidad (Bosch, 1994).

Mientras la ―ilusión de la linealidad" refiere a considerar como proporcionales situaciones que no son proporcionales.

Otra relación consiste en que en ciertos casos, como se verá en algunos de los resultados de este trabajo, es que la ―ilusión de la linealidad" puede manifestarse teniendo como sustento la aplicación de la regla intuitiva-cualitativa ―más en A, más en B". En efecto, al momento en que el sujeto reconoce en una situación esta forma de covariación, asume este aspecto como suficiente para considerar tal situación como de proporcionalidad, lo cual lo lleva a resolver la misma como una situación lineal.

El reconocimiento de estos aspectos y relaciones puede contribuir a la comprensión y descripción de los comportamientos exhibidos por los sujetos en el proceso de aprendizaje y desarrollo del razonamiento proporcional. Asimismo, consideramos necesario hacer consciente al futuro profesor de la manifestación de estas posibles dificultades y obstáculos relativos a la práctica involucrada en la resolución de problemas de proporcionalidad. En relación con este hecho, en los capítulos 4 y 5 mostramos que el uso de la herramienta de análisis epistémico y cognitivo aproxima a reconocer algunos de los posibles conflictos de significado que se pueden manifestar en el proceso de resolución de un problema de proporcionalidad.

1.9. Relaciones entre razón y fracción

Existen diferentes posiciones respecto a la relación entre fracciones y razones. Kieren (1980) considera la razón como un subconstructo de los números racionales. El trabajo de Kieren, en el cual identifica cinco subconstructos de los números racionales, es, posiblemente, una de las contribuciones más reseñadas respecto al estudio de los números racionales en la educación matemática. En este sentido, además de razón, son también subconstructos de los números racionales los siguientes: parte-todo, medida, cociente y operador.

Sin embargo, según Ohlsson (1988) ―... las ideas básicas propuestas [por Kieren] son similares a las interpretaciones del término fracción sugerida por otros investigadores" (p. 55), quedando el término razón interpretado como un tipo de fracción. Esta interpretación queda patentada en lo expuesto por Karplus, Pulos y Stage, (1983b), quienes señalan: ―..a los estudiantes se les muestra cómo representar la información en problemas de proporción como una ecuación de fracciones equivalentes, y resolverla por medio del producto cruzado y luego dividir” (p. 79).

Smith (2002, p. 4), llama la atención respecto a la necesidad de manejar con precisión estos términos, puesto que su interpretación errónea conduce necesariamente a dificultades de comunicación y en consecuencia a problemas de enseñanza y comprensión. De acuerdo con Norton (2005), es totalmente comprensible la confusión que presentan los alumnos respecto a estas ideas, toda vez que estos términos no son enseñados de manera articulada.

En adelante referiremos a aspectos que se identifican en la literatura sobre algunos inconvenientes que se generan por el uso indistinto de los términos fracción y razón.

Mack (1995, p.72), refiriendo a una de las ideas críticas para el desarrollo de la comprensión de operaciones con fracciones, señala que se debe comprender que: ―…una fracción representada simbólicamente es simplemente un número con un valor específico más que dos números enteros”. Desde esta misma perspectiva Stafilidou y Vosniadou (2004) identifican como una dificultad, para el desarrollo del concepto de fracción, el hecho de considerar el numerador y el denominador como números independientes.

Aún cuando el antecedente y el consecuente de una razón no deben ser considerados como números independientes, puesto que existe una relación multiplicativa entre ellos, resulta inconveniente la síntesis de los dos términos de una razón en un único número. Al respecto, Kilpatrick, Swafford y Findell (2001) señalan que se debe ―… notar cómo la importancia del marco contextual se pierde con el uso de esa notación abstracta” (p. 243). Siendo un poco más estrictos, deberíamos reconocer que identificar una razón con una fracción es prácticamente la negación del concepto de razón, como relación multiplicativa entre dos números. Este es uno de los conflictos fundamentales reseñados en la literatura, relativos al concepto de razón interpretada como una fracción (Block, 2001; Clark, 2003; Freudenthal, 1983; Smith, 2002).

El problema es complejo, pues inclusive en el campo de la investigación en educación matemática no existe un consenso respecto a los significados asignados a los términos fracción y razón. De acuerdo con Vergnaud (1983), al referirse a la diversidad de significados atribuidos a los términos fracción y razón señala: ―Sería inútil tratar de estandarizar el vocabulario. Sin embargo dado que las concepciones de los alumnos de números racionales necesariamente provienen de sus concepciones de fracciones y razones, es importante poner orden en ellos…” (p. 161).

Lesh, Post y Behr (1988) exponen aspectos específicos sobre fracciones, tasas, razones y cocientes que le permiten hacer un uso diferenciado de estos términos. Al respecto, proponen como aspectos específicos: “(1) cantidades singulares (extensivas o intensivas[21]), (2) relaciones entre pares de cantidades, o (3) operaciones a efectuar entre pares de cantidades.” (p. 111). En este sentido, proponen: “Fracciones son un tipo especial de cantidades extensivas… Razones son relaciones binarias las cuales involucran pares ordenados de cantidades (del tipo extensiva, intensiva, o escalar).” (p. 112). Con lo cual pareciera que las fracciones constituyen un tipo particular de razones; las razones extensivas.

Freudenthal (1983) y Smith (2002) coinciden al señalan que el uso del término razón encuentra su verdadero sentido cuando se utiliza como parte de una proporción o como herramienta de un razonamiento proporcional. No obstante, Lamon y Lesh (1992) señalan la importancia del concepto de razón para alcanzar objetivos cognitivos necesarios para avanzar en el pensamiento matemático que conduce al desarrollo del razonamiento proporcional. Uno de estos objetivos: “… crear una unidad que consiste de un par de cantidades relacionadas” (Lamon y Lesh, 1992, p. 330), es decir, desarrollar la idea de razón como una nueva unidad. El desarrollo de la idea de razón como una nueva unidad ha sido señalado, en estudios recientes (Fernández y Llinares, 2011), como necesario para distinguir entre situaciones proporcionales-multiplicativas y aditivas.

Diversas investigaciones han sido desarrolladas (Block, 2001; Clark, Berenson y Cavey, 2003; Confrey et al., 2009; Davis, 2003) en las que se estudian las relaciones entre fracción y razón, las implicaciones que dicha relación comporta en la enseñanza y aprendizaje de estos conceptos. De acuerdo con Davis (2003): “Estos problemas han sido extensamente estudiados, aún así los problemas continúan.” (p. 107). Los resultados de estos estudios insisten en la necesidad de que estos conceptos sean comprendidos en sus justas dimensiones, sean diferenciados-reconciliados y/o se

[21] Según Lesh, Post y Behr (1988, p. 109) una cantidad es *extensiva* cuando dice “el cuanto”, es decir, la “extensión” de una cantidad asociada a un objeto dado, y una cantidad es *intensiva*, o cantidad “por”, cuando expresan relaciones entre una cantidad y una unidad de otra cantidad.

estudien al menos de manera paralela (Confrey et al. 2009, p. 351). Block (2001) propone la enseñanza de aspectos relativos al concepto de razón de manera previa a lo relativo a fracciones.

En este sentido, Hart (1988) al referirse a uno de los resultados de los estudios desarrollados en el marco del proyecto CSMS (Conceptos Matemáticos y de Ciencias en Secundaria), señala: —…parece posible resolver ciertos problemas de razón sin el uso de operaciones con fracciones” (p. 208).

Las conclusiones de Lamon (2007) al respecto son más contundentes. Esta investigadora refiere, como una de las conclusiones de su estudio, que entre los cinco subcontructos de los números racionales, propuestos por Kieren (1980): parte-todo, cociente, medida, razón, operador; los más efectivos para la introducción de los números racionales son el de razón y la medida. Al respecto señala:

> Los alumnos que estudiaron razones y tasas como su primera interpretación de los números racionales desarrollaron una sólida noción de clases de equivalencia y de razonamiento proporcional en general… no tuvieron problemas con la adición y sustracción de fracciones. La mayoría de ellos desarrollaron sus propias formas de razonamiento en torno a la multiplicación y división… desarrollaron un buen conocimiento de razón, parte-todo y operador. (Lamon, 2007, p. 659).

Por otra parte, observamos en el trabajo de Lamon (2007), una visión sobre el término fracción, en la que esta autora muestra su desacuerdo respecto al uso del significado de fracción, en términos de la relación parte-todo, como su único significado. De acuerdo con Lamon, es comprensible esa difundida interpretación del término fracción, pues esta puede provenir del ámbito de la instrucción, dado que generalmente ese es el único significado atribuido a ese término. Según Lamon, lo que debe observarse es que existen otros subconstructos (interpretaciones) de los números racionales (medida, cociente, operador y razón) que tienen relación con el término fracción.

Aún cuando Lamon, de acuerdo con lo citado anteriormente, avala iniciar la interpretación de los números racionales a partir del subconstructo razón, la idea general que plantea sobre el término fracción hacen más compleja la relación entre fracción y razón, puesto que no provee de pistas que indiquen si el status que ella provee al término fracción, coloca a las razones como una forma particular de fracciones.

Otra de las perspectivas desde la cual se observa la relación entre fracción y razón la exponen Confrey y colaboradores, quienes proponen un ―…mapa de las trayectorias de aprendizaje para el razonamiento del número racional" (Confrey et al., 2009, p. 348). Este grupo presenta una visualización acerca de una posible secuenciación, de las nociones de fracción y razón, inscritas en el razonamiento en torno a los números racionales, en la que se observa un desarrollo paralelo de las trayectorias de aprendizaje de razón y fracción, basadas en la idea de equirepartición[22], a lo largo de los cinco primeros grados de primaria. Aún cuando no se trata de presentar las nociones de razón y fracción de manera aislada, el desarrollo de las secuencias paralelas de estas dos nociones, proporciona ideas que permiten observar particularidades de cada una que les provee de identidad propia y diferenciada. Para una visualización de esa propuesta recomendamos ver la representación gráfica de esas trayectorias de aprendizaje presentada por Confrey et al (2009; p. 348).

Un trabajo en la que se estudia la relación entre razón y fracción es el elaborado por Clark y colaboradores (Clark, Berenson, y Cavey, 2003). Según estos investigadores en la relación entre fracciones y razones es posible distinguir cinco modelos: (a) el conjunto de las razones como subconjunto de las fracciones, (b) el conjunto de las fracciones como subconjunto de las razones, (c) los conjuntos de las razones y las fracciones son disjuntos, (d) el conjunto de las razones y las fracciones son el mismo conjunto, y (e) los conjunto de las razones y las fracciones tienen partes comunes.

En su estudio Clark y colaboradores observan las resoluciones de problemas dadas por alumnos de acuerdo con los diferentes modelos. Observan que los alumnos que se mueven fluidamente en las diferentes regiones del diagrama (Fig. 1.17), relativo al quinto modelo, que ―van y vienen" entre razones, razones/fracciones y fracciones, tienen un mejor desempeño al resolver problemas que ameritan poner en juego un razonamiento proporcional.

En este orden ideas, Person, Berenson y Greespon (2004), refiriéndose a los cuatro primeros modelos mencionados, señalan: ―…ninguno de estos cuatro modelos parece explicar la complejidad de las relaciones entre razones y fracciones" (p. 18). Asimismo, estos investigadores coinciden con lo señalado por Clark y colaboradores, al referir a la

[22] Traducción que hemos asignado al término en inglés ―equipartitioning" que interpretamos como ―repartición equitativa".

necesidad de moverse fluidamente en y entre las regiones de ese quinto modelo. Una acotación realizada por Person y colaboradores, que nos parece interesante, es que el sujeto de su estudio parece quedar ―atrapado" en la región que corresponde únicamente a las fracciones, en los aspectos formales y procedimentales implicados por estas, mostrando con ello limitaciones de comprensión conceptual sobre razón y fracción.

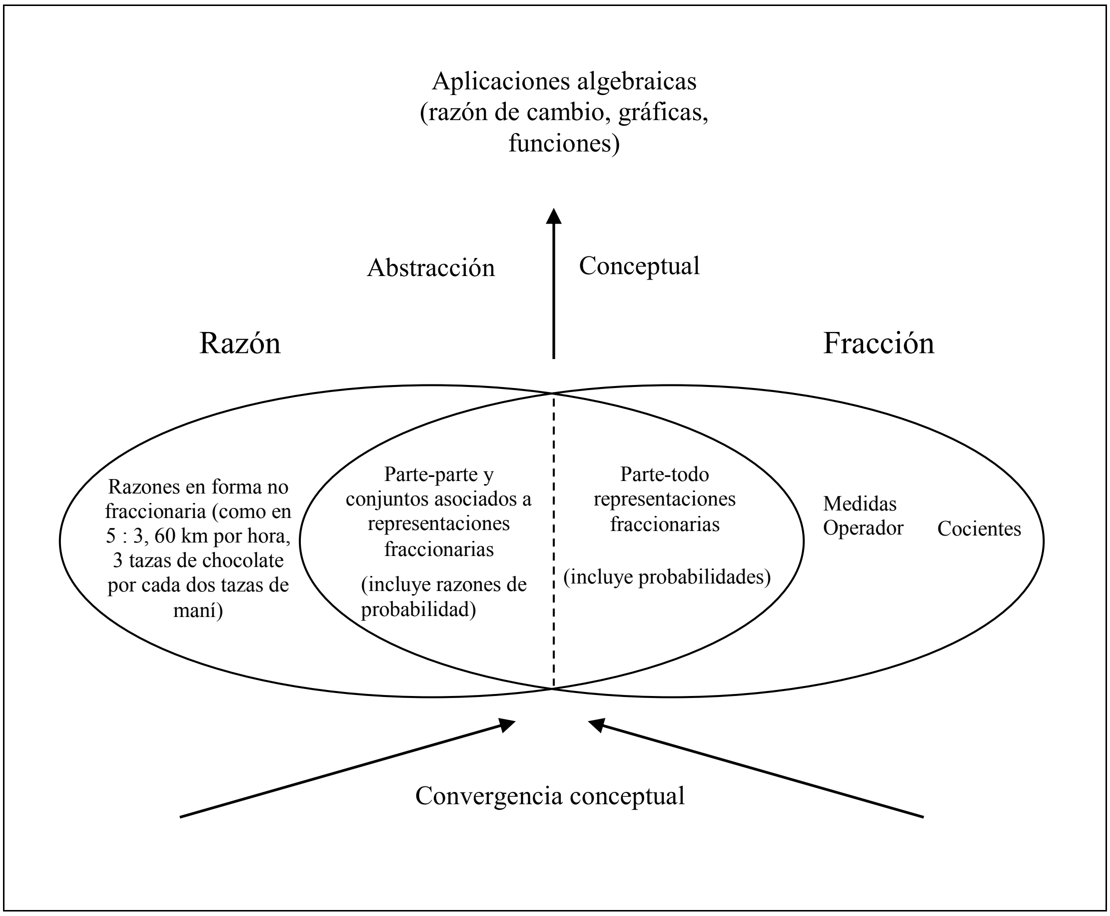


Fig. 1.17. Un modelo de relación entre razones y fracciones (Tomado de Clark, Berenson, Cavey, 2003, p. 307).

En relación con el modelo propuesto por Clark y colaboradores, consideramos que proveen de una interpretación de las relaciones entre razón y fracción desde un punto de vista cognitivo, que refiere básicamente a la necesidad de que el sujeto movilice cognitivamente las diferentes interpretaciones y relaciones entre: fracción, fracción/razón y razón.

Desde nuestra perspectiva, desde un punto de vista epistémico, uno de los modelos que parece clarificar de manera definitiva las relaciones entre fracción, razón y número racional es el modelo de Ohlsson (1988) de los constructos matemáticos.

Este modelo aplicado al caso de las fracciones, comienza observando que “*x/y*” simboliza el par ordenado $\langle x, y\rangle$, pero que un par ordenado es una entidad lógica más que una entidad matemática. Es necesario asignar al par ordenado un papel dentro de una teoría matemática para que el símbolo “*x/y*” haga referencia a una noción matemática. De hecho, el conjunto de los números enteros puede definirse como clases de equivalencias de pares ordenados en el producto cartesiano $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$. Pero, aún limitándonos a los pares ordenados $\langle x, y\rangle \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$, con la intención expresa de definir la noción de número racional, el par ordenado $\langle x, y\rangle$ puede hacer referencia a objetos que corresponden a cuatro “teorías matemáticas” diferentes: (1) la función cociente; (2) un número racional; (3) un vector binario; (4) un tipo particular de función compuesta.

Según Ohlsson, las cuatro teorías referidas a los números racionales (la función cociente; un número racional; un vector binario; un tipo particular de función compuesta) tienen diferentes aplicaciones. Los “términos cociente”, tales como “fracción”, “proporción”, “razón”, etc., refieren a esas aplicaciones. Para explicar lo que significa un término como “fracción” es necesario (a) identificar el constructo matemático subyacente y la teoría en que está inmerso, y (b) especificar cómo se aplica, es decir, especificar la clase de situaciones a la que se aplica y la correspondencia referencial entre el constructo y la clase de situaciones.

La Fig. 1.18 resume el sistema de nociones “movilizadas” por la “escritura fraccionaria *x/y*”. Observamos que el constructo matemático subyacente es el de la multiplicación, el cual se manifiesta de tres formas diferentes: operador escalar, adición repetida y producto cartesiano. Estas tres manifestaciones se encuentran asociadas a diferentes formas de la función cociente, que tienen lugar en una de las otras tres “teorías matemáticas” (un tipo particular de función compuesta, un número racional o un vector binario) que dan significado matemático al par ordenado $\langle x, y\rangle \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$, en una manifestación particular como uno de los términos cociente: operador, fracción o razón.

De manera que, de acuerdo con el modelo de Ohlsson, fracción y razón constituyen diferentes manifestaciones de los términos cocientes, relativas a distintos significados matemáticos atribuidos al par ordenado $\langle x, y\rangle \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$.

Veremos en el capítulo 7 una conjunción de los modelos de Clark y colaboradores, el modelo de Ohlsson y algunas de las contribuciones de un modelo de análisis epistémico/cognitivo, para observar algunos de los objetos matemáticos movilizados en el proceso de resolución de un problema de comparación.

1.10. El razonamiento aditivo y multiplicativo

El razonamiento multiplicativo es esencial en la construcción del razonamiento proporcional. Cramer Post y Currier (1993), señalan: —El componente crítico de las situaciones proporcionales es la relación multiplicativa que existe entre las cantidades que representan la situación.” (p. 160).

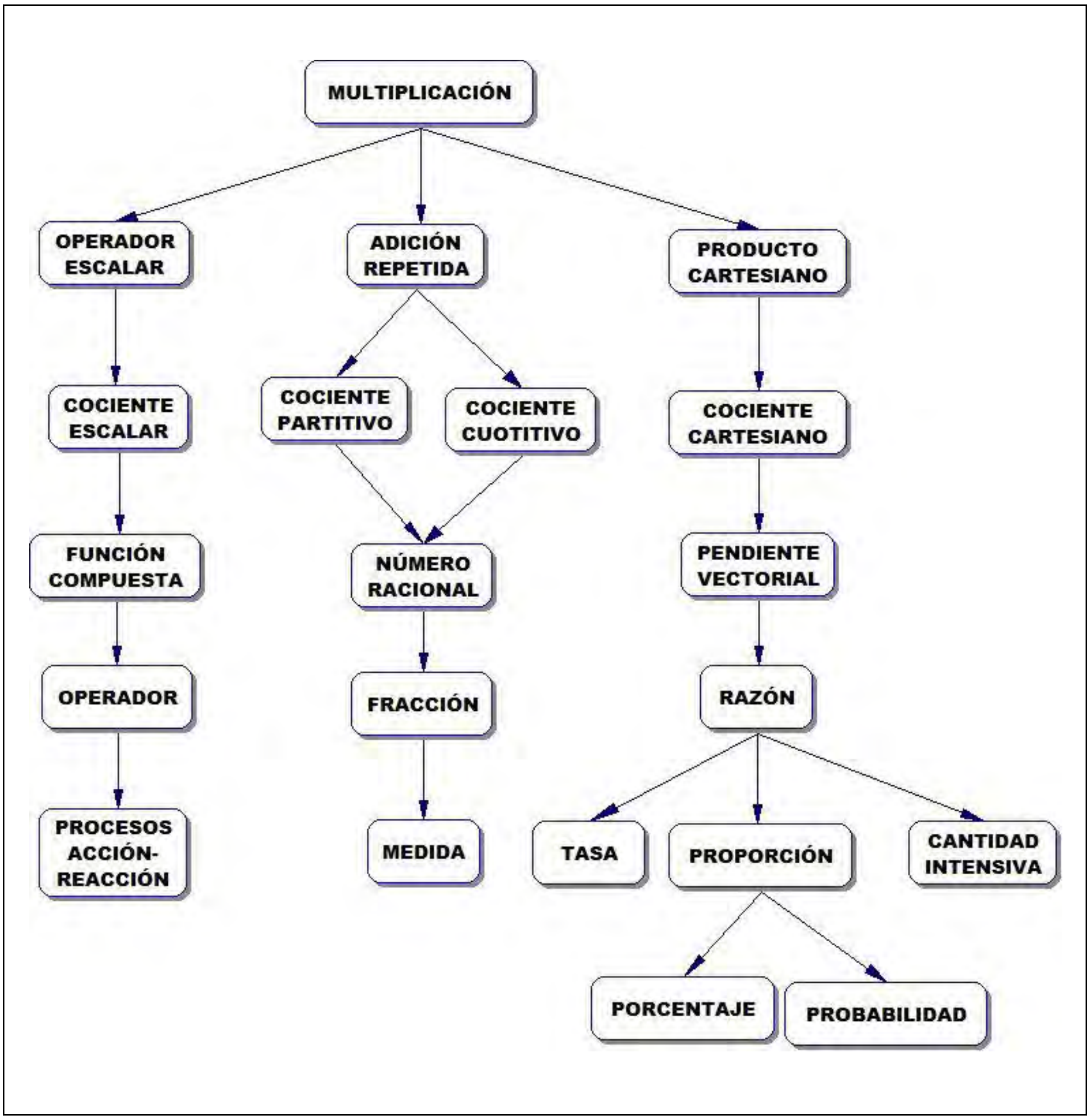


Fig. 1.18: Relaciones entre términos cociente (Tomado de Ohlsson, 1988; p. 88)

Estudios recientes reafirman este señalamiento (Fernández y Llinares, 2011; Lamon, 2007; Van Dooren, De Bock y Verschaffel, 2010). No obstante, lograr que los alumnos reconozcan esa relación multiplicativa sigue siendo un asunto que la educación matemática no ha logrado resolver en la práctica (Kenney, Lindquist y Heffernan, 2002; Kilpatrick, Swafford, y Findell, 2001). En su lugar, lo más frecuente es observar la manifestación de un razonamiento aditivo (erróneo), exhibido por escolares al resolver problemas proporcionales.

De acuerdo con Oliveira (2009), uno de los errores más estudiados en la literatura del razonamiento proporcional, al resolver problemas relativos a la proporcionalidad, es el uso de estrategias aditivas erróneas en lugar de estrategias multiplicativas. Este señalamiento es ampliamente reconocido en una considerable cantidad de trabajos desarrollados en este ámbito (Hart, 1984; Kenny y Silver, 1997; Kenney, Lindquist y Heffernan, 2002; Kilpatrick, Swafford, y Findell, 2001; Lesh, Post, y Behr, 1988; Misailidou y Williams, 2003b; Tourniaire y Pulos, 1985; Van Dooren, De Bock y Verschaffel, 2010).

Según datos obtenidos del National Assessment for Educational Progress los alumnos de cuarto curso muestran preferencia por el uso de razonamientos aditivos para resolver problemas multiplicativos (Kenny y Silver, 1997). Resultados similares, en una muestra con 112 niños de edades comprendidas entre 10 y 12 años, son señalados por Misailidou y Williams (2003b). Kenney, Lindquist y Heffernan (2002, p. 98), al referirse a la superación del uso de estrategias aditivas y lograr el uso de estrategias multiplicativas, sostienen que sigue siendo un reto lograr tal transición.

En el estudio de la literatura realizado por Tourniaire y Pulos (1985) se observa la manifestación frecuente, reportada en varias investigaciones, de la estrategia aditiva errónea de la diferencia dentro y entre razones, a la cual referimos en el sub-apartado 1.8.1.3, del presente capítulo. Asimismo, al observar las actas de las conferencias del ―International Group of Psychology of Mathematics Education (PME)”, de los diez últimos años, encontramos con considerable frecuencia estudios que refieren al problema del uso de la estrategia aditiva errónea en la resolución de problemas de razón y proporción.

Investigaciones recientes han dirigido su atención a las diferentes relaciones entre las manifestaciones del uso de estrategias aditivas y multiplicativas. No se trata únicamente del uso de estrategias aditivas en lugar de estrategias multiplicativas, sino también el uso de estrategias multiplicativas en lugar de estrategias aditivas (Fernández y Llinares, 2011; Van Dooren, De Bock y Verschaffel, 2010).

De manera que el avance de las investigaciones ha permitido identificar que existen diferentes casos de manifestación del uso de estrategias aditivas, multiplicativas y/o relaciones entre el uso de estrategias aditivas y multiplicativas. Entre algunos de esos casos encontramos los que indicamos en los siguientes sub-apartados.

1.10.1. Distinción entre cambio absoluto y relativo

Ya hemos referido, en el sub-apartado 1.8.2.1, al uso de un razonamiento absoluto en lugar de uno relativo. Ahora queremos mostrar su relación con la manifestación de una estrategia aditiva que puede ser correcta o incorrecta, de acuerdo con la perspectiva desde la cual se interprete.

Consideremos un problema en el que se compara la diferencia de crecimiento observado entre dos seres (plantas, árboles, serpientes, personas). Como hemos visto antes, la solución dada a este tipo de problema, como la diferencia absoluta de los tamaños finales observados de los dos seres, es correcta si dicha respuesta es interpretada desde una perspectiva absoluta, en cambio, es incorrecta, si es interpretada desde un punto de vista relativo (Kilpatrick, Swafford, y Findell, 2001, p. 242; Lamon, 2006; Lamon y Lesh, 1992).

En situaciones de este tipo, la comparación entre diferencias constituye una tendencia muy marcada, puesto que tiene sustento intuitivo y aritmético-aditivo que, desde una perspectiva de cambio absoluto, provee de una respuesta correcta. De acuerdo con Lamon y Lesh (1992), al referirse a este tipo de comparaciones de cambio (crecimiento), señalan: ―… un objetivo cognitivo importante es que los alumnos adopten un modelo de cambio que acomode ambas, tanto la perspectiva aditiva como la multiplicativa. (p. 331). Además consideran que: ―Los alumnos necesitan ambas perspectivas si se quiere que su pensamiento matemático avance más allá de la aritmética elemental. De hecho, una razón es un índice comparativo que conduce a la noción de magnitud relativa.” (p. 331).

Esta última interpretación, relativa al concepto de razón como índice comparativo, a nuestro entender, constituye el aspecto central de la comprensión del cambio relativo.

Es, por tanto, necesario que la enseñanza de la razón y la proporción en la escuela, incluya actividades que involucren esta interpretación del concepto de razón.

1.10.2. Existencia de estrategias aditivas correctas y erróneas

Hemos visto en el sub-apartado anterior la manifestación de una estrategia aditiva que, desde una perspectiva absoluta, funciona correctamente. También hemos visto, en el sub-apartado 1.7.2, la manifestación de una estrategia aditiva correcta, de uso común en la resolución de problemas de proporción, cuando la razón es entera. Entre una de las características observadas en estos tipos de estrategias se destaca la posibilidad de fomentar el desarrollo del razonamiento proporcional a partir de su uso y evolución.

En este caso diríamos que el uso de la estrategia aditiva correcta constituye una excepción a la regla en la que se establece que “el uso de estrategias aditivas es incorrecto, al resolver problemas de proporción”, que tienen *per se* estructura multiplicativa. No obstante, es necesario tener en cuenta la potencialidad que tienen estas estrategias para convertirse en obstáculos epistemológicos, que dificultan el desarrollo del razonamiento proporcional propiamente dicho.

Por otra parte, como expusimos en el sub-apartado 1.8.1.3, se ha observado el uso de una estrategia aditiva errónea al resolver problemas relativos a la proporcionalidad. Esta estrategia aditiva incorrecta comparte con la estrategia aditiva correcta su manifestación intuitiva, informal y la alta frecuencia con que se hace presente su uso en la resolución de problemas de proporción.

A partir de lo expuesto en los apartados referidos, se pueden observar varias de las diferencias entre ambos tipos de razonamientos, los cuales, a pesar de tener una estructura aditiva común, tienen efectos muy diferentes. La estrategia aditiva correcta sustituye una multiplicación por una adición repetida, generalmente aplicables a problemas con razones enteras, indicando el valor de la razón el número de veces que debe ser realizada la suma. Mientras, la estrategia aditiva errónea sustituye una multiplicación y posiblemente una división, por la diferencia dentro o entre los términos de la razón o de las razones, respectivamente.

En la revisión que hemos hecho de la literatura especializada, observamos la poca presencia de estudios sobre las relaciones entre la manifestación de estrategias aditivas correctas versus las erróneas. La mayoría de los estudios realizados sobre el uso de una u otra estrategia han considerado cada uso de manera aislada, sin informar de posibles relaciones. Consideramos necesario, por tanto, el desarrollo de investigaciones dirigidas al estudio de esas relaciones y sus implicaciones para el desarrollo del razonamiento proporcional.

1.10.3. Uso de modelos aditivos en problemas lineales y viceversa

Existen dos tipos de problemas que tienen varias características en común: (a) tienen un enunciado verbal con estructura lingüística similar, (b) vistos superficialmente parecen iguales, (c) cada uno provee de tres valores conocidos y uno desconocido, (d) son tratados en la escuela, al final de la primaria e inicios de la secundaria. Se trata de problemas –aditivos" y –multiplicativos".

Los problemas aditivos corresponden con un modelo del tipo $y = kx + b$, con $b \neq 0$, mientras los problemas multiplicativos corresponden con un modelo del tipo $y = kx$. El hecho de que presenten características comunes, principalmente que la estructura lingüística de su enunciado verbal sea similar, conduce a aplicar estrategias aditivas en problemas multiplicativos y estrategias multiplicativas en problemas aditivos. Estudios recientes (Fernández y Llinares, 2011; Fernández et al., 2010; Misalidou y Williams, 2009; Modestou et al., 2008; Van Dooren, De Bock y Verschaffel., 2010) se han dirigido a identificar estas manifestaciones y explicar aspectos que las sustentan. En el sub-apartado 1.8.3, sobre obstáculos, hemos referido a algunos resultados de estos estudios.

La complejidad involucrada en las situaciones referidas conmina a la realización de investigaciones que proporcionen a los (futuros) profesores vías para enfrentarlas. Lo que se observa hasta ahora es un avance que va desde las descripciones sobre la existencia de este tipo de situaciones, su puesta en juego por los sujetos participantes, hasta la identificación de elementos subyacentes, cada vez más específicos, que se manifiestan y determinan tales situaciones.

En este orden de ideas, Misailidou y Williams (2003b, p. 238) al hacer un estudio sobre la tendencia al uso de razonamientos aditivos en la resolución de problemas de razón y proporción, de 673 alumnos, entre 10 y 14 años, confirman que uno de los factores decisivos para el uso de este tipo de razonamientos es la estructura numérica del problema, siendo el uso de razones no enteras un desencadenante del uso de razonamientos aditivos en la resolución de problemas proporcionales.

Van Dooren et al. (2009) señalan una relación inversa entre el uso no adecuado de razonamientos aditivos y multiplicativos en relación con la edad: “El razonamiento aditivo decrece con la edad y el razonamiento proporcional se incrementa” (p. 287). Es decir, el uso de razonamientos aditivos para resolver problemas proporcionales decrece con la edad, mientras el uso de razonamientos multiplicativos para resolver problemas aditivos se incrementa con la edad. Este último resultado había sido referido por Fernández, Llinares y Valls (2008). Como complemento a los resultados señalados por Misailidou y Williams, relativo a la estructura numérica, Van Dooren y colaboradores observan que el uso de razones enteras fomenta el uso de razonamientos multiplicativos, y aditivos en los demás casos. En Fernández et al. (2010) se reportan resultados similares a los señalados en estudios anteriores, al observar las actuaciones de sujetos de primaria y secundaria, en los que se verifica la manifestación de un incremento del uso de la sobrevaloración de la linealidad en la medida que aumenta la edad.

Asimismo, Fernández y Llinares (2011) al observar la actuación de 197 escolares de los cursos 4º, 5º y 6º de primaria, en problemas aditivos y problemas proporcionales (multiplicativos) proponen “….desarrollar la idea de razón como una nueva unidad a través de la cual reinterpretar la situación proporcional como una característica diferente de la estructura aditiva” (p. 79). Además llaman la atención sobre considerar las relaciones multiplicativas enteras y no enteras en tal desarrollo puesto que “….desempeñan diferentes papeles en la… idea de covariación de las cantidades en las situaciones proporcionales” (Fernández y Llinares, 2011, p. 79).

1.11. Factores que afectan el razonamiento proporcional

El estudio de los factores que afectan el razonamiento proporcional ha sido enfocado desde el punto de vista de las dificultades que exhiben los alumnos para resolver problemas de razón y proporción. De acuerdo con Lamon (2007): “Un considerable trabajo de investigación, aproximadamente desde 1970 a 1985, produjo un extenso inventario de factores que influyen en la dificultad de problemas de proporción” (p. 641). En la Tabla 1.1 hemos resumido la exposición que hace Lamon al respecto.

Estos factores han sido generalmente agrupados en tres categorías: tipos de razones, contexto de la tarea y cognición del sujeto. Tournaire y Pulos (1985) en su revisión de la literatura de investigaciones dirigidas al estudio de la proporcionalidad, sugieren que un número considerable de factores relativos a variables del sujeto y de la tarea son los responsables de la variedad de respuestas dadas por los alumnos.

Tabla 1.1: Factores que afectan el razonamiento proporcional

Factor	Investigaciones
Contexto	Tourniaire (1983; 1986)
Familiaridad del alumno con el uso de la proporción en un contexto dado	Tourniaire (1983)
La localización del valor faltante en una proporción en relación con los otros tres números	Bezuk (1986); Rupley (1981)
Cantidades discretas versus continuas	Behr, Lesh, Post y Silver (1983); Pulos Karplus y Stage (1981)
El número a ser encontrado es el más grande de los cuatro términos	Abramowitz (1974); Rupley (1981)
La presencia de razones enteras como opuestas a razones no enteras	Bezuk (1986); Hart (1984; 1988); Karplus, Pulos y Stage (1983b); Noelting (1980a; 1980b); Rupley (1981).
La presencia de razones unitarias, especialmente 1:2	Hart (1981; 1988); Noelting (1980a; 1980b)
La percepción de las indicaciones es consistente o inconsistente	Behr, Lesh, Post y Silver (1983); Cramer, Post y Behr (1989); Lesh, Landau y Hamilton (1983); Novillis (1976)
Uso de estrategias aditivas en lugar de multiplicativas	Hart (1981; 1988); Karplus Pulos y Stage (1983b)
Falta de comprensión de la notación convencional para denotar la razón	Silver (1981)
Marcada dependencia de las representaciones de los libros de texto al tratar de modelar una situación dada	Lesh, Landau y Hamilton (1983); Silver (1981)
Uso de cantidades intensivas	Schwatz (1987)
Dependencia del valor numérico utilizado y cambio en la operación requerida	Greer (1987)
Operaciones utilizadas: patrones y modelos intuitivos asociadas a la multiplicación y división	Bell, Swan y Taylor (1981); Fischbein et al. (1985)

En este orden de ideas, Kaput y West (1994 p. 244) señalan:

> Hay cuatro amplias categorías de las variables de la tarea que deben ser tomadas en cuenta:
> 1. La estructura semántica de la situación descrita en el enunciado del problema;
> 2. La estructura numérica del problema;

> 3. Las herramientas de representación disponibles para resolver el problema;
> 4. La forma del texto (y quizás otras representaciones o medios) en la cual es presentado el enunciado del problema…
>
> Por supuesto, cada variable de la tarea sirve simultáneamente para definir una variable del estudiante…

En general, se puede aceptar que las variables de los numerales 1, 3 y 4, son variables del contexto de la tarea, con lo cual la identificación propuesta por Kaput y West (1994) es reducible a las categorías: tipos de razones (estructura numérica), contexto de la tarea y cognición del sujeto.

Según Alatorre y Figueras (2005), al referir a problemas de comparación, relativos al razonamiento proporcional, señalan: ―… pueden ser clasificados de acuerdo con tres aspectos: el contexto, el tipo de cantidad y la estructura numérica.” (p. 25).

Se deduce de lo expuesto que el tipo de razón puede ser interpretado desde al menos dos posiciones, según: (a) el tipo de cantidad (extensiva/intensiva) y/o (b) la estructura numérica (entera/no entera). Karplus y colaboradores, al referir al tipo de razón, de acuerdo con la estructura numérica (entera versus no-entera), concluyen que los problemas en que las razones son enteras, los sujetos muestran mejor desempeño (Karplus, Pulos y Stage, 1983a; 1983b).

En este orden de ideas, el estudio realizado por Heller et al. (1989), refiere al importante efecto que tienen el tipo de razón (cantidad extensiva/intensiva y/o entera/no entera) y la familiaridad del sujeto con el contexto de la tarea. Estos investigadores recomiendan conjugar la introducción de nuevos tipos de razón con contextos que sean conocidos por el sujeto. Asimismo, consideran necesario realizar investigaciones dirigidas a determinar el efecto del contexto de la tarea, cuando las razones sean familiares al sujeto. Un aspecto final al cual refieren estos investigadores es la necesidad de incluir los tipos de razón, como parte de los contenidos a ser tratados sobre razón y proporción, puesto que ―los tipos de razón” constituye una abultada categoría que debería estudiarse con detalle.

Smith (2002, p. 16), identifica la existencia de tres factores principales, que ejercen fuerte influencia en la resolución de problemas de proporcionalidad, a saber: (1) la naturaleza de la situación y la experiencia de los alumnos (por ejemplo, contenido, precio y movimiento son más fáciles que situaciones abstractas), (2) el tipo de números involucrados (números enteros pequeños son más fáciles que números grandes y números racionales), y (3) el carácter de las razones, en y entre las cantidades correspondientes (razones simples como “2 veces” o “3 veces más largo” son mucho más fáciles que otras cuando se consideran números más grandes o “razones no unitarias”).

Sanz, et al. (1996) presentan un estudio en el que evalúan la influencia de variables: contenido y formato de la tarea, unidad de medida de las variables, nivel de dificultad computacional de los ítems, nivel de instrucción y desarrollo cognitivo de los sujetos. Los resultados señalan que el rendimiento de los sujetos varía de acuerdo al contenido y formato de la tarea, notándose la influencia cuando el contexto es cercano a la vida cotidiana, aunque no de manera significativa, obteniéndose mejores calificaciones relativas en el grupo de menor grado de instrucción.

Alatorre y Figueras en una secuencia de estudios que va desde el 2002 al 2005, presentados en los congresos del International Group of Psychology of Mathematics Education, proponen una clasificación de diferentes situaciones problemas de comparación, teniendo como criterio de clasificación los diferentes contextos a los que refieren las mismas. En este sentido, estas autoras identifican tres tipos de problemas: (1) problemas de tasa (rate), (2) problemas parte-parte-todo: de mezcla y probabilidad, y (3) problemas geométricos.

En su estudio, Alatorre y Figueras (2005), concluyen que: “…el razonamiento proporcional es altamente dependiente del contexto.” (p. 32). Asimismo, al referir a la dificultad exhibida por los sujetos en la resolución de los problemas propuestos, en los que no se incluyeron problemas de tipo geométrico, señalan: “Este estudio ha mostrado que los problemas de tasa son los más fáciles de resolver y los problemas de probabilidad los más difíciles, mientras los problemas de mezcla se ubican en una categoría media entre ellos.” (p. 32).

Con respecto al estudio de las variables del sujeto, debe notarse que el avance de la investigación se está dirigiendo hacia el análisis de las actuaciones de los sujetos al resolver tareas relativas a la proporcionalidad, más que a características cognitivas generales de los mismos. De la tradición piagetiana, en investigaciones realizadas con mayor intensidad hasta finales de la década de los 80, se observa una tendencia en el estudio de las relaciones entre el nivel de desarrollo cognitivo con la capacidad de los sujetos para resolver determinados problemas (Karplus, Pulos y Stage, 1983a; 1983b; Kolodiy, 1975; Lawson, 1982; Niaz, 1989).

No obstante, los diversos señalamientos sobre la generalidad que representan los niveles de desarrollo intelectual identificados por Piaget y colaboradores, versus las particularidades de las actuaciones de los sujetos en tareas específicas, han hecho que la atención de los investigadores se dirija a estudiar las características singulares de las tareas y las respuestas dadas por los sujetos a las mismas. De manera que en los últimos años se ha observado poco interés por el estudio de las capacidades cognitivas generales, en algunas casos aceptadas tácitamente, para estudiar aspectos más específicos relativos a las diversificaciones de los niveles de las tareas, donde la búsqueda se dirige a adaptarlas, cada vez con mayor precisión, a aquello que los sujetos de una determinada edad pueden posiblemente hacer (Lamon, 2007; Lamon y Lesh, 1992).

En este orden de ideas, al referir al desarrollo del razonamiento proporcional, se han reconocido desde el planteamiento piagetiano la existencia de un nivel de razonamiento pre-proporcional, que es de naturaleza aditiva, “de aumento gradual o preparatorio” (Piaget et al., 1977).

En correspondencia con este nivel de razonamiento proporcional, se reconoce la actuación de los alumnos en la resolución de problemas proporcionales, al poner en práctica estrategias del tipo “building-up” (referidas anteriormente) o de construcción progresiva, con las cuales la persona puede resolver un problema de proporcionalidad pero sin hacer uso, en sentido estricto, de estructuras multiplicativas (Kenney, Lindquist y Heffernan, 2002). Hart (1981) expone cierta diversidad en el uso de esta estrategia, y en Kenney, Lindquist y Heffernan (2002), se pueden observar respuestas específicas de alumnos de primaria en las que se pone en juego tal estrategia.

El avance de la investigación se dirige entonces a profundizar en las particularidades de las actuaciones de los sujetos y en esa medida observar los factores más específicos que afectan el desarrollo del razonamiento proporcional (Lamon, 2007).

1.12. Investigaciones sobre propuestas curriculares y experiencias de enseñanza

Una de las iniciativas desarrolladas en el ámbito de la educación matemática, dirigidas al logro de resultados positivos al intervenir en procesos de enseñanza, sobre un tópico específico, son los llamados ―experimentos de enseñanza” (del inglés, teaching experiments). Al referir a este tipo de estudios, específicamente en el tópico de razón y proporción, Lamon (2007), señala: ―Desafortunadamente en el dominio de fracciones, razones y proporciones, estos estudios han sido poco efectivos” (p. 645).

En esta línea de ideas, esta autora, luego de referir a los principales resultados de varias investigaciones del tipo ―experimentos de enseñanza”, concluye: ―Colectivamente, estos estudios de intervención indican que la construcción del conocimiento de fracción, razón y proporción involucra un largo proceso de aprendizaje. Ninguno es de rápida adquisición.” (p. 645).

Sobre la base de estos antecedentes, Lamon (2007) desarrolla un trabajo de investigación-intervención, de tipo longitudinal, realizado a lo largo de cuatro años, con seis grupos de niños, desde el inicio del tercer curso hasta el final del sexto curso de primaria. Cinco de los grupos fueron seleccionados para desarrollar experiencias curriculares nuevas, relativas a la enseñanza de los números racionales, mientras uno de los grupos permaneció como grupo de control. La experiencia desarrollada consistió en iniciar el estudio de los números racionales de acuerdo con una interpretación específica de los números racionales, según los cinco subconstrutos (Kieren, 1980).

De este modo, para cada grupo correspondió el inicio con un subconstructo particular, quedando constituido los cinco grupos en cinco clases: parte-todo, medida, operador, cociente, razón/tasa. Los resultados de este estudio indican que los alumnos pertenecientes a las clases medida y razón/tasa mostraron una mejor actuación que los alumnos pertenecientes a las otras clases. Siendo siempre superior la actuación de los alumnos pertenecientes a cualquiera de las clases en relación con el grupo control. Parte de estos resultados ya habían sido referidos en este trabajo; apartado 1.9 del presente capítulo.

Ben-Chaim, et al. (1998) realizan un trabajo de investigación en el que comparan la implementación de diferentes experiencias curriculares (nuevo versus tradicional de enseñanza magistral), cuyo contenido de enseñanza son los números racionales, particularmente dirigidas al desarrollo del razonamiento proporcional. En tales experiencias se ha considerado el uso de problemas contextuales relativos al contenido referido, con estudiantes de séptimo curso, en las que se les ha motivado a construir sus propios conocimientos conceptuales y procedimentales sobre proporcionalidad, por medio de actividades colaborativas en la resolución de tales problemas. Los análisis de las estrategias de la resolución de los problemas aplicadas por los estudiantes, muestran que, quienes cursan el nuevo currículo, son capaces de desarrollar su propio repertorio de herramientas que les ayudan a dar sentido y producir soluciones y explicaciones creativas.

Moss (2002) desarrolla una experiencia con alumnos de 4º curso de primaria en la que inicia el tratamiento de los números racionales utilizando porcentajes. Los resultados de su estudio muestran el desarrollo de un patrón de aprendizaje diferente sobre los porcentajes, observándose que no únicamente la habilidad de los alumnos en tareas de porcentajes mejora con la instrucción, sino que también los estudiantes poseen una intuición sustancial sobre el significado de porcentajes y operaciones, previa a la instrucción. Asimismo, el estudio de los porcentajes, como constructo previo al resto de los constructos de los números racionales, provee de una base multiplicativa sólida para el aprendizaje de los decimales y las fracciones, sirviendo como un punto inicial útil para la comprensión general y flexible de los números racionales en su totalidad.

Ben-Chaim, Keret e Ilany (2007) realizan un estudio sobre la implementación y evaluación del impacto de la puesta en juego de un modelo especial de enseñanza para la formación de futuros profesores de escuela primaria y secundaria. El programa comprende el uso de lo que sus autores denominan ―autenticas tareas de investigación" sobre razonamiento proporcional, lo cual consiste en que los futuros profesores lean y analicen reportes de investigación relevantes sobre el razonamiento proporcional, que los conduzca a adquirir experiencia por medio de su acceso a autenticas investigaciones, que incorporan elementos teóricos y prácticos sobre tareas de razonamiento proporcional.

El objetivo fundamental de Ben-Chaim y colaboradores es valorar el impacto que tienen el desarrollo de tales acciones sobre el conocimiento matemático, el conocimiento pedagógico y las actitudes de futuros profesores. Los resultados del estudio señalan un cambio positivo y significativo del conocimiento matemático y pedagógico de los futuros profesores. Asimismo, se observa un mejoramiento en sus actitudes y creencias, en torno a la enseñanza y aprendizaje de la matemática, particularmente en lo relativo a razón y proporción.

Adjiage y Pluvinage (2007) presentan un trabajo en el que tratan de determinar los efectos de la puesta en juego del enfoque denominado “análisis de la complejidad de problemas de proporción”[23]. Para lo cual desarrollan lo que ellos denominan un experimento de enseñanza sobre razón y proporción en dos cursos distintos: 6º curso de primaria y 1º de secundaria. Para su estudio consideran dos secciones de cada uno de estos cursos, actuando dos de las secciones como grupo experimental y las otras dos secciones como grupo de control del experimento.

Los materiales y los problemas utilizados, relativos a un contexto físico, fueron comunes para ambos grupos. Para el grupo experimental el proceso de enseñanza se desarrolló basado en el marco derivado del análisis de la complejidad de problemas de proporción, que involucra el uso de directrices específicas y un entorno de ordenador. Mientras para el grupo control, el entorno de aprendizaje estuvo caracterizado por el uso de papel y lápiz, y el profesor siguió su método habitual para el diseño y conducción de las secuencias de enseñanza.

Haciendo uso de un diseño del tipo pre-test – tratamiento – post-test, los investigadores observaron el progreso de ambos grupos. Las comparaciones entre ambos grupos indicaron un mejor desenvolvimiento del grupo experimental, por ejemplo en el uso adecuado de fracciones para resolver problemas comunes de proporcionalidad. En general, el progreso en cuanto al promedio observado en cada grupo, es mejor en el grupo experimental, observándose una tendencia a un puntaje promedio más elevado que el obtenido en la medición inicial.

Ferrucci, y Carter (2009) desarrollan una investigación en la que comparan el desempeño de dos grupos de futuros profesores de primaria al resolver dos problemas de razón y proporción, con el fin de estimar el efecto de los desarrollos curriculares puestos en juego en Estados Unidos y Singapur. Los resultados indican que el

[23] Estos autores consideran que la complejidad de las situaciones de razón y proporción puede ser descrita por dos variables; una referida al dominio físico-empírico y otra al dominio matemático. Una descripción de este enfoque la presentamos en el sub-apartado 1.8.2.2.

desempeño de los futuros maestros de Singapur fue superior al de los futuros maestros de Estados Unidos, destacándose el uso de dos enfoques predominantes para la resolución correcta de los problemas. El primer enfoque se encuentra caracterizado por el uso de la reducción a la unidad, como estrategia de resolución y el segundo enfoque basado en la estrategia del establecimiento de un valor de referencia para la razón que permita resolver el problema por medio de una multiplicación (en inglés este enfoque es conocido como: benchmark approach). De acuerdo con los investigadores, el uso de estos enfoques fue uno de los aspectos determinantes de las actuaciones de los futuros maestros. Se debe señalar que el programa de formación de maestros de Singapur pone énfasis en el uso de esos enfoques.

Una experiencia curricular reportada en varios trabajos publicados, es la experiencia referida al uso del programa SimCalc (Kaput y Hegedus, 2002; Kaput y Roschelle, 1998; Hegedus, Kaput y Lesh, 2007; Roschelle, Knudsen y Hegedus, 2010; Roschelle, et al., 2010; Roschelle, Tatar y Kaput, 2008). El enfoque SimCalc refiere a las ―matemáticas del cambio y la variación”, frase utilizada por su fundador, Kaput, para diferenciarla de ―…las matemáticas relativas a la incertidumbre (probabilidad y estadística) y las matemáticas del espacio (geometría).” (Roschelle et al, 2010, p. 839).

El enfoque consiste en el uso del software SimCalc para el desarrollo de actividades de enseñanza y aprendizaje de la matemática del cambio y la variación (razón, tasa, proporcionalidad y funciones lineales), puestas en juego por los profesores, con alumnos que inician la educación secundaria. Se trata de iniciativa que pretende la integración de la tecnología en el currículo escolar.

Desde la década de los noventa, Kaput y colaboradores iniciaron el trabajo que conduciría al uso de ese software en el desarrollo del currículo escolar de algunas escuelas en Estados Unidos (Kaput, 1992; Kaput, 1994; Kaput y Roschelle, 1998). Inicialmente el trabajo se realizó con pocos profesores, luego se fueron incluyendo más profesores y más escuelas de diferentes áreas geográficas. En Roschelle et al. (2010) se reportan los resultados del uso de este software por parte de 140 profesores de primero de secundaria y 88 de segundo de secundaria. Los resultados indican que SimCalc es una herramienta efectiva que permite a una amplia variedad de profesores, en una diversidad de contextos ampliar el aprendizaje de los alumnos hacia matemáticas más avanzadas.

Al observar los trabajos relativos al desarrollo de experiencias curriculares o el desarrollo de propuestas para la formación de futuros profesores de primaria, que refieran al estudio del razonamiento proporcional, nos damos cuenta de la escasa investigación que se ha llevado a efecto al respecto. Excepto por los trabajos de Ben-Chaim y colaboradores, no hemos podido obtener información adicional sobre trabajos que refieran al desarrollo de esta línea de investigación. Este hecho conduce a reconocer, de manera conjetural, dos aspectos: (a) el desarrollo de una formación inicial de profesores apegado a las prescripciones institucionales de los centros de formación correspondientes y (b) la necesidad de desarrollar investigación al respecto.

1.13. El razonamiento proporcional en las propuestas curriculares

En este apartado trataremos de mostrar lo que podríamos llamar el “rostro curricular” de la proporcionalidad. Se trata de observar cómo se ha hecho presente y cuál ha sido el tratamiento de este tópico como contenido del currículo escolar.

Iniciaremos nuestra exposición con las aportaciones realizadas desde el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), para luego presentar una visión desde la cual se observa un desarrollo muy general de la enseñanza de la proporcionalidad, desde la llamada época “clásica”, hasta la actualidad. Específicamente referiremos a la presencia de la proporcionalidad en los documentos curriculares oficiales, actuales, de España, particularmente a los propuestos por la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía, contexto educativo en el cual se forman los futuros maestros que forman parte de la muestra del presente trabajo de investigación.

1.13.1. El razonamiento proporcional y el NCTM

A partir de algunas investigaciones y experiencias, es sabido que un enfoque apropiado de la enseñanza debería proveer resultados deseables (Kilpatrick y Silver, 2000; Kilpatrick, Swafford, y Findell, 2001). De acuerdo con Kilpatrick y colaboradores, se requiere de un modelo de enseñanza en el que los profesores organicen su discurso, planifiquen situaciones, den clarificaciones, y reten a sus alumnos a explicar y justificar los procedimientos empleados. La meta es ayudar a los alumnos a desarrollar su propia comprensión sobre los procedimientos que realizan.

Premisas como las anteriores han guiado desde hace más de dos décadas las acciones del NCTM, cuyas propuestas, en distintas oportunidades, han constituido una referencia constante de las revisiones, reformas e innovaciones curriculares de buena parte de América y algunos países de Europa.

La importancia de las aportaciones del NCTM radica en que las mismas proceden de parte de los profesores implicados en la enseñanza de las matemáticas, en consonancia con las políticas educativas generales, propuestas por el gobierno estadounidense. Estas últimas, a la vez, se inscriben en una cosmovisión educativa globalizada, dirigida a las metas más consagradas del desarrollo social mundial. Independientemente de los sesgos ideológicos presentes en los proyectos políticos educativos norteamericanos, se observa en las propuestas del NCTM la intención de hacer operativos los planteamientos teóricos educacionales imperantes y los resultados provenientes de investigaciones realizadas, teniendo como meta fundamental una educación matemática de alta calidad.

En lo relativo al razonamiento proporcional NCTM (1989, p. 82) señala:

> La capacidad de razonar proporcionalmente se desarrolla en estudiantes a lo largo de los grados 5 - 8. Es de gran importancia, por lo cual merece todo tiempo y el esfuerzo que sea necesario emplear para asegurar su cuidadoso desarrollo. Los alumnos necesitan enfrentar muchas situaciones problema que pueden ser modeladas y resueltas haciendo uso del razonamiento proporcional.

Las características y condiciones referidas en la cita anterior, contribuyen a describir lo que significa el desarrollo del razonamiento proporcional como actividad de la escuela. Un análisis de esta cita en relación con lo que concierne a nuestra investigación nos conduce a enfocar tres aspectos: (a) el 6º curso de primaria se encuentra en el lapso en que se reconoce su desarrollo, (b) tal desarrollo no se inicia ni termina en tal curso, y (c) la necesidad de enfrentar al alumno a muchas situaciones problema que puedan ser modeladas y resueltas haciendo uso del razonamiento proporcional.

Más recientemente, NCTM (2000, p. 217), al referir a los estándares para los grados 6–8, señala:

> …proporcionalidad involucra mucho más que la igualdad de dos razones y resolver para un término desconocido. Esta involucra reconocer cantidades que están relacionadas proporcionalmente y usar números, tablas, gráficos y ecuaciones para pensar en torno a las cantidades y sus relaciones. Proporcionalidad es un hilo integrativo importante que conecta muchos de los tópicos matemáticos estudiados en los grados 6–8.

Debemos reconocer que el uso del término proporcionalidad al que refiere el NCTM en la cita anterior, está en relación con la interpretación que hacemos de este término en el sub-aparatado 2.1.1 del capítulo 2 (someramente referida en el sub-apartado 1.8.2.3, del presente capítulo), interpretación desde la cual se considera la proporcionalidad como una noción más general que la de razonamiento proporcional.

Esta interpretación del término proporcionalidad es coherente con el desarrollo que se espera sea logrado por el alumno, sobre el conocimiento de este tópico, puesto que de acuerdo con las expectativas institucionales se aspira que, a nivel de 6º – 8º curso, el alumno sea capaz de moverse fluidamente entre los ítems de la complejidad referida en el sub-apartado 1.8.2.3 del presente capítulo, relativa al manejo de situaciones proporcionales, yendo más allá de lo que el razonamiento proporcional implica.

Ahora bien, una observación de los Principios y Estándares propuestos por NCTM (2000), con el fin de identificar una secuencia de acciones relativas al desarrollo del razonamiento proporcional, a lo largo de los niveles de educación elemental (preescolar a 6º curso de primaria), nos muestra la siguiente secuenciación:

En el periodo que va desde el preescolar hasta 2º de primaria se plantea el desarrollo de la cuantificación de situaciones cualitativas del tipo ―Hoy está haciendo más frío que ayer", lo cual, de acuerdo con lo expuesto en el presente capítulo, forma parte del desarrollo del principio de variabilidad matemática. Asimismo, al final de la sección ―Números y Operaciones" de los estándares para este periodo (NCTM, 2000, pp. 87-88), se muestran las soluciones dadas a un problema, cuyo enunciado y resoluciones dadas por alumnos de 2º curso de primaria las reproducimos en la Fig. 1.19.

En tales resoluciones se observan diferentes grados de sofisticación de la comprensión de las relaciones entre los números involucrados. Se debe observar que en los diferentes niveles de sofisticación exhibidos, se hacen presentes diversas estrategias relacionadas con el desarrollo incipiente del razonamiento proporcional: unitización-normalización utilizando representaciones, conteo de 5 en 5, tabla de proporcionalidad y patrones de división/multiplicación complementados con sumas y restas.

En este mismo orden de ideas, en los estándares referidos al ―Algebra" (NCTM, 2000; p. 92), de este mismo periodo, se propone el uso de situaciones problema cuya solución involucra el uso de una tabla de magnitudes proporcionales, para la relación (razón)

–costo por globo", proponiéndose para su resolución el uso de estrategias de construcción progresiva como el conteo de 20 en 20.

Problema:

"Hay 93 estudiantes yendo al circo, cinco estudiantes se pueden montar en cada carro. ¿Cuántos carros serán necesarios?"

Resoluciones:

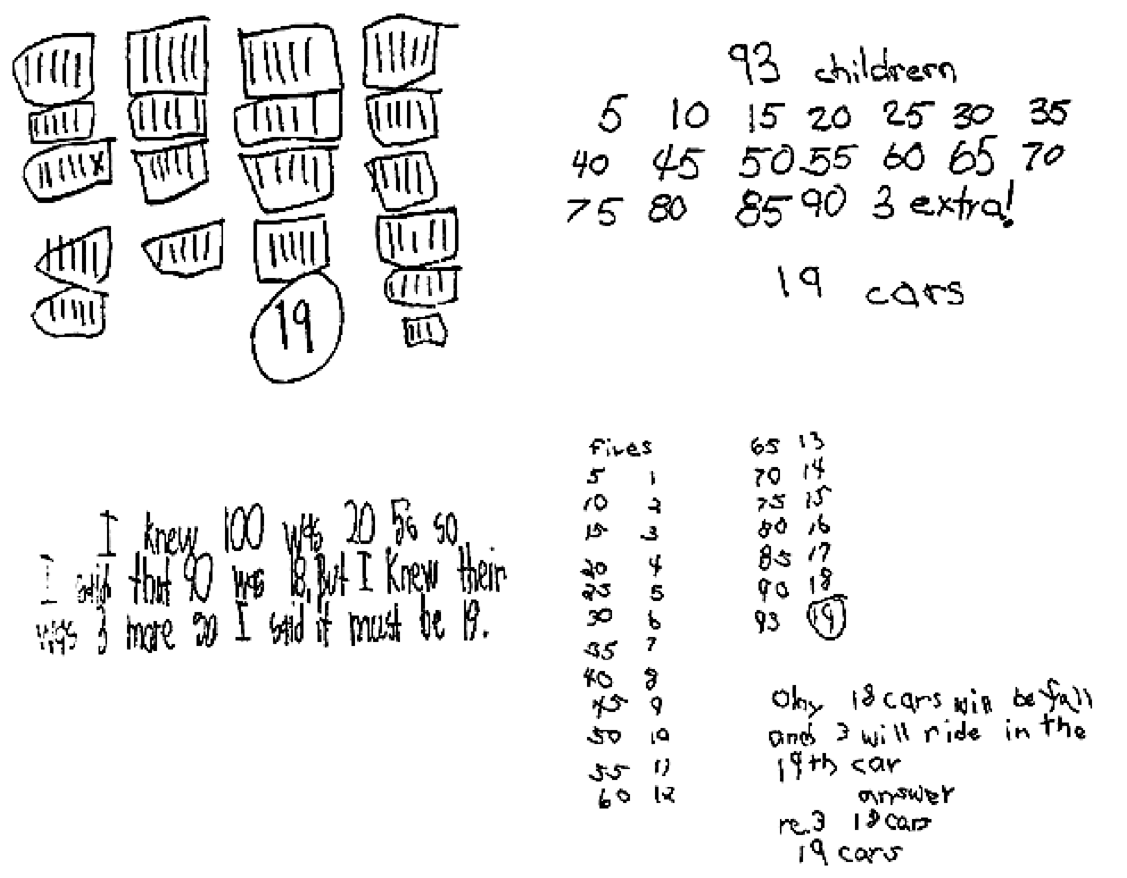


Fig. 1.19. Enunciado de un problema y resoluciones dadas por alumnos de 2º curso de primaria. (Adaptado de NCTM, 2000; pp. 87-88).

Estos referentes invitan a llevar a efecto situaciones similares con el objeto de ir proveyendo al alumno de habilidades que coadyuven al desarrollo del razonamiento proporcional, desde niveles escolares elementales.

En el periodo que va de 3º a 5º curso se observa: (a) el razonamiento multiplicativo y la equivalencia como dos temas centrales a ser tratados; (b) el uso de diferentes representaciones para los números, tales como: fracciones, decimales y porcentajes; (c) la identificación de razones constantes o variables y las comparaciones entre ellas, (d) la resolución de problemas del contexto real del alumno en la que se pone en juego el razonamiento multiplicativo.

En el periodo que va de 6º a 8º curso se observa: (a) trabajar flexiblemente con fracciones, decimales y porcentajes en la resolución de problemas, (b) desarrollar significados para porcentajes más grandes que 100 y menores que 1, (c) desarrollar y usar estrategias para estimar los resultados de cálculo con números racionales y juzgar la racionalidad de los resultados, (d) desarrollar, analizar y explicar métodos para resolver problemas que involucran proporciones, tales como escalamiento y hallar razones equivalentes o normalizar una comparación por medio de la reducción a la unidad, (e) utilizar símbolos algebraicos para representar situaciones y resolver problemas, especialmente aquellos que involucran relaciones lineales, (f) utilizar gráficos para analizar la naturaleza de los cambios de las cantidades in relaciones lineales, (g) comprender relaciones entre unidades y convertir desde una unidad a otra dentro de un mismo sistema, (h) resolver problemas que involucren factores de escala, utilizando razón y proporción, (i) resolver problemas sencillos que involucren tasas y mediciones derivadas de atributos tales como velocidad y densidad, (j) utilizar proporcionalidad y una comprensión básica de probabilidad para hacer y probar conjeturas sobre los resultados de experimentos y simulaciones.

En la sección “Conexiones” se reconoce la proporcionalidad (razón, proporción, relación lineal) como un aspecto que permite conectar, no solo los contenidos matemáticos (números, algebra, geometría, medida y probabilidades), sino también con otras áreas de conocimiento (ciencias, estudios sociales, art), con el mundo real y con experiencias de la vida diaria de los alumnos de ese nivel (NCTM, 2000; p.274).

Los indicadores mencionados, nos proveen de una panorámica curricular general, provista por el NCTM, en torno a la proporcionalidad, que nos parece coherente con la propuesta de una secuencia para el desarrollo de su enseñanza en la escuela, basada en los resultados de investigaciones a las que hemos referido en los apartados precedentes.

Más aún al observar de manera transversal el contenido “Algebra”, vemos que se incluye, a lo largo de todos los cursos (preescolar a 8º curso) un apartado referido al “cambio”, en el que se pretende desarrollar, tanto cualitativa como cuantitativamente los cambios que suceden en diversos contextos. Asociada al desarrollo de esa noción de cambio, se observan varias de las nociones relacionadas con el desarrollo del razonamiento proporcional, a las cuales hemos referido a lo largo de este capítulo, entre las que se encuentran: (a) el principio de “variabilidad matemática”, referido en el apartado 1.5, (b) la idea de covariancia, referida al sub-apartado 1.8.2.1, (c) la noción de de razón y tasa, referida en el sub-apartado 1.8.2.1, (d) uso de tablas y gráficos en una relación de proporcionalidad, referido en el sub-apartado 1.7.6. Aspectos que son decisivos para el desarrollo del razonamiento proporcional, y que, al mismo tiempo, constituyen el fundamento de nociones avanzadas como la pendiente de una recta tangente a una curva, la cual refiere a la derivada de una función.

Esta “visión algebraica” de la proporcionalidad, presente en NCTM (2000), parece corresponder con los planteamientos del desarrollo del razonamiento algebraico elemental y estar próxima a la propuesta del enfoque antropológico de lo didáctico, relativa a la enseñanza de la proporcionalidad.

1.13.2. El razonamiento proporcional en el currículo escolar

Comencemos por situarnos en una perspectiva más amplia, para luego asentarnos en lo que específicamente se está proponiendo, en los documentos curriculares oficiales, sobre la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela.

En este orden de ideas, nos aproximaremos inicialmente al estudio de lo histórico de la proporcionalidad desde una perspectiva didáctica. Situados en esta perspectiva, encontramos en Bosch (1994) una distinción entre dos formas diferentes en la práctica de la enseñanza de la proporcionalidad, a saber: una enseñanza “clásica” de la proporcionalidad y una postclásica. La exposición detallada de esta autora conduce a reconocer la existencia de estos dos periodos, cuya manifestación tiene elementos que permiten distinguir diferentes prácticas matemáticas realizadas en la institución de la enseñanza.

El periodo de enseñanza clásica de la proporcionalidad es considerado como una herencia de las aportaciones realizadas desde la matemática griega, y caracterizada por conducir a lo que Bosch llama “el algebra de las proporciones”.

Durante ese periodo clásico de la enseñanza, la proporcionalidad juega un papel importante para la instrucción, puesto que buena parte de los contenidos matemáticos, enseñados en la escuela primaria y secundaria, se desarrollaban haciendo uso de la proporcionalidad. Más específicamente, no sólo los contenidos aritméticos pueden ser desarrollados haciendo uso de proporciones, sino que actividades algebraicas como la resolución de sistemas de ecuaciones, puede ser realizada utilizando reglas establecidas sobre razones y proporciones (Bosch, 1994, pp. 208-209).

Debido al avance del álgebra y la teoría de funciones, a lo largo de los siglos posteriores al renacimiento, se fueron produciendo considerables progresos matemáticos en torno a la proporcionalidad. Dichos progresos, comenzaron a ser objeto de la enseñanza a finales del siglo XVIII. Hasta mediados del siglo XX, buena parte de esos progresos seguían siendo objeto de enseñanza en la escuela media. A mediados del siglo XX, la enseñanza clásica de la proporcionalidad fue sustituida. Más detalles sobre este periodo pueden verse en Bosch (1994).

Un aspecto que merece ser mencionado de esa enseñanza clásica de la proporcionalidad, es que, si bien, las nociones de razón y proporción se presentan inicialmente basadas en aspectos relativos a los números enteros y fraccionarios, estas nociones evolucionan dando lugar a interrelaciones y manipulaciones específicas que se concretan en reglas, las cuales conforman un sistema que permite la recreación de prácticamente toda la aritmética conocida en torno a los números enteros y fraccionarios. Esta última característica de la enseñanza clásica de la proporcionalidad la coloca en una posición que la hace diferente a la enseñanza actual, puesto que en la enseñanza actual, las nociones de razón y proporción no tienen oportunidad de evolucionar para obtener un estatus que, en términos de Bosch (1994), le provee identidad propia.

Asimismo, es menester resaltar que la interpretación de la proporcionalidad como una función lineal (perspectiva algebraica) tuvo que esperar el desarrollo del álgebra y de los números reales. Lo cual no sucedió sino hasta finales del siglo XVIII.

Aproximándonos ahora al currículo actual, debemos referir a una condición que ha estado presente en las reformas curriculares de las últimas cuatro décadas. Desde inicios de la década de los setenta, la necesidad de realizar una actividad de enseñanza llena de significados y de interés para los alumnos, ha jugado un papel relevante en todas las actualizaciones, reformas y revisiones del currículo escolar. Este aspecto se ha manifestado, en al menos dos formas diferentes; como impulso de las acciones propias de actualización, reforma, revisión e innovación curricular, así como también de referencia y objetivo a ser alcanzado por medio de tales acciones.

En este orden de ideas, es bien sabido que buena parte de la actividad de enseñanza y aprendizaje que se desarrolla en la escuela se realiza sobre la base de un enfoque mecanicista, con la cual muchos alumnos egresan de la escuela con un conjunto de procedimientos aprendidos de manera artificiosa y con un buen número de formulas aprendidas de memoria, pero con muy poca comprensión de sus significados.

Esta realidad, aún presente en buena parte de las escuelas, señala la necesidad de continuar en la búsqueda permanente de un mejor modelo de enseñanza y aprendizaje, que dé oportunidades a los alumnos para aprender y comprender las matemáticas que ellos deben estudiar.

Ubicados ahora en la actualidad, observamos que las prescripciones curriculares emitidas por los órganos de gobierno han ido cambiando y han pasado de ser unos grandes tomos en los que se detallaba cada uno de los aspectos de planificación y desarrollo de la actividad de enseñanza, de las distintas áreas de conocimiento, para los distintos cursos, a constituir una serie de directrices, objetivos, contenidos y criterios de evaluación generales que deben ser seguidos y alcanzados a lo largo de los diferentes ciclos del desarrollo escolar. La actividad de planificación específica del desarrollo de la enseñanza ha pasado a ser responsabilidad directa de los profesores.

En este orden de ideas, se tiene información de la existencia de dos documentos en los que se presentan las prescripciones curriculares del área de matemática en la educación primaria, los cuales son: (a) Real decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la educación primaria, y (b) Orden de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la educación primaria en Andalucía. El primero de estos documentos tiene carácter nacional, mientras el segundo rige para la Comunidad Autónoma de Andalucía.

Una revisión de ambos documentos muestra que no se hace mención expresa a la proporcionalidad como contenido matemático, ni al razonamiento proporcional para ser desarrollado, pero se evidencian aspectos relacionados con tal desarrollo. Entre algunos de tales aspectos encontramos: (a) el tanto por ciento de una cantidad, (b) el uso de situaciones familiares que involucren el uso de operaciones de multiplicación y división, (c) calculo de tantos por ciento básicos en situaciones reales, (d) equivalencia de fracciones, (e) correspondencia entre fracciones, decimales y porcentajes, (f) equivalencias entre unidades de una misma magnitud, (g) equivalencias y transformaciones entre horas, minutos y segundos, en situaciones reales, (h) uso de escalas del tipo: doble, mitad, triple,…en la elaboración de mapas, planos y gráficos, (i) introducción a la semejanza: ampliaciones y reducciones.

En este orden de ideas, Fernández y Llinares (2011) realizan una descripción general de la presencia de la proporcionalidad en el currículo escolar, de 4º a 6º curso, al respecto señalan:

> En el currículo español de 4º curso de educación primaria se introduce el concepto de fracción como una relación entre las partes y el todo. En 5º y 6º curso se introduce la idea de porcentaje y proporcionalidad centradas en el cálculo de porcentajes de una cantidad, en expresar partes de una cantidad, en aumentos y disminuciones y en la introducción de situaciones generales de proporcionalidad con la utilización del algoritmo del producto cruzado (*i. e*., la regla de tres, apoyada en la aritmética de las fracciones) con relaciones entre las cantidades de doble, triple, mitad, tercio, entre otras. (p. 70)

Esta descripción, más que referirse a lo curricularmente prescripto por documentos oficiales, refiere al tratamiento que se hace habitualmente de la proporcionalidad en la escuela, es decir, refiere a la práctica de la enseñanza realizada por el maestro, quien generalmente sustenta la misma en las planificaciones específicas elaboradas por él y sus colegas y, sin lugar a dudas, con el apoyo de un libro de texto.

La condición de que es al maestro a quien le corresponde elaborar la planificación de la enseñanza, demanda del (futuro) profesor una preparación adecuada, en la que el conocimiento del profesor juega un papel fundamental. Ese conocimiento debería ser proveído por medio de su formación inicial, durante la carrera de magisterio. En este orden de ideas, la investigación que desarrollamos involucra la realización de una intervención en el proceso de formación de futuros profesores, durante siete sesiones de trabajo distribuidas en los dos primeros años de estudio de esa carrera, con el fin de desarrollar conocimiento matemático-didáctico en torno a la proporcionalidad necesario para su enseñanza. A continuación referiremos a aspectos relativos a la formación de futuros profesores.

1.14. Formación inicial de profesores

Existe diversidad en los programas de formación inicial de profesores. En el caso venezolano, la formación de profesores, desde la educación preescolar hasta el bachillerato, está a cargo de las escuelas de educación de las universidades o de los institutos universitarios pedagógicos. Dentro de los programas de formación inicial de profesores se observa cierta pluralidad de especialidades o áreas de concentración curricular, dirigidas a atender los diferentes niveles y áreas del conocimiento científico-tecnológico, artístico y cultural. En general son carreras cuya duración mínima es de cuatro años y concluyen con la titulación de licenciados en educación.

En el caso español, que es el que nos interesa en esta investigación, la formación inicial de profesores presenta un escenario más complejo. Los profesores de primaria se forman en facultades de educación en las cuales se han venido formando los diplomados en educación primaria y las diferentes especialidades (tres años de duración), los licenciados en pedagogía y psicopedagogía. A partir del curso 2010-2011 se ha iniciado una reforma de las titulaciones y de los planes de estudio, ampliándose las carreras de profesorado de educación primaria e infantil a cuatro años de duración.

Nuestra investigación se desarrolla en el ámbito de formación de futuros profesores de primaria, más comúnmente conocida como carrera de magisterio, dirigida a la formación didáctica-matemática de estos futuros profesionales de la docencia.

Situados en este campo específico de formación profesional, nos preocupa la adquisición y desarrollo del conocimiento didáctico-matemático necesario para ejercer con propiedad la labor de enseñanza de la matemática en la escuela primaria. En este orden de ideas, presentamos a continuación algunos de los aspectos relativos a esta forma de conocimiento abordados en la literatura.

1.14.1. Conocimiento matemático para enseñar y la formación inicial de profesores

Desde la propuesta de Shulman (1986, 1987), se viene desarrollando en el ámbito de la educación matemática un interés creciente por caracterizar una forma de conocimiento matemático que es requerido para desarrollar una actividad de enseñanza adecuada de esta ciencia[24].

En su propuesta, Shulman (1986, 1987), introdujo lo que comúnmente se ha traducido como *Conocimiento Pedagógico del Contenido*, del inglés: Pedagogical Content

[24] En el capítulo 2, apartado 2.3, referiremos a algunos detalles sobre lo que se ha dado llamar ~~–c~~onocimiento del profesor".

Knowledge (PCK), que se caracteriza por ser una forma de conocimiento que no es sólo del contenido, de la disciplina científica al que refiere, tampoco es un conocimiento didáctico o pedagógico puro, sino que es una mezcla de ambos tipos de conocimiento.

Situándonos en el ámbito de la educación matemática, esta nueva forma de conocimiento impulsada por Shulman, refiere a un tipo de conocimiento matemático necesario para enseñar matemática. Es decir, se trata de una forma de conocimiento matemático que sólo tiene interés para el profesor que enseña matemática y no para un matemático u otro profesional que sabe y usa la matemática en su práctica profesional. De manera que, el profesor de matemática es un profesional que usa la matemática con fines didácticos y en tal práctica pone en juego esa forma de conocimiento.

Esta última cualidad, relativa a esta forma de conocimiento, ha sugerido el desarrollo de una línea de investigación, en la que el conocimiento matemático necesario para la enseñanza se encuentra caracterizado por su carácter práctico, en el sentido que es un conocimiento no declarativo, sino que se manifiesta en la práctica de la enseñanza (Ponte y Chapman, 2006) .

En este orden de ideas Ponte y Chapman (2006) llaman a este tipo de conocimiento como *conocimiento profesional del profesor*, quedando excluida de esta forma de conocimiento la posibilidad de ser desarrollado por otros medios que no sean la práctica misma de la docencia. De manera que, el conocimiento desarrollado durante la formación de profesores, que no se obtiene directamente de la práctica, se inscribe, según estos autores, en la categoría de *conocimiento académico.*

Uno de los ecos más reconocidos en la literatura, que ha tenido la propuesta de Shulman en el ámbito de la educación matemática, lo representa el trabajo que viene desarrollando Ball y colaboradores (Ball y Bass, 2003; Ball, Hill y Bass, 2005; Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008).

Aún cuando existe un particular consenso en el carácter práctico que tiene el conocimiento matemático necesario para la enseñanza, del mismo modo se reconoce el desarrollo de una línea de trabajo en la que se estudia y promueve el desarrollo de esta forma de conocimiento en la formación inicial de profesores (Ball, 1990; Kahan, Cooper y Bethea, 2003; Llinares y Krainer, 2006; Ponte y Chapman, 2008).

En particular, Ponte y Chapman (2008) presentan una revisión de la literatura sobre estudios realizados en esa línea de trabajo, mostrando los resultados relativos a algunos de los diversos tópicos matemáticos abordados. Se observa, en esa revisión, una panorámica en la que se muestra la complejidad implicada en la formación de futuros profesores. Hemos querido reproducir aquí, en la Fig. 1.20, el gráfico presentado por Ponte y Chapman (2008), para mostrar tal panorámica.

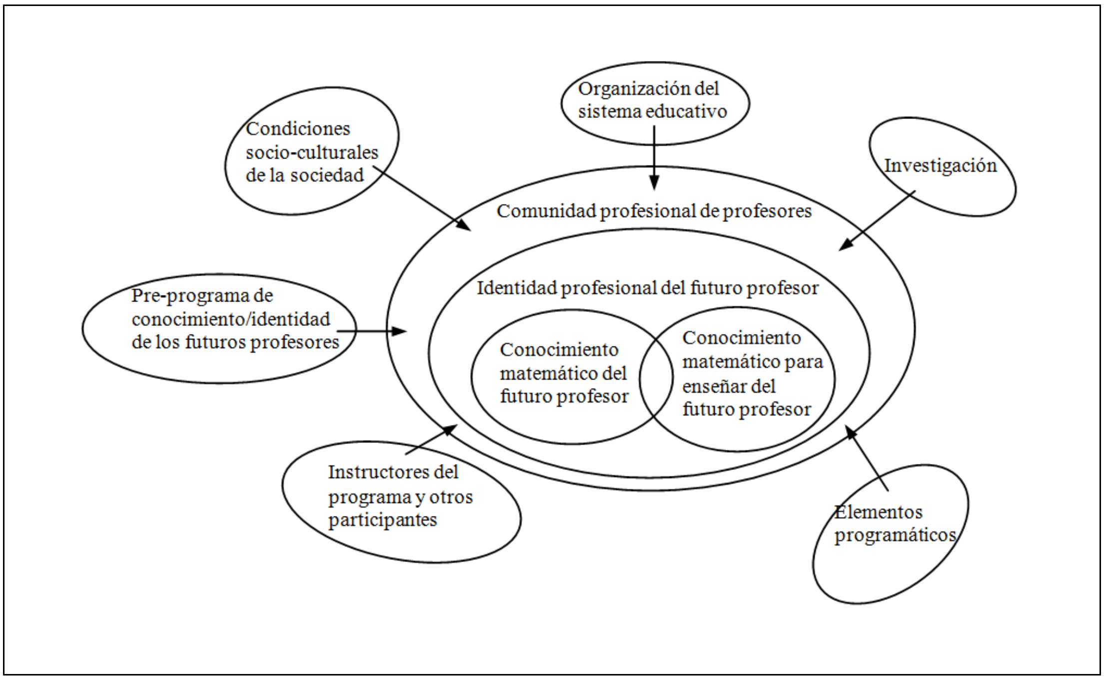


Fig. 1.20: Panorámica sobre formación de futuros profesores de matemática (Ponte y Chapman, 2008)

De manera más específica debemos referir a la manifestación de iniciativas en las que se muestra interés por materializar instrumentos y acciones que permitan ir aproximando al futuro profesor al conocimiento necesario para desarrollar la enseñanza de la matemática (Azcarate; 2004; Flores, 2004; Llinares, 2004; Llinares y Valls, 2009). Más particularmente, se observa una línea de formación de futuros profesores de primaria en la que se incluye el estudio de los errores, dificultades, estrategias de resolución, puestos en juego por alumnos de primaria, con el objeto de desarrollar esta forma de conocimiento (Flores, 2005; Hines y McMahon, 2005; Rivas, Godino y Castro, 2012).

En este orden de ideas, el presente trabajo refiere a los resultados obtenidos en el desarrollo de una iniciativa de este tipo, en el que se ha tratado de desarrollar esta forma de conocimiento en una muestra de futuros profesores de primaria, en torno al contenido de la proporcionalidad.

1.14.2. Razonamiento proporcional y formación inicial de profesores

La revisión de la literatura realizada por Tournaire y Pulos (1985), observada desde una perspectiva en la que se diferencia la enseñanza del aprendizaje, permite dar cuenta de dos tendencias en los trabajos estudiados: (a) el estudio de las dificultades que tienen los alumnos, de diferentes grados, para resolver problemas, y (b) el problema de la enseñanza de la proporcionalidad. Siendo la primera perspectiva la que aglutina la mayoría de los trabajos reseñados por estos autores. Se debe destacar la ausencia de investigaciones dirigidas al estudio de la problemática de la proporcionalidad en la formación de profesores. Este hecho es un indicador de que el estudio de esta problemática constituye un espacio de investigación de origen y desarrollo relativamente reciente.

En efecto, las investigaciones realizadas sobre la problemática del razonamiento proporcional en la formación de maestros, son escasas (Person, Berenson y Greenspon, 2004, p. 17). En este sentido, se conocen: Simon y Blume (1994); Thomson y Thomson (1994); Thomson y Thomson (1996); Sowder, et al. (1998); Ilany, Keret, Ben-Chaim (2004); Ben-Chaim, Keret, e Ilany (2007); Valverde (2008) Berk et al. (2009); Rivas y Godino (2010); Rivas, Godino y Castro (2012); Valverde (2012) (el orden cronológico ha sido intencional).

Simon y Blume (1994) desarrollan, con un curso de matemáticas de futuros profesores de primaria, una experiencia del tipo ―experimento de enseñanza" (teaching experiment), con el fin de estudiar el desarrollo de la habilidad para identificar una razón como una medida apropiada para algún atributo físico dado. La experiencia tuvo lugar con 26 futuros maestros, en curso cuya duración fue de 20 semanas. Estudios previos, así como los datos obtenidos por medio de la aplicación de un pre-test, a la sección de futuros maestros, indicaron que los sujetos tienden a utilizar comparaciones aditivas en lugar de comparaciones multiplicativas, siendo las primeras no apropiadas.

El proceso de instrucción desarrollado fue dividido en dos unidades, en la primera se fomentó la comprensión del área de un rectángulo como una relación multiplicativa entre sus lados, y en la segunda, se trató sobre la modelización matemática de situaciones del contexto real, particularmente lo relativo al uso apropiado del concepto de razón para modelar situaciones reales cuando corresponda. Aunado a los resultados del pre-test, los análisis realizados sobre los datos recabados durante el desarrollo del estudio, indicaron que los futuros maestros muestran dificultad para considerar una razón como una medida apropiada de un atributo de una situación del entorno físico. Sobre la base de los resultados obtenidos, los investigadores concluyen señalando que la actividad matemática involucrada en la modelización, puede tener un efecto directo sobre el aprendizaje del concepto de razón como una medida.

Los trabajos de Thomson y Thomson (1994; 1996) se realizan con profesores en servicio, se desarrollan sobre el estudio del concepto de tasa en profesores de secundaria. En un primer trabajo, atendiendo a los problemas de comprensión del alumno, son observadas algunas dificultades que tiene el profesor para comunicar conceptualmente la idea de tasa utilizando un lenguaje demarcado por lo numérico, operacional y procedimental, considerándose necesario el uso de un lenguaje natural, no técnico. En el segundo de estos trabajos realizan una actividad de investigación análoga a la anterior, pero en lugar de observar al profesor, se observan las dificultades del investigador. Se coloca el énfasis en el conocimiento matemático que guía las decisiones instruccionales y sus acciones, discutiéndose brevemente las implicaciones que dicho conocimiento tiene en la formación de profesores. Se requiere de una formación de los profesores de modo que sus esquemas, su comprensión de las ideas matemáticas, sirvan para sustentar una enseñanza conceptual. Recomiendan que el profesor debe convertirse en un investigador y constructor de modelos, capacitado para desarrollar actividades más complejas que las provistas por la formación inicial.

Monteiro (2003) informa sobre los resultados preliminares de una investigación acerca de los procedimientos y razonamientos puestos en juego por 19 futuros profesores, en su último año de carrera, al resolver problemas relativos a la proporcionalidad en dos tareas diferentes. En la primera tarea tres problemas: uno de razonamiento aditivo, uno de proporcionalidad directa y uno de proporcionalidad inversa. En la segunda tarea cuatro problemas: uno aditivo, dos de proporcionalidad directa (valor faltante y de comparación), y uno de proporcionalidad inversa. Para la primera tarea los sujetos podían resolver los problemas utilizando cualquier estrategia de resolución. Para la segunda tarea se solicitó a los estudiantes que no utilizaran algoritmos basados en reglas para su resolución.

El proceso de formación a partir de puesta en juego de estas dos tareas, busca proveer de un espacio para la reflexión y hacer consciente a los futuros profesores sobre su falta de comprensión en torno a la proporcionalidad. Siendo un objetivo posterior observar el efecto, de ese proceso de formación, sobre la elaboración de una lección de clase para alumnos de 6º curso de primaria. Los resultados iniciales indican que el proceso de formación puesto en juego proveyó de conocimiento acerca de algunos malentendidos que tenían los futuros profesores sobre los conceptos de razón y proporción, ellos se hicieron conscientes de los mismos y reflexionaron al respecto. Los efectos sobre la calidad de la lección serán observados a partir de su implementación, lo cual es objeto de otro estudio.

Ilany, Keret, Ben-Chaim (2004) presentan un estudio en el que valoran la puesta en práctica de un modelo de formación de futuros profesores y profesores en servicio, fundamentado en el uso de “auténticas actividades de investigación” para la enseñanza de la razón y la proporción. Los resultados del estudio muestran un significativo progreso de los profesores en formación al resolver y explicar las resoluciones dadas a 16 problemas sobre: razón (5), tasa (5) y escala (6). Asimismo, en la valoración de: (a) las actitudes hacia la enseñanza, (b) la confianza en la habilidad para tratar con razón y proporción, y (c) las dificultades para su enseñanza y su importancia. Asimismo, se muestra que el modelo implementado fomenta un cambio en las opiniones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en los futuros maestros.

Person, Berenson, y Greenspan (2004) en su estudio sobre el rol de los números en la comprensión del razonamiento proporcional en futuros profesores, refieren a la necesidad de utilizar múltiples representaciones para alcanzar una comprensión más completa de los conceptos matemáticos, que con el uso de procedimientos basados en números y fórmulas no es posible.

Godino y colaboradores presentan, desde una visión integrativa de diferentes planteamientos teóricos, provista por el enfoque ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2007), una propuesta sobre aspectos fundamentales relativos a la proporcionalidad a ser considerados en la formación de maestros (Godino y Batanero, 2004).

Lo (2004) presenta resultados parciales de un estudio dirigido a identificar los tipos de estrategias de resolución, el razonamiento matemático y la justificación, desarrollados por futuros profesores de primaria al participar en un curso de matemática con un diseño especial, enfocado sobre números y operaciones. En el desarrollo del curso se les proporcionan a los sujetos oportunidades para desarrollar múltiples métodos de resolución de problemas, explicar sus enfoques y razonamientos a otros estudiantes, comprender razonamientos diferentes a los propios, evaluar la eficiencia de diferentes estrategias y hacer conexiones entre diferentes representaciones.

El caso particular reportado por Lo, que ha tenido lugar en el contexto de ese curso, consiste en el estudio de 36 resoluciones de un problema de proporción, llamado ―pintando paredes”. Para esta resolución se ha desalentado el uso del ―producto cruzado” como estrategia de resolución, puesto que la misma puede ser puesta en práctica sin que tenga lugar un razonamiento proporcional. Tres tipos de estrategia fueron identificadas: (a) estrategia de construcción progresiva, (b) reducción a la unidad, y (c) uso de una tabla de proporcionalidad, donde sólo 16 de los 35 estudiantes fueron capaces de explicar sus resoluciones haciendo uso de un dibujo, observándose una convergencia total entre las estrategias más sofisticadas y el uso de las representaciones. Este hecho conduce a considerar el uso de las representaciones como una forma de promover el desarrollo del razonamiento y la justificación de los futuros profesores.

Las conclusiones del estudio apuntan a la necesidad de realizar más estudios, para investigar cómo diversos tópicos matemáticos pueden ser razonados y justificados por futuros profesores, y también, determinar cómo los cursos de matemáticas podrían ser específicamente diseñados para promover las habilidades de razonamiento y justificación en la formación de futuros profesores.

Ben-Chaim, Keret e Ilany (2007, p. 334), Sowder, et al. (1998) señalan que tanto profesores en formación inicial como en servicio presentan dificultades para enseñar conceptos relacionados con la proporcionalidad.

Valverde (2008) presenta un estudio sobre el uso de estrategias correctas e incorrectas puestas en juego por una muestra de profesores en formación, destacándose la coincidencia entre las actuaciones de los sujetos de la muestra y los resultados de investigaciones realizadas con escolares.

Berk et al (2009) informan sobre los resultados de una investigación realizada con el fin de caracterizar la ―flexibilidad” de 148 futuros profesores en el dominio del razonamiento proporcional. Entendiendo por *flexibilidad en el uso de procedimientos* *matemáticos* como la habilidad de utilizar múltiples métodos de resolución de un conjunto de problemas, resolviendo el mismo problema utilizando múltiples métodos, y seleccionando estratégicamente aquellos que reducen las demandas del cálculo.

Los datos del estudio son recogidos antes y después de un proceso de instrucción, cuyo fin es motivar a los futuros profesores a comparar diferentes soluciones de problemas de proporción. Los resultados indican que (a) los participantes exhibieron limitada flexibilidad antes del proceso de instrucción (b) el proceso de instrucción condujo a mejorar significativamente la flexibilidad de los participantes, la cual se mantuvo seis meses después de la instrucción, y (c) la variación de la fuente de las soluciones de los problemas, que fueron comparadas, no tuvo un efecto perceptible en la flexibilidad de los sujetos. En relación con estos resultados, los autores señalan la necesidad de realizar estudios dirigidos a determinar el efecto del desarrollo de la flexibilidad de los futuros profesores en su desempeño profesional.

Valverde (2012) presenta un estudio sobre el efecto de una intervención al poner en juego una secuencia de trabajo de aula, encaminada a promover la reconstrucción de conocimientos asociados a la razón y la proporción, en el contexto de la formación de futuros profesores de educción primaria. Ese efecto se estudia en función del desarrollo de competencias matemáticas por medio de la resolución de problemas y utilizando una metodología de trabajo colaborativo. Se asume como enfoque metodológico la "Investigación de diseño" en la que realiza un experimento de enseñanza (puesta en juego de la secuencia de trabajo), aplicado a dos grupos de futuros profesores, no con fines comparativos sino con el objeto de aplicar el diseño en diferentes circunstancias.

Algunos de los resultados indican que la metodología de trabajo asumida ha permitido obtener información relativa a: (a) concepciones relacionadas con las interpretaciones de la razón que hacen los fututos profesores, una de las concepciones manifestadas consiste en relacionar la suma de los elementos de la razón con el total de elementos comparados, (b) la descripción de procedimientos alternativos a la regla de tres en situaciones de proporcionalidad directa e inversa, (c) la identificación de actuaciones que reflejan el predominio de la relación parte-todo y sobre la cual se ha conjeturado que obstaculiza el reconocimiento del carácter dinámico de la razón, y (d) una caracterización de las justificaciones manifestadas por los futuros profesores sobre sus actuaciones en las actividades desarrolladas.

Este trabajo de investigación tiene puntos de coincidencia con el que aquí presentamos (el mismo espacio material, sujetos participantes análogos, algunos objetivos comunes, intereses de mejora de la formación de futuros profesores), sin embargo, se diferencian en cuanto a la metodología, las herramientas de análisis, instrumentos utilizados y la información que se recoge a partir de las acciones de los sujetos participantes.

A modo de síntesis, los estudios referidos consideran la necesidad de comprender los problemas de construcción y desarrollo del razonamiento proporcional de los futuros maestros, lo cual involucra, entre otras acciones, el estudio de sus errores, dificultades, estrategias utilizadas. Pero más allá del estudio de las actuaciones de los futuros profesores al resolver problemas de proporcionalidad, es necesario poner en práctica herramientas dirigidas a mejorar la formación profesional que ellos adquieren. Convencidos que la identificación de tales cuestiones y el uso de herramientas de ese tipo debería formar parte de un programa de formación de profesores, en esta investigación se ponen en juego algunas herramientas de análisis de situaciones problemas de proporcionalidad, encaminadas a desarrollar el conocimiento matemático necesario para realizar una mejor labor de enseñanza.

1.15. Conclusión

El estudio de la problemática de la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad constituye un ―grueso" legado sobre el cual, aún cuando existe una diseminada y amplia producción en torno a ella, hay muchas cosas por hacer y cosas por decir. Para nuestro entender, ese estudio constituye una actividad compleja para la cual no se ha logrado evidenciar una visión total y sistémica de todos sus componentes.

Trabajos como los de Lamon (2007) constituyen un avance hacia la comprensión de esa problemática, no obstante, al igual que en nuestro caso, existen aspectos tratados para los cuales no se ha concretado una única interpretación, y otros aspectos que no han sido ni siquiera mencionados.

Dado que no hemos tratado de ser exhaustivos, pues un objetivo que comprenda esa empresa se encuentra fuera de los fines de un trabajo como el que ahora presentamos, hemos, por ejemplo, dejado de lado lo referente a las relaciones: proporcionalidad → geometría, proporcionalidad → probabilidades, proporcionalidad → función lineal, proporcionalidad → conexiones, proporcionalidad → porcentajes; proporcionalidad →

escalas, entre otros. Algunos de ellos simplemente se encuentran más allá de la discusión de la temática de la proporcionalidad en educación primaria, otros no han sido incluidos porque no hemos recabado información empírica que justifique su presencia en el planteamiento de esta primera aproximación y otros sencillamente por omisión.

En este orden de ideas, nos hemos referido a los asuntos más comunes, a los más ampliamente tratados en la literatura, a los más próximos a la problemática en torno a la resolución de problemas de razón y proporción, puesto que es, precisamente, en esa problemática en la que tiene mayor sentido hablar del desarrollo del razonamiento proporcional, aspecto inicial y trasversal de nuestra preocupación.

Finalmente, en la línea de ideas del trabajo de Monteiro (2003), lo que hemos identificado como “aspectos de interés” en este primer capítulo (apartados 1.5 – 1.13), podría ser considerado un referente para constituir parte de un programa de formación de profesores de primaria, lo cual constituye otro de los aspectos centrales de nuestro interés. Ciertamente, consideramos necesario hacer conscientes a los futuros profesores sobre la problemática expuesta en estos apartados, relativa a la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad en la educación primaria.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

2.1. Introducción

En este capítulo se exponen los aspectos relativos a la fundamentación teórica empleados para dar sustento al desarrollo de la parte empírica de nuestro trabajo de investigación. En este sentido, desarrollamos una exposición en torno a cuatro aspectos fundamentales, a saber:

(a) interpretaciones del razonamiento proporcional desde diferentes perspectivas teóricas, observadas desde algunas de las categorías de estudio propuestas por el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS),
(b) algunas teorías que fundamentan el estudio del conocimiento del profesor,
(c) aspectos del desarrollo del conocimiento del profesor, desde la perspectiva del EOS, e
(d) interpretaciones de los términos “competencias” y “análisis didáctico”, desde la perspectiva del EOS, y su uso en el desarrollo de esta investigación.

Concluimos el capítulo con la presentación de una caracterización del razonamiento proporcional, como resultado de lo expuesto en el primer y segundo capítulo.

Para el estudio de los diferentes significados atribuidos al razonamiento proporcional, hemos considerado conveniente observar la diversidad de significados propuestos, desde algunos de los posicionamientos teóricos, en torno a este tipo de razonamiento. Consideramos que la observación de algunas de las diferentes interpretaciones sobre razonamiento proporcional, es un modo de aproximarnos a la comprensión de la totalidad de lo que en sí representa este constructo.

Ciertamente, uno de los supuestos que caracterizan nuestra postura, asumido tal supuesto desde una perspectiva integrativa, consiste en reconocer que los diferentes posicionamientos proveen de explicaciones parciales o constituyen facetas de un todo. En nuestro caso, ese todo, está constituido por lo referido, al desarrollo del razonamiento proporcional.

Respecto al conocimiento del profesor, se presenta el desarrollo que han tenido algunas nociones de ese campo, identificando de manera secuencial algunas aportaciones relevantes, que han servido para dar lugar a la propuesta del marco teórico, concebido y promovido por Ball y colaboradores (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008; Hill, Sleep, Lewis y Ball, 2007), el cual provee de algunas categorías para el estudio de esa forma de conocimiento.

Sobre el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, Batanero y Font, 2007), presentamos la descripción de una de las herramientas diseñadas desde la perspectiva del estudio de los objetos y significados, propuesta por ese enfoque. Se trata de la Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados[25] (GROS), la cual será utilizada como herramienta de análisis epistémico/cognitivo[26], que concierne a actividades relevantes para el desarrollo de la presente investigación. En sí, el uso de esta herramienta persigue el desarrollo de competencias de análisis didáctico sobre el contenido matemático, a la vez que hace operativa algunas de las facetas del conocimiento del profesor, propuesto por Ball y colaboradores. De manera que la puesta en práctica de la GROS constituirá buena parte del desarrollo de los capítulos subsiguientes.

El uso integrado de las aportaciones teóricas derivadas de los estudios del conocimiento del profesor y del EOS plantea la posibilidad (a través de la ejecución del análisis epistémico/cognitivo de situaciones–problema sobre proporcionalidad) de ejemplificar procedimientos, que al ser realizados en el ámbito de la formación inicial de profesores, pueden conducir a la producción y desarrollo de conocimientos relativos a las facetas del conocimiento del profesor propuestas por Ball y colaboradores.

---

[25] Un ejemplo del uso de esta herramienta puede verse en Godino, Rivas, Castro y Konic (2008a; 2008b).

[26] El término ―epistémico" se utilizará aquí para referir a los conocimientos matemáticos puestos en juego en la solución esperada de una situación problema, realizada por el formador/investigador, mientras que el término ―cognitivo" refiere a los efectivamente desplegados por los estudiantes.

En relación con las nociones de competencias y análisis didáctico, dado que son nociones para las cuales existen diferentes interpretaciones y usos (Tejada, 1999; González y Wagenaar, 2003; Rico y Lupiáñez, 2008) presentamos algunas precisiones sobre la interpretación-uso específico que se harán de las mismas

En relación con la caracterización del razonamiento proporcional incluida al final del capítulo, se pretende identificar, a través de una puesta en común de varias investigaciones, los aspectos más relevantes a ser considerados para que tenga lugar esta forma de razonamiento.

2.2. Perspectivas teóricas para el estudio del razonamiento proporcional

Los significados asignados al término ―razonamiento proporcional” varían de acuerdo con la perspectiva desde la cual se le considera. En la revisión de la literatura respectiva nos hemos encontrado una diversidad de interpretaciones o perspectivas desde la cual se estudia y se comprende este término.

Una de las herramientas propuestas por el EOS, nos ha proveído de un criterio para organizar las diferentes perspectivas identificadas. Tal herramienta, regularmente utilizada para producir un significado de referencia en torno a objetos matemáticos, nos ha permitido identificar los diferentes usos dados al término razonamiento proporcional, cada uno de los cuales aportando facetas de un significado de referencia.

De acuerdo con el EOS, un significado de referencia en torno a un objeto matemático se obtiene al observarlo en sus facetas: epistémica, psicológica-cognitiva, instruccional y ecológica (Godino, Batanero y Font, 2007). La faceta epistémica refiere al componente matemático involucrado en la proporcionalidad que se enseña en la escuela, la faceta psicológica-cognitiva refiere a la actividad personal-mental del sujeto para aprender lo relativo a la proporcionalidad, la faceta instruccional refiere a los procesos, estrategias y medios utilizados con el fin de generar situaciones de enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad. Dentro de la faceta ecológica reconocemos algunos de los diferentes enfoques relativos al sujeto y su relación con el medio que le rodea, en tal sentido, interpretamos la perspectiva ecológica como un posicionamiento que comprende las perspectivas: socio-cultural, antropológica y fenomenológica.

A continuación presentamos las interpretaciones dadas al razonamiento proporcional o la proporcionalidad, desde las facetas antes referidas.

2.2.1. Perspectiva epistémica

Desde una perspectiva epistémica (del conocimiento matemático), la proporcionalidad ha sido estudiada desde dos enfoques; uno centrado en la noción de proporción (enfoque aritmético), el otro centrado en la noción de función (enfoque algebraico). Para el primer enfoque se reconocen dos procedimientos algorítmicos de acuerdo al tipo de problema que se trate: problemas de comparación o de valor faltante.

Para problemas de comparación, el procedimiento de resolución es netamente aritmético, la proporción es una relación de igualdad entre dos razones, esto es $a/b = c/d$, con a, b, c y d son números enteros cualesquiera, donde las razones a/b y c/d son relaciones multiplicativas entre los números a, b y c, d, respectivamente.

Para problemas de valor faltante, el procedimiento de resolución que Bosch denomina algebroide, la proporción es una relación de igualdad entre dos razones, en la que uno de los términos es un valor desconocido, sin pérdida de generalidad esto es $a/b = c/x$, donde a, b y c son números enteros cualesquiera y x es un valor faltante (desconocido) donde las razones a/b y c/x son relaciones multiplicativas entre los números a, b y c, x, respectivamente.

En cualquiera de estos casos, desde una perspectiva matemática, el razonamiento proporcional se interpreta como el uso de procedimientos matemáticamente adecuados para deducir conclusiones válidas a partir de alguna de las proporciones anteriormente referidas.

En el proceso de manipulación aritmética o modelización aritmética-algebroide de las proporciones $a/b = c/d$ y $a/b = c/x$, las razones son interpretadas como fracciones y la proporción se interpreta como una relación entre fracciones equivalentes, la resolución se efectúa por medio del producto cruzado y luego una división. El uso de este proceso de modelización abre la posibilidad a la manifestación de los conflictos señalados en el apartado 1.9 del primer capítulo, relativos a la relación entre razones y fracciones. Además, el sujeto puede quedar atrapado en las manipulaciones numéricas, vacías del significado relativo a las razones, las proporciones y la situación específica de la que se trate (Person, Berenson y Greenspon, 2004).

Para el segundo enfoque, desde la perspectiva funcional, Karplus, Pulos y Stage (1983a), conciben el razonamiento proporcional como un razonamiento que involucra una función lineal en un sistema de dos variables, que permite llegar a conclusiones acerca de una situación o fenómeno que puede ser caracterizado por una razón constante. El modelo matemático es una función de la forma $y = kx$, en el que k es la razón constante unitaria, generalmente conocida como ―constante de proporcionalidad". A esta función lineal, también se le conoce como ―función de proporcionalidad".

En la Fig. 2.1 mostramos algunos procedimientos para obtener una función de este tipo, a partir de una situación específica.

Se puede observar en la Fig. 2.1 dos aspectos de interés respecto al conocimiento matemático relativo a la proporcionalidad: (a) que es suficiente tener el valor de la constante de proporcionalidad (en este caso $k = 0{,}60$) para obtener una forma particular de la función de proporcionalidad, correspondiente a la situación específica ($y = 0{,}60x$), y (b) dos posibles procedimientos, adicionales al anterior, que permiten obtener la función de proporcionalidad; uno de índole inductiva utilizando una tabla de valores, y otro de índole deductiva utilizando el modelo y deduciendo el valor de la constante de proporcionalidad o razón unitaria.

El primer procedimiento, descrito en el numeral (a) del párrafo anterior, es una característica del modelo matemático de la proporcionalidad, la cual se enuncia por medio de la frase: ―la función está caracterizada por la constante de proporcionalidad".

Karplus, Pulos y Stage (1983a) presentan una perspectiva desde la cual se trata de integrar ambos enfoques; sostienen que el razonamiento proporcional puede ser conceptualizado en los siguientes pasos: identificación de dos variables extensivas que se relacionan, reconocimiento de la tasa o variable intensiva cuya constancia determina la función lineal, y la aplicación de los datos y relaciones dados para encontrar (i) un valor adicional de una variable extensiva (problemas de valor faltante) o (ii) comparación de dos valores de la variable intensiva obtenida a partir de los datos (problema de comparación) (Karplus, Pulos y Stage,1983a; p. 219).

En la Fig. 2.2 mostramos una de las posibles conexiones, basada en esta perspectiva, entre las expresiones de la proporcionalidad como proporción y como función lineal.

Problema:
Si una barra de pan vale 0,60 céntimos de euro, ¿Cuánto valen 2 barras? ¿Cuánto valen 4? ¿Cuánto valen 7?

Resolución:
Haciendo uso de un procedimiento algebroide, del producto cruzado, tenemos:

$$\frac{1\ barra\ de\ pan}{0{,}60\ céntimos} = \frac{2\ barras\ de\ pan}{x\ céntimos} \rightarrow x = 2 \times 0{,}60 \rightarrow x = 1{,}20$$

Con lo cual dos barras de pan valen 1,20 euros.

Similarmente pueden ser hallados los valores de 4 barras de pan, y de 7 barras de pan, los cuales son 2,40 euros y 4,20 euros, respectivamente.

Otra resolución:
El problema puede resolverse haciendo uso de una tabla de proporcionalidad:

Barras de pan	1	2	3	4	…	7	
Valor (€)	0,60	1,20	1,80	2,40	…	4,20	

$\times\ 0{,}60$

Determinación de la función proporcionalidad:
La función de proporcionalidad de la forma $y = kx$, está determina por la razón unitaria: –~~0~~,60 euros por barra de pan”, es decir: $k = 0{,}60$ (es la constante de proporcionalidad). Así $y = 0{,}60x$ es la expresión algebraica de la función de proporcionalidad.

La tabla de proporcionalidad, asumida como una tabla de valores, puede ser utilizada para inducir la función de proporcionalidad: $y = kx$. Nótese que k puede ser obtenida reconociendo que los valores correspondientes de la segunda fila son el producto de cada elemento de la primera fila por 0,60, lo que nos dice que:

Barras de pan	1	2	3	4	…	7	…	x
Valor (€)	0,60	1,20	1,80	2,40	…	4,20	…	$0{,}60x$

También podemos notar que cualquiera de las relaciones (razones): –~~e~~uros por barra de pan” puede ser utilizado para obtener la constante de proporcionalidad. Supóngase que sólo se sabe que 4 barras de pan valen 2,40 euros, entonces:

$$y = kx \rightarrow 2{,}40 = k(4) \rightarrow k = \frac{2{,}40}{4} \rightarrow k = 0{,}60$$

Lo cual consiste en utilizar la expresión algebraica general de la función de proporcionalidad $y = kx$, para determinar la razón unitaria. Se debe reconocer que esta puede ser calculada aritméticamente, haciendo uso de fracciones equivalentes. En general, una expresión de la función de proporcionalidad, equivalente a la lograda con la razón unitaria, puede ser obtenida con los valores de cualquier razón conocida, por ejemplo, la expresión $y = \frac{2{,}40}{4}x$, es el resultado de asignar a k el valor de la razón –~~2~~,40 euros por 4 barras de pan”, lo cual, por medio de un simple cálculo nos lleva a la expresión $y = 0{,}60x$.

Nótese que en la determinación de la función de proporcionalidad, utilizando la tabla de proporcionalidad, hemos procedido inductivamente, mientras en la determinación, haciendo uso de una razón dada (no unitaria), se ha hecho deductivamente.

Fig. 2.1: Un ejemplo de determinación de la función de proporcionalidad.

Un aspecto que nos interesa enfatizar, que se deduce de lo planteado por Karplus y colaboradores, es que el razonamiento proporcional está caracterizado por los procedimientos matemáticos puestos en juego para resolver situaciones problema de valor faltante o de comparación.

Este planteamiento es refrendado por el desarrollo de diversos trabajos en los que se estudia el razonamiento proporcional. En la revisión de la literatura presentada en el primer capítulo, observamos el predominio del uso de problemas de valor faltante o de comparación en la investigación del razonamiento proporcional.

> **Conexión entre las expresiones de la proporcionalidad como proporción y como función lineal:**
>
> Observemos que para una razón conocida ―a por b”, de la expresión $y = kx$, podemos escribir: $y = \frac{a}{b}x$, de lo cual podemos obtener la proporción: $\frac{y}{x} = \frac{a}{b}$.
>
> Recíprocamente, nótese que en la expresión funcional $y = kx$, y está en función de x, esto puede ser interpretado, al menos, de dos maneras: (a) y es la variable dependiente, x es la variable independiente, (b) para cada valor dado a x obtenemos uno para y.
> Así, teniendo estas interpretaciones en cuenta, para una razón dada ―*a* euros por *b* barras de pan” se observan las relaciones:
> - para cada *b* barras de pan (valor relacionado con *x*, independiente, dado),
> - existe un valor de *a* euros (valor relacionado con *y*, dependiente, posiblemente desconocido).
>
> Es decir, para la razón ―*a* euros por *b* barras de pan” existe una razón asociada ―*y* euros por *x* barras de pan”. Estas relaciones nos conducen a la proporción: $\frac{y}{x} = \frac{a}{b}$, de la cual se deduce la expresión funcional de la forma $y = \frac{a}{b}x$, o lo que es lo mismo $y = kx$.

Fig. 2.2: Relación entre las expresiones de proporción y función lineal relativas a la proporcionalidad.

Diversos autores (Clark, 2005; Cramer y Post, 1993; Kaput y West, 1994; Steinthorsdottir, 2006) reconocen este hecho como uno de los aspectos más comunes en la mayoría de los trabajos dirigidos a dicha investigación. La actualidad de ese predominio es refrendado por Lamon (2007, p. 637), quien refiere que el estudio de la razón y la proporción ha estado tradicionalmente definido en términos de estos dos tipos de problemas.

Más aún, tal y como veremos seguidamente, el estudio del razonamiento proporcional está caracterizado por las acciones matemáticas y cognitivas asociadas a la resolución de estos dos tipos de problemas (Lamon, 2007). Luego, siguiendo este patrón predominante del uso de problemas de comparación y valor faltante en la investigación sobre el razonamiento proporcional, en la parte empírica de este trabajo nos limitaremos a considerar estos dos tipos de problemas en las situaciones de estudio y análisis del razonamiento proporcional en el contexto de la formación de futuros profesores.

Para observar cómo el estudio del razonamiento proporcional está caracterizado por las acciones matemáticas y cognitivas asociadas a la resolución de problemas de valor faltante y de comparación, volvamos a lo expuesto sobre: (a) lo aritmético y algebroide que se encuentra relacionado con expresiones de la proporción como: $a/b = c/d$ y $a/b = c/x$, respectivamente, lo cual, a la vez, se encuentra asociado con la resolución de problemas de comparación y valor faltante, respectivamente, y, (b) la expresión algebraica-funcional de la relación de proporcionalidad: $y = kx$, determinada por la constante de proporcionalidad, cuyo uso va más allá de lo requerido para la resolución de problemas de comparación y valor faltante.

Debemos observar que estas dos interpretaciones refieren a dos formas de desarrollo, diferentes, del conocimiento relativo a la proporcionalidad. En este sentido, el campo de problemas al que refiere la primera interpretación se encuentra asociado al desarrollo del razonamiento proporcional, mientras que el campo de problemas al que refiere la segunda interpretación se encuentra asociado al desarrollo de la noción de proporcionalidad, propiamente dicha.

En este orden de ideas, Lamon (2007) considera inadecuado el uso indistinto que se hace de los términos ―razonamiento proporcional” y ―proporcionalidad”; al respecto señala: ―…proporcionalidad es un constructo más amplio que razonamiento proporcional.” (p. 638). Define la proporcionalidad como:

> …un constructo matemático que refiere a la condición o a la estructura subyacente de una situación en la cual existe una relación especial invariante (constante) entre dos cantidades covariantes (cantidades que están vinculadas y cambian juntas). (p. 638).

Mientras el razonamiento proporcional se limita a la habilidad para comprender

> … las relaciones estructurales entre cuatro cantidades… en un contexto que involucra simultáneamente covariancia de cantidades e invariancia de razones o productos… la habilidad para discernir una relación multiplicativa entre dos cantidades así como también la habilidad para extender la misma relación a otro par de cantidades. (Lamon, 2007, p. 638).

Con el ánimo de hacer más sencillo el planteamiento de Lamon, debemos tener presente, como hemos venido exponiendo en este apartado, que el modelo matemático de las relaciones de proporcionalidad es una función lineal de la forma $y = kx$, donde k es la constante de proporcionalidad. En consecuencia, la comprensión de la proporcionalidad involucra conocimientos matemáticos que van más allá de las relaciones estructurales entre cuatro cantidades… que caracterizan el razonamiento proporcional. De manera que, mientras el razonamiento proporcional queda acotado al tratamiento de estructuras aritmético-algebroides, relativas al uso de expresiones de la proporción como: $a/b = c/d$ y $a/b = c/x$, la relación de proporcionalidad comprende el uso de estructuras algebraicas-funcionales, relativas a expresiones de la forma $y = kx$.

En la Fig. 2.3, presentamos la transcripción de una lista de conocimientos matemáticos involucrados en la comprensión de la proporcionalidad, propuestas por Lamon (2007), en la que se puede observar algunas de las acciones involucradas en el uso de estructuras algebraicas-funcionales, relativas a expresiones de la forma $y = kx$.

- Expresar el significado de cantidades y variables y la constante de proporcionalidad en el contexto en el cual son utilizadas.
- Usar la proporcionalidad como un modelo matemático para organizar de manera apropiada contextos del mundo real.
- Distinguir situaciones en las cuales la proporcionalidad no es un modelo matemático apropiado de aquellas en las cuales este es útil.
- Desarrollar y usar el lenguaje de la proporcionalidad.
- Usar funciones para expresar la covariación de dos cantidades
- Explicar la diferencia entre funciones de la forma $y = \mathrm{m}x$ y funciones de la forma $y = \mathrm{m}x + \mathrm{b}$. Donde, en la segunda función, y no es proporcional a x, sino más bien, Δy es proporcional a Δx.
- Saber que el grafico de una situación de proporcionalidad directa es una línea recta que pasa por el origen.
- Saber que la gráfica de $y = \mathrm{m}x + \mathrm{b}$ es una línea recta que intersecta al eje y b unidades más arriba del origen.
- Distinguir diferentes tipos de proporcionalidad (directa, inversa, cuadrada, cúbica) y asociar cada una de ellas con una situación de la vida real en la cual sea aplicable.
- Saber que k es la razón constante entre dos cantidades en una situación de proporcionalidad directa.
- Saber que k, la constante en una situación inversamente proporcional, es simplemente el producto de un par de valores de dos cantidades.
- Saber que la gráfica de una situación inversamente proporcional es una hipérbola

Fig. 2.3: Conocimiento matemático involucrado en la comprensión de la proporcionalidad. (Adaptado de Lamon (2007, pp.639-640)).

Los conocimientos enlistados en la Fig. 2.3, además de ilustrar a lo que refiere la proporcionalidad en relación con la acotación de lo que se entiende como razonamiento proporcional, se puede considerar como un referente del conocimiento matemático necesario a ser manejado con solvencia por el (futuro) profesor, para completar uno de los requisitos necesario para desarrollar su labor profesional de manera pertinente.

Una vez observada la distinción entre razonamiento proporcional y proporcionalidad, aún cuando reconocemos la necesidad de desarrollar el conocimiento de la proporcionalidad, antes referido, también somos conscientes del carácter limitado del trabajo que nos ocupa. En este sentido, nos limitaremos al estudio del razonamiento proporcional, más que a la proporcionalidad. Más precisamente nos encargaremos de observar y fomentar conocimientos de futuros profesores en torno a la resolución de problemas de valor faltante y de comparación, relativos a la proporcionalidad. En este sentido, haremos un uso acotado del significado de la proporcionalidad, inscrito a su uso en la educación primaria, donde se puede hacer un uso indistinto del razonamiento proporcional o de la actividad epistémico/cognitiva involucrada en la resolución de problemas proporcionales de los tipos mencionados.

Un último aspecto que hemos considerado relacionado con el conocimiento matemático involucrado en la comprensión de la proporcionalidad consiste en distinguir entre razón y tasa (rate).

Diversos autores han propuesto distinciones entre los usos que hacen de los términos razón y tasa (Kaput y West, 1994; Lesh, Post, y Berh, 1988; Ohlsson, 1988; Schwartz, 1988; Thompson, 1994). Lamon (2007), presenta una revisión de varias interpretaciones que se ha dado a estos términos.

Un aspecto común, en buena parte de las diferentes interpretaciones dadas a estos términos, es que una tasa es siempre una razón, lo que sucede es que el uso del término tasa refiere a un tipo especial de razones, que posee características específicas, que la diferencian de un uso común que se hace del término razón. Se trata, por tanto, de una diferenciación flexible, puesto que una tasa no deja de ser una razón. En este sentido, Van de Walle (2001; p. 261), al referir al desarrollo del concepto de razón/tasa en la escuela elemental, interpreta una tasa como un tipo de razón. No obstante, Herbert (2010), provee al término tasa de un significado muy amplio: ―…concepto que expresa las relaciones numéricas entre los cambios en dos cantidades…” (Herbert, 2010, p. 8-13[27]).

En una primera interpretación, utilizada por varios de los autores que desarrollaron estudios iniciales relativos a razón y proporción (sub-apartado 1.3.1 del primer capítulo), se considera la razón como una relación entre cantidades de magnitudes en un mismo espacio de medida, es decir, el término razón queda reducido a las razones de tipo internas. Mientras tasa refiere a la relación entre magnitudes de diferentes espacios de medida, es decir una tasa es una razón externa, con la acotación de que ―…los

[27] Este número corresponde a la página 13 del capítulo 8.

cambios entre dos unidades de medida son también tasas… pulgadas por pie, milímetros por litro, centímetros por pulgada" (Van de Walle, 2001, p. 261). Otras distinciones debidas a diferentes autores (Lesh, Post, y Berh, 1988; Ohlsson, 1988; Schwartz, 1988; Kaput y West, 1994) refieren a aspectos contextuales y locales del tipo de problema como criterio para establecer esa distinción.

Thompson (1994) provee de una distinción de índole cognitiva entre tasa y razón:

> ~~"U~~na tasa es una razón constante abstraída reflexivamente… en el mismo sentido en que un número entero es una diferencia numérica constante abstraída reflexivamente… una razón específica en relación con las cantidades comparadas… es una estructura mental. Una tasa como una razón constante abstraída reflexivamente, simboliza esa estructura como un todo, pero da prominencia a la constancia del resultado de la comparación multiplicativa" (p. 192).

De acuerdo con Lamon (2007), siguiendo la propuesta de Thompson:

> … una razón se convierte en tasa cuando la persona es capaz de concebir que la razón se aplica más allá de una situación particular, en la cual esta fue concebida, y puede pensarse como una característica de toda una clase de cantidades covariantes. (pp. 634-635).

Al igual que Lamon, consideramos atractiva esta distinción entre razón y tasa, puesto que refiere a diferentes estados de competencia epistémica de la persona. En este sentido, para efectos de la formación inicial de profesores, sería recomendable que los futuros profesores logren construir el concepto de tasa a partir de la abstracción reflexiva del concepto de razón.

2.2.2. Perspectiva psicológica-cognitiva

Desde una perspectiva psicológica-cognitiva, Piaget, a quien posiblemente se deba uno de los usos más difundidos del término razonamiento proporcional en el ámbito de la didáctica (Sanz, Pozo, Pérez y Gómez, 1996), considera esta forma de razonamiento como uno de los ocho esquemas que caracterizan el nivel de desarrollo formal de la persona (Inhelder y Piaget, 1996). Para este autor y sus colaboradores el razonamiento proporcional es adquirido en el estadio de las operaciones formales, se requiere del uso de un razonamiento hipotético deductivo el cual le permite al sujeto utilizar una relación matemática (razón) y a partir de ésta deducir una segunda relación también matemática (proporción).

Piaget y colaboradores, utilizando diferentes ejemplos, han explicado cómo el sujeto, después de cumplir once y doce años de edad, recorriendo un camino que requiere procesos de observación, reflexión y experimentación, puede llegar a comprender el concepto de proporción.

En síntesis, en el estadio de las operaciones formales, el sujeto logra adquirir el concepto de proporción, *observando*, por ejemplo, el comportamiento de una balanza, ha de *descubrir-reflexionar* sobre el equilibrio producido por dos pesos iguales, seguidamente *experimentar* en función de la distancia de los pesos al centro, y, luego *relacionar*, a través de un proceso *reflexivo-constructivo*, las dos causas con igualdad de efectos. De manera que el individuo está en capacidad de construir el concepto de proporción tras *descubrir-construir* dos relaciones previas y a continuación la relación de ambas entre sí. El razonamiento proporcional es, en consecuencia, “una relación entre relaciones” (Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001, p. 241).

Tal y como expusimos en el capítulo 1, la investigación sobre la cognición en torno al desarrollo del razonamiento proporcional ha ido evolucionando. Los estudios iniciales tuvieron como objeto describir estados de desarrollo del sujeto que le facultaban para realizar un razonamiento proporcional del tipo “relación entre relaciones”, antes referido. Luego, asumiendo algunas hipótesis generales sobre el desarrollo y capacidades de las personas, se realizaron estudios dirigidos tanto a observar indicios sobre el inicio de ese desarrollo y capacidades en edades tempranas, así como su evolución hacia estados de mayor madurez cognitiva y epistémica.

En la actualidad los estudios se dirigen a establecer, cada vez con mayor precisión, características cognitivas específicas que permitan promover el desarrollo del razonamiento proporcional y el aprendizaje de la proporcionalidad por medio de la resolución de problemas de razón y proporción (Behr et al., 1992; Karplus, Pulos y Stage, 1983a; 1983b; Lamon, 2007). De acuerdo con Lamon (2007), las demandas cognitivas en una tarea que involucra un razonamiento proporcional comprende: “a) … la coordinación de al menos tres cantidades simultáneamente; b) conocimiento de los principios físicos involucrados; c) …la cantidad de información a la cual puede atender un niño, y …el nivel de comprensión de la situación.” (p. 631).

En relación con la resolución de problemas por parte de los alumnos, los análisis que se realizan de las mismas, hemos visto en el capítulo 1, apartado 1.7, han proveído la identificación de diversas estrategias puestas en juego por los alumnos. Asimismo, a cada tipo de estrategia identificada se encuentran asociados procesos de índole cognitiva que fueron referidos en el desarrollo de ese apartado.

2.2.3. Perspectiva instruccional

Desde una perspectiva instruccional, Streefland (1985, p. 84) subraya la necesidad de construir una teoría sobre los procesos de aprendizaje involucrados en los conceptos de de razón y proporción. Propone intervenir didácticamente por medio de una secuencia de aprendizaje utilizando actividades asociadas a la noción de razón, desde edades tempranas (como comparaciones cualitativas proporcionales; ‗más grande‘, ‗más pequeño‘; ‗contar grandes cantidades‘ y ‗medir áreas‘, con niños a partir de los 6 años) como previas y preparatorias para que tal noción sea producto de las mismas. No dejar para más tarde su aprendizaje, en la que necesariamente su adquisición estará vinculada con el enfoque funcional, reconocimiento formal de similitudes, funciones lineales, clases de equivalencia. Se propone un inicio informal, intuitivo y cualitativo dirigido hacia la meta de la formalización y la algoritmización.

La propuesta didáctica de Streefland (1985), coincide con una de las propuestas de estudio planteadas por Piaget y colaboradores, en la que sostiene que en el desarrollo del razonamiento proporcional en la persona, el razonamiento cualitativo precede al cuantitativo (Inhelder y Piaget, 1996). Tal y como expusimos en el apartado 1.3.1. del primer capítulo, este posicionamiento tiene un amplio respaldo en diversas investigaciones (Behr, et al., 1992; Cramer y Post, 1993; Lesh, Post y Behr, 1988; Singer, Kohn y Resnick, 1997; Smith, 2002).

Se trata de la búsqueda de una secuencia del contenido referente a la proporcionalidad que permita ir desde un conocimiento de naturaleza intuitiva-cualitativa, de estructura aditiva (pre-proporcional), hacia un conocimiento cuantitativo de estructura multiplicativa, haciendo uso de procesos que fomenten la manifestación de estrategias de construcción progresiva (building up strategies[28]), que permita encaminar hacia el proceso de consolidación del razonamiento proporcional.

Haciendo uso del constructo ―trayectoria de aprendizaje”, en el sentido propuesto por Clements y Sarama (2004), la búsqueda de tal secuencia de contenido podría desarrollarse atendiendo a dos posibles vías: (a) el desarrollo histórico de las ideas matemáticas en torno a la proporcionalidad, que puede ser utilizado como un heurístico, y (b) las estrategias de resolución informales de los niños al resolver problemas de proporcionalidad (Clements y Sarama, 2004, p. 82). En este sentido, a continuación referiremos a algunos elementos que consideramos de interés para el desarrollo de posibles trayectorias de aprendizaje, relativas a la proporcionalidad, de acuerdo con las dos vías señaladas por estos autores.

2.2.3.1. Aportaciones de la historia para una posible trayectoria de aprendizaje

A continuación nos referiremos a algunas reflexiones alrededor del desarrollo de la proporcionalidad, desde la perspectiva histórica, con fines didácticos. La trayectoria principal considera partir desde el inicio de la civilización, en el que el razonamiento proporcional se manifiesta como una necesidad humana, y que se dirige hacia una de las organizaciones teóricas de las matemáticas más antigua, conocida por la humanidad; los *Elementos* de Euclides. En relación con esta trayectoria, se considera el desarrollo del razonamiento proporcional en las personas, como un indicador de referencia para lo histórico y viceversa.

Tal y como es lógico pensar, de acuerdo con el planteamiento de Pinker (1997), el uso del raciocinio inicial del hombre y su desarrollo debió ir desde formas elementales a formas complejas de razonamiento. Stewart (2008) señala la construcción de los números como el inicio de las matemáticas, luego, el desarrollo de las relaciones entre estos, en el cual se inscribe la proporcionalidad, tuvo lugar en un momento posterior.

Desde un punto de vista psicológico, Piaget y colaboradores sitúan el razonamiento proporcional como uno de los más complejos esquemas de razonamiento. Este tiene lugar en el último de los estadios propuestos para explicar la evolución intelectual de la persona (Inhelder y Piaget, 1996).

[28] Expuesto con detalles en el sub-apartado 1.7.2. del capítulo 1.

Ahora bien, reconociendo una posible identificación entre lo filogenético y lo ontogenético en el desarrollo de las ideas alrededor del razonamiento proporcional, podemos inferir, a partir de los planteamientos expuestos en estos últimos párrafos, que su manifestación tuvo lugar en un momento posterior a la aparición de la idea de número y cuando la capacidad de pensamiento humano alcanzó la madurez para establecer relaciones entre nociones de este tipo. Esta idea de secuenciación de las nociones matemáticas guarda relación con las categorías utilizadas en el proyecto PISA/OCDE, en las cuales *cambios y relaciones* se encuentran en el tercer nivel de tales categorías (Rico, 2004).

No obstante, más que la idea de número, debemos reconocer la existencia de una idea más primitiva, como lo es la idea de “cantidad pura” en su sentido más intuitivo, la cual permite distinguir, por ejemplo, entre más y menos, entre poco, igual y mucho… (Streefland, 1985). Acudiendo nuevamente a los planteamientos Piagetianos, la misma idea de número implica una síntesis de nociones de seriación, orden, cardinalidad y conservación de cantidades (Piaget, 1981; Piaget et al., 1977). Con lo cual se puede presuponer una posible manifestación de un razonamiento proporcional primitivo-intuitivo realizado sobre cantidades puras en las que el número no se manifiesta de manera expresa.

Una manifestación análoga a la descrita en el párrafo anterior, solo que a niveles cognitivos distantes, lo encontramos en el Libro V de los *Elementos* de Euclides. Byrne (1847) presenta una publicación de los seis primero libros de Euclides, mostrándose en el libro V un desarrollo de la proporcionalidad, en el cual se hace un uso predominante de cantidades de magnitudes, prácticamente sin necesidad de hacer una referencia explícita a valores numéricos. Válidas las excepciones del uso de los múltiplos doble, triple..., las relaciones entre estos introducidas en la definición VII, utilizados para ilustrar lo probado en la proposición VIII, y el uso de exponentes naturales (1,…, 5), introducidos en las definiciones X y XI (Byrne, 1847, pp. 200-201).

De manera que, salvando las distancias, es posible concebir que las primeras razones y proporciones utilizadas por el raciocinio humano se establecieran entre cantidades de magnitud y relaciones entre ellas, no de manera formal como en los *Elementos*, sino de manera intuitiva y natural, sin la necesidad del uso explícito de números para ser concebidas. Este hecho está en relación con lo que expondremos en el próximo sub-apartado, sobre elementos para una trayectoria basados en las estrategias de los niños.

Por otra parte, queremos destacar dos aspectos de carácter histórico-epistemológico, muy relacionados con lo anterior, en el que se observa un modo en cómo se construye el conocimiento matemático, que podría servir de referencia para la construcción de una posible trayectoria de aprendizaje. Se trata de la matemática aplicada a problemas de la realidad y la acumulación de conocimiento matemático “concreto”, que es necesario lograr para avanzar hacia la formalización de dicho conocimiento.

Si observamos ahora el testimonio histórico de la matemática, referido en el Papiro Matemático de Rhind (1600 A.C.), encontramos el uso de las nociones de razón y proporción para resolver problemas de la vida real. Asimismo, Asper (2009, p. 107) y Lloyd (1992, p. 569), señalan la existencia de varios “campos superpuestos de matemáticas aplicadas a la práctica” que hicieron posible la construcción del “iceberg” del conocimiento matemático griego, cuyo tope está representado por los *Elementos* de Euclides. Es decir, que fue necesaria la acumulación de una buena cantidad de conocimiento matemático aplicado a la realidad para dar lugar a la teorización y formalización expuesta por Euclides en su obra.

La manifestación de este uso de la matemática para resolver problemas de la vida real, en el ámbito escolar, está en relación con lo propuesto por las corrientes de pensamiento fenomenológicas (Filloy, Rojano y Puig, 2008; Freudenthal, 1983), relativas a la idea de los conceptos matemáticos como medios de organización de los fenómenos. En el sub-aparatado 2.2.6 referiremos a algunos detalles sobre esta corriente del pensamiento en relación con los objetivos de este trabajo. Nos interesa esta perspectiva, puesto que promueve el uso de problemas de la realidad, para concebir y diseñar situaciones de aprendizaje de acuerdo con los estándares curriculares actuales y los resultados de la investigación en educación matemática.

2.2.3.2. Elementos en torno al uso de estrategias de los niños

En el capítulo 1, apartado 1.7, presentamos algunas de las estrategias utilizadas en la resolución de problemas de razón y proporción. Observamos que algunas de esas estrategias se hacen presentes de manera intuitiva e informal, antecediendo los procesos de instrucción correspondientes. Esto nos sugiere que la propuesta de una trayectoria de aprendizaje que tome en cuenta las estrategias de los niños, atendiendo a la segunda vía propuesta por Clemens y Sarama (2004), pero asumida como una trayectoria general, debería partir de las estrategias de resolución informales de los niños y conducir a la adquisición de razonamientos funcionales-algebraicos relativos a la proporcionalidad.

Interpretamos esa posible trayectoria general como un eje transversal a lo largo de la formación escolar de la persona, en la cual se conecten las relaciones intuitivas-informales, cualitativas, iniciales con los procesos de algoritmización y algebrización correspondientes. Esta conexión podría ser realizada por medio del uso de problemas resolubles con estrategias informales, con bases intuitivas-cualitativas, que avance hacia situaciones-problema resolubles por medio de estrategias de construcción progresiva, dirigida finalmente a los procesos de algoritmización y algebrización. Estos procesos deberían ser presentados como herramientas que optimizan la resolución de los problemas, puesto que economizan los procedimientos que se emplean y proporcionan mayor precisión a los resultados que se obtienen.

En nuestro caso, dado que nuestro trabajo se circunscribe al estudio de la enseñanza y aprendizaje en la educación primaria, la trayectoria hipotética de aprendizaje a la que referimos debería conducir hasta el nivel de la algoritmización, siendo pertinente la observancia permanente de los procesos de organización y cognición referidos a la adquisición-construcción de razonamientos funcionales-algebraicos relativos a la proporcionalidad.

A modo de síntesis de lo referido sobre estos elementos de las trayectorias identificadas, observamos una analogía que debería ser considerada en la problemática de la enseñanza de la proporcionalidad, a saber; se observa que en la medida en que se va desarrollando el pensamiento, tanto el de la humanidad (histórico de la especie) como el de las personas (individual y en sociedad), que le permite comprender y organizar la realidad haciendo uso de la matemática, en esa misma medida, la enseñanza se debe desarrollar haciendo uso de la resolución de problemas de la realidad, ajustados a las condicionantes intelectuales-cognitivas y a la realidad propia del alumno.

Ahora bien, el objeto de este planteamiento no es establecer una relación entre lo histórico y lo didáctico, en cuanto a una posible analogía entre el desarrollo de las nociones en la especie y en la persona. Nuestra idea tiene un sentido análogo al expuesto en Castro, Godino y Rivas (2009) en el que se concede a la filogénesis, a la ontogénesis y a la relación filogénesis/ontogénesis importancia didáctica, sin que tal relación implique el establecimiento y uso de un paralelismo entre las líneas del desarrollo de ambas, con fines didácticos.

En cualquier caso, desde una perspectiva didáctica observamos, así como lo proponen Behr et al. (1992), Freudenthal (1983), Lesh, Post y Behr (1988), Streefland (1985), entre otros, que la concepción de una trayectoria de aprendizaje encaminada a la adquisición y desarrollo de la proporcionalidad puede y debe partir de planteamientos cualitativos, relativos a covariaciones entre magnitudes específicas, propias de la realidad de los niños. Situaciones de comparación cualitativa del tipo “Juan es más alto que Luis”, “la mesa es más grande que la silla”, “el lápiz es más delgado que el libro”…

Luego avanzar hacia comparaciones del tipo: “el libro es más grande que el lápiz, así como la mesa es más grande que la silla”…, las cuales plantean una relación entre relaciones de índole “cualitativa”, que podrían ser el germen de las comparaciones numéricas, necesarias para el desarrollo del razonamiento proporcional (Singer-Freeman y Goswami, 2001). Más aún, de acuerdo con Spinillo y Bryant (1999), los niños, desde los seis años de edad, pueden realizar juicios de tipo proporcional “… cuando las relaciones de primer orden son accesibles a ellos… usan la división por mitad para hacer tales juicios” (p. 181).

Estos resultados indican la factibilidad de fomentar el desarrollo de esta forma de razonamiento desde edades tempranas; asimismo, estos se encuentran en relación con lo referido en el aparatado 1.5, del capítulo anterior.

Finalmente, la perspectiva instruccional en su sentido más lato constituye una posición epistemológica compartida por la mayoría de los investigadores involucrados en el estudio de los problemas de enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad, desde la cual se pretende aportar soluciones a la misma.

De manera que, cada trabajo de investigación cuyo objeto sea la enseñanza-aprendizaje de la proporcionalidad, en mayor o menor medida, asume la perspectiva instruccional y propone posibles líneas de acción dirigidas a mejorar la enseñanza y el aprendizaje de esta noción matemática.

2.2.4. Perspectiva sociocultural

Hoy por hoy existen diferentes posiciones o interpretaciones en torno a lo que se puede llamar perspectiva sociocultural en educación matemática. Enfoques como la cognición situada, aprendizaje situado, el planteamiento vigotskiano, el constructivismo social, la enculturación, la etnomatemática, la matemática realista…

Si bien ha sido un atrevimiento englobar en el término ecológico algunas de las perspectivas que interpretan las relaciones de la persona con su medio, no es menos complejo referir a la perspectiva sociocultural de un modo preciso sin que se entrecrucen otras perspectivas de índole ecológica. Como ejemplo de este entrecruzamiento cabe por ejemplo señalar el trabajo desarrollado desde el Instituto Freudenthal, en el cual se observa una relación entre la ―matemática realista”, la perspectiva ―fenomenológica-matemática” y la ―matemática en contexto”, puesto que tienen un origen común; precisamente el enfoque fenomenológico de la matemática propuesto y desarrollado por Hans Freudenthal y colaboradores, siendo la matemática realista la parte operativa de esta perspectiva, y la matemática en contexto una de las formas de sus concreciones en materiales curriculares específicos. Luego, estos términos aparecen en otros trabajos, sin que se observen aspectos que permitan establecer esa vinculación.

Más aún, de acuerdo con Wong, Zaitun y Veloo (2001): ―…el contexto sociocultural abarca muchos factores interrelacionados: historia, política, composición étnica, valores culturales y formas de vida, costumbres, diferencias de género, y otros” (p. 113). De manera que, el estudio de la proporcionalidad desde una perspectiva sociocultural constituye en espacio muy amplio que requeriría una extensión considerable en el desarrollo de este informe.

En este orden de ideas, no es nuestro interés entrar en una revisión detallada sobre la complejidad implicada en la dilucidación de las características específicas de estos enfoques o planteamientos. No obstante, nos interesa referir a dos aspectos particulares que se observan desde esta perspectiva, desde los cuales se provee de un significado específico al desarrollo del razonamiento proporcional.

El primero de tales aspectos es el que refiere a concebir el aula de clase como un espacio social (Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009), en el cual un profesor y varios estudiantes coordinan sus derechos de participación, donde se asignan obligaciones y se asumen responsabilidades relativas al compromiso de aprender matemáticas; se comparten y construyen significados. Estas son algunas, entre muchas otras, de las acciones de índole social involucradas en la interacción que se produce en el aula de clase.

Este aspecto sirve de sustento al posible desarrollo de futuras acciones de los profesores en formación inicial, en la realización de su actividad profesional, particularmente al enseñar lo relativo a la proporcionalidad. Lo que se persigue es que esas futuras acciones se lleven a efecto desmontando el anquilosado procedimiento didáctico que fomenta la mecanización y obstaculiza el desarrollo del razonamiento proporcional.

El segundo de estos aspectos refiere más particularmente a la visión del contenido matemático escolar como algo socialmente útil, que conforma un aprendizaje de cosas que se usan en el día a día de la gente, que contribuye con un desenvolvimiento social adecuado y que, por ende, su aprendizaje es de interés para las personas (Akatugba y Wallace, 1999; Hoyles, Noss y Pozzi, 2001; Kent, Arnoski y McMonagle, 2002)

Ciertamente consideramos que el razonamiento proporcional es un aspecto de suma importancia para el éxito de la persona, en la comprensión de diversas situaciones que se manifiestan en su contexto social real (Condon, Landesman y Calasanz-Kaiser, 2006; Hoyles, Noss y Pozzi, 2001).

El futuro profesor debe adquirir el potencial que le faculte para desarrollar una labor profesional que fomente el interés del alumno, dotando de sentido el contenido matemático, mostrando el aprendizaje de la matemática como una acción útil para su adecuado desenvolvimiento en el entorno que le rodea. Un ejemplo de este tipo de situaciones lo hemos presentado en el apartado 1.5, del primer capítulo, Fig. 1.2.

Hoyles, Noss y Pozzi (2001) realizan una investigación sobre el razonamiento proporcional puesto en práctica por un grupo de enfermeras en su desenvolvimiento profesional, para determinar las dosis de administración de los medicamentos en determinadas situaciones. Aún cuando el trabajo desarrollado por estos autores tiene lugar en un contexto de formación profesional del campo de la salud, observamos en este trabajo un ejemplo indiscutible de la importancia de manejar con pertinencia lo relacionado con el razonamiento proporcional, para garantizar un desenvolvimiento adecuado en un contexto social específico. Acortando distancias, ubicándonos en la formación de profesores, el contexto de la salud podría ser utilizado para proponer tareas escolares, cuya resolución emulan comportamientos que se llevan a cabo en un contexto real y vital.

En este orden de ideas, considerando la importancia del contexto social y cultural de las tareas a ser resueltas en el ámbito escolar, con el objeto de desarrollar el razonamiento proporcional, encontramos que: ―Un aspecto clave de las dificultades de los estudiantes con el razonamiento proporcional puede ser entendido únicamente cuando se considera el contexto social y cultural en el cual ellos se desenvuelven" (Akatugba y Wallace, 1999; p. 305). De estas consideraciones se deriva la necesidad de desarrollar experiencias de enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad en las que se tomen en cuenta situaciones próximas al contexto sociocultural del alumno.

En este sentido, se observará en el desarrollo de la parte empírica de esta investigación el predominio del uso de situaciones problemas pertenecientes a la realidad del alumno, tanto del maestro en formación inicial como del escolar de tercer ciclo de primaria.

2.2.5. Perspectiva antropológica

El enfoque antropológico de lo didáctico, originalmente propuesto por Chevallard (Chevallard, 1991; 1999), ha proporcionado una perspectiva desde la cual se interpreta la problemática de la enseñanza de la matemática con un sentido antropológico. Las contribuciones observadas en la literatura desde el enfoque antropológico de lo didáctico, relativo al estudio de la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad, se encuentran, principalmente, en los trabajos de Bosch, Gascón y colaboradores (Bolea, Bosch y Gascón, 2001; Bosch, 1994; García, Bosch, Gascón y Ruiz, 2007).

De acuerdo con Bolea, Bosch y Gascón (2001) las organizaciones matemáticas escolares en torno a la proporcionalidad son puntuales e incompletas. En este sentido, García (2005) refiere al carácter aislado que presentan las nociones relativas a la proporcionalidad en el currículo escolar, al señalar que se presentan como una ―…amalgama de organizaciones matemáticas puntuales relativamente aisladas" (p. 335). Este planteamiento es también reconocido por Ohtani (2009) quien, al referirse a la proporcionalidad en el currículo japonés, señala:

> Así, en la enseñanza de la proporción, se encuentran muchas diferencias entre la enseñanza en la escuela primaria y el inicio de la escuela secundaria. Los profesores a partir de diferentes sistemas de actividades han intentado resolver el problema de la articulación del currículo. (p. 108).

Descripciones similares son presentadas por Monteiro (2003) al referirse al currículo portugués. Ante esta característica, al parecer universal, de la enseñanza de la proporcionalidad, en la que los enfoques aritmético y algebraico-funcional (referidos en el apartado 2.2.1. del presente capitulo) aparecen aislados, enseñados en diferentes niveles escolares; la propuesta de este grupo de investigadores es la articulación de la proporcionalidad en el currículo por medio de una modelización funcional.

Otro de los aspectos de interés, derivados del enfoque antropológico de lo didáctico, para efectos de este trabajo, proviene de la identificación de escenarios básicos de modelización de la proporcionalidad. Desde un posicionamiento pragmático-antropológico, se pueden reconocer tres escenarios básicos en los que se aplica la modelización de la proporcionalidad (Bosch, 1994, p. 215), a saber:

(a) por conveniencia (relaciones de peso, precio, longitud…),
(b) por experiencias físicas o experimentalmente en un laboratorio (relaciones entre volúmenes, presiones y temperaturas de los gases), y
(c) por demostración (relaciones de semejanza, entre los segmentos formados por rectas paralelas cortadas por dos rectas secantes).

En estos tres escenarios, objetos de diferente índole, susceptibles de ser medidos, se relacionan con otros, exhibiendo relaciones de tipo lineal. Se debe notar la desproporción que existe entre estos tres escenarios, en cuanto a la cantidad de problemas, del programa de educación primaria, que en cada uno de ellos puede ser reconocido. Es claro que el más prolijo es el primero, el de las conveniencias, el cual comprende tipos de problemas diversos en que las magnitudes se aplican a una vasta diversidad de objetos. Los otros dos escenarios quedan sujetos a actuar sobre aquellos objetos propios de las ciencias experimentales (física, química, biología,…) o formales (lógica, geometría métrica,…), que poca presencia admiten en la enseñanza de la escuela primaria. De manera que, cuando estos escenarios son observados desde la perspectiva de la educación primaria y de las situaciones útiles y modelables por la proporcionalidad en este ámbito, es el primer escenario el que más nos interesa.

Una aclaratoria necesaria consiste en referir a que reconocemos la proporcionalidad como un contenido propio de la matemática, por lo que, los escenarios de aplicación mencionados, constituyen espacios en los que se aplica la matemática relativa a situaciones que requieren el uso de un razonamiento proporcional y de magnitudes proporcionales. En este sentido, las aplicaciones de la modelización de la proporcionalidad referida a lo eminentemente numérico, algebraico o intra-matemático es un escenario natural que no requiere ser incluido junto a los escenarios considerados.

Si bien, el uso de una modelización de relaciones entre magnitudes en el segundo y tercer escenario tiene fundamentos científicos, vale decir que el segundo tiene fundamentos experimentales, y el tercero formales; en el primer escenario, determinar si una relación entre dos magnitudes es proporcional o no, no está del todo resuelta (Bosch, 1994; Peled y Bassan-Cincinatus, 2005; Rivas et al., 2009). Esa cualidad de convencionalidad crea un espacio de ambigüedad en el que el uso de la modelización proporcional da lugar a conflictos (errores, dificultades y obstáculos). Sucede con mucha frecuencia que en cualquier situación que implique una covariación entre dos variables, se asuma apriorísticamente que tal situación involucra una relación de proporcionalidad entre ellas (De Bock, Van Dooren, Janssens, y Verschaffel, 2007; Modestou, Elia, Gagatsis y Spanoudis, 2008).

En palabras de Bosch (1994):

> Vemos pues que la aritmética tradicional no se plantea el problema de la linearidad de los sistemas que dan lugar a los problemas de proporcionalidad. Se contenta con proponer unos sistemas que supone proporcionales, aunque esta hipótesis sea totalmente irrealista… diremos que propone considerar a priori todo sistema como proporcional, a menos que posea, de manera probada y conocida, un modelo no proporcional del mismo. (p. 215).

En relación con el uso indebido que se hace, al aplicar la proporcionalidad en problemas no proporcionales (De Bock, Van Dooren, Janssens, Verschaffel, 2007; Modestou, Elia, Gagatsis y Spanoudis, 2008), se debe reconocer que la ambigüedad con que se presenta el uso de problemas de ese primer escenario (el de las conveniencias), juega un papel relevante, puesto que fomenta la puesta en juego de diversos problemas de la realidad, los cuales apriorísticamente se aceptan como proporcionales, provocando tácitamente la generalización del uso de estrategias lineales para resolver problemas de la realidad, que tengan una estructura similar a los problemas lineales, aún cuando no lo sean.

En la matemática de la escuela primaria; los problemas de ese escenario son los más utilizados en el ámbito educativo elemental. Una de las razones que fomenta la relación entre los problemas de ese escenario y su uso en la escuela primaria, se encuentra en los lineamientos fundamentales que perfilan las más recientes reformas educativas.

De acuerdo con las últimas reformas educacionales, la enseñanza de la matemática en los diferentes ciclos de educación primaria debe aproximarse cada vez más a la realidad del alumno. En este sentido, encontramos en las propuestas de enseñanza, en los libros de textos y en los diferentes elementos de planificación de la enseñanza de la proporcionalidad el uso predominante de situaciones propias de ese primer escenario.

Esta problemática, la cual parece no tener importancia para los matemáticos, ha sido objeto de diversas investigaciones (De Bock, et al., 2007; Modestou, et al.,, 2008; Van Dooren, et al., 2008). Aún cuando el marco teórico en los que se fundamentan estas investigaciones no es el antropológico, se reconocen los avances mostrados en las mismas, con las que se ha pretendido caracterizar la concepción errónea u obstáculo epistemológico denominado ―Ilusión de la linealidad", que se manifiesta como la aplicación de procedimientos de resolución lineales en problemas no lineales. A este asunto nos referimos en el sub-apartado 1.8.3 del capítulo anterior.

La detección de esta problemática en torno a la proporcionalidad, observada desde esta perspectiva, llama poderosamente la atención que se trata de un uso inapropiado de la modelización lineal, lo cual, de acuerdo con Bosch (1994), es propiciado por la misma modelización que se realiza de la proporcionalidad desde la aritmética. Consideramos, al igual que Modestou y Gagatsis (2007), que la manifestación de este tipo de acciones constituye un obstáculo para la puesta en juego de un razonamiento aditivo en problemas de estructura aditiva (Fernández y Llinares, 2011), pero más aún, la puesta en juego de un razonamiento proporcional auténtico debería proveer de la capacidad para distinguir una situación proporcional de otra que no lo sea. El problema se hace más grave cuando el campo donde se manifiesta es el de la formación inicial de profesores. En este sentido, más adelante, en el capítulo 5, presentamos un estudio en el que describimos la manifestación de este tipo de acciones, con un grupo de profesores en formación inicial, con el fin de describir la base de los juicios, en los que se sustentan los errores que se cometen en esa distinción, por parte de futuros profesores.

2.2.6. Perspectiva fenomenológica

Sobre esta perspectiva, estamos particularmente interesados en las aportaciones y visión específica que se le ha dado a partir de las ideas propuestas por Hans Freudenthal, referidas a la educación matemática. En este orden de ideas, enfocamos la corriente de pensamiento en el que se conciben los conceptos matemáticos como medios de organización de los fenómenos, siendo los fenómenos, de acuerdo con Puig (1997, p. 64): “. . . lo que es objeto de nuestra experiencia matemática”.

Uno de los desarrollos generales derivado de esta perspectiva es el movimiento conocido como “matemática realista” que ha contribuido a dar sustento a la idea de vincular la enseñanza y aprendizaje de la matemática con la realidad que circunda a la persona. Desde la matemática realista se establece una correspondencia entre los fenómenos (lo sensible) con los conceptos (lo inteligible), dando lugar a interpretar las matemáticas como formas de organización de la realidad o del mundo sensible.

Desde esta visión, el problema didáctico-matemático se postula en términos de la resolución de problemas de la realidad de la persona que aprende.

Al referirnos a la temática específica de la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad, Freudenthal (1983) presenta, en su capítulo denominado “Razón y proporcionalidad”, una explicación sobre diferentes aspectos concernientes al término razón y la noción de proporcionalidad, llamando la atención sobre las implicaciones didácticas respectivas. Cabe hacer mención, por ejemplo, a la distinción que realiza sobre dos tipos de razón: razón interna y razón externa, siendo la primera la que se forma dentro de un mismo sistema (en una magnitud, problemas que se resuelven, de acuerdo con algunos investigadores,[29] utilizando la estrategia “dentro”) y la segunda la que se forma entre sistemas (entre dos magnitudes, problemas que se resuelven utilizando la estrategia “entre”). A partir de esta distinción llama la atención sobre las dificultades que se pueden presentar en el aprendizaje para pasar de razones internas a razones externas, “nadie plantea la cuestión de si no será un salto demasiado grande para el que aprende” (p. 184).

Desde una postura crítica, Freudenthal señala aspectos relativos a la relación de la noción de proporción y su interpretación como función lineal entre dos variables (sus condiciones) como resultados obvios para los matemáticos y, por tanto, fundamento de

[29] Una exposición al respecto fue presentada en el capítulo 1, sub-apartado 1.7.1

la despreocupación o no consideración de las dificultades que su aprendizaje comprende. Propone además la utilidad que puede representar el uso de la semejanza para el aprendizaje de la razón y la proporción, exhibiendo ejemplos que muestran la manifestación de esta forma de razonamiento en situaciones de la realidad, cercanas a ser vividas-comprendidas por niños desde edades muy tempanas.

Sobre la base de los argumentos que expone, sustentados en las posibles manifestaciones de las nociones de razón y proporción en la realidad de la persona, presenta una lista de posibles acciones a ser puestas en juego en el contexto escolar para desarrollar el proceso de enseñanza y aprendizaje de tales nociones.

Desde esta perspectiva, Lamon (1995) propone que en el desarrollo de actividades escolares se debería dar lugar a ―…un conjunto de situaciones en las cuales las ideas matemáticas importantes tengan sus raíces en fenómenos de la realidad" (p. 168). De acuerdo con esta autora, tales situaciones proveen de contextos de aprendizaje matemático en los que la significación y la utilidad de las ideas matemáticas se encuentran aseguradas.

Finalmente, dando una mirada general sobre los diferentes planteamientos anteriormente expuestos, se puede observar algo que tienen en común: el tratar de hacer propuestas que buscan contribuir a la comprensión, de manera cada vez más profunda y precisa, de lo que significa el razonamiento proporcional.

Estos valiosos esfuerzos, cuyo fin último es facilitar la tarea de enseñanza y aprendizaje de la razón y la proporción, son considerados en el contexto de este trabajo como aportaciones generales y referenciales, sobre las cuales se fundamenta una tarea más específica, como lo es, determinar qué acciones podría llevar a cabo el formador de maestros, para hacer comprender a sus alumnos los conocimientos matemáticos que se ponen en juego al tratar con situaciones referidas a razón y proporción. Centrando la atención sobre este objetivo, en este trabajo se valora la puesta en juego de una herramienta concebida con ese fin. En los capítulos siguientes de este trabajo se hará referencia al desarrollo de tal herramienta.

2.3. Conocimiento del profesor

Una de las áreas de interés en el estudio de la formación de profesores es el conocimiento del profesor. Se tratará de mostrar en este apartado, algunas de las aportaciones provenientes de la investigación respecto a esta área de conocimiento. Luego se delimitarán los aspectos de su desarrollo que serán considerados como parte del fundamento de esta investigación.

En sus inicios, la investigación referida al conocimiento del profesor reconocía la existencia de dos formas de conocimiento principales, a saber, el conocimiento pedagógico y el conocimiento del contenido. Estas formas de conocimiento se consideraban como entidades separadas; siendo la primera la que refiere a los contenidos enseñados en las clases de educación y la segunda el conocimiento obtenido en cursos de contenido específico (Ball y Bass, 2000).

2.3.1. El conocimiento del contenido

El conocimiento del contenido matemático se considera un aspecto de suma relevancia para el logro de una enseñanza efectiva. Sowder, et al. (1998) y Fennema y Franke (1992) coinciden al señalar:

> Nadie cuestiona la idea de que lo que un profesor sabe es una de las influencias más importantes sobre lo que se hace en el aula de clase y finalmente sobre lo que un estudiante aprende… Nadie puede enseñar lo que no sabe". (Sowder, et al., 1998, p. 2).

Así, el conocimiento del contenido es irrefutablemente necesario para lograr un ambiente favorable para el aprendizaje en el aula de clase. Esta perspectiva ha servido de fundamento para el desarrollo de diversas investigaciones.

Ball, Lubienski y Mewborn (2001, p. 434) presentan datos obtenidos a partir de una revisión de la literatura, con los cuales muestran que en los 15 años comprendidos entre 1986 y 2001 se presenta una marcada tendencia hacia el estudio del conocimiento del profesor y sus creencias. En su revisión, entre los años 1986 y 1998, de 48 revistas de investigación educacional, identificaron 354 artículos que tratan específicamente de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, de los cuales al menos la mitad tratan sobre profesores de matemáticas y muchos de ellos incluyen el conocimiento del contenido como sus cuestiones de análisis central.

En el caso específico del conocimiento del contenido en la formación inicial de profesores, Ball (1990) señala que los profesores en formación inicial no son capaces de explicar nociones matemáticas sencillas relativas a la división de fracciones, concluyen que el conocimiento del contenido de los profesores es eminentemente procedimental y compartimentalizado (del inglés: ―compartmentalized”). Even (1993) señala resultados similares en profesores en formación referentes al concepto de función. Tirosh, Even y Robinson (1998), refiere a que algunos profesores (incluyendo algunos experimentados) no son conscientes de los errores que cometen los alumnos al resolver ecuaciones. Una visión general sobre algunos de las diferentes investigaciones publicadas, dirigidas al estudio del conocimiento del contenido, es presentada en Ponte y Chapman (2006).

Más específicamente, refiriendo a la formación inicial de profesores y al conocimiento de la proporcionalidad, Ilany, Yaffa, y Ben-Chaim (2004, p. 81) encuentran la existencia de lagunas en el conocimiento del contenido de futuros profesores sobre los tópicos enseñados, incluyendo la razón y la proporción. Ben-Chaim, Keret e Ilany (2007) señalan que los docentes en formación y en servicio muestran dificultades para enseñar nociones referidas a la proporcionalidad.

Person, Berenson, y Greenspan (2004) en su estudio sobre el rol de los números en la comprensión del razonamiento proporcional por parte de futuros profesores de bachillerato, señalan las limitaciones que estos tienen para manejarse fluidamente entre las diferentes interpretaciones dadas a los números en problemas relativos a la proporcionalidad, quedando ―atrapados” en el uso de procedimientos basados en fórmulas, casi impedidos para realizar y comprender el razonamiento proporcional involucrado.

Por otra parte, Kahan, Cooper, y Bethea (2003) realizan una investigación sobre la relación entre el conocimiento del contenido en profesores en formación y la elaboración de una lección de matemática. Concluyen que los profesores que exhibieron un sólido conocimiento del contenido matemático produjeron lecciones mejor elaboradas. No obstante, Thompson y Thompson (1996; 1994), en su investigación sobre la enseñanza de la razón, encuentran que aún cuando el profesor mostró tener un sólido conocimiento de la noción de razón, este no fue capaz de producir procesos de comunicación efectivos para ayudar a los alumnos a desarrollar una comprensión conceptual de razón.

2.3.2. Conocimiento pedagógico del contenido

Las investigaciones realizadas sobre el conocimiento del profesor no se limitan sólo al estudio del conocimiento del contenido. Existe un número creciente de investigaciones que señalan la insuficiencia del conocimiento del contenido *per se*, para lograr acciones de enseñanza verdaderamente efectivas (Ball, 1990; Hill y Ball 2004; Ma 1999; Shulman, 1986). De acuerdo con Hill y Ball (2004, p. 332) a mediados de los años ochenta se comienza a ver el problema de manera diferente, se reformula la pregunta de cómo el conocimiento del contenido puede contribuir al aprendizaje del alumno, enfocando sobre formas de conocimiento más próximas a la enseñanza.

En el trabajo de Hill, Sleep, Lewis y Ball (2007), en el cual estos investigadores presentan una exposición sobre la evolución de la medición del conocimiento matemático del profesor, Hill y colaboradores muestran un ejemplo de la presencia de ítems en el Educational Testing Service (1987, p. 19), en el que no solo se evalúa el conocimiento matemático del profesor, sino que ―…los ítems expresan en un sentido amplio que los profesores necesitan un conocimiento especializado, algo más allá de lo que sabe cualquier adulto culto.” (Hill et al., 2007, p. 117).

En este orden de acontecimientos, Shulman (1986) propone siete categorías de conocimiento que hacen posible la enseñanza, a saber: Conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico general, conocimiento del currículo, conocimiento pedagógico del contenido, conocimiento de los estudiantes, conocimiento del contexto educacional y el conocimiento de los fines, propósitos y valores educacionales.

La propuesta de Shulman (1986) ha jugado un papel primordial en el desarrollo de investigaciones, formulaciones e implantaciones curriculares. Las categorías identificadas por este autor siguen vigentes, aún cuando las concepciones iniciales dadas a las mismas han ido cambiando. De acuerdo con el NCTM (2007, p. 16) ―El conocimiento de enseñar, el conocimiento de las matemáticas, y el conocimiento de los estudiantes, son aspectos esenciales que requiere saber el profesor para llegar a ser exitoso”. Esto indica la necesidad de considerar tres de las categorías del conocimiento del profesor, propuestas por Shulman, para llegar a ser profesores potencialmente efectivos.

Ponte y Chapman (2006) sostienen que el énfasis de la comunidad de investigadores fue puesto sobre la categoría “*Conocimiento Pedagógico del Contenido*” (PCK), la cual en su momento representó un avance importante en las concepciones del conocimiento del profesor (Hill y Ball, 2004, p. 332). El conocimiento pedagógico del contenido “es el conocimiento de la asignatura pertinente para el acto de enseñar” (Shulman, 1986, p. 9), en el caso de la matemática diríamos que es el conocimiento de la matemática utilizado por el profesor para enseñar matemática. Constituye una integración entre las dos formas iniciales del conocimiento del profesor: conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico.

Un apreciable número de investigaciones sobre el conocimiento del profesor se desarrolla a partir de la propuesta de Shulman. Las mismas se dirigen a diferentes objetivos, algunas proponen enfoques teóricos para su estudio con profesores en servicio (Even y Tirosh, 2002; Fennema y Franke, 1992; Graeber, 1999), otras buscan estudiar y fomentar esta forma de conocimiento en profesores en formación y en servicio sin explicitar una definición específica del conocimiento pedagógico del contenido (Barnet, 1991, Lin, 2002, Steele, 2005). Se distinguen aquellas dirigidas a dar sustento teórico y una mayor precisión al conocimiento pedagógico del contenido (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill y Ball, 2004; Hill, Ball, y Schilling, 2008). En esta última línea de estudio, el trabajo de Hill, Ball, y Schilling (2008) es una de las propuestas más recientes, algunos de sus aportes se exponen más adelante.

2.3.3. Profunda comprensión de la matemática fundamental

Una propuesta alternativa al conocimiento pedagógico del contenido de Shulman (1986) la presenta Ma (1999), quien describe el conocimiento del profesor como una organización compleja que se encuentra conformada por “conocimientos empaquetados”; cada aspecto de contenido matemático forma un “paquete de conocimiento” (Ma, 1999, p. 113). La noción “paquete de conocimiento” de Ma (1999) refiere a la organización que presenta una noción matemática basada en la estructura que la caracteriza, asociada a los diferentes tópicos vinculados. Para explicar su propuesta utiliza una representación gráfica asociada al conocimiento matemático, en la que muestra su “estructura”: “…una secuencia en el centro y un círculo de tópicos vinculados conectados al tópico en la secuencia” (p. 114), donde el término secuencia designa a una “sucesión lineal” ordenada de lo simple a lo complejo que se concibe para el desarrollo de un contenido matemático específico. Así a cada nivel del contenido en la secuencia le corresponde una representación gráfica: su paquete de conocimiento.

Se deduce de las explicaciones de la autora que el significado de cada secuencia y los tópicos vinculados son los aspectos vertebradores de la conexión que entre ellos se establece, así como también, de las relaciones entre los niveles de las secuencias.

Ma sostiene que el conocimiento matemático necesario para enseñar consiste en una *profunda comprensión de la matemática fundamental*, la cual:

> … significa una comprensión del terreno de la matemática fundamental que es profunda, amplia, y minuciosa. Aunque el término *profundo* es frecuentemente considerado como significado de profundidad intelectual, sus tres connotaciones, *profundo*, *vasto* y *minucioso* están interconectadas (Ma, 1999, p. 120).

Las interconexiones son las que se establecen entre las secuencias y las de estas con los tópicos vinculados en la estructura matemática. De manera que, la construcción de un “paquete de conocimiento” (forma en que se presenta el conocimiento del profesor), requiere de una profunda comprensión de la matemática fundamental, puesto que esta proveerá del conocimiento de su estructura: secuencias, tópicos vinculados y las conexiones correspondientes.

Al comparar la propuesta de Ma con la de Shulman se observa que la “comprensión profunda de la matemática fundamental” se equipara con la categoría “conocimiento del contenido”, porque la comprensión profunda de Ma pone el énfasis en el conocimiento matemático, colocando el conocimiento pedagógico como subordinado al conocimiento del contenido. No obstante, la propuesta de Ma constituye un avance conceptual y operacional en relación con la de Shulman, puesto que refiere al ámbito específico de la educación matemática y propone una perspectiva desde la cual se interpreta la complejidad que comprende el conocimiento matemático cuando se trata de organizar una secuencia para su enseñanza.

Esta apreciación final sobre el trabajo de Ma (1999), guarda relación con el señalamiento realizado por Shulman en el prólogo del libro de esta autora, en el que sostiene: “Este libro parece tratar sobre la comprensión del contenido matemático, más que su pedagogía, pero su concepción del contenido es profundamente pedagógica” (Ma, 1999, p. ix).

2.3.4. Conocimiento matemático para enseñar

La propuesta del ―conocimiento matemático para enseñar”[30] ha sido impulsada desde inicios de los años noventa por Ball y colaboradores. En Ball (1990) se identifican tres aspectos del conocimiento del contenido matemático, a saber: (a) este incluye conocimientos correctos tanto procedimentales como conceptuales, (b) el conocimiento del contenido matemático abarca una comprensión de principios subyacentes relacionados con procedimientos y conceptos, y (c) este incluye una red de conexiones que relaciona diferentes conceptos y cómo cada concepto contribuye a la totalidad de las matemáticas.

En Ball, Lubienski, y Mewborn (2001) considerando los aportes de Shulman (1986) y Ma (1999), Ball y colaboradores, presentan una noción mejor delimitada para el constructo *conocimiento matemático para enseñar*, a saber:

> ―Tal conocimiento no es algo que tendría un matemático en virtud de haber estudiado matemáticas avanzadas. Tampoco sería parte de un conocimiento de un profesor de estudios sociales de secundaria en virtud de tener experiencia en la enseñanza. Más bien es un conocimiento especial para la enseñanza de las matemáticas.” (Ball et al., 2001, p. 448)

Un considerable número de trabajos es desarrollado por Ball y colaboradores, en los que se presentan ejemplos sobre diferentes aspectos comprendidos por esta noción, los cuales han servido para ir obteniendo mayor precisión sobre la misma (Ball y Bass, 2003; Ball, Hill, y Bass, 2005; Hill, Rowan, y Ball, 2005; Hill, Sleep, Lewis, y Ball, 2007).

En Hill, et al. (2007), se presenta un estudio sobre la problemática relativa a la medición del conocimiento matemático necesario para la enseñanza. En este estudio se reconocen ―… tres dominios del conocimiento del profesor, con uno de los dominios subdividido en dos partes…” (Hill et al., 2007; p. 132), utilizados para diseñar instrumentos de medición de ese tipo de conocimiento. Tales dominios son: (1) Conocimiento del contenido, subdivido en *conocimiento común del contenido* y en *conocimiento*

[30] Traducción que hacemos del inglés del constructo: Mathematical Knowledge for Teaching (MKT).

especializado del contenido, (2) Conocimiento del contenido y los estudiantes, y (3) Conocimiento del contenido y la enseñanza.

Las conclusiones de este estudio señalan, con gran prestancia, que la medición y certificación del conocimiento del profesor, actividad que data desde hace más de 150 años en Estados Unidos, sigue constituyendo una tarea compleja, abierta al estudio y nuevas aportaciones, siendo ―… el balance del conocimiento del contenido *y* el conocimiento de pedagogía, la naturaleza del conocimiento del contenido útil para la enseñanza, y el ‗contenido‘ del conocimiento pedagógico…" (p. 149), algunas de las cuestiones que continúan sin respuesta. Asimismo, Hill y colaboradores señalan: ―El campo se ha movido desde una borrosa y poco especificada concepción del conocimiento necesario para la enseñanza a un amplio enfoque con faltas de precisión y acuerdos comunes sobre los requerimientos que uno esperaría de una profesión (Hill et al., 2007; p. 152).

En Hill, Ball, y Schilling (2008) se presenta un avance hacia una propuesta para el desarrollo de un marco teórico, dirigido a atender algunas de las necesidades señaladas en el párrafo anterior, referidas al desarrollo de precisiones sobre el conocimiento matemático necesario para la enseñanza. A continuación exponemos algunos aspectos de esa propuesta.

2.3.5. Un marco teórico para el conocimiento del profesor

Desde su trabajo inicial Ball (1990) ha impulsado la idea sobre la necesidad de certificar, por medio de la aplicación de instrumentos de medición, la efectividad de la labor profesional del profesor. La compleja tarea de tal medición, comprende tomar en cuenta tanto el conocimiento matemático del profesor, como su desempeño para enseñar matemática. En este sentido, Hill y colaboradores exponen tres razones que fundamentan la necesidad de avanzar en la elaboración de herramientas de medición y en la ―…comprensión de la noción de conocimiento matemático *para enseñar*" (Hill et al., 2007, p. 112).

En Hill, Ball, y Schilling (2008) se define el conocimiento matemático para enseñar como ―el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula de clase para producir instrucción y crecimiento en el alumno." (p. 374). La propuesta plantea una división del conocimiento matemático para enseñar en seis categorías (Fig. 2.4), a saber:

- Conocimiento Común del Contenido (CCK)
- Conocimiento en el Horizonte Matemático
- Conocimiento Especializado del Contenido (SCK)
- Conocimiento del Contenido y de los Estudiantes (KCS)
- Conocimiento del Contenido y de la Enseñanza (KCT)
- Conocimiento Curricular

De acuerdo con sus autores, las tres primeras categorías corresponden al conocimiento del contenido y las otras tres corresponden al conocimiento pedagógico del contenido. En conjunto todas las categorías se encuentran en el dominio del conocimiento matemático para enseñar. Se observa entonces que se trata de un refinamiento e integración de las propuestas de Ma (1999), Shulman (1986) y Hill et al. (2007).

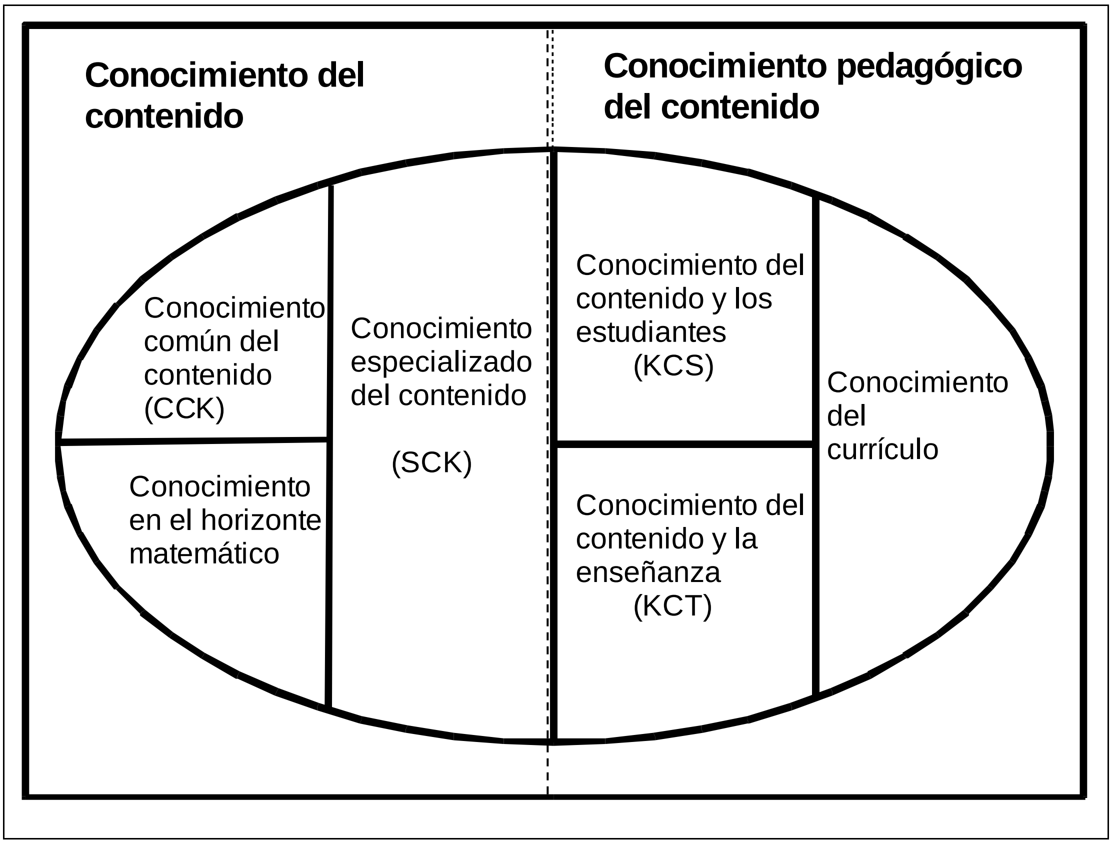


Fig. 2.4: Modelo de Ball y colaboradores para el estudio del conocimiento del profesor (Hill, Ball y Schilling, 2008)

Las tres primeras categorías guardan relación con el planteamiento de la comprensión profunda de Ma, y las tres restantes con el planteamiento pedagógico de Shulman; haciéndose más evidente la diferencia que podría estar sugerida por las dos formas de conocimiento del profesor esenciales: la del contenido y la pedagógica, aunque esta última no se asume con el sentido amplio de una forma de conocimiento general de la pedagogía, sino como una pedagogía de la matemática.

Algunas precisiones deben ser consideradas respecto a los aportes de esta nueva propuesta. La distinción fundamental entre el conocimiento común del contenido (CCK) y el especializado (SCK) consiste en que, mientras el primero refiere al conocimiento puesto en juego para resolver problemas matemáticos, para lo cual un matemático, o incluso un sujeto adulto con suficiente conocimiento, está capacitado; el segundo refiere, por ejemplo, a realizar un ordenamiento de las secuencias con las que podrían desarrollarse los diferentes aspectos de un contenido específico.

Para esta última acción es posible que un sujeto adulto, o inclusive un matemático, no tenga necesariamente la posibilidad de llevarla a cabo (Hill, Schilling, y Ball, 2004). En este sentido, el conocimiento especializado del contenido (SCK) guarda similitud con los ―paquetes de conocimiento" propuestos por Ma (1999).

Hill, Ball, y Schilling (2008) definen el conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS) como el ―…conocimiento del contenido que se entrelaza con el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben, o aprenden ese contenido particular" (p. 375). Comprende el conocimiento de los errores y dificultades comunes, las concepciones erróneas, las estrategias utilizadas, el ser capaz de valorar la comprensión del alumno y saber cómo evoluciona su razonamiento matemático.

Respecto al conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT) resulta de la integración del contenido matemático con el conocimiento de la enseñanza. Comprende saber construir, a partir del razonamiento de los estudiantes y las estrategias utilizadas por ellos, procesos pertinentes para encaminar y corregir sus errores y concepciones erróneas (Hill, Ball, y Schilling, 2008).

Aún cuando la propuesta de Ball y colaboradores es un tanto esquemática y general, también debemos reconocer que las descripciones proporcionadas sobre las diferentes formas de conocimiento identificadas, muestran un desarrollo del conocimiento del profesor, que significan un avance importante en este campo. Para efectos de esta investigación, tendrán importancia particular el uso de las categorías conocimiento especializado del contenido (SCK), conocimiento del contenido y de los estudiantes (CKS) y el conocimiento del contenido y de la enseñanza (CKT).

2.4. Enfoque Onto-Semiótico (EOS)

La perspectiva teórica integrativa para la educación matemática del ―Enfoque Onto-Semiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática" (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007) proporciona herramientas para el estudio, interpretación y análisis de los conocimientos, objetos, significados y procesos puestos en juego en la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Para describir y comprender las prácticas matemáticas puestas en juego en una actividad de resolución de problemas (que es considerada como central en los procesos de enseñanza y aprendizaje), el EOS propone las nociones de configuración epistémica y cognitiva, lo epistémico como parte de los sistemas de prácticas institucionales y lo cognitivo asociado a los sistemas de prácticas personales. Ambas configuraciones (epistémicas y cognitivas) hacen operativos los sistemas de prácticas, permitiendo fijar la atención sobre la red de objetos emergentes e intervinientes en dichas prácticas. Desde esta perspectiva ha sido posible identificar los tipos de objetos matemáticos que componen ambas configuraciones (Fig. 2.5), habiendo sido reconocidos los siguientes: situaciones problemas, elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos (Godino, Batanero y Font, 2007).

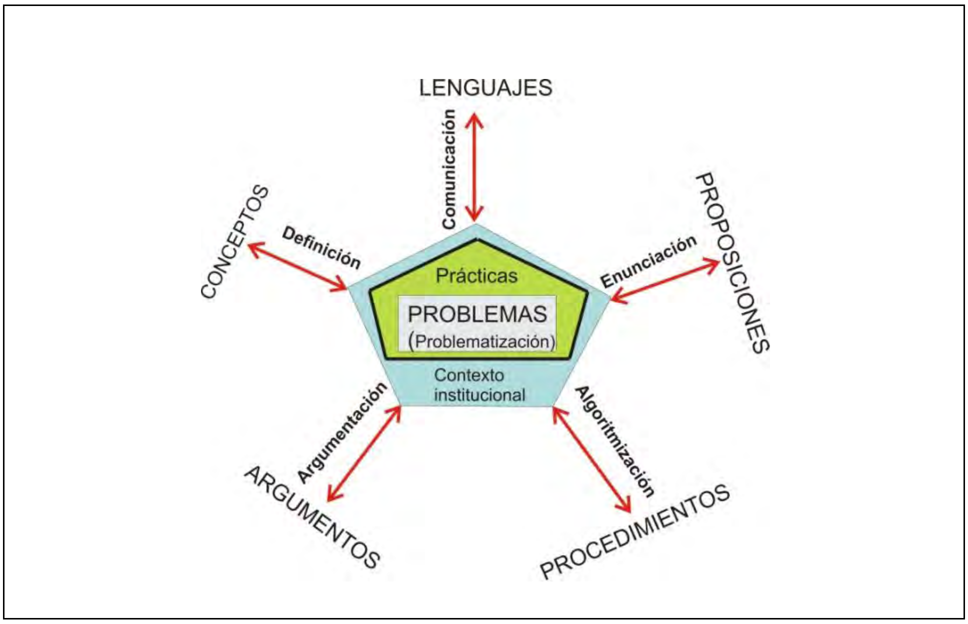


Fig. 2.5: Configuración de objetos primarios

La comprensión de los objetos identificados y su papel dentro de la actividad matemática, realizada en los diferentes sistemas de prácticas, pasa por considerar los significados dados a tales objetos en dichos sistemas.

Con el fin de proporcionar operatividad al proceso de estudio planteado, tomando como base las aportaciones provenientes de las investigaciones en el ámbito de la educación matemática y las recomendaciones emanadas de los organismos de administración y producción curricular (NCTM, 2000), el EOS considera como actividad matemática fundamental, en el ámbito instruccional, la resolución de situaciones problema (Fig. 2.5). En este orden de ideas, Godino y colaboradores, proponen herramientas con las que se busca llevar a cabo análisis didácticos para identificar objetos matemáticos puestos en juego, y significados dados a los mismos, en los procesos de formulación y resolución de problemas matemáticos específicos.

En este contexto tiene lugar la producción de la ―Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados" (GROS)[31], la cual consiste en una disposición tabular de dos columnas en la que se ponen en correspondencia los objetos identificados en la resolución de un problema con los significados a los que refieren. A partir de tal correspondencia se posibilita la determinación de conflictos potenciales de significados, que podrían conducir a identificar posibles errores, dificultades y concepciones erróneas, en la resolución del problema.

Como planteamiento hipotético inicial se considera que el uso de la GROS dará lugar a análisis epistémicos/cognitivos de situaciones problema y su resolución, que permitirán identificar elementos matemáticos subyacentes en los mismos, promoviendo una comprensión profunda de la matemática, fomentando la reflexión didáctica, suscitando un efecto formativo-pedagógico (tanto matemático como didáctico) en quienes las utilizan. Esta investigación comprende varios ejemplos de la puesta en práctica de tal herramienta por parte del formador/investigador y de una muestra de futuros profesores, en su proceso de formación inicial.

2.5. Desarrollo del conocimiento del profesor desde el EOS

Un aspecto de relevancia que vincula el desarrollo del conocimiento del profesor, con el desenvolvimiento de las actividades de esta investigación, consiste en la certeza que se tiene sobre la necesidad de adquirir-generar un profundo conocimiento de los objetos requeridos y puestos en juego en una actividad matemática, inscrita en el contexto educacional. Dicho conocimiento es necesario para llegar a comprender de manera

[31] Un ejemplo del uso de esta herramienta puede verse en Godino et al., (2008a; 2008b; 2008c). En el capítulo 4 describimos el proceso de diseño de esa herramienta.

adecuada, los procesos matemáticos y didácticos requeridos para facilitar la enseñanza y aprendizaje de un determinado contenido matemático.

Así, considerando una situación problema y su resolución como elemento desencadenante de una actividad matemática tal, se trata de convertir tal suceso en una actividad que conduzca a adquirir-generar ese profundo conocimiento. Se trata de traducir esa situación en potenciadora de acciones asociadas a la actividad de enseñanza, en el que se le solicita al (futuro) profesor identificar los objetos matemáticos, sus significados, puestos en juego en la resolución de la situación problema, tratar de ir hacia los detalles de lo que el problema y su solución concierne, ser minuciosos en la determinación de los objetos y significados matemáticos que la misma involucra.

Es claro que esta tarea no es una tarea matemática, no interesa a los matemáticos, interesa al formador, al maestro. Si la misma es concebida en el ámbito de la formación de maestros, buscaría hacernos conscientes a los formadores y a los maestros en formación inicial, sobre la presencia de esos objetos en la situación problema y su resolución, explicitar el significado que los mismos tienen de acuerdo con la función que cumplen en la misma.

De aquí la identificación que se gesta entre las propuestas de Ma (1999), Hill, Ball, y Schilling (2008) y las acciones centrales, realizadas en el marco del desarrollo de esta investigación. Ciertamente, en términos llanos observamos que la propuesta de Ma, de un “conocimiento profundo de la matemática fundamental”, se identifica con el “conocimiento especializado del contenido”, propuesto por Ball y colaboradores.

Consideramos que estas formas de conocimiento pueden ser desarrolladas por medio del estudio de los objetos y significados activados en el proceso de resolución de un problema matemático, puesto que representa una tarea de profundización en la comprensión de la resolución, obtenida por medio de una actividad de análisis, de acciones realizadas en un proceso de producción, que involucra el uso del conocimiento matemático. Pero esta actividad de análisis y reconocimiento no es una tarea de interés matemático, sino de interés didáctico.

Además, de acuerdo con algunos estudios previos (Godino et al., 2008a; 2008b; 2008c), a partir de esa actividad de reconocimiento de objetos y significados, se posibilita identificar conflictos potenciales de significados, que podrían conducir a identificar posibles errores, dificultades y concepciones erróneas, en la resolución de un problema. Lo cual, de acuerdo con lo expuesto por Ball y colaboradores, está en relación con el desarrollo del conocimiento del contenido y de los estudiantes.

Esta propuesta de operacionalización de algunas de las facetas del conocimiento del profesor, por medio del uso de herramientas del enfoque ontosemiótico, se inscribe en un planteamiento más general presentado en Godino (2009). Específicamente, el estudio que aquí presentamos, que se refiere básicamente al reconocimiento de objetos, significados y conflictos potenciales, en torno a la resolución de un problema relativo a la proporcionalidad, se encuentra contenido en las facetas epistémica y cognitiva, y en sus respectivas consignas (Godino, 2009; pp. 25-26), donde el efecto de tales consignas promueve el desarrollo de algunas de las facetas del conocimiento del profesor, reconocidas por Ball y colaboradores (Hill, Ball y Schilling, 2008).

En este orden de ideas, de acuerdo con la literatura consultada (Adler y Davis, 2006; Ball, Bass y Hill, 2004; Ball, Thames y Phelps. 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008; Silverman y Thompson, 2008; Sullivan, 2008a) encontramos algunas características del conocimiento especializado del contenido:

- De interés didáctico
- Se reconoce en la acción, en una práctica matemática
- Involucra el reconocimiento de los significados matemáticos utilizados en una práctica matemática.
- Faculta para realizar un ordenamiento de las secuencias de diferentes aspectos de un contenido determinado, reconociendo las variables de las tareas consideradas
- Involucra el reconocimiento de distintas resoluciones
- Permite conocer el funcionamiento de cada resolución e identificar cuál funciona mejor
- Permite reconocer cuándo la generalización de un método es utilizada de manera apropiada/inapropiada
- Fomenta el uso de diversas representaciones (numérica, algebraica y gráfica) de una resolución.

Asimismo, una característica general de esta forma de conocimiento es que se obtiene por medio de ―desempaquetar” o ―descomprimir” contenido matemático. De acuerdo con Adler y Davis (2006, p. 274) el término ―‗Desempaquetar‘ se interpreta como una de las características esenciales y distintivas del ‗saber matemática *para enseñar*'”. Según estos autores, esta característica se presenta como lo contrario de ―comprimido” que es como regularmente se presenta el contenido matemático.

Consideramos que el uso de la herramienta de análisis epistémico/cognitivo constituye un método para ―descomprimir” el contenido matemático puesto en juego en la resolución de un problema, puesto que el reconocimiento de los significados matemáticos necesarios para la resolución de un problema matemático, que ha sido identificado como una de las características de esa forma de conocimiento, conduce a una forma de ―desempaquetar” el conocimiento involucrado en la resolución. Este planteamiento coincide con una de las propuestas presentadas por Adler y Davis (2006). Además, consideramos que esta actividad de reconocimiento constituye una tarea de interés didáctico, cuyos productos son reconocidos en la acción o en la práctica de resolución de un problema matemático, lo cual refiere a características de esa forma de conocimiento.

De manera que, teniendo como marco general el contenido matemático de la proporcionalidad en primaria, se pretende realizar acciones encaminadas a producir un tipo de comprensión profunda de ese contenido matemático o desarrollar el conocimiento especializado del contenido (SCK), al ―desempaquetar” conocimiento matemático, por medio del reconocimiento de los significados de los objetos involucrados en el proceso de resolución de un problema de proporcionalidad., Inicialmente estas actividades serán realizadas a nivel de un profesor formador, en colaboración con un grupo de investigadores noveles (capítulos 4 y 5), y luego por parte de un grupo de futuros profesores, en el ámbito de la formación de profesores de primaria (capítulo 6).

2.6. Desarrollo de competencias desde el EOS

El término competencia reviste una polisemia de significados cuya explicación ha requerido una extensa producción no sólo en el ámbito académico/didáctico/curricular, sino en sociología laboral, psicología laboral y cognitiva, ergonomía profesional, entre otros (Jonnaert, Barrete, Masciotra y Yaya, 2008). Basados en los resultados de un análisis bibliográfico y de diversas experiencias realizadas en el seguimiento de la gestión de diseñadores de programas de estudio, Jonnaert y colaboradores adoptan un enfoque para lograr, lo que de acuerdo con Van der Maren (1995), se denomina un ―cierre semántico" sobre el concepto de competencia. El análisis de los resultados de su estudio les lleva a considerar que:

> …uno de los fundamentos importantes de una lógica de competencias es la *actividad contextualizada*. La competencia no puede ser simplemente la descripción de una acción o de un comportamiento, es mucho más que eso… ser competente no es simplemente aplicar un conjunto de conocimientos a una situación, es poder organizar su actividad para adaptarse a las características de la situación. La competencia pasa a ser entonces la estructura dinámica organizadora de la actividad, que permite que la persona se adapte a un tipo de situaciones, a partir de su experiencia, de su actividad y de su práctica" (Jonnaert et al., 2008; pp. 13-14).

Observamos que un aspecto principal del término competencias es su carácter situacional-contextual. Al respecto, Jonnaert señala: ―…las competencias no pueden definirse sino en función de situaciones, están tan situadas como los conocimientos en un contexto social y físico" (Jonnaert, 2002; p. 76). En relación con este aspecto característico, Rico y Lupiáñez (2008) señalan que el término competencia ―…refiere… a la actuación competente de los sujetos en situaciones y contextos determinados. Se muestra por el desempeño al abordar y resolver tareas planteadas en contexto, mediante el uso de herramientas determinadas." (p. 136).

Desde la perspectiva del EOS, se han realizado diversos trabajos en los que se ha abordado lo relativo al desarrollo de competencias en el contexto de la instrucción. (D'Amore, Godino y Fandiño, 2007; Godino, Castro, Rivas y Konic, 2008; Godino et al., 2008a; 2008c). Desde este enfoque se ha asumido una postura pragmática en la que se interpretan conocimiento y comprensión, como acciones que involucran esa característica situacional-contextual de las competencias, a la que venimos refiriendo. En Godino et al., (2008; 2008a; 2008c) abordamos de manera esquemática el problema de la multiplicidad de interpretaciones en torno a las competencias, lo que nos condujo a señalar:

> La noción de competencia viene a constituirse en el constructo cognitivo/epistémico general que incluye no sólo el saber-hacer, sino también el discurso teórico justificativo correspondiente, e incluso los componentes

> afectivos, actitudinales y axiológicos. Nos parece que esta posición supone asumir de manera implícita una forma de pragmatismo sobre el saber, el conocimiento y la comprensión, que se equiparan con la resolución competente de problemas. (Godino et al., (2008). p. 318).

Es decir, desde una postura pragmática, se considera que saber/conocer implica un uso competente de los elementos constituyentes del conocimiento, así como la capacidad de relacionar entre sí dichos elementos (comprender). Desde esta perspectiva, al colocar en el centro de las acciones una situación problema, su resolución competente consiste en poner en juego *conocimientos* que conducen a su mejor solución. Así, en el caso de las competencias matemáticas, en el contexto de la instrucción, se ha atribuido a la noción de *conocimiento* el carácter holístico que el enfoque pedagógico/curricular atribuye a la noción de competencia.

Respecto a interpretar competencia como “la estructura dinámica organizadora de la actividad, que permite que la persona se adapte a un tipo de situaciones, a partir de su experiencia, de su actividad y de su práctica”, referida en la cita a Jonnaert y colaboradores, al inicio de este apartado, consideramos que tal interpretación resulta de posicionarse a un nivel superior de la ejecución de la actividad como tal (resolución de una situación problema, en nuestro caso). Es un posicionamiento desde la perspectiva del desarrollo profesional, la cual, ciertamente, tiene lugar en la actividad que desarrollamos como formadores de futuros profesores.

De manera que, ampliando el foco, observamos la resolución del problema como el objeto a estudiar, con el fin de identificar la estructura dinámica organizadora que permite su resolución. En este contexto de ideas, consideramos que la tarea de análisis y reflexión sobre los objetos y significados puestos en juego en la resolución de un problema, constituye una actividad encaminada a identificar tal estructura. Es así como interpretamos una de las actividades principales de este trabajo, dirigida al desarrollo de competencias de análisis didáctico, en las que se pone en juego el conocimiento del profesor.

En este orden de ideas, siguiendo el esquema de clasificación de las competencias específicas para la formación didáctica de los profesores, presentado en Godino et al. (2008a; pp. 27-28), este trabajo se dirige básicamente a desarrollar las competencias de análisis didáctico referidas a:

(1) Definir, describir y justificar conceptos, procedimientos y propiedades matemáticas, puestos en juego en la resolución de problemas matemáticos.
(2) Desarrollar tareas de análisis que permitan identificar posibles conflictos semióticos en la interacción didáctica y predecir tipos de respuesta de situaciones problema, con el objeto de optimizar el aprendizaje matemático de los alumnos.

En lo que corresponde a este trabajo, estas dos competencias se desarrollan y se evalúan por medio de la puesta en juego de la Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados (GROS) en el estudio de problemas relativos a la proporcionalidad en 6º curso de primaria.

Específicamente, estamos interesados en desarrollar competencias dirigidas a: (a) reconocer tipos de objetos matemáticos utilizados en la resolución un problema, y (b) reconocer los significados, asignados a esos objetos, puestos en juego en la resolución de problemas de proporcionalidad de 6º curso de primaria. En la Fig. 2.6 mostramos un esquema por medio del cual se puede visualizar las diez competencias específicas que serán consideradas en este estudio.

RECONOCER { OBJETOS / SIGNIFICADOS

- Elementos lingüísticos
- Conceptos
- Procedimientos
- Propiedades
- Argumentos

Fig. 2.6: Competencias de análisis didáctico consideradas en este estudio

Al referirnos a competencias de análisis didáctico hacemos una interpretación particular sobre este tipo de análisis. En siguiente apartado nos referiremos a tal interpretación.

2.7. El análisis didáctico desde el EOS

En el marco del desarrollo de la investigación en educación matemática se ha venido haciendo uso de la noción de –análisis didáctico”. En relación con dicha noción se reconoce que es polisémica, pero que en sus diferentes interpretaciones tiene en común constituir un artefacto que apoya actividades de formación y/o investigación didáctico-matemática.

Una síntesis sobre los diferentes enfoques desde los cuales se interpreta este constructo, en la comunidad de investigación española, es presentada por González Mari (2006). Dos de los usos más generales identificados por este autor refieren al contexto curricular y al contexto de la investigación (como metodología para el estudio de los antecedentes de una investigación), mostrándose el contexto curricular como uno de los más estudiados, que comprende a la vez dos líneas de uso: diseño y desarrollo del currículo (Godino y colaboradores) y metodología en la formación de profesores (Grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico de la Universidad de Granada).

En este orden de ideas, Godino y colaboradores presenta una síntesis de los tres tipos de usos del análisis didáctico al señalar:

> Consideramos como « análisis didáctico » el estudio sistemático de los factores que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje de un contenido curricular – o de aspectos parciales del mismo – con unas herramientas teóricas y metodológicas específicas. Gallardo y González (2006) describen dicho análisis como una metodología de investigación educativa (búsqueda de fuentes y tipos de información de las distintas áreas de conocimiento implicadas, meta-análisis de las investigaciones previas, delimitación de cuestiones abiertas y formulación de conjeturas). Por su parte, Gómez (2002) llama “análisis didáctico” a una metodología de diseño, implementación y evaluación de programaciones curriculares de aula en el contexto de la formación de profesores de matemáticas. (Godino et al., 2006; p. 4)

Debemos señalar, que en el espacio español de investigación de educación matemática, ha existido un particular interés por el desarrollo de esas herramientas de análisis didáctico. Esto lo podemos observar en la realización de dos eventos en los que se asumió como temática principal el uso de tal herramienta, a saber: “Seminario de Análisis Didáctico en Educación Matemática” llevado a cabo en la Universidad de Málaga, en el año 2005 y el “X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática”, llevado a cabo en Huesca, en el año 2006, en el cual se asumió la temática del análisis didáctico en uno de los seminarios.

Luego de estos eventos, en los que se observó una considerable producción en torno a este tema, se ha continuado con el desarrollo de trabajos de investigación dentro de las líneas de uso referidas (Font, Planas y Godino, 2010; Godino, Font y Wilhelmi, 2008; Godino et al., 2008a; 2008c; Gómez, 2007; Lupiáñez, 2009; Valverde, 2012)

En nuestro caso acogiéndonos a la interpretación considerada por Godino y colaboradores desarrollamos un análisis didáctico por medio de un estudio sistemático realizado con el fin de estudiar las configuraciones epistémicas y cognitivas identificadas en el proceso de resolución de problemas de tareas relativas a la proporcionalidad de 6º curso de primaria. Para realizar ese análisis se pone en juego la Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados (GROS).

Esta forma de análisis se realiza a dos escalas; la del formador y la de los futuros profesores. En este sentido, el uso de la herramienta en el contexto de la formación de profesores que hacemos en este trabajo, lo aproxima al uso realizado por Flores (2005); Gómez (2007); Lupiáñez (2009); Valverde (2012). En general, una revisión de las categorías manejadas por los dos tipos de uso en la corriente curricular, permite observar que el uso de la GROS tiene afinidad con las propuestas de estos investigadores, sin embargo, las perspectivas teórica-metodológicas desde las cuales se realizan los análisis son diferentes.

El modelo de análisis didáctico que usamos en este trabajo se sustenta en la propuesta teórica-metodológica del EOS (Font, Planas y Godino, 2010; Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2009), siendo la GROS una herramienta de análisis que permite el reconocimiento de los objetos (elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos) y significados puestos en juego por la persona al resolver un problema de la matemática escolar, potenciando la identificación de posibles conflictos de significado en el proceso de resolución. En el capítulo 4, hacemos una descripción detallada de esta herramienta. Debemos señalar que para efectos de este trabajo de tesis doctoral no limitaremos a informar sobre algunos resultados de la puesta en juego del análisis didáctico realizado por medio de la GROS, lo cual significa que sólo referiremos a las facetas epistémica y cognitiva, de acuerdo con el modelo propuesto por Godino (2009), del análisis didáctico.

2.8. Caracterización de referencia del razonamiento proporcional

La exposición realizada en estos dos primeros capítulos nos provee de una visión desde la cual podemos observar la diversidad de estudios realizados sobre el razonamiento proporcional. Este posicionamiento nos ha conducido a identificar varios elementos caracterizadores de su puesta en juego. Con el objeto de establecer una referencia sobre qué aspectos del razonamiento proporcional serán considerados en el desarrollo de esta investigación, se presenta a continuación una síntesis de algunos de esos elementos.

Lesh, Post y Behr (1988, p. 93) consideran el razonamiento proporcional como una forma de razonamiento matemático que involucra un sentido de covariación y de múltiples comparaciones, la habilidad para almacenar y procesar mentalmente varias piezas de información, así como también, la inferencia y predicción en situaciones de razonamientos tanto cualitativos como cuantitativos.

Vergnaud (1988) en una descripción del campo conceptual de estructuras multiplicativas, señala: “está formado por todas aquellas situaciones que pueden ser analizadas como problemas de proporción simple y múltiple y para los cuales usualmente se necesita multiplicar o dividir.” (p. 141), lo cual coloca el razonamiento proporcional dentro del campo conceptual de las estructuras multiplicativas. En este orden de ideas, Lo y Watanabe (1997, p. 217), reconocen la necesidad de considerar el desarrollo de estructuras multiplicativas para la adquisición de los conceptos de razón y proporción.

Confrey y Smith (1995) señalan la habilidad para reconocer la similitud estructural y el sentido de covariación y comparación multiplicativa como componentes del razonamiento proporcional. Asimismo, Lamon (2007) reconoce el uso de un sentido de razón en niños de 3º y 4º curso, cuya consolidación debe conducir al reconocimiento de la relación multiplicativa entre los componentes de una razón, identificarla como una nueva unidad (una nueva cantidad a partir de dos cantidades), lo cual contribuye con la identificación de situaciones que son organizadas por la proporcionalidad (Fernández y Llinares, 2011).

Singer, Kohn y Resnick (1997, p. 128), presentan, a modo de síntesis de una revisión de estudios precedentes, dos aspectos fundamentales que caracterizan la manifestación de un verdadero razonamiento proporcional, a saber: a) un cambio de atención de las relaciones aditivas hacia las relaciones multiplicativas entre los números y b) la habilidad para pensar fluidamente “dentro” y “entre” espacios de medida, es decir, realizando razonamientos escalares y funcionales. Los escalares tienen lugar cuando las cantidades son extensivas y los funcionales cuando las cantidades son intensivas.

Lamon (2007) refiere la necesidad de comprender qué cosas varían y cuáles permanecen constantes al realizar razonamientos proporcionales: ―…la habilidad para discernir una relación multiplicativa entre dos cantidades, así como también la habilidad de extender la misma relación para otro par de cantidades.” (p. 638).

Tournaire y Pulos (1985) en su revisión de la literatura de investigaciones dirigidas al estudio de la proporcionalidad, sugieren que un número considerable de factores relativos al contexto son los responsables de la variedad de respuestas dadas por los sujetos. Sanz, Pozo, Pérez y Gómez (1996) presentan un estudio en el que evalúan la influencia de variables: contenido y formato de la tarea, unidad de medida de las variables, nivel de dificultad computacional de los ítems, nivel de instrucción y desarrollo cognitivo de los sujetos. Los resultados señalan que el rendimiento de los sujetos varía de acuerdo al contenido y formato de la tarea, notándose la influencia cuando el contexto es cercano a la vida cotidiana, aunque no de manera significativa, obteniéndose mejores calificaciones relativas en el grupo de menor grado de instrucción. Lamon (1993) y Smith (2001, p. 16) consideran como factores contextuales influyentes: (1) la naturaleza de la situación y la experiencia de los alumnos, (2) el tipo de números involucrados, y (3) el carácter de las razones, ―dentro” y ―entre” las cantidades correspondientes.

Sobre la base de estos estudios se identifican algunos elementos caracterizadores de la noción de proporcionalidad, la cual comprende:

a. Aspectos estructurales, requeridos para avanzar de formas de razonamiento aditivo a formas de razonamiento multiplicativo.
b. Sentido de covariación entre magnitudes, cuya precisión depende de la comprensión de la condición ―constante”, apoyada por la noción de linealidad.
c. El sentido de razón como relación multiplicativa que se aplica para generar una nueva unidad la cual permite organizar aspectos intervinientes en situaciones proporcionales y no proporcionales.
d. Equivalencia, no equivalencia, que permite distinguir en una misma noción la manifestación de relaciones que permanecen constantes (proporción, identidad) y otras que si varían (componentes de la razón, relación que los pone en correspondencia).

e. Razonamientos cualitativos y cuantitativos, que indica el desarrollo natural de la noción de proporcionalidad (intuitivo-numérico, inductivo-deductivo, informal-formal).
f. Relaciones escalares y funcionales, relativas a las que se establecen entre cantidades extensivas e intensivas que diferencian una razón de una tasa de cambio.
g. Relaciones aritmético-algebraico, relativas al desarrollo intra-matemático de la noción de proporcionalidad que comprende avanzar desde lo numérico hacia formas más generales de índole algebraica.
h. Aspectos contextuales, referidos a diferentes factores que intervienen en las situaciones en las que se precisa el uso de un razonamiento proporcional.

Esta identificación de elementos, implicados en el razonamiento proporcional, constituye un referente sobre algunos de los –aspectos de interés” a ser tomados en cuenta en el estudio de la resolución de problemas matemáticos relativos a la proporcionalidad.

2.9. Conclusiones

Comencemos por señalar que la comprensión de lo que se entiende por razonamiento proporcional, requiere tener una visión desde las diferentes perspectivas expuestas en este capítulo, puesto que la misma nos proporciona una mirada –comprensiva” de las diferentes partes de un mismo todo. Aún cuando no se logre una perspectiva total y sistémica, la identificación de las interpretaciones particulares, relativas a las perspectivas identificadas, nos provee de un reconocimiento inicial que puede contribuir en el tránsito hacia esa perspectiva total.

En este orden de ideas, hemos observado que las herramientas teóricas propuestas por el enfoque ontosemiótico (facetas: epistémica, cognitiva, instruccional-mediacional y ecológica) parecen contribuir con dicho tránsito, al permitir una organización inicial de diferentes perspectivas, vistas como explicaciones complementarias del mismo objeto, pero en sus diferentes facetas.

Esta primera visión, eminentemente signada por lo didáctico, desde la cual se organizan las diferentes contribuciones en torno al desarrollo del razonamiento proporcional como responsabilidad de la institución escolar, o a la problemática de la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad en la educación primaria, nos provee de un espacio para avanzar en la comprensión de lo que tal problemática involucra.

En otro ámbito de ideas, reconocemos el conocimiento del profesor como una forma de conocimiento objeto de estudio y desarrollo de la formación inicial de profesores. Particularmente, cuando ese conocimiento se refiere al conocimiento necesario para la enseñanza de la matemática, los formadores de futuros profesores estamos inevitablemente convocados a su estudio y desarrollo. En este sentido, conocer los avances relativos a esa forma de conocimiento y la posibilidad de organizar experiencias de enseñanza en el ámbito de la formación inicial de profesores, dirigidas a su desarrollo, constituyen actividades ineludibles para los formadores.

Es así, con el ánimo de corresponder con esas demandas de conocimiento y desarrollo, como observamos buena parte de lo expuesto en el presente capítulo. Debemos reconocer que, debido a los objetivos pautados en este trabajo, la aproximación que hemos hecho al estudio del conocimiento del profesor ha sido un tanto esquemática y dirigida al tema que nos concierne. No obstante, en relación con esa aproximación, enfatizamos que la propuesta-producción de herramientas que posibilitan el desarrollo del conocimiento necesario para enseñar matemáticas, es reconocida, en la literatura especializada, como uno de los aspectos de mayor relevancia sobre esa temática.

En tal sentido, observaremos, en la exposición del resto de los capítulos, este aspecto como un eje transversal, alrededor del cual se organizan y ejecutan las acciones de las cuales se informa en este trabajo.

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA

3.1. Introducción

En este informe damos cuenta de tres estudios realizados en forma secuencial, a lo largo de dos años, para observar el desarrollo del conocimiento acerca de la proporcionalidad y de competencias de análisis didáctico en un grupo de futuros profesores de primaria.

En el primer año realizamos dos estudios, el primero consiste en una exploración inicial-diagnóstica sobre los conocimientos en torno a la proporcionalidad en futuros profesores de primaria que se inician en la carrera de magisterio.

En el segundo estudio realizamos una actividad de seguimiento de la evolución de los conocimientos sobre proporcionalidad de los futuros profesores, específicamente referidos al reconocimiento de situaciones de proporcionalidad y no-proporcionalidad, el uso de argumentos para basar sus reconocimientos y las estrategias utilizadas para resolverlas.

En el tercer estudio iniciamos lo relativo al desarrollo de competencias de análisis didáctico en los futuros profesores, realizando tres actividades de análisis epistémico/cognitivo, sobre tres tareas diferentes, dos de las cuales referían a la proporcionalidad.

Como parte final de esta secuencia de estudios hemos realizado un cuarto estudio, no obstante, no presentamos sus resultados en el actual informe. Los resultados de ese cuarto estudio fueron publicados en la revista BOLEMA, la publicación respectiva puede recuperarse desde: http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/issue/current. En ese cuarto estudio realizamos una investigación del tipo estudio de casos, con dos grupos de futuros profesores en el desarrollo de una tarea práctica, relativa a las dificultades y obstáculos en el aprendizaje de la proporcionalidad. Estos grupos forman parte de los sujetos participantes de los tres primeros estudios realizados. La asesoría dada a este grupo para la resolución de esta tarea incluyó: (a) resolución de problemas de proporcionalidad, (b) análisis epistémico/cognitivo de los problemas y sus resoluciones, y (c) valoraciones hechas por el grupo a algunos tipos de respuestas dadas a problemas de proporcionalidad por niños de 6º curso de primaria. En la publicación referida sólo se presentan los resultados obtenidos del trabajo realizado con uno de los grupos.

En el presente capítulo damos cuenta, de manera muy general, sobre los aspectos metodológicos tomados en cuenta para desarrollar los tres primeros estudios. Con fin de facilitar la exposición y la lectura de este informe, hemos considerado conveniente presentar los detalles metodológicos relativos a cada estudio, en los capítulos en los cuales se exponen los mismos.

Iniciamos este capítulo refiriendo a un modelo que ha permitido observar las acciones generales de esta investigación, como partes de un sistema funcional e integrado, especialmente la acción dirigida al desarrollo de un proceso de intervención, puesto en juego con el fin de poner en práctica una herramienta de análisis epistémico en torno al estudio de la proporcionalidad en 6º curso de primaria.

Seguidamente presentamos el diseño general de investigación en el cual se informa sobre la secuenciación de las diferentes actividades llevadas a efecto en el desarrollo de este trabajo. Una descripción de las actividades del diseño de investigación ocupa el resto del capítulo, refiriendo, en un último apartado, a una descripción de la parte empírica correspondiente.

3.2. Modelo de investigación

Con el objeto de organizar, en un marco general las acciones globales (observar, describir, intervenir, desarrollar y fomentar) que se desarrollan en este trabajo, especialmente nuestra intención de ir más allá de un estudio exploratorio-descriptivo, por medio del desarrollo de un proceso de intervención, hemos asumido como marco general de investigación una adaptación del modelo de investigación educacional propuesto por Lester (2005), el cual, a la vez, está basado en una adaptación del modelo dinámico de la investigación científica propuesto por Stokes (1997). En la Fig. 3.1 presentamos la adaptación del modelo —dinámico” de Stokes, propuesta por Lester.

En el modelo propuesto por Lester (2005), Fig. 3.1, distinguimos al menos cuatro campos de acción de la investigación educativa basado en tres formas de investigación (investigación básica, uso inspirado de educación básica e investigación aplicada y desarrollo), enmarcadas en los tres cuadros del modelo.

El primer campo de investigación refiere a la investigación que se realiza para mejorar la comprensión que se tiene sobre algún objeto o proceso de conocimiento. El segundo campo de acción refiere al uso de la comprensión para desarrollar procesos de intervención que ayuden a mejorar la comprensión existente. El tercer campo refiere al uso de los productos existentes para desarrollar procesos de intervención dirigidos a mejorar tales productos. El cuarto campo refiere a la investigación aplicada para desarrollar la mejora de productos existentes. En este contexto el término producto refiere, por ejemplo, a materiales de instrucción, que incluye la elaboración de reformas curriculares, programas de desarrollo profesional, políticas educativas municipales o nacionales, entre otros).

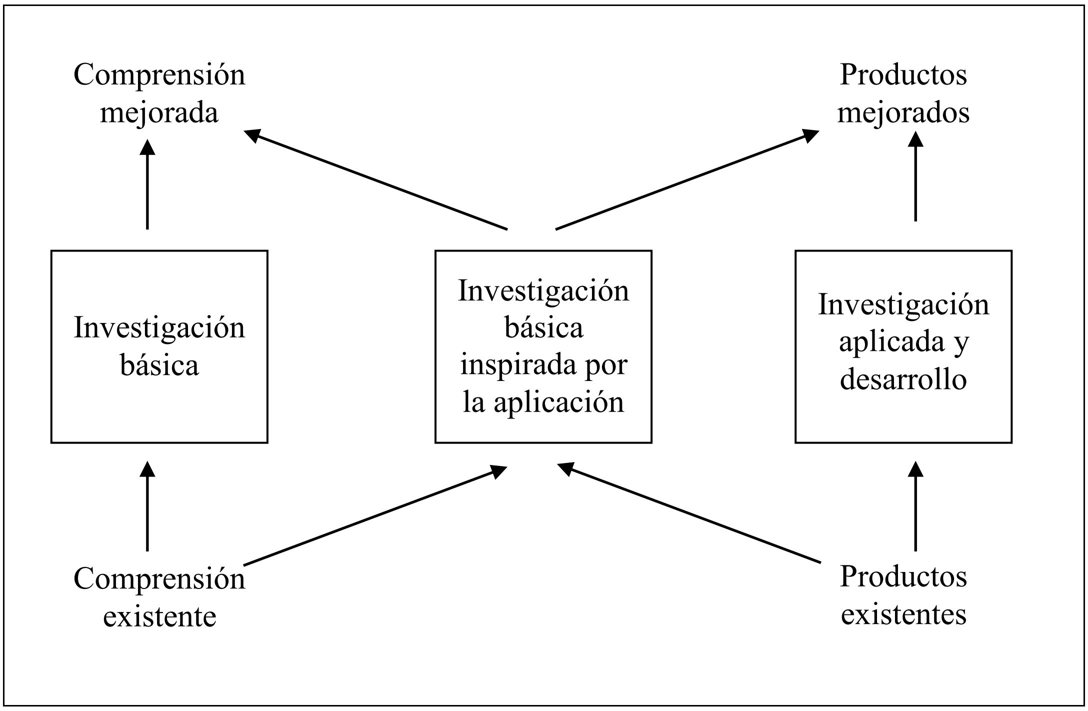


Fig. 3.1: Modelo ―dinámico” para la investigación en Educación Matemática (Adaptado de Lester (2005; p. 465))

En relación con el modelo de Lester (2005), nuestro trabajo se ha dirigido a desarrollar los dos primeros campos de acción referidos.

Respecto al primer campo, hemos observado en los capítulos precedentes, el desarrollo de acciones dirigidas a mejorar la comprensión en torno a aspectos de interés y diferentes perspectivas, desde las cuales se interpreta el problema de la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad, apuntando hacia las implicaciones en la formación de futuros profesores. Como complemento a esta primera acción, con el fin de ahondar en la comprensión de esta problemática en la formación de futuros profesores, realizamos algunas actividades de exploración puntuales para describir, de manera muy general, el proceso de formación de un grupo de maestros en formación inicial. En los capítulos 4 y 5 informamos sobre los resultados de esas actividades de exploración.

Respecto al segundo campo, basados en la comprensión obtenida, hemos desarrollado un proceso de intervención, que incluye la puesta en práctica de una herramienta de análisis epistémico/cognitivo, en un curso de formación de futuros maestros. Este proceso de intervención estuvo dirigido a profundizar aún más en la comprensión del problema de la formación de futuros profesores, en torno a la proporcionalidad y estudiar posibilidades de su mejora. En el capítulo 6 y en el Anexo L informamos sobre los resultados de esa intervención.

Finalmente, debemos referir a ciertos ajustes que hemos hecho en la adaptación del modelo de Lester (2005). En este sentido, hemos reconocido en él varios campos de acción que no son identificados en su propuesta inicial. Lester, refiriendo al modelo de Stokes, reconoce solo tres campos de acción; los derivados de las tres formas de investigación (investigación básica, investigación básica inspirada por la aplicación e investigación aplicada y desarrollo, Fig. 3.1). En este sentido, uno de los aspectos de la adaptación que hemos hecho consiste en que varios de los diferentes campos de acción han sido desarrollados en un mismo proceso de investigación, en diferentes momentos, donde los campos se han secuenciado de manera natural, involucrando prácticamente a los mismos sujetos (excepto por el número), en un único escenario de formación. En la Fig. 3.2 presentamos la correspondencia de esa secuencia con lo informado en este trabajo.

3.3. Diseño de investigación

Esta investigación es de tipo cualitativa, que incluye el uso de dos modalidades de investigación cualitativa (descriptivo-exploratorio y un estudio de intervención), siendo la forma de participación del investigador y la conformación de los grupos de informantes, los principales elementos diferenciadores.

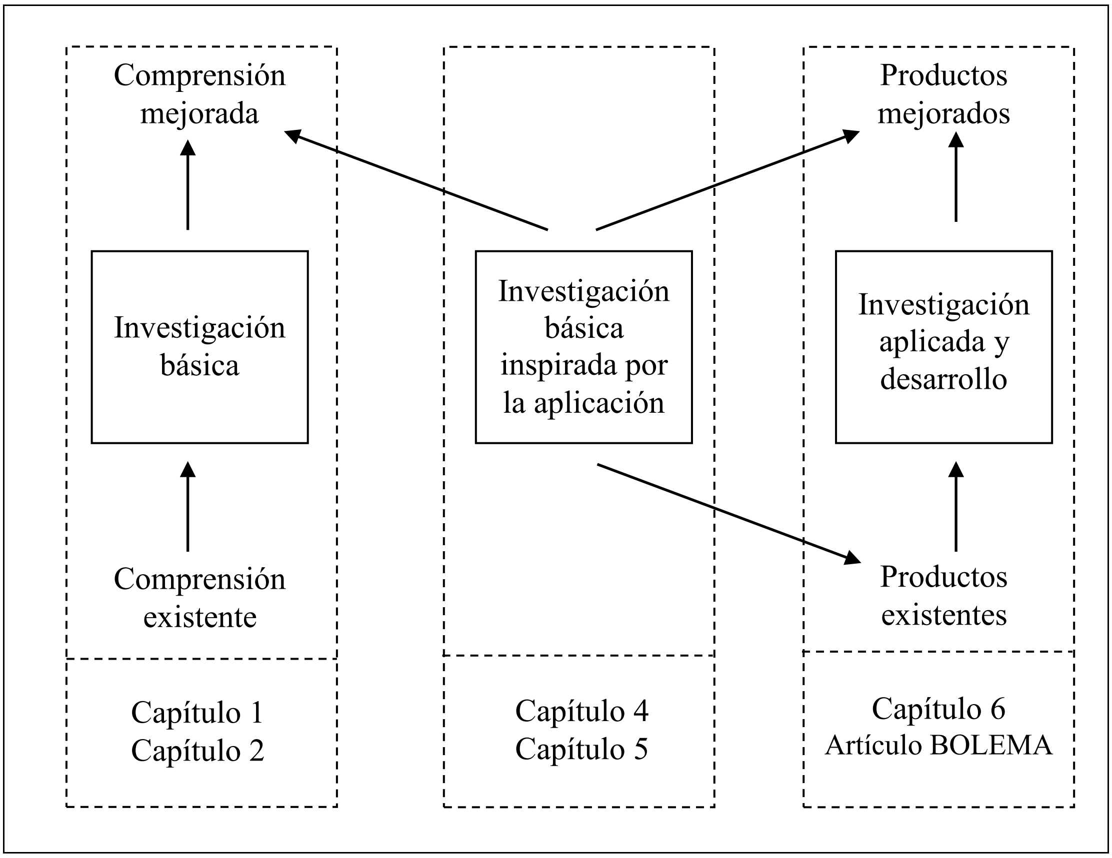


Fig. 3.2: Adaptación del Modelo de Lester en el proceso de investigación reportado

El diseño general de investigación, que se ha seguido para planear y desarrollar este trabajo, ha tomado como referencia la propuesta de Cohen, Manion y Morrison (2007, p. 79). En la Fig. 3.3 mostramos una adaptación que hemos hecho en la secuencia de tal diseño. Dicho en términos generales, lo que hemos hecho es integrar aquellas acciones inicialmente planificadas para el desarrollo de nuestra investigación, con la lista de elementos de un diseño de investigación, propuesta por estos autores. La integración se hizo de manera natural, puesto que los procedimientos que no habíamos previsto inicialmente desarrollar, referidos en la lista propuesta por los autores, se ajustaron muy adecuadamente a las acciones pertinentes del desarrollo teórico y empírico de la investigación. Es claro que algunos de los elementos de la lista, debido a que los consideramos de poca relevancia o no adecuados, no fueron considerados para elaborar nuestro diseño. A continuación describimos las adaptaciones más relevantes.

Una de las adaptaciones que hemos realizado al diseño propuesto por Cohen y colaboradores, refiere a lo correspondiente a la revisión de la literatura. Respecto a ese momento debemos reconocer que, aún cuando buena parte de la revisión de la literatura fue hecha previamente al desarrollo empírico de la investigación, esta fue una acción transversal y constante a lo largo del desarrollo de prácticamente todo el trabajo.

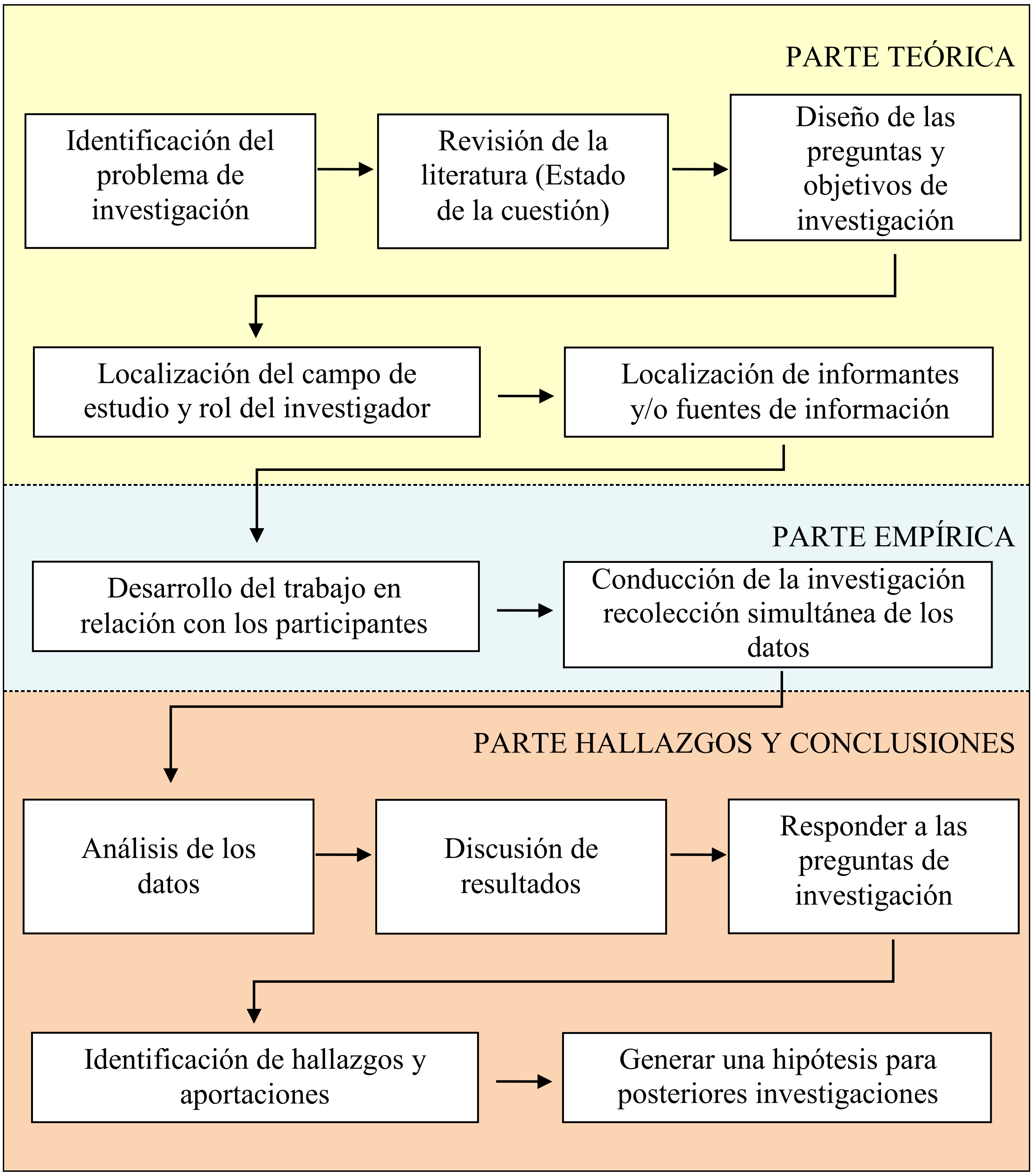


Fig. 3.3: Diseño de Investigación (Adaptado de Cohen, Manion y Morrison, 2007, p. 79).

Además de esta acción transversal, hemos tenido necesidad de incluir el registro de dos momentos no contemplados en el diseño originalmente propuesto por Cohen y colaboradores, a saber: (a) se ha incluido el momento de la discusión de los resultados, la cual resulta del análisis de los datos a la luz de las aportaciones teórico-empíricas provistas por investigaciones precedentes, este asunto lo consideramos vital para el avance del campo de investigación; y (b) se ha incluido el momento de la identificación de hallazgos y aportaciones, lo cual forma parte de las exigencias planteadas para el tipo de trabajo que estamos presentando.

Otra de las adaptaciones fue diferenciar los momentos desarrollados inscribiéndolos en tres partes generales que comprendieron la realización del trabajo, a saber: (a) parte teórica, (b) parte empírica y (c) parte de hallazgos y conclusiones.

Una última adaptación ha consistido en las acciones realizadas en la parte de hallazgos y conclusiones en las que han quedado comprendidas las acciones: analizar los datos, discusión de resultados, respuestas a las preguntas de investigación, identificación de hallazgos y aportaciones, y generar una hipótesis para posteriores investigaciones. La adaptación realizada consiste en que los dos primeros procedimientos (analizar los datos, discusión de resultados) han sido realizados para cada uno de los tres estudios y presentados en la exposición de los mismos. Luego, lo concerniente a los tres siguientes procedimientos (respuestas a las preguntas de investigación, identificación de hallazgos y aportaciones, y la generación de una hipótesis para posteriores investigaciones), constituyen momentos de síntesis de la totalidad de la investigación realizada, los cuales son presentados en el capítulo 7.

En relación con el cumplimiento de este diseño general de investigación y la elaboración del presente informe, debemos señalar que las dos primeras acciones han sido cubiertas con la realización de las actividades que condujeron a la redacción de los capítulos precedentes. En los siguientes apartados presentamos una descripción del resto de las acciones presentes en este diseño, excepto lo relativo a la parte de hallazgos y conclusiones; algunas se exponen en cada uno de los estudios respectivos (capítulos 4-6) mientras otras serán presentadas en el capítulo 7. El desarrollo de tales acciones ha constituido la materia prima de la redacción de los capítulos subsiguientes.

3.4. Preguntas y objetivos de investigación

Al inicio del capítulo 1, apartado 1.2, hicimos una breve descripción de nuestro problema de estudio, el cual se centra básicamente en la necesidad de desarrollar procesos adecuados de formación de futuros profesores, encaminados a proveerles de herramientas que mejoren su desempeño como profesionales. Particularmente, hemos asumido el tema de la proporcionalidad, sobre el cual pesa una considerable cantidad de asuntos complejos y problemáticos, tal y como hemos podido observar a lo largo de la exposición de los capítulos precedentes.

Ubicados en este contexto, en el que se palpa más de cerca esa problemática, nos ocuparemos ahora de formular las preguntas y objetivos de investigación.

3.4.1. Preguntas de investigación

Dos de las cuestiones iniciales a las cuales pretendemos dar respuesta en esta investigación son: ¿Qué conocimiento matemático se pone en juego en la resolución de situaciones problema referidas a la proporcionalidad? ¿Qué conocimiento matemático pone en juego el futuro maestro en ese mismo tipo de situaciones?

El contexto en el cual se planteó la interrogante: ¿Qué conocimiento matemático se pone en juego al resolver un problema de proporcionalidad?, constituye un espacio de trabajo en el que esa pregunta se planteó inicialmente de manera más general: ¿Qué conocimiento matemático se pone en juego al resolver un problema matemático cualquiera? Considerando que la capacidad para lograr una posible respuesta debería formar parte de las competencias a ser alcanzadas por el maestro, como componente de sus reflexiones, al momento de planificar y concebir procedimientos para enseñar un determinado contenido matemático, se ha estimado conveniente, tratar de encontrar recursos que permitan operativizar una posible respuesta. Consideramos que obtener tal respuesta de manera organizada y sistemática, de modo que los resultados puedan ser utilizados en el contexto de la formación de maestros, para fomentar una educación didáctico-matemática de calidad, constituye un interés invalorable de nuestro quehacer profesional.

Con este interés y considerando las descripciones expuestas en los capítulos precedentes (especialmente los aparatados 2.4 al 2.7, del capítulo 2), hemos arribado a concebir el uso de la Guía para el Reconocimiento de Objetos y significados (GROS)[32], como una vía que permite canalizar acciones dirigidas a responder a las interrogantes planteadas. Como hemos referido en el apartado 2.4, desde la perspectiva del EOS, la situaciones

[32] En el capítulo 4, apartado 4.3, mostramos una descripción de esta guía.

problema constituyen el aspecto central y generador de las prácticas matemáticas. En este orden de ideas, el reconocimiento de objetos y los respectivos significados puestos en juego en la comprensión y resolución de una situación problema, aproximan a una posible respuesta a la pregunta general ¿Qué conocimiento se pone en juego en la resolución de un problema matemático?

Este planteamiento hipotético inicial, ha dado lugar a concebir que el uso de la GROS nos puede conducir a la obtención de respuestas a nuestras preguntas iniciales de investigación, lo que constituye un segundo planteamiento hipotético relativo a un uso más específico de esa herramienta. Pero, además, posiblemente, dicho uso provea de situaciones de estudio y reflexión didáctico-matemática que pueden contribuir con los procesos de formación de futuros maestros.

Este tercer planteamiento hipotético, referido al uso de la GROS y la formación inicial de profesores, nos condujo a la formulación de otras interrogantes, una de ellas: ¿Qué conocimiento necesita el futuro profesor para desarrollar una actividad de enseñanza matemática de calidad? Esta pregunta general nos llevó a otras más específicas a las cuales pretendemos dar respuesta por medio de esta investigación, las cuales formulamos a continuación.

P1: ¿Qué conocimiento sobre la proporcionalidad tienen los futuros maestros que inician la carrera de magisterio?

P2: ¿Qué conocimiento sobre la proporcionalidad adquieren los futuros maestros durante su primer año de formación inicial?

P3: ¿Puede el uso de la GROS, por parte del profesor formador, potenciar el proceso de formación didáctico-matemática, en torno a la proporcionalidad, de futuros maestros?

P4: ¿Puede el uso de la GROS, por parte de futuros maestros, potenciar su proceso de formación didáctico-matemática, en torno a la proporcionalidad?

La operacionalización de las respuestas a estas preguntas, incluyó el uso de cuatro instrumentos de exploración de los conocimientos relativos a proporcionalidad de un grupo de futuros maestros, y la puesta en juego de la GROS, para valorar su efecto en el desarrollo de competencias de análisis didáctico en torno a la proporcionalidad, a nivel de 6º curso de primaria.

3.4.2. Objetivos

La formulación de las preguntas de investigación, nos condujo a identificar los objetivos de investigación. En el enunciado de los objetivos de investigación hemos tenido en cuenta algunos de los aspectos expuestos en los capítulos precedentes, específicamente, hemos formulado los objetivos (a) basados en una interpretación pragmática de la noción de conocimiento, referida en el apartado 2.6, desde la cual se identifica el término conocimiento con el de competencia; y (b) asociando el uso de la GROS, su potencial para desarrollar conocimiento didáctico-matemático, con la acción de análisis didáctico.

Asimismo, debemos señalar que en la formulación de los objetivos específicos, hemos llamado “objetivos empíricos” a los comúnmente conocidos como objetivos de investigación. Además, hemos incluido en tal formulación los objetivos que han guiado las acciones involucradas en la parte teórica de esta investigación, tales objetivos los hemos llamado “objetivos teóricos”.

Es claro que estos objetivos teóricos han sido cubiertos con lo presentado en los capítulos precedentes. Presentamos los objetivos teóricos con el fin de proveer a la formulación de los objetivos una entidad más completa sobre la totalidad de intenciones involucradas en el desarrollo de este trabajo.

3.4.2.1. Objetivo general

Implementar y evaluar una herramienta de análisis de análisis epistémico/cognitivo dirigida a desarrollar competencias de la faceta epistémica del análisis didáctico, por medio del estudio de la resolución de problemas de proporcionalidad, en el contexto de la formación de futuros profesores de primaria.

3.4.2.2. Objetivos específicos

Haremos uso de las abreviaciones **OT1**… **OT7** para referir a los objetivos teóricos y las abreviaciones **OE1**… **OE6** para referir a los objetivos empíricos.

Objetivos teóricos:

OT1: Describir el estudio de la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad como campo de investigación de la educación matemática.

OT2: Identificar algunos de los aspectos relativos a la problemática de la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad, más comúnmente referidos en la literatura especializada.

OT3: Realizar una síntesis de las investigaciones sobre formación de profesores en el campo del razonamiento proporcional.

OT4: Identificar diferentes interpretaciones relativas a la proporcionalidad provistas por algunas de las perspectivas teóricas del conocimiento humano, organizadas de acuerdo con herramientas del EOS.

OT5: Describir algunos de los aspectos relativos al desarrollo de un marco teórico, en torno al estudio del conocimiento del profesor, en el cual se encuentra inscrito el desarrollo del conocimiento necesario para la enseñanza de la proporcionalidad.

OT6: Describir, desde la perspectiva del EOS, la interpretación específica que hacemos de algunos términos polisémicos, que utilizamos para desarrollar acciones centrales de la investigación.

OT7: Elaborar una caracterización del razonamiento proporcional por medio de la identificación de los algunos de los aspectos reconocidos en investigaciones relativas al mismo.

Objetivos empíricos:

OE1: Describir el conocimiento sobre proporcionalidad exhibido por un grupo de futuros profesores al iniciar su proceso de formación profesional.

OE2: Valorar el uso de una herramienta de análisis didáctico (análisis epistémico y cognitivo), en el contexto de la elaboración de un diagnóstico sobre los conocimientos relativos a la proporcionalidad, con el cual una sección de futuros profesores inicia su formación profesional.

OE3: Describir el conocimiento sobre proporcionalidad exhibido por un grupo de futuros profesores al concluir su primer curso de formación profesional relativo a ese tema.

OE4: Implementar el uso de una herramienta de análisis epistémico/cognitivo en un proceso de formación, dirigido al desarrollo de competencias de análisis didáctico de futuros profesores sobre razonamiento proporcional.

OE5: Identificar y desarrollar competencias de la faceta epistémica del análisis didáctico en futuros profesores al resolver tareas de proporcionalidad de educación primaria.

OE6: Valorar el uso de una herramienta de análisis epistémico/cognitivo en el desarrollo de categorías del conocimiento matemático necesario para enseñar en futuros profesores.

Expuestos los objetivos, continuamos con el desarrollo del diseño de investigación propuesto. Debemos aclarar que lo relativo a “Localización del campo de estudio y rol del investigador”, lo hemos subdividido en dos apartados, el primero lo hemos llamado “contexto de investigación” y el segundo “rol del investigador”. A continuación describimos lo correspondiente a estos apartados.

3.5. Contexto de investigación

Identificamos en el contexto de investigación dos escenarios: uno material y otro instruccional. El escenario material refiere al lugar físico en el que ocurren las acciones y las características generales de los grupos participantes. Mientras el escenario instruccional refiere a las características generales del proceso de instrucción que tiene lugar. Veamos a continuación las descripciones de estos dos escenarios.

3.5.1. Contexto material

La presente investigación se desarrolla en el contexto de la formación de futuros profesores de primaria. El conjunto de acciones que se desarrollan tienen como lugar la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada, básicamente en las aulas y bibliotecas de esa facultad. Los sujetos son estudiantes de la carrera de magisterio del primer y segundo año. Se inicia la investigación (estudios 1 y 2) con una sección de la asignatura “Matemática y su Didáctica”, que se dicta en el primer año de la carrera mencionada. Los estudios 1 y 2 son de carácter descriptivo, cuyo objeto es el conocimiento sobre la proporcionalidad de los futuros profesores. Las descripciones se realizan sin modificar el espacio natural, donde se desarrollan las acciones que regularmente suceden en el proceso de formación, de los futuros profesores, durante ese primer año de la carrera.

Continúa la investigación (Estudio 3), al año siguiente, con una sección de la asignatura “Currículo de Matemática en Educación Primaria” del segundo año de esa carrera.

Básicamente se trata de los mismos sujetos del primer año, excepto por los cambios de matrícula realizados por algunos estudiantes, los que no aprueban la asignatura o los que no la inscriben en el año siguiente. Para este estudio se desarrolla un programa de formación que incluye el uso del análisis didáctico de la resolución de problemas matemáticos, específicamente de proporcionalidad.

Un aspecto importante a tomar en cuenta es que estos estudios se realizan mientras los futuros profesores cursan los dos primeros años de la carrera de magisterio, en medio de todas las responsabilidades y ocupaciones que tal situación involucra.

3.5.2. Contexto instruccional

El escenario instruccional en el que tiene lugar en esta investigación se inscribe en el desarrollo de dos años de formación de futuros profesores. Hemos asumido como referencia instruccional global el desarrollo de algunas de las fases de un *ciclo formativo*. Un ciclo formativo constituye un proceso de estudio, concebido con el objeto de dar lugar a una serie de situaciones en un contexto instruccional, sobre un contenido disciplinar específico, que obedece a los planteamientos teóricos propuestos por el enfoque ontosemiótico.

En el caso que corresponde a esta investigación, la puesta en práctica de este proceso de estudio, tiene como objeto fomentar el desarrollo del conocimiento sobre proporcionalidad, y de competencias de análisis didáctico respecto a ese tópico en la formación de futuros profesores de primaria. Este proceso de estudio comprende los siguientes tipos de situaciones o fases:

- Resolución de problemas de acuerdo con un modelo didáctico socio – constructivo – instruccional.
- Reflexión epistémico/cognitiva sobre los objetos y significados[33] puestos en juego en la resolución de problemas.
- Análisis de las interacciones en la clase de matemáticas.
- Reconocimiento del sistema de normas que condicionan y soportan la actividad de estudio matemático.

[33] Inicialmente esta actividad fue realizada por el formador y un grupo de investigadores, con el fin de apoyar las acciones involucradas en el proceso de instrucción y una aproximación a la validez de contenido del instrumento de diagnóstico aplicado (Estudio 1). Luego, este tipo de actividad, relativa al análisis didáctico, es puesta en juego por los futuros profesores (Estudios 3).

- o Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio matemático experimentado.

La investigación ejecutada refiere a algunos eventos que tuvieron lugar en la primera y segunda fase de este proceso de estudio. En el desarrollo de las sesiones en que las dos primeras fases tuvieron lugar, se implementó una trayectoria didáctica que contempló los siguientes momentos:

- Presentación de las consignas.
- Exploración personal
- Trabajo cooperativo en equipos para elaborar una respuesta compartida.
- Presentación y discusión
- Institucionalización por el formador o un asesor, explicitando los conocimientos pretendidos

La puesta en práctica de esta trayectoria didáctica tuvo lugar en diversos momentos y de diversas maneras. En la Tabla 3.1 mostramos las relaciones entre las fases del ciclo formativo, la trayectoria didáctica implementada, el número de sesiones, las actividades específicas desarrolladas y el instrumento utilizado.

Para el Estudio 1 se realizó una sesión de clase en el curso ―Matemáticas y su Didáctica", del primer año de la carrera de magisterio. El momento de ―exploración personal" al que refiere esta trayectoria ha sido identificado con la aplicación del instrumento diagnóstico o cuestionario inicial de investigación. El desarrollo de los demás momentos de la trayectoria didáctica tuvo lugar en torno a la aplicación de ese cuestionario (véase en Anexo D1: Observación Nº 1).

Luego de esta sesión, se informó a los estudiantes sobre materiales que debían leer para complementar la actividad desarrollada. Los materiales respectivos se muestran en la Fig. 3.4. Como actividad de seguimiento, se informa a los alumnos sobre la disposición del formador para atenderlos en horas de tutoría. La evaluación de esta actividad de formación, que incluye el desarrollo de otras actividades y temas, se realiza por medio de una prueba de control que se aplica al final del primer cuatrimestre del primer año.

El Estudio 2 se realiza sobre los resultados de la aplicación de un ítem referido a proporcionalidad incluido en esa prueba de control. La trayectoria didáctica referida se desarrolla en dos sesiones. La primera sesión, en la que se aplica la prueba de control, la cual se puede interpretar (siendo conscientes de las distancias) como la implementación de los dos primeros momentos de la trayectoria didáctica. La segunda sesión, en la que se realiza una discusión en torno a las respuestas de los ítems de la prueba, se aproxima a los dos últimos momentos de la trayectoria, quedando el momento del trabajo en equipos para elaborar una respuesta compartida, posiblemente, sin efecto (véase Guiones de Observación en Anexo D2: Observación Nº 2, y Anexo D3: Observación Nº 3).

Tabla 3.1: Relación entre elementos puestos en juego en el proceso de instrucción

<table>
<tr><th>Estudio
(Año/Sesión)</th><th>Fase</th><th>Trayectoria didáctica</th><th>Actividad</th><th>Instrumento</th></tr>
<tr><td>Estudio 1
Año 1/primera sesión</td><td rowspan="4">Primera fase de un ciclo formativo</td><td>Los cinco momentos de la trayectoria</td><td>Aplicación y revisión de las respuestas de la prueba diagnóstico</td><td>Prueba diagnóstico</td></tr>
<tr><td>Estudio 2
Año 1/segunda sesión</td><td>Dos primeros momentos de la trayectoria</td><td>Aplicación de la prueba de control</td><td rowspan="2">Prueba de control</td></tr>
<tr><td>Estudio 2
Año 1/tercera sesión</td><td>Dos últimos momentos de la trayectoria</td><td>Revisión/discusión de respuestas de la prueba de control</td></tr>
<tr><td>Estudio 3a*
Año 2/primera sesión</td><td>Tres primeros momentos de la trayectoria</td><td>Resolución del problema del yogur</td><td rowspan="2">Trabajo Práctico Nº 1</td></tr>
<tr><td>Estudio 3a
Año 2/segunda sesión</td><td>Segunda fase de un ciclo formativo</td><td>Dos últimos momentos de la trayectoria</td><td>Aplicación de la GROS</td></tr>
<tr><td>Estudio 3b
Año 2/tercera sesión</td><td>Primera fase de un ciclo formativo</td><td>Tres primeros momentos de la trayectoria</td><td>Resolución del problema de la limonada</td><td rowspan="2">Trabajo Práctico Nº 2</td></tr>
<tr><td>Estudio 3b
Año 2/cuarta sesión</td><td>Segunda fase de un ciclo formativo</td><td>Dos últimos momentos de la trayectoria</td><td>Aplicación de la GROS</td></tr>
</table>

* Usaremos 3a para referir al estudio que se realiza con el Trabajo práctico Nº 1…

En síntesis la actividad de formación desarrollada, en torno al tema de nuestro interés, comprende: (a) el desarrollo de una sesión de clase, en la que se incluye la aplicación de una prueba diagnóstico sobre el conocimiento de la proporcionalidad, y, en ese desarrollo, se pone en juego una trayectoria didáctica, (b) lectura de materiales sugeridos, (c) tutoría sobre las lecturas sugeridas por el formador, y (d) la aplicación de una prueba de control. Estas acciones sirven de contexto para la realización de los estudios 1 y 2.

Es claro que en el desarrollo del primer cuatrimestre se estudian otros temas para los cuales se ponga en juego también la trayectoria didáctica referida. No obstante, nuestro interés está enfocado sólo al tratamiento de la información en torno al tema de la proporcionalidad.

- Fernández, F. (2001). Proporcionalidad entre magnitudes. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 533-558). Madrid: Síntesis.

- Godino, J.D., Batanero, C. y Font, V. (2004). Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En J.D. Godino (Dir.), *Didáctica de la Matemática para maestros* (pp. 5-123). Granada: Universidad de Granada. Disponible en: http://www.ugr.es/local/jgodino. Específicamente lo concerniente a: Dificultades errores y obstáculos (pp. 73-76).

- Godino, J.D. y Batanero, C. (2004). Proporcionalidad. En J.D. Godino (Dir.), *Didáctica de la Matemática para maestros* (pp 271-286). Granada: Universidad de Granada. Disponible en: http://www.ugr.es/local/jgodino.

Fig. 3.4: Materiales sugeridos para apoyar el proceso formativo.

Para el Estudio 3, la trayectoria didáctica referida fue empleada en cinco sesiones diferentes, con una sección de la asignatura “Currículo de Matemáticas en la Educación Primaria” del segundo año de la carrera magisterio, durante el primer cuatrimestre de ese curso. Se estudiaron tres tipos de problemas diferentes (uno sobre significados de la suma y dos sobre razón y proporción), donde se pusieron en juego las dos primeras fases del ciclo formativo, antes mencionadas. Nuestro interés se centró en la aplicación de dos “trabajos prácticos”, en los cuales se hizo uso de dos problemas sobre razón y proporción, que abarcaron cuatro sesiones de clase del curso referido. En la Tabla 3.1 se puede observar las relaciones entre los distintos elementos (las sesiones realizadas, las fases del ciclo formativo involucradas, los momentos de la trayectoria didáctica desarrollados, las actividades llevadas a efecto y los instrumentos empleados) que sirvieron de contexto a la realización del Estudio 3.

Lo relativo a la segunda fase del ciclo formativo implementado; ―reflexión epistémico/cognitiva sobre los objetos y significados puestos en juego en la resolución de problemas" (puesta en juego de la GROS), fue una actividad que se realizó en dos momentos para cada problema estudiado: (a) por parte del formador y un grupo de investigadores como actividad previa, para apoyar el proceso de instrucción de los futuros profesores, y (b) por parte de los futuros profesores, en el desarrollo de las actividades pautadas en las sesiones respectivas.

El primer problema (problema de la suma, Anexo C1) se estudió en una sesión de clase en la que se siguió una trayectoria didáctica similar a la seguida para el Estudio 1, con una mayor participación del profesor formador, quien orientó permanentemente a los estudiantes (constituidos en grupos de trabajo) sobre la tarea de reconocimiento de objetos y significados puestos en juego en la resolución de un problema de suma, propuesto en un libro de texto. Como aspecto final del proceso de institucionalización, el profesor formador puso a disposición en el ―Tablón de los estudiantes" un ejemplo de la aplicación de la GROS al problema tratado en la clase. Esta actividad se consideró como actividad preparatoria para las dos siguientes actividades.

El estudio de los dos problemas de razón y proporción (problema del yogur y problema de la limonada) se hizo por medio de la realización de dos trabajos prácticos. Cada trabajo se realizó en dos sesiones de clase diferentes, de manera continua, durante dos semanas, con grupos de trabajo constituidos. El inicio de cada estudio tuvo lugar en el aula de clase, con la participación activa del investigador y del profesor formador, asesorando individualmente a los grupos que lo solicitaban. El protocolo final de cada trabajo práctico, por cada grupo, fue elaborado en horas extra-clase, y entregado a más tardar en la semana siguiente. Parte de estos protocolos constituyeron los instrumentos de recogida de datos del Estudio 3.

Una descripción de las acciones que tuvieron lugar en el desarrollo de las cuatro sesiones de clase pueden ser vistas en el Anexo D: Guiones de Observación, desde Anexo D4: Observación Nº 4, hasta Anexo D7: Observación Nº 7.

La continuación de este proceso de formación, con esta sección de futuros profesores, respecto a la proporcionalidad de educación primaria, se realizó por medio de la ―Técnica de un Grupo Nominal" (Nominal Group Technique) (Cohen, Manion y

Morrison, 2011, p. 357) que consistió en la realización de un estudio de casos realizado con dos grupos de futuros profesores, en el que el proceso de investigación desarrollado se identifica con la propuesta metodológica de la “Investigación de Diseño” (DBRC, 2003), en el cual se pusieron en práctica un conjunto de actividades dirigidas a mejorar la formación de esos dos grupos. Este estudio fue referido al inicio de este capítulo como un cuarto estudio. Parte de los resultados de esta experiencia fueron publicados en Rivas, Godino y Castro (2012). Como referimos antes, tales resultados no forman parte del presente informe[34].

En este orden de ideas, con el fin de proveer de información relativa al contexto de formación en el que participó la muestra de futuros profesores del Estudio 3, en experiencias posteriores a ese tercer estudio, se realizaron actividades relativas al uso de herramientas de análisis epistémico/cognitivo y de “idoneidad didáctica”, por medio de trabajos prácticos en los que se estudiaron las dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas, y la evaluación de experiencias de enseñanza en estadística de primaria. Los resultados de estas experiencias han sido objeto de otros estudios no reportados en este informe.

3.6. Rol del investigador

Los tres estudios realizados, reportados en este informe, han sido emprendidos con la participación de un grupo de investigadores, conformado por un profesor-investigador, formador, experimentado y tres investigadores noveles. Este grupo de investigadores se instituyó como una “comunidad de aprendizaje” en torno al estudio de configuraciones epistémicas/cognitivas puestas de manifiesto en la resolución de un problema de la matemática escolar. Los estudios realizados tuvieron lugar en el contexto de la planificación y desarrollo de actividades de formación de futuros profesores.

En este orden de ideas, la figura de investigador en el contexto de este informe, es ejercida por uno de los investigadores noveles, responsable principal de su elaboración y participante de esa comunidad.

Al hablar del rol del investigador en el contexto de este trabajo, consideramos que este varía en relación con las diferentes modalidades de investigación que se han

[34] La publicación referida puede recuperarse desde: http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/issue/current

desarrollado. En una primera modalidad, de pura-exploración (Estudios 1 al 2), el investigador actúa como observador-participante. Como observador imparcial del desarrollo de las sesiones de trabajo con los alumnos. Como participante en las tareas de análisis y de reflexiones epistémico/cognitiva, realizadas para apoyar el desarrollo de las actividades de formación de los futuros profesores. En esta modalidad la participación del investigador se manifiesta de forma “pasiva”, en la que no se involucra en el desarrollo de la actividad realizada por los estudiantes de manera directa; no interactúa con ellos.

En la segunda modalidad (Estudio 3), un estudio de intervención, inscrito en el desarrollo de un primer ciclo de un modelo de investigación acción (Cohen, Manion y Morrison, 2007; Hernández, Fernández y Baptista, 2006), caracterizado por la intención de intervenir en el proceso de formación de los sujetos de la muestra, donde el investigador actúa como participante de las acciones que se desarrollan con el grupo de futuros profesores. El rol del investigador en este estudio es similar al descrito por Cohen y colaboradores, quienes al referir al rol del investigador en una investigación participativa sostienen: “Investigación acción participativa no significa que todos los participantes necesitan hacer los mismo. Esta reconoce un rol para el investigador como facilitador, guía, formulador y sintetizador de conocimiento, generador de interrogantes…” (Cohen, Manion y Morrison, 2007; p. 301).

En este sentido, el enfoque de investigación acción participativa que asumimos, en el desarrollo de este trabajo, se aproxima a la tradición que enfatiza la práctica y la participación reflexiva (Elliot, 2000; Schön, 1992), desde el cual se da fundamento a nociones como la de “profesor como investigador” (Stenhouse, 2003). Este enfoque se diferencia del enfoque “crítico”, donde el investigador participa en igualdad de condiciones que el resto de participantes y todos actúan en los diferentes momentos de la investigación; su planificación, desarrollo y producción de resultados (Carr y Kemmis, 1988).

En los términos expuestos por Carrasco y Calderero (2000), el investigador actúa como un “observador participante” estando su acción dirigida a “…llegar profundamente a la comprensión y explicación de la realidad por la cual el investigador ‘participa’ de la situación que quiere observar” (p. 115). Esta observación se realizará en su modalidad “activa”, con lo cual se da lugar a interacciones entre el investigador y el grupo. De manera que el investigador actúa transformando el fenómeno a observar y no lo ve manifestarse en su forma natural, sino modificado por su propia intervención. Debemos referir que la participación del investigador, en la interacción con el grupo se limitó proveer de información sobre posibles procesos de resolución de los problemas plateados en los trabajos prácticos, significados de uso de los objetos matemáticos activados en los procesos de resolución implementados y sobre ejemplos de posibles significados asignados a estos.

3.7. Participantes, criterios de inclusión y exclusión

En este apartado exponemos lo relativo a las acciones relacionadas con la localización de los informantes. Lo relativo a las fuentes de información lo hemos identificado con los instrumentos utilizados para recoger la información correspondiente, lo cual es expuesto en el apartado -siguiente. No obstante, las características de esta investigación, conducen a prestar atención a las acciones realizadas por los participantes como fuentes de información.

En general, los informantes constituyen un grupo de futuros profesores, cursantes de la carrera de magisterio de la Facultad de Ciencias de la Educación, de la Universidad de Granada, mientras cursan el primer y segundo año de dicha carrera.

Estos informantes participan de diferentes maneras, realizando distintas acciones de formación, variando el número de informantes en distintos momentos. En la Tabla 3.2 presentamos un resumen de las descripciones realizadas en los dos últimos apartados e incluimos en la última columna cómo varían los informantes en los diferentes estudios realizados.

Al hablar de criterios de inclusión/exclusión de los participantes, para los Estudios 1 y 2, en los que realizamos una exploración de los conocimientos sobre proporcionalidad en futuros profesores de primaria, nos referimos a que los participantes fueron los estudiantes inscritos-asistentes en una sección del primer año de la asignatura Matemática y su Didáctica para maestros, del primer año de magisterio, que se dictó en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada. El grupo de sujetos participantes estuvo conformado por un total de 60 estudiantes en el Estudio 1, y 59 estudiantes en el Estudio 2, puesto que uno de los sujetos del primer estudio no participó en el segundo estudio.

Tabla 3.2: Contexto de investigación, rol del investigador e informantes en los tres estudios

Contexto / Estudios	Contexto material	Contexto instruccional	Rol del investigador	Informantes
Estudio 1 Descriptivo-exploratorio Año 1 de Investigación	UGR-FCE* 1er cuatrimestre del 1er año de la carrera de magisterio	Una sesión. 1ra y 2da fase ciclo formativo. Trayectoria didáctica específica	Observador/ participante Participación pasiva	Una sección de estudiantes del 1er año de la carrera de magisterio (60 estudiantes)
Estudio 2 Descriptivo-exploratorio Año 1 de Investigación	UGR-FCE Final 1er cuatrimestre del 1er año de la carrera de magisterio	Aplicación de una prueba de control		Una sección de estudiantes del 1er año de la carrera de magisterio (59 estudiantes)
Estudio 3a Intervención 1er trabajo práctico Año 2 de Investigación	UGR-FCE Inicio 1er cuatrimestre del 2do año de la carrera de magisterio	Dos sesiones. 1ra y 2da fase ciclo formativo Trayectoria didáctica específica	Observador/ participante Participación activa	Una sección de estudiantes del 2do año de la carrera de magisterio (62 estudiantes)
Estudio 3b Intervención 2do trabajo práctico Año 2 de Investigación	UGR-FCE Inicio 1er cuatrimestre del 2do año de la carrera de magisterio	Dos sesiones. 1ra y 2da fase ciclo formativo Trayectoria didáctica específica		Una sección de estudiantes del 2do año de la carrera de magisterio (52 estudiantes)

* Universidad de Granada – Facultad de Ciencias de la Educación

No obstante, para la conformación del grupo del Estudio 2 (59 sujetos) hubo necesidad de hacer una escogencia. El criterio aplicado para esa escogencia fue haber participado en la aplicación del primer instrumento. En este sentido, debemos señalar que el total de sujetos que presentaron el segundo instrumento fue de 93 sujetos, de los cuales, aplicando el criterio señalado, resultó el grupo de 59 sujetos que constituyó la muestra del segundo estudio.

De manera que para estos dos primeros estudios, la muestra quedó conformada por la totalidad de los sujetos participantes en la aplicación de ambos instrumentos, no se realizó ningún tipo de muestreo. La escogencia fue de tipo *incidental*, por lo tanto no aleatoria (León y Montero, 2003), ya que los estudiantes fueron seleccionados de acuerdo con los criterios: (a) ser estudiantes inscritos-asistentes en el curso respectivo y (b) haber participado en la aplicación de ambos instrumentos.

Para la realización del Estudio 3 el criterio de inclusión/exclusión y conformación del tipo de muestra fue exactamente el criterio (a), referido en el párrafo anterior, para la conformación de los grupos de los dos primeros estudios, solo que para estudiantes del segundo año de magisterio, de la misma facultad y la misma universidad, antes referidas. El grupo de sujetos participantes en el primer trabajo práctico (problema del yogur) estuvo conformado por un total de 62 estudiantes, que conformaron 31 grupos de 2 estudiantes por grupo. Mientras el número de sujetos para el segundo trabajo práctico estuvo conformado por 52 estudiantes, que conformaron 13 grupos de 4 estudiantes por grupo.

Observamos en la Tabla 3.2 que para cada estudio realizado el número de sujetos participantes varía. Más aún, para el Estudio 3 el número de sujetos no es el mismo a lo largo de su realización, esto se debe a que ese estudio comprende la aplicación de dos instrumentos en dos momentos distintos, siendo el criterio fundamental de inclusión/exclusión la asistencia/inasistencia a la actividad pautada. De manera que, para cada estudio, tendremos los mismos sujetos pero el número de ellos variará de acuerdo con la circunstancia de asistencia o no al momento de aplicación del instrumento respectivo.

3.8. Instrumentos

Siguiendo el diseño de investigación asumido para guiar el desarrollo de este trabajo, propuesto por Cohen y colaboradores (Cohen, Manion y Morrison, 2007), al cual hemos referido en el aparatado 3.3, corresponde ahora exponer lo relativo a las fuentes de información, que para nuestro caso, son básicamente los instrumentos aplicados para recoger los datos y las acciones realizadas por los informantes, observadas durante el desarrollo de las diferentes sesiones de trabajo.

En el primer y segundo estudio la investigación que se realiza es de tipo exploratoria-descriptiva en los términos expuestos por Hernández, Fernández y Batista (2006), en la que los datos son obtenidos por medio de procesos de observación y/o instrumentos de recolección de datos.

Desde la perspectiva exploratoria-descriptiva que hemos asumido para el desarrollo de esta parte del trabajo, los instrumentos utilizados forman parte integrante y natural del proceso a ser descrito, en el sentido que se quiere hacer una descripción sobre el conocimiento de la proporcionalidad puesto en juego por un grupo de futuros profesores, al inicio y al final de un proceso formativo, en el que se incluye, desde la perspectiva del profesor-investigador, formador, el uso de una herramienta de análisis que fomenta la reflexión epistémico/cognitiva en torno a las resoluciones de problemas matemáticos (relativos a la proporcionalidad), incluidos en los instrumentos aplicados.

El procedimiento de observación desplegado tiene como fin profundizar en la descripción de la problemática relativa a la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad, poniendo en juego una herramienta de análisis didáctico específica.

En este orden de ideas, hemos asumido dos de las pruebas utilizadas por el formador como instrumentos de recolección de datos, las cuales hemos reconocido como *cuestionarios de investigación*, de formato estructurado por aspectos del contenido matemático considerado, cuyo carácter exploratorio le confiere el uso de preguntas abiertas dirigidas a obtener la riqueza y conocimiento personal de los sujetos (Cohen, Manion y Morrison, 2007). En el siguiente sub-apartado presentamos una descripción de los mismos.

Al ser estos instrumentos parte de la realidad a ser descrita se ha considerado sin lugar estudios de validez y fiabilidad de los mismos. Enfatizamos que nuestro interés se dirige hacia la profundización en la comprensión sobre la problemática de la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad, por medio del estudio de los objetos matemáticos y los procesos de significación, puestos en juego en las resoluciones de problemas relativos a ese tópico. En este sentido, observamos una aproximación a la validez de contenido, en los términos de ―alineación con estándares” propuesta por Lesh, Lamon, Behr y Lester (1992, p. 382); al conceder a los resultados de los análisis epistémicos la condición de referentes para el estudio de las respuestas de los sujetos, la validez de contenido ―interna” puede ser interpretada en función de la posibilidad de que los objetos y significados asociados a las resoluciones dadas por los sujetos a los ítems/problemas de los instrumentos, queden comprendidos por los análisis epistémicos realizados.

En el tercer estudio los instrumentos de recolección de datos fueron dos actividades prácticas desarrolladas por los futuros profesores, aplicadas al inicio del primer cuatrimestre del segundo año de la carrera de magisterio. Estas actividades las hemos considerado como ―trabajos prácticos”, sobre las cuales damos algunos detalles en el sub-apartado 3.8.2.

3.8.1. Cuestionarios

Tal y como venimos refiriendo hemos asumido bajo la noción de cuestionario de investigación dos de las pruebas de evaluación (diagnóstico y control), utilizadas por el formador, como instrumento de recolección de datos. A continuación presentamos una descripción de cada uno de ellos.

3.8.1.1. Cuestionario inicial sobre el conocimiento de la proporcionalidad

La recogida inicial de los datos se llevó a cabo por medio de la aplicación de una prueba exploratoria, diagnóstica-inicial, constituida por cuatro ítems sobre el razonamiento proporcional. Esta se aplicó a los sujetos participantes al inicio del primer cuatrimestre, del primer año de la carrera de magisterio. Su aplicación tuvo una duración de 45 minutos, luego de lo cual se siguió la puesta en común de las respuestas dadas.

Aún cuando este instrumento constituye una prueba diagnóstico, regularmente utilizada por el formador al inicio del curso, hemos verificado que su diseño corresponde con los siguientes aspectos:

a) Caracterización referencial de la proporcionalidad presentada en el apartado 2.8 del capítulo 2.

b) La tipología de problemas que, de acuerdo con la literatura, son utilizados en la educación primaria, referida en el apartado 1.6 del primer capítulo.

c) Revisión inicial de los contenidos relativos a la proporcionalidad en dos libros de texto de educación primaria.

d) Pertinencia de las consignas, por medio de la realización de los análisis epistémicos/cognitivos previos, de las diferentes situaciones problema.

A partir de las revisiones teóricas y los análisis mencionados se convalidó el instrumento diseñado. El carácter exploratorio inicial del mismo condujo a delimitar los aspectos del razonamiento proporcional a ser explorados. En este sentido, se consideró conveniente poner el énfasis en la resolución de un problema tipo valor faltante, el uso de tablas, de representaciones gráficas, el juicio de situaciones, la explicación y formulación de ejemplos, alrededor de la noción magnitudes proporcionales. El instrumento se presenta en el apartado 4.4 del capítulo 4 y en el Anexo A de este informe.

3.8.1.2. Segundo cuestionario

El segundo cuestionario consiste en un ítem contenido en una prueba de rendimiento, de control del curso, aplicada a los futuros maestros como evaluación de los conocimientos adquiridos durante el primer cuatrimestre del primer año de la carrera de magisterio, en el contexto del dictado de la asignatura “Matemática y su Didáctica”. Ese ítem, relativo a la proporcionalidad, en el cual se solicita que de una lista dada, de cuatro situaciones problema, se identifique cuales son de proporcionalidad, argumente su respuesta y resuelva las situaciones que considera de proporcionalidad. Este ítem puede verse en el apartado 5.4 del capítulo 5 y en el Anexo B.

De manera general se reconocen tres aspectos a ser evaluados por medio de este ítem, a saber: (a) la distinción entre situaciones proporcionales y no-proporcionales, (b) los argumentos utilizados para juzgar una situación tal, y (c) la resolución de una situación problema de proporcionalidad. En el capítulo 5 presentamos los resultados de su aplicación.

3.8.2. Trabajos prácticos

Hemos dado el nombre de “trabajos prácticos” a los instrumentos utilizados para recoger la información correspondiente a la puesta en práctica de la GROS por parte de los futuros profesores. Estos instrumentos, con características similares a las descritas para los cuestionarios anteriormente referidos, corresponden con lo que se conoce en el ámbito de la educación como actividades prácticas.

Originalmente, en el ámbito de la carrera de magisterio, tales instrumentos son utilizados como protocolos, en los que se recoge la producción de los estudiantes respecto a un tema determinado. Se ubican dentro del componente práctico del dictado de las asignaturas, por lo que son concebidos como actividades o trabajo práctico.

Con el fin de hacer que tales instrumentos sirvieran a los objetivos de la investigación en curso, se realizaron ciertos ajustes que permitieron, a partir del planteamiento de un problema y su resolución, la inclusión de una consigna en la que se solicitaba a los estudiantes realizar una tarea de reflexión en torno a los conocimientos puestos en juego durante ese proceso de resolución. En correspondencia con esa consigna, los estudiantes fueron orientados para poner en juego la GROS.

En este orden de ideas, los trabajos prácticos aplicados fueron:

(1) Análisis de los Conocimientos Puestos en Juego en la Solución de un Problema —*Problema del yogurt*— ver en Anexo C2, y
(2) Práctica 1: Las Matemáticas como Actividad de Resolución de Problemas —*Problema de la limonada*— ver en Anexo C3.

Estos trabajos fueron utilizados en diferentes momentos en el desarrollo del Estudio 3, dando lugar a dos sub-estudios (Estudio 3a y Estudio 3b); uno por cada trabajo práctico. En la Tabla 3.3 mostramos cómo se distribuyeron estos trabajos en ese estudio, de acuerdo con el número de sesiones empleadas y los sujetos participantes.

Tabla 3.3: Relación estudios/tareas de investigación empleadas

Estudio	Trabajos prácticos	Participantes
Estudio 3a Intervención (2 sesiones)	(1) Análisis de los Conocimientos Puestos en Juego en la Solución de un Problema: *Problema del yogurt*	Una sección de estudiantes del 2do año de la carrera de magisterio (62 estudiantes)
Estudio 3b Intervención (2 sesiones)	(2) Práctica 1: Las Matemáticas como Actividad de Resolución de Problemas: *Problema de la limonada*	Una sección de estudiantes del 2do año de la carrera de magisterio (52 estudiantes)

Los resultados del uso de estos trabajos se presentan en el capítulo 6.

3.8.3. Observaciones

Las observaciones que han tenido lugar en el desarrollo de la investigación, tal y como puede deducirse de lo expuesto en el apartado 3.6, fueron realizadas desde dos perspectivas: (a) como observador participante-pasivo y (b) como observador participante-activo.

Para llevar a efecto las observaciones correspondientes se hizo uso de los ―Guiones de observación" (Anexo D). Fueron realizados un total de siete guiones de observación, con los cuales se pretendió recabar la información de interés en el momento en que esta sucede, en el desarrollo de las acciones en el contexto del aula de clase. No obstante, fue necesario complementar las notas iniciales hechas sobre los sucesos en el aula. Esta complementación se logró por medio de grabaciones de audio, las cuales fueron tomadas de la totalidad de los hechos y acciones que tuvieron lugar en el desarrollo de las actividades respectivas.

Las grabaciones de audio permitieron ampliar la información recabada en las notas iniciales de los guiones de observación, de estas fue extraída información que quedó transcrita en tales guiones. Es por ello que en algunos casos hemos podido citar textualmente fragmentos de discurso empleado en el desarrollo de las acciones en el aula de clase.

Asimismo, la información de los guiones constituyó el contexto de interpretación inicial de los datos recabados en los cuestionarios, sirvieron para tener una perspectiva general sobre las respuestas dadas por los sujetos a los ítems de las pruebas. Las relaciones entre los estudios realizados, los instrumentos escritos y las observaciones llevadas a cabo, las presentamos en la Tabla 3.4.

En los Estudios 1 y 2 las observaciones se hicieron desde la perspectiva de un observador participante-pasivo. En este caso, el proceso de investigación ha quedado respaldado por la aplicación de dos instrumentos de evaluación (primer y segundo cuestionario), en las cuales las observaciones dan cuenta de las acciones efectuadas en torno a tales aplicaciones (Anexo D: Guiones de observación, desde Anexo D1: Observación Nº 1, hasta Anexo D3: Observación Nº 3).

Para el primer cuestionario (Estudio 1) la observación se realizó *in situ* y de manera continua en una misma sesión clase en la que se incluyó la aplicación del cuestionario y una discusión sobre las respuestas del mismo. Es claro que la esencia de la información recogida en los guiones de observación se encuentra en las acciones realizadas en torno a esas discusiones (Anexo D1: Observación Nº 1).

Tabla 3.4: Relación entre los estudios realizados, los instrumentos escritos empleados y las observaciones realizadas.

Estudio	Instrumento	Actividad	Observación
Estudio 1 (1 sesión)	Cuestionario 1: Prueba diagnóstico	Aplicación del cuestionario 1 y discusión de las respuestas del cuestionario	Observación Nº 1
Estudio 2 (2 sesiones)	Cuestionario 2: Un ítem en una prueba de control	Aplicación del cuestionario 2	Observación Nº 2
		Discusión de las respuestas del cuestionario 2	Observación Nº 3
Estudio 3a (2 sesiones)	Trabajo práctico Nº 1: problema del yogur	Resolución del problema del yogur y su explicación	Observación Nº 4
		Discusión sobre aplicación de la GROS al problema del yogur	Observación Nº 5
Estudio 3b (2 sesiones)	Trabajo práctico Nº 2: problema de la limonada	Resolución del problema de la limonada y su explicación	Observación Nº 6
		Discusión sobre aplicación de la GROS al problema de la limonada	Observación Nº 7

Para el segundo cuestionario, (Estudio 2) la observación se hizo en dos momentos distintos. En una primera sesión se aplicó el cuestionario o prueba de control (Anexo D2: Observación Nº 2), tal aplicación abarcó prácticamente la totalidad del tiempo pautado para esa sesión. En una segunda sesión fueron discutidas las respuestas de los ítems correspondientes a la prueba de control aplicada (Anexo D3: Observación Nº 3).

La información recabada en los guiones de observación, referida a la aplicación de los trabajos prácticos respectivos (Estudio 3), fue obtenida por medio de la realización de en dos sesiones para la aplicación de cada trabajo práctico. Una primera sesión en la que tuvo lugar la resolución del problema su explicación y la producción de una respuesta compartidas (problema del yogur, Anexo D4: Observación Nº 4; problema de la limonada, Anexo D6: Observación Nº 6). Una segunda sesión en la que se dio la discusión sobre la aplicación de la GROS en torno a la resolución de los problemas del yogur y de la limonada (problema del yogur, Anexo D5: Observación Nº 5; problema de la limonada, Anexo D7: Observación Nº 7).

Es decir, cada trabajo práctico requirió de dos sesiones de clase. La primera sesión se dedicó básicamente a: (a) la resolución del problema y su explicación, de manera individual, y (b) elaboración de una solución compartida por medio de grupos de trabajo. La segunda sesión se dedicó a la puesta en común de la aplicación de la GROS a la solución compartida, realizada por cada grupo constituido.

A modo de síntesis, debemos señalar que el proceso de observación realizado, refrendado por los guiones de observación referidos, se ha nutrido y complementado a través de la conjunción de tres medios diferentes de recogida de información, a saber: (a) guión de observaciones, (b) grabaciones en audio, y (c) resoluciones de los trabajos prácticos respectivos. El uso de estos tres medios de recogida de información ha permitido llevar a efecto un proceso de triangulación de la información, para la producción de los resultados de la investigación que hemos realizado. Sobre ese proceso referiremos en el sub-apartado 3.8.5, del presente capítulo.

3.8.4. Otras fuentes de datos: grabaciones de audio

Con el objeto de dar mayor riqueza a la recogida de datos y proveer de calidad científica al trabajo respectivo, tomamos la decisión de realizar un registro en audio de cada una de las sesiones en las que tuvieron lugar la aplicación de los cuestionarios y los trabajos prácticos. Esto dio como resultado un total de siete grabaciones que fueron realizadas en las sesiones de aplicación de esos instrumentos.

Las partes de interés de estas grabaciones fueron transcritas y parte de ellas fueron empleadas para completar los guiones de observación correspondientes. Debemos señalar que en los guiones de observación hemos recogido la esencia de las transcripciones realizadas.

3.8.5. Sobre la validez y fiabilidad de la investigación

Debemos comenzar diciendo que no ha sido nuestra pretensión hacer un estudio cuya validez se quiera extender más allá de los sujetos que participaron en el mismo, ni más allá del contexto acotado por las condiciones específicas en las que se desarrollaron las acciones respectivas. Aún así, hemos tratado de ser rigurosos; intentando apegarnos en la medida de lo posible a ciertos criterios y estándares propuestos en la comunidad de investigación, con el fin de proporcionar calidad científica a nuestro trabajo. En esta línea de ideas, exponemos a continuación algunas descripciones sobre ese intento, que pretende aproximar este trabajo a los estándares de calidad identificados en la literatura correspondiente.

En la actualidad, aún cuando el debate investigación cuantitativa versus investigación cualitativa ha sido zanjado, en cierta forma, por el auge de las metodologías mixtas, se observa aún una sostenida controversia sobre las condiciones de validez y fiabilidad de la investigación cualitativa (Golafshani, 2003; Salgado Lévano, 2007).

En una de las líneas de este debate se reconoce la falta de criterios y procedimientos, proveídos desde los enfoques interpretacionista y/o crítico, para solventar tal ausencia, puesto que se considera inapropiado utilizar estándares o criterios cuantitativos, como la validez y la fiabilidad, para juzgar la calidad científica de los estudios cualitativos (Stenbacka, 2001). En este orden de ideas, algunos autores han propuesto que más que validez y fiabilidad, lo importante es juzgar la calidad de la investigación. Así, Franklin y Ballau (2005), Guba y Lincoln (1989), Lincoln y Guba (1985), Mertens (2005) reconocen, como criterios para evaluar la calidad científica de un estudio cualitativo, los siguientes: consistencia, credibilidad, auditabilidad o confirmabilidad y aplicabilidad.

De acuerdo con Cohen, Manion y Morrison (2011) estos criterios, tal y como son asumidos por los autores que los promueven, siguen siendo criterios de validez y fiabilidad para los cuales existe una equivalencia con los criterios de validez y fiabilidad de la investigación cuantitativa. En la Fig. 3.5 mostramos esa equivalencia identificada por Cohen y colaboradores.

A continuación exponemos la identificación de estos criterios con las acciones puestas en juego en el desarrollo de nuestro trabajo. Se trata de observar cómo, en cierto grado, hemos tenido como referencia estos criterios para llevar a efecto una investigación que se aproxime a su acatamiento.

En términos de lo expuesto por Franklin y Ballau (2005), en el sentido de que este informe se realiza sobre la base de una primera puesta en juego de este proceso de investigación, asumimos la *consistencia* como el grado de concordancia entre los resultados de nuestro estudio y otros estudios que hayan abordado la misma temática en el ámbito de la formación de profesores. De acuerdo con Hernández, Fernández y Baptista (2006) este grado de concordancia no se expresa por medio de un coeficiente, sólo se verifica en la sistematización de la recolección de los datos y el análisis cualitativo que se realice. En cualquier caso, se interpretan los desacuerdos, no como una falta de consistencia, sino más bien como la cimiente para nuevos estudios.

Criterios de validez en la investigación cuantitativa	**Criterios de validez en la investigación cualitativa**
Objetividad	Confirmabilidad
Validez interna	Credibilidad
Validez externa	Transferibilidad (Aplicabilidad)
Fiabilidad	Dependibilidad (Consistencia)

Fig. 3.5: Equivalencia entre los criterios de validez de los tipos de investigación (Adaptado de Cohen, Manion y Morrison, 2011, p. 182).

De manera que será de permanente observancia la concordancia entre los resultados que se obtengan en esta investigación y los reportados por la literatura especializada, mostrando con detalle, para cada estudio, la sistematización de los datos y el análisis cualitativo que se realice. Otra fuente, que a futuro puede contribuir con la consistencia de esta investigación, será una re-aplicación que se ha planificado para ser realizada en el contexto de formación de profesores en Venezuela.

En relación con la *credibilidad*, las pautas generalmente utilizadas por los evaluadores, presentadas por Salgado Lévano (2007), pueden resumirse en dos ítems principales: (a) la relación investigador → datos/resultados, y (b) los procesos de triangulación. Respecto al primer ítem, hemos asumido conscientemente que en la modalidad de investigación en la que se realiza una intervención y el investigador participa de manera activa, la presencia del investigador pudo influir sobre las propias experiencias de las que se desea informar. Es por ello que hemos realizado un registro de las observaciones de los sucesos que han tenido lugar en las sesiones de interés, apoyadas en las transcripciones de grabaciones de audio, de cada una de esas sesiones. Los registros de esas observaciones se adjuntan en la sección de anexos del trabajo, bajo el título de “Guiones de observación”.

En relación con estas acciones, en las que se trata de producir conclusiones respecto a las actuaciones de los sujetos relativas al aprendizaje de la proporcionalidad, deben ser coincidentes con los resultados que se generen por medio de los análisis de los datos de los instrumentos escritos aplicados. Se produce de este modo un proceso de triangulación de los datos, en el que se deducen los resultados o aserciones a partir de tres fuentes de datos: (a) guión de observaciones, (b) grabaciones en audio, y (c) resoluciones de los trabajos prácticos respectivos. En la Fig. 3.6 ilustramos los elementos del proceso de triangulación.

En este orden de ideas, hemos asumido el proceso de triangulación tal y como es considerado por Creswell y Miller (2000) quienes lo reconocen como —…un procedimiento válido con el cual el investigador busca la convergencia entre múltiples y diferentes fuentes de información para producir resultados en un estudio" (Creswell y Miller, 2000, p. 126). En este sentido, consideramos que la posible convergencia de las tres fuentes de datos utilizadas, en el desarrollo de esta investigación provee de credibilidad a la misma.

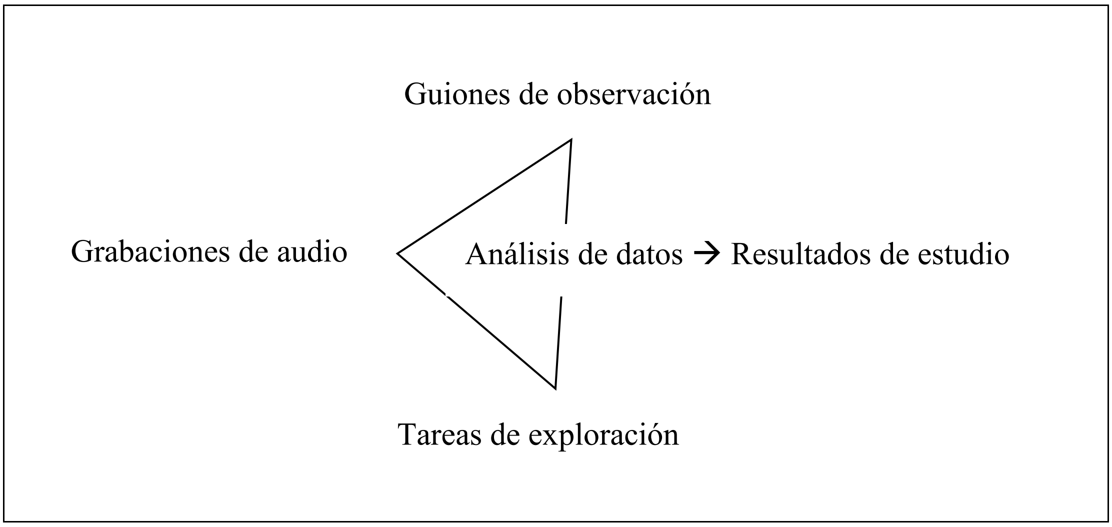


Fig. 3.6: Elementos de la triangulación en la producción de resultados.

Respecto a la condición de auditabilidad o confirmabilidad, hemos incluido en la sección de anexos copia de los ejemplares correspondientes a cada uno de los instrumentos aplicados, y también aquellos a los que se hace una referencia directa y específica en la redacción de este informe, que hayan sido producidos por los informantes.

Aunado a lo anterior, en general, los resultados y hallazgos de los cuales se informa en este trabajo serán respaldados por secciones escaneadas de los documentos originales, de los cuales, a la vez, serán adjuntadas copias en la sección de anexos correspondiente. Si colocamos junto a toda esta información, lo señalado respecto a las grabaciones de audio, las transcripciones realizadas de los procesos de observación, apoyadas en dichas grabaciones, y la descripción detallada de los procesos de análisis de cada estudio, podremos observar que nos encontramos ante un proceso auditable en cuanto a sus componentes principales, los cuales forman la base y sustento de la producción de los resultados. Se trata de exponer públicamente toda la evidencia posible que pueda llevar a una confirmación de los resultados del proceso de investigación desarrollado.

Finalmente, en relación con la *aplicabilidad o transferibilidad*, debemos señalar, en los términos expuestos por Lincoln y Guba (1985; p. 316), que en este informe hemos pretendido proveer de toda la información requerida, realizando una “gruesa descripción”, con el fin de fortalecer la posibilidad de que la misma pueda ser llevada a efecto por otro investigador.

A continuación nos referiremos a la descripción de los aspectos contemplados en el diseño de investigación que forman parte de su desarrollo empírico. Para esta exposición hemos considerado su presentación en dos apartados. El primero sobre el desarrollo del trabajo en relación con los participantes, que lo hemos llamado “relaciones entre los participantes”. El segundo sobre la conducción de la investigación y la recolección simultánea de los datos, que hemos llamado “descripción del desarrollo empírico de la investigación”

3.9. Relaciones entre los participantes

En términos generales, al referir en el desarrollo del trabajo, lo relativo a los participantes, interpretamos como participantes a los personajes principales que actuaron en las actividades desarrolladas en torno al mismo. En este sentido, se debe reconocer a los futuros profesores, estudiantes de la carrera de magisterio, de la Universidad de Granada, de los periodos 2007/2008 y 2008/2009, como los participantes de mayor relevancia. No obstante, este trabajo estuvo a cargo de un grupo de tres investigadores noveles (estudiantes de doctorado de esa universidad), dirigidos por el profesor formador, encargado del dictado de las asignaturas que sirvieron de contexto al desarrollo de la investigación.

En este orden de ideas, reconociendo las particularidades de los intereses personales puestos en juego por los distintos participantes, mostrados en la Fig. 3.7, pretendemos con este trabajo proveer de información relativa a la enseñanza y aprendizaje de la razón y la proporción, en un contexto de formación de futuros profesores, y sobre el posible desarrollo de competencias de análisis didáctico y conocimiento matemático necesario para la enseñanza en los sujetos participantes. Situados en este contexto, nos hemos alentado para que las relaciones entre los diferentes participantes sean de mutua colaboración, pretendiendo como fin último el beneficio de todos.

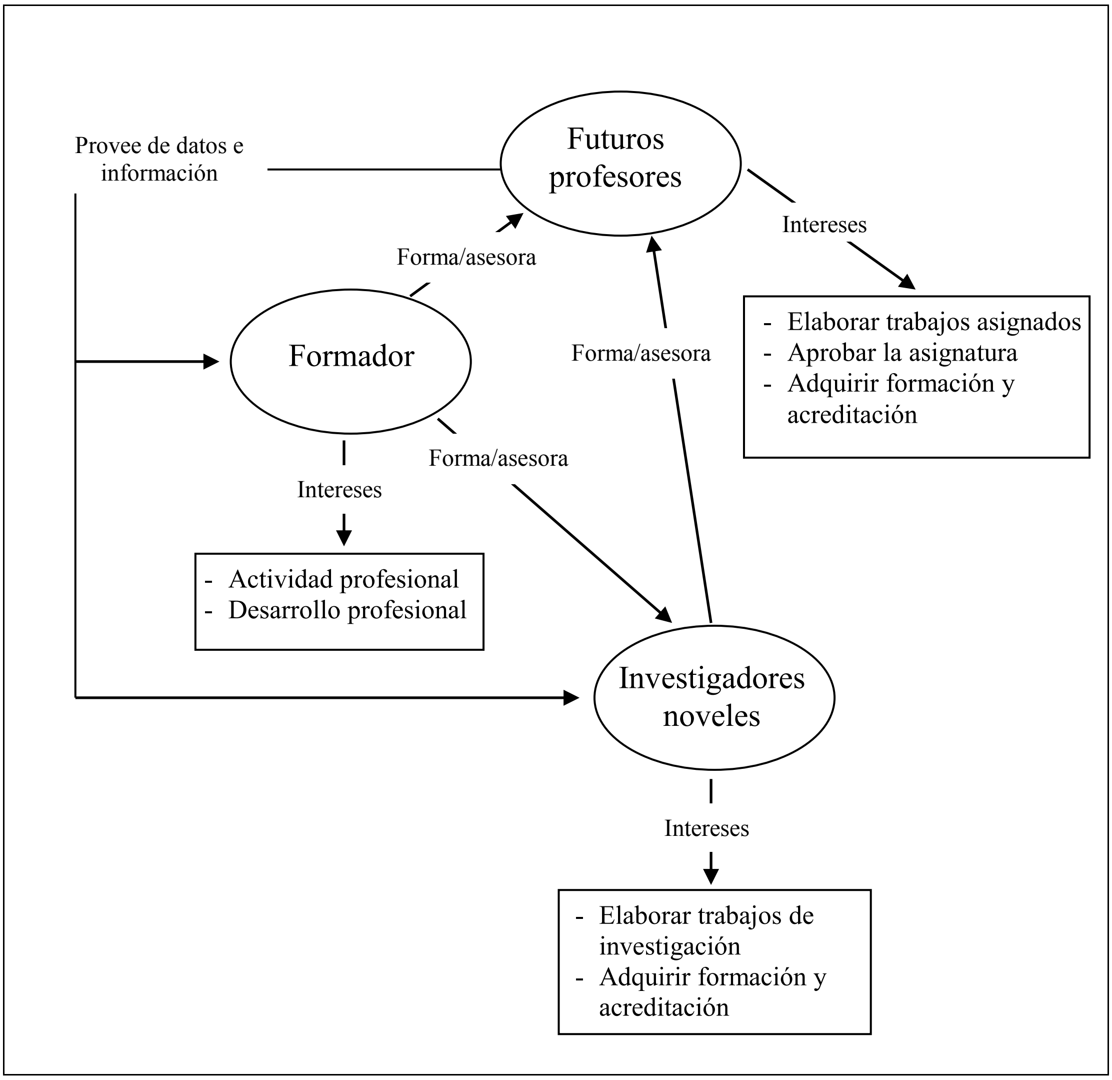


Fig. 3.7: Relaciones e intereses identificados entre los participantes

Ubicados en este terreno de relaciones e intereses de los participantes, hemos podido prever que los Estudios 1 y 2, se inscriben prácticamente, de manera natural, en el desarrollo de las actividades regularmente realizadas en el dictado del curso que sirve de contexto a estos estudios.

Similarmente se percibe lo posiblemente complejo que puede ser incluir una actividad que, aunque guarde relación con los intereses y relaciones identificadas, sea percibida como una exigencia que no forma parte de lo establecido por la ―cotidianidad" en la formación de futuros profesores. Conscientes de esta posible restricción, hemos tratado de inscribir todas las actividades, sobre todo las que comprenden cambios de esa ―cotidianidad", en un marco natural de acciones, fomentando su aceptación por medio de aprovisionarle de un valor en la búsqueda de una formación de calidad.

Es el caso del Estudio 3 en el que nos hemos propuesto desarrollar competencias de análisis didáctico, por medio del uso de la GROS, somos conscientes que el uso de esa herramienta constituye una actividad de índole meta-cognitiva a la cual posiblemente los estudiantes no están habituados, que, además, no se encuentra contemplada como actividad regular del dictado del curso correspondiente. Es por ello que nos apercibimos para hacer su inclusión atendiendo a lo referido en el párrafo anterior.

Reconocidas estas relaciones y considerando cómo hemos concebido, en ese ámbito, la inclusión de las acciones principales de nuestro estudio, pasamos ahora a realizar una descripción general de los procedimientos que han tenido lugar en la conducción de la investigación y la recolección simultánea de los datos, haciendo un énfasis particular a la puesta en juego de la GROS, como herramienta de reflexión epistémica/cognitiva y potenciadora del desarrollo de competencias de análisis didáctico.

3.10. Descripción del desarrollo empírico de la investigación

Hemos expuesto hasta ahora la descripción de los diferentes elementos contextuales y de actividad en torno al desarrollo de la investigación de la cual informamos. No obstante, con el fin de mostrar cómo se condujo la parte empírica de la investigación y la recogida de los datos, realizamos ahora una descripción en la que pretendemos mostrar cómo los diferentes estudios realizados, a los cuales hemos estado refiriendo a lo largo de este capítulo, fueron concibiéndose de manera natural, como procedimientos necesarios que posibilitan obtener respuestas de las preguntas de investigación y corresponden con los objetivos empíricos propuestos. Nuestra intención es mostrar una secuencia de los hechos, con el fin de proveer de una visión global de los acontecimientos, teniendo como elemento vertebrador el uso de la Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados.

Un aspecto central que orienta y determina las acciones realizadas en el contexto de la presente investigación, es el desarrollo de competencias de análisis didáctico, en el ámbito de la formación inicial de profesores de primaria.

En esta línea de pensamiento, una de las primeras acciones que consideramos necesario realizar, consistió en la puesta en juego de una herramienta dirigida a responder a la cuestión ¿qué conocimiento matemático se pone en juego en la resolución de un problema matemático determinado? Consideramos que la realización de un análisis epistémico[35] de una tarea matemática, básicamente, debería responder a tal cuestión. En este orden de ideas, concebimos que la realización de ese análisis, podría consistir en el reconocimiento de los objetos y significados puestos en juego en la resolución de una tarea tal.

En este sentido, hemos reconocido la herramienta denominada ―Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados" (GROS)[36], que se aplica para el análisis epistémico de un problema matemático y su resolución, con el fin de identificar objetos (elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades, argumentos) y sus significados, puestos en juego durante el proceso de resolución, como una vía para aproximarnos a una respuesta a la cuestión planteada.

Ubicados en este contexto general, aunado a dos de nuestros intereses particulares de desarrollo profesional, a saber: (a) nuestro interés por el estudio, que ya veníamos realizando, sobre la problemática de la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad, y (b) desarrollar acciones didáctico-matemáticas novedosas en la formación de futuros profesores, se dio lugar al desarrollo de un primer estudio, con el fin de determinar qué conocimientos ponen en juego futuros profesores, al resolver problemas relativos a la proporcionalidad, al iniciar la carrera de magisterio. A continuación presentamos una descripción del uso de la GROS en este primer estudio.

Para efectos de ese primer estudio se realizaron análisis epistémicos/cognitivos a una pequeña muestra de seis problemas de proporcionalidad directa y simple, propios del tercer ciclo de la escuela primaria. La realización de estos análisis, tenía como contexto instruccional la realización de una exploración inicial del conocimiento del contenido, relativo a proporcionalidad, de un grupo de futuros profesores de primaria, al inicio primer año de la carrera de magisterio de la Universidad de Granada.

Los análisis epistémicos realizados sobre los estos seis problemas, nos brindaron información relevante sobre los diferentes objetos y significados activados durante su

[35] Término con el cual referimos al conocimiento matemático.
[36] En el resto de los capítulos de este trabajo esta herramienta constituye un elemento central.

resolución. Además, condujeron a la identificación de *conflictos potenciales* que podrían manifestarse cuando se realiza la resolución respectiva.

Estas seis situaciones problema fueron utilizadas para la elaboración de primer cuestionario, el cual fue aplicado a una sección de 60 futuros profesores de primaria, estudiantes del primer año de la carrera de magisterio, de la universidad referida.

Además de los análisis epistémicos de los ítems del primer cuestionario, se realizaron *análisis cognitivos*[37] de las respuestas dadas por los futuros profesores de primaria. Los resultados obtenidos por medio de los análisis efectuados y la identificación de aspectos de interés didáctico-matemático los presentamos en el capítulo 4. Asimismo, algunos de estos resultados fueron informados en Rivas, Godino, Castro y Konic (2009); Rivas, Castro y Konic (2009).

Como consecuencia de ese primer estudio, en el contexto caracterizado por los intereses antes mencionados, se dio lugar al segundo estudio, con el cual se perseguía observar el conocimiento que ponen en juego, los futuros profesores, relativos a la proporcionalidad, al concluir el proceso formativo que ha tenido lugar durante el primer cuatrimestre del primer año de la carrera de magisterio. Los resultados de este segundo estudio se presentan en el capítulo 5 y parte de los mismos fueron reportados en Rivas, Castro, Godino y Konic (2009).

En el desarrollo de estos dos estudios, el uso de la GROS, tuvo lugar a nivel del formador, quien en colaboración con un grupo de investigadores noveles, realizaron tareas de reflexión epistémico/cognitivas relativas a la resolución de problemas matemáticos. Hemos referido hasta ahora al uso de la herramienta en problemas de proporcionalidad, sin embargo, estos análisis no se limitaron a considerar solo problemas de proporcionalidad; algunos de los análisis realizados y resultados obtenidos a partir de los mismos, relativos a problemas aritmético-algebraicos pueden verse en Godino et al. (2008a; 2008b; 2008c); Rivas, Godino y Castro (2008).

En general, estos análisis se hicieron con el fin de apoyar la actividad de formación de los futuros profesores, desde la perspectiva del formador, con lo cual pretendíamos

[37] Esta consideración de las tareas de análisis epistémico – análisis cognitivo, como tareas separadas, se hace con el fin de proveer de mayor profundidad a los análisis que se realizan. En general, el uso de la GROS, comprende la realización de una tarea de análisis epistémico/cognitivo.

obtener una primera aproximación a las potencialidades y limitaciones del uso de esa herramienta. Algunos resultados sobre ese uso fueron presentados en Rivas, Castro y Konic (2009); Rivas, Godino y Konic (2009), Rivas y Godino (2010).

Los avances parciales observados en el uso de la herramienta, los resultados iniciales de su puesta en juego, que mostraban cierta potencialidad para observar con algo de detalle y de manera notoria los conocimientos matemáticos subyacentes, activados en un proceso de resolución de problemas matemáticos (Godino et al., 2008a; 2008b; Rivas, Castro y Konic, 2009; Rivas, Godino y Castro, 2008; Rivas, Godino, Castro y Konic, 2009; Rivas, Godino y Konic, 2009), nos alentaron a continuar desarrollando esta herramienta. Un avance interesante, consistió en observar su potencialidad para determinar posibles ―conflictos potenciales” en torno a la resolución de un problema. Otro avance interesante, muy relacionado con el anterior, fue observar la posible relación del uso de esta herramienta y el desarrollo de las categorías del conocimiento matemático necesario para la enseñanza, propuesto por Ball y colaboradores (Godino, 2009; Hill, Ball y Schilling, 2008; Hill et al., 2007).

Como consecuencia de los avances y resultados observados y reportados, nos motivamos a proponer su uso por parte de futuros profesores. Al año siguiente de haber realizado el primer estudio, pusimos en marcha el tercer estudio, con el cual pretendíamos el desarrollo de competencias de análisis didáctico (uso de la GROS) de futuros profesores. Diseñada y planificada la instrumentación requerida se implementó el uso de la GROS por parte de una sección de futuros profesores al inicio del segundo año de la carrera de magisterio.

Inicialmente se realizó una actividad práctica-introductoria (Análisis de los Conocimientos Puestos en Juego en la Solución de un Problema —*Significados de la Suma*— Anexo C1), con la que se pretendió comenzar las actividades de formación de los futuros profesores, incluyendo la realización de tareas de análisis epistémico/cognitivo, en torno a un problema matemático y su resolución. Esta actividad sólo fue concebida como parte de un ―entrenamiento inicial”, necesario para preparar a esa sección de futuros profesores, para enfrentar con mayores posibilidades de éxito el proceso de formación que se había planificado. De esta primera actividad práctica no se tomaron datos para la investigación.

Luego de esta actividad introductoria de preparación, se llevaron a efecto dos actividades prácticas:

(1) Análisis de los Conocimientos Puestos en Juego en la Solución de un Problema — *Problema del yogurt*— Anexo C2, y
(2) Práctica 1: Las Matemáticas como Actividad de Resolución de Problemas — *Problema de la limonada*— Anexo C3.

La puesta en juego de estas dos actividades proveyó de información relativa al uso de la herramienta de análisis epistémico/cognitivo por parte de los futuros profesores. Los resultados correspondientes a estas actividades se informan en el capítulo 6 de este trabajo. Algunos de estos resultados fueron reportados en Rivas y Godino (2010); Rivas, Godino y Castro (2010); Rivas, Godino y Konic (2009).

Uno de los aspectos observados en el uso de la GROS, por parte de los futuros profesores, es la superficialidad de las descripciones realizadas por ellos, al referir a los significados de los objetos identificados en los procesos de resolución de problemas. Este aspecto despertó nuestro interés por realizar un estudio dirigido a poner mayor énfasis en la aplicación de la GROS, que proporcionara la orientación necesaria para que los futuros profesores hicieran un mejor manejo de la misma.

Este interés, aunado a las acotaciones: (a) no era posible seguir realizando esta actividad con la sección completa, puesto que se requería el estudio de otros temas en el dictado de la asignatura, (b) la idea de profundizar en el uso de la GROS por parte de los futuros profesores, requería de un trabajo más concentrado en una temática y con pocos sujetos, y (c) la modalidad de trabajo en grupo para el desarrollo de los temas, la elaboración de los trabajos prácticos y de la unidad didáctica; nos condujeron a la realización de un estudio de casos.

En el cuarto estudio desarrollamos un estudio de casos con un grupo de futuros profesores. Para el cuarto estudio este grupo recibió asesoramiento en sesiones extra-clase para la realización de una actividad práctica (Practica 2: Dificultades y Errores en el Aprendizaje de las Matemáticas (Razones y Proporciones) —Anexo C4—). El grupo fue estimulado/asesorado para hacer uso de la GROS. Algunos de los resultados de ese estudio fueron publicados en Rivas, Godino y Castro (2012), hemos incluido, en el

Anexo L una copia de ese artículo, el cual puede ser recuperado desde: http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/issue/current.

Finalmente, a modo de síntesis y vinculando esta exposición con el resto del trabajo, presentado en los capítulos subsiguientes, consideramos que lo expuesto en esos capítulos pretenden contribuir con la fundamentación empírica del uso de la GROS, para el desarrollo de competencias de análisis didáctico y de las categorías del conocimiento necesario para la enseñanza de la matemática, en el contexto de la formación de profesores.

CAPÍTULO 4

DESARROLLO DE HERRAMIENTAS DE ANÁLISIS EPISTÉMICO/COGNITIVO

4.1. Introducción

En este capítulo presentamos el inicio de los aspectos concernientes a la parte empírica de la investigación, se exponen las características específicas del contexto donde este inicio tiene lugar, se describen los diferentes procedimientos ejecutados, encaminados a obtener información sobre el conocimiento de los futuros profesores de primaria sobre la proporcionalidad. Particularmente, se describen algunas de las acciones que han permitido un estudio inicial de las configuraciones epistémicas y cognitivas referidas a la proporcionalidad en un contexto instruccional.

Para el estudio de las configuraciones epistémicas/cognitivas se ha puesto en práctica la Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados (GROS), la cual consiste en la realización de un análisis a priori de situaciones problemas de proporcionalidad directa y simple, que se han utilizado para valorar los ítems que conforman una prueba, utilizada comúnmente por el formador para diagnosticar el conocimiento de los futuros profesores acerca de la proporcionalidad.

Las configuraciones cognitivas se deducen del análisis realizado a las resoluciones dadas por una muestra de futuros profesores de primaria, a las situaciones problema planteadas en la prueba diagnóstico inicial, sobre sus conocimientos en torno a la proporcionalidad, a la luz de los significados y conflictos identificados por medio de la aplicación de la GROS.

Finalmente, exponemos los resultados obtenidos, a partir de la valoración inicial de los conocimientos sobre magnitudes proporcionales de los futuros profesores de primaria, desde la perspectiva proporcionada por la realización de los análisis epistémico y cognitivo correspondientes.

4.2. Descripción del estudio inicial: contexto y objetivos

Tal como referimos en el apartado 3.7, del capítulo anterior, este primer estudio tiene lugar con un grupo de 60 estudiantes del curso Matemática y su Didáctica del primer año de la carrera de magisterio, en el periodo 2007-2008, de la Facultad de Ciencias de la Educación, de la Universidad de Granada.

En general, los sujetos carecen de experiencia docente y sus estudios previos sobre proporcionalidad, se circunscriben a los cursos de la educación secundaria obligatoria y bachillerato. La condición que caracteriza a los sujetos de investigación obedece al criterio estar inscrito y asistir a las clases del curso referido.

Este primer estudio consiste en una exploración de los conocimientos de los futuros profesores de primaria, sobre la proporcionalidad directa y simple, en el contexto antes descrito. Se trata de una exploración inicial-diagnóstico de tales conocimientos, inscrita en el desarrollo de un proceso de estudio denominado ciclo formativo, referido en el apartado 3.5, del capítulo anterior.

En lo que respecta a los objetivos de este primer estudio, nos planteamos lograr los objetivos empíricos **OE1** y **OE2** propuestos en el sub-apartado 3.4.2.2 del capítulo 3. Una reformulación de dichos objetivos, en términos de las acciones a ser desarrolladas en este primer estudio nos conduce a:

- Realizar un diagnóstico de los conocimientos iniciales de los futuros profesores sobre la proporcionalidad, utilizando un cuestionario, el cual forma parte del diseño instruccional del curso en estudio, elaborado para tal fin.
- Realizar un estudio epistémico/cognitivo de los ítems de dicho cuestionario, por medio de la puesta en juego de una herramienta de análisis, previo a su aplicación, con la finalidad de indagar sobre su potencialidad para explorar los conocimientos de los futuros profesores, respecto a la proporcionalidad, y prever posible conflictos potenciales.
- Realizar un estudio cognitivo de las respuestas dadas a los ítems del cuestionario para caracterizar el conocimiento inicial de los futuros profesores sobre la

proporcionalidad, así como también, valorar los alcances del estudio epistémico/cognitivo, realizado previamente a su aplicación.

- Realizar una valoración inicial de la puesta en juego de una herramienta de análisis epistémico y cognitivo, en la exploración inicial del conocimiento sobre proporcionalidad de futuros profesores, en términos de la producción del conocimiento necesario para la enseñanza de la matemática.

Se debe observar que los objetivos que se persiguen, tal y como fueron formulados originalmente, tienen un doble propósito; por un lado se busca realizar un diagnóstico sobre el conocimiento relativo a la proporcionalidad de los futuros profesores, y, por otro lado, se trata de instrumentar y valorar la instrumentación de una herramienta de análisis epistémico y cognitivo, dirigida a generar un proceso de estudio y reflexión sobre la propia práctica de enseñanza, involucrada en el proceso de aplicación del cuestionario de exploración respectivo.

En este orden de ideas presentamos a continuación una descripción de la herramienta de análisis epistémico/cognitivo[38] de la cual hacemos uso en este capítulo y en los subsiguientes.

4.3. Elaboración y aplicación de la GROS

Para llevar a efecto el estudio exploratorio sobre los conocimientos iniciales de los futuros profesores, acerca de la proporcionalidad, nos abocamos a desarrollar un proceso que se inició considerando la posibilidad de usar una herramienta de análisis epistémico/cognitivo, que nos ayudará a valorar algunas tareas relativas a la proporcionalidad y su enseñanza-aprendizaje, presentes en un cuestionario diagnóstico, comúnmente utilizado por el profesor formador para explorar los conocimientos previos sobre proporcionalidad, de los futuros profesores de educación primaria.

Experiencias previas, desarrolladas en el contexto de la formación inicial de profesores de primaria, teniendo como marco de referencia y reflexión el Enfoque Ontosemiótico, han permitido ir avanzando en el estudio de configuraciones epistémicas/cognitivas de tareas matemáticas (Castro y Godino, 2009; Godino et al., 2008a; 2008b; 2008c; Rivas,

[38] Herramienta que incluye, además del estudio de los objetos y significados puestos en juego en la resolución de un problema matemático, la identificación de conflictos potenciales de significados asociados al proceso de enseñanza y aprendizaje del conocimiento matemático al que refiere el problema.

Godino y Castro, 2008). En este avance hemos venido obteniendo información pertinente sobre el conocimiento puesto en juego en la resolución de problemas matemáticos del ámbito escolar.

En este orden de acontecimientos, se ha dado espacio al uso de una herramienta de análisis epistémico, denominada “Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados” (GROS).

Esta guía se aplica al análisis de un problema y su resolución. Una de sus primeras aplicaciones tuvo lugar por medio del estudio de las “configuraciones de objetos primarios” (Rivas, Godino y Castro, 2008; p. 167), lo cual incluía: (a) la identificación de objetos (lenguajes, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos) previos y emergentes, involucrados en un problema y su resolución, y (b) los significados de uso o de referencia, de las diferentes manifestaciones de esos tipos de objetos. En la Fig. 4.1 mostramos uno de los primeros usos de esta herramienta, solo presentamos, a modo de ejemplo, los elementos lingüísticos identificados en el análisis de la resolución de un problema aritmético-algebraico, tomado de Rivas, Godino y Castro (2008).

En otra versión, en la que se buscaba mostrar de manera más resumida y directa la relación entre objetos identificados y los significados con los que tales objetos eran utilizados en la comprensión de un problema y su resolución, se optó por elaborar una tabla de dos columnas, la primera columna corresponde a los objetos y la segunda a los significados asignados a los mismos, en un formato similar a una tabla de valores (objetos-significados). Las filas de la tabla contienen la variedad de cada objeto, en la que se distingue entre objetos previos y emergentes (Godino et al., 2008b). En la Fig. 4.2 mostramos un ejemplo del formato utilizado, referido al objeto elementos lingüísticos, del análisis realizado a un problema aritmético-algebraico y su resolución. La ilustración que se presenta ha sido tomada de Godino et al. (2008b). La presentación de esta figura tiene carácter únicamente ilustrativo.

En versiones posteriores, se continuó con el mismo formato de una tabla de valores, utilizando una tabla diferente para cada tipo de objeto (términos o elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos), sin distinción entre objetos previos y emergentes, acompañando a cada tabla la identificación de “conflictos potenciales” que pueden manifestarse en el proceso de comprensión y resolución del problema correspondiente. De manera que se identifican, por ejemplo, para el objeto elementos lingüísticos, la variedad de este tipo de objeto presente en el problema y su resolución, los significados asignados a esa variedad y los conflictos potenciales asociados. De igual modo para los demás tipos de objetos. En la Fig. 4.3, tratamos de ilustrar el nuevo el formato utilizado, mostrando nuevamente lo concerniente al objeto elementos lingüísticos.

4.2. Configuración de objetos primarios

Lenguajes

Previos:

- términos y expresiones de la lengua natural:
- producto de los números;
- mayor posible; se hace referencia a que se puede formar un conjunto de configuraciones combinatorias para formar los factores, cada una de las cuales da un producto diferente.
- expresión gráfica de la multiplicación con los factores dispuestos en columna, e indicando las variables de los distintos dígitos de manera icónica (casillas vacías en las cuales se deben escribir los valores particulares)
- la expresión “números naturales cualesquiera de una cifra”, que se indican mediante símbolos alfabéticos (a, b, c, d, e)

Emergentes:

- Escritura de la configuración de números que da como producto el valor máximo.
- Expresión de la argumentación que justifica que el producto de la configuración elegida es máximo. Puede ser la escritura sistemática de todas las configuraciones posibles, o una argumentación en lenguaje natural basada en la propiedad de “mayor factor, mayor producto”.

Fig. 4.1: Un ejemplo de una primera versión de la GROS: configuración del elemento primario “lenguajes”.

Este último aspecto, en el que se identifican posibles conflictos, que pueden manifestarse en la comprensión y resolución del problema, los cuales se deducen a partir de la identificación de cada objeto y significado puesto en juego, nos ha aproximado a reconocer, de manera previa, algunos de los errores y dificultades que pueden manifestarse en el proceso de resolución del problema respectivo.

Otros formatos han sido empleados, como el presentado en Rivas Godino y Konic (2009); Rivas y Godino (2010), en el cual se emplea una única tabla para todo el análisis, incluyendo todos los objetos, los significados respectivos y los conflictos potenciales correspondientes.

3.1. Linguistic terms

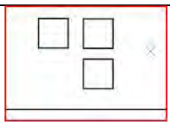
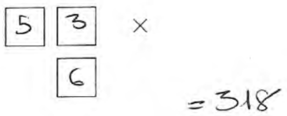
OBJECTS:	***MEANINGS:***
Previous:	
―Choose three out of the numbers…”	Choosing a sample made of three digits out of five, use two of them as multiplicand and the other as multiplier.
product of numbers;	Result of the operation ―multiply”.
biggest possible	Greatest of the set of products obtained by arranging all the possible selection made of three numbers.
	Indicate the variables of the different digits that should comprise the multiplicand, the multiplier, the operation (x) and the place where the product must be written.
alphabetical symbols (a, b, c, d, e)	―any natural numbers”.
Emergent:	
	Selection of numbers that yields the biggest number.
Systematic writing of every possible selection, or one expression in natural language based on the property ―the bigger the factor, the bigger the product”	Argument that states that the product of the chosen selection is the biggest.

Fig. 4.2: Formato ―objeto-significado” de la GROS: objeto ―términos lingüísticos”

En otro trabajo, Konic, Godino y Rivas (2010), se pone en juego la herramienta para realizar el análisis de una lección de un libro de texto, en la cual se usa una versión en la que no aparece el término ―objeto”, ni el término ―conflictos potenciales”. En lugar del término objeto, se coloca el objeto como tal, llámese elemento lingüístico, concepto,… En lugar de presentar el término ―conflictos potenciales” y una lista de los mismos, se presenta un texto, a modo de comentario, en el cual se expone la posible manifestación de conflictos de significado, relativos al objeto que se analiza. Asimismo, tendremos ocasión de observar, en el caso del uso que hacen algunos de los futuros profesores, que forman parte de la muestra de estudios posteriores (Capítulo 6 de este informe), una cierta variedad que guarda relación con varias de las versiones aquí presentadas.

En cada informe se ha optado por utilizar el formato más apropiado al desarrollo del trabajo del que se trate. Para efectos del presente informe hemos optado por un formato similar al presentado en la Fig. 4.3.

Elementos lingüísticos

OBJETOS	SIGNIFICADOS
…consume 8,4 litros de gasolina cada 100 Km.	Razón (tasa), entre magnitudes proporcionales de distancia por volumen, que mide un consumo
¿Cuántos kilómetros puede recorrer con 25,2 litros?	Elemento extensivo de una razón intensiva que forma una proporción con la primera razón dada
x	Representa el valor faltante
8,4 L $\longrightarrow$ 100 Km. 25, 2 L $\longrightarrow$ x Km.	Representaciones derivadas de la aplicación de la regla de tres

Conflictos potenciales:

(a) No reconocer-denotar la incógnita x.

Fig. 4.3: Formato “objetos-significados, conflictos potenciales” de la GROS: objeto “elementos lingüísticos”

Ahora bien, independientemente de cuál sea el formato, la realización del análisis epistémico de un problema matemático y su resolución, en el ámbito instruccional, consiste en responder a las cuestiones que presentamos a continuación.

Una primera cuestión es: ¿Qué objetos matemáticos se ponen en juego en la resolución de un problema? Desde el EOS se tiene una primera respuesta a esta cuestión. En este sentido, tales objetos son: elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades, argumentos y procesos. Para efectos de los análisis que realizamos y presentamos en este trabajo, sólo consideremos los primeros cinco tipos de objetos. En todo caso, cada análisis que se realiza, se lleva a efecto sobre un proceso de resolución y la tarea en sí implica el discernimiento de significados, es decir, involucra la puesta en juego de un proceso de significación.

Respondida esta primera cuestión, la respuesta dada, nos lleva a otras cuestiones más específicas; en las que nos preguntamos por los significados de uso o de referencia de cada uno de estos objetos. Es decir; debemos responder a las preguntas:

- ¿Qué elementos lingüísticos y con cuáles significados se ponen en juego esos elementos en la resolución del problema?
- ¿Qué conceptos matemáticos y con cuáles significados se ponen en juego esos conceptos en la resolución del problema?
- ¿Qué procedimientos y con cuáles significados se ponen en juego esos procedimientos en la resolución del problema?
- ¿Qué propiedades y con cuáles significados ponen se en juego esas propiedades en la resolución del problema?
- ¿Qué argumentos y con cuáles significados se ponen en juego esos argumentos en la resolución del problema?

Además, al responder a cada una de estas cuestiones, la identificación de estos objetos y significados, provee, de acuerdo con nuestra experiencia, de un estado de reflexión favorable para prever posibles conflictos de significado que pueden hacerse presentes en el proceso de resolución. Por lo que, paralelamente a la respuesta de cada una de las preguntas anteriores, se debe responder a la cuestión ¿Qué posibles conflictos se pueden presentar, para cada uno de estos objetos, durante la resolución del problema? Si, nuestra experiencia no nos engaña, consideramos que el uso de la GROS coloca en un estado que favorece la identificación de esos potenciales conflictos, por lo tanto creemos que es posible fomentar el desarrollo del *conocimiento del contenido y de los estudiantes* (KCS), en los términos propuestos por Ball y colaboradores (Hill, Ball y Schilling, 2008), con tal uso.

Llegados a este punto, si la posibilidad de fomentar el desarrollo del *conocimiento del contenido y de los estudiantes* no se considera suficiente, podría ser necesario responder a una cuestión que tiene que ver con la utilidad de la aplicación de esta herramienta. Para responder a esta cuestión nos situaremos en dos perspectivas diferentes pero muy relacionadas. Una primera perspectiva, consiste en observar la utilidad de la GROS para la investigación. Consideramos que cada análisis constituye un descubrimiento de elementos de interés en la resolución de un problema. Son elementos que se encuentran de forma subyacente en el proceso de resolución, ponerlos en evidencia constituye una labor de desvelamiento, de hacerse consciente que esos elementos están allí y que juegan un papel. Además, estamos convencidos, que hacerse consciente de la existencia de tales elementos coloca, a quien los desvela, en una posición epistemológica de mayor conocimiento matemático y didáctico, relativo al problema y la resolución que se analice.

Una segunda perspectiva, muy relacionada y justificada con lo dicho al final del párrafo anterior, es su posible uso como herramienta de preparación de futuros profesores. En este sentido, se debe señalar dos posibles usos. Uno por parte del profesor formador, para planificar y desarrollar su labor de enseñanza, de lo cual se informa en el presente capítulo. El otro uso, por parte de los futuros profesores, para que ellos realicen análisis de los problemas y sus resoluciones, profundizando su conocimiento sobre la matemática puesta en juego en tal proceso y, al hacerse consciente de la red de significados implicados en tal proceso, adquirir mayor potencial para desarrollar la labor de enseñanza. Consideramos, tal y como lo señalamos en el Capítulo 2 de este trabajo, que la tarea de análisis que se realiza al aplicar la GROS, potencia el desarrollo del conocimiento profundo de la matemática elemental, en los términos propuestos por Ma (1999).

Además de la potencialidad hipotética señalada de esta herramienta, encontramos interesante la posibilidad de desarrollar una predicción de las categorías de las respuestas analizadas del problema, puesto que, de acuerdo con Inoue y Buczynski (2011), quienes señalan:

> … este estudio recomienda que el profesor formador enfatice la preparación de los nuevos profesores en las áreas de a) anticipar posibles de las diversas respuestas de los alumnos, b) dar pedagógicamente explicaciones significativas que conecten el contenido matemático con el pensamiento de los alumnos, y c) realizar de manera profunda reflexiones estructuradas de la actuación del profesor en correspondencia con el pensamiento de los alumnos. (p. 10).

consideramos que la realización de tal predicción potencia la preparación de los futuros profesores en las áreas referidas por estas investigadoras.

Finalmente, es posible que la tarea demandada por la aplicación de esta herramienta, sea considerada como algo exagerada, para ser aplicada y puesta en juego por futuros docentes durante el proceso de su formación inicial. No obstante, consideramos que responder a las preguntas sobre los elementos primarios (elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos), puestos en juego en la resolución de problemas, provee de mayor información sobre la comprensión de las nociones matemáticas involucradas en tal resolución.

Al respecto, la NCTM (2000) sostiene que para la confirmación de la comprensión de las nociones matemáticas por parte de los alumnos: ―Los profesores deberían solicitar a los alumnos reflexionar, explicar y justificar las respuestas dadas a los problemas…" (p. 121). De manera que, haciendo una sensata extrapolación de esta recomendación, la aplicación de la GROS, a nivel de profesores en formación inicial, donde ellos son los alumnos, encaminada a proveer de reflexión, explicación y justificación de los procesos de resolución de un problema, queda plenamente justificada. Además, como trataremos de mostrar a lo largo de este trabajo, los resultados que se obtienen a partir de su aplicación, nos motivan a fomentar y recomendar su uso en dicho ámbito.

4.4. Contexto y descripción del cuestionario inicial

En este primer estudio, de carácter eminentemente exploratorio, se presentan los resultados de una revisión de doble propósito, por un lado se explora el conocimiento que tiene un grupo de futuros profesores, que inician la carrera de magisterio, sobre la proporcionalidad, por medio de la aplicación de un cuestionario. Por otra parte se trata de realizar un análisis epistémico/cognitivo de ese cuestionario y de las respuestas dadas al mismo, por ese grupo de profesores.

El cuestionario que se aplica consiste en una prueba, comúnmente utilizada por el profesor formador, para diagnosticar los conocimientos previos que tienen los futuros profesores sobre la proporcionalidad.

Con la idea de realizar una primera aproximación natural a cómo se desarrolla el *ciclo formativo*, en torno a la proporcionalidad, del curso en estudio, tomamos la decisión de asumir esta prueba, sin mayores cambios, como instrumento para la exploración.

De acuerdo con el profesor formador, el cuestionario está elaborado para diagnosticar lo siguiente:

(a) resolución de problemas de valor faltante proporcionales,

(b) uso de tablas y representaciones gráficas en torno a la proporcionalidad,

(c) situaciones problema proporcionales y no proporcionales, y

(d) conocimiento didáctico inicial en torno a la proporcionalidad.

En este sentido, el cuestionario está constituido por cuatro ítems, cada ítem está dirigido a evaluar los cuatro tópicos anteriormente señalados, respectivamente. Es decir, es un ítem por cada tópico. En la Fig. 4.4 presentamos un ejemplar del cuestionario.

Un análisis detallado de cada ítem de este cuestionario se presenta a continuación.

4.5. Estudio de las configuraciones epistémicas

Con el fin de describir y analizar los conocimientos matemáticos involucrados en las tareas que forman parte del cuestionario utilizado, se estudiaron las configuraciones epistémicas/cognitivas de esas tareas. El estudio de las configuraciones epistémicas consiste en llevar a efecto, por parte del investigador y/o el formador, un análisis previo en el que se identifican objetos y significados puestos en juego en las resoluciones de las tareas, elaboradas desde la perspectiva de un experto. Es decir, aplicar la GROS a cada una de las tareas que forman parte del instrumento en cuestión. La aplicación de la GROS permite la determinación anticipada de conflictos potenciales, la valoración matemática de las tareas y una aproximación a la validez de contenido de los ítems respectivos. La determinación anticipada de conflictos potenciales nos aproxima a una tarea de índole cognitiva, es por ello que el uso de la GROS se considera una tarea que nos proporciona información relativa a las configuraciones epistémicas/cognitivas involucradas en la comprensión y resolución de un problema matemático[39].

Seguido del análisis epistémico respectivo, se procedió a la aplicación del instrumento. Luego se estudiaron las respuestas a los ítems a la luz de los resultados del análisis previo. El cuestionario referido se presenta en formato a página completa en el Anexo A.

[39] Similarmente sucede con el análisis de las respuestas de los alumnos, se estudian las configuraciones epistémicas/cognitivas. No obstante, de acuerdo con el énfasis puesto en cada análisis (GROS→experto→epistémico, respuesta de alumnos→cognitivo) hacemos uso de los términos ―análisis epistémico”, ―análisis cognitivo”, respectivamente.

4.5.1. Análisis de objetos y significados del cuestionario inicial

A continuación se presentan algunos de los tipos de objetos y significados, puestos en juego, en la solución de los ítems del cuestionario inicial. El proceso que se describe resulta de la aplicación de la GROS, a cada uno de los ítems que conforman el instrumento de exploración inicial.

Cuestionario de exploración inicial

MATEMÁTICA Y SU DIDÁCTICA

NOMBRE:

1) Un coche consume 8,4 litros de gasolina cada 100 km. ¿Cuántos kilómetros puede recorrer con 25,2 litros?

2) ¿Cuáles de las siguientes tablas expresan magnitudes proporcionales? (Los números expresan las medidas de las cantidades correspondientes)

A	1	2	3	4	5
B	7	14	21	28	35

L	4	8	12	16	20
S	36	72	108	144	180

T	1	2	3	4	5
E	100	200	300	400	500

Comprueba tus respuestas, representando gráficamente cada tabla en diagramas cartesianos.

3) De los siguientes pares de magnitudes, ¿cuáles son directamente proporcionales?

a) Lado del cuadrado y su superficie

b) Lado del cuadrado y su perimetro

c) Edad y altura de las personas

Justifica tu respuesta usando una tabla para cada uno

4) Explica con tus propias palabras cuándo dos magnitudes son directamente proporcionales. Pon un ejemplo, construye su tabla y represéntala gráficamente.

Fig. 4.4: Cuestionario de exploración inicial

Los objetos identificados se agrupan en las siguientes categorías: elementos lingüísticos (términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas), conceptos/definiciones (entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal), procedimientos (técnicas, operaciones, algoritmos), propiedades/proposiciones (enunciados para los cuales se requiere una justificación o prueba) y argumentos (justificaciones o pruebas de las propiedades/proposiciones utilizadas).

En cuanto a los significados matemáticos implicados se identifican explicitando a qué se refieren los objetos o qué papel desempeñan (funciones semióticas) tanto en el enunciado del problema, como en su resolución. Así mismo, se formulan hipótesis sobre conflictos semióticos potenciales al comparar los significados institucionales pretendidos con los significados personales posibles.

4.5.1.1. Análisis de objetos y significados del ítem 1

El ítem 1 es un problema de proporcionalidad directa y simple conocido como problema de valor faltante, uno de los más ampliamente utilizados en la actividad escolar. Es del tipo “One-by-One (1x1) Category” (Harel y Behr, 1989; p. 83), cuyas unidades de medida, aunque diferentes, se encuentran en un mismo espacio de medida, y su índice de dificultad 4, corresponde con la estructura “P(R, i_b, N)” (Harel y Behr, 1989, p. 108). En la Fig. 4.5 se presenta el enunciado de este ítem.

> Un auto consume 8,4 litros de gasolina cada 100 Km. ¿Cuántos kilómetros puede recorrer con 25,2 litros?

Fig. 4.5: Ítem 1 del cuestionario inicial

Se han dado tres formas de solución a este ítem: (a) utilizando una tabla de magnitudes proporcionales (reduciendo a la unidad), (b) haciendo uso de una regla de tres, y (c) estableciendo la ecuación de la proporción entre las razones y uso del producto cruzado para resolver.

Es claro que estas no son la totalidad de posibles soluciones, en el apartado 1.7 del capítulo 1 hemos referido a un conjunto más amplio de soluciones para este tipo de problemas, comúnmente presentes en la literatura, que frecuentemente son utilizadas por alumnos al resolver problemas de este tipo. Nos hemos limitado a estos tres tipos de solución, por ser las más comúnmente observadas en las resoluciones dadas por futuros maestros, en el contexto donde esta investigación tiene lugar. Además, esta exploración comprende el análisis a posteriori de las respuestas que proveerán los futuros profesores, con lo cual se podrá complementar los tipos de respuestas con las que sean exhibidas por los sujetos de la muestra en estudio.

Soluciones del ítem 1:

a) *Solución utilizando tablas de magnitudes proporcionales*: el procedimiento consiste en construir la tabla

Gasolina (L)	8,4		
Distancia (Km.)	100		

Luego de colocar en la tabla las cantidades iniciales dadas, donde corresponde, se debe obtener la distancia que se puede recorrer con un litro de gasolina (reducción a la unidad), para ello se divide ambos cantidades por el número de litros de gasolina dados, es decir por 8,4. Finalmente, los números obtenidos a partir del procedimiento anterior se multiplican por la cantidad de litros con que se cuenta, es decir 25,2.

÷ 8,4 × 25,2

Gasolina (L)	8,4	1	25,2
Distancia (Km.)	100	100/8,4	300

÷ 8,4 × 25,2

Así, se recorren 300 Km. con 25,2 L de gasolina.

b) *Solución utilizando regla de tres*: Si con 8,4 litros de gasolina recorro100 Km. con 25,2 litros recorreré *x*, con lo cual:

$$\begin{array}{rcl} 8,4 \text{ L} & \longrightarrow & 100 \text{ Km.} \\ 25,2 \text{ L} & \longrightarrow & x \end{array}$$

$x = \dfrac{25,2\ L \ \times 100\, Km}{8,4\, L}$ = 300 Km.; Así, se recorren 300 Km. con 25,2 L de gasolina.

c) *Solución utilizando una ecuación de proporción y los productos cruzados*: Si con 8,4 litros de gasolina se recorren 100 Km. esto refiere a una razón de consumo por distancia de 8,4 L-por-100 Km. Para saber cuánto puedo recorrer con 25,2 litros, la razón de consumo por distancia será 25,2 L-por-*x* Km. Así tendremos que 8,4 L. es a 100 Km. como 25,2 L es a *x* Km., es decir:

$$\frac{8{,}4\ L}{100\ Km} = \frac{25{,}2\ L}{x\ Km} \Rightarrow \quad 8{,}4\ \text{Km} \times x\ \text{Km} = 25{,}2\ \text{L} \times 100\ \text{Km}$$

$\Rightarrow x = \dfrac{25{,}2\ \times 100}{8{,}4}$ Km = 300 Km. ; Así, se recorren 300 Km. con 25,2 L de gasolina.

Una vez resuelto el problema se procede a realizar el análisis de los objetos y significados puestos en juego utilizando la GROS, lo cual sigue a continuación.

Elementos lingüísticos (Términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas)

<table>
<tr><th>OBJETOS</th><th>SIGNIFICADOS</th></tr>
<tr><td>…8,4 litros, …25,2 litros</td><td>Medidas de cantidades de magnitudes de volumen, cantidades extensivas.</td></tr>
<tr><td>…100 km.</td><td>Medidas de cantidades de magnitudes de distancia, cantidades extensivas.</td></tr>
<tr><td>…consume 8,4 litros de gasolina cada 100 km.</td><td>Razón (tasa), entre magnitudes proporcionales de distancia por volumen, que mide una relación consumo/recorrido. Cantidades intensivas</td></tr>
<tr><td>¿Cuántos kilómetros puede recorrer con 25,2 litros?</td><td>Elemento extensivo de una razón intensiva que forma una proporción con la primera razón dada</td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><td></td><td colspan="2">÷ 8,4</td><td colspan="2">× 25,2</td></tr>
<tr><td>Gasolina (L)</td><td>8,4</td><td>1</td><td>25,5</td></tr>
<tr><td>Distancia (Km.)</td><td>100</td><td>100/8,4</td><td>300</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">÷ 8,4</td><td colspan="2">× 25,2</td></tr>
</table>
</td><td>Representación tabular de magnitudes directamente proporcionales</td></tr>
<tr><td>x</td><td>Representa el valor faltante</td></tr>
<tr><td>8,4 L $\longrightarrow$ 100 Km.
25, 2 L $\longrightarrow$ x</td><td>Simbolización de la expresión verbal de la regla de tres</td></tr>
<tr><td>$x = \dfrac{25{,}2\ L\ \times 100\ Km}{8{,}4\,L}$ = 300 Km.</td><td>Procedimientos de resolución implicados por el uso de la regla de tres</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{8{,}4\ L}{100\ Km}$; $\dfrac{25{,}2\ L}{x\ Km}$</td><td>Razones de volúmenes por distancias en la relación consumo/recorrido</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{8{,}4\ L}{100\ Km} = \dfrac{25{,}2\ L}{x\ Km}$</td><td>Proporción como igualdad entre razones</td></tr>
<tr><td>… $x = \dfrac{25{,}2\ \times 100}{8{,}4}$ Km = 300 Km.</td><td>Procedimientos de resolución implicados por el uso de la proporción</td></tr>
</table>

Conflictos potenciales:

- Uso de notaciones de cantidades extensivas de magnitudes (Km., L.).

- Uso de notaciones de la razón entre magnitudes proporcionales (L/Km.; L-por-Km.; L×Km.). Cantidades intensivas.
- Uso de una tabla de proporcionalidad.
- Denotar la incógnita de una ecuación.
- Plantear la ecuación.
- Razón como fracción entre dos cantidades de magnitud siendo algunos de sus valores numéricos no enteros.
- Simbolización implicada en los procesos de resolución.

Conceptos/definiciones definiciones (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
Magnitudes directamente proporcionales	Dos magnitudes son directamente proporcionales si al variar una el doble, el triple, la mitad, … la otra también varía el doble, el triple, la mitad, …
Razón intensiva (tasa)	Relación entre magnitudes proporcionales pertenecientes a diferentes sistemas de medidas (L/Km. o Km./L)
Regla de tres	Modelización de una situación de proporcionalidad haciendo uso de un algoritmo
Incógnita x	Valor desconocido que debe ser encontrado a partir de la resolución de una ecuación
Igualdad	Relación entre expresiones
Proporción	Igualdad entre dos razones
Ecuación (de proporcionalidad)	Modelización de una situación de proporcionalidad haciendo uso de la definición misma de proporcionalidad

Conflictos potenciales:

- Reconocer las magnitudes dadas como magnitudes proporcionales.
- Uso del concepto razón intensiva (tasa).
- Uso del concepto de proporción.
- Quitar a x su valor de incógnita.
- Usar la igualdad como símbolo que indica un resultado.

Procedimientos (Técnicas, operaciones, algoritmos)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
Multiplicación	Suma reiterada del mismo número, que permite calcular el número de kilómetros recorridos con 25,2 litros de gasolina.
División	Reparto en partes iguales, que permite calcular el número de kilómetros recorridos con 1 litro de gasolina.
Tabla	Distribución de las cantidades de magnitudes que permite ubicar la solución en correspondencia con las ubicaciones de las demás cantidades de magnitud.

Procedimientos… (*continuación*)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
Regla de tres	Procedimiento numérico-algebraico que permite resolver un problema de valor faltante (de proporcionalidad o lineal).
Modelización verbal-simbólica	Transforma una expresión verbal en una representación simbólica: $\begin{array}{lcl} 8{,}4\text{ L} & \longrightarrow & 100\text{ Km.} \\ 25{,}2\text{ L} & \longrightarrow & x \end{array}$
Modelización simbólica-simbólica	Permite calcular el valor faltante utilizando procedimientos de resolución de ecuaciones. $x = \dfrac{25{,}2\,L \times 100\,Km}{8.4\,L}$ = 300 Km. …
Ecuación de proporcionalidad	Permite resolver un problema de valor faltante haciendo uso de una modelización, que proviene de la definición misma de proporcionalidad, como igualdad entre dos razones.
Producto cruzado	Permite calcular el valor faltante utilizando procedimientos de resolución de ecuaciones.

Conflictos potenciales:

- Uso inconsciente-mecánico de la tabla de magnitudes directamente proporcionales.
- Uso inconsciente-mecánico de la regla de tres, evitando el razonamiento proporcional (Lamon, 2007).
- Uso inconsciente-mecánico del producto cruzado, evitando el razonamiento proporcional (Lesh, Post y Behr, 1988).
- Formulación de la ecuación de proporcionalidad.
- Procedimientos requeridos para resolver una ecuación.
- Modelización de una expresión verbal de la forma: ―Si con 8,4 litros de gasolina recorro100 Km. con 25,2 litros recorreré x", o ―8,4 litros de gasolina es a 100 Km. como 25,2 litros es a x".
- Modelización de una expresión simbólica en otra, también simbólica, que permite operar y obtener un resultado que representa la solución del problema.

Propiedades (Enunciados para los cuales se requiere una justificación o prueba)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
P1: Para el doble (el triple, la mitad,…) de gasolina se recorrerá el doble (el triple, la mitad, …) del recorrido.	Permite establecer la proporción en las razones de volumen-por-distancia.
P2: Se recorren 300 Km. con 25,2 L de gasolina	Solución del problema que indica la relación final recorrido/consumo medido en cantidades extensivas de distancia y volumen

Conflictos potenciales:

- Uso de la propiedad P1.
- Construir la propiedad P2.

Argumentos (Justificaciones o pruebas de las propiedades utilizadas)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
A1: Las magnitudes volumen y distancia (en la relación consumo/recorrido) son directamente proporcionales.	Justifica la propiedad P1
A2: Puesto que al aumentar la cantidad de gasolina aumenta (proporcionalmente) la cantidad del recorrido.	Justifica la propiedad P2

Conflictos potenciales:

- No evidenciar la relación que existe entre las magnitudes en el problema.
- Obtener un resultado para el cual no se tiene un significado preciso.

4.5.1.2. Análisis de objetos y significados del ítem 2

El ítem 2 comprende dos partes, en la primera se solicita identificar en tres tablas dadas cuáles de ellas expresan magnitudes proporcionales y la segunda parte se solicita elaborar un gráfico cartesiano para comprobar la respuesta. En la Fig. 4.6 se muestra el enunciado de este ítem. La primera parte del ítem no reviste mayor dificultad pues todas las tablas propuestas en el ítem son de magnitudes proporcionales y no se pide presentar ningún tipo de argumento. Las respuestas esperadas se limitaban a decir sí o no. Esta característica del ítem condujo a considerar como no necesaria la elaboración de un análisis previo sobre esta primera parte del ítem 2.

2) ¿Cuáles de las siguientes tablas expresan magnitudes proporcionales? (Los números expresan las medidas de las cantidades correspondientes)

A	1	2	3	4	5
B	7	14	21	28	35

L	4	8	12	16	20
S	36	72	108	144	180

T	1	2	3	4	5
E	100	200	300	400	500

Comprueba tus respuestas, representando gráficamente cada tabla en diagramas cartesianos.

Fig. 4.6: Ítem 2 del cuestionario inicial

En relación con la segunda parte del ítem 2, aún cuando no se solicita justificación alguna sobre las respuestas, se solicita la elaboración de un diagrama cartesiano, este aspecto reviste interés.

Al resolver la segunda parte del ítem 2 se observa, en esencia, sólo un posible proceso de resolución: la presentación del gráfico cartesiano. Las variaciones correspondientes a la escala con que se haga el dibujo, como elemento diferenciador de las repuestas, no representa interés. A continuación se presenta un modelo de resolución.

Solución segunda parte ítem 2:

La solución a esta parte del ítem 2 se presenta en la Fig. 4.7

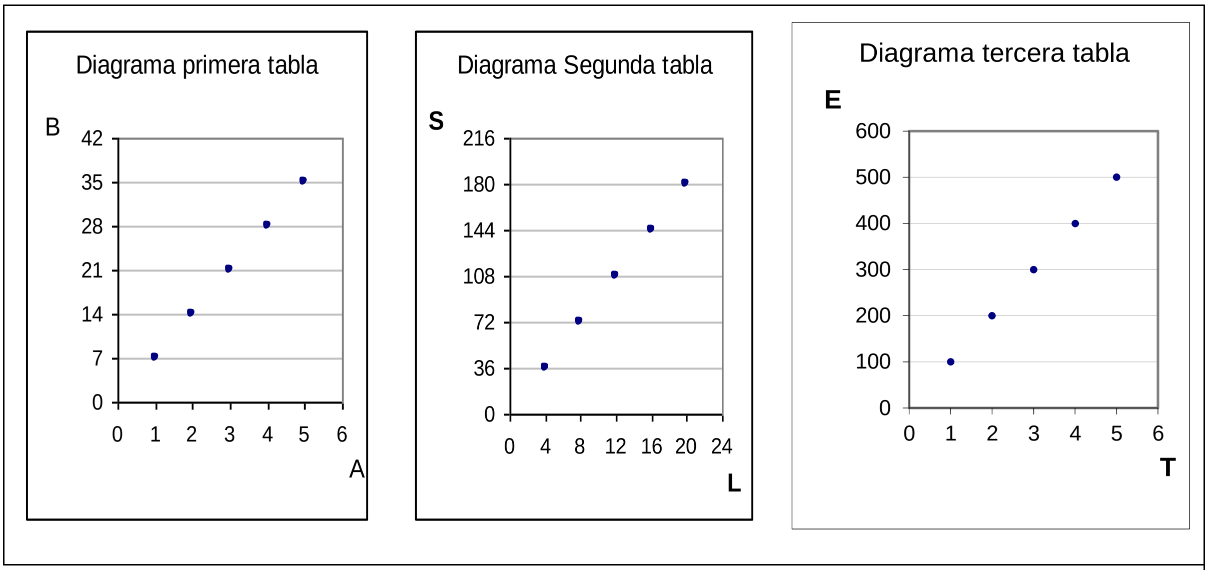


Fig. 4.7: Diagramas cartesianos correspondientes a las tablas dadas en el ítem 2

A continuación el análisis previo de esta parte del ítem.

Elementos lingüísticos (Términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
…diagrama cartesiano	Sistema de representación de pares de números reales
Diagramas cartesianos de las tablas	Representación de los pares de números puestos en correspondencia

Conflictos potenciales:

- Traducción del lenguaje tabular al gráfico.

Conceptos/definiciones (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
Ejes de coordenadas	Rectas numéricas que se cortan perpendicularmente
Puntos en el diagrama	Pares ordenados de números
Diagrama cartesiano	Sistema de referencia generado por los ejes de coordenadas en el que a cada punto le corresponde un par de números y viceversa.
Gráfico de una relación de proporcionalidad directa	Conjunto de puntos (x, y) del diagrama cartesiano que cumplen con una relación (discreta) de la forma $y = kx$ con k un número no nulo.

Conflictos potenciales:

- La representación gráfica es un conjunto de puntos finito y discreto.
- No relacionar la representación gráfica de los puntos con su característica esencial: la linealidad, lo cual no debe implicar el trazado de la línea recta.

Procedimientos (Técnicas, operaciones, algoritmos)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
Construcción del gráfico cartesiano	Organización espacial necesaria para representar los puntos puestos en relación
Identificación del lugar y trazado del punto que corresponde a cada par de números	Representación gráfica de los puntos que se encuentran en las tablas de proporcionalidad

Conflictos potenciales:

- Ubicación errónea de los puntos debido al manejo inapropiado de escalas.
- Trazado de la recta (continua) para representar la relación entre los puntos.
- Obtener una representación gráfica cuyo significado sea impreciso, o no esté relacionada con la orientación lineal que deberían exhibir los puntos respectivos.

Propiedades (Enunciados para los cuales se requiere una justificación o prueba)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
P1: A cada par de números de la tabla le corresponde un punto en el gráfico cartesiano	Relación biunívoca entre los elementos del producto cartesiano $R \times R$ y los puntos en el plano cartesiano (real).
P2: La representación gráfica de los puntos es lineal	Muestra la proporcionalidad de la relación entre las magnitudes.

Conflictos potenciales:

- No identificar las parejas de números de la tabla como puntos del gráfico cartesiano.

- No reconocer la linealidad como una característica de la representación gráfica de una tabla de magnitudes directamente proporcionales.

Argumentos (Justificaciones o pruebas de las propiedades utilizadas)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
A1: Se deduce de la definición de gráfica cartesiana de una función	Justifica P1
A2: Comprobación empírica de que los puntos están alineados.	Justifica P2

Conflictos potenciales:

- No justifica la relación que existe entre las magnitudes directamente proporcionales dadas en la tabla y los puntos de los gráficos construidos.

4.5.1.3. Análisis de objetos y significados del ítem 3

En el ítem 3 se solicita una valoración de tres situaciones diferentes, determinar cuáles de ellas son directamente proporcionales, y justificar la respuesta elaborando una tabla para cada caso. En la Fig. 4.8 presentamos el enunciado de este ítem.

3) De los siguientes pares de magnitudes, ¿cuáles son directamente proporcionales?

a) Lado del cuadrado y su superficie

b) Lado del cuadrado y su perímetro

c) Edad y altura de las personas

Justifica tu respuesta usando una tabla para cada uno

Fig. 4.8: Ítem 3 del cuestionario inicial

<u>Solución del ítem 3a</u>: Los pares de magnitudes que se obtienen entre el lado de un cuadrado y su superficie no son proporcionales. Representación de estas magnitudes en una tabla:

× 2 × 2

Lado del cuadrado	1	2	3	4
Superficie del cuadrado	1	4	9	16

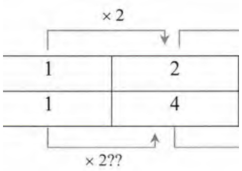
¿× 2? ¿× 2?

Vemos que al multiplicar una de las cantidades por 2 (por ejemplo, $2 \times 2 = 4$, primera fila) y al multiplicar por 2 la cantidad que corresponde (por ejemplo, 4×2, segunda fila), no resulta el valor que debería dar (por ejemplo, 8), en su lugar en la tabla aparece otro valor (en este caso 16). Por tanto las magnitudes no son directamente proporcionales.

Un procedimiento de respuesta que podría presentarse sería el uso de una representación gráfica para la relación $s = l^2$, para algunos valores particulares de l, con lo cual podría argumentarse sobre la no linealidad de esta relación y, en consecuencia, sobre la no-proporcionalidad entre las magnitudes obtenidas a partir de ella. Esta manifestación es probable pues en el ítem anterior se proponía el uso de la representación gráfica para comprobar la proporcionalidad entre magnitudes dadas. No obstante, dada la validez de este procedimiento, y que para el ítem 2 se ha realizado el análisis cuando la respuesta involucra el uso de una representación gráfica como criterio-indicador de la proporcionalidad, no se ha considerado necesario incluir aquí el análisis de esta forma de respuesta.

A continuación el análisis epistémico/cognitivo del ítem 3a.

Elementos lingüísticos (Términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
…pares de magnitudes… directamente proporcionales	Los pares de números que se forman tomando uno de la primera fila, y el otro, su correspondiente, en la misma columna, en la segunda fila.
Lado del cuadrado	Cantidad de longitud de un segmento.
…su superficie	Área de un cuadrado cuyo lado ha sido dado.
Tabla	Representación tabular en la que se escriben las longitudes de los lados de los cuadrados y las áreas respectivas.
	Representaciones utilizadas para indicar las operaciones-relaciones entre las magnitudes no proporcionales.

Conflictos potenciales:

- Reconocer las dos magnitudes relacionadas
- La expresión “usando una tabla” requiere “familiaridad” con la traducción de una relación funcional dadas en lenguaje natural al tabular.

Conceptos/definiciones (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
Magnitudes directamente proporcionales	Dos magnitudes son directamente proporcionales si al variar una el doble, el triple, la mitad,… la otra también varía el doble, el triple, la mitad,….
Lado del cuadrado	La medida de cualquiera de los lados de un cuadrado.
Superficie de un cuadrado	La medida del área ocupada por un cuadrado cuyo lado ha sido dado, se obtiene por medio de una ecuación de la forma $s = l^2$, donde *s* representa la superficie y *l* el lado.

Conflictos potenciales:

- Conocer-recordar la fórmula para calcular el área de un cuadrado
- Considerar la relación de un número y su cuadrado como una relación proporcional directa.
- Reducir la relación entre magnitudes directamente proporcionales a una regla intuitiva-cualitativa, de covariación “más en A más en B”.
- Hacer uso de una concepción errónea como la “ilusión de la linealidad” (Van Dooren, et al., 2003)

Procedimientos (Técnicas, operaciones, algoritmos)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
Asignación de valores (arbitrarios) al lado	Generar una de las dos series de números necesarias
Cálculo de la superficie de un cuadrado	Obtener el valor de la superficie de un cuadrado si se conoce la medida del lado.
Construir la tabla	Ubicar los valores correspondientes del lado y de la superficie, generados por la sucesión de valores de magnitudes no proporcionales.
Comparar razones	Determinar si las razones son o no iguales

Conflictos potenciales:

- Obtener la medida de la superficie de un cuadrado conociendo su lado.
- Generar pares de valores correspondientes a las relaciones dadas para las magnitudes.
- Determinar que los pares de valores de magnitudes generadas son no proporcionales.

Propiedades (Enunciados para los cuales se requiere una justificación o prueba)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
P1: La medida de la superficie de un cuadrado es el “cuadrado” de la medida de su lado.	Obtener de la sucesión de valores correspondientes a la superficie

Propiedades… (*continuación*)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
P2: Si se multiplican las cantidades de una magnitud por un número, las cantidades de la otra magnitud se multiplican por el mismo número (cuando se cumple la proporcionalidad directa).	Obtener términos de la secuencia de pares de números directamente proporcionales.
P3: Las magnitudes lado y superficie de un cuadrado no son directamente proporcionales	Es la respuesta correcta al problema

Conflictos potenciales:

- No utilizar la propiedad P1.
- No utilizar la propiedad P2
- No encontrar la propiedad P3

Argumentos (Justificaciones o pruebas de las propiedades utilizadas)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
A1: Es la fórmula que permite hallar la superficie de un cuadrado.	Justifica P1
A2: Es la definición de magnitudes directamente proporcionales	Justifica P2
A3: No se cumple la propiedad P2.	Justifica P3.

Conflictos potenciales:

- Utilizar reglas intuitivas-cualitativas o concepciones erróneas como las señaladas anteriormente, para sustentar los procedimientos y respuestas.
- Considerar la relación matemática ($s = l^2$) entre el lado l y la superficie s de un cuadrado como sustento de la proporcionalidad entre ellas.

<u>Solución del ítem 3b</u>: Los valores numéricos de las medidas del lado de un cuadrado y de su perímetro son proporcionales.

Representación de estas magnitudes en una tabla:

× 2 × 2

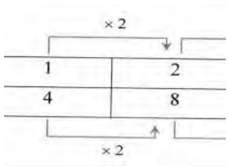
Lado del cuadrado	1	2	3	4
Perímetro del cuadrado	4	8	12	16

× 2 × 2

Vemos que al variar una de las cantidades (el doble, el triple, la mitad…) la otra cantidad también varía (el doble, el triple, la mitad…), por tanto las magnitudes son directamente proporcionales.

A continuación se presenta el análisis epistémico/cognitivo del ítem 3b. Dada la similitud entre el ítem 3a y 3b se notará que diversas partes del análisis son parecidas.

Elementos lingüísticos (Términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
…pares de magnitudes… directamente proporcionales	Los pares de números que se forman tomando uno de la primera fila, y el otro, su correspondiente, en la misma columna, en la segunda fila.
Lado del cuadrado	Cantidad de longitud de un segmento.
…su perímetro	Concepto de perímetro de un cuadrado.
Tabla	Representación tabular en la que se escriben las magnitudes de los lados de los cuadrados y los perímetros respectivos.
	Representaciones utilizadas para indicar las operaciones-relaciones entre las magnitudes proporcionales.

Conflictos potenciales:

- Reconocer los valores que se deben inscribir en las celdas
- La expresión ―usando una tabla” requiere ―familiaridad” con la traducción de una relación funcional dadas en lenguaje natural al tabular.

Conceptos/definiciones (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
Magnitudes directamente proporcionales	Dos magnitudes son directamente proporcionales si al variar una el doble, el triple, la mitad,… la otra también varía el doble, el triple, la mitad,….
Lado del cuadrado	La medida de cualquiera de los lados de un cuadrado.
Perímetro de un cuadrado	Suma de los cuatro lados de un cuadrado, se obtiene por medio de una ecuación de la forma $p = 4l$, donde p representa el perímetro y l el lado.

Conflictos potenciales:

- Conocer-recordar la fórmula para calcular el perímetro de un cuadrado.

- Considerar la relación entre el lado de un cuadrado y su perímetro como no proporcional.

Procedimientos (Técnicas, operaciones, algoritmos)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
Asignación de valores (arbitrarios) al lado	Generar una de las dos sucesiones de números necesarias
Cálculo del perímetro de un cuadrado	Obtener el valor del perímetro de un cuadrado si se conoce la medida del lado.
Construir la tabla	Ubicar los valores correspondientes del lado y del perímetro, generados por la sucesión de valores de magnitudes proporcionales.
Comparar las razones	Determinar que las razones son iguales

Conflictos potenciales:

- Obtener la medida del perímetro de un cuadrado conociendo su lado.
- Elaboración de la sucesión de valores de magnitudes directamente proporcionales.
- Determinar que los pares de valores de magnitudes obtenidos (lado/perímetro) son proporcionales.

Propiedades (Enunciados para los cuales se requiere una justificación o prueba)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
P1: La medida del perímetro de un cuadrado es la suma de todos sus lados.	Obtener la sucesión de valores correspondientes al perímetro.
P2: Si se multiplican las cantidades de una magnitud por un número, las cantidades de la otra magnitud se multiplican por el mismo número.	Obtener términos de la sucesión de pares de números directamente proporcionales.
P3: Las magnitudes lado y perímetro de un cuadrado son directamente proporcionales.	Es la respuesta al problema

Conflictos potenciales:

- No utilizar la propiedad P1.
- No utilizar la propiedad P2
- No encontrar la propiedad P3

Argumentos (Justificaciones o pruebas de las propiedades utilizadas)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
A1: Es la fórmula que permite hallar el perímetro de un cuadrado.	Justifica P1.

Argumentos… (*continuación*)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
A2: Es la definición de magnitudes directamente proporcionales	Justifica P2.
A3: Se cumple la propiedad P2.	Justifica P3.

Conflictos potenciales:

- Uso mecánico de la ecuación $p = 4l$ sin dar lugar a los razonamientos y argumentos respectivos.
- Proveer de una sucesión de números proporcionales, inscritos en una tabla, y no exhibir el uso de los argumentos correspondientes.

<u>Solución del ítem 3c</u>: La edad y la altura de las personas no son magnitudes proporcionales.

En efecto, inicialmente (normalmente) las personas crecen en la medida en que la edad va avanzando. Sin embargo, tal covariación no es necesariamente constante. Además, la altura máxima para una persona se obtiene alrededor de los 20 años, y la edad no se detiene, sigue avanzando.

Un comentario sobre la respuesta al ítem 3c: Es claro que pueden darse muchas respuestas que son solución a este ítem, se ha dado una entre muchas. En realidad, la particularidad de las respuestas que puedan darse carece de interés para esta investigación. Lo que sí debe ser resaltado es que la condición cualitativa que determina al ítem lo hace diferente a los ítems anteriores, los cuales son de índole cuantitativa, y por lo tanto su respuesta es de naturaleza diferente. En consecuencia, para la respuesta del ítem 3c no sería necesario elaborar una tabla para su justificación, tal y como se ha hecho para los ítems anteriores.

Sin embargo, se deja abierta la posibilidad del uso de una tabla, que tendría características y un uso similar a la presentada en el ítem 3a, como criterio para decidir sobre la no proporcionalidad de la situación. Ante esta posibilidad, somos conscientes que el uso de una tabla se encuentra entre los tipos de respuestas que podrían ser dados por los estudiantes ante tal situación.

A continuación se presenta el análisis epistémico/cognitivo del ítem 3c.

Elementos lingüísticos (Términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
…pares de magnitudes… directamente proporcionales	Valoración de la edad y la altura como magnitudes relacionadas
Edad	Magnitud medida en años
…altura	Magnitud medida en metros.

Conflictos potenciales:

- Reconocer las dos magnitudes relacionadas
- La expresión “usando una tabla” requiere “familiaridad” con la traducción de una relación funcional dadas en lenguaje natural al tabular.

Conceptos/definiciones (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
Magnitudes directamente proporcionales	Dos magnitudes son directamente proporcionales si al variar una el doble, el triple, la mitad, … la otra también varía el doble, el triple, la mitad, ….

Conflictos potenciales:

- Considerar que la altura y la edad varían proporcionalmente.

Procedimientos (Técnicas, operaciones, algoritmos)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
Dar valores a la variable edad y estimar alturas correspondientes y calcular las razones	Determinar si existe o no proporcionalidad

Conflictos potenciales:

- Los pares de valores considerados no sean “realistas” respecto de la naturaleza de las magnitudes edad y altura.
- Proponer un caso particular de valores que sean proporcionales e inferir que la relación entre las magnitudes es de proporcionalidad.

Propiedades (Enunciados para los cuales se requiere una justificación o prueba)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
P1: Las magnitudes edad y altura de las personas no son directamente proporcionales	Dar una solución a la cuestión planteada.

Conflictos potenciales:

- No encontrar la propiedad P1.

Argumentos (Justificaciones o pruebas de las propiedades utilizadas)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
A1: La altura encuentra su máximo alcance alrededor de los 20 años de edad, mientras la edad sigue avanzando.	Justifica P1

Conflictos potenciales:

- Utilizar reglas intuitivas-cualitativas, o concepciones erróneas como las señaladas anteriormente aplicadas a este caso, por ejemplo, “más edad, más altura”.

4.5.1.4. Análisis de objetos y significados del ítem 4

El ítem 4 presenta una situación de relevancia singular. Al pedirle al futuro maestro que explique con sus propias palabras cuándo dos magnitudes son proporcionales, se le está dando ocasión a que ponga en juego su potencial para dar explicaciones sobre la proporcionalidad, habiendo tenido como experiencia previa la resolución de problemas y la valoración de situaciones que tratan sobre la misma. Además el ítem solicita: dar un ejemplo, construir una tabla y representarla gráficamente, lo que comprende dos aspectos relevantes: a) una oportunidad para hacer un resumen de las actividades realizadas durante la resolución del instrumento, y b) el desarrollo de secuencia de acciones que forman parte de una actividad de enseñanza (definición-ejemplo-representación), que debe hacerse de manera coherente. En la Fig. 4.9 presentamos el enunciado de este ítem.

> 4) Explica con tus propias palabras cuándo dos magnitudes son directamente proporcionales. Pon un ejemplo, construye su tabla y represéntala gráficamente.

Fig. 4.9: Ítem 4 del cuestionario inicial

El aspecto referido en el apartado (a) del párrafo anterior será utilizado para esquematizar una posible solución del ítem 4. Mientras el aspecto (b) espera verse puesto en práctica en las respuestas de los estudiantes.

Resolución del ítem 4: Dos magnitudes son proporcionales si al variar una el doble, el triple, la mitad,… la otra también varía el doble, el triple, la mitad,…. En otras palabras, dos magnitudes son proporcionales si la razón entre las cantidades correspondientes es constante.

Para dar un ejemplo se puede utilizar algunos de los anteriores, el del ítem 1, o el ítem 3b. También es posible mostrar un ejemplo nuevo-original o utilizar una de las tablas del ítem 2, colocando magnitudes específicas a los valores numéricos dados.

La construcción de la tabla será necesaria si el ejemplo utilizado es nuevo-original o corresponde al ítem 1, siempre y cuando, para su resolución, no se haya hecho uso de una tabla.

Finalmente, la representación gráfica correspondería a una acción similar a la desarrollada durante la segunda parte del ítem 2. Sólo las magnitudes proporcionales utilizadas representarían alguna variación en la tarea, si la situación no estuviera comprendida por las presentadas en el ítem 2.

A continuación se presenta el análisis epistémico/cognitivo del ítem 4. En la realización de este análisis se ha introducido una variante en relación con los análisis previos presentados; se ha incluido, de manera preliminar, un análisis sobre la situación problema. Esto obedece a que el enunciado del ítem comprende, en sí mismo, diferentes problemas a resolver, por lo que hemos considerado conveniente hacer un reconocimiento explícito de cada uno de esos problemas. Ese reconocimiento será tomado en cuenta en los resultados preliminares del análisis previo, relativos a la categorización de posibles respuestas, y en el análisis cognitivo correspondiente.

Situaciones-problema

OBJETOS	SIGNIFICADOS
Explicación	Proporcionar una definición de magnitudes directamente proporcionales.
Ejemplo de proporcionalidad directa	Situación particular que cumple con las reglas que caracterizan una relación de proporcionalidad entre magnitudes.
Elaboración de la tabla con pares de números proporcionales	Mostrar el conocimiento de que la proporcionalidad involucra una secuencia de pares de números que cumplen la regla que caracteriza una relación de proporcionalidad.
Elaboración del gráfico cartesiano correspondiente	Mostrar competencia para traducir la expresión tabular a una representación gráfica cartesiana en la que se manifiesta una disposición lineal de los pares de números proporcionales.

Elementos lingüísticos (Términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
Explica con tus propias palabras cuándo dos magnitudes son directamente proporcionales	Enunciado de la definición de magnitudes directamente proporcionales
Pon un ejemplo…	Caso que cumple con la definición de magnitudes proporcionales dada.
Secuencia de pares de números proporcionales	Relación de proporcionalidad directa
Conjunto de puntos linealmente dispuestos en el gráfico cartesiano	Relación de proporcionalidad directa

Conflictos potenciales:

- Uso de las expresiones ―mayor (menor) en A implica mayor (menor) en B" para caracterizar la proporcionalidad directa. Uso de reglas intuitivas (Tirosh y Stavy, 1999; Stavy, et al., 2006).
- Ubicación incorrecta de una secuencia de pares de números proporcionales (o no proporcionales) en una tabla.
- Ubicación incorrecta de la secuencia de pares de números proporcionales en el gráfico cartesiano.

Conceptos/definiciones (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
Magnitudes proporcionales	Las magnitudes son proporcionales si la razón de las cantidades correspondientes es constante.
Sucesión de pares de números proporcionales	La razón de los pares de números correspondientes es constante.
Constante de proporcionalidad	Razón entre dos medidas de cantidades correspondientes cualesquiera.

Conflictos potenciales:

- No reconoce la relación constante entre las razones de los pares de números proporcionales.
- Ejemplificar utilizando razonamientos basados en la idea de covariación.

Procedimientos (Técnicas, operaciones, algoritmos)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
Generación de pares de números proporcionales	Obtener los pares que constituyen los términos de las sucesiones de magnitudes proporcionales.
Construcción de la tabla	Representar la relación de proporcionalidad de manera extensiva (numérica).
Construcción de la representación gráfica	Representar la relación de proporcionalidad de manera extensiva (gráfica).

Conflictos potenciales:

- Obtener una sucesión de pares de números no proporcionales.
- Elaborar una tabla o gráfico incorrecto o incompleto.

Propiedades (Enunciados para los cuales se requiere una justificación o prueba)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
P1: Si se multiplican las cantidades de una magnitud por un número, las cantidades de la otra magnitud se multiplican por el mismo número.	Permite obtener términos de la secuencia de pares de números proporcionales.

Conflictos potenciales:

- No hacer uso de la propiedad P1.

Argumentos (Justificaciones o pruebas de las propiedades utilizadas)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
A1: La razón entre las cantidades correspondientes es constante	Justifica la propiedad P1

Conflictos potenciales:

- Proveer de una sucesión de números proporcionales y no exhibir el uso del argumento A1.

4.5.2. Resultados preliminares del análisis epistémico

4.5.2.1. Resultados preliminares del análisis del ítem 1

Una observación de interés que se deduce del análisis realizado al ítem 1, identificada en los elementos lingüísticos y conceptuales, es que el mismo involucra dos *variables extensivas*: consumo de combustible y distancia que se recorre. No obstante, en su enunciado, los datos están dados de manera *intensiva* (tasa), corresponde a una razón externa en diferentes sistemas de unidades: el consumo de gasolina en litros por el recorrido de distancia en kilómetros y que, de acuerdo con algunos estudios (Freudenthal, 1983; Lamon, 2007; Thompson y Thompson, 1994; Vergnaud, 1988), reviste una mayor dificultad en la resolución de problemas de proporcionalidad.

Así mismo, la pregunta que se formula, implica una respuesta intensiva de los kilómetros que se recorrerán según una cantidad de litros establecida. No debe dejar de notarse que existe una variable intensiva implícita-tácita; la velocidad, la cual se –sobreentiende" que se mantiene constante. Este aspecto se vincula con otro posible conflicto identificado a partir del análisis previo de este problema, lo cual se encuentra en la propiedad P1; la relación consumo de gasolina por kilómetros recorridos no es necesariamente constante, está sujeta, entre otros aspectos; a que la velocidad sea constante, a que la ruta no presente variación en sus inclinaciones, por ejemplo, lo cual difícilmente sucede en la realidad. La aplicabilidad del modelo de proporcionalidad se debilita ante tales cuestionamientos (Peled, y Bassan-Cincinatus, 2005), lo cual debería ser manejado conscientemente por el docente. Por otra parte un uso acrítico de las relaciones entre magnitudes extensivas fomenta el uso de la *ilusión de la linealidad* (De Bock, Van Dooren, Janssens, y Verschaffel, 2007)

Una síntesis de este análisis, que nos aproxima a su configuración epistémica global, es el reconocimiento de algunos de sus aspectos fundamentales: cantidades de magnitudes, representaciones, conceptos de razón y proporción, procedimientos de modelización, propiedades de las magnitudes relacionadas, y los argumentos que justifican los procedimientos y los resultados obtenidos. Como primera aportación se reconoce la riqueza que representa este tipo de análisis al ser comparado con el limitado dúo de conceptos y procedimientos de la difundida tradición pedagógica.

Una segunda aportación del estudio de la configuración epistémica es la previsión de posibles categorías de respuestas que podrían aproximarnos a las configuraciones cognitivas que se harían presentes en las respuestas de los estudiantes. En este sentido, se han identificado las siguientes categorías y sub-categorías:

C10: No dar respuesta

C11: No-proporcional con justificación: no reconocer las magnitudes dadas como magnitudes proporcionales, asumiendo que en la realidad se presentan circunstancias en las que la relación consumo de combustible por recorrido no es siempre la misma.

C12: Proporcional-tabla-correcta: reconocer las magnitudes dadas como proporcionales, dar una respuesta correcta y utilizar una tabla de magnitudes proporcionales para su resolución.

C13: Proporcional-tabla-incorrecta: reconocer las magnitudes dadas como proporcionales, dar una respuesta incorrecta y utilizar una tabla de magnitudes proporcionales para su resolución.

C14: Proporcional-ecuación-correcta: reconocer las magnitudes dadas como proporcionales, dar una respuesta correcta y utilizar una ecuación de proporción para su resolución. Esta comprende las sub-categorías:

C14.1: Proporcional-ecuación-correcta-numérica: elaborar una solución numérica, la cual comprende: (a) quitar a x su valor de incógnita, (b) usar la igualdad como símbolo que indica un resultado, (c) llevar a efecto una modelización verbal-simbólica correcta, pero resolver incorrectamente la ecuación, (d) uso inconsciente-mecánico de la ecuación de proporción evitando un razonamiento proporcional.

C14.2: Proporcional-ecuación-correcta-algebraica: elaborar una solución algebraica, la cual comprende: (a) dar-conservar para x el valor de incógnita, (b) usar la igualdad como símbolo relacional, (c) llevar a efecto una modelización verbal-simbólica correcta y resolver la ecuación de manera correcta, (d) uso consciente de la ecuación de proporcionalidad.

C15: Proporcional-ecuación-incorrecta: reconocer las magnitudes dadas como proporcionales, dar una respuesta incorrecta y utilizar una ecuación de proporcionalidad para su resolución.

C16: Proporcional-regla-correcta: reconocer las magnitudes dadas como proporcionales, dar una respuesta correcta y utilizar una regla de tres para su resolución. Esta comprende las sub-categorías:

C16.1: Proporcional-regla-correcta-numérica: elaborar una solución numérica, la cual comprende: (a) quitar a x su valor de incógnita, (b) usar la igualdad como símbolo que indica un resultado, (c) llevar a efecto una modelización verbal-simbólica correcta, pero la simbólica-simbólica incorrecta, (d) uso inconsciente-mecánico de la regla de tres evitando un razonamiento proporcional.

C16.2: Proporcional-regla-correcta-algebraica: elaborar una solución algebraica, la cual comprende: (a) dar-conservar para x el valor de incógnita, (b) usar la igualdad como símbolo relacional, (c) llevar a efecto ambos procesos de modelización de manera correcta, (d) uso consciente de la regla de tres.

C17: Proporcional-regla-incorrecta: reconocer las magnitudes dadas como proporcionales, dar una respuesta incorrecta y utilizar una regla de tres para su resolución. Esta comprende las sub-categorías:

C17.1: Proporcional-regla-incorrecta-numérica: elaborar una solución numérica pero obtener una respuesta incorrecta.

C17.2: Proporcional-regla-incorrecta-algebraica: elaborar una solución algebraica pero obtener una respuesta incorrecta.

C18: Proporcional-no-tabla-no-ecuación-no-regla-correcta: reconocer las magnitudes dadas como proporcionales, dar una respuesta correcta y utilizar un proceso de resolución diferente a los propuestos y analizados.

C19: Proporcional-no-tabla-no-ecuación-no-regla-incorrecta: reconocer las magnitudes dadas como proporcionales, dar una respuesta incorrecta y utilizar un proceso de resolución diferente a los propuestos y analizados.

Esta categorización coloca a la persona que realiza el análisis epistémico en una perspectiva, que le proporciona una percepción más comprensiva de las posibles situaciones, que pueden presentarse alrededor de la puesta en juego del problema analizado en un ambiente instruccional.

4.5.2.2. Resultados preliminares del análisis del ítem 2

A partir del análisis previo del ítem 2 presentado anteriormente, se observa como conflicto potencial relevante, la identificación de la disposición lineal de los puntos en el gráfico cartesiano, con la relación de proporcionalidad entre las cantidades de magnitudes representadas por tales puntos. Es decir, la disposición lineal de los puntos debe ser utilizada como criterio-indicador de la relación de proporcionalidad existente. Debe agregarse además, que no toda disposición lineal de puntos, entendida como puntos alineados, que pertenecen a una recta, es criterio-indicador “suficiente” de la proporcionalidad, sólo aquellos puntos pertenecientes a una recta que pasa por el origen del gráfico cartesiano, son los que indican que la relación entre ellos es de proporcionalidad. La disposición lineal de los puntos es sólo una condición “necesaria”.

Otro aspecto de interés, que involucra mayor sutileza, es que siendo la representación gráfica solicitada una forma de comprobación de la linealidad, fomenta el trazo de una línea recta para representar la relación de proporcionalidad, concebida como relación entre magnitudes continuas, cuándo, en realidad, los datos del problema refieren a una situación en que dicha relación es entre magnitudes discretas. Esta sutileza se considera de interés, puesto que involucra conceptos matemáticos (continuo/discreto) que deben ser conocidos por parte de los futuros maestros (Boyer, Levine, y Huttenlocher, 2008).

La consideración de los aspectos anteriores y la perspectiva proporcionada por el análisis epistémico permite formular algunas categorías que ayudan a tipificar las respuestas que posiblemente serán exhibidas por los estudiantes. En este sentido se han determinado las siguientes categorías:

C2R0: No representa gráficamente o representa incorrectamente.

C2R1: Representa gráficamente con un conjunto de puntos dispuestos linealmente. Esta categoría comprende dos sub-categorías:

C2R1.1: Considera la condición discreto/continuo de las magnitudes dadas

C2R1.2: No considera la condición discreto/continuo de las magnitudes dadas.

C2R2: Hace uso adecuado de escalas para representar

C2R3: Hace referencia a la orientación lineal de los puntos como característica de la proporcionalidad.

4.5.2.3. Resultados preliminares del análisis del ítem 3

Como resultados del análisis previo realizado al ítem 3, el cual se presentó anteriormente, se derivan algunas observaciones que se consideran de interés para la aplicación de este ítem.

Las respuestas exigidas hacen referencia a una valoración sustentada en un razonamiento que puede dar lugar a una secuencia del tipo *intuitivo-cualitativo-conceptual*[40] de las situaciones, es decir, tomar la decisión acerca de las situaciones que cada ítem comprende (decidir si son o no son de proporcionalidad), reclama un juicio que podría sustentarse en la manifestación de algunos (o en todos) los términos de la secuencia señalada. Estando conscientes de esa posibilidad, se podría averiguar hasta qué punto los maestros en formación ponen en juego esa secuencia y qué término de la misma se presenta con mayor frecuencia en las respuestas dadas. Es claro que la potencialidad del ítem para informar al respecto no está determinada, podría ser baja, dado que se solicita sólo una tabla para dar la argumentación correspondiente, lo cual podría reducirse a presentar una tabla acompañada de una proposición de la forma ―si/no son proporcionales”, sin explicación alguna, haciendo difícil la valoración de la respuesta en relación con los términos de la secuencia propuesta. No obstante, el estudio de las respuestas podría orientar nuevas formulaciones del ítem.

Por otra parte, una condición de interés es que el ítem 3 consta de tres partes que corresponden a: 3a un ítem cuyas variables se relacionan cuantitativamente, de aplicación intra-matemática, de magnitudes no proporcionales. 3b un ítem cuyas variables se relacionan cuantitativamente, de aplicación intra-matemática, de magnitudes proporcionales. 3c un ítem cuyas variables de relacionan cualitativamente, de aplicación extra-matemática, de magnitudes no proporcionales, específicamente reconocido en la literatura como un problema pseudo-proporcional (De Bock et al., 2007; Modestou et al., 2008; Van Dooren et al., 2008).

Esta condición hace que las repuestas a las dos primeras partes sean sustentadas-justificadas con un procedimiento numérico o gráfico, mientras la tercera no necesariamente implique tales procesos (Lawton, 1993; Tournaire y Pulos, 1985; Sanz

[40] Lo intuitivo refiere a considerar que existe una relación entre las magnitudes consideradas, lo cualitativo al uso de una regla de covariación de la forma ―más en A, más en B” y lo conceptual a que tal covariación es constante, es decir las magnitudes covarían operadas por un mismo factor.

et al., 1996). Obviar esta distinción puede implicar la manifestación de posibles conflictos de significado. En efecto, en el caso de utilizar juicios cualitativos sobre cuestiones numéricas, hace que se ponga de manifiesto, en este caso, las imprecisiones de lo cualitativo sobre la precisión de lo cuantitativo.

Por tanto, esta delimitación de los juicios sobre situaciones como las descritas debe formar parte del conocimiento del futuro profesor. Esta observación conduce a considerar que los términos de la secuencia intuitivo-cualitativo-conceptual constituyen niveles de las respuestas a ser obtenidas, es decir, se podrían observar respuestas que se sustentan en lo intuitivo (relaciones entre magnitudes, dependencia/independencia,…), en lo cualitativo (reglas de razonamiento intuitivo-cualitativo, covariación), en lo conceptual (relación de covariación constante entre magnitudes).

En relación con la naturaleza referida de los ítems encontramos que para el ítem 3c será suficiente utilizar un sustento cualitativo para obtener una respuesta correcta, mientras para el ítem 3a, un sustento cualitativo conduce a una respuesta incorrecta.

A partir de lo expuesto y de los conflictos potenciales identificados en cada uno de los análisis realizados a las tres partes del ítem 3, se han deducido algunas categorías que podrían ser útiles para realizar el análisis cognitivo de las respuestas de los estudiantes.

<u>Categorías propuestas para el análisis cognitivo del ítem 3a:</u>

C3a0: No lo hace

C3a1: Lo hace incorrectamente, considerando que el lado del cuadrado y su superficie son directamente proporcionales, presentando una tabla de magnitudes directamente proporcionales. Esta categoría, de acuerdo al argumento utilizado, comprende las siguientes sub-categorías:

C3a1.1: Sin dar argumentos sólo muestra una proposición de la forma: “sí son proporcionales”.

C3a1.2: Uso de la regla intuitiva-cualitativa, de covariación “más en A, más en B” o uso de la “ilusión de la linealidad”.

C3a2: Lo hace incorrectamente, considerando que el lado del cuadrado y su superficie son directamente proporcionales, presentado una tabla de magnitudes no proporcionales. Esta categoría, de acuerdo al argumento utilizado, comprende las siguientes sub-categorías:

C3a2.1: Sin dar argumentos o sólo muestra una proposición de la forma: “sí son proporcionales”.

C3a2.2: Uso de la regla intuitiva-cualitativa, de covariación “más en A, más en B” o uso de la “ilusión de la linealidad”.

C3a3: Lo hace correctamente, considerando que el lado del cuadrado y su superficie no son directamente proporcionales, presentando una tabla de magnitudes no proporcionales. Esta categoría, de acuerdo al argumento utilizado, comprende las siguientes sub-categorías:

C3a3.1: Sin dar argumentos o sólo muestra una proposición de la forma: “no son proporcionales”.

C3a3.2: La covariación entre el lado del cuadrado y su superficie no es constante, cuando una varía multiplicada por un factor la otra varía multiplicada por otro factor.

<u>Categorías propuestas para el análisis cognitivo del ítem 3b:</u>

C3b0: Incorrectamente/no lo hace

C3b1: Lo hace parcialmente correcto, considerando que el lado del cuadrado y su perímetro son directamente proporcionales, presentando una tabla de magnitudes directamente proporcionales. Esta categoría, de acuerdo al argumento utilizado, comprende las siguientes sub-categorías:

C3b1.1: Sin dar argumentos o sólo muestra una proposición de la forma: “sí son proporcionales”.

C3b1.2: Uso de la regla intuitiva-cualitativa, de covariación “más en A, más en B” o uso de la “ilusión de la linealidad”.

C3b2: Lo hace correctamente, considerando que el lado del cuadrado y su perímetro son directamente proporcionales, presentado una tabla de magnitudes proporcionales, refiriendo a que la covariación entre el lado del cuadrado y su perímetro es constante, cuando una magnitud varía multiplicada por un factor la otra varía multiplicada por el mismo factor.

<u>Categorías propuestas para el análisis cognitivo del ítem 3c:</u>

C3c0: No lo hace

C3c1: Lo hace incorrectamente, considerando que la edad y la altura son magnitudes directamente proporcionales, presentando una tabla de magnitudes directamente proporcionales. Esta categoría, de acuerdo con el argumento utilizado, comprende las siguientes sub-categorías:

C3c1.1: Sin dar argumentos o sólo muestra una proposición de la forma: ―sí son proporcionales”.

C3c1.2: Uso de la regla intuitiva-cualitativa, de covariación ―más en A, más en B” o uso de la ―ilusión de la linealidad”.

C3c2: Lo hace incorrectamente, considerando que la edad y la altura son magnitudes directamente proporcionales, presentado una tabla de magnitudes no proporcionales. Esta categoría, de acuerdo con el argumento utilizado, comprende las siguientes sub-categorías:

C3c2.1: Sin dar argumentos o sólo muestra una proposición de la forma: ―sí son proporcionales”.

C3c2.2: Uso de la regla intuitiva-cualitativa, de covariación ―más en A, más en B” o uso de la ―ilusión de la linealidad”.

C3c3: Lo hace correctamente, considerando que la edad y la altura no son directamente proporcionales, presentado una tabla de magnitudes no proporcionales. Esta categoría, de acuerdo con el argumento utilizado, comprende las siguientes sub-categorías:

C3c3.1: Sin dar argumentos sólo muestra una proposición de la forma: ―no son proporcionales”.

C3c3.2: La variación entre la edad y la altura de una persona no es constante, cuando una varía multiplicada por un factor la otra varía multiplicada por otro factor.

C3c4: Lo hace correctamente, presentando un argumento sustentado en características particulares de las magnitudes edad y altura, y las relaciones entre ellas.

C3c5: Lo hace incorrectamente, presentando un argumento sustentado en casos específicos en los que edad y altura covarían.

4.5.2.4. Resultados preliminares del análisis del ítem 4

El análisis del ítem 4 ha permitido identificar cuatro aspectos en la tarea: (a) explicación, (b) ejemplificación, (c) elaboración de tabla y (d) elaboración de gráfico. Tomando en cuenta esta primera característica de la situación problema, encontramos las variables a ser consideradas para el análisis de este ítem. Así, las variables son precisamente los aspectos mencionados, identificados en la tarea.

Se observa que la secuencia solicitada corresponde con uno de los planteamientos clásicos del desarrollo de una secuencia de un contenido matemático: definición–ejemplo–representación. Esta secuencia se encuentra comprendida en al ámbito del conocimiento matemático para enseñar, más específicamente, refiere al conocimiento especializado del contenido (Hill, Ball y Schilling, 2008), referido en el sub-apartado 2.3.5 del capítulo 2 de este trabajo. Dada esta condición, se puede esperar con este ítem, observar una manifestación inicial de la competencia de los maestros en formación para organizar una secuencia explicación-ejemplo-representación, como parte del conocimiento especializado del contenido, al tratar con la noción de magnitudes proporcionales. En este sentido, se considerará como criterio particular para tal observación la *coherencia* entre los elementos de esa secuencia. Para efectos de esta exploración inicial, la coherencia en la secuencia como criterio de observación, es interpretada de la siguiente manera: la definición como síntesis general de una explicación de la noción magnitudes proporcionales, el ejemplo como caso particular de esa generalidad, la tabla y la representación gráfica como formas de representación del ejemplo respectivo.

Además de las variables y la secuencia identificada, el análisis epistémico nos proporciona categorías para tipificar las posibles respuestas de los estudiantes.

Así, de acuerdo con los conflictos potenciales identificados para los diferentes objetos y significados estudiados se han establecido para las diferentes variables del ítem las siguientes categorías:

Para la variable *explica*:

C4E0: No da explicación o presenta una explicación incorrecta.

C4E1: Da una explicación parcial, esta categoría comprende las siguientes sub-categorías:

C4E1.1: Sustenta su explicación en el uso de la regla intuitiva-cualitativa, de covariación ―más en A, más en B” o utilizando razonamientos basados en una idea general de covariación.

C4E1.2: Sustenta su explicación en el uso de relaciones numéricas entre las magnitudes consideradas, pero sin reconocer la relación constante entre las razones de los pares de números proporcionales.

C4E2: Sustenta su explicación en el reconocimiento de la relación constante entre las razones de los pares de números proporcionales. Esta categoría corresponde con la respuesta correcta al ítem.

Para la variable ejemplifica, se tendrá una categorización similar a la obtenida para la variable explica, tendremos:

C4EJ0: No ejemplifica o presenta una ejemplificación incorrecta.

C4EJ1: Da una ejemplificación basada en argumentos diferentes a reconocer la relación constante entre las razones de pares de números proporcionales, para esta categoría se han considerado las siguientes sub-categorías:

C4EJ1.1: Sustenta su ejemplificación en el uso de la regla intuitiva-cualitativa, de covariación ―más en A, más en B” o utilizando razonamientos basados en una idea general de covariación.

C4EJ1.2: Sustenta su ejemplificación en el uso de relaciones numéricas entre las magnitudes consideradas, pero sin reconocer la relación constante entre las razones de los pares de números proporcionales.

C4EJ2: Sustenta su ejemplificación en el reconocimiento de la relación constante entre las razones de los pares de números proporcionales. Esta categoría corresponde con la respuesta correcta al ítem.

Para la variable elabora tabla:

C4T0: No elabora la tabla o elabora una tabla incorrecta.

C4T1: Elabora una tabla de magnitudes proporcionales, muestra una secuencia de pares de números proporcionales, no exhibe expresamente el uso de la propiedad P1.

C4T2: Elabora una tabla de magnitudes proporcionales, muestra una secuencia de pares de números proporcionales, exhibe expresamente el uso de la propiedad P1. Esta categoría corresponde a la respuesta correcta al ítem.

Para la variable elabora gráfico:

C4G0: No elabora el gráfico o elabora un gráfico incorrecto.

C4G1: Elabora un gráfico con un conjunto de puntos dispuestos linealmente. Esta categoría comprende dos sub-categorías:

C4G1.1 Considera la condición discreto/continuo de las magnitudes del ejemplo

C4G1.2 No considera la condición discreto/continuo de las magnitudes del ejemplo.

C4G2: Hace referencia a la orientación lineal de los puntos como característica de la proporcionalidad.

Estos resultados preliminares, particularmente el conjunto de categorías descritas, serán utilizados para realizar el análisis cognitivo correspondiente, el cual se presenta en el siguiente apartado.

4.6. Estudio de las configuraciones cognitivas

Los análisis previos, realizados sobre los ítems del instrumento, han proporcionado información relevante sobre las manifestaciones de probables respuestas y sus posibles conflictos potenciales. Tal información tiene carácter hipotético y ha sido utilizada para dar lugar a las categorías a ser observadas en las respuestas de los estudiantes. A este proceso, mediante el cual se analiza las respuestas de los estudiantes, a la luz de los diferentes aspectos (objetos, significados y conflictos) derivados de los análisis previos, se le denomina *análisis cognitivo de las respuestas*[41]. Visto de esta manera, el análisis epistémico o uso de la GROS, entendido como proceso general, se comporta como herramienta de investigación que guía el análisis de los resultados. A continuación, se presenta una descripción general sobre la presencia de tales conflictos en la actuación de los 60 estudiantes.

4.6.1. Análisis de las respuestas de los estudiantes al ítem 1

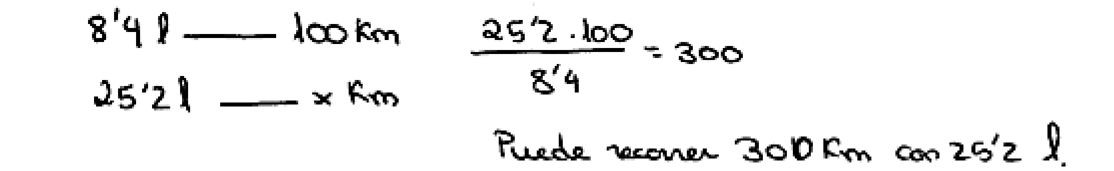
La revisión de las respuestas de los estudiantes al ítem 1, a la luz de las categorías obtenidas del estudio de las configuraciones epistémicas, ha permitido identificar regularidades en las respuestas de los estudiantes (configuraciones cognitivas). En la Tabla 4.1, se muestra un resumen de la manifestación de las mismas, en la muestra considerada; para su elaboración sólo se han considerado las categorías que en efecto se manifestaron en las respuestas dadas por los estudiantes.

Tabla 4.1: Frecuencias de las categorías y sub-categorías del ítem 1, según estrategia de resolución utilizada

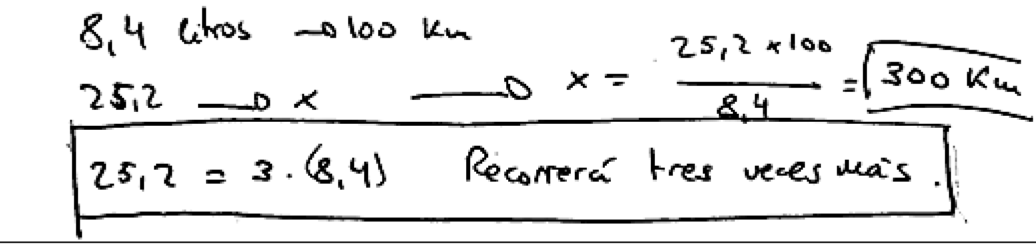
Categorías	Sub-categorías	Frecuencias	
		Nº	%
C14: Proporcional-ecuación-correcta	C14.1: Proporcional-ecuación-correcta-numérica	3	5,0
C16: Proporcional-regla-correcta	C16.1: Prop-regla-correcta-numérica	13	21,7
	C16.2: Prop-regla-correcta-algebraica	40	66,7
No previsto	Razonamiento aditivo	1	1,6
	Procedimiento ilógico	3	5,0
Total		60	100,0

[41] Hemos referido en el apartado 4.5 sobre los usos de estos términos de acuerdo con el énfasis del análisis que se realiza. Más aún, al considerar la realización de los análisis epistémico y análisis cognitivo como una tarea global, utilizaremos los términos —análisis epistémico y cognitivo", que no se debe confundir con el hecho que en cada análisis (análisis epistémico o análisis cognitivo) se realiza una tarea de análisis epistémico/cognitivo.

En la Fig. 4.10 se muestran ejemplos relativos a las categorías identificadas. Aún cuando la mayoría de respuestas pudieron ser previstas de acuerdo con las categorías derivadas del estudio de las configuraciones epistémicas, se debe señalar que algunas de las respuestas no lo fueron. Algunos de estos casos se muestran en la Fig. 4.11.

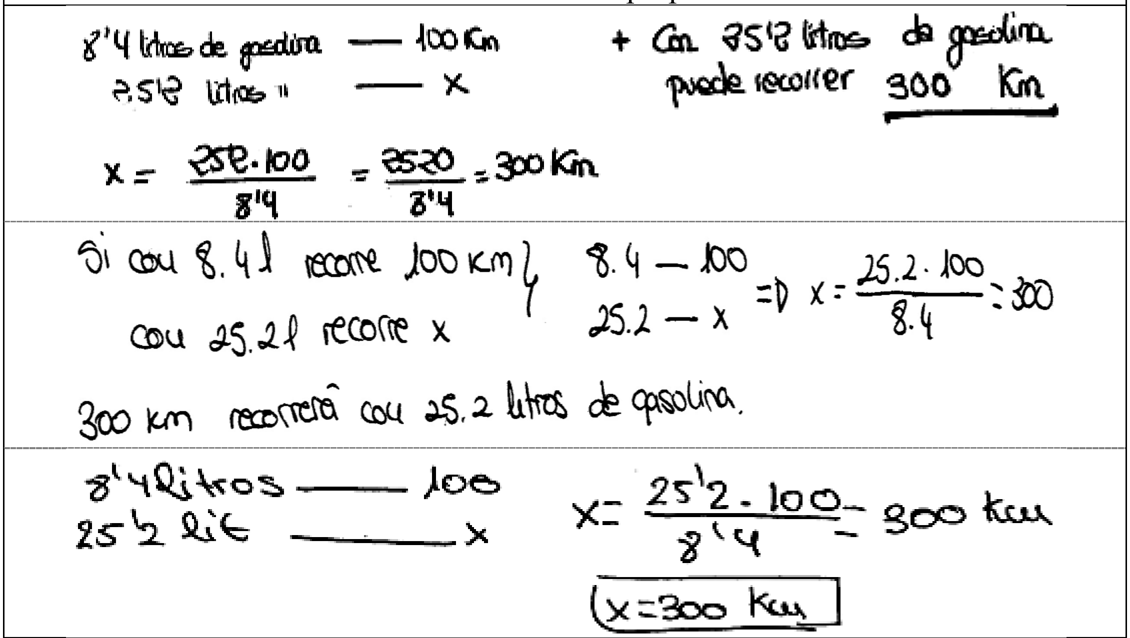


C16.1: Proporcional-regla-correcta-numérica



S1

C16.2: Razonamiento proporcional

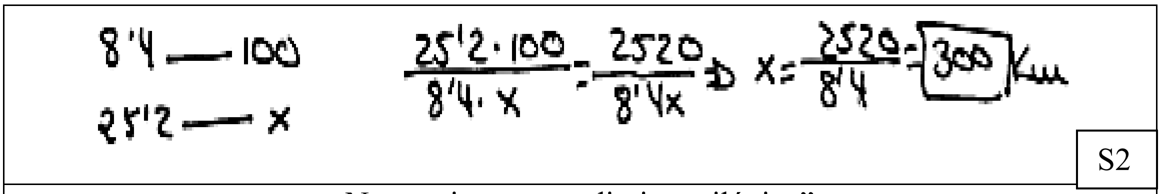


C16.2: Proporcional-regla-correcta-algebraica

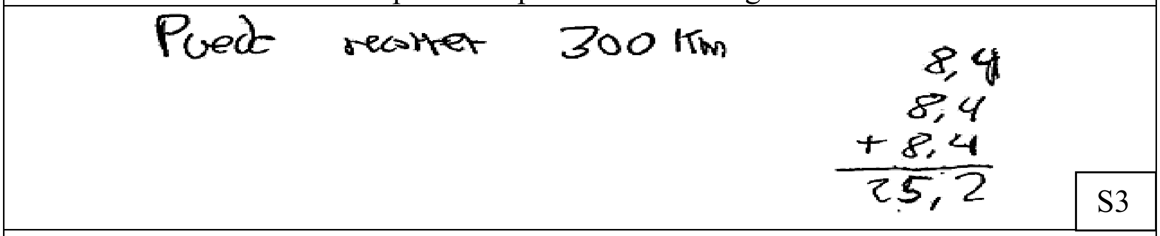
Fig. 4.10: Ejemplos de respuestas previstas en las categorías

Todos los sujetos obtienen una respuesta correcta para el ítem. Se observa una preponderancia del uso de la regla de tres como estrategia de resolución del problema (88,3%). Sólo 4 de los sujetos (6%) utilizan un procedimiento correcto y diferente a la regla de tres. Mientras, 3 (5%) muestran una respuesta correcta a partir de un ―procedimiento ilógico" no previsto, similar al mostrado en S2, Fig. 4.11.

Otra tendencia dominante observada es el uso del procedimiento numérico-algebraico implicado en la regla de tres por el 66,7% de los sujetos, mientras el 21,7% reduce el procedimiento a lo numérico. Únicamente un sujeto muestra un razonamiento aditivo correcto que no fue previsto (S3, Fig. 4.11). Dos de las respuestas, aún estando dentro de las categorías previstas, muestran un razonamiento multiplicativo del tipo S1, Fig. 4.10, lo que indica la puesta en práctica de un razonamiento proporcional. Para la categoría C16.2 se muestran en la Fig. 4.10 cierta diversidad de respuestas que quedaron incluidas en la misma.



No previsto “procedimiento ilógico”



No previsto razonamiento aditivo correcto

Fig. 4.11: Ejemplos de respuestas no previstas en las categorías

Estos resultados indican que el uso de la regla de tres constituye una estrategia de resolución dominante, observándose su uso correcto en un considerable porcentaje (66,7%) de los sujetos. Mientras que las estrategias “uso de una tabla de proporcionalidad” o “reducción a la unidad” no fueron puestas en juego por ninguno de los futuros maestros.

4.6.2. Análisis de las respuestas de los estudiantes al ítem 2

El ítem 2 consta de dos partes. La primera parte sólo comprendía responder a la pregunta “cuáles tablas expresan magnitudes proporcionales” de tres tablas dadas. Las tres tablas dadas eran de magnitudes proporcionales. Todos los estudiantes respondieron correctamente a esta parte del ítem.

Para la segunda parte, el análisis previo aportó una serie de categorías que se tomarán en cuenta para el análisis de las respuestas dadas a esta parte del ítem 2. En la Tabla 4.2 se presenta el resumen de las respuestas de acuerdo con las categorías y sub-categorías correspondientes.

Se observa que sólo 7 estudiantes (11,7%) dan una respuesta incorrecta, lo cual indica que un considerable número de estudiantes (53 estudiantes, 88,3%) dan una respuesta correcta. Dentro de las respuestas correctas se ha observado que 49 estudiantes (81,6%) muestran el trazo de una línea continua, al hacer la representación gráfica de las cantidades discretas presentes en las tablas. Mientras que sólo 4 estudiantes (6,7%) presentan únicamente los puntos que corresponden con la representación solicitada. Así mismo, un alto porcentaje de estudiantes (80%, 48 estudiantes) muestra un uso adecuado de escalas para hacer la representación gráfica correspondiente, mientras que 5 estudiantes (8,3%) no lo hacen. Al cruzar las respuestas que presentan un trazo continuo con las que muestran un uso adecuado de escalas, se observó que 44 estudiantes (73,3%) realizan un trazo continuo y hacen un uso adecuado de escalas al elaborar la representación.

Tabla 4.2: Frecuencias de las categorías de la segunda parte del ítem 2.

<table>
<tr><th rowspan="2">Variable</th><th rowspan="2" colspan="2">Categorías</th><th colspan="2">Frecuencias</th></tr>
<tr><th>Nº</th><th>%</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Representa gráficamente</td><td colspan="2">C2R0: Incorrectamente</td><td>7</td><td>11,7</td></tr>
<tr><td rowspan="2">C2R1: Puntos dispuestos linealmente</td><td>C2R1.1: Discreto/continuo</td><td>4</td><td>6,7</td></tr>
<tr><td>C2R1.2: No-discreto/continuo</td><td>49</td><td>81,6</td></tr>
<tr><td rowspan="2">C2R2: Uso de escala</td><td>C2R2.1: Adecuado</td><td>48</td><td>80,0</td></tr>
<tr><td>C2R2.1: No-adecuado</td><td>5</td><td>8,3</td></tr>
<tr><td colspan="2">C2R3: Refiere a la relación linealidad-proporcionalidad</td><td>1</td><td>1,7</td></tr>
</table>

Respecto al uso de la disposición lineal de los puntos como característica de la proporcionalidad, se observó que sólo 1 de los estudiantes hace una referencia expresa a esa relación. Aún cuando se observó un alto porcentaje de respuestas correctas, estos resultados parecen indicar que un número considerable de futuros maestros muestra un conocimiento incompleto de la relación linealidad-proporcionalidad.

4.6.3. Análisis de las respuestas de los estudiantes al ítem 3

El ítem 3 consta de tres partes, a saber: 3a, 3b y 3c. Para la descripción de las respuestas se ha considerado conveniente tomar cada parte como un ítem en sí mismo. La descripción se realiza tomando en cuenta las categorías deducidas del análisis epistémico correspondiente. Así mismo, se han observado algunas categorías que no fueron previstas, que contribuyen a obtener una mejor aproximación a las configuraciones cognitivas que han tenido lugar en las respuestas de los estudiantes.

<u>Resultados del ítem3a</u>

Los resultados obtenidos para el ítem 3a se resumen en la Tabla 4.3. En términos generales se observa que 9 estudiantes (15%) no dan respuesta al ítem, mientras un alto porcentaje (76,6%) da una respuesta incorrecta al ítem utilizando diferentes formas de argumentación. Sólo 5 estudiantes (8,4%) responden correctamente, donde sólo uno de ellos da una respuesta conceptualmente sustentada.

Tabla 4.3: Frecuencias de las categorías de respuestas del ítem 3a.

Categorías		Frecuencias Nº	%
C3a0: No lo hace		9	15,0
C3a1: Incorrecta con tabla proporcional	C3a1.2: Proposición ―sí son proporcionales”	2	3,3
	C3a1.3: Regla ―más en A, más en B”	1	1,7
C3a2: Incorrecta con tabla no-proporcional	C3a2.1: Sin argumentos o proposición ―sí son…	13	21,7
	C3a2.2: Regla ―más en A, más en B”	3	5,0
C3a3: Correcta con tabla no-proporcional	C3a3.1: Sin argumentos o proposición ―no son…	4	6,7
	C3a3.2: Covariación no constante	1	1,7
Incorrecta sin tabla, con proposición ―sí son proporcionales”	Sólo usa la proposición	13	21,7
	Con argumentos gráficos y numéricos	6	10,0
	Regla ―más en A, más en B”	8	13,3
Total		60	100,0

Como puede verse en la Tabla 4.3, para el análisis de la diversidad de las respuestas presentadas, se hizo necesario definir una nueva categoría que no se había previsto, a saber: ―Incorrecta sin tabla, con proposición _si son proporcionales'” que consiste en aquellas respuestas que obviaron presentar una tabla para justificar sus respuestas; en su lugar, 27 estudiantes (45%) presentan una proposición de la forma ―sí son proporcionales” de los cuales 13 sólo presentan esa proposición. Los otros 14 estudiantes, completan esa proposición de la siguiente manera: 8 estudiantes con el uso de la regla ―más en A, más en B”, 1 estudiante con una representación gráfica, 2 estudiantes con argumentos tales como: ―los lados de los cuadrados son todos iguales” y 3 estudiantes con relaciones numéricas del tipo: ―relación proporcional 1:4”.

Estos resultados indican que el 91,6% de los futuros maestros no da una respuesta correcta al ítem, siendo considerablemente frecuente el uso de argumentos no sustentados conceptualmente (98,3%).

<u>Resultados del ítem 3b</u>

Los resultados obtenidos para el ítem 3b se resumen en la Tabla 4.4. Se observa que 13 estudiantes (21,7%) no dan respuesta al ítem o lo responden de manera incorrecta, mientras que el resto, 47 estudiantes (78,3%) dan una respuesta parcialmente correcta; dando una tabla de magnitudes proporcionales (20 estudiantes, 33,3%) o sin dar una tabla de magnitudes proporcionales; haciendo uso de la proposición ―sí son proporcionales” (27 estudiantes, 45%). Las sub-categorías respectivas pueden verse en la tabla indicada.

Tabla 4.4: Frecuencias de las categorías de respuestas del ítem 3b.

Categorías		Frecuencias	
		Nº	%
C3b0: Incorrectamente/no lo hace		13	21,7
C3b1: Parcialmente correcto con tabla proporcional	C3b1.1: Sin argumentos o proposición ―si son…	15	25,0
	C3b1.2: Regla ―más en A, más en B”	5	8,3
Parcialmente correcto, sin tabla, con proposición ―sí son proporcionales”	Sólo proposición	11	18,3
	Con argumentos numéricos y gráficos	12	20,0
	Regla ―más en A, más en B”	4	6,7
Total		60	100,0

Para la descripción de la totalidad de las respuestas elaboradas por los estudiantes, se hizo necesario definir una categoría que no se había previsto a partir del análisis a priori, a saber, la categoría: ―Parcialmente correcto, sin tabla, con proposición ‗si son proporcionales'”, la cual comprende las respuesta en las que no se da la tabla solicitada para justificar la valoración de la proporcionalidad entre las magnitudes dadas, y, en su lugar, se utiliza la proposición ―sí son proporcionales” para dar la respuesta. Dentro de esta categoría se han identificado tres formas de respuestas que han aglutinado un considerable número de ellas (27 respuestas, 45%). Entre las formas de respuestas identificadas se encuentran las que se han sintetizado en la sub-categoría ―Con argumentos numéricos y gráficos”, que comprende básicamente tres tipos de respuestas, estas se exhiben en la Tabla 4.5.

En el tipo de respuesta ―Gráfico cartesiano”, se muestra el gráfico y no se hace referencia expresa a cómo se usa para sustentar la respuesta. Las relaciones numéricas mostradas por los estudiantes son de la forma: ―al dividir el perímetro por 4 siempre da el mismo valor, el del lado" ―al sumar los cuatro lados del cuadrado, se suma el mismo número cuatro veces".

Tabla 4.5: Frecuencias de sub-categoría no prevista en el análisis a priori del ítem 3b.

Sub-categoría		Frecuencias	
		Nº	%
Con argumentos numéricos y gráficos	Gráfico cartesiano	5	8,3
	Relación numérica específica, no constante	5	8,3
	Igualdad de los lados del cuadrado	2	3,4
Total		12	20,0

Estos resultados indican que todos los estudiantes muestran un conocimiento no adecuado de magnitudes proporcionales, puesto que ninguno hace uso de un argumento en el cual considere que la covariación entre el lado del cuadrado y su perímetro es constante, o algún otro argumento equivalente. No obstante, se debe reconocer que esta manifestación puede deberse a que sólo se solicita una tabla de magnitudes proporcionales para justificar la respuesta.

<u>Resultados del ítem 3c</u>

El resumen de las respuestas del ítem 3c puede verse en la Tabla 4.6. Se observa que un alto porcentaje de estudiantes (73,3%, 44 estudiantes) considera que las magnitudes edad y altura no son proporcionales. Sin embargo, dentro de este grupo de estudiantes se observa: 27 estudiantes (45%) no presenta ningún tipo de argumentación, 16 estudiantes (26,7%) muestran argumentos incompletos, y sólo 1 refiere a la inexistencia de una razón de cambio constante entre la edad y la altura.

De los 16 estudiantes restantes; 13 (21,7%) no dan respuesta al ítem, y 3 dan una respuesta incorrecta. Sólo un estudiante considera (erróneamente) que las magnitudes edad y altura son proporcionales, basado en la regla ―más en A, más en B".

La naturaleza cualitativa y de aplicación extra-matemática de este ítem, tipificada en las categorías C3c4 y C3c5, fue percibida por 15 de los estudiantes (25%), de los cuales 13 (21,7%) dan una respuesta correcta al ítem, basados generalmente en considerar que las variables edad y altura son ―independientes", mientras 2 (3,3%) responden de manera incorrecta reduciendo la relación edad/altura a casos particulares en que ambas variables muestran un comportamiento cercano a la proporcionalidad.

Para el análisis de la diversidad de respuestas, fue necesario definir dos categorías que no se habían previsto, a saber: ―Correcta con proposición ‗no son proporcionales‘” e ―Incorrecta basada en la regla ―más en A, más en B””.

Tabla 4.6: Frecuencias de las categorías de respuestas del ítem 3c.

Categorías		Frecuencias	
		Nº	%
C3c0: No lo hace		13	21,7
C3c3: Correcta con tabla no-proporcional	C3c3.1: Sin argumentos o con prop ―no son…	16	26,7
	C3c3.2: Variación no constante	1	1,7
C3c4: Correcta basada en la relación edad/altura		13	21,7
C3c5: Incorrecta basada en la relación edad/altura		2	3,3
Correcta con proposición ―no son proporcionales”	Sólo usa la proposición	11	18,3
	Con argumentos numéricos y gráficos	3	5,0
Incorrecta basada en la regla ―más en A, más en B”		1	1,7
Total		60	100,0

En relación con la categoría ―Correcta con proposición ‗no son proporcionales'” refiere a aquellas respuestas en las que no se dio una tabla para argumentar sobre la no proporcionalidad entre las magnitudes edad y altura. En su lugar, se presenta sólo la proposición ―no son proporcionales”. Tal y como puede verse en la Tabla 4.6, dentro de esta categoría quedaron comprendidas 14 respuestas, 11 de ellas presentan como argumento sólo la proposición referida, mientras los 3 restantes utilizan argumentos numéricos y gráficos similares a los expuestos en los resultados del análisis del ítem 3b.

Estos resultados parecen indicar que el factor contextual extra-matemático de la situación problema, cuya naturaleza es intuitiva-cualitativa, más cercana a la experiencia de los sujetos, propicie un número mayor de respuestas correctas (Sanz, et al., 1996; Smith, 2002), aún cuando la mayoría de las respuestas presentan deficiencias en sus argumentos.

4.6.4. Descripción de las respuestas de los estudiantes al ítem 4

Para el análisis de las respuestas dadas al ítem 4, de acuerdo con los resultados preliminares del análisis previo, se han considerado las siguientes variables: a) explicación, b) ejemplificación, c) elaboración de tabla y d) elaboración de gráfico. Así mismo, se ha considerado la manifestación de las diferentes categorías identificadas para cada una de estas variables descritas en el sub-apartado 4.5.2.4. En las Tablas 4.7, 4.10 y 4.12 se presenta un resumen de los tipos de respuestas dadas de acuerdo con cada variable y las categorías correspondientes.

Para la variable *explica*, se observa en la Tabla 4.7, que el 40% de los estudiantes basan su explicación en la idea de covariación o uso de la regla intuitiva-cualitativa ―más en A, más en B”. Así mismo, se logró constatar la manifestación de una forma de respuesta sustentada en algún tipo de relación numérica (adición, multiplicación, división) deducida por los estudiantes a partir de algunas regularidades observadas en las sucesiones de pares de números proporcionales de las tablas dadas en el ítem 2. A partir de tal identificación, 8 de los estudiantes (13,3%), realizan una explicación sobre cuándo dos magnitudes son proporcionales, sin llegar a elaborar un enunciado lo suficientemente general para caracterizar esa noción. En ese sentido, uno de los estudiantes mostró una explicación numérica posiblemente no sustentada en el ítem 2, pues refiere a que debe haber ―una relación de 1 : 4” entre las magnitudes. En total 9 estudiantes (15%) utilizan un criterio numérico con el cual elaboran una explicación parcial de la noción magnitudes proporcionales.

Tabla 4.7: Frecuencias de las categorías de las variables explica y ejemplifica.

Variables	Categorías		Frecuencias	
			Nº	%
Explica	C4E0: Incorrectamente/ no lo hace		16	26,7
	C4E1: Explicación parcial	C4E1.1: Regla intuit-cualit/covariación	24	40,0
		C4E1.2: Relación numérica no-cons.	9	15,0
	C4E2: Correctamente /relación constante entre las razones		8	13,3
	Utiliza la representación gráfica como criterio		3	5,0
	Total		60	100
Ejemplifica	C4E0: Incorrectamente / no lo hace		29	48,3
	C4EJ1: Ejemplifica no-relación-const.	C4EJ1.1: Regla intuitiva/covariación	12	20,0
		C4EJ1.2: Relación numérica no-const.	10	16,7
	C4EJ2: Correctamente/relación constante entre las razones		9	15,0
	Total		60	100,0

Se observa, de esta manera que 33 estudiantes (55%) muestra una explicación parcial, para caracterizar la proporcionalidad directa, de acuerdo con las sub-categorías ―C4E1.1: Regla intuitiva-cualitativa/covariación”, y ―C4E1.2: Relación numérica no-constante”.

Una sub-categoría no considerada previamente, que podría formar parte de la categoría ―C4E1: Explica parcialmente”, es la que se ha denominado ―Utiliza la representación gráfica como criterio" para explicar magnitudes proporcionales. Esta sub-categoría refiere a que la representación gráfica de una relación entre magnitudes proporcionales viene dada por una línea recta o de un conjunto de puntos linealmente orientados, no siendo suficiente tal hecho para establecer una caracterización de la proporcionalidad entre magnitudes. En este sentido, sólo 3 estudiantes (5%) utilizan este criterio. Se obtiene de este modo que el 60% de los estudiantes presentan una explicación parcial (covariación, numérica o gráfica) de la noción magnitudes proporcionales.

En relación con la presencia de una explicación correcta, se observa que sólo 8 sujetos (13,3%) utilizan expresamente una relación constante entre las razones de los pares de números proporcionales mostrados. Mientras el 26,7% no explica cuando dos magnitudes son proporcionales o lo hace de manera incorrecta. Estos resultados indican que la noción magnitudes proporcionales no es conocida de manera apropiada por el 87% de los futuros maestros.

Respecto a la variable *ejemplifica* se observa en la Tabla 4.8, que 29 estudiantes (48,3%), ejemplifican de manera incorrecta o no lo hacen. Mientras que 31 estudiantes (51,7%) presentan una ejemplificación correcta, correspondiendo con diferentes formas de explicación, distribuidas como se señala a continuación. 9 estudiantes (15%) presentan una ejemplificación sustentada en la relación constante entre las razones de números proporcionales, de los cuales sólo 6 muestran un ejemplo de una situación específica, mientras 3 utilizan una tabla de proporcionalidad como ejemplo. 22 estudiantes (36,7%) utilizan una explicación parcial en la que sustentan el ejemplo que presentan. Entre ellos sólo 1 estudiante presentó como explicación una descripción intuitiva: ―dos magnitudes son proporcionales cuando existe una relación de sucesión entre ellas", mostrando una tabla de magnitudes proporcionales como ejemplo. Este caso es la presencia de una ejemplificación correcta, basada en una explicación incorrecta.

Tabla 4.8: Frecuencias de respuestas que muestran una tabla para ejemplificar

Respuesta	Categorías		Frecuencias Nº	%
Ejemplifica con tabla	C4EJ0: Incorrectamente		3	5,0
	C4EJ1: Ejemplifica no-relación-const.	C4EJ1.1: Regla intui-cuali/covariación	5	8,3
		C4EJ1.2: Relación numérica no-const.	9	15,0
	C4EJ2: Correctamente/relación constante entre las razones		4	6,7
Total			21	35,0

La presencia considerable del uso de una tabla como forma de ejemplificación (21 estudiantes, 35%), conllevó a revisar qué tipo de explicación, dada por los estudiantes, se encontraba asociada a esta forma de ejemplificación. Los resultados de esa revisión pueden verse en la Tabla 4.8, siendo el uso de una relación numérica no constante entre las cantidades presentadas la que se presentó con mayor frecuencia (15%).

Un último aspecto que se observa sobre el desempeño de los estudiantes en relación con su competencia para ejemplificar magnitudes proporcionales, puede verse en la Tabla 4.9. Se debe resaltar que sólo 13 estudiantes (21,7%) logran mostrar un ejemplo referido a un problema específico de magnitudes proporcionales (lado/perímetro, manzanas/peso, caramelos/costo…). Mientras un número considerable de estudiantes (47 estudiantes, 78,3%) no muestran dominio de esta competencia.

Tabla 4.9: Frecuencias de los tipos de ejemplificación utilizados

Variables	Tipos	Frecuencias	
		Nº	%
Ejemplifica	No lo hace	26	48,3
	Utilizando una tabla	21	33,0
	Utilizando un problema específico	13	21,7
	Total	60	100,0

Los resultados precedentes indican que un alto porcentaje (85%) de los futuros maestros no son capaces de elaborar un ejemplo de magnitudes proporcionales conceptualmente sustentado.

Para la variable *elabora tabla* se observa en la Tabla 4.10, que 26 estudiantes (43,3%) no elaboran la tabla solicitada o la elaboran de manera incorrecta. Mientras otros 26 estudiantes (43,3%) elaboran una tabla correcta sin mostrar expresamente el uso de la propiedad P1. Sólo 8 estudiantes (13,4%) elaboran una tabla correcta conceptualmente sustentada.

Tabla 4:10. Frecuencia de las categorías de las variables elabora tabla.

Variables	Categorías	Frecuencias	
		Nº	%
Elabora tabla	C4T0: Incorrectamente / no lo hace	26	43,3
	C4T1: No uso de la propiedad P1 (ítem 4)	26	43,3
	C4T2: Correctamente /uso de la propiedad P1	8	13,4
	Total	60	100,0

Dentro de la categoría ―No uso de la propiedad P1" han quedado incluidos varios tipos de respuestas (26 respuestas, 43,3%), los cuales, atendiendo a la explicación dada sobre magnitudes proporcionales, se ha considerado pertinente distribuirlos en sub-categorías similares a las descritas para la variable ejemplifica. Es decir, se empleará la explicación dada a magnitudes proporcionales en el ítem para sustentar las tablas presentadas. Así mismo, adicional a las sub-categorías: Regla intuitiva-cualitativa/covariación y Relación numérica no constante, se ha identificado la manifestación de una explicación intuitiva por parte de 4 sujetos (6,7%), quienes elaboran una tabla de magnitudes proporcionales de manera correcta, esta manifestación no fue prevista por el análisis previo. En la Tabla 4.11 se presenta la distribución correspondiente.

Tabla 4.11: Frecuencias de respuestas según no-uso de la propiedad P1 (ítem 4).

Categoría	Sub-categorías	Frecuencias	
		Nº	%
No uso de la propiedad P1 (ítem 4)	C4T1.1: Regla intuitiva-cualitativa/ covariación	11	18,3
	C4T1.2: Relación numérica no-constante	11	18,3
	C4T1.3: Relación cualitativa entre las magnitudes	4	6,7
	Total	26	43,3

Un último comentario que debe hacerse respecto a la variable *elabora tabla*, es que 14 sujetos (23,3%) relacionaron sus respuestas con las tablas del ítem 2, En la revisión de esta parte del ítem 4 se hace más evidente una marcada influencia de ese ítem para dar la respuesta, puesto que en algunos casos, aún cuando proporcionan una explicación incorrecta, en lugar de mostrar una tabla específica, refieren a las tablas del ítem 2.

Los resultados precedentes indican que un considerable porcentaje de futuros maestros (86,6%), presenta una tabla que expresa magnitudes proporcionales, pero sin un sustento conceptual adecuado.

Respecto a la variable *elabora gráfico* se observa en la Tabla 4.12 que 31 estudiantes (51,7%) lo hacen incorrectamente o no lo hacen. Mientras 10 de los estudiantes (16,6%) elaboran un gráfico en el que muestra una disposición lineal de puntos que representan la relación de proporcionalidad, observándose que 5 de ellos (8,3%) consideran la condición continuo/discreto de las variables empleadas, mientras los otros 5 (8,3%) no lo consideran, es decir, elaboran un gráfico trazando una línea continua, aún cuando el ejemplo formulado corresponde a cantidades de magnitud discretas.

Se observa que 19 estudiantes (31,7%) presentan una representación gráfica correcta, pero no especifican las magnitudes respectivas. Esta categoría de respuesta podría estar comprendida como sub-categoría de “C4G1: Puntos con disposición lineal”, pero la misma no fue prevista por medio del análisis previo.

Tabla 4.12: Frecuencia de las categorías de las variables elabora gráfico.

<table>
<tr><th rowspan="2">Variables</th><th rowspan="2" colspan="2">Categorías</th><th colspan="2">Frecuencias</th></tr>
<tr><th>Nº</th><th>%</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Elabora gráfico</td><td colspan="2">C4G0: Incorrectamente / no lo hace</td><td>31</td><td>51,7</td></tr>
<tr><td rowspan="2">C4G1: Puntos con disposición lineal</td><td>C4G1.1: Considera continuo/discreto</td><td>5</td><td>8,3</td></tr>
<tr><td>C4G1.2: No-considera continuo/discreto</td><td>5</td><td>8,3</td></tr>
<tr><td colspan="2">Correctamente sin especificar las magnitudes</td><td>19</td><td>31,7</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Total</td><td>60</td><td>100,0</td></tr>
</table>

Para finalizar, se observa en la Tabla 4.13 que sólo 7 de los estudiantes (11,7%) hacen referencia expresa a la disposición lineal de los puntos, que representan magnitudes proporcionales en sistemas cartesianos, como una característica importante de tales magnitudes. No mostrando ninguno de ellos la precisión de que el origen del sistema cartesiano es uno de los puntos que satisface la relación entre magnitudes de ese tipo. De estos 7 sujetos, 3 de ellos utilizan el criterio de la linealidad para explicar cuándo dos magnitudes son proporcionales, mientras los 4 restantes, dieron una explicación correcta de magnitudes proporcionales y además refirieron a la linealidad como criterio para caracterizar la proporcionalidad.

Tabla 4.13: La linealidad como criterio de la proporcionalidad.

<table>
<tr><th rowspan="2">Relación</th><th rowspan="2">Criterio</th><th colspan="2">Frecuencias</th></tr>
<tr><th>Nº</th><th>%</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Linealidad-proporcionalidad</td><td>C4G2: Refiere a la linealidad como criterio</td><td>7</td><td>11,7</td></tr>
<tr><td>C4G3: No refiere a la linealidad como criterio</td><td>53</td><td>88,3</td></tr>
<tr><td></td><td>Total</td><td>60</td><td>100,0</td></tr>
</table>

Estos resultados indican que un alto porcentaje de futuros maestros (88,3%) muestran un conocimiento deficiente de la relación linealidad/proporcionalidad.

4.7. Discusión de los resultados iniciales

Hemos podido observar, hasta ahora, algunos resultados obtenidos a partir de la aplicación de la herramienta de análisis epistémico/cognitivo. Buena parte de estos resultados ya han sido referidos en otras investigaciones. No obstante, queremos ahora señalar de manera más precisa algunos elementos de interés matemático-didáctico que hemos podido identificar en el proceso de estudio realizado, al tiempo que observaremos su relación con resultados referidos en la literatura respectiva.

Se podrá ver cómo los elementos identificados, en algunos casos, proveen de mayor profundidad y detalle lo relativo a las acciones realizadas durante los procesos de resolución de cada uno de los ítems del cuestionario analizado. Esta posibilidad proporciona a la tarea de análisis puesta un juego, un valor singular que la distingue como herramienta útil para la actividad de investigación en educación matemática. A continuación presentamos tales elementos para cada uno de los ítems del cuestionario.

4.7.1. Análisis y discusión de los resultados del ítem 1

Los resultados obtenidos partir del análisis epistémico y cognitivo del ítem 1, han conducido a reconocer algunos aspectos relevantes, posiblemente útiles para el formador en su labor con futuros maestros, a saber:

Relación constante entre variables extensivas: identificadas en el objeto-propiedades como P1 (ítem 1). La razón intensiva involucra dos variables extensivas: consumo de combustible y distancia que se recorre. Esta razón externa (Freudenthal, 1983) tendrá sentido siempre que la relación entre las variables consumo en litros de gasolina (volumen) por una cantidad de kilómetros determinada (distancia) sea constante. Este aspecto implica la existencia de condiciones especiales de velocidad y recorrido, que no se especifican en el enunciado del problema (Peled, y Bassan-Cincinatus, 2005). Sin embargo, es posible que la existencia de “ciertas normas implícitas”, que regulan la actuación en el aula, haya dejado sin efecto el conflicto que se podría haber generado.

Lo numérico y lo algebraico: que se manifiesta en la resolución del problema al utilizar la regla de tres, lo algebraico refiere a: el uso de la x como incógnita, el signo igual como símbolo de relación y la utilización de una ecuación para resolver el problema. No utilizar una incógnita en la resolución del problema convierte la resolución en un proceso eminentemente numérico.

Esta “reducción” la hemos interpretado como un indicador de un uso inconsciente y mecánico de la regla de tres, siendo utilizada para resolver el problema por el 21,7% de los estudiantes, evitando posiblemente poner en práctica un razonamiento proporcional (Lamon, 2007). Por otra parte, el uso consciente de la regla de tres comprende dos procesos de modelización: verbal-simbólico y simbólico-simbólico, identificados en el objeto-procedimientos. El primer proceso comprende la utilización de la *x* como valor desconocido, el segundo proceso la igualdad como relación y la resolución de una ecuación. Poner en juego estos razonamientos de naturaleza algebraica garantiza la elaboración de un procedimiento correcto y una solución sin tachas. No obstante, queda aún la duda sobre la manifestación de verdaderos razonamientos proporcionales durante tal resolución.

La modelización verbal-simbólica: que transforma el enunciado del problema en una representación que simboliza la regla de tres, incluido como parte fundamental del proceso de resolución, podría ser realizado sin poner en práctica razonamiento proporcional alguno, tal como se evidencia en las respuestas dadas por los sujetos que reducen el uso de la regla de tres a un procedimiento numérico. Esta posibilidad debilita la regla de tres como proceso válido para la puesta en juego de un razonamiento proporcional.

La modelización simbólica-simbólica: que transforma una expresión simbólica (regla de tres) en otra expresión simbólica (ecuación) no parece responder a un proceso razonado y justificado, tiene la categoría de un algoritmo imperativo, sin justificación. Lo cual da lugar a que la modelización derive en un proceso que sirve para obtener una solución ―¡es lo que importa!”, pero no da lugar a la ecuación y despoja a *x* de su significado como valor desconocido asignado en el primer proceso de modelización. Este aspecto se hizo presente en 16 respuestas (26%) (13 en la categoría C12.1 y 3 del tipo S2, referidos en el apartado 3.4.2.1). Se hace fehaciente un doble significado para *x*, como valor faltante o desconocido en el primer modelo, y como incógnita de una ecuación en el segundo modelo. El modelo global falla de dos formas: (a) al ser despojada la *x* de su valor como incógnita, reduciéndose el proceso de resolución a un proceso numérico, y (b) al no producirse una ―equivalencia” entre ambos significados de *x*. Este último aspecto no es perceptible a partir de los análisis realizados, por lo que amerita una investigación más específica que informe sobre los significados dados a *x* en un proceso de este tipo.

Finalmente, el hecho que el 93,3% de las respuestas se encuentre explicado por las categorías previamente establecidas, implica una preparación previa suficiente del profesor para enfrentar las dificultades de los estudiantes en la resolución del problema, lograda tal suficiencia a partir de la realización del análisis previo. Aún cuando las categorías identificadas a partir de las configuraciones epistémicas explican un alto porcentaje (93,3%) de los casos de respuestas, resultaron insuficientes para explicar la totalidad de las respuestas dadas por los estudiantes, esto da relevancia al estudio de las configuraciones cognitivas respectivas.

4.7.2. Análisis y discusión de los resultados del ítem 2

En relación con los resultados obtenidos por medio del estudio de las respuestas a la segunda parte del ítem 2, se ha considerado pertinente discutir lo relativo al trazado de la línea continua como posible indicador de la relación linealidad-proporcionalidad. En este sentido, se reconoce que el trazado de la línea recta continua entre los puntos puede interpretarse desde dos perspectivas. La primera concierne con un hecho posiblemente subyacente en el pensamiento de los alumnos, que proviene de la práctica de la representación gráfica de funciones de variable real, donde a partir de unos puntos representados en un diagrama cartesiano (provenientes de una “tabla de valores”) se debe trazar una línea (recta o curva) que los une. Luego, esta práctica se generaliza y se realiza tal acción de manera inconsciente, aún cuando los puntos representados correspondan a cantidades discretas. La segunda perspectiva consiste en interpretar el trazo de la línea recta como el modo de dar énfasis a la “disposición lineal” que tienen los puntos representados. Es claro que esta segunda interpretación conlleva otro error; utilizar el trazo de la línea continua uniendo los puntos para expresar *linealidad*, cuando el uso correcto de tal acción expresa *continuidad* de la relación que se representa. Por tanto, desde cualquiera de estas dos perspectivas, dado que las tablas sólo pueden proveer de cantidades discretas, las representaciones gráficas de las tablas debieron obedecer a esta condición (de cantidades discretas) y sólo contener la secuencia de puntos de pares de números de las cantidades de magnitudes proporcionales.

Finalmente, como una última observación de las respuesta exhibidas por los estudiantes, se consideró conveniente prestar atención si los estudiantes toman en cuenta que la disposición lineal de los puntos (continua o sólo los puntos) al ser prolongada pasaría por el origen de coordenadas. La nueva categoría para el análisis es: “Considera que la disposición lineal de los puntos pasa por el origen”. Para este análisis se formuló el siguiente criterio:

- Si traza la línea recta continua y su prolongación pasa (no pasa) por el origen, entonces se considerará que la disposición lineal de los puntos pasa (no pasa) por el origen.
- Si no traza la línea recta continua, se observará si una línea recta trazada por los puntos dados pasa (no pasa) por el origen. Si ese trazo pasa (no pasa) por el origen entonces se considerará que la disposición lineal de los puntos pasa (no pasa) por el origen.

Se asume como elemental que si la línea recta continua, trazada, pasa por el origen, es porque se considera que tal condición debe ser satisfecha por la relación que se está representando.

Atendiendo a lo expuesto, se observó que 26 estudiantes (43,3%) consideran que la disposición lineal de los puntos pasa por el origen, mientras 27 estudiantes (45%) consideran que no necesariamente tal representación debe pasar por el origen. Este resultado provee de mayor evidencia sobre el conocimiento incompleto mostrado por la mayoría de los estudiantes acerca de la relación linealidad-proporcionalidad.

Es claro que estos resultados no son concluyentes, se requeriría un estudio más detallado que incluiría: a) una reformulación del ítem de modo que comprenda una consigna donde se solicite referir a la relación linealidad-proporcionalidad, y b) realizar entrevistas con los casos representativos de las diferentes formas de respuestas.

4.7.3. Análisis y discusión de los resultados del ítem 3

Ítem 3a: El predominio de respuestas en las que no se dan argumentos o sólo se utiliza la proposición “sí/no son proporcionales”, como respuesta, no permite explicar los fundamentos de buena parte de las respuestas dadas (32 estudiantes, 53,3%). Este hecho, dice que la potencialidad de este ítem para informar sobre la manifestación de la secuencia intuitiva-cualitativa-conceptual es relativamente baja. No obstante, se observa en la Tabla 4.14 que sólo 19 estudiantes (31,7%) dan algún tipo de argumentación, de los cuales 12 estudiantes (20%), que representa más del 60% de este grupo, basan su respuesta en la regla “más en A, más en B”, observándose que el de lo conceptual lo presenta sólo un estudiante. Esto indica, que la secuencia referida se manifiesta en orden decreciente a lo largo del número de respuestas dadas, observándose una mayor frecuencia de lo intuitivo-cualitativo que lo conceptual.

Por otra parte, considerar un problema pseudo-proporcional como proporcional pone de manifiesto el uso de la ―ilusión de la linealidad" (Van Dooren et al, 2003), la cual se hizo presente en 46 de las respuestas (76,7%). Se debe notar que dentro de este número de respuestas quedaron incluidos: 28 estudiantes (46,7%) que no dan ningún tipo de argumento en su respuesta y 18 (30%) que dan dos tipos de argumentos, a saber: un argumento gráfico o numérico mostrado por 6 estudiantes y uso de la regla ―más en A, más en B" mostrado por 12 estudiantes. De modo que el argumento más utilizado para sustentar la ilusión de la linealidad es la regla intuitiva-cualitativa, de covariación ―más en A, más en B".

Tabla 4.14: Frecuencia de las respuestas del ítem 3a de acuerdo con el argumento empleado.

Variables	Categorías	Frecuencias	
		Nº	%
No lo hace		9	15,0
Sin argumentos o con proposición ―sí/no son proporcionales	Con tabla proporcionales y proposición ―sí son …	2	3,3
	Con tabla no-proporcional y proposición ―sí son…	13	21,7
	Sin tabla, sólo proposición ―sí son proporcionales"	13	21,7
	Con tabla no-proporcional y proposición ―no son…"	4	6,6
Con argumentos	Gráficos y numéricos	6	10,0
	Regla ―más en A, más en B"	12	20,0
	Covariación no constante	1	1,7
	Total	60	100,0

Así mismo se observó que 3 estudiantes (5%) consideran que la covariación entre el lado y la superficie se debe a que se suman números específicos para obtener la sucesión de pares de número proporcionales. Esta compensación de índole aditiva refiere al uso de estrategias aditivas para la resolución de problemas de proporcionalidad, se debe notar en este caso su débil presencia.

En relación con la tipología de respuestas previstas en las categorías establecidas previamente, se debe reconocer que 33 de las respuestas (55%) estuvieron contenidas en tales categorías. El resto, 45% de las repuestas, estuvo contenido en la categoría: ―Incorrecta con proposición ‗si son proporcionales'", la cual no fue prevista. Este hecho, junto a la sentida ausencia de argumentaciones en un alto porcentaje de las respuestas, tal y como se viene señalando, implica una necesaria modificación en el ítem 3a, esta consistiría en solicitar algún tipo de argumentación, no necesariamente una tabla, que explique por qué sí o por qué no se consideran esas magnitudes como proporcionales.

Ítem 3b: Al igual que en el ítem 3a, en las respuestas dadas al ítem 3b se observa el predominio de las categorías caracterizadas por la falta de argumentos en las respuestas (26 respuestas, 43,3%), sobre las demás categorías. Nuevamente este hecho dificulta una observación adecuada de la secuencia intuitivo-cualitativo-conceptual, hipotética de la proporcionalidad. No obstante, al relativizar los resultados se observa nuevamente una manifestación decreciente entre las formas de argumentación presentadas; lo intuitivo-cualitativo en 9 de las respuestas, lo gráfico (más próximo a lo conceptual) en 5 de las respuestas, mientras lo conceptual no se hace presente en ninguna de las respuestas. Es claro que esto no es concluyente, pero es lógico pensar que la secuencia referida organiza la configuración cognitiva global de la noción de proporcionalidad, tal y como referido por diversos autores (Behr, et al., 2002; Smith, 2002; y Streefland, 1985)

Por otra parte, la relación entre las categorías previstas y no previstas para el análisis de las respuestas de los estudiantes, informa que las categorías previstas explican el 33% de las respuestas. No obstante, si se considera que ese porcentaje incluye el 21,7% de quienes no responden o lo hacen incorrectamente, se debe reconocer que la predicción realizada es deficiente. Consideramos que este resultado se debe a la ausencia de argumentos en buena parte de las repuestas dadas. Procede, por tanto, como medida inicial, la reformulación del ítem de modo que se solicite la argumentación respectiva.

Ítem 3c: Los resultados relativos al análisis del ítem 3c revelan que existe una diferencia bastante marcada entre las respuestas dadas a los ítems 3a y 3c. Aún cuando los dos ítems refieren a situaciones de magnitudes no proporcionales se observa, que mientras para el ítem 3a un alto porcentaje de las respuestas son incorrectas o no se dan (55 respuestas, 91,7%), para el ítem 3c sucede lo contrario; un alto porcentaje de respuestas se dan y son correctas (44 respuestas, 73,3%). Esta disparidad puede deberse a que ambas tareas comprenden factores contextuales diferentes (Sanz, et al., 1996; Smith, 2002). Este resultado provee de mayor fuerza a la hipótesis de la necesidad de desarrollar una secuencia intuitivo-cualitativo-conceptual en la construcción de la noción de proporcionalidad. En efecto, dado que para el ítem 3c los razonamientos intuitivos y cualitativos fueron suficientes para generar respuestas correctas, para el ítem 3a tales formas de razonamiento resultaron insuficientes y condujeron a respuestas incorrectas.

Otro aspecto que se hace notar con los resultados del ítem 3c es que la ―ilusión de la linealidad” se manifiesta en sólo una respuesta, quedando reducida tal tendencia en las respuestas de este tipo de ítem a una expresión mínima. No obstante, este resultado corrobora lo señalado por Van Dooren et al. (2008) al referir a la complejidad involucrada en los problemas pseudo-proporcionales que propician la manifestación de la ilusión de la linealidad. Es decir, la manifestación de la ilusión de la linealidad está en relación con la complejidad que tenga el problema pseudo-proporcional que se resuelve; a mayor complejidad, mayor manifestación de este error (Van Dooren et al., 2008).

4.7.4. Análisis y discusión de los resultados del ítem 4

Respecto a la variable *explica*, aún cuando las categorías definidas parecieran suficientes para tipificar las distintas respuestas, dentro de la categoría ―C4E0: Incorrectamente /no lo hace”, han quedado comprendidas dos sub-categorías que han sido identificadas a partir del análisis cognitivo, a saber: ―Intuitivo” y ―Circular”. La categoría intuitivo refiere a descripciones muy generales satisfechas por las magnitudes proporcionales (relación, dependencia, semejanza, indicadas por la lógica), utilizadas por los estudiantes para dar su explicación. La categoría circular refiere a tratar de explicar las magnitudes proporcionales utilizando el término "proporción" o "proporcionalidad". Tomando en cuenta estas sub-categorías, se observa que 7 de las respuestas incorrectas (11,7%) corresponden con el uso de una explicación intuitiva, tales como: ―dos magnitudes son proporcionales cuándo una influye sobre la otra, es decir, guardan algún tipo de relación”. Mientras 2 respuestas (3,3%), fueron de índole circular, de la forma: ―magnitudes proporcionales son aquellas que forman sucesiones de números proporcionales”.

La necesidad de identificar categorías dentro de las respuestas incorrectas, tales como las mostradas en el párrafo anterior, busca determinar las formas más básicas-simples de razonamiento que logran configurar los estudiantes al tratar de explicar lo que significa que dos magnitudes sean proporcionales. Consideramos importante este aspecto para la comprensión de cómo se manifiesta este concepto, de modo que permita concebir secuencias didácticas encaminadas a ir desde lo más elemental hacia lo más complejo de esta forma de conocimiento.

Una revisión de las respuestas con el objeto de determinar el uso de una explicación de la proporcionalidad basada en estrategias aditivas, muestra que sólo 3 de los sujetos

(5%), comprendidos en la sub-categoría “C4E1.1: Regla intuitiva-cualitativa, de covariación “más en A, más en B””, consideran que la covariación es el resultado de agregar (sumar) a los valores precedentes números específicos, para obtener los demás valores. Este resultado conduce a considerar que el uso de una estrategia aditiva puede estar asociado al uso de la regla intuitiva-cualitativa de covariación “más en A, más en B”. La estrategia aditiva puede presentarse como consecuencia de la necesidad de establecer un cambio entre las variables puestas en relación. Al no tener una idea precisa (multiplicativa) para explicar el cambio, se echa mano de la adición para argumentar la “razón del cambio” que se presenta.

Los resultados señalan que un considerable número de estudiantes (36 estudiantes, 60%) muestra una explicación de magnitudes proporcionales basados en aspectos parciales de la proporcionalidad (regla intuitiva-cualitativa/covariación, relación numérica no-constante, representación gráfica). Al juntar estos con los 16 sujetos (26,7%) que no dan explicación o que lo hacen incorrectamente, obtenemos que el 86,7% de los sujetos no logra enunciar una explicación conceptualmente sustentada. La manifestación de estas formas de respuestas constituye la puesta en juego de algunos de los elementos caracterizadores del razonamiento proporcional, expuestos en el apartado 2.3, del capítulo 2 de este trabajo. Estos resultados conducen a la necesidad de producir una secuencia epistémica que involucre los diferentes elementos parciales para llegar a construir una trayectoria didáctica adecuada. Llegar a construir tal secuencia constituye una aspiración ampliamente reconocida (Inhelder y Piaget, 1996; Lamon, 2007; Lesh, Post y Behr, 1988)

Se observa que las categorías establecidas previamente para la variable *ejemplifica* han correspondido con el 98,3% de los tipos de respuestas observadas. El único caso no comprendido en dichas categorías corresponde a una ejemplificación formulada utilizando una tabla, basada en una explicación de índole intuitiva.

Así mismo, la consideración del uso de una tabla como forma de ejemplificación condujo a reconocer que 20 respuestas (33,4%) muestran ese uso. Si bien esta forma de respuesta fue considerada en la presentación de posibles soluciones al ítem, también es cierto que no se previó como categoría para tipificar las respuestas.

Las manifestaciones anteriores deberán ser consideradas para posteriores aplicaciones del instrumento respectivo.

Por otra parte se debe señalar que aún cuando no se muestre una explicación totalmente correcta de cuando dos magnitudes son proporcionales, 22 estudiantes (36,7%) mostraron ejemplos correctos de magnitudes proporcionales; 21 de ellos basados en explicaciones parciales (regla intuitiva-cualitativa/covariación, relación numérica no-constante), y uno basado en una explicación intuitiva incorrecta. Este resultado corrobora que la acción de ejemplificar constituye una manifestación particular, insuficiente para garantizar un conocimiento conceptual adecuado.

En relación con la variable *elabora tabla*, aún cuando las categorías previstas fueron suficientes para englobar el total de las formas de respuestas, Se observó que dentro de la categoría ―No uso de la propiedad P1" habían quedado comprendidos diversos tipos de respuestas. Con el objeto de profundizar en la descripción de las formas de respuestas obtenidas y determinar el fundamento de estas respuestas, se consideró pertinente realizar una clasificación de las mismas de acuerdo con categorías y criterios similares a los utilizados para la variable ejemplifica. A partir de esa clasificación se logró identificar los posibles sustentos para la elaboración de tablas correctas sin el uso de la propiedad P1 (ítem 4), observándose que los 26 sujetos involucrados muestran una sucesión de magnitudes proporcionales, utilizando como fundamento aspectos parciales de la proporcionalidad (regla intuitiva-cualitativa/covariación, relación numérica no-contante, explicación intuitiva). Esta situación es la manifestación del conflicto potencial previsto para el objeto-argumentos en el análisis epistémico, el cual sugiere que se puede obtener una sucesión de magnitudes proporcionales, representada en una tabla, haciendo uso de un conocimiento parcial sobre magnitudes proporcionales.

El uso de las tablas del ítem 2, para dar una respuesta a la parte *ejemplifica* del ítem 4, lo cual se observó en 14 estudiantes (23,3%), fue previsto a priori a partir de la elaboración de posibles respuestas. Sin embargo, tal previsión se hizo en un sentido positivo, es decir, considerando que las explicaciones (que servirían de sustento al uso de esas tablas) se darían de manera correcta. Lo observado es todo lo contrario, ninguno de estos 14 estudiantes sustenta su ejemplo sobre una explicación correcta. Este aspecto deberá considerarse para futuras aplicaciones del instrumento.

En los resultados de la variable *elabora gráfico* se observó que 19 estudiantes (31,7%) presentan una representación gráfica correcta, pero no especifican las magnitudes respectivas. Esta manifestación no fue prevista en el análisis previo. Una posible explicación es que esa manifestación puede ser consecuencia del formato de las tablas dadas en el ítem 2, cuyo enunciado no considera las magnitudes correspondientes, y las representaciones gráficas exigidas para ese ítem fueron solicitadas sin tener que especificar las magnitudes que se representaban.

En el cruce de los sujetos que no especifican las magnitudes (19 estudiantes) con los que proporcionan una explicación correcta (8 estudiantes), da como resultado sólo 1 sujeto. Lo cual conduce a suponer que quienes responden correctamente, tienden a no considerar los tipos de magnitud puestos en juego, al elaborar la representación gráfica de una relación de proporcionalidad.

Asimismo, se observa a partir de los resultados, que 29 estudiantes (48,3%) elaboran una representación gráfica de puntos orientados linealmente para representar cuándo dos magnitudes son proporcionales, aún cuando las explicaciones dadas sobre esa noción están apoyadas en aspectos parciales. Esto conduce a concluir que, al igual que la ejemplificación y la elaboración de tablas, la elaboración de una representación gráfica constituye un aspecto parcial del conocimiento de la proporcionalidad. De acuerdo con Koellner-Clark y Lesh (2003), este resultado corresponde con la puesta en práctica de una estrategia ―building up", la cual se manifiesta cuando el estudiante es capaz de organizar su información de tal modo que determina un patrón, como un gráfico, una representación o una tabla de proporcionalidad.

En relación con la producción de la secuencia definición-ejemplo-representación, se debe concluir que para esta exploración inicial, no se obtuvo evidencia de la manifestación de tal secuencia en los términos de coherencia propuestos (sub-apartado 4.5.2.4, en este capítulo). Esta ausencia se explica por la falta de un conocimiento articulado en torno a magnitudes proporcionales, exhibido por la mayoría de los estudiantes de la muestra. Este resultado es una manifestación de lo señalado en las investigaciones (Fennema y Franke, 1992; Llinares y Krainer, 2006; Ponte y Chapman, 2006), al considerar el conocimiento del contenido como requisito del conocimiento matemático necesario para la enseñanza. La falta de un conocimiento adecuado sobre magnitudes proporcionales es una limitante que determina la ausencia de la secuencia referida.

4.8. Síntesis y conclusiones

En este capítulo hemos estudiado aspectos relevantes del conocimiento de futuros maestros acerca de razón y proporción. Para tal estudio ha sido de importancia fundamental la identificación de los objetos y significados puestos en juego, cuando el formador/investigador y los estudiantes resuelven una serie de problemas sobre proporcionalidad, comprendidos en un instrumento de exploración inicial. La identificación de los objetos y significados fue realizada a través de la aplicación de la Guía de Reconocimiento de Objetos y Significados (GROS). El uso de esta herramienta ha comprendido la realización de dos formas de análisis: epistémico y cognitivo. A la vez, la realización de estos análisis ha proporcionado una aproximación a las configuraciones epistémicas y cognitivas que se ponen en juego en la resolución de problemas en un ámbito instruccional. Por medio del primer análisis, el formador/investigador fue haciéndose progresivamente consciente de la complejidad de los significados matemáticos que subyacen en la base de las formas de resoluciones. En consecuencia, el formador/investigador estuvo en capacidad de identificar previamente las potenciales estrategias, errores y dificultades que podrían hacerse presentes en las resoluciones de los estudiantes. Esta identificación, de acuerdo con Hill, Ball y Schilling (2008), fomenta el desarrollo del conocimiento matemático necesario para la enseñanza.

Se observa que los análisis epistémicos proporcionaron información sobre qué matemática se pone en juego al resolver problemas de proporcionalidad. Además permite prever posibles conflictos de significado que pudieran manifestarse en los estudiantes al resolver tales problemas. Estas características, de este tipo de análisis, presentan una doble utilidad. Por un lado informa al profesor sobre la complejidad matemática involucrada en el problema, haciéndolo consciente de posibles conflictos y dificultades, fomentando una actuación adecuada ante tales eventos.

Por otro lado, los análisis epistémicos/cognitivos permitieron establecer posibles categorías de respuestas, que se traducen en planteamientos hipotéticos sobre la actuación de los estudiantes, que se contrastan con las respuestas dadas por ellos. Esta práctica promueve la actividad de investigación en el desarrollo de la actividad de enseñanza, es decir, se impulsa la investigación de la enseñanza desde su propia práctica. Así mismo, el análisis cognitivo ha proveído y complementado las configuraciones cognitivas alrededor de las cuales se desarrollan las acciones de los estudiantes al resolver problemas de proporcionalidad.

La identificación de posibles categorías de respuestas, producida a partir del análisis epistémico no pretende ser exhaustiva. Las categorías que se deducen son de índole descriptiva. La suficiencia del análisis depende de la realización de ambos análisis epistémico y cognitivo. Las aproximaciones que se logran a través del análisis epistémico, tienen carácter orientador y reflexivo acerca de las dificultades y posibles conflictos que pueden presentarse al resolver un problema matemático escolar.

La aplicación de esta herramienta integrada (análisis epistémico y cognitivo) ha permitido producir conocimiento de interés, relacionado con la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad en el grupo de futuros profesores participantes, a saber:

- Corroborar que la consolidación del razonamiento proporcional requiere que el estudiante adquiera la habilidad de realizar, de manera flexible, razonamientos escalares y funcionales, pasar de esquemas numéricos a algebraicos, que le permitan construir una regla general para sustentar razonamientos proporcionales avanzados. De modo que sus explicaciones, ejemplificaciones, y representaciones sobre proporcionalidad tengan como fundamento la puesta en juego de esa regla general.

- La disposición lineal de los puntos en un gráfico cartesiano, la covariación entre dos variables puestas en relación, las relaciones numéricas particulares, son aspectos parciales de la noción de proporcionalidad con los cuales sólo es posible llegar a realizar explicaciones parciales o incorrectas referidas a esa noción.

- El conocimiento inicial del futuro profesor sobre la proporcionalidad se encuentra caracterizado en buena medida por el conocimiento de aspectos parciales (disposición lineal de los puntos en un gráfico cartesiano, la covariación, el uso de reglas intuitivas-cualitativas, la elaboración de tablas de magnitudes proporcionales, uso de relaciones numéricas particulares) que son utilizados para explicar cuando dos magnitudes son proporcionales.

- La estrategia dominante de resolución de problemas proporcionales, del tipo valor faltante, utilizada por los futuros profesores, está asociada al uso de reglas, lo cual puede conducir a una solución correcta del problema, sin que un razonamiento proporcional tenga lugar.

- La observación de la manifestación de una secuencia del tipo intuitiva-cualitativa-conceptual en las resoluciones de los problemas de proporcionalidad propuestos en el instrumento, señala que lo intuitivo y lo cualitativo se manifiesta con una frecuencia relativamente mayor que lo conceptual, quedando lo conceptual en un considerable número de resoluciones totalmente ausente.

- Los futuros maestros presentan dificultad para: (a) dar respuestas conceptualmente argumentadas, (b) reconocer un problema pseudo-proporcional, (c) elaborar la secuencia explicación-ejemplificación-representación al tratar con la noción magnitudes proporcionales

Todo lo anterior conduce a reconocer que la realización del análisis epistémico y cognitivo permite la producción de conocimiento especializado del contenido, puesto que el conocimiento que se produce es un tipo de conocimiento sobre la proporcionalidad generado desde una postura didáctica, que busca resolver no sólo el problema matemático en cuestión, sino que el problema matemático se resuelve teniendo como contexto el problema didáctico de su enseñanza y aprendizaje. Es el profesor quien se coloca en la tarea de identificar, a partir de las soluciones de situaciones problema; los objetos, significados y conflictos potenciales que pueden manifestarse en las mismas.

El estudio integrado de ambas configuraciones informa sobre los procesos (de resolución de problemas y de significación de objetos matemáticos) que tienen lugar durante el desarrollo de la actividad instruccional, sobre todo cuando esta se basa en la resolución de problemas. Además de informar sobre tales procesos, los análisis realizados contribuyen con la identificación de estrategias, errores y dificultades involucrados en la resolución de los problemas respectivos.

Las *estrategias correctas* de resolución son exploradas a través de la consideración de las diferentes resoluciones posibles, realizadas previamente al análisis epistémico. Las *estrategias incorrectas y los errores*, generalmente estarán comprendidos al poner en juego significados diferentes a los propuestos para los distintos objetos identificados, los cuales pueden ser observados a partir de las configuraciones cognitivas respectivas. Las *dificultades* estarían vinculadas con la identificación de los conflictos potenciales, aquellos que se hacen presentes con alta frecuencia en las respuestas de los estudiantes.

Así, la determinación de estrategias, errores y posibles dificultades de los maestros en formación, al resolver un problema de proporcionalidad, puede hacerse en buena medida por medio del estudio de las configuraciones epistémicas del problema y complementado por el estudio de las configuraciones cognitivas. Esta forma de conocimiento en la que se identifican posibles conflictos de significado que podrían conducir a una previsión de los errores y dificultades posibles, que comprende la resolución del problema, faculta para la adquisición de conocimiento de contenido y de los estudiantes (CKS) (Hill, Ball y Schilling, 2008).

Una consecuencia inmediata del trabajo realizado hasta este momento es el planteamiento en el que se considere la posibilidad del uso de la GROS por parte de los futuros profesores. Es decir, desarrollar tareas de formación en las que los estudiantes de magisterio realicen análisis epistémicos y cognitivos a partir de la resolución de problemas de proporcionalidad del nivel de educación primaria. Ante esta posibilidad se pusieron en marcha algunas experiencias.

En efecto, con el objeto de realizar indagaciones iniciales, se pusieron en práctica actividades con futuros maestros, en el inicio de su segundo curso de la carrera de magisterio, encaminadas a explorar la factibilidad de llevar a efecto un estudio sobre el uso de las configuraciones epistémicas y cognitivas por los estudiantes de magisterio y las posibles implicaciones que tal uso podía generar.

En este orden de ideas, en capítulo 6 informaremos sobre experiencias y esfuerzos en la dirección antes descrita. Asimismo, en el Anexo L presentamos un artículo publicado sobre una experiencia en esa dirección.

CAPITULO 5

DESARROLLO DEL CONOCIMIENTO SOBRE PROPORCIONALIDAD

5.1. Introducción

En este capítulo presentamos los resultados obtenidos por medio de la puesta en juego de un procedimiento de exploración similar al que informamos en el capítulo anterior. Nos basaremos en esta ocasión en las descripciones de la resolución y análisis de un ítem, relativo a la proporcionalidad directa y simple, y los resultados de su aplicación a un grupo de futuros profesores de primaria.

Hemos observado en el capítulo anterior algunas características del conocimiento exhibido por ese mismo grupo profesores en formación inicial, destacándose: (a) que su conocimiento se encuentra caracterizado, en buena medida, por el conocimiento de aspectos parciales, que son utilizados para explicar cuándo dos magnitudes son proporcionales, (b) uso predominante de algoritmos (regla de tres) como estrategia de resolución, y (c) dificultad para dar respuestas conceptualmente argumentadas y reconocer problemas pseudo-proporcionales o no-lineales.

En tal sentido, en este capítulo informamos sobre las respuestas dadas a un ítem con el cual se pretendió observar el progreso de ese grupo de futuros profesores, luego de concluir el proceso instruccional ―naturalmente" implementado, de acuerdo con el programa de formación institucionalmente establecido, correspondiente al primer cuatrimestre, de la asignatura Matemática y su Didáctica, del primer año de la carrera de magisterio de la Universidad de Granada.

De manera que con el desarrollo de este capítulo perseguimos lograr como objetivo: ―Describir el conocimiento sobre proporcionalidad exhibido por un grupo de futuros profesores al concluir su primer curso de formación profesional relativo a ese tema", es decir, el objetivo **OE3** del trabajo de investigación en curso, el cual corresponde con la pregunta **P2** de investigación: “¿Qué conocimiento sobre la proporcionalidad adquieren los futuros maestros durante su primer año de formación inicial?”; que hemos propuesto en el apartado 3.4, del capítulo 3. Esta descripción la realizamos sobre la base de la aplicación de un ítem, incluido en una prueba de control, regularmente aplicada por el formador al final del primer cuatrimestre del primer año de la carrera de magisterio.

Con el fin de realizar esa descripción llevamos a cabo un estudio de las configuraciones epistémico/cognitivas, en torno a la elaboración y aplicación del ítem en cuestión. Este estudio nos ha permitido identificar los tipos de objetos y procesos de significación puestos en juego al resolver ese ítem (configuraciones epistémicas), que nos provee, a nuestro entender, de información pertinente para aproximarnos a una descripción de las respuestas dadas por los sujetos de la muestra (configuraciones cognitivas). En este capítulo intentamos avanzar en el uso de la guía para el reconocimiento de objetos y significados (GROS), al tratar de mostrar una articulación de los objetos reconocidos en el proceso de resolución analizado, lo cual interpretamos como un modo de ver el “funcionamiento de la resolución”. Asimismo, con el fin de realizar una valoración del uso de estas herramientas (estudio de las configuraciones epistémicas/cognitivas) se comparan los resultados obtenidos por medio de los análisis epistémicos y cognitivos de cada problema del instrumento.

Concluimos este capítulo con una discusión de los resultados, en el que comparamos las actuaciones de los futuros profesores de la muestra, en los ítems-problemas de los instrumentos de diagnóstico y de control aplicados, en el desarrollo del proceso instruccional implementado. Se trata de informar sobre posibles desarrollos del conocimiento relativo a la proporcionalidad registrados en función de los objetivos de investigación formulados.

5.2. Problemática y antecedentes

Hemos referido en varias ocasiones a la importancia de desarrollar un conocimiento consolidado sobre la proporcionalidad en la formación de futuros profesores de primaria. En este sentido hemos observado en el capítulo anterior que el conocimiento sobre la proporcionalidad de los futuros maestros se presenta desarticulado, distribuido en trozos de conocimientos aislados que no terminan de integrarse en una regla general.

Asimismo, exhiben como estrategia predominante de resolución de problemas proporcionales, del tipo valor faltante, el uso de reglas, lo cual puede llevar a un resultado correcto sin que haya garantía de la manifestación de un razonamiento proporcional (Cramer, Post y Currier, 1993; Lamon, 2007; Lesh, Post y Behr, 1988).

Además, pudimos observar cómo ante un problema en el que se ponían en relación variables, cuya covariación no es proporcional, era juzgado por la mayoría de los sujetos participantes (77%) como una situación proporcional. En relación con este último aspecto, de acuerdo con la literatura consultada, el desarrollo del conocimiento de la proporcionalidad involucra el reconocimiento de situaciones proporcionales y no proporcionales (Cramer y Post, 1993b; Fernández y Llinares, 2011; Lamon, 1995; Lamon, 2007).

Es a partir de estos resultados, que nos hemos planteado como problema de investigación, observar posibles cambios en el desarrollo del conocimiento sobre proporcionalidad del futuro profesor, al finalizar el primer cuatrimestre de su formación inicial. En relación con este problema, consideramos que durante ese proceso de formación se podría atender la necesidad de que el futuro profesor sea capaz de resolver, de manera apropiada, problemas de proporcionalidad, y pueda distinguir entre una situación de proporcionalidad y una no proporcional.

En este orden de ideas, ajustándonos al desarrollo “natural” de las actividades regulares de ese periodo, nos planteamos, específicamente, la posibilidad de averiguar lo siguiente: (a) cómo resuelve el futuro profesor un problema de valor faltante proporcional, (b) qué explicación provee sobre las condiciones que le permiten considerarlo como un problema proporcional, (c) cómo reconoce problemas no proporcionales, y (d) qué explicación provee sobre las condiciones que le permiten considerarlo como un problema no proporcional.

Debemos reconocer que nuestro interés, más expedito en este capítulo, está dirigido al estudio de las actuaciones de los sujetos en torno a la resolución de situaciones proporcionales y no-proporcionales, más específicamente; a la distinción entre estos dos tipos de situaciones. En tal sentido, a continuación referiremos a algunos antecedentes relacionados con tal estudio. No obstante, aunado a ese interés, se encuentra nuestra intención de poner en práctica herramientas de análisis didáctico específicas, dirigidas a profundizar la comprensión y fomentar la reflexión en torno a los conocimientos activados durante la resolución de ese tipo de situaciones. De manera que, el desarrollo de ese estudio sobre el conocimiento de los futuros profesores, relativo a la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales, lo realizamos haciendo uso de ese tipo de herramientas.

Consideramos que el estudio en torno a las situaciones de proporcionalidad puede ser enfocado desde al menos tres perspectivas: (a) la pertinencia/no-pertinencia del uso del modelo de la proporcionalidad, (b) el uso adecuado/no-adecuado de objetos matemáticos (elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos) en la resolución de situaciones proporcionales, y (c) el uso adecuado/no-adecuado de estos objetos en la resolución de situaciones no proporcionales.

Nuestro interés se centra en estudiar la problemática sobre el aprendizaje de la proporcionalidad desde las dos primeras perspectivas. Posicionados en la primera perspectiva reconocemos tres tipos de situaciones: (a) la que permite el uso del modelo lineal haciendo uso de ciertos grados de libertad, (b) la que el modelo es totalmente apropiado, y (c) la que el modelo es totalmente inapropiado.

Respecto al uso del modelo lineal, en el que se admite cierto grado de libertad para modelar algunas situaciones reales, Peled y Bassan-Cincinatus (2005) presentan algunos casos de este tipo. En este capítulo nos interesa el estudio de situaciones en las que el modelo lineal es apropiado o no apropiado, con énfasis en el análisis o reconocimiento de objetos y significados puestos en juego en los procesos de resolución de estos tipos de situaciones.

Respecto al uso del modelo lineal en situaciones en las cuales no es apropiado existen diversos estudios (De Bock et al., 2007; Fernández et al., 2010; Modestou y Gagatsi, 2007; Van Dooren et al., 2003; Van Dooren et al., 2009; Van Dooren et al., 2005; Van Dooren et al., 2008) que han señalado el uso de una sobrevaloración de la linealidad, la cual, a juicio de estos investigadores, ha conducido a la llamada ―ilusión de la linealidad”, que consiste en resolver problemas no lineales utilizando métodos lineales.

Según Modestou y Gagatsi (2007), la ilusión de la linealidad constituye un obstáculo epistemológico, puesto que la manifestación de ese error tiende a resistir, persistir y reaparecer, cuando la estructura lingüística del problema es similar a la estructura de un problema de proporcionalidad, obstaculizando la manifestación de razonamientos aditivos necesarios para resolver situaciones problema no lineales (Modestou et al., 2008, p.134). En el sub-aparatado 1.8.3, del capítulo 1, referimos a algunos detalles sobre la manifestación de este error.

Como aspecto primitivo, fundamento de esta forma de razonamiento, hemos identificado en el capítulo anterior la presencia de una covariación cualitativa del tipo “más en A, más en B”, que induce a la aplicación de un razonamiento proporcional, la cual se establece como una regla de uso intuitivo, en los términos propuestos por Tirosh y colaboradores, puesto que funciona como un buen indicador de la proporcionalidad en problemas proporcionales, y, por tanto, su uso se generaliza a problemas no proporcionales (Bosch, 1994; Tirosh y Stavy, 1999; Stavy, et al., 2006). Smith (2001) considera que la forma de razonamiento puesta en juego para hacer uso de la linealidad de manera inadecuada se sustenta en un énfasis de lo absoluto sobre lo relativo de los cambios en situaciones que involucran crecimiento y acumulación.

Los estudios de Van Dooren, Modestou, Fernández y respectivos colaboradores, señalan que un aspecto determinante es la similitud en la estructura lingüística con la que se formulan los problemas proporcionales y no proporcionales, que involucran esa covariación en sus enunciados. Así como también la estructura numérica, puesto que la presencia de razones enteras fomenta el uso no adecuado de la linealidad. En el sub-apartado 1.10.3, capítulo 1, hemos referido a algunos de los resultados de los estudios realizados por estos investigadores.

Otros estudios, realizados desde una perspectiva que enfoca la manifestación de esta forma de razonamiento como una falta del desarrollo del conocimiento sobre la proporcionalidad, señalan la necesidad de poner en juego tareas dirigidas a desarrollar procesos de unitización y normalización (Lamon, 1994; 1995; 2006; 2007), o al desarrollo de la razón como una nueva unidad (Fernández y Llinares, 2011; Lamon, 1993a), los cuales contribuyen a distinguir entre problemas multiplicativos y aditivos. Más específicamente, de acuerdo con Lamón (1995) es necesario el desarrollo de un proceso de reconocimiento de las situaciones organizadas por la razón de aquellas que no lo son, que puede iniciarse poniendo en juego tareas que involucren una diversidad de ejemplos de situaciones proporcionales y no proporcionales. Sobre este asunto hemos referido en el sub-apartado 1.8.2, del primer capítulo.

En síntesis, esta forma de razonamiento se encuentra basada en una idea de covariación cualitativa fomentada por aspectos lingüísticos, numéricos y contextuales del enunciado del problema, pero además, potenciada por la falta de un desarrollo del conocimiento sobre el sentido y el concepto de razón.

Ahora bien, situando esta problemática en el contexto de la formación de futuros profesores, y a la luz de los resultados descritos, nos limitaremos a estudiar las respuestas dadas a dos tipos de problemas: dos proporcionales y dos pseudo-proporcionales. No hemos incluido en este estudio el uso de problemas no-proporcionales del tipo constante, aditivo, cuadráticos… Asimismo, no hemos establecido ningún tipo de condición sobre el tipo de procedimiento-técnica de resolución que deba ser utilizado para resolver el problema proporcional, incluido en el instrumento, lo cual nos permitirá observar la permanencia del tipo de resolución regularmente utilizado por los futuros maestros, luego de un primer cuatrimestre de su formación profesional.

5.3. Contexto y Objetivos del Estudio 2

Hemos presentado en el apartado 3.5, del capítulo 3, una descripción general del contexto, tanto material como instruccional, en el cual se realiza el presente estudio. En este sentido las acciones se realizan con el mismo grupo de sujetos participantes del Estudio 1, reportado en el capítulo anterior, a excepción de un sujeto que participó en el primer estudio, pero que no asistió a la aplicación de la prueba de control del Estudio 2.

Como referimos en el capítulo 3, apartado 3.7, el número de sujetos que participó en la aplicación del segundo instrumento fue mayor (60 sujetos en el primer instrumento y 93 sujetos en el segundo), pero para efectos de la comparación que se pretende hacer se han escogido de este segundo grupo, los sujetos que participaron en la aplicación del primer instrumento. Es decir, se ha tomado la intersección de ambos grupos de participantes, quedando el grupo a considerar en este segundo estudio conformado por 59 sujetos.

En este orden de ideas, es necesario ahora referir a ciertos detalles contextuales que describen, de manera más específica, los escenarios académicos y las acciones didácticas llevadas a cabo, que sirven de espacio a la realización de la exploración que ahora informamos. Un objetivo concomitante a la descripción que ahora presentamos, es proveer de suficiente información que permita realizar nuevos procesos de exploración similares.

5.3.1. Descripción del contexto de instrucción

Esta investigación tiene lugar luego del desarrollo del primer cuatrimestre del programa de formación de maestros de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada, el cual ha comprendido: (a) desarrollo de una trayectoria didáctica, (b) gestión de un estado de asesorías (c) puesta en práctica de las dos primeras fases de un ciclo formativo, y (d) aplicación de una prueba de control. A continuación describimos cada uno de estos momentos.

La *trayectoria didáctica* desarrollada, basada en el enfoque ontosemiótico de la educación matemática (Godino Batanero y Font, 2007), referida en el sub-apartado 3.5.2, del capítulo 3, contempla: presentación de las consignas relativas a un problema matemático a resolver, momentos de exploración personal del problema y posibles soluciones, trabajo colaborativo en equipo en torno a la resolución del problema, presentación y discusión con todos los estudiantes sobre las posibles soluciones puestas en juego por ellos, institucionalización por parte del formador y explicitación de los conocimientos pretendidos. Esta trayectoria se realizó durante una sesión de clase, al inicio del cuatrimestre correspondiente.

En el desarrollo de esta trayectoria tuvo lugar la aplicación del primer instrumento, cuyo estudio y resultados de aplicación fueron informados en el capítulo 4. En ese primer instrumento se incluyó un ítem (ítem 3) que se podría considerar precursor del instrumento del que ahora informamos, puesto que solicita el reconocimiento de situaciones directamente proporcionales o no proporcionales (Fig. 4.8, capítulo 4).

La *gestión de un estado de asesorías*, generado a partir de una sesión de ―clase de teoría" en la cual se realiza una presentación general de la temática referida a la proporcionalidad, se informa sobre la posibilidad de profundizar en el estudio del tema, por medio de la recomendación de un material de lectura y la disponibilidad de horas de tutorías, dirigidas a orientar en esa profundización. En la Fig. 3.4, presentada en el sub-apartado 3.5.2, del capítulo 3, presentamos la lista de materiales de lectura recomendados.

Las *dos primeras fases de un ciclo formativo*, referidas en el sub-apartado 3.5.2, del capítulo 3, contemplan la resolución de problemas matemáticos y la reflexión epistémico/cognitiva en torno a los objetos y significados matemáticos, activados durante tal resolución. Estos procesos de resolución-reflexión fueron realizados por el profesor formador con la colaboración de tres investigadores noveles, con el fin de desarrollar competencias de análisis epistémico al “desempaquetar” conocimiento matemático, de acuerdo con lo expuesto en el apartado 2.6 del capítulo 2, por medio del reconocimiento de objetos matemáticos (elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos) y los significados de estos, puestos en juego durante el proceso de resolución. Esta actividad fue realizada con el ítem incluido en la prueba de control respectiva.

La *aplicación de la prueba de control*, la cual marca el inicio de lo reportado en el presente capítulo, consiste en una prueba que se aplica regularmente al final del primer cuatrimestre, del primer año de formación profesional de los futuros profesores, con el fin de evaluar los aprendizajes adquiridos, relativos a los temas tratados durante este primer periodo. Salvo algunos ajustes realizados sobre las consignas, las diferentes ediciones de este tipo de prueba son similares.

Debemos señalar que durante ese proceso de formación, en el que se inscriben los momentos antes descritos, los futuros profesores estudian otros temas además de la proporcionalidad, a saber: números racionales, geometría, razonamiento algebraico elemental, estadística y probabilidad, para los cuales se desarrollan momentos similares a los descritos. La aplicación de la prueba es un momento común, de control, para la evaluación de los diferentes temas tratados, durante el primer cuatrimestre de estudios.

En este orden de ideas, la prueba de control denominada: “EXAMEN, Primer Parcial, 12 de Febrero 2008”, constituida por seis ítems, incluye un ítem, el ítem 6, relativo a la proporcionalidad. En el Anexo B, presentamos un modelo de la prueba de control. Para efectos de nuestro estudio, consideraremos en adelante el ítem 6 de esa prueba como nuestro segundo instrumento de recogida de datos. En el aparatado 5.4 presentamos una descripción de este instrumento.

5.3.2. Preguntas y Objetivos

Básicamente lo que perseguimos con este segundo estudio es observar y describir el avance sobre el conocimiento del futuro profesor respecto a la proporcionalidad luego de un proceso de instrucción específico. Inscritos dentro de ese proceso de instrucción, descrito en el sub-apartado anterior, asumiendo de manera ―natural" los procedimientos y acciones comúnmente realizadas en ese proceso, hemos considerado pertinente preguntarnos:

¿Cómo resuelve el futuro profesor un problema de valor faltante proporcional?

¿Qué explicación provee el futuro profesor sobre las condiciones que le permiten considerar un problema de valor faltante como un problema proporcional?

¿Cómo reconoce problemas pseudo-proporcionales?

¿Qué explicación provee el futuro profesor sobre las condiciones que le permiten considerar un problema peseudo-proporcional como un problema proporcional o no proporcional?

En consonancia con estas cuestiones no hemos planteado la posibilidad de lograr los siguientes objetivos:

- **O.5.1:** Identificar las estrategias de resolución utilizadas por los futuros profesores para resolver problemas de valor faltante proporcionales.

- **O.5.2:** Describir los argumentos utilizados por los futuros profesores para reconocer una situación proporcional involucrada en un problema de valor faltante proporcional.

- **O.5.3:** Determinar si los futuros profesores identifican una situación no proporcional en problemas pseudo-proporcionales.

- **O.5.4:** Describir los argumentos utilizados por los futuros profesores para reconocer una situación no proporcional involucrada en problemas de pseudo-proporcionales.

Se debe observar que las preguntas formuladas corresponden con la pregunta ―Qué conocimiento sobre la proporcionalidad adquieren los futuros maestros durante su primer año de formación inicial", la cual es la pregunta **P2** de nuestra investigación formulada en el sub-apartado 3.4.1 del capítulo 3. Asimismo, estos objetivos corresponden con el objetivo ―Describir el conocimiento sobre proporcionalidad exhibido por un grupo de futuros profesores al concluir su primer curso de formación profesional relativo a ese tema", el cual es el objetivo **0E3** de nuestro trabajo, planteado en el sub-apartado3.4.2 de ese mismo capítulo.

Por otra parte, debemos señalar que la búsqueda de respuestas a estas preguntas y el logro de estos objetivos se realiza, no sólo inscritos en el proceso de instrucción referido, sino también, haciendo uso de una herramienta de análisis didáctico, dirigida a fomentar una profunda comprensión de los objetos matemáticos y sus significados, activados durante el proceso de resolución.

Por tanto, un objetivo inherente al desarrollo de las acciones de esta investigación, consiste en el uso y valoración de la puesta en juego de tal herramienta en el desarrollo del proceso de instrucción correspondiente, lo cual corresponde con la pregunta **P3** de investigación y el objetivo empírico **OE4** propuesto (sub-apartados 3.4.1 y 3.4.2, del capítulo 3).

5.4. Descripción del segundo instrumento

En el capítulo anterior expusimos los resultados de la aplicación de una prueba de diagnóstico, al inicio de un proceso de formación de futuros profesores. En este segundo estudio, como hemos venido refiriendo, adoptamos como segundo instrumento de recogida de datos, un ítem incluido en una prueba de control aplicada al final del primer cuatrimestre de ese proceso de formación. En la Fig. 5.1 presentamos una transcripción del ítem en cuestión. Un ejemplar de la prueba de control se presenta en el Anexo B.

En términos generales el instrumento está dirigido a evaluar el reconocimiento de situaciones proporcionales y no proporcionales, a identificar los procedimientos utilizados para resolver problemas de valor faltante proporcionales, y la puesta en juego de argumentos utilizados para justificar la proporcionalidad o no proporcionalidad de las situaciones planteadas. Se observa, por tanto una identificación entre las preguntas de investigación, los objetivos formulados y la finalidad del instrumento.

El instrumento consta básicamente de tres tipos de problemas: (a) un problema de valor faltante proporcional, (b) dos problemas pseudo-proporcionales y (c) un problema proporcional de razón igual a uno.

Algunos de los siguientes problemas son de proporcionalidad y otros no.

6.1. Determinar cuáles de las situaciones descritas a continuación pueden considerarse como de proporcionalidad. Explicar con detalle las condiciones que cumple cada enunciado para considerarlo como problema de proporcionalidad, o que no es de este tipo.

- (a) Si los cereales se venden en cajas de tres paquetes, a 1‘80 € la caja, ¿Cuánto costarán 12 paquetes?
- (b) Si un bebé aumenta de peso 3 Kg. en tres meses ¿cuánto aumentará en el primer año?
- (c) Un banco no paga interés anual por el dinero que cada cliente ingresa en él. Si un cliente ingresa 1.500 €, ¿cuánto dinero tendrá en su cuenta después de 2 años si no ha hecho nuevos ingresos? ¿Cuánto dinero tendrá si en lugar de 1.500 €, hubiera ingresado 3.000 €?
- (d) Pedro puede comer 2 pasteles en 3 minutos. ¿Cuánto tiempo le llevará comer 24 pasteles?

6.2. Resuelve aquellas situaciones que has considerado como de proporcionalidad.

Fig. 5.1: Ítem de la prueba de control aplicada

El *problema de valor faltante*, enunciado en el inciso (a) del instrumento, es del tipo ―*One-by-Two* (1x2) *Category*” (Harel y Behr, 1989; p. 83), cuyas unidades se encuentran en diferentes espacios de medida y por lo tanto es un problema de razón, donde la dimensión entre las cantidades de magnitud depende de las razones (*per statements*) que se consideren: es del tipo (a) si se considera la razón ―3 paquetes por 1‘80€”; es del tipo (b) si se considera la razón ―1 caja por 1‘80€”. Su índice de dificultad 2, corresponde con la estructura ―P(R, ii, N)” (Harel y Behr, 1989, p. 108), lo cual, de acuerdo con la jerarquización propuesta por estos autores, conduce a considerarlo como un problema de mayor dificultad que el utilizado en el primer instrumento, en el Estudio 1, cuyo índice de dificultad es 4.

Los dos *problemas pseudo-proporcionales*, enunciados en los incisos (b) y (d) del instrumento, tienen una estructura lingüística similar a uno de valor faltante proporcional, que involucra una covariación del tipo ―más en A, más en B”, en el cual se debe atender a características del contexto del problema (peso/edad de un bebé, alimento/tiempo en que puede comerse) para identificarlo como no proporcional. Van Dooren, et al., (2008), reconocen dos características de estos tipos de problemas, la primera refiere a que se trata de problemas cuya modelización matemática se encuentra fuera del ámbito de la matemática elemental, y la segunda, refiere a que se debe “dar sentido” a la situación específica para juzgarla como no proporcional.

El *problema proporcional de razón igual a uno*, enunciado en el inciso (c) del instrumento, tiene una estructura en la que se presentan sólo dos cantidades de magnitud: dinero y tiempo, las cuales, mientras la magnitud dinero permanece invariable, la magnitud tiempo varía. Esta característica convoca a reconocer una situación proporcional aún cuando el aspecto de covariación está ausente. La proporcionalidad debe ser reconocida en la manifestación de la razón constante “dinero ingresado *por* dinero en la cuenta” o “dinero ingresado *por* dinero que te entrega el banco”, cuyo valor es igual a uno.

El aspecto covariacional, en este tipo de problemas, se convierte en fuente de error, puesto que aún cuando en el enunciado del problema se dice que no se paga interés, se observa que el contexto financiero que involucra su enunciado, representado por un banco y una colocación de dinero en el mismo, intenta encubrir la relación-razón constante: “dinero ingresado por dinero en la cuenta”, haciendo posible la interpretación de la situación como si tuviera lugar una variación del monto ingresado en relación con el tiempo.

En correspondencia con las características de los problemas pseudo-proporcionales identificadas por Van Dooren y colaboradores, antes referidas, la consigna 6.1 del instrumento solicita emitir un juicio sobre la proporcionalidad o no proporcionalidad de los problemas, y en la consigna 6.2, se solicita resolver sólo aquellos que considere proporcionales.

A continuación presentamos un estudio detallado en torno a algunas resoluciones de estos cuatro problemas.

5.5. Estudio de las configuraciones epistémicas

En el capítulo 4 hemos referido y realizado una tarea de análisis de las configuraciones epistémicas de los ítems del instrumento de exploración inicial. En este sentido, en este capítulo, presentamos un análisis similar. Específicamente, ponemos en juego una nueva aplicación de la Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados (GROS) con el fin de:

(a) reconocer objetos matemáticos activados en un proceso de resolución, los cuales se agrupan en las siguientes categorías: elementos lingüísticos (términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas), conceptos/definiciones (entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal), procedimientos (técnicas, operaciones, algoritmos), propiedades/proposiciones (enunciados para los cuales se requiere una demostración o prueba) y argumentos (justificaciones, demostraciones o pruebas de las propiedades/proposiciones utilizadas),

(b) reconocer los significados matemáticos de dichos objetos, explicitando a qué se refieren los mismos o qué papel desempeñan (funciones semióticas) tanto en el enunciado del problema, como en su resolución, e

(c) identificar, a modo de hipótesis, conflictos semióticos potenciales al comparar los significados institucionales pretendidos con los significados personales posibles.

Sin embargo, podremos observar algunas diferencias en la realización de este nuevo análisis, en cuanto a los objetivos, así como en el aprovechamiento de la información producida en esa primera experiencia.

Uno de los logros de este análisis, reportados en el Estudio 1, refiere a la preparación para *actuar en el acto de enseñanza* que adquiere el profesor (Mason y Spence, 1999), producto de la realización de esa tarea de análisis y reflexión. Este aspecto no tiene espacio en esta nueva realización de esa tarea. En este mismo sentido, la identificación previa de *conflictos potenciales* de significado, coadyuvan en esa preparación para actuar del profesor, por lo que en esta nueva realización, la identificación previa de tales posibles conflictos, sólo se realiza con el fin de aproximarnos a prever probables actuaciones de los sujetos, en la resolución de los problemas presentes en el instrumento.

Por otra parte, el estudio detallado, implicado en este tipo de análisis, provee de una profundización en la comprensión de la matemática involucrada en la resolución de los problemas. Esa profundización la identificamos con la propuesta de Ma (1999), asociada con el desarrollo del conocimiento del profesor, relativo a la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad. Es por ello que consideramos, tal como referimos en el apartado 2.5, del capítulo 2, que la tarea de análisis/reflexión epistémico/cognitiva fomenta el desarrollo de esta forma de conocimiento, que en términos de Ball y colaboradores es conocida como *conocimiento especializado del contenido* (Hill, Ball y Schilling, 2008). Esta es una característica, de esa tarea de análisis, presente en todos los estudios desarrollados en esta investigación.

Finalmente, basados en la experiencia de la aplicación del primer instrumento, cuyos resultados fueron reportados en al capítulo 4, algunos de los procesos de análisis epistémico desarrollados en el presente capítulo, se han realizado tomado en cuenta tales resultados. Por ejemplo, uno de los resultados del Estudio 1, señala como estrategias dominantes de resolución de problemas de valor faltante proporcionales, el uso de procedimientos basados en algoritmos; como la regla de tres o el producto cruzado. En consecuencia los análisis de las resoluciones de los problemas considerados, los realizamos sobre el uso de estrategias de resolución de ese tipo.

5.5.1. Configuraciones epistémicas del *problema (a)*

En el apartado 5.4 hemos presentado una descripción general del *problema (a)*, se trata de un problema de valor faltante proporcional, para el cual, según resultados obtenidos en el capítulo anterior y los referidos en la literatura especializada antes referenciada, se presenta como estrategia predominante de resolución el uso de algoritmos (88,4% de los sujetos). En este sentido hemos optado por realizar el análisis de las resoluciones del problema haciendo uso de la regla de tres. En la Fig. 5.2 presentamos el enunciado *del problema (a)*. Debido a que la resolución del *problema (a)* involucra lo solicitado en las consignas 6.1 y 6.2, en el enunciado que presentamos en la Fig. 5.2, hemos incluido tales consignas. De manera similar haremos con los enunciados del resto de los problemas, cuyo estudio presentamos más adelante.

6. Algunos de los siguientes problemas son de proporcionalidad y otros no.
   6.1. Determinar cuáles de las situaciones descritas a continuación pueden considerarse como de proporcionalidad. Explicar con detalle las condiciones que cumple cada enunciado para considerarlo como problema de proporcionalidad, o que no es de este tipo.
   (a) Si los cereales se venden en cajas de tres paquetes, a 1‘80 € la caja, ¿Cuánto costarán 12 paquetes?
   (b) …

   6.2. Resuelve aquellas situaciones que has considerado como de proporcionalidad.

Fig. 5.2: Enunciado del *problema (a)* del instrumento.

Además, dado que para el primer instrumento se utilizó un ítem en el cual se solicitaba el reconocimiento de relaciones de proporcionalidad entre dos pares de magnitudes, de tres tipos de situaciones (ítem 3, Fig. 4.8, capítulo 4), en el cual se sugería el uso de una tabla para justificar tal reconocimiento, entonces hemos considerado adecuado el uso de una tabla para dar las justificaciones, que permiten colegirlo como problema proporcional.

5.5.1.1. Resolución del *problema (a)*

El *problema (a)* es de proporcionalidad. Consideremos una tabla de cantidades de magnitudes (precio por cajas)

× 2 × 2

Caja de tres paquetes	1	2	3	4
Precio en euros	1‘80	3‘60	5‘40	7,20

¿× 2? ¿× 2?

Vemos en la tabla de valores de las cantidades de magnitud, que al variar una de las cantidades el doble, el triple,… la otra también varía el doble, el triple,… Por tanto, se trata de magnitudes directamente proporcionales y la situación es de proporcionalidad. Una vez identificado el problema como proporcional y expuestas las condiciones que permiten reconocerlo como tal, pasamos ahora a resolverlo.

Procedimiento utilizando regla de tres

Dado que en el enunciado del problema se informa sobre el precio por una caja y una caja contiene tres paquetes, para saber cuánto costarán 12 paquetes, deberíamos primero saber cuántas cajas hacen 12 paquetes.

$$\begin{array}{lcl} 1 \text{ caja} & \longrightarrow & 3 \text{ paquetes} \\ x & \longrightarrow & 12 \text{ paquetes} \end{array}$$

$$x = \frac{1\,\text{caja} \times 12\,\text{paquetes}}{3\,\text{paquetes}} = 4 \text{ cajas; así, 12 paquetes hacen 4 cajas.}$$

Sabiendo que 12 paquetes hacen 4 cajas, procedemos a calcular cuánto cuestan los 12 paquetes, es decir, las 4 cajas.

$$\begin{array}{lcl} 1 \text{ caja} & \longrightarrow & 1‘80 \text{ €} \\ 4 \text{ cajas} & \longrightarrow & X \end{array}$$

$$x = \frac{4\,\text{cajas} \times 1'80\,\text{€}}{1\,\text{caja}} = 7‘20 \text{ €; así, 4 cajas, es decir 12 paquetes, cuestan 7‘20 euros.}$$

Es claro que la primera parte de la resolución del problema invoca al uso de la división como repartición en partes iguales. Mientras, el segundo procedimiento, invoca al uso de una multiplicación, en la que se conoce el valor de una unidad y se requiere conocer el valor de varias unidades. Este último resultado también puede ser obtenido por medio de la tabla de magnitudes proporcionales, tal y como hemos mostrado al inicio de la resolución de este problema.

5.5.1.2. Análisis epistémico del *problema (a)*

A partir de la resolución dada al *problema (a)* realizamos el análisis epistémico/cognitivo del problema por medio del uso de la GROS.

Elementos lingüísticos (Términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas)

<table>
<tr><th>OBJETOS</th><th>SIGNIFICADOS</th></tr>
<tr><td>…situaciones de proporcionalidad…
condiciones que cumple cada enunciado para considerarlo como problema de proporcionalidad.</td><td>Especificidad de las relaciones entre las magnitudes consideradas que permite determinar que las mismas obedecen a un modelo lineal.</td></tr>
<tr><td>…cajas de tres paquetes…</td><td>Relación (razón) paquetes por cajas que permite saber cuántas cajas hacen 12 paquetes.</td></tr>
<tr><td>¿Cuánto costarán 12 paquetes?</td><td>Cuestión del problema, cuya respuesta requiere del conocimiento de la cantidad de cajas que ellos constituyen.</td></tr>
<tr><td>Tabla</td><td>Representación tabular en la que se deben escribir las cantidades de magnitud respectivas: precio en euros / cajas de tres paquetes.</td></tr>
<tr><td>×2
<table><tr><td>Caja de tres paquetes</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>Precio en euros</td><td>1'80</td><td>3'60</td></tr></table>¿×2?</td><td>Representaciones utilizadas para indicar las operaciones-relaciones entre las cantidades de magnitudes y justificar que son proporcionales.</td></tr>
<tr><td>$1 \text{ caja} \longrightarrow 3 \text{ paquetes}$
$x \longrightarrow 12 \text{ paquetes}$</td><td>Simbolización de la expresión verbal de la regla de tres</td></tr>
<tr><td>$x = \dfrac{1 \text{caja} \times 12 \text{paquetes}}{3 \text{paquetes}} = 4 \text{ cajas}$</td><td>Representación de los procedimientos de resolución implicados por el uso de la regla de tres</td></tr>
</table>

Conflictos potenciales:

- Reconocer una situación de proporcionalidad
- Reconocer y utilizar la relación (razón) paquetes por caja

- Interpretar el contenido de las celdas de la tabla para justificar la proporcionalidad de la situación.
- Uso de las representaciones requeridas por la regla de tres.

Conceptos/definiciones (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
Magnitudes directamente proporcionales	Dos magnitudes son directamente proporcionales si al variar una el doble, el triple, la mitad,… la otra también varía el doble, el triple, la mitad,….
Sucesión de parejas de magnitudes directamente proporcionales	Parejas de números que permiten realizar comparaciones necesarias para determinar la proporcionalidad de la situación.
Razón	Relación multiplicativa entre magnitudes directamente proporcionales
Regla de tres	Modelización de una situación de proporcionalidad haciendo uso de un algoritmo

Conflictos potenciales:

- Considerar la relación entre cajas de cereales y precio como no proporcional.
- Confundir la razón “precio por caja” con la razón “precio por paquete”

Procedimientos (Técnicas, operaciones, algoritmos)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
Multiplicación	Permite calcular el precio de acuerdo con el número de cajas de cereales que se considere.
División	Permite calcular cuántas cajas de cereales hacen 12 paquetes.
Construcción una tabla	Obtener valores del precio de cajas de cereales de acuerdo con el número de cajas.
Comparación de los valores de la tabla	Permite observar que las magnitudes “precio” y “caja de cereal” son directamente proporcionales.
Regla de tres	Procedimiento numérico-algebraico que permite resolver un problema de valor faltante de proporcionalidad.
Modelización verbal-simbólica	Permite convertir el enunciado de las consignas del problema en un modelo simbólico: $\begin{array}{l} 1 \text{ caja} \longrightarrow 3 \text{ paquetes} \\ x \longrightarrow 12 \text{ paquetes} \end{array}$
Modelización simbólica-simbólica	Permite calcular el valor faltante utilizando procedimientos que convierten una expresión simbólica en otra expresión simbólica que conduce a un resultado: $x = \frac{1 \text{caja} \times 12 \text{paquetes}}{3 \text{paquetes}} = 4 \text{ cajas}$

Conflictos potenciales:

- Obtener una secuencia de pares de valores (cajas de cereales/precio).

- Determinar que los pares de valores obtenidos corresponden a magnitudes proporcionales.
- Usar de manera reiterada la regla de tres para dos situaciones diferentes: paquetes por cajas y precio por cajas.
- Uso mecánico de la regla de tres, que sustituye la puesta en juego del razonamiento proporcional (Lamon, 2007).
- Modelización de una expresión verbal de la forma: ―Si una caja tiene tres paquetes, cuántas cajas hacen 12 paquetes", en una expresión simbólica de la forma: $\begin{array}{l} 1 \text{ caja} \longrightarrow 3 \text{ paquetes} \\ \quad x \quad \longrightarrow 12 \text{ paquetes} \end{array}$
- Modelización de una expresión simbólica en otra, también simbólica, que permite operar y obtener un resultado que representa la solución del problema.

Propiedades (Enunciados para los cuales se requiere una demostración o prueba)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
P1: Si se multiplican las cantidades de cajas de cereal por un número, las cantidades del precio se multiplican por el mismo número.	Observar que una sucesión de pares de números obtenidos para rellenar una tabla son directamente proporcionales.
P2: La relación entre el precio y las cajas de cereales es de proporcionalidad.	Respuesta de la primera consigna del problema
P3: $\begin{array}{l} 1 \text{ caja} \longrightarrow 3 \text{ paquetes} \\ \quad x \quad \longrightarrow 12 \text{ paquetes} \end{array} \Longrightarrow x = \frac{1\text{caja} \times 12\text{paquetes}}{3\text{paquetes}} =$	Permite pasar de un arreglo simbólico de los datos del problema a una ecuación
P4: Los 12 paquetes hacen 4 cajas	Resultado requerido como previo en la resolución del problema
P5: Los 12 paquetes cuestan 7'20 euros	Respuesta final del problema

Conflictos potenciales:

- No utilizar la propiedad P1.
- No utilizar la propiedad P2.
- Utilizar adecuadamente relaciones entre modelos simbólicos involucrados en el uso de la regla de tres.
- No encontrar la propiedad P4.
- No encontrar la propiedad P5.

Argumentos (Justificaciones, demostraciones o pruebas de las propiedades utilizadas)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
A1: Es la definición de magnitudes directamente proporcionales	Justifica P1.
A2: Puesto que las parejas de cantidades de magnitud relativas a la relación —precio por cajas" cumplen con P1.	Justifica P2.
A3: Es una relación que se establece para la resolución de un problema al hacer uso de la regla de tres.	Justifica P3
A4: Se obtiene por medio de la aplicación de algoritmos diseñados para resolver problemas de valor faltante proporcionales.	Justifica P4 y P5.

Conflictos potenciales:

- Proveer de una sucesión de números proporcionales, inscritos en una tabla, y no exhibir el uso de los argumentos correspondientes.
- Aplicación mecánica de algoritmos que producen resultados para los cuales no se tiene un significado específico.

5.5.2. Configuraciones epistémicas del *problema (b)*

El *problema (b)* refiere a una situación no proporcional, es un problema del tipo pseudo-proporcional. Hemos referido en los apartados anteriores a algunas características de estos tipos de problemas. Asimismo, en el capítulo 4, estudiamos un problema de este tipo, referido a la relación edad/altura de las personas (ítem 3c del primer instrumento, sub-apartado 4.5.1.3, del capítulo 4). En la Fig. 5.3 presentamos el enunciado del problema.

6. Algunos de los siguientes problemas son de proporcionalidad y otros no.
   6.1. Determinar cuáles de las situaciones descritas a continuación pueden considerarse como de proporcionalidad. Explicar con detalle las condiciones que cumple cada enunciado para considerarlo como problema de proporcionalidad, o que no es de este tipo.
   (a) …
   (b) Si un bebé aumenta de peso 3 Kg. en tres meses ¿cuánto aumentará en el primer año?
   (c) …

   6.2. Resuelve aquellas situaciones que has considerado como de proporcionalidad.

Fig. 5.3: Enunciado del *problema (b)* del instrumento.

Para el estudio del *problema (b)* hemos desarrollado un procedimiento similar al llevado a cabo para el ítem 3c del primer instrumento. En este sentido, basados en la experiencia de análisis desarrollada en el capítulo anterior, hemos reconocido como aspectos intervinientes en la resolución del problema y su correspondiente análisis, los siguientes aspectos: (i) la naturaleza extra-matemática del ítem, puesto que refiere a un contexto de relaciones entre variables somáticas/demográficas, (ii) la relación entre las variables involucradas, cuyo comportamiento no está explicado por un modelo de la matemática elemental, (iii) su carácter cualitativo, puesto que se puede dar una respuesta al ítem sin tener que referir a relaciones numéricas específicas, (iv) la posible manifestación de una secuencia intuitivo-cualitativo-conceptual, como niveles de razonamiento, que permite comenzar dando sentido a la situación (intuitivo-cualitativo) y avanzar hacia explicaciones conceptualmente sustentadas.

5.5.2.1. Resolución del *problema (b)*

El *problema (b)* es no proporcional, del tipo pseudo-proporcional, la situación que involucra la relación entre peso y edad de un bebé, aún cuando puede obedecer a una relación de covariación cualitativa del tipo ―más en A, más en B", no necesariamente, para tal relación, se cumple que la razón edad/peso sea constante durante al primer año de vida de un bebé.

El uso de una tabla que corresponda con la covariación ―3 Kg. en tres meses", como la presentada más abajo, nos llevaría a que necesariamente un niño de un año pesa más de 12 kilos, aumentando un kilo por cada año, lo cual resulta algo poco probable.

Edad (meses)	3	4	…	12
Peso (kilos)	3	4	…	12

Aún cuando esta tabla de proporcionalidad pareciera referir a una posibilidad de que la situación peso/edad sea de proporcionalidad, debemos decir que a lo sumo la situación planteada en el problema obedece, más bien, a un modelo aditivo del tipo $y = kx + b$, siendo y el peso en un momento de edad x del bebé, k la razón (en este caso $k = 1$) y b el peso inicial del bebé.

5.5.2.2. Análisis epistémico del *problema (b)*

Elementos lingüísticos (Términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
…situaciones… de proporcionalidad… condiciones que cumple… que no es de ese tipo.	Especificidad de las relaciones entre las magnitudes consideradas que permite determinar que las mismas no obedecen a un modelo lineal.

Elementos lingüísticos… (*continuación…*)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
…situaciones… pueden considerarse… de proporcionalidad	Cualidades edad y peso como magnitudes relacionadas.
…tres meses…primer año	Magnitud “edad” medida en meses / años
…de peso 3 Kg.	Magnitud “peso” medida en kilos.
…aumenta de peso 3 Kg. en tres meses…	Covariación del tipo “más en A, más en B” involucrada en el enunciado del problema.
…cuánto aumentará en un año	Cuestión que invoca al uso de un modelo lineal cuando un aumento ha sido registrado.
…no proporcional, del tipo pseudo-proporcional…	Tipo de situación que se trata.
… razón edad/peso sea constante	Caracteriza una posible relación de proporcionalidad entre las magnitudes consideradas.
Tabla Edad (meses) 3 4 … 12 Peso (kilos) 3 4 … 12	Sucesión de pares de cantidades de magnitudes.
… $y = kx + b$	Expresión que se aproxima a deducir la relación entre las variables involucradas en la situación

Conflictos potenciales:

- Reconocer las dos magnitudes relacionadas como proporcionales
- Uso de la covariación cualitativa del tipo “más en A, más en B” como criterio de la linealidad de la relación considerada, fomentada por la estructura lingüística del enunciado y el contexto de las variables involucradas.
- Uso de la tabla de magnitudes que obedece a la condición “…aumenta de peso 3 Kg. en tres meses…” para considerarlas como magnitudes proporcionales.
- Considerar una situación, que se aproxima a una de tipo aditiva, como lineal.

Conceptos/definiciones (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
Razón	Relación multiplicativa entre parejas de cantidades de magnitud (meses de edad/ kilogramos de peso)
Magnitudes directamente proporcionales	Dos magnitudes son directamente proporcionales si la razón entre sus cantidades de magnitud es constante.
Modelo aditivo	Modelo matemático del tipo $y = kx + b$, $b \neq 0$, que explica las relaciones entre dos variables en una situación aditiva.

Conflictos potenciales:

- Caracterizar situaciones de magnitudes proporcionales por medio del uso de una regla de covariación cualitativa del tipo “más en A, más en B”.

- Considerar que la edad y el peso, al ser aproximadamente explicadas por un modelo aditivo (función afín), varían proporcionalmente.

Procedimientos (Técnicas, operaciones, algoritmos)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
Razonamiento en torno a la situación planteada	Justificar la relación no-proporcional de la situación problema.
Estimar valores para edad y peso correspondientes en función de la frase –3 Kg. en tres meses” (Construcción de una tabla)	Precisar el significado de expresiones para afianzar la no proporcionalidad de la situación.
Deducir el modelo $y = kx + b$	Explica la posible relación no-lineal peso/edad, en la que el peso tiene un valor inicial $b \neq 0$.

Conflictos potenciales:

- Los pares de valores considerados no sean –realistas” respecto a la relación entre las magnitudes edad y peso.
- Considerar que la posible existencia de un caso particular, en el cual la relación peso/edad se aproxime a una de proporcionalidad, pueda hacerse general.

Propiedades (Enunciados para los cuales se requiere una demostración o prueba)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
P1: Las magnitudes edad y peso durante el primer año de un niño no son directamente proporcionales	Solución a la cuestión planteada, basada en la sentencia de la constancia de la razón.
P2: El problema es pseudo-proporcional	El enunciado involucra una covariación del tipo –más en A, más en B”
P3: El problema se aproxima a un modelo aditivo del tipo $y = kx + b$	Precisar el tipo de problema como no-proporcional.

Conflictos potenciales:

- No encontrar la propiedad P1.
- Dar respuestas precisas, relativas a la situación no proporcional planteada

Argumentos (Justificaciones, demostraciones o pruebas de las propiedades utilizadas)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
A1: La razón edad/peso no es necesariamente constante durante el primer año de vida de un bebé.	Justifica P1
A2: El problema tiene características similares a uno de proporcionalidad.	Justifica P2
A3: El niño, al nacer, tiene un peso distinto de cero	Justifica P3

Conflictos potenciales:

- No reconocer la variación de la razón edad/peso en el desarrollo del primer año de un niño.
- Utilizar reglas intuitivas-cualitativas del tipo ―más edad, más peso”, para caracterizar la proporcionalidad.
- Dar explicaciones superficiales en torno a la no proporcionalidad de la situación.

5.5.3. Configuraciones epistémicas del *problema (c)*

El *problema (c)* refiere a una situación proporcional. En la descripción que hemos hecho del instrumento (apartado 5.4) hemos referido a algunas de sus características, entre las cuales se reconoce la ausencia de una covariación entre las cantidades de dinero como un aspecto que puede estimular su juicio como una situación no proporcional. Asimismo, el contexto financiero (dinero ingresado en un banco) fomenta, de manera natural, el uso de la relación entre variaciones de cantidades de dinero y el tiempo, lo cual estimula la manifestación de su juicio como una situación no proporcional, puesto que en la relación dinero/tiempo, el dinero permanece constante, mientras el tiempo varía. En cualquiera de estos casos, puesto que la estructura lingüística del enunciado poco concierne a una del tipo ―más en A, más en B”, esto fomenta el juicio del problema como una situación no proporcional. En la Fig. 5.4 presentamos el enunciado de este problema.

6. Algunos de los siguientes problemas son de proporcionalidad y otros no.
   6.1. Determinar cuáles de las situaciones descritas a continuación pueden considerarse como de proporcionalidad. Explicar con detalle las condiciones que cumple cada enunciado para considerarlo como problema de proporcionalidad, o que no es de este tipo.
   (a) …
   (b) …
   (c) Un banco no paga interés anual por el dinero que cada cliente ingresa en él. Si un cliente ingresa 1.500 €, ¿cuánto dinero tendrá en su cuenta después de 2 años si no ha hecho nuevos ingresos? ¿Cuánto dinero tendrá si en lugar de 1.500 €, hubiera ingresado 3.000 €?
   (d) …

   6.2. Resuelve aquellas situaciones que has considerado como de proporcionalidad.

Fig. 5.4: Enunciado del *problema (c)* del instrumento.

Este tipo de problema no fue incluido en el instrumento inicial, informado en el capítulo 4, es por tanto una de las novedades incluidas en el segundo instrumento.

La aplicación de este ítem persigue fundamentalmente dos aspectos, por un lado se pretende identificar qué tipo de estrategia asume el futuro profesor para dar respuesta a este tipo de ítem y por otro lado observar hasta qué punto la situación particular, enmarcada en un contexto financiero, representado por una cantidad de dinero ingresada en un banco, constituye un aspecto que fomente el juicio erróneo de una situación proporcional de razón igual a uno. Presentaremos a continuación una resolución de este ítem y el correspondiente análisis epistémico/cognitivo.

5.5.3.1. Resolución del *problema (c)*

Se trata de un problema proporcional, puesto que si el banco no paga intereses el dinero que tendrá el cliente, después de dos años, será la misma cantidad ingresada inicialmente, a saber: 1.500 euros. Es decir, la relación “dinero ingresado = dinero en la cuenta”, implica la razón constante: “dinero ingresado / dinero en la cuenta” igual a uno. Similarmente, si en lugar de 1.500€, hubiera ingresado 3.000€, tendría entonces 3.000€.

A modo de comentario, queremos referir a un procedimiento que no necesariamente tendrá lugar en la resolución que provean los futuros profesores, pero que consideramos conveniente tener presente en la resolución de este problema.

Ese procedimiento consiste en conducir la resolución, desde el reconocimiento de la relación: “dinero ingresado = dinero en la cuenta”, la cual implica la identificación de la razón constante: “dinero ingresado / dinero en la cuenta” igual a uno, hacia la construcción de un modelo matemático; caracterizado por el uso de la transformación lineal $y = kx$, donde y corresponde a la cantidad de dinero en la cuenta, x a la cantidad de dinero ingresada y el coeficiente k (razón de proporcionalidad) es igual a uno; en lo cual, el uso del modelo, se presenta como el método para obtener la expresión general de la relación de proporcionalidad involucrada en la situación-problema.

5.5.3.2. Análisis epistémico del *problema (c)*

Elementos lingüísticos (Términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
…situaciones… de proporcionalidad… condiciones que cumple… como problema de proporcionalidad.	Especificidad de la relación entre las cantidades de dinero (ingresado/existente en la cuenta) que permite determinar que obedecen a un modelo lineal.

Elementos lingüísticos… (*continuación…*)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
…situaciones… pueden considerarse… no es de este tipo	Relación entre el dinero ingresado en el banco (constante) y el tiempo (variable).
Un banco no paga interés… si no ha hecho nuevos ingresos	La cantidad de dinero es la misma: dinero ingresado = dinero en la cuenta.
1.500 €	Magnitud dinero medida en euros, ingresada inicialmente, no varía.
…después de 2 años.	Magnitud tiempo medida en años, transcurre y puede producir sensación de cambio.
…en lugar de 1.500€, hubiera ingresado 3.000€	Variación de la cantidad de dinero que puede encubrir la no variación del dinero ingresado.
…proporcional de razón igual a uno	Tipo de situación que se trata.

Conflictos potenciales:

- Reconocer una relación de cambio no-proporcional debida a la razón dinero/tiempo en la situación planteada.
- Obviar partes de los enunciados que indican que la cantidad de dinero ingresada no cambia.

Conceptos/definiciones (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
Magnitudes directamente proporcionales	Dos magnitudes son directamente proporcionales si la razón entre sus cantidades de magnitud es constante y distinta de cero.
Razón	Relación constante entre cantidades de dinero (dinero ingresado / dinero en la cuenta) igual a uno.

Conflictos potenciales:

- Considerar la relación entre las magnitudes dinero y tiempo como la que debe ser tomada en cuenta, debido al contexto ―financiero" que enmarca el problema.
- Considerar, que la condición de invariabilidad del dinero no da lugar a una razón de valor igual a uno.

Procedimientos (Técnicas, operaciones, algoritmos)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
Razonamiento expresado en torno a la situación planteada en la que se reconoce la igualdad entre las cantidades de dinero, que conlleva una razón de valor igual a uno.	Justificar la proporcionalidad de la situación problema y resolverla.

Conflictos potenciales:

- Proceder de acuerdo con la idea de cambio fomentada por el contexto financiero del problema o por la relación dinero/tiempo.

Propiedades (Enunciados para los cuales se requiere una demostración o prueba)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
P1: El banco no paga interés	Condición que determina que el dinero ingresado no cambia
P2: El problema es proporcional de razón uno	Solución de acuerdo con la consigna 6.1 del ítem
P3: Dinero ingresado = dinero en la cuenta, lo que implica que la razón "dinero ingresado / dinero en la cuenta" es igual a uno.	La cantidad de dinero en la cuenta será la misma ingresada, lo cual da respuesta a las cuestiones planteadas en el enunciado del problema.

Conflictos potenciales:

- Obviar la propiedad P1.
- Encontrar la propiedad P2
- Deducir la propiedad P3

Argumentos (Justificaciones, demostraciones o pruebas de las propiedades utilizadas)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
A1: Se establece como una condición en el enunciado del problema: El banco no paga intereses.	Justifica P1
A2: La cantidad ingresada inicialmente no varía, puesto que el banco no paga intereses y el cliente no hace nuevos ingresos.	Justifica P2 y P3

Conflictos potenciales:

- Argumentar sobre la no proporcionalidad de la situación planteada, basado en la ausencia de una covariación entre las cantidades de magnitud involucradas.

5.5.4. Configuraciones epistémicas del *problema (d)*

El *problema (d)* refiere a una situación no proporcional, es del tipo pseudo-proporcional, con características similares a las descritas para el *problema (b)* del mismo instrumento, referidas en el sub-apartado 5.5.2. En la Fig. 5.5 presentamos el enunciado del problema.

Para este problema, de acuerdo con la literatura especializada, características tales como: (a) la estructura lingüística del problema, la cual es análoga a la de un problema de valor faltante proporcional, (b) la falta de un sentido común para considerar las condiciones reales en las que se manifiesta la situación, (c) aunado a una forma mecánica de asumir la resolución de un problema; conducen a una sobrevaloración de la linealidad, juzgando como proporcional un problema del tipo pseudo-proporcional (Modestou et al., 2008; Van Dooren et al., 2008).

6. Algunos de los siguientes problemas son de proporcionalidad y otros no.
   6.1. Determinar cuáles de las situaciones descritas a continuación pueden considerarse como de proporcionalidad. Explicar con detalle las condiciones que cumple cada enunciado para considerarlo como problema de proporcionalidad, o que no es de este tipo.
   (a) …
   (b) …
   (c) …
   (d) Pedro puede comer 2 pasteles en 3 minutos. ¿Cuánto tiempo le llevará comer 24 pasteles?

   6.2. Resuelve aquellas situaciones que has considerado como de proporcionalidad.

Fig. 5.5: Enunciado del *problema (d)* del instrumento.

En este orden de ideas, consideramos que las condiciones reales o el contexto en el que tiene lugar la situación, como uno de los elementos decisivos en la toma de decisiones en torno a la proporcionalidad del problema. Esto lo observaremos en la resolución de la parte 6.1 del ítem, en la que se solicita determinar si la situación puede considerarse de proporcionalidad o no, la cual presentamos a continuación.

5.5.4.1. Resolución del *problema (d)*

El problema es del tipo pseudo-proporcional, que corresponde con una situación no proporcional. El contexto de la situación refiere a la capacidad de una persona para comer una cantidad de alimento en un tiempo determinado. La experiencia y el sentido común señalan que en la medida en que la persona come, va saciando sus ganas de comer, llegando estas a ser prácticamente nulas. Lo cual indica que hasta cierto punto la cantidad de comida que se digiere aumenta con el tiempo, pero luego comienza a declinar hasta llegar al punto en que el tiempo sigue transcurriendo y la persona no puede seguir comiendo. De manera que la razón indicada por –2 pasteles en 3 minutos” no es constante.

5.5.4.2. Análisis epistémico del *problema (d)*

Elementos lingüísticos (Términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
…situaciones… de proporcionalidad… condiciones que cumple… que no es de ese tipo.	Especificidad de las relaciones entre las magnitudes consideradas que permite determinar que las mismas no obedecen a un modelo lineal.
…situaciones… pueden considerarse… de proporcionalidad	Cualidades “comida” y tiempo como magnitudes relacionadas.
…2 pasteles…	Magnitud “comida” medida en pasteles
…en 3 minutos...	Magnitud tiempo medida en minutos.
…comer 2 pasteles en 3 minutos…	Razón “pasteles por minuto” dada en el enunciado del problema.
…cuánto tiempo le llevará comer 24…	Cuestión que invoca al uso de un modelo lineal cuando una razón “2 pasteles por 3 minutos” es dada.
… del tipo pseudo-proporcional… situación no proporcional	Tipo de problema/situación que se trata.
… razón “comer 2 pasteles en 3 minutos” no es constante	Caracteriza una posible relación de proporcionalidad entre las magnitudes consideradas.

Conflictos potenciales:

- Reconocer las dos magnitudes relacionadas como proporcionales, basándose en una regla de covariación absoluta del tipo “más en A, más en B”.
- Uso de la expresión “comer 2 pasteles en 3 minutos” como razón constante, fomentada por la estructura lingüística del enunciado.

Conceptos/definiciones (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
Razón	Relación multiplicativa entre parejas de cantidades de magnitud (comer un número de pasteles/minutos empleados en comerlos)
Magnitudes directamente proporcionales	Dos magnitudes son directamente proporcionales si la razón entre sus cantidades de magnitud es constante.
Covariación no proporcional	Explica el comportamiento real de las variables número de pasteles y tiempo empleado en comerlos.

Conflictos potenciales:

- Caracterizar situaciones de magnitudes proporcionales por medio del uso de una razón no constante del tipo “comer 2 pasteles en 3 minutos”.

- Considerar que la cantidad de pasteles y el tiempo empleado en comerlos, son magnitudes que varían proporcionalmente.

Procedimientos (Técnicas, operaciones, algoritmos)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
Razonamiento en torno a aspectos contextuales y de covariación de la situación planteada	Justificar la relación no-proporcional de la situación problema.

Conflictos potenciales:

- Considerar que es posible que una persona coma 24 pasteles en un tiempo específico, basándose en la relación –comer 2 pasteles en 3 minutos".

Propiedades (Enunciados para los cuales se requiere una demostración o prueba)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
P1: Las magnitudes –comer pasteles" y tiempo no son directamente proporcionales	Solución a la cuestión planteada.
P2: El problema es pseudo-proporcional	El problema tiene características similares a uno de proporcionalidad
P3: La razón –comer 2 pasteles en 3 minutos" no es constante	Precisar la característica que determina el problema como no proporcional.

Conflictos potenciales:

- No encontrar la propiedad P1.
- Dar respuestas más precisas, relativas a la situación no proporcional planteada

Argumentos (Justificaciones, demostraciones o pruebas de las propiedades utilizadas)

OBJETOS	SIGNIFICADOS
A1: La razón –comer pasteles"/tiempo no es necesariamente constante cuando alguien se come 24 pasteles.	Justifica P1
A2: El enunciado involucra una razón del tipo –comer 2 pasteles en 3 minutos" la cual no es constante	Justifica P2
A3: Al ir comiendo pasteles se van saciando las ganas de comer, declinando el número de pasteles que se pueden comer al ir transcurriendo el tiempo.	Justifica P3

Conflictos potenciales:

- No reconocer los cambios o variaciones que se registran en una razón del tipo –comer 2 pasteles en 3 minutos", al intentar comer 24 pasteles.
- Dar explicaciones superficiales en torno a la no proporcionalidad de la situación.

5.6. Resultados preliminares del análisis epistémico

La puesta en juego de la GROS nos aproxima a un conocimiento más detallado de lo relativo a la resolución de los problemas abordados. Se trata de un tipo de reflexión sobre algunos de los objetos/significados puestos en juego durante una posible resolución de un problema matemático, realizada en un contexto de desarrollo profesional de la formación de profesores, cuya finalidad se inscribe en la actividad profesional de la didáctica de la matemática.

Pudimos observar, en el capítulo anterior, sub-apartado 4.5.1.1, que distintos tipos de resolución de un mismo problema conduce a identificar diferentes objetos/significados. Como es de esperarse, la riqueza del uso de esta herramienta se incrementa al resolver un mismo problema de diferentes maneras y realizar el estudio de cada tipo de resolución. No obstante, en este capítulo, por razones de espacio y tiempo, nos hemos limitado a realizar el análisis de una única resolución de cada problema, destacando las características propias de los procesos específicos de resolución asumidos.

A continuación presentamos algunas de esas características de las resoluciones asumidas, que consideramos de interés para el desarrollo de la formación de futuros profesores.

5.6.1. Resultados preliminares del análisis del *problema (a)*

En el capítulo 4, sub-apartado 4.5.2.1 mostramos algunos resultados del análisis realizado sobre la resolución de un problema de valor faltante proporcional similar al *problema (a)*. Es claro que, en buena medida, los resultados obtenidos en ese análisis pueden ser nuevamente derivados a partir del análisis que ahora hemos realizado del *problema (a)*. No obstante, existen al menos cuatro aspectos que hacen diferente la nueva situación planteada, a saber: (i) el contexto del problema; el analizado en el capítulo 4 se da un contexto de relaciones distancia/tiempo, velocidad, propias de la Física; mientras, el nuevo problema, tiene un contexto cuyas relaciones, precio/cajas de producto, son más próximas a la cotidianidad de las personas, (ii) el tipo de cantidades; en el analizado en el capítulo anterior las cantidades son continuas, mientras en el *problema (a)* una de las cantidades es discreta (iii) el instrumento aplicado, en el que se encuentra insertado el *problema (a)*, en el cual se solicita explicar con detalle las condiciones que cumple para considerarlo como de proporcionalidad, (iv) es posiblemente necesario, en el proceso de resolución propiamente dicho, realizar una transformación previa a la resolución definitiva del problema, puesto que se requiere saber cuántas cajas pueden formarse con 12 paquetes, y (v) muy relacionado con el aspecto anterior, de acuerdo con Harel y Behr (1989), el *problema (a)* presenta un índice de dificultad mayor.

Asimismo, en el capítulo 4, sub-apartado 4.5.1.3 observamos que el primer instrumento incluye un ítem (ítem 3), en el que se solicita: “De los siguientes pares de magnitudes, ¿cuáles son directamente proporcionales?... Justifica tu respuesta usando una tabla para cada uno”, siendo la situación presentada en 3b una situación en las que se relacionan magnitudes directamente proporcionales. En relación con este ítem, en el sub-apartado 4.5.2.3 mostramos algunos resultados preliminares del análisis realizado sobre el mismo. Los resultados observados, en esa ocasión, remiten a aspectos del ítem que determinan la manifestación de algún tipo de respuesta por parte de los sujetos, a saber: (i) la puesta en juego de la secuencia intuitivo-cualitativo-conceptual, y (ii) los efectos de la naturaleza de la situación, en términos de si se tratan de situaciones intra-matemáticas o no, en las posibles respuestas de los sujetos.

En este orden de ideas, con el fin de evitar reiteraciones, centraremos nuestra atención en observar una posible articulación de los diferentes objetos, significados y conflictos potenciales, identificados en el análisis realizado, en torno a los dos últimos aspectos referidos a la nueva situación que ahora nos ocupa, relativos a la valoración de la proporcionalidad de la situación y a la condición del cálculo de un resultado previo en el proceso de resolución.

5.6.1.1. Articulación de objetos/significados/conflictos resolución del *problema (a)*

Respecto a la solicitud sobre la proporcionalidad o no proporcionalidad del problema, la cual ha implicado el uso de una tabla de proporcionalidad para observar que las magnitudes consideradas covarían proporcionalmente, hemos identificado la puesta en juego de algunos de los diferentes objetos/significados en el proceso de resolución respectivo y algunos conflictos potenciales asociados a los mismos.

La tabla utilizada ha sido identificada como un *elemento lingüístico*, con el significado de: “Representaciones utilizadas para indicar las operaciones-relaciones entre las cantidades de magnitudes y justificar que son proporcionales”, asociado con el conflicto potencial: ―Determinar el contenido de las celdas de la tabla de proporcionalidad y hacer uso de ella para justificar la proporcionalidad de la situación”.

A la vez, esta puesta en juego de este tipo de objeto, se encuentra asociado a la manifestación del *concepto* de ―Sucesión de parejas de magnitudes directamente proporcionales” la cual es necesaria para obtener el contenido de las celdas de la tabla que permitirá realizar las comparaciones, necesarias para justificar la situación como proporcional.

Asimismo, hemos identificado la manifestación de *procedimientos* en torno a la construcción y uso de la tabla, a saber, procedimientos de: multiplicación, división, construcción de la tabla, comparaciones de los valores de la tabla; para los cuales hemos reconocido algunos significados de uso, encaminados a justificar la proporcionalidad de la situación. También, asociados al reconocimiento de esos procedimientos, identificamos conflictos potenciales relativos a la obtención de la secuencia de pares de cantidades de magnitud (cajas de cereales/precio) y hacer uso de ella para sustentar el juicio sobre la proporcionalidad del problema.

Al mismo tiempo, en dichos procedimientos se hace uso tanto de conceptos como de *propiedades* que sustentan el comportamiento de las cantidades para justificar que las magnitudes consideradas son proporcionales, en la que se destaca la propiedad P1 identificada: ―Si se multiplican las cantidades de cajas de cereal por un número, las cantidades del precio se multiplican por el mismo número”, puesto que establece el criterio que permite decidir sobre la proporcionalidad de la situación. Como conflicto potencial, asociado a esta propiedad, reconocemos el no uso de la misma que podría estar relacionado con su desconocimiento.

Finalmente, en lo relativo al análisis realizado en torno a este primer aspecto considerado, observamos que el uso de las propiedades se basa en *argumentos*, los cuales generalmente actúan como elementos no ostensivos, pero que determinan la puesta en juego de las mismas. En este sentido, asociado al uso de la propiedad P1, hemos reconocido el argumento A1, que sostiene que la puesta en juego de esa propiedad se basa en la definición de magnitudes proporcionales. Asociado a este reconocimiento se presenta el conflicto potencial de no utilizar esta argumentación para relacionar los elementos de la tabla obtenida.

El segundo aspecto considerado refiere a que en la resolución del problema en sí, es necesario realizar la transformación de los 12 paquetes de cereales en el número de cajas que ellos constituyen. Esta característica del problema ha sido identificada como asociada al objeto *elementos lingüísticos*, como significado de la cuestión “¿Cuánto costarán 12 paquetes?”, y relacionada con el conflicto potencial: “Reconocer y utilizar la relación (razón) paquetes por caja”. Pero además, dentro de esta misma categoría de objetos, este reconocimiento se relaciona con el uso de simbolizaciones implicadas en la regla de tres como algoritmo, dicho uso ha sido reconocido como un conflicto potencial para la resolución del problema.

Asimismo, en el uso de estos elementos lingüísticos se ponen en juego *conceptos* como el de razón y regla de tres, cuyo significado sirve para dar sentido a estos elementos, pero además, para dar sustento al desarrollo de procedimientos de resolución. Asociados al uso de estos conceptos hemos identificado el conflicto potencial: “Confundir la razón ‘precio por caja’ con la razón ‘precio por paquete’”.

Los *procedimientos* identificados, basados en los conceptos referidos, y que hacen uso de propiedades que se ponen en juego durante la resolución, refieren específicamente a la regla de tres como estrategia de resolución, en la cual se registran dos procedimientos de modelización (verbal-simbólica, simbólica-simbólica) requeridos para obtener la solución correspondiente. Asociados al uso de estos procedimientos hemos reconocido como conflictos potenciales el uso reiterado de la regla de tres posiblemente necesario para resolver el problema, el uso de este procedimiento de manera mecánica en el que los procedimientos de modelización involucrados se realizan de manera algorítmica y de memoria.

Las *propiedades* puestas en juego en los procedimientos desarrollados refieren específicamente a proveer de herramientas de uso y de significado a los resultados obtenidos por medio de la regla de tres. En el caso específico del cálculo previo de cuántas cajas hacen 12 paquetes, hemos identificado dos propiedades, la primera, la propiedad P3, refiere a la relación entre los modelos simbólicos implicados en el uso de la regla de tres, mientras la segunda, propiedad P4, refiere al resultado previo “12 paquetes hacen 4 cajas", necesario para avanzar hacia la resolución definitiva del problema. A la vez, estas propiedades pueden identificarse como elementos emergentes de los procesos de resolución, lo cual nos lleva a identificar una relación dialéctica y dinámica entre el uso versus la emergencia de las mismas, durante el proceso de resolución.

Finalmente, en lo relativo al segundo aspecto considerado, observamos que los *argumentos,* que han servido de sustento al uso de las propiedades identificadas, refieren a dos razones que justifican procedimientos y resultados que se van generando con el uso de la regla de tres como proceso de resolución. Asociados al uso de los argumentos A3 y A4, hemos identificado un conflicto potencial que reitera uno de los mayores peligros involucrados en el uso de la regla de tres, referido a la ―Aplicación mecánica de algoritmos que producen resultados para los cuales no se tiene un significado específico".

Consideramos de interés la reflexión en torno a la articulación de los objetos/significados/conflictos en el proceso de resolución, desde dos perspectivas; la primera se relaciona con la visión comprensiva-global que se adquiere sobre el proceso de resolución puesto en juego, y la segunda, nos informa sobre los papeles que juegan los diferentes objetos identificados y cómo ellos se relacionan para dar sentido al proceso de resolución, lo que hemos interpretado como un modo de ver el ―funcionamiento de la resolución". Además, este posicionamiento epistémico sobre la tarea de resolución, producto del análisis realizado, provee la posibilidad de identificar aspectos relativos al *conocimiento especializado del contenido* en los términos propuestos por Ball y colaboradores (Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Ball, Schilling, 2008).

Siguiendo el hilo de las aportaciones identificadas en el capítulo anterior, proveídas por el análisis epistémico, referiremos a continuación a la identificación previa de posibles categorías de respuestas al problema considerado.

5.6.1.2. Categorías de posibles respuestas del *problema (a)*

Como puede derivarse de las consideraciones anteriores, las consignas del *problema (a)* se encuentran repartidas en dos de los ítems del primer instrumento, a saber, el ítem 1 y el ítem 3. El ítem 3 refiere a la valoración de la proporcionalidad de tres situaciones, en las que se incluye una de proporcionalidad (3b), y en el ítem 1 se solicita resolver una situación de proporcionalidad.

Las novedades en la aplicación del *problema (a)* consiste en que se integran ambas consignas en un único problema y, que en esta versión, su resolución, involucra la realización de un cálculo previo que posiblemente amerite el uso de una estrategia de resolución específica. No obstante, como hemos asumido la regla de tres como proceso dominante de resolución, tal aspecto no reviste ninguna novedad en las expectativas sobre posibles respuestas deducidas del análisis realizado, excepto que en las respuestas del *problema (a)* ese proceso de resolución puede manifestarse dos veces: para obtener un resultado previo que responda, por ejemplo, a la cuestión cuántas cajas son 12 paquetes, y, un resultado final, que responda a la cuestión cuánto costarán 12 paquetes. La primera manifestación puede quedar implícita puesto que se puede interpretar directamente que ―12 paquetes hacen 4 cajas”.

En este orden de ideas, la integración de ambas consignas (valoración de la proporcionalidad y resolución del problema) en un mismo problema implica la integración de las categorías de respuestas identificadas para los ítems 1 y 3b del primer instrumento, excluyendo posiblemente las referidas a procesos de resolución diferentes al uso de la regla de tres. Mientras la manifestación de ese doble uso de la regla de tres u otro procedimiento de resolución implicaría la inclusión de alguna modificación, a las identificadas para el ítem 1.. Una reedición de las categorías referidas en las que se incluye ese posible doble uso la presentamos a continuación:

<u>Categorías respecto a la valoración de la proporcionalidad de la situación</u>

Ca1.0: No dar respuesta.

Ca1.1: No-proporcional-tabla-incorrecta: reconocer las magnitudes dadas como no proporcionales, no construir una tabla de valores o construirla de manera incorrecta a partir de la relación ―precio por cajas de cereales” para justificar que la situación no es proporcional. De acuerdo con el argumento utilizado, esta categoría comprende las siguientes sub-categorías:

Ca1.1.1: No-tabla y no justifica, solo presenta la frase ―No es proporcional”.

Ca1.1.2: Tabla-incorrecta utilizada para justificar la no proporcionalidad de la situación.

Ca1.2: No-proporcional con justificación: no reconocer las magnitudes dadas como magnitudes proporcionales, asumiendo que la relación entre las magnitudes precio por caja de cereales pueden variar de acuerdo con las ofertas generalmente ofrecidas en el mercado, en las que la compra de una mayor cantidad de producto produce un ahorro.

Ca1.3: Proporcional-tabla-incorrecta: reconocer las magnitudes dadas como proporcionales, no construir una tabla de valores o construirla de manera incorrecta a partir de la relación “precio por cajas de cereales” y forzar la conclusión de que se trata de magnitudes proporcionales.

Ca1.4: Proporcional–no tabla–parcialmente correcta: considera la relación “precio por caja” como una relación de proporcionalidad, pero no construye una tabla de valores para justificar tal consideración. Esta categoría, de acuerdo con la justificación utilizada, comprende las siguientes sub-categorías:

Ca1.4.1: Sin dar justificación o sólo muestra una proposición de la forma: “sí son proporcionales”.

Ca1.4.2: Uso de una regla intuitiva-cualitativa, de covariación del tipo “más en A, más en B”.

Ca1.4.3: Uso de otra justificación.

Ca1.5: Proporcional-tabla-correcta: reconocer las magnitudes dadas como proporcionales, construir una tabla valores a partir de la relación “precio por cajas de cereales” y mostrar que se trata de una tabla de magnitudes proporcionales.

Categorías respecto a la resolución del problema proporcional

Ca2.0: Incorrectamente/no lo hace, tanto para el resultado previo como para el resultado final.

Ca2.1: Regla-incorrecta: dar una respuesta incorrecta y utilizar una regla de tres para su resolución. Esta comprende las sub-categorías:

Ca2.1.1: Regla-incorrecta-numérica: elaborar una solución numérica pero obtener una respuesta incorrecta para el resultado previo y/o resultado final.

Ca2.1.2: Regla-incorrecta-algebraica: elaborar una solución algebraica pero obtener una respuesta incorrecta para el resultado previo y/o resultado final.

Ca2.2: No-regla-incorrecta: dar una respuesta incorrecta y utilizar un proceso de resolución diferente al propuesto y analizado para el resultado previo y/o resultado final.

Ca2.3: No-regla-correcta: dar una respuesta correcta y utilizar un proceso de resolución diferente al propuesto y analizado para el resultado previo y/o el resultado final.

Ca2.4: Regla-correcta: dar una respuesta correcta y utilizar una regla de tres para su resolución. Esta comprende las sub-categorías:

Ca2.4.1: Regla-correcta-numérica: elaborar una solución numérica, la cual comprende: (a) quitar a x su valor de incógnita, (b) usar la igualdad como símbolo que indica un resultado, (c) llevar a efecto una modelización verbal-simbólica correcta, pero la simbólica-simbólica incorrecta, (d) uso inconsciente-mecánico de la regla de tres evitando un razonamiento proporcional. Estos procedimientos pueden ser exhibidos en la obtención del resultado previo y/o resultado final.

Ca2.4.2: Regla-correcta-algebraica: elaborar una solución algebraica, la cual comprende: (a) dar-conservar para x el valor de incógnita, (b) usar la igualdad como símbolo relacional, (c) llevar a efecto ambos procesos de modelización (verbal-simbólica y simbólica-simbólica) de manera correcta, (d) uso consciente de la regla de tres. Esto procedimientos pueden ser exhibidos para obtener el resultado previo y/o resultado final.

Una consideración que debe hacerse, en relación con la identificación de las categorías anteriores, refiere a la eventualidad de que cada una de estas categorías se pueda presentar, independientemente, tanto para obtener el resultado previo, como para obtener el resultado final. Esto abre un amplio abanico de posibilidades del producto cartesiano entre cada categoría para el resultado previo: ―12 paquetes hacen cuatro cajas", por cada categoría para el resultado final: ―12 paquetes cuestan 7,20€". No obstante esta eventualidad es poco probable, puesto que el problema del resultado previo y el del resultado final son del mismo tipo, por tanto, se espera, que para ambos problemas el procedimiento de resolución empleado sea el mismo.

Otra consideración que debe hacerse refiere a que la observación de las resoluciones, presentadas en el sub-apartado 4.5.2.1, para el ítem 1 del primer instrumento, y las categorías de respuestas identificadas para ese ítem, nos reclama tomar en cuenta el uso de una tabla de proporcionalidad como herramienta de resolución. Debemos reconocer que esta posibilidad constituye un caso que no ha sido identificado directamente del análisis epistémico previo, puesto que el mismo se ha realizado sobre una resolución que no contempla el uso de una tabla para resolver el problema en sí.

El uso de una tabla como herramienta de resolución constituye un caso en el que se conjuntan la manifestación de alguna de las sub-categorías de la categoría Ca1.3, con el uso de una estrategia de resolución no previsto en el análisis epistémico realizado. En este orden de ideas, pueden reconocerse la manifestación de las siguientes posibilidades: (i) ninguna justificación respecto a la proporcionalidad de la situación, (ii) uso de una justificación insuficiente, y (iii) uso de una justificación adecuada.

En la primera posibilidad el sujeto estaría asumiendo de manera previa, y posiblemente no consciente, que las magnitudes del problema son proporcionales, de manera que el uso de una tabla, en este sentido, se convierte en una técnica para resolver el problema que fomenta la manifestación de la ilusión de la linealidad y la argumentación en torno a la proporcionalidad se convierte en una “tautología”, es decir todas las relaciones que impliquen la asociación de dos variables será considerada de proporcionalidad. De manera general, lo que se pone en juego es el uso mecánico de un algoritmo de resolución dejando de lado el uso del razonamiento proporcional.

En la segunda posibilidad el sujeto estaría actuando sustentado sobre la base de una concepción errónea de situaciones proporcionales, basado posiblemente en la estructura lingüística del problema, o en el uso de reglas de covariación cualitativa del tipo “más en A, más en B”, obteniendo un resultado correcto a pesar de lo infundado de sus argumentos, fomentándose de este modo el uso de juicios incorrectos en torno a situaciones no proporcionales.

La tercera posibilidad es una situación idónea, que refiere a la puesta en juego de argumentaciones basadas en alguna de las estrategias de resolución descritas en el apartado 1.7 del capítulo 1, diferente a la considerada. Esta posibilidad no ha sido prevista en el análisis realizado, debido a las decisiones que hemos asumido en torno al uso de una estrategia de resolución dominante, en el desarrollo del presente trabajo.

Una última consideración respecto a la identificación de las posibles categorías de respuestas consiste en prever el uso de una tabla de proporcionalidad tanto para justificar la proporcionalidad de la situación como para resolver el problema proporcional. En este caso se debe referir a dos posibilidades: (i) la construcción de la tabla se realice sin hacer uso de las propiedades de una tabla de proporcionalidad, sino como una tabla de valores obtenidos a partir de una relación del tipo ―precio por cajas de cereales", para luego verificar que la tabla así obtenida cumple con las propiedades de ser una tabla de magnitudes proporcionales, y (ii) la construcción de la tabla se realice haciendo uso de las propiedades de una tabla de magnitudes proporcionales.

La primera posibilidad es la conveniente, a ella hemos referido en el sub-apartado 2.2.1, del capítulo 2, la cual reviste un procedimiento que permite utilizar la construcción de la tabla como criterio para decidir sobre la proporcionalidad de la situación y observar la solución del problema como un caso particular de las entradas de la tabla construida. La segunda posibilidad remite al caso descrito (manifestación de la primera sub-categoría de Ca1.3), en el que se concibe la situación como proporcional de antemano, sin que se provea de una justificación al respecto, generándose situaciones como las especificadas, asociadas a tal manifestación.

5.6.2. Resultados preliminares del análisis epistémico del *problema (b)*

En el sub-apartado 5.5.2 hemos referido a algunas características del *problema (b)*, hemos reconocido algunos aspectos comunes de este problema con el ítem 3c del primer instrumento, así como algunas relaciones entre los análisis epistémicos realizados. En el apartado 4.5.2.3 expusimos algunos resultados del análisis realizado sobre el ítem 3c, en el cual reconocimos algunos aspectos que hemos resumido en el sub-apartado 5.5.2.

En el contexto de estas aportaciones, queremos ahora referir, de manera análoga a lo expuesto en el apartado anterior para el *problema (a)*, a dos asuntos derivados del análisis epistémico realizado al *problema (b)*, a saber, una articulación de los objetos, significados y conflictos en torno a la valoración de la no proporcionalidad de la situación y una posible categorización de las respuestas dadas al ítem, en función del proceso de resolución propuesto por nosotros.

5.6.2.1. Articulación de objetos/significados/conflictos resolución del *problema (b)*

En los *elementos lingüísticos* presentes en el *problema (b)* hemos reconocido expresiones como ―aumenta de peso 3 Kg. en tres meses", ―cuanto aumentará en un año" que refieren a una covariación del tipo ―mas en A, más en B", presentes en el enunciado del problema. Estos elementos fomentan la interpretación de la situación como una situación de proporcionalidad, por ejemplo, la primera de estas expresiones, ha sido interpretada en la resolución propuesta por nosotros como un elemento que fomenta la puesta en juego de una tabla de proporcionalidad.

Ahora bien, aún cuando los elementos lingüísticos identificados parecen fomentar la manifestación de una valoración errónea de la proporcionalidad de la situación, y estimular su interpretación como una situación proporcional, juzgar la relación edad/peso como no proporcional requiere del uso del *concepto* de magnitudes proporcionales, específicamente a la caracterización de las mismas en función de la constancia de la razón. Es decir, es necesario tomar en cuenta que la razón entre las variables relacionadas edad/peso debe ser constante, hacer uso de esta sentencia como una de las caracterizaciones de una situación proporcional, puesto que la misma provee de la precisión para valorar la situación como no proporcional. Esta consideración constituye un elemento conceptual imprescindible para la manifestación de una valoración adecuada de la situación.

La puesta en juego de este objeto conceptual se concreta en su manifestación ostensiva mostrada en los *procedimientos*, identificados en el análisis en el análisis realizado. Además es necesario reconocer que los procedimientos identificados, involucrados en el proceso de resolución, guardan una estrecha relación con las expresiones lingüísticas presentes en el enunciado. En este orden de ideas observamos que la interpretación de la expresión ―3 Kg. en tres meses" está relacionada con la construcción de una tabla de proporcionalidad, la cual, en definitiva, nos ha llevado a reconocer la puesta en juego de un modelo aditivo como modelo muy próximo al modelo lineal y que provee de una posible explicación de la covariación (de aumento) entre las variables peso y edad. En los conflictos potenciales identificados, asociados a los procedimientos, encontramos el uso de ideas basadas en aspectos contextuales de la relación peso/edad, que podrían conducir a la realización de procedimientos de argumentación erróneos. Debemos señalar que la manifestación de tales conflictos está estrechamente relacionada con la ausencia del elemento conceptual antes referido.

Las *propiedades* son proposiciones dirigidas a establecer las características, condiciones y resultados adecuados en el desarrollo de la resolución del problema, son utilizadas en los procedimientos, constituyen las afirmaciones centrales expuestas en los mismos y se basan en las definiciones o argumentaciones. En este caso observamos la puesta en juego de tres propiedades dirigidas a la valoración de la proporcionalidad de la situación en cuanto a: (i) el uso del concepto de magnitudes proporcionales basada en la caracterización de la razón constante, (ii) el reconocimiento de la de las características específicas de la situación, en función de una interpretación adecuada de los elementos lingüísticos presentes en el enunciado, (iii) proveer de precisión a las interpretaciones realizadas, logrando una mayor profundidad en la comprensión de la situación planteada.

Finalmente, observamos que los *argumentos* identificados proveen de sustento a las propiedades identificadas, es así como hemos reconocido el uso de tres tipos de argumentos, correspondientes con las propiedades identificadas, antes descritas, dirigidas a la valoración de la proporcionalidad de la situación en cuestión. A la vez el reconocimiento de estos argumentos nos ha proveído la identificación de tres conflictos potenciales que refieren básicamente a un uso no adecuado del concepto de magnitudes proporcionales, basado en la no constancia de la razón.

5.6.2.2. Categorías de posibles respuestas del *problema (b)*

Tomando como referencia la resolución del problema propuesta y el análisis epistémico realizado, nos sentimos en condiciones de formular, de manera hipotética, algunas categorías de respuestas del *problema (b)*. Es claro que la identificación de este problema con el ítem 3c, del primer instrumento, constituye un aspecto fundamental en la presentación de las categorías de resolución del *problema (b)*. De manera que las categorías que ahora presentamos, son básicamente una reedición de las categorías presentadas en el sub-apartado 4.5.2.3, del capítulo 4, con los ajustes que corresponden a la nueva situación.

<u>Categorías de posibles respuestas del *problema (b)*:</u>

Cb.0: No lo hace

Cb.1: Lo hace incorrectamente, considerando que la edad y el peso son magnitudes directamente proporcionales, presentando una tabla de magnitudes directamente proporcionales. Esta categoría, de acuerdo con el argumento utilizado, comprende las siguientes sub-categorías:

Cb.1.1: Sin dar argumentos o sólo muestra una proposición de la forma: “sí son proporcionales”.

Cb.1.2: Uso de la regla intuitiva-cualitativa, de covariación “más en A, más en B” o uso de la “ilusión de la linealidad”.

Cb.2: Lo hace incorrectamente, considerando que la edad y el peso de una persona son magnitudes directamente proporcionales, basado en el reconocimiento de la razón “3 Kg. en tres meses” asumida como constante, posiblemente de manera inconsciente o mecánica. Esta categoría, de acuerdo con el argumento utilizado, comprende las siguientes sub-categorías:

Cb.2.1: Si el bebé aumenta 3 kilos en tres meses, entonces en el primer año aumentará…

Cb.2.2: Uso de algún algoritmo del tipo regla de tres.

Cb.2.3: Uso de una ecuación de proporcionalidad y del producto cruzado.

Cb.3: Lo hace incorrectamente, presentando un argumento sustentado en casos específicos en los que edad y peso covarían aproximadamente como magnitudes proporcionales.

Cb.4: Lo hace correctamente, considerando que la edad y el peso no son directamente proporcionales, presentado como argumento lo contextual-empírico de la relación edad-peso de un bebé (o persona), la cual no es de proporcionalidad, puesto que las personas no necesariamente cambian de peso proporcionalmente con la edad.

Cb.5: Lo hace correctamente, considerando que la edad y el peso no son directamente proporcionales, presentado una tabla de magnitudes no proporcionales. Esta categoría, de acuerdo con el argumento utilizado, comprende las siguientes sub-categorías:

Cb.5.1: Sin dar argumentos sólo muestra una proposición de la forma: “no son proporcionales”.

Cb.5.2: La variación entre la edad y el peso de una persona no es constante, cuando una varía multiplicada por un factor la otra varía multiplicada por otro factor.

Cb.6: Lo hace correctamente, considerando que la edad y el peso no son directamente proporcionales, haciendo uso de la caracterización de la razón constante y/o presentando una tabla de magnitudes no proporcionales.

Cb.7: Lo hace correctamente, considerando que la edad y el peso no son directamente proporcionales, haciendo uso de la caracterización de la razón constante, presentado una tabla de magnitudes proporcionales que corresponde con la variación “3Kg. en tres meses”, para precisar que la situación planteada se aproxima a una relación aditiva, no lineal.

Estas categorías corresponden con el proceso de resolución propuesto para el problema y el reconocimiento de objetos, significados y conflictos potenciales, previamente identificados en función de esa resolución. Excepto por la categoría Cb.3, el resto de las categorías refieren básicamente al uso de una tabla de proporcionalidad o no-proporcionalidad para dar una respuesta. Esto significa que la manifestación de respuestas, que incluyan el uso de otro tipo de proceso de resolución, ha quedado prácticamente fuera de esta categorización. Esta acotación se debe a la decisión que hemos tomado de asumir solo una resolución y realizar el análisis respectivo sobre ella. Una visión más completa sobre las configuraciones en torno al problema y su resolución amerita tomar en cuenta otros tipos de posibles resoluciones.

5.6.3. Resultados preliminares del análisis epistémico del *problema (c)*

Hemos identificado el *problema (c)* como un problema proporcional de razón uno. En el apartado 5.4, de este capítulo, hemos referido a algunas características generales de este tipo de problema. Asimismo, hemos expuesto en el sub-apartado 5.5.3 al contexto “financiero” del problema como uno de los elementos fomentadores del manejo erróneo de la situación como una situación no proporcional. En este orden de ideas, estamos particularmente interesados en determinar si: (a) este aspecto contextual determina alguna tendencia a producir este tipo de error, y (b) la ausencia de una covariación del tipo “más en A, más en B”, influye en el juicio de la proporcionalidad de la situación.

5.6.3.1. Articulación de objetos/significados/conflictos resolución del *problema (c)*

El análisis epistémico realizado sobre el enunciado del problema ha permitido reconocer *elementos lingüísticos* tendientes a establecer la constancia de la cantidad de dinero, pero de la misma manera incluye la frase: “…después de 2 años”, la cual refiere a una variación de tiempo, que pudiera sugerir una variación de la cantidad de dinero depositada. Esta característica del problema nos ha conducido a reconocer dos conflictos potenciales asociados, que refieren a obviar la parte del enunciado que indica que la cantidad de dinero permanece constante y que el reconocimiento de la razón dinero/tiempo podría conducir a considerar la situación como no proporcional.

La manifestación de estos posibles conflictos se encuentra relacionada con la puesta en juego de dos *conceptos*, que coadyuvan a comprender la naturaleza proporcional del problema. En este sentido, hemos identificado un concepto de “razón uno” y la idea de una “relación de igualdad o identidad” entre dos cantidades de dinero. Para distinguir entre las cantidades de dinero es necesario observar su papel en una cuenta bancaria; como dinero ingresado versus dinero en la cuenta o el que devuelve el banco, puesto que ambas cantidades de magnitud tienen el mismo valor numérico. La ausencia/presencia de estas entidades conceptuales (razón uno y relación identidad), identificadas en nuestro análisis como conflictos potenciales, fomenta la posible manifestación de razonamientos basados en la razón dinero/tiempo propia del contexto financiero (lo habitual en tal contexto), que puede finalmente conducir a un juicio erróneo de la situación al identificar que no existe covariación entre las cantidades de dinero y tiempo consideradas.

Esa ausencia/presencia se manifiesta en un *procedimiento*, en el que se hace ostensiva una forma de razonamiento que pretende justificar la valoración de la situación como proporcional o no proporcional. Para sustentar ese procedimiento-razonamiento se hace uso de *propiedades* que pueden actuar de dos formas, como propiedades inherentes a la situación expuesta, tales como: “El banco no paga intereses”, o como propiedades que emergen del proceso de resolución: “La cantidad de dinero en la cuenta será la misma ingresada…”.

A la vez, cada propiedad utilizada o deducida se basa en el uso de *argumentos*, los cuales, generalmente se manifiestan no ostensivamente, tienen su fundamento en principios asumidos por el sujeto; provenientes del enunciado del problema o constituidos por él en el proceso de resolución: “La cantidad ingresada inicialmente no varía…”.

Debemos señalar que la equivalencia entre las proposiciones: “El banco no paga intereses” y “La cantidad de dinero ingresada no varía” hace que puedan ser utilizadas como propiedades o como argumentos, respectivamente. Finalmente, un elemento no reconocido durante la resolución del problema refiere a una posible respuesta basada en el cobro de comisiones por parte de la entidad financiera, lo cual generalmente determina en la cuenta una cantidad menor de dinero al ingresado.

El reconocimiento de estos diferentes objetos y su uso en el proceso de resolución del *problema (c)*, aún cuando se basa en el análisis de un único proceso de resolución, nos aproxima a comprender de manera más profunda aspectos subyacentes implicados en la resolución analizada. Situados en este punto del estudio, nos atrevemos a hipotetizar que cualquier resolución del problema, no sólo obedecerá a la puesta en juego de las relaciones generales reconocidas entre estos objetos, sino que también buena parte de los tipos de objetos, específicamente reconocidos, estarán presentes.

Asimismo, ese análisis, al permitir identificar algunos de los objetos subyacentes en la resolución del problema, fomenta el desarrollo del *conocimiento especializado del contenido*, necesario para la enseñanza de la matemática. Por ejemplo, el reconocimiento de la idea de “relación identidad”, asociada a la comprensión de la situación planteada, para identificarla como una situación proporcional, nos provee de una situación específica-real que da sentido al concepto de función identidad, que podría ser utilizada para la introducción al estudio de ese contenido matemático.

5.6.3.2. Categorías de posibles respuestas del *problema (c)*

Sobre la base de la resolución del *problema (c)*, el análisis epistémico realizado, y lo expuesto sobre la articulación de los objetos/significados/conflictos presentamos ahora una predicción de algunas de las posibles categorías de respuestas de ese problema.

<u>Categorías de posibles respuestas del *problema (c)*:</u>

Cc.0: No lo hace

Cc.1: Lo hace incorrectamente, considerando que el dinero depositado y el tiempo no son magnitudes directamente proporcionales, idea fomentada por la no variación del dinero y la variación del tiempo, ambas indicadas en el enunciado del problema. Esta categoría, de acuerdo con el argumento utilizado, comprende las siguientes sub-categorías:

Cc.1.1: Sin dar argumentos o sólo muestra una proposición de la forma: “no son proporcionales”.

Cc.1.2: Uso de la regla intuitiva-cualitativa, de covariación “más en A, más en B” (a mayor tiempo, mayor cantidad de dinero) cuya ausencia fomenta considerar la situación como no proporcional.

Cc.1.3: Uso no apropiado de algún algoritmo del tipo regla de tres.

Cc.1.4: Uso no adecuado de una ecuación de proporcionalidad y del producto cruzado.

Cc.1.5: Uso inadecuado de una tabla de magnitudes proporcionales.

Cc.2: Lo hace incorrectamente, presentando un argumento sustentado en casos particulares e información exógena en la que una cantidad de dinero colocada en un banco aumenta/disminuye anualmente.

Cc.3: Lo hace correctamente, considerando que el dinero ingresado y el dinero en la cuenta son magnitudes directamente proporcionales, posiblemente basado en una de las siguientes propiedades: “El banco no paga interés” y/o “El cliente no ha realizado nuevos ingresos”. Esta categoría, de acuerdo con el argumento utilizado, comprende las siguientes sub-categorías:

Cc.3.1: Sin dar argumentos sólo muestra una proposición de la forma: “son proporcionales”.

Cc.3.2: La cantidad de dinero ingresado no varía (dinero ingresado = dinero en la cuenta), independientemente del tiempo que transcurra, puesto que el banco no paga intereses o porque el cliente no ha hecho nuevos ingresos.

Debemos señalar la posible manifestación de una categoría de respuesta, la cual involucra el uso de una propiedad: “El banco cobra comisiones”, que no fue reconocida en el análisis epistémico realizado. Esto puede deberse a que este tipo de respuesta corresponde con un proceso de resolución del problema diferente al analizado. Este aspecto del análisis nos motiva reconocer, nuevamente, que el análisis que se realiza se limita al tipo de resolución considerado, pudiéndose perder de vista la manifestación de otras interpretaciones o significados atribuibles a los objetos puestos en juego en otro tipo de resolución del problema.

5.6.4. Resultados preliminares del análisis epistémico del *problema (d)*

De manera análoga al estudio realizado de los tres primeros problemas, en este último queremos referir a la articulación de los objetos/significados/conflictos en torno a la resolución y análisis epistémico realizados sobre el *problema (d)*, así como a una categorización de posibles respuestas de los estudiantes en torno a la resolución propuesta.

5.6.4.1. Articulación de objetos/significados/conflictos resolución del *problema (d)*

Es necesario reconocer, antes de continuar, las similitudes entre el *problema (b)* y el *problema (d)*. Ambos son problemas pseudo-proporcionales y comparten las características expuestas en los sub-apartados 5.5.2 y 5.5.4. Es por ello que se podrá observar cierta analogía entre la articulación que ahora presentamos y la expuesta en el sub-apartado 5.6.2.1, en torno al *problema (b)*.

Uno de los *elementos lingüísticos* que se observa en el enunciado del problema es la frase “comer dos pasteles en 3 minutos” cuyo significado referencial conduce a interpretarla como una razón del tipo “pasteles por minuto”, la cual, al ser conjugada con la cuestión “cuánto tiempo le llevará comer 24 pasteles”, invoca al uso de un modelo lineal para su resolución. Hacer uso o no del modelo lineal depende de dos aspectos íntimamente vinculados, el primero refiere al uso del sentido común, quien debería sugerir que es poco probable que una persona pueda comer 24 pasteles “en una sentada”. El agotamiento de las ganas de comer constituye un factor fisiológico importante para que esta acción pueda llevarse a cabo. No obstante, la razón inicial “3 pasteles por minuto” parece respaldar la idea de que el tiempo (como magnitud continua y uniforme) “arrastra” a la magnitud “comer pasteles” y le imprime características de continuidad y uniformidad, yendo en contra de lo indicado por el sentido común.

El segundo aspecto, que es más determinante, muy poco probable, y que sirve de base a este primer juicio basado en el sentido común, es que Pedro se coma los 24 pasteles obedeciendo a una razón contante en función del tiempo. En este orden de ideas, observamos la necesidad de poner en juego el *concepto* de magnitudes proporcionales que implica la manifestación de una razón constante, es decir, que la razón inicial “pasteles por minuto” con que Pedro come pasteles debe ser constante mientras se come los primeros 24 pasteles, lo cual es prácticamente imposible. A la vez, el uso de este concepto, promueve la idea de una covariación no proporcional que permite dar una explicación correcta al comportamiento de las variables involucradas.

Esa explicación se concreta en la producción de un *procedimiento* de resolución, que permite hacer ostensivo un razonamiento en el que se conjugan los elementos lingüísticos y conceptuales para producir *propiedades* del tipo: “Las magnitudes ‘comer pasteles’ y tiempo no son directamente proporcionales…”.

Al mismo tiempo, estas propiedades se fundamentan o justifican por medio de *argumentos* del tipo: “La razón ‘comer pasteles’/tiempo no es necesariamente constante cuando alguien se come 24 pasteles”, los cuales se basan en principios deducibles de la organización de la situación considerada.

Los conflictos potenciales reconocidos en el desarrollo del análisis, refieren a algunas de las posibles desviaciones que pueden presentarse, al dar significados diferentes (no pertinentes) a los objetos anteriormente articulados. En relación con las manifestaciones de estas posibles desviaciones hemos reconocido, como conflicto potencial del objeto Procedimientos, la posibilidad de que Pedro sea un sujeto específico, con cualidades especiales, que le permiten hacer este tipo de acciones, basados en esto se puede dar lugar a una interpretación de una relación proporcional entre las variables involucradas, promoviendo una deducción falsa a partir de un caso prácticamente imposible.

5.6.4.2. Categorías de posibles respuestas del *problema (d)*

Excepto por el uso de una tabla de proporcionalidad, observamos una considerable similitud entre las soluciones del *problema (b)* y el *problema (d)*. Esta similitud ha significado una identificación entre las categorías de las posibles respuestas previstas entre estos dos problemas.

<u>Categorías de posibles respuestas del *problema (d)*:</u>

Cd.0: No lo hace

Cd.1: Lo hace incorrectamente, considerando que la “comida” y el tiempo son magnitudes directamente proporcionales, basado posiblemente en la percepción de una covariación absoluta entre las variables consideradas. Esta categoría, de acuerdo con el argumento utilizado, comprende las siguientes sub-categorías:

Cd.1.1: Sin dar argumentos o sólo muestra una proposición de la forma: “sí son proporcionales”.

Cd.1.2: Uso de la regla intuitiva-cualitativa, de covariación “más en A, más en B” o uso de la “ilusión de la linealidad”.

Cd.2: Lo hace incorrectamente, considerando que la “comida” y el tiempo son magnitudes directamente proporcionales, basado en el reconocimiento de la razón “2 pasteles en tres minutos” asumida como constante, posiblemente de manera inconsciente o mecánica. Esta categoría, de acuerdo con el argumento utilizado, comprende las siguientes sub-categorías:

Cd.2.1: Si Pedro se come 2 pasteles en tres minutos, entonces 24 pasteles se los comerá en…

Cd.2.2: Uso de algún algoritmo del tipo regla de tres.

Cd.2.3: Uso de una ecuación de proporcionalidad y del producto cruzado.

Cd.2.4: Uso de una tabla de magnitudes proporcionales.

Cd.3: Lo hace incorrectamente, presentando un argumento sustentado en un caso específico en el que se considera la posibilidad de que Pedro tenga características especiales que le permiten comer dos pasteles en tres minutos de manera constante hasta comer 24 pasteles.

Cd.4: Lo hace correctamente, considerando que la “comida” y el tiempo no son directamente proporcionales, presentado una tabla de magnitudes no proporcionales. Esta categoría, de acuerdo con el argumento utilizado, comprende las siguientes sub-categorías:

Cd.4.1: Sin dar argumentos sólo muestra una proposición de la forma: “no son proporcionales”.

Cd.4.2: La variación entre “comida” y el tiempo no es constante, cuando una varía multiplicada por un factor la otra varía multiplicada por otro factor.

Cd.5: Lo hace correctamente, considerando que la “comida” y el tiempo no son magnitudes directamente proporcionales, haciendo uso del sentido común y la caracterización de la razón constante para argumentar sobre la no proporcionalidad entre las variables consideradas.

Se puede observar que estas categorías, son básicamente una reedición de las categorías presentadas en el sub-apartado 5.6.2.2, ajustada a la situación específica planteada en el *problema (d)*. Nuevamente, se debe reconocer que estas categorías se encuentran acotadas a acciones próximas a la resolución propuesta para el problema respectivo.

Finalmente, debemos reconocer que el estudio de las posibles respuestas en torno a una solución y su análisis, presenta categorías similares. El procedimiento asumido para la presentación de las categorías, yendo desde la no resolución hasta la solución del problema, de acuerdo con un tipo específico de resolución, provee de cierta estandarización para posibles estudios posteriores. Este hecho se hizo presente al ir estudiando las posibles categorías de respuestas de los ítems de los instrumentos aplicados. De manera que el establecimiento previo de posibles categorías de respuestas de un problema se convierte en un referente para el estudio de posibles respuestas de otros problemas similares.

5.7. Estudio de las configuraciones cognitivas

En el sub-apartado 4.6 del capítulo 4, hemos realizado el estudio de las configuraciones epistémicas y en función de ello hemos realizado, en ese capítulo, lo que hemos denominado *análisis cognitivo de las respuestas*. Es decir, consideramos los resultados preliminares del análisis epistémico/cognitivo (uso de la GROS, reconocimiento de conflictos potenciales y las categorías de posibles respuestas), como referentes para el estudio de las respuestas dadas por los sujetos.

En este capítulo hemos optado por realizar un procedimiento estándar para el estudio de las respuestas de los alumnos, por medio de un establecimiento previo de las variables a estudiar, una descripción general de las mismas, derivadas directamente de las consignas de los ítems (problemas) del instrumento, y la observación de su manifestación en las respuestas de los sujetos. En este sentido, el *análisis cognitivo* se considera como el estudio de las respuestas de los sujetos; de la manifestación de las variables preestablecidas, del reconocimiento de los diferentes valores de las variables en tales manifestaciones.

Desde esta perspectiva, el estudio de las configuraciones cognitivas, refiere a dos tipos de acciones: (a) la manifestación y reconocimiento de los valores de las variables establecidas, y (b) el cotejo de tales manifestaciones con los resultados preliminares del análisis epistémico realizado, estando esta última acción relacionada con lo que hemos denominado análisis epistémico y cognitivo.

A continuación presentamos las variables y los valores asignados a las mismas.

5.7.1. Variables y valores

El ítem del instrumento considerado (ítem número 6, de seis ítems de una prueba de control) tiene dos partes. En la primera parte (que corresponde con el numeral 6.1 de la prueba de control) se solicita valorar si cuatro situaciones expuestas en cuatro problemas son de proporcionalidad o no lo son, En la segunda parte (que corresponde con el numeral 6.2 de la prueba de control) se solicita resolver aquellas que considere de proporcionalidad.

De manera que para los cuatro problemas propuestos se pueden manifestar ocho posibles tipos de respuestas, cuatro respecto al juicio razonado sobre la proporcionalidad de la situación la cual sirve de contexto para cada uno de los cuatro problemas y cuatro posibles resoluciones, si se toma en cuenta la posibilidad de que las cuatro situaciones pueden ser consideradas como proporcionales.

En este sentido, hemos reconocido como variables generales las siguientes: (a) Proporcionalidad de la situación, cuyos valores son dos; es proporcional o no proporcional, (b) Justificación de la proporcionalidad o no proporcionalidad, cuyos valores serán reconocidos de acuerdo con las respuestas dadas, (c) Tipo de resolución dada al problema considerado como proporcional, cuyos valores serán también reconocidos en las resoluciones realizadas por los sujetos. En la Tabla 5.1 presentamos la relación variables/valores considerados.

Tabla 5.1: Variables y valores a ser considerados para el análisis cognitivo

Variables	**Valores**
Proporcionalidad de la situación	Proporcional No-proporcional
Tipo de justificación sobre la proporcionalidad	De acuerdo con su reconocimiento en las respuestas de los sujetos
Tipo de resolución	De acuerdo con los tipos de resolución dadas a los problemas por parte de los sujetos

Una primera observación sobre este primer reconocimiento es que las dos primeras variables se estudian sobre los cuatro problemas del instrumento. En este sentido, en relación con el tipo de decisión que se asuma sobre la proporcionalidad estará la justificación que se dé sobre la misma, por lo que tendremos en general dos tipos de justificaciones; un tipo debida a la proporcionalidad y otro tipo debida a la no proporcionalidad. Por otra parte, para el tipo de resolución, se debe tener en cuenta la posible respuesta basada en un juicio erróneo sobre la proporcionalidad de la situación, lo que nos puede conducir a reconocer el tipo de resolución asociada a la manifestación de la ilusión de la linealidad.

A continuación presentamos algunos de los resultados sobre las respuestas de los sujetos en la resolución de los problemas del instrumento.

5.7.2. Análisis cognitivo

Una vez establecidos los tipos de variables/valores a ser considerados pasamos a presentar un análisis de las respuestas dadas por los futuros profesores a las cuestiones solicitadas. Este análisis se basa básicamente en el estudio de las frecuencias con que se manifiestan los valores de las variables en estudio.

El estudio de las frecuencias de la variable ―Proporcionalidad de la situación" no amerita mayor detalle, consiste en un conteo directo y dicotómico de la manifestación de sus valores.

En el caso de las frecuencias de los tipos de justificación, estas se obtienen en función de los tipos de explicación dadas por los sujetos. Para obtenerlas, en primer lugar, hemos enlistado todas las distintas explicaciones dadas por los sujetos para cada uno de los problemas, luego hemos identificado características comunes en los distintos tipos de respuestas, lo que nos ha permitido resumir los tipos de explicaciones en un número relativamente reducido de categorías (véase Anexo E). Luego, las categorías resultantes son agrupadas de acuerdo con la ―proximidad epistémica" de los tipos de justificaciones identificados y la idea de razón constante que debería caracterizar la proporcionalidad en los tipos de situaciones consideradas. Lo referente a la variable ―Tipo de resolución", dado que su diversidad es naturalmente reducida, optaremos por un conteo directo de los tipos de resoluciones, agrupados de acuerdo con la técnica o estrategia empleada para resolver cada problema. A continuación presentamos los análisis respectivos.

5.7.2.1. Tipos de respuestas en el reconocimiento de la proporcionalidad

Como hemos venido exponiendo, en el instrumento aplicado hemos reconocido fundamentalmente dos ítems, cuyas respuestas se encuentran vinculadas. En el primer ítem se solicita juzgar la proporcionalidad/no-proporcionalidad de cuatro situaciones planteadas en cuatro problemas. Al mismo tiempo, en este primer ítem se solicita argumentar en torno al juicio que se haga de cada situación.

En este sub-apartado referiremos a la primera parte de este ítem, es decir, al juicio sobre la proporcionalidad/no-proporcionalidad de las situaciones planteadas [*problema (a)… problema (d)*]. En este orden de ideas, presentamos en la Tabla 5.2 los resultados observados en torno a los tipos de respuestas dadas por la muestra de futuros profesores a cada uno de estos problemas.

Tabla 5.2: Reconocimiento de la proporcionalidad o no-proporcionalidad de los problemas del segundo instrumento (N = 59)

Tipo de respuesta	Problema (a)	Problema (b)	Problema (c)	Problema (d)
Si es proporcional	51 (86,4%)	26 (44,1%)	10 (17%)	51 (86,4%)
No es proporcional	7 (11,9%)	31 (52,5%)	46 (78%)	5 (8,5%)
Condicional	—	2 (3,4%)	—	3 (5,1%)
No responde	1 (1,7%)	—	3 (5,1%)	—

En relación con la definición inicial de las variables y valores, presentados en la Tabla 5.1, debemos reconocer la manifestación de dos valores de la variable ―Proporcionalidad de la situación" que no habían sido considerados, que son presentados en la Tabla 5.2, a saber, lo relativo al uso de un condicional para realizar el juicio solicitado y la manifestación de no dar respuesta al ítem. El valor que hemos denominado “Condicional” refiere a aquel tipo de respuestas en el que se presenta un razonamiento del tipo: “Es proporcional/no-proporcional si…”. Algunos ejemplos de este tipo de respuesta los presentamos más adelante.

Respecto al *problema (a)*, que se trata de una situación de proporcionalidad, comúnmente conocida, en la que se pone en relación cajas con paquetes y cajas con precios, se observa que 7 futuros profesores (11,9%) consideran que esa situación no es de proporcionalidad, y sólo uno de los sujetos no da respuesta al problema.

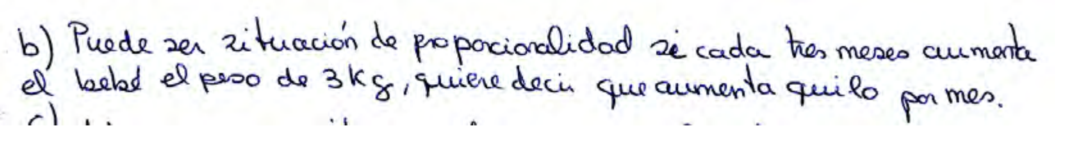
Para el *problema (b)*, que se trata de un problema pseudo-proporcional, en el que se pone en relación el peso con la edad de un niño, durante su primer año de vida, se observa un ligero predominio de los futuros profesores que consideran la situación como no proporcional (52,5%). No obstante, el resto de los sujetos (47,5%) consideran que tal situación es de proporcionalidad, contándose dentro de este grupo dos sujetos que condicionan la proporcionalidad (S-30, P-16) y (S-43, P-82)[42]. Uno de los argumentos, utilizado por uno de estos sujetos dice que: “Matemáticamente hablando si puede ser de proporcionalidad (podemos aplicar la R-3), pero realmente no… los bebés no aumentan de peso todos los meses por igual”, lo cual parece referir a la matemática como una forma de pensamiento ajena a la realidad. En la Fig. 5.6 presentamos las argumentaciones expuestas por estos dos sujetos.

En términos generales, se debe notar, en el tipo de respuesta dada por los sujetos al *problema (b)*, una alta presencia de la ilusión de la linealidad al enfrentar un problema en el que se pone en juego la relación entre el peso y la edad de un niño, durante su primer año de vida. Al parecer la razón “3 kg en 3 meses”, dada inicialmente, que implica un aumento proporcional circunstancial, se generaliza como razón constante que se manifiesta en la variación entre edad y peso de un bebé durante su primer año.

Respecto al *problema (c)*, que es un problema proporcional de razón uno, 10 de los futuros profesores (17%) consideran que se trata de una situación de proporcionalidad.

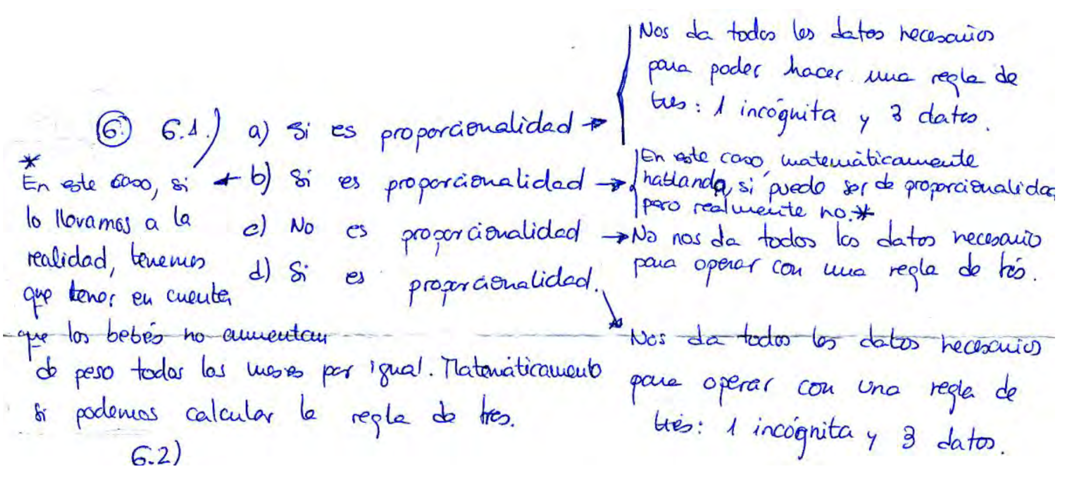
[42] En adelante, utilizaremos esta notación para referir al sujeto y a la prueba de la cual ha sido tomada la información que se expone. En este caso, lo presentado en la Fig. 5.6 fue tomado de lo realizado por dos sujetos: el sujeto nº 30, a quien corresponde la prueba nº 16, lo que se simboliza como (S-30, P-16), y el sujeto nº 43, a quien corresponde la prueba nº 82, lo cual se simboliza como (S-43, P-82).

Un alto porcentaje, prácticamente el 80% de los sujetos, consideran que se trata de una situación no proporcional, observándose que 3 de los sujetos (5,1%) no da respuesta sobre la proporcionalidad de la situación. Una posible explicación para esta manifestación es que en esta situación resulta más directo observar que no se produce una covariación entre las magnitudes involucradas, lo que permite realizar un juicio más inmediato de la situación. Sobre este aspecto referiremos nuevamente en el sub-apartado 5.7.2.2.3.



b) Puede ser situación de proporcionalidad si cada tres meses aumenta el bebé el peso de 3kg, quiere decir que aumenta 1 kilo por mes.

Condición utilizada para argumentar en torno a la proporcionalidad (S-30, P-16)



6 6.1) a) Si es proporcionalidad → Nos da todos los datos necesarios para poder hacer una regla de tres: 1 incógnita y 3 datos.

b) Si es proporcionalidad → En este caso matemáticamente hablando, si puede ser de proporcionalidad pero realmente no.*

c) No es proporcionalidad → No nos da todos los datos necesario para operar con una regla de tres.

d) Si es proporcionalidad. → Nos da todos los datos necesarios para operar con una regla de tres: 1 incógnita y 3 datos.

* En este caso, si lo llevamos a la realidad, tenemos que tener en cuenta que los bebés no aumentan de peso todos los meses por igual. Matemáticamente si podemos calcular la regla de tres.

6.2)

Condición utilizada para argumentar en torno a la proporcionalidad (S-43, P-82)

Fig. 5.6: Condición utilizada para argumentar en torno a la proporcionalidad/no proporcionalidad de la situación a la que refiere el *problema (b)*.

Sobre el *problema (d)*, que es un problema pseudo-proporcional, en el cual se pone en relación la cantidad de pasteles y el tiempo que puede tardar una persona en comerse 24 pasteles, 51 de los futuros profesores (86,4%) consideran que la situación es de proporcionalidad. Se debe agregar que tres de los sujetos condicionan la proporcionalidad de la situación, refiriendo a la capacidad de comer que puede desarrollar una persona. En la Fig. 5.7, presentamos los argumentos dados por estos tres sujetos para sustentar la proporcionalidad/no-proporcionalidad de la situación.

Se observa, en el caso del primer sujeto (S-2, P-43), una argumentación basada en una supuesta dicotomía entre la teoría y la práctica en la que en cada contexto la situación se interpreta de manera diferente. Una situación similar se presenta con el tercer sujeto (S-

20, P-58), pero la dicotomía se presenta entre lo subjetivo y la actividad matemática como actividad objetiva. Lo infundado de este argumento se puede observar en la falacia que se produce al tratar de generalizar una posible manifestación particular, sujeta a una interpretación personal y a conveniencia.

D) Es de proporcionalidad a nivel teórico ~~aspectos~~ si suponemos que Pedro no se cansa al ir comiendo pasteles pero no lo es a nivel práctico porque es probable que Pedro se vaya cansando y en los dos últimos pasteles tarde más que en los dos primeros.
Condiciones utilizadas para argumentar en torno a la proporcionalidad (S-2, P-43)
b) Si mantiene la velocidad de comer, sí es un problema de proporcionalidad, ya que cada 3 minutos irá comiéndose 2 pasteles.
Condiciones utilizadas para argumentar en torno a la proporcionalidad (S-6, P-22)
Como llamada de atención señala que el apartado "d" lo podemos tomar como no proporcional y subjetivo, si pensamos en las características, hambre, resistencia, etc de Pedro, pero en este caso lo vamos a tomar como una cuestión matemática.
Condiciones utilizadas para argumentar en torno a la proporcionalidad (S-20, P-58)

Fig. 5.7: Condiciones utilizadas para argumentar en torno a la proporcionalidad/no proporcionalidad de la situación a la que refiere el *problema (d)*.

Por otra parte, se debe notar que para este problema, la manifestación de la ilusión de la linealidad es casi total. Al comparar este resultado con lo visto en el *problema (b)*, observamos una manifestación mayor de esa sobrevaloración de la linealidad en el *problema (d)*, lo que conduce a pensar que la situación que involucra la relación "comer pasteles por tiempo" es más proclive a esa manifestación que la relación "peso por edad de un bebé". En este orden de ideas, consideramos que la potencialidad de la manifestación de la razón constante en una y otra situación constituye una condición que determina esa proclividad.

5.7.2.2. Tipos de justificaciones sobre la proporcionalidad

Para el reconocimiento de los tipos de justificaciones, presentados por la muestra de futuros profesores, sobre la proporcionalidad de las situaciones planteadas, hemos procedido a agrupar en varias categorías los diferentes tipos de explicaciones dadas por ellos. Estas agrupaciones fueron realizadas teniendo como criterio básico la similitud entre los argumentos empleados por los sujetos para dar la explicación correspondiente.

A continuación mostraremos cómo se han conformado las categorías de respuestas de esas explicaciones, así como la frecuencia con que tal tipo de respuestas se hizo presente.

5.7.2.2.1. Tipos de justificaciones en el problema (a)

La variedad de explicaciones dadas a la proporcionalidad/no-proporcionalidad del *problema (a)*, presentadas por los 59 sujetos de la muestra, las hemos agrupado en ocho categorías, que hemos llamado tipo de justificación, a la vez los tipos de justificación han quedado comprendidos en dos categorías más generales, que hemos llamado tipos de respuestas. En el Anexo E1 presentamos, de manera esquemática, estas agrupaciones, mostrando los diferentes tipos de explicaciones dadas por los sujetos. En la Tabla 5.3 mostramos parte de ese esquema, en la que solo presentamos un ejemplar del tipo de explicación para cada tipo de justificación.

Respecto a las categorías identificadas, debemos reconocer que se hacen presentes tanto para justificar que la situación es de proporcionalidad, así como también, para justificar que la situación no es de proporcionalidad. Es decir, las categorías han sido formuladas de manera que en ellas se agrupan tipos de explicaciones que pretenden sustentar el porqué una situación es considerada de proporcionalidad, y, de la misma manera, la manifestación contraria; explicaciones que pretenden sustentar el porqué la situación se considera como no proporcional, quedando ambos tipos de explicación comprendidas en la misma categoría.

Así, por ejemplo, una de las categorías con mayor frecuencia en todos los tipos de respuestas es ―La idea de variación, cambio o aumento (Más → más)" (como puede verse en la Tabla 5.4, más adelante), que comprende explicaciones del tipo: ―…la situación es de proporcionalidad puesto que los euros aumentan en proporción con los paquetes”; o también las del tipo: “la situación no es proporcional puesto que a medida que aumenta una cantidad no lo hace la otra en la misma medida, en la misma proporción”.

Tabla 5.3: Tipos de justificación sobre la proporcionalidad/no-proporcionalidad del *problema (a)*

Tipo de respuesta	**Tipo de justificación**	**Tipo de explicación**
La situación es Proporcional	Solo una frase	El precio será proporcional al número de cajas
	La idea de relación como caracterización	Existe una relación directa entre euros y paquetes ⋮
	Relación entre cajas/paquetes/precio	Existe relación entre lo que cuesta cada paquete y el total de paquetes ⋮
	Frases que expresan poca relación con la idea de proporcionalidad	Expresa cosas que son de igual magnitud ⋮
	La idea de variación, cambio o aumento (Más → más)	Los euros aumentan en proporción con los paquetes ⋮
	Regla de tres	Se puede aplicar regla de tres ⋮
	Frases que expresan relación con la idea de proporcionalidad	Ambas cantidades deben ser multiplicadas por el mismo número ⋮
	La idea de razón	El precio por caja es una razón constante
La situación no es proporcional	Solo una frase	Los datos no son proporcionales
	Frases que expresan poca relación con la idea de proporcionalidad	Solo aparece una magnitud €
	Frases que expresan relación con la idea de proporcionalidad	No existe un factor k, por el cual el precio dependa del número de paquetes
	La idea de variación, cambio o aumento (Más → más)	A medida que aumenta una cantidad no lo hace la otra en la misma medida, en la misma proporción

Debemos además referir al carácter subjetivo con que se han establecido las categorías identificadas, puesto que la colocación de un tipo de explicación dentro de un tipo de categoría (justificación) ha obedecido a la percepción de elementos comunes entre los diferentes tipos de respuestas.

En este orden de ideas, reconocemos, por ejemplo, haber incluido en la categoría “La idea de variación, cambio o aumento (Más → más)” algunos tipos de explicación que comprenden términos como: “proporción”, “igual”, “lo mismo”, “la misma”, que podrían estar refiriendo a la idea de razón y por ende se podrían interpretar como parte de la categoría “La idea de razón”. No obstante, si el sujeto no usa expresamente el término “razón” o una expresión del tipo “precio por caja”, “peso por mes”…, en su explicación, hemos convenido no incluirla dentro de esta última categoría.

Continuando con algunos detalles relativos al establecimiento de las categorías de los tipos de justificación, presentamos a continuación una breve descripción de las mismas. En los anexos, Anexo E (desde Anexo E1, hasta Anexo E4), presentamos los tipos de explicaciones que han sido agrupados en cada categoría, de acuerdo con los diferentes problemas.

Categoría “Solo una frase”, comprende aquellos tipos de respuesta en las que los sujetos solo formulan frases del tipo: “la situación es proporcional/no proporcional” sin agregar a una frase de este tipo ninguna otra explicación.

Categoría “La idea de relación como caracterización”, refiere a aquellos argumentos que se basan en que existe una relación entre las magnitudes puestas en juego en el problema. El solo hecho de que las magnitudes consideradas guarden algún tipo de relación, se convierte en razón suficiente para considerar la situación como proporcional.

Categoría “Relación entre cajas, paquetes y precio”, esta categoría sólo se hace presente en el *problema (a)*, debido a que comprende una doble relación de proporcionalidad basada en dos tipos de razón: “paquetes por cajas” y “precio por cajas”. Esta categoría, que puede ser considerada como una sub-categoría de la anterior, puesto que se basa en el reconocimiento de estas razones-relaciones para caracterizar la proporcionalidad, y no en el hecho de que tales razones son constantes, también comprende aquellas respuestas en la que se use sólo una de estas razones-relaciones para justificar la proporcionalidad de la situación.

Categoría “Frases que expresan poca relación con la idea de proporcionalidad”, tal y como su propia nominación lo indica, esta categoría refiere al uso de argumentos que guardan poca relación con lo que significa una situación de proporcionalidad.

Categoría "La idea de variación, cambio o aumento (Más → más)", refiere a aquellas argumentaciones que se basan en una caracterización de la proporcionalidad por medio de la manifestación de alguna covariación entre magnitudes, siendo la más común la covariación de aumento directo, que hemos reconocido en la forma de razonamiento intuitivo del tipo —Más en A, más en B", que hemos sintetizado en la expresión: Más → más. Hemos incluido dentro de esta categoría el uso de la frase —aumento proporcional", utilizada como único criterio para caracterizar la proporcionalidad de la situación.

Categoría "Regla de tres", comprende aquellos tipos de explicaciones que consideran el posible uso de la regla de tres para resolver el problema, como argumento suficiente para decidir si una situación es de proporcionalidad o no. Generalmente, este tipo de argumentación se basa en el reconocimiento del enunciado del problema como un problema de valor faltante (en el cual se dan los valores de una razón *a por b*, el valor de uno de los términos *c* de una segunda razón, y se solicita el valor del otro término de la segunda razón), lo que conduce a adjudicarle al problema con este formato el adjetivo de proporcionalidad de manera automática.

Categoría "Frases que expresan relación con la idea de proporcionalidad", comprende los tipos de explicaciones cuyas expresiones se aproximan a la caracterización de la proporcionalidad como una relación de igualdad entre dos razones.

Categoría "La idea de razón", refiere a aquellos tipos de respuestas en los que se hace uso de la razón puesta en juego en la situación, como un valor constante que se manifiesta en la covariación de las magnitudes involucradas en el problema.

Una vez agrupados los tipos de explicación, dados por los sujetos de la muestra, en las categorías de la variable —Tipo de Justificación" procedimos a determinar la frecuencia con que los valores de esa variable se hicieron presentes en las respuestas de los sujetos.

En la Tabla 5.4 presentamos las frecuencias con que se manifiestan las categorías descritas en las respuestas dadas por los sujetos al *problema (a)*.

Se debe señalar que de los 7 sujetos que consideran que la situación no es proporcional, 4 de ellos dan algún tipo de argumentación; de los cuales solo 3 exhiben alguna explicación relacionada con la idea de proporcionalidad, resumidas en dos tipos de justificación (Tabla 5.4). Dos de estos tres tipos de explicación han sido presentados en la Tabla 5.3 (antes vista), más aún, los tres tipos de explicación pueden verse en el Anexo E1. Al respecto, observamos que estas explicaciones constituyen un juicio erróneo sobre la relación entre las magnitudes precio y paquetes, las cuales covarían de acuerdo con una razón constante: ―precio por paquete”. Este juicio se manifiesta por medio de una negación de esa relación, cuya ocurrencia está garantizada por las características propias de la situación planteada.

Tabla 5.4: Frecuencias de los tipos de justificaciones de la proporcionalidad/no-proporcionalidad del *problema (a)*.

Tipo de respuesta	**Tipo de justificación**	**N**	**%**
	No justifica	7	11,9
	Solo una frase	1	1,7
	La idea de relación como caracterización	6	10,2
La situación	Relación entre cajas/paquetes/precio	3	5,1
es	Frases… poca relación con la …proporcionalidad	4	6,8
Proporcional	La idea de variación, … (Más → más)	21	35,6
	Regla de tres	5	8,5
	Frases …relación con la idea de proporcionalidad	3	5,1
	La idea de razón	1	1,7
	Subtotal	51	86,4
	No justifica	2	3,4
La situación	Solo una frase	1	1,7
no es	Frases… poca relación con la …proporcionalidad	1	1,7
proporcional	Frases… relación con la idea de proporcionalidad	1	1,7
	La idea de variación, … (Más → más)	2	3,4
	Subtotal	7	11,9
No responde		1	1,7
Total		59	100,0

Se observa en la Tabla 5.4, que aún cuando se ha pretendido resumir los tipos de explicaciones, dados por los sujetos, en torno a la situación planteada, el número de categorías que los agrupan es aún amplio. No obstante, este amplio número de categorías nos da indicaciones sobre la diversidad de ideas que se pueden manifestar en torno a la proporcionalidad.

Con el ánimo de sintetizar aún más las justificaciones dadas por los sujetos, asumimos como criterios de agrupación ―lo débil”, ―lo moderado” y ―lo fuerte” de la proximidad de las respuestas, respecto a la idea de proporcionalidad. Dentro de la calificación *débil* quedarán incluidas todas las respuestas basadas en un juicio superficial de la proporcionalidad, dentro de la calificación *moderada* se incluirán aquellas respuestas en las que se usa aspectos parciales relativos a la idea de proporcionalidad (relación de covariación, uso de la regla de tres o algún algoritmo específico, relaciones entre las magnitudes consideradas), mientras dentro de la calificación *fuerte* quedarán incluidas las respuestas que hagan uso de la idea de razón, de igualdad entre razones, de términos-relaciones muy próximos al uso de esa igualdad.

Es necesario especificar que, para el análisis del *problema (a)*, hemos incluido dentro de la primera calificación (proximidad débil) las respuestas que consideran la situación como no proporcional. De manera que, hemos reunido en la fila ―Resto categorías situación no proporcional", aquellas respuestas que se encuentran en una categoría que ha sido incluida como moderada o fuerte, respecto a la proximidad de la idea de proporcionalidad. Es decir, las respuestas en las que se considera que la situación no es proporcional, incluidas en la Tabla 5.4 dentro de las categorías ―Frases… relación con la idea de proporcionalidad" y ―La idea de variación,… (Más → más)", se han resumido en la categoría ―Resto categorías situación no proporcional", presentada en la Tabla 5.5. De este modo, hemos obtenido tres tendencias principales, cuyo resumen presentamos en la Tabla 5.5.

Observamos en la Tabla 5.5 que un considerable número de sujetos de la muestra (29; 49,2%), exhiben justificaciones débiles al argumentar sobre la proporcionalidad de la situación planteada en el *problema (a)*. Asimismo, un número similar de ellos (26; 44,1%), exhiben justificaciones moderadas, y sólo 4 sujetos (6,8%) muestran justificaciones más próximas o apropiadas a la idea de proporcionalidad.

Estos resultados coinciden con los obtenidos en la aplicación del primer instrumento (capítulo 4, apartado 4.7), en la que la mayoría de los futuros profesores de la muestra exhiben un conocimiento poco articulado de la proporcionalidad, basado en un manejo parcial de características relativas a la noción de proporcionalidad, que no se integran en una regla general que sirva de fundamento a las explicaciones formuladas.

Respecto a los tipos de justificación dadas por los sujetos, en relación con el análisis epistémico realizado y los conflictos potenciales identificados (sub-apartado 5.5.1.2), observamos que 8 sujetos (13,6%) muestran dificultad para reconocer un problema de valor faltante como una situación de proporcionalidad, lo cual fue previamente identificado como conflicto potencial de los objetos elementos lingüísticos y conceptos. Mientras los 51 sujetos restantes reconocen la situación como proporcional. Sin embargo, sólo 4 de ellos muestran argumentaciones en las que usan proposiciones similares a la propiedad P_1 (definición de magnitudes proporcionales) o el concepto de razón.

Tabla 5.5: Frecuencias de los tipos de justificaciones de la proporcionalidad del *problema (a)*, agrupadas de acuerdo con su proximidad a la idea de proporcionalidad.

Proximidad a la idea de proporcionalidad	**Tipo de justificación**	**N**	**%**
Débil	No responde	1	1,7
	No justifica	9	15,3
	Solo una frase	2	3,4
	La idea de relación como caracterización	6	10,2
	Relación entre cajas/paquetes/precio	3	5,1
	Frases…poca relación con…proporcionalidad	5	8,5
	Resto categorías situación no proporcional	3	5,1
	Subtotal	29	49,2
Moderada	La idea de variación, … (Más → más)	21	35,6
	Regla de tres	5	8,5
	Subtotal	26	44,1
Fuerte	Frases …relación con … proporcionalidad	3	5,1
	La idea de razón	1	1,7
	Subtotal	4	6,8
Total		59	100,0

En general, se observa que la mayoría de argumentaciones dadas, en las categorías débiles y moderadas (45 respuestas; 76,3%) guardan relación con los conflictos potenciales previamente identificados. Estos resultados indican que aún cuando ninguno de los sujetos utilizó una tabla (que sí fue usada para dar la solución experta y considerada para el análisis epistémico previo), el análisis previo y la identificación anticipada de conflictos potenciales dieron cuenta de buena parte de las argumentaciones manifestadas por los sujetos.

5.7.2.2.2. Tipos de justificaciones en el problema (b)

De manera similar al procedimiento realizado para el estudio de las explicaciones dadas a la proporcionalidad/no-proporcionalidad del *problema (a)*, hemos agrupado en diez categorías, las respuestas dadas por los 59 sujetos, del *problema (b)*. En el Anexo E2 presentamos, de manera esquemática, estas agrupaciones, mostrando los diferentes tipos de explicaciones dadas por los sujetos. En las Tablas 5.6 y 5.7 mostramos parte de esas agrupaciones, limitando el tipo de explicación a un único ejemplar, por cada tipo de justificación o categoría.

Tabla 5.6: Tipos de justificación sobre la proporcionalidad del *problema (b)*

Tipo de respuesta	**Tipo de justificación**	**Tipo de explicación**
La situación es Proporcional	La idea de relación como caracterización	Aparecen dos magnitudes relacionadas peso y tiempo ⋮
	Regla de tres	Se emplea la regla de tres, te piden 4 elementos y te dan 3 ⋮
	La idea de variación, cambio o aumento (Más → más)	El peso aumenta en proporción con los meses ⋮
	Frases que expresan relación con la idea de proporcionalidad	Se puede hallar un factor que relaciona el peso con los meses ⋮
	La idea de razón	Cada tres meses son tres kilos… ⋮
	Condicional	Puede ser … aumenta kilo por mes ⋮

Por razones prácticas y debido a la diversidad de las respuestas dadas por los sujetos, hemos convenido, para el estudio de los tipos de justificación del *problema (b)*, separar los tipos de justificaciones en dos tablas, de acuerdo con el criterio proporcionalidad/no-proporcionalidad utilizado en las explicaciones de los sujetos.

Observamos en la Tabla 5.6, la presencia de una nueva categoría, la *categoría "Condicional"*. Los tipos de respuestas que han sido agrupados dentro de esta categoría ya fueron referidos en el sub-apartado 5.7.2.1 (Fig. 5.6), la cual ha sido incluida en los tipos de respuesta que consideran la situación como proporcional. Esta inclusión la hemos basado en las argumentaciones dadas por los sujetos, en las que se observa una marcada tendencia a considerar ―matemáticamente" la situación como proporcional.

Se observa en la Tabla 5.7 la manifestación de otras dos nuevas categorías, utilizadas para argumentar en torno a la no proporcionalidad de la situación planteada en el *problema (b)*. La categoría *"Depende de otros factores"*, que refiere al reconocimiento del problema planteado como una situación compleja, en la que la relación peso/edad no es interpretada de manera aislada, sino inscrita en el contexto real-complejo en el que ella tiene lugar. Desde esta perspectiva la relación peso/edad no puede ser considerada de proporcionalidad.

Tabla 5.7: Tipos de justificación sobre la no-proporcionalidad del *problema (b)*

Tipo de respuesta	**Tipo de justificación**	**Tipo de explicación**
La situación no es proporcional	Solo una frase	No es proporcional ⋮
	Frases que expresan poca relación con la idea de proporcionalidad	No piden la misma magnitud de los datos que se presentan en el problema
	La idea de variación, cambio o aumento (Más → más)	El peso no aumenta lo mismo con los meses ⋮
	Depende de otros factores	
	La razón inicial no es correcta o no influye	El peso que haya ganado en 3 meses no influye en el peso del primer año ⋮
	La idea de razón	Razón 1 kg por mes, no es constante ⋮

Respecto a la categoría *“La razón inicial no es correcta o no influye”* refiere a aquellas explicaciones basadas en que la relación inicial: “aumenta 3 kg en tres meses”, no es válida para caracterizar la variación entre el peso y la edad de los bebés, o de ser válida para algún bebé, no se puede asegurar que la misma determine que la relación peso/edad se manifieste obedeciendo a la razón “3 kg cada tres meses”, durante el primer año de vida del bebé.

Una vez establecidas las categorías anteriores, pasamos a determinar las frecuencias de manifestación de las mismas, en las explicaciones dadas por los sujetos de la muestra, al *problema (b)*. En la Tabla 5.8 presentamos tales frecuencias.

Observamos en la Tabla 5.8 la manifestación de once categorías diferentes, las cuales, al referir a la proporcionalidad/no-proporcionalidad de la situación, da lugar a 14 tipos de justificaciones en las que se agrupan las diferentes explicaciones dadas por los sujetos. Se debe señalar la manifestación de diferentes usos de una misma categoría; en unos casos para justificar que la situación es proporcional, en otros casos para justificar lo contrario.

Tabla 5.8: Frecuencias de los tipos de justificaciones de la proporcionalidad del *problema (b)*

Tipo de respuesta	Tipo de justificación	N	%
La situación es Proporcional	No justifica	4	6,8
	La idea de relación como caracterización	2	3,4
	La idea de variación, … (Más → más)	12	20,4
	Regla de tres	1	1,7
	Frases …relación con la idea de proporcionalidad	3	5,1
	La idea de razón	4	6,8
	Condicional	2	3,4
	Subtotal	28	47,5
La situación no es proporcional	No justifica	1	1,7
	Solo una frase	3	5,1
	Frases… poca relación con la …proporcionalidad	1	1,7
	La idea de variación, … (Más → más)	13	22,0
	Depende de otros factores	6	10,2
	La razón inicial no es correcta o no influye	2	3,4
	La idea de razón	5	8,5
	Subtotal	31	52,5
Total		59	100,0

Se debe resaltar el predominio ejercido por la categoría ―La idea de variación,… (Más → más)", tanto para argumentar a favor de que la situación es proporcional (12; 20,4%), así como lo contrario (13; 22%), lo cual, si bien debe considerarse una idea que forma parte de la configuración epistémica de la proporcionalidad, no es suficiente para dar lugar al conocimiento requerido para su manifestación. Este puede ser un indicador de lo que posiblemente se realiza desde la educación formal, al tratar de desarrollar la enseñanza de la proporcionalidad, cuyo resultado se manifiesta en una reducción del significado de la proporcionalidad al sentido de covariación, lo cual sólo representa una idea parcial de la misma.

En general, la identificación de estas categorías nos aproxima a las formas de razonar, desarrolladas por los futuros maestros en torno a la proporcionalidad. Más aún, observar su manifestación para argumentar sobre la proporcionalidad/no-proporcionalidad de una situación dada, nos aproxima a su configuración cognitiva (elementos de lenguaje, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos), utilizada por ellos para actuar ante una situación tal. Esta información es de interés para el formador, puesto que provee de indicios que lo pueden ayudar a actuar de manera más pertinente en su desempeño profesional.

No obstante, la ganancia de estas observaciones nos reclaman ir hacia una síntesis más específica, desde la cual se pueda percibir una idea que resuma la aproximación de los sujetos a lo epistémico en torno a la proporcionalidad.

Atendiendo al criterio de agrupación utilizado para el estudio del *problema (a)*, por medio del cual se interpretan los tipos de justificación, de acuerdo con su proximidad con la idea de proporcionalidad, hemos obtenido una nueva distribución de las frecuencias observadas que hemos resumido en la Tabla 5.9.

Tabla 5.9: Frecuencias de los tipos de justificaciones de la no proporcionalidad del *problema (b)*, agrupadas de acuerdo con su proximidad a la idea de proporcionalidad.

Proximidad a la idea de proporcionalidad	**Tipo de justificación**	**N**	**%**
Débil	No justifica	5	8,5
	Solo una frase	3	5,1
	La idea de relación como caracterización	2	3,4
	Frases…poca relación con…proporcionalidad	1	1,7
	Resto categorías situación proporcional	22	37,3
	Subtotal	33	55,9
Moderada	La idea de variación, … (Más → más)	13	22,0
	Depende de otros factores	6	10,2
	Subtotal	19	32,2
Fuerte	La razón inicial no es correcta o no influye	2	3,4
	La idea de razón	5	8,5
	Subtotal	7	11,9
Total		59	100,0

De manera análoga al procedimiento seguido anteriormente, hemos incluido en las categorías de la proximidad débil, aquellas cuyas explicaciones buscan sustentar que la situación es proporcional. Al igual que antes, este procedimiento genera una fila que hemos denominado ―Resto categorías situación proporcional", en la cual se incluyen los tipos de explicaciones cuyas categorías corresponden a una proximidad moderada o fuerte de la idea de proporcionalidad, pero basadas en que la situación es proporcional.

Es decir, en esa fila han quedado agrupados los tipos de justificación correspondientes a las categorías: “La idea de variación,… (Más → más)”, “Regla de tres”, “Frases… relación con la idea de proporcionalidad”, “La idea de razón” y “Condicional”, utilizadas para justificar que la situación dada es proporcional, quedando agrupadas en ella 22 de las 59 respuestas dadas por los sujetos.

Observamos en la Tabla 5.9 que un considerable número de sujetos de la muestra (33; 55,9%), exhiben justificaciones débiles al argumentar sobre la no proporcionalidad de la situación planteada en el *problema (b)*. Mientras que 19 de los 59 sujetos (32,2%), exhiben justificaciones moderadas, y sólo 7 de ellos (11,9%) muestran justificaciones más próximas a un manejo apropiado de la idea de proporcionalidad, para juzgar una situación no proporcional.

Respecto a las justificaciones dadas por los sujetos, en relación con el análisis epistémico realizado y los conflictos potenciales identificados (sub-apartado 5.5.2.2), observamos que 28 sujetos (47,5%) muestran dificultad para reconocer una situación pseudo-proporcional, al considerar que las magnitudes peso y edad son proporcionales. Esta manifestación fue prevista en los conflictos potenciales de los elementos lingüísticos y los conceptos, identificados en el análisis epistémico respectivo. Un aspecto que debe ser resaltado en estas 28 respuestas, es la respuesta dada por 2 sujetos, que han sido incluidas en la categoría “Condicional”, puesto que, posiblemente, se encuentran más próximos a reconocer el problema como pseudo-proporcional, en comparación con el resto de respuestas de ese grupo. Particularmente encontramos este tipo de respuestas asociadas con una manifestación del conflicto potencial “Los pares de valores considerados no sean “realistas” respecto a la relación entre las magnitudes edad y peso, previsto para el objeto procedimientos en el análisis previo.

Los 31 sujetos restantes (52,5%) consideran la situación como no-proporcional. No obstante, sólo 7 sujetos (11,9%) usan ideas próximas a la noción de magnitudes proporcionales o de razón reconocidas en el objeto conceptos del análisis epistémico previo. Debemos destacar, dentro de estas 31 respuestas, la presencia de 6 respuestas (10,2%) que han sido agrupadas en el tipo de justificación “Depende de otros factores”, cuya manifestación se encuentra asociada al carácter cualitativo del ítem, lo cual fue referido como una consecuencia de un análisis epistémico realizado sobre un problema similar en el capítulo 4.

Las coincidencias referidas indican que buena parte de las justificaciones dadas por los sujetos sobre la proporcionalidad/no-proporcionalidad del *problema (b)*, identificadas en el análisis cognitivo, fueron previstas por medio del análisis epistémico previo y la identificación de los conflictos potenciales respectivos.

5.7.2.2.3. Tipos de justificaciones en el problema (c)

Siguiendo un procedimiento análogo al llevado a cabo para presentar los tipos de justificaciones dadas por los 59 sujetos, de la muestra de futuros profesores, mostramos ahora los tipos de justificaciones relativas a la proporcionalidad/no-proporcionalidad de la situación planteada en el *problema (c)*.

Hemos agrupado en seis categorías los diferentes tipos de explicaciones dadas por los sujetos. En el Anexo E3 presentamos estas categorías y las diferentes explicaciones que han sido agrupadas en las mismas. En la Tabla 5.10 presentamos esas categorías y un ejemplo de una explicación asociada a cada tipo de justificación.

Una observación general de los tipos de respuestas nos llevó a reconocer la manifestación de dos relaciones predominantes entre las cantidades de magnitud involucradas en el problema, a saber: (a) relaciones entre cantidades de dinero, y (b) relaciones entre dinero y tiempo. Ambas relaciones son interpretadas de distintas maneras y conducen a considerar la situación tanto proporcional como no proporcional. No obstante, en la primera de estas relaciones, se incluyen dos respuestas donde se juzga la situación como proporcional, de acuerdo con la respuesta esperada. La manifestación de estas dos relaciones predominantes es posiblemente consecuencia del contexto financiero en el que se enmarca el problema en cuestión.

En este orden de ideas, observamos en la Tabla 5.10, con respecto a las categorías identificadas para los problemas anteriores, la manifestación de dos nuevas categorías, donde una de ellas corresponde a esta primera forma de relaciones (dinero ingresado/ dinero en la cuenta), mientras la otra corresponde a otras formas de relaciones con las cuales los sujetos intentan caracterizar la proporcionalidad.

Las respuestas relativas a la relación dinero/tiempo han sido agrupadas en la categoría —La idea de variación, cambio o aumento (Más → más)". Las dos nuevas categorías las hemos denominado como: —Relación de variación entre cantidades de dinero" y —La idea de la proporcionalidad como una relación entre datos o algún tipo de operación no expresada", que corresponden, a nuestro entender, a manifestaciones propias de la situación específica planteada en el *problema (c)*.

Tabla 5.10: Tipos de justificación sobre la proporcionalidad/no-proporcionalidad del *problema (c)*

Tipo de respuesta	**Tipo de justificación**	**Tipo de explicación**
La situación es Proporcional	La idea de relación como caracterización	Aparecen dos magnitudes relacionadas dinero y tiempo ⋮
	Relación de variación entre cantidades de dinero	La constante es el interés que es cero
	La idea de variación, cambio o aumento (Más → más)	El dinero aumenta con los meses ⋮
La situación no es proporcional	Solo una frase	La situación no es proporcional
	La idea de la proporcionalidad como una relación entre datos o algún tipo de operación no expresada	No nos dan ningún dato proporcionable ⋮
	Relación de variación entre cantidades de dinero	Ambas magnitudes (dinero) son la misma ⋮
	La idea de variación, cambio o aumento (Más → más)	La primera magnitud no aumenta en la misma cantidad que lo hace la segunda ⋮
	Regla de tres	No te piden 4 elementos de los cuales uno de ellos no está ⋮

Relación de variación entre cantidades de dinero refiere a aquellas justificaciones que ponen el énfasis en relaciones entre cantidades de dinero, colocando en un plano secundario la magnitud tiempo. En este sentido, se han agrupado en esta categoría la mayoría de respuestas que refieren a la existencia o no de intereses, o a variaciones de la cantidad de dinero debidas, por ejemplo, a nuevos ingresos realizados por el cliente, o a descuentos realizados por el banco, sin que se haga mención expresa a la magnitud tiempo como interviniente en tales variaciones.

La idea de la proporcionalidad como una relación entre datos o algún tipo de operación no expresada, es una categoría que podría considerarse como sub-categoría de ―La idea de relación como caracterización", sin embargo, en este caso, las relaciones que se manifiestan son específicas, utilizadas para justificar la no proporcionalidad de la situación y refieren, bien sea a una relación entre los datos-magnitudes considerados, por ejemplo a una respuesta del tipo: ―No nos dan ningún dato proporcionable", o al uso de una operación (multiplicación y/o división) como aspecto necesario para la resolución de un problema que involucre una situación proporcional.

Hemos reconocido que el uso de las categorías identificadas, para justificar la no proporcionalidad de la situación, puede estar referido a la identificación de aspectos parciales, que debería cumplir una situación de proporcionalidad, y que no son satisfechos por la situación planteada en el problema, tales como: (a) el sentido de covariación entre los datos-magnitudes, (b) la necesidad de que exista una relación multiplicativa entre ellos, y (c) el requerimiento de utilizar una multiplicación o una división para obtener una solución del problema. En este sentido, observamos que las respuestas dadas por los sujetos, aún cuando están débilmente relacionadas con el reconocimiento de estos aspectos como parciales de la idea de proporcionalidad, tratan de indicar que uno de estos aspectos no es satisfecho por la situación planteada.

En la Tabla 5.11 presentamos las frecuencias de las diferentes categorías. Observamos que el hecho de que se pueda determinar, directamente del enunciado del problema, la ausencia de una covariación entre las magnitudes involucradas: entre cantidades de dinero (15; 25,4%), entre dinero y tiempo (15; 25,4%), crea condiciones favorables para decidir que la situación no es proporcional y proveer de argumentos principalmente basados en esa ausencia. Esto se evidencia en que más del 50% de los sujetos dan sus respuestas sustentadas en que no existe covariación entre los datos-magnitudes involucrados.

En la categoría ―Relación entre cantidades de dinero" (dentro del tipo de respuesta que considera la situación es proporcional) hemos incluido una respuesta en la que el sujeto considera que el dinero ingresado varía en función de que cada dos años el banco descontará el 2% de la cantidad ingresada. Debemos referir que aún cuando este sujeto no dice expresamente que considera la situación como proporcional, hemos asumido que esta consideración está implícita y que se manifiesta por medio de dos indicadores (a) el sujeto provee de una resolución, lo cual sólo se solicitaba para las situaciones proporcionales, y (b) el sujeto juzga el problema como un ―problema de tantos por cientos". En el sub-apartado 5.7.2.3.3, Fig. 5.13, mostramos esta respuesta.

Tabla 5.11: Frecuencias de los tipos de justificaciones de la proporcionalidad del *problema (c)*

Tipo de respuesta	**Tipo de justificación**	**N**	**%**
La situación es Proporcional	No justifica	1	1,7
	La idea de relación como caracterización	2	3,4
	Relación de variación entre cantidades de dinero	4	6,8
	La idea de variación, … (Más → más)	3	5,1
	Subtotal	10	17,0
La situación no es proporcional	No justifica	5	8,5
	Solo una frase	3	5,1
	Proporción…relación entre datos y operaciones	5	8,5
	Relación de variación entre cantidades de dinero	15	25,4
	La idea de variación, … (Más → más)	15	25,4
	Regla de tres	3	5,1
	Subtotal	46	78,0
No responde		3	5,1
Total		59	100,0

Respecto a los tipos de justificación dadas por los sujetos, en relación con el análisis epistémico realizado y los conflictos potenciales identificados (sub-apartado 5.5.3.2), observamos que un considerable número de sujetos (46 sujetos; 78%) han considerado la situación como no-proporcional. Esta manifestación fue prevista en los conflictos potenciales de los objetos elementos lingüísticos y argumentos, deducidos del análisis epistémico correspondiente. Asimismo, en el objeto argumentos fue identificado un conflicto potencial que prevé una de las razones predominantes en las que se basa tal juicio, a saber, la ausencia de covariación entre las cantidades de dinero involucradas. Esta previsión se extiende para buena parte de las justificaciones dadas por los sujetos, excepto, posiblemente, las justificaciones agrupadas en las categorías ―Proporción…relación entre datos y operaciones” y ―Regla de tres” (8 respuestas; 13,6%).

De la misma manera, las justificaciones utilizadas para sustentar la proporcionalidad de la situación (10 respuestas; 17%) han sido previstas en el desarrollo del análisis epistémico realizado. Sólo 2 de estas justificaciones, incluidas en la categoría ―Relación de variación entre cantidades de dinero”, son adecuadas, lo que indica que muy pocos sujetos usan razonamientos similares a los expuestos en la resolución propuesta del problema.

Un aspecto conflictivo que se presenta en realización del análisis cognitivo de este problema, lo cual no fue previsto en el análisis epistémico previo, es que admite dos posibles interpretaciones, de acuerdo con la relación que se establezca (relación entre cantidades de dinero o relación entre dinero y tiempo). Esta posibilidad hace más compleja la determinación de una proximidad, a la idea de proporcionalidad, de las justificaciones proveídas por los sujetos.

En este sentido, una de las posibles interpretaciones es considerar la relación entre cantidades de dinero (dinero ingresado / dinero en la cuenta) como una razón interna, la cual, si la cantidad de dinero no varía, tiene valor igual a uno y por ende la situación es proporcional. Sin embargo, desde esta perspectiva, si la cantidad de dinero en la cuenta es diferente al ingresado inicialmente, debido a que se gane algún interés, se realice algún ingreso o se produzca algún descuento, entonces la razón (dinero ingresado / dinero en la cuenta) variará para distintos momentos, y, por tanto, la situación debería ser interpretada como no proporcional.

Debemos observar que ambas interpretaciones se encuentran próximas a la idea de proporcionalidad, sin embargo la segunda se manifiesta como errónea puesto que omite parte del enunciado del problema en el cual se hace referencia directa a que el dinero no varía (el banco no paga intereses y no se han realizado nuevos ingresos). Esto conduce a considerar como una ―interpretación adecuada" únicamente a la primera, antes referida, en la que se comparan cantidades de dinero que no varían.

Por otra parte, otra de las posibles interpretaciones, es considerar la relación dinero/tiempo, como razón externa, para la cual se debe manifestar una covariación del dinero con el tiempo para que sea considerada como una situación proporcional, sin embargo, considerar una relación de proporción con esta razón es poco probable, por ejemplo, la proporción dada por la razón 1500€/1año, implica que para 2 años la cantidad de dinero debería ser el doble, es decir, 3000€, pero esto sólo es cierto si el interés anual pagado por el banco es del 100%, lo cual es casi imposible. Lo contrario, es decir, si la cantidad de dinero no varía, entonces la situación no es proporcional.

En este caso, la idea de proporcionalidad se basa en la manifestación o no de una covariación, pero se debe tomar en cuenta que reconocer la situación como proporcional basada en la posible manifestación de una covariación, constituye una omisión de parte del enunciado del problema, y, por tanto un juicio erróneo de la situación. Mientras, reconocer la situación como no proporcional, basado en la ausencia de covariación y de la razón dinero/tiempo, constituye una “interpretación adecuada” de la situación, que debe ser considerada como una buena aproximación a la idea de proporcionalidad.

Estas condiciones, puestas de manifiesto por las respuestas dadas al *problema (c)*, nos han conducido a abandonar el juicio sobre la proporcionalidad/no-proporcionalidad como un indicador de la proximidad a la idea de proporcionalidad. Es por ello que con el propósito de realizar un nuevo resumen de las categorías de respuestas identificadas, teniendo como criterio esa idea, hemos llegado a un resultado que no se deduce directamente de lo presentado en la Tabla 5.11, sino que ha sido necesario observar los tipos de respuestas producidos, a la luz de que las mismas se encuentren asociadas a alguna de las dos “interpretaciones adecuadas” antes referidas.

De la misma manera, tomando en cuenta que la idea de covariación constituye un aspecto parcial de la idea de proporcionalidad, hemos incluido en la categoría moderada aquellas respuestas que utilizan la idea de covariación (distinta a la referida como “interpretación adecuada”), excepto cuando, para ello, se haya omitido parte del enunciado del problema. Finalmente, dentro de la categoría débil han quedado incluidas las respuestas que no corresponden con las relaciones antes descritas y las interpretaciones asociadas a juicios erróneos como los referidos.

Dada la complejidad que se presenta en la agrupación de las respuestas dadas al *problema (c)*, en relación con las categorías de proximidad (débil, moderada, fuerte) a la idea de proporcionalidad, en el Anexo G presentamos las respuestas que han sido agrupadas en esas categorías. En la Tabla 5.12 presentamos las frecuencias con que se manifiestan las mismas.

Observamos en la Tabla 5.12 que 26 sujetos de la muestra (44,1%) exhiben justificaciones débiles al argumentar sobre la proporcionalidad/no-proporcionalidad de la situación planteada en el *problema (c)*. Mientras que 16 de los 59 sujetos (27,1%), exhiben justificaciones moderadas, y 17 muestran justificaciones más próximas a un manejo apropiado de la idea de proporcionalidad. Respecto a este último resultado se debe reconocer que sólo 2 de los sujetos (3,4%) proveen de una respuesta similar a la esperada, en la que se reconoce la razón constante: cantidad de dinero ingresada /

cantidad de dinero en la cuenta (o lo que te devuelve el banco), igual a uno, como característica fundamental de la relación involucrada en la situación respectiva.

Tabla 5.12: Frecuencias de los tipos de justificaciones de la no proporcionalidad del *problema (c)*, agrupadas de acuerdo con su proximidad a la idea de proporcionalidad.

Proximidad idea de proporcionalidad	**Tipo de justificación**	**N**	**%**
Débil	No justifica / no responde	9	15,3
	Solo una frase	3	5,1
	La idea de relación como caracterización	2	3,4
	Proporción… relación entre datos y operaciones	5	8,5
	La idea de variación, … (Más → más)	3	5,1
	Relación variación entre cantidades de dinero	1	1,7
	Regla de tres	3	5,1
	Subtotal	26	44,1
Moderada	Relación variación entre cantidades de dinero	16	27,1
Fuerte	La idea de variación, … (Más → más)	15	25,4
	Relación variación entre cantidades de dinero	2	3,4
	Subtotal	17	28,8
Total		59	100,0

En este orden de ideas, reconocemos que, en un sentido estricto, un manejo apropiado de la idea de proporcionalidad, o un desarrollo adecuado del razonamiento proporcional, requerido para reconocer y justificar la proporcionalidad de la situación planteada en el *problema (c)*, parece prácticamente ausente en la mayoría (96,6%) de las respuestas manifestadas. No obstante, cabe la duda razonable de la implicación de lo observado sobre la ausencia de esta forma de razonamiento, puesto que la plausibilidad de la interpretación basada en la no covariación de la relación dinero/tiempo sesga este resultado. En consecuencia consideramos necesario hacer más investigación enfocada en el reconocimiento de situaciones de este tipo y sus implicaciones.

5.7.2.2.4. Tipos de justificaciones en el problema (d)

Para la presentación de los tipos de justificación, relativas a la proporcionalidad/no proporcionalidad de la situación planteada en el *problema (d)*, hemos seguido un procedimiento similar al desarrollado para los demás problemas. Del mismo modo, hemos incluido en el Anexo E4 la identificación de las categorías de los tipos de justificación y los tipos de explicación que han sido agrupados dentro de cada categoría.

En la Tabla 5.13 presentamos las cinco categorías identificadas y un ejemplo de un tipo de explicación asociada a cada categoría.

Observamos en la Tabla 5.13 que los tipos de explicación, puestos en juego por los sujetos, no proveen de nuevos tipos de justificaciones o categorías, en relación con los referidos anteriormente, en el estudio de las respuestas a los problemas precedentes.

Tabla 5.13: Tipos de justificación sobre la proporcionalidad/no-proporcionalidad del *problema (d)*

Tipo de respuesta	**Tipo de justificación**	**Tipo de explicación**
La situación es Proporcional	La idea de relación como caracterización	Dos magnitudes son proporcionales cuando depende la una de la otra ⋮
	La idea de variación, cambio o aumento (Más → más)	La primera magnitud aumenta en la misma cantidad que lo hace la segunda ⋮
	Regla de tres	Nos dan los datos necesarios para aplicar la regla de tres ⋮
	La idea de razón	Es una constante que Pedro puede comer 2 pasteles en 3 minutos ⋮
	Condicional	Suponiendo que Pedro no se canse de ir comiendo pasteles ⋮
La situación no es proporcional	La idea de variación, cambio o aumento (Más → más)	Cuánto más comemos menos nos entra ⋮
	La idea de razón	No hay constante de proporcionalidad al comer pasteles ⋮

Procediendo de manera similar, como lo hemos hecho en los sub-apartados anteriores, presentamos en la Tabla 5.14 las frecuencias con que los tipos de justificaciones se hicieron presentes en las respuestas dadas por los sujetos. Observamos en la Tabla 5.14 la manifestación de cinco tipos diferentes de categorías, las cuales, al referir a la proporcionalidad/no-proporcionalidad de la situación, da lugar a siete tipos de justificaciones en las que se agrupan las diferentes explicaciones dadas por los sujetos.

Al igual que en los tipos de justificaciones identificadas en el estudio de las respuestas de los problemas anteriores, se observa la manifestación de diferentes usos de una misma categoría; en unos casos para justificar que la situación es proporcional, en otros casos para justificar lo contrario.

Específicamente, observamos que las categorías: ―La idea de variación,… (Más → más)" y ―La idea de razón", son las que muestran este comportamiento. Asimismo observamos, en relación con ese comportamiento, que en estas dos categorías se agrupan todas las respuestas que consideraron la situación como no proporcional y que dieron alguna explicación, quedando sólo 5 tipos de explicaciones (8,5%) agrupadas en estos dos tipos de justificaciones.

Tabla 5.14: Frecuencias de los tipos de justificaciones de la proporcionalidad del *problema (d)*

Tipo de respuesta	**Tipo de justificación**	**N**	**%**
La situación es Proporcional	No justifica	6	10,2
	La idea de relación como caracterización	7	11,9
	La idea de variación, … (Más → más)	22	37,3
	Regla de tres	9	15,3
	La idea de razón	6	10,2
	Condicional	3	5,1
	Subtotal	53	89,8
La situación no es proporcional	La idea de variación, … (Más → más)	2	3,4
	La idea de razón	3	5,1
	Subtotal	5	8,5
No responde		1	1,7
Total		59	100,0

Se debe señalar el predominio del uso de ―La idea de variación… (Más→más)" para justificar la proporcionalidad de la situación (22 sujetos; 37,3%). Esta tendencia puede indicar que la presencia de la covariación entre magnitudes, del tipo ―más en A, más en B", en la situación-problema, constituye un aspecto que sirve de soporte para justificar la proporcionalidad de la situación. Esto se refuerza, con lo observado en el *problema (c)*, puesto que al no hacerse expresa esta característica en el enunciado del problema, se utiliza esa ausencia para justificar la no proporcionalidad de la situación. Más aún, el uso de esta categoría para justificar la no proporcionalidad de la situación planteada en el *problema (d)* se presenta como el menos frecuente, puesto que sólo dos sujetos (3,4%) basan sus justificaciones de la no proporcionalidad haciendo uso de la misma.

De manera similar al procedimiento realizado para resumir los tipos de respuestas proveídos por los sujetos, de acuerdo con el criterio de proximidad a la idea de proporcionalidad, presentamos en la Tabla 5.15, las frecuencias correspondientes. Nuevamente, se han realizado arreglos, análogos a los realizados para el *problema (b)*, para que las respuestas en las cuales se considera la situación como proporcional, queden incluidas en la proximidad débil.

Tabla 5.15: Frecuencias de los tipos de justificaciones de la no proporcionalidad del *problema (d)*, agrupadas de acuerdo con su proximidad a la idea de proporcionalidad.

Proximidad a la idea de proporcionalidad	**Tipo de justificación**	**N**	**%**
	No justifica	6	10,2
Débil	La idea de relación como caracterización	7	11,9
	Resto categorías situación proporcional	40	67,8
	Subtotal	53	89,8
Moderada	La idea de variación, … (Más → más)	2	3,4
Fuerte	La idea de razón	3	5,1
No Responde		1	1,7
Total		59	100,0

Observamos en la Tabla 5.15 que una mayoría considerable de sujetos de la muestra (53 sujetos; 89,8%) exhiben justificaciones débiles al argumentar sobre la no proporcionalidad de la situación planteada en el *problema (d)*. Mientras que sólo 5 sujetos (8,5%), exhiben justificaciones moderadas o más próximas a un manejo apropiado de la noción de proporcionalidad, para juzgar una situación no proporcional.

Respecto a las justificaciones dadas por los sujetos, en relación con el análisis epistémico realizado y los conflictos potenciales identificados (sub-apartado 5.5.4.2), observamos que la justificación predominante, basada en la regla de covariación absoluta del tipo ―más en A, más en B", utilizada para sustentar la proporcionalidad de la situación (22 respuestas, 37,3%), fue identificada en los conflictos potenciales del objeto elementos lingüísticos del análisis epistémico respectivo. Una de las justificaciones no previstas en el análisis epistémico, utilizada para sustentar la proporcionalidad de la situación, es la ―Regla de tres", en la que se han agrupado 9 respuestas (15,3%). El resto de las justificaciones dadas por los sujetos, en las que se proveen de algún argumento, se encuentran asociadas a los reconocimientos realizados en el análisis epistémico previo.

5.7.2.3. Tipos de resolución

Nos hemos planteado el estudio de los tipos de resolución como la tercera variable a ser considerada (sub-apartado 5.7.1). En este sentido, presentamos a continuación los distintos tipos de resolución que se manifestaron y las respectivas frecuencias con que tuvieron lugar.

Para la identificación de los tipos de resolución puestos en juego por los sujetos, procedimos de manera similar a lo realizado para la identificación de los tipos de justificaciones. Es decir, se enlistaron los diferentes procedimientos utilizados por los sujetos y luego fueron agrupados en categorías de resolución o lo que hemos llamado tipos de resolución.

La identificación de estas manifestaciones nos provee de información de interés respecto a las tendencias existentes en los futuros profesores para resolver problemas de proporcionalidad.

Aún cuando la resolución de los problemas en cuestión sólo es solicitada para los problemas proporcionales (*problema (a)* y *problema (c)*), el juicio erróneo de los problemas no proporcionales, cuya frecuencia fue elevada en las respuestas de los *problemas (b) y (d)*, provee de otras posibles resoluciones. Asimismo, no deja de tener interés observar los tipos de resolución empleados para resolver el *problema (c)*, cuyo planteamiento deja poco espacio al uso de estrategias algorítmicas, muy frecuentes en las resoluciones de problemas proporcionales (sub-apartado 4.6.1, capítulo 4).

No obstante, los análisis epistémicos realizados sólo incluyen la resolución del *problema (a)* y el *problema (c)*, puesto que estos son los problemas de proporcionalidad. Por lo cual las valoraciones del análisis epistémico versus el análisis cognitivo, sólo procederán para las resoluciones de estos dos problemas. Estas valoraciones se realizan por medio de la comparación de las categorías de posibles respuestas identificadas previamente, con las categorías reconocidas a partir del estudio de las respuestas dadas por los sujetos.

5.7.2.3.1. Tipos de resolución problema (a)

Al observar los diferentes procedimientos desarrollados por los sujetos para resolver el *problema (a)*, identificamos siete tipos de resolución o categorías. A continuación, presentamos una breve descripción de las mismas. En el Anexo F1 presentamos las respuestas que han sido incluidas en cada una de las categorías establecidas.

Categoría "Regla de tres", refiere al uso de la regla de tres en su versión más común, tal y como fue empleada en la resolución propuesta del *problema (a)*, en el sub-apartado 5.5.1.1. Hemos incluido dentro de esta categoría algunas pequeñas variaciones en el uso de esta regla, las cuales fueron descritas en el sub-apartado 5.6.1.2, en el que se identificaron posibles categorías de respuestas en torno al uso de la regla de tres como proceso de resolución, en las que se distinguen al menos dos usos de esta regla uno numérico y otro algebraico.

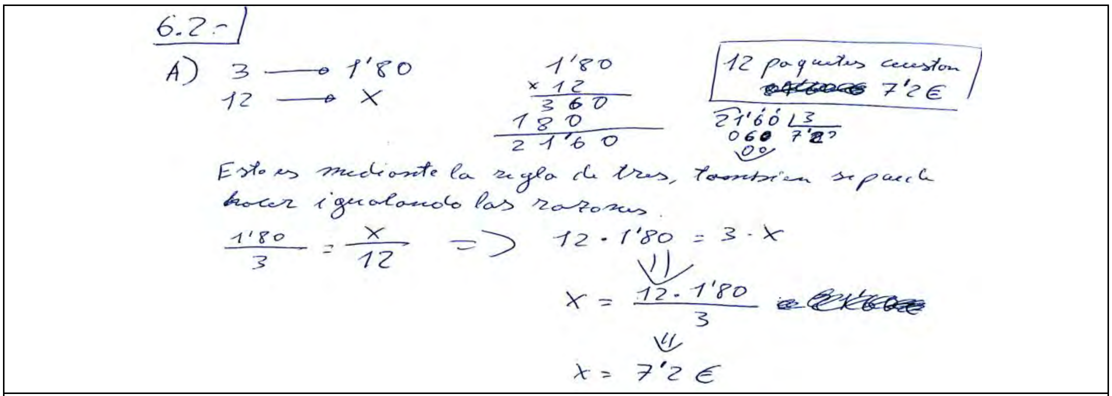
Categoría "Regla de tres y otro procedimiento", consiste en el uso de una regla de tres como procedimiento dominante de resolución, pero unido a otro procedimiento auxiliar o complementario. En este sentido, fueron identificados, como procedimientos complementarios, los siguientes: ecuación de proporcionalidad, razonamiento de tipo aditivo, tabla de proporcionalidad y uso de la relación 1caja ≡ 3paquetes cuestan 1'80€. En la Fig. 5.8 mostramos ejemplos de estos usos.

Categoría "Ecuación de proporcionalidad", refiere al uso que comúnmente se hace de una expresión de la forma a/b = c/d, en la que cada miembro de la igualdad representa una razón, siendo tres de estos valores conocidos y uno desconocido.

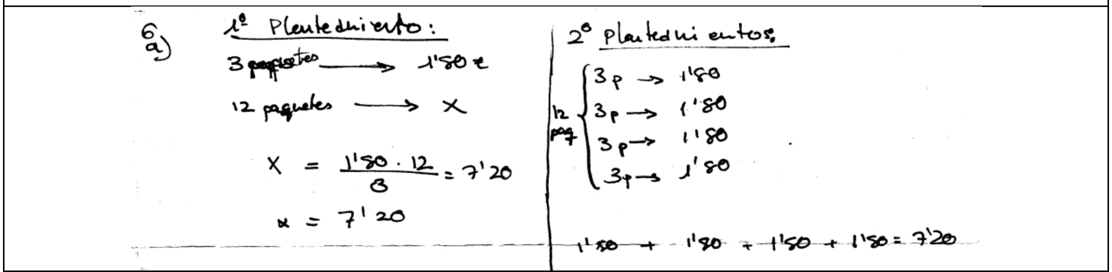
Categoría "Reducción a la unidad", refiere al uso común que se realiza de este procedimiento, se obtiene el precio de cada paquete sabiendo que el costo de 3 paquetes, luego el precio unitario por paquete se multiplica por número de paquetes correspondiente, en este caso 12.

Categoría "Reducción a la unidad y otros procedimientos", consiste en el uso de la reducción a la unidad como procedimiento principal de resolución, aunado a otro procedimiento auxiliar o complementario. En este sentido, fueron observados dos tipos de procedimientos, en el primero, la reducción a la unidad se realiza utilizando una regla de tres, en el segundo, una tabla de proporcionalidad. En la Fig. 5.9 mostramos la manifestación de estos procedimientos.

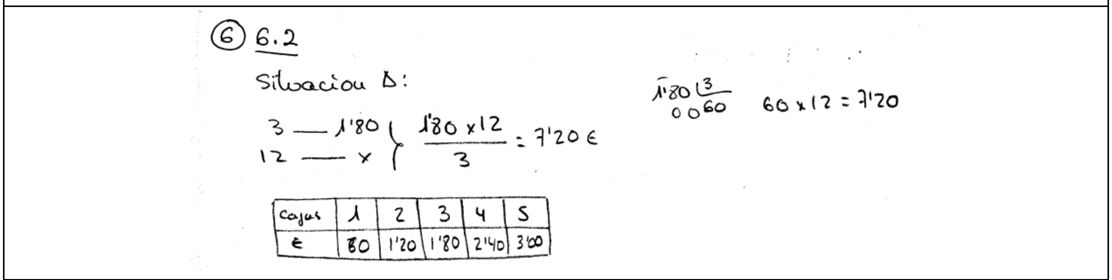
Categoría "Tabla de proporcionalidad", consiste en el uso de una tabla de proporcionalidad como procedimiento principal de resolución. Hemos observado, en una de las respuestas dadas, la manifestación del uso de una tabla de proporcionalidad que incluye aspectos novedosos de su puesta en práctica.



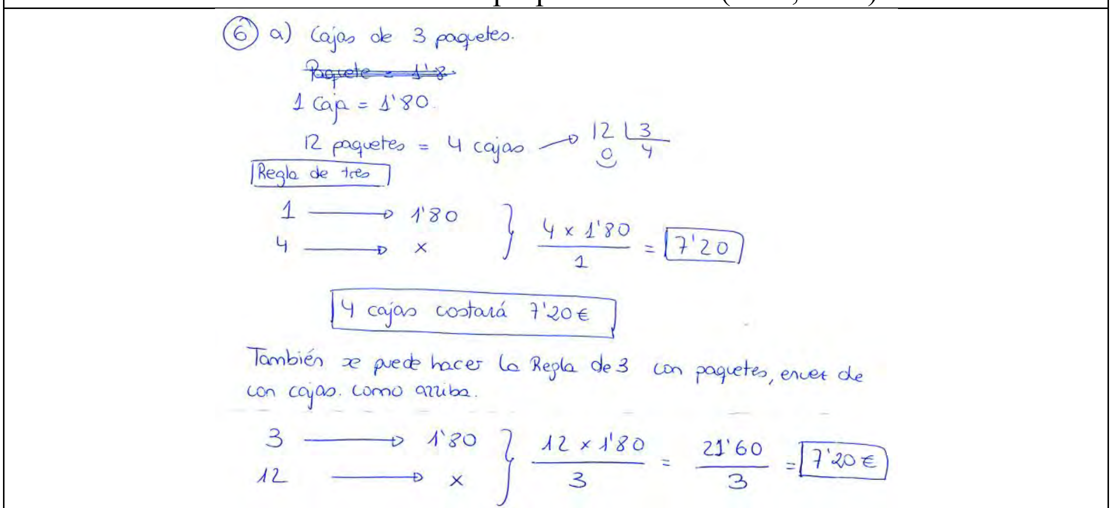
Uso de una ecuación de proporcionalidad (S-2,P-43)



Uso de un razonamiento aditivo (S-41, P-31)

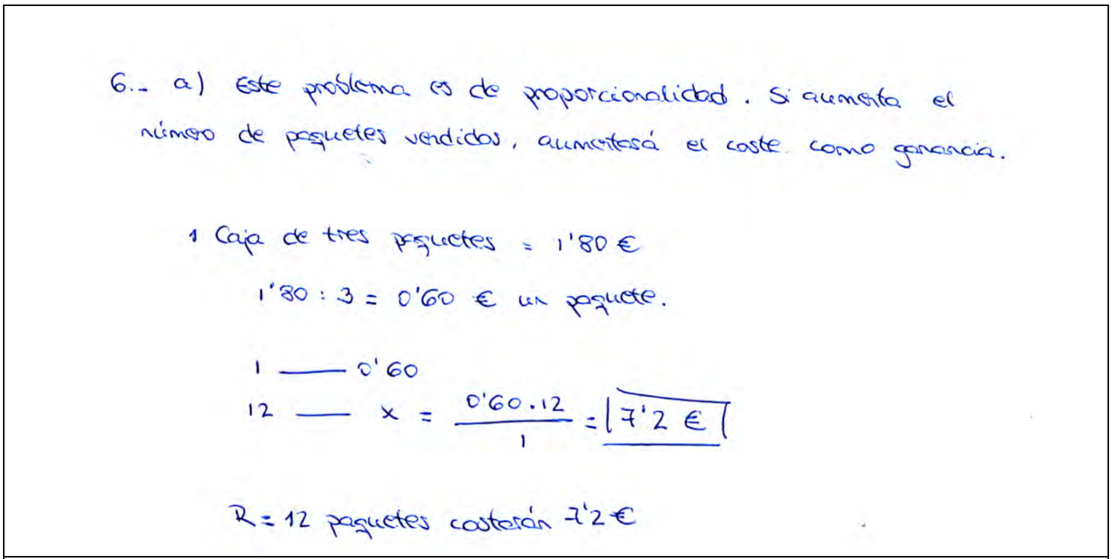


Uso de una tabla de proporcionalidad (S-45, P-40)



Relación 1caja ≡ 3paquetes cuestan 1'80€ (S-15, P-64)

Fig. 5.8: Ejemplos de uso de la regla de tres y un procedimiento complementario



6.- a) Este problema es de proporcionalidad. Si aumenta el número de paquetes vendidos, aumentará el coste como ganancia.

1 Caja de tres paquetes = 1'80 €

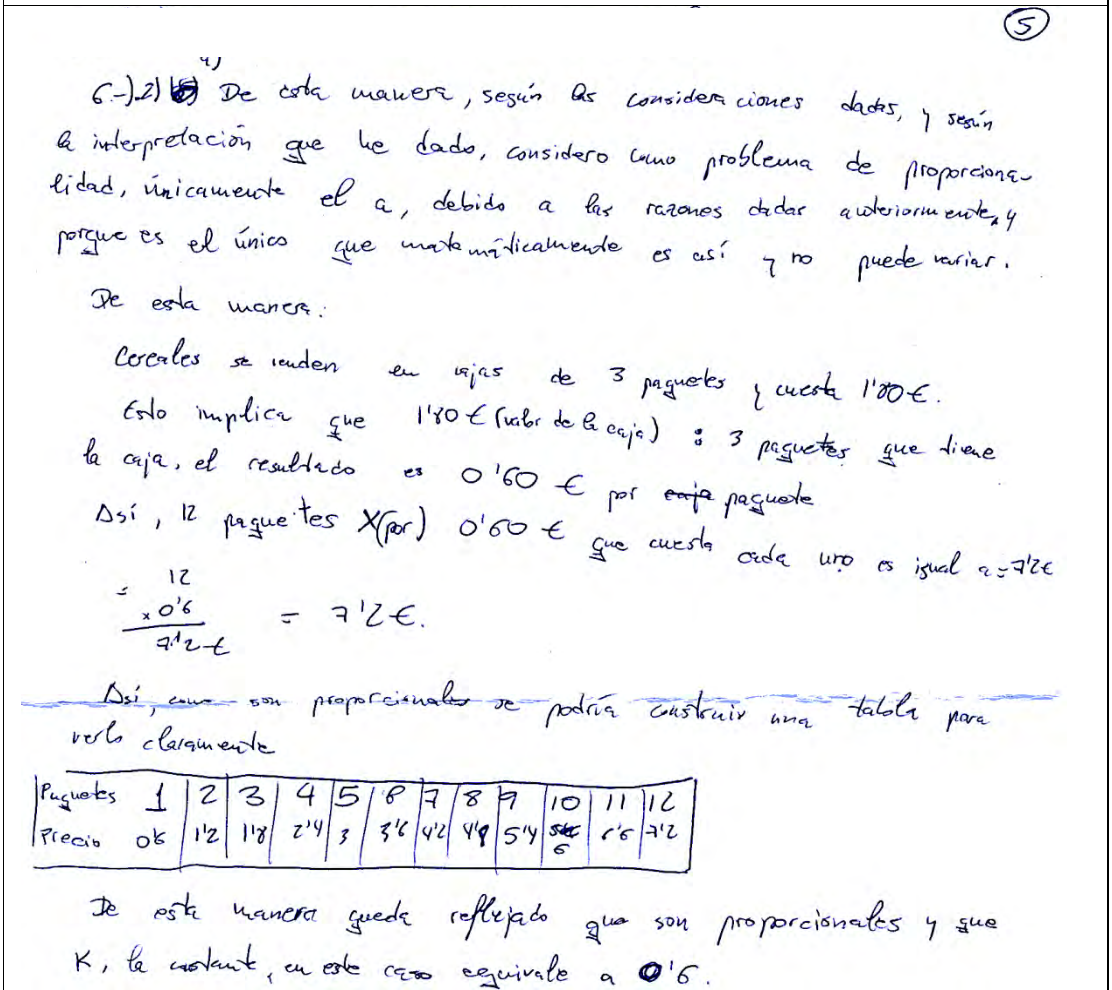
1'80 : 3 = 0'60 € un paquete.

1 —— 0'60

12 —— x = $\frac{0'60 \cdot 12}{1}$ = $\boxed{7'2\ €}$

R = 12 paquetes costarán 7'2 €

Reducción a la unidad y regla de tres (S-13, P-65)



5

6.-) 2) 4) De esta manera, según las consideraciones dadas, y según la interpretación que he dado, considero como problema de proporcionalidad, únicamente el a, debido a las razones dadas anteriormente, y porque es el único que matemáticamente es así y no puede variar.

De esta manera:

Cereales se venden en cajas de 3 paquetes y cuesta 1'80 €.

Esto implica que 1'80 € (valor de la caja) : 3 paquetes que tiene la caja, el resultado es 0'60 € por ~~caja~~ paquete

Así, 12 paquetes X(por) 0'60 € que cuesta cada uno es igual a = 7'2 €

12 × 0'6 = 7'2 € = 7'2 €.

Así, como son proporcionales se podría construir una tabla para verlo claramente

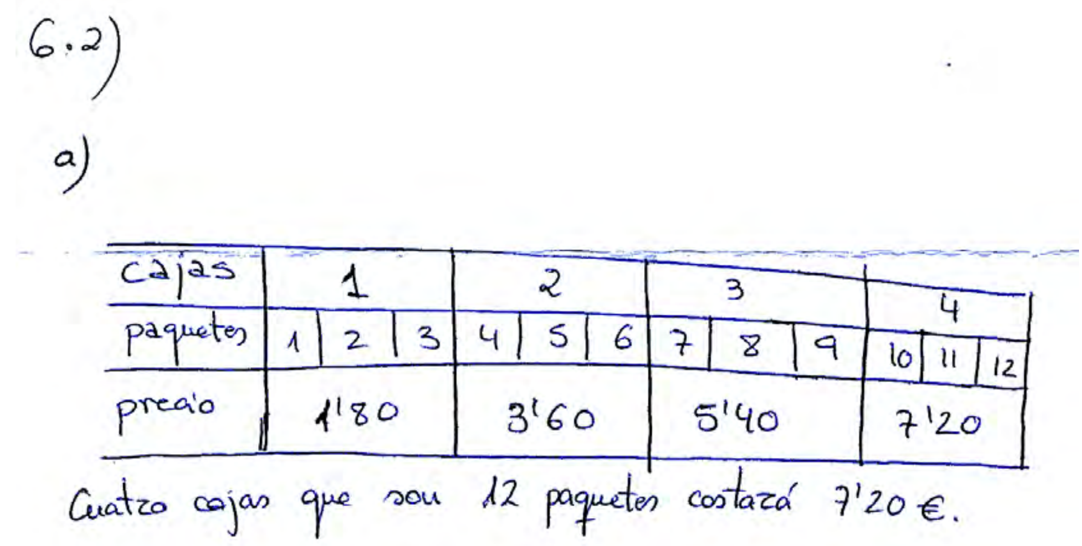
Paquetes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Precio	0'6	1'2	1'8	2'4	3	3'6	4'2	4'8	5'4	6	6'6	7'2

De esta manera queda reflejado que son proporcionales y que K, la constante, en este caso equivale a 0'6.

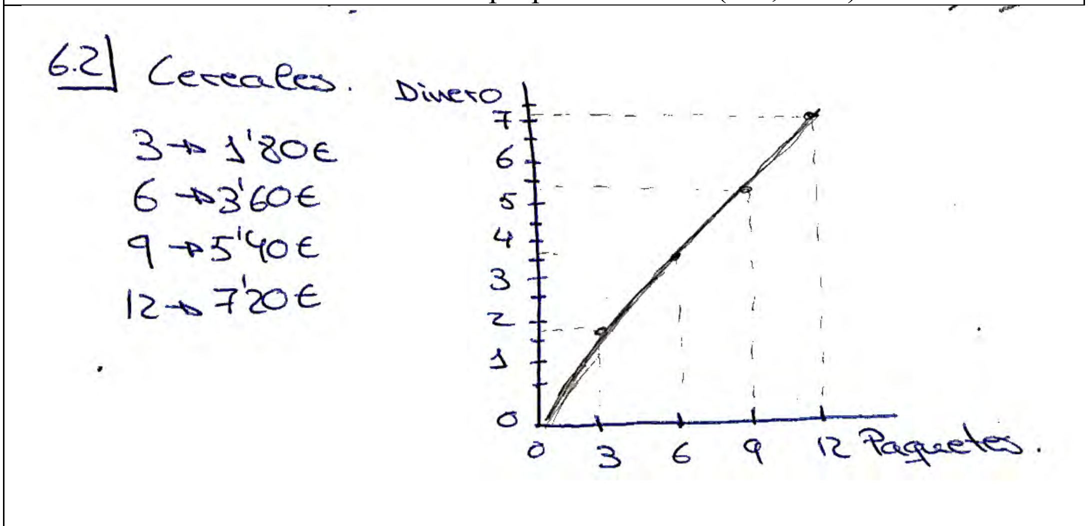
Reducción a la unidad y tabla de proporcionalidad (S-18, P-54)

Fig. 5.9: Ejemplos de uso de la reducción a la unidad y un procedimiento complementario

Asimismo, hemos incluido dentro de esta categoría una resolución en la que se hace uso de una “tabla de valores” y una representación gráfica de las parejas de valores de tal tabla, además, se observa en esta resolución un uso de una estrategia del tipo ―building-up" (conteo de tres en tres y adición de razones) en la obtención de los valores respectivos. Debido a la singularidad de estas respuestas, las presentamos en la Fig. 5.10.



Uso de una tabla de proporcionalidad (S-6, P-22)

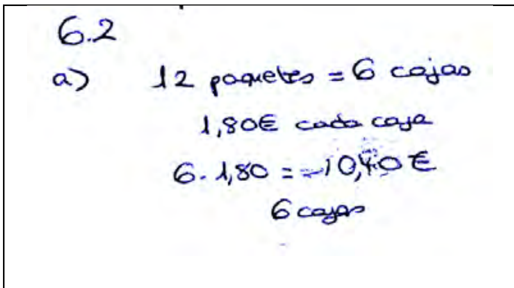


Estrategia que integra varios tipos de resolución (S-34, P-19)

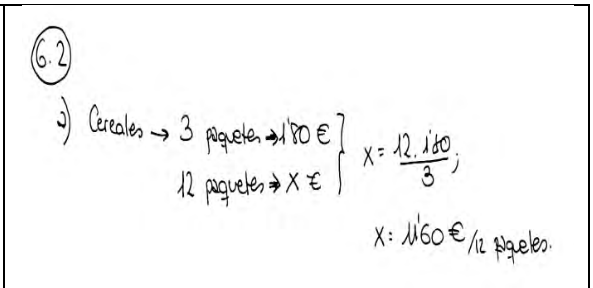
Fig. 5.10: Uso de una tabla de proporcionalidad y otras estrategias que integran varios tipos de procedimientos en la resolución del problema

Categoría "Multiplicación y división" refiere al uso conceptual de estas operaciones (suma reiterada y reparto, respectivamente) para obtener la solución del problema. Un ejemplo de este uso consiste en observar que 3 paquetes hacen 1 caja, con lo cual, aplicando una división, se obtiene que 12 paquetes hacen 4 cajas. Luego, para averiguar cuánto valen los 12 paquetes es suficiente multiplicar 4 por el precio de cada caja, es decir, por 1'80€. Se han incluido dentro de esta categoría aquellas resoluciones en las que no se hace un uso ostensivo de la división, es decir, no se hace uso expreso de que 12 paquetes hacen 4 cajas; se procede asumiendo que 3 paquetes (1 caja) valen 1‘80, por lo que 12 paquetes valen 1‘80 por 4.

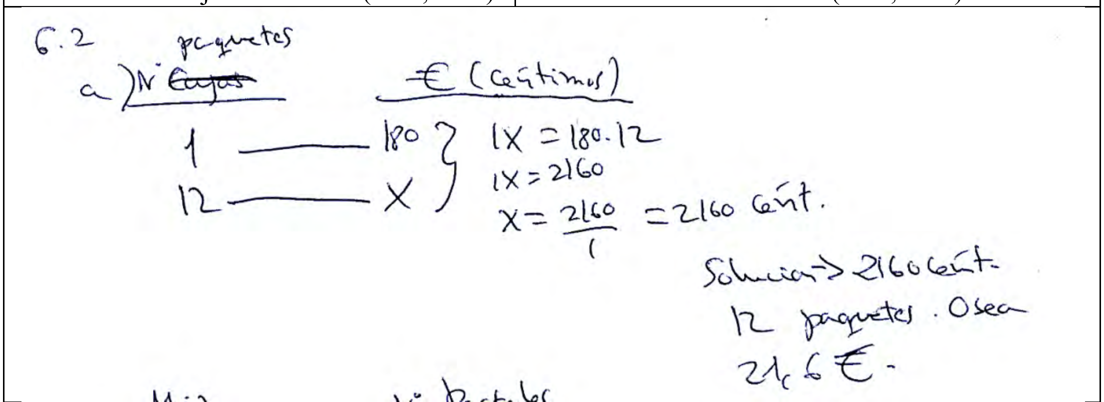
Respecto a los tipos de error que han sido identificados, reconocemos la manifestación de un uso erróneo de cuatro de las categorías antes referidas, específicamente, las categorías: “Regla de tres”, “Regla de tres y otro procedimiento”, “Ecuación de proporcionalidad” y “Multiplicación y división”. Los errores observados son básicamente de tres tipos; los de primer tipo refieren a errores en el manejo de los datos, los del segundo tipo refieren a errores de cálculo generalmente asociados con el uso de la regla de tres, el tercer tipo de error se presenta en la confusión entre cajas y paquetes, en el cual se incluyen aquellos que no hacen un uso correcto de alguna de las razones “paquetes por cajas” “precio por cajas”, “precio por paquetes”. Este último tipo de error fue el de mayor frecuencia (9/14). En la Fig. 5.11 presentamos un ejemplo de cada tipo de error.



Error en el manejo de los datos (S-10, P-49)



Error de cálculo (S-11, P-89)



Error debido a la confusión entre las cajas y los paquetes (S-27, P-77)

Fig. 5.11: Ejemplos de los tipos de error observados en el *problema (a)*.

En la Tabla 5.16, presentamos las frecuencias con que se manifestaron los tipos de resolución identificados. Observamos que el tipo de resolución dominante es la “Regla de tres”. Si unimos todas las respuestas en las que se hizo uso de la regla de tres obtenemos que 29 sujetos (49,2%), más de la mitad de los sujetos que dieron alguna resolución (29 de 51), hace uso de este tipo de resolución, quedando distribuidas el resto de las respuestas (22 respuestas) en cinco de las categorías restantes.

Tabla 5.16: Frecuencias de los tipos de resolución del *problema (a)*, agrupadas de acuerdo con la calificación correcta/incorrecta.

Calificación	**Tipo de resolución**	**N**	**%**
Correcta	Regla de tres	13	22,0
	Regla de tres y otro procedimiento	6	10,2
	Ecuación de proporcionalidad	1	1,7
	Reducción a la unidad	4	6,8
	Reducción a la unidad y otro procedimiento	4	6,8
	Tabla de proporcionalidad	2	3,4
	Multiplicación y división	7	11,9
	Subtotal	37	62,7
Incorrecta	Regla de tres	9	15,3
	Regla de tres y otro procedimiento	1	1,7
	Ecuación de proporcionalidad	2	3,4
	Multiplicación y división	2	3,4
	Subtotal	14	23,7
Considera la situación como no proporcional		7	11,9
No Responde		1	1,7
Total		59	100,0

Este último resultado debe llamar la atención, puesto que indica que, para un número considerable de sujetos, el proceso de instrucción desarrollado no parece haber tenido mayor incidencia.

Debemos referir a la presencia de 14 respuestas incorrectas distribuidas en cuatro de las categorías referidas, siendo el procedimiento más frecuente el uso incorrecto de la regla de tres. Más aún si sumamos a estas 14 respuestas las correspondientes a las que consideraron como no proporcional la situación y el sujeto que no da respuesta, obtenemos 22 sujetos (37,3%) que exhiben un desempeño inadecuado en la resolución del problema en cuestión.

En este sentido, vemos que el predominio de la regla de tres como tipo de respuesta dada por los sujetos (22 respuestas; 37,3%), permite que las categorías de respuestas (Ca2.1 y Ca2.4), identificadas previamente, den cuenta de buena parte de las respuestas dadas por los sujetos al *problema (a)*. No obstante, la categoría ―Regla de tres y otro procedimiento" (7 respuestas; 11,9%), aunque se encuentra relacionada con el uso de la regla de tres, no fue prevista por ninguna de las categorías propuestas. Las categorías que convergen, porque los sujetos no dan ninguna resolución (8 sujetos; 13,6%), fueron previstas por medio de la categoría Ca2.0. El resto de los tipos de respuestas (22 respuestas; 37,3%) fueron previstas, aunque a groso modo, por medio de las categorías Ca2.2 y Ca2.3.

Estos resultados indican que las previsiones realizadas permiten hacer una buena predicción de las respuestas dadas por los sujetos.

5.7.2.3.2. Tipos de resolución problema (b)

Como hemos referido antes, el *problema (b)* es un problema del tipo pseudo-proporcional, para el cual, de acuerdo con la consigna del ítem, no se debería dar una resolución. Sin embargo, un juicio incorrecto sobre su proporcionalidad, condujo a dar una resolución. Como vimos en el sub-apartado 5.7.2.1, Tabla 5.2, 26 sujetos (44,1%) consideraron la situación planteada en el problema como proporcional, además, 2 sujetos condicionaron la situación para considerarla como proporcional. De manera que un total de 28 sujetos (47,5%) da una respuesta en la que provee de algún tipo de resolución.

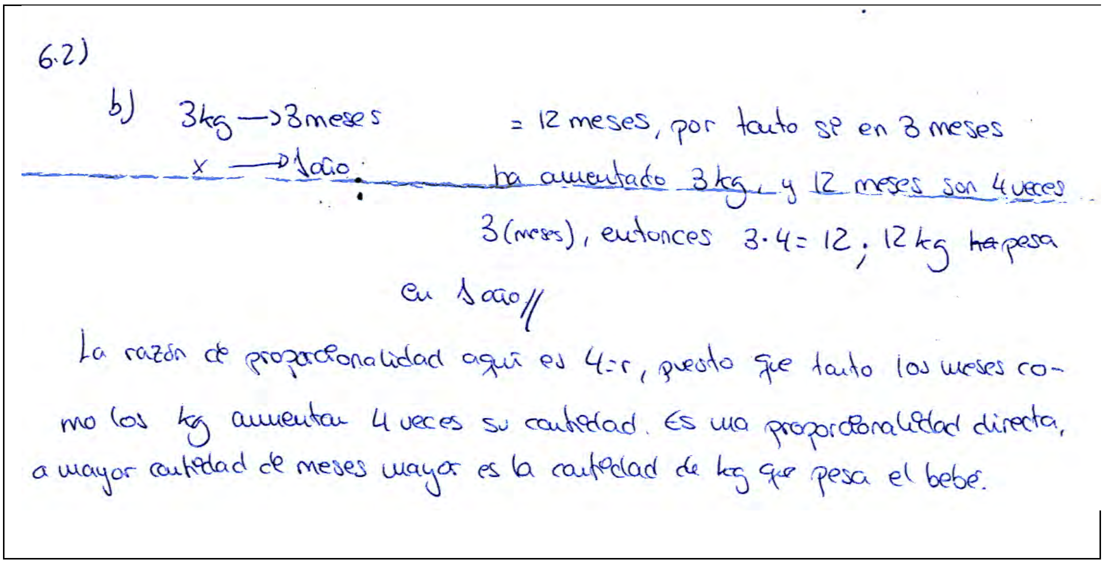
Para el tratamiento de estas resoluciones, que tienen como antecedente un juicio incorrecto sobre la proporcionalidad de la situación, hemos optado por hacer una valoración de la resolución, independiente de dicho juicio. Es decir, consideraremos la resolución como correcta o incorrecta de acuerdo con el procedimiento empleado, sin tomar en cuenta que la situación originaria ha sido incorrectamente considerada como de proporcionalidad. Los tipos de resolución identificados quedaron comprendidos dentro de las categorías antes descritas, en el Anexo F2 presentamos tales categorías y las respuestas que han sido incluidas en las mismas.

En la Tabla 5.17 presentamos las frecuencias de los diferentes tipos de resoluciones del *problema (b)* manifestadas por los sujetos agrupados de acuerdo con la calificación correcta/incorrecta, según las categorías de resolución antes descritas.

Tabla 5.17: Frecuencias de los tipos de resolución del *problema (b)*, agrupadas de acuerdo con la calificación correcta/incorrecta.

Calificación	**Tipo de resolución**	**N**	**%**
Correcta	Regla de tres	19	32,2
	Regla de tres y otro procedimiento	2	3,4
	Reducción a la unidad	3	5,1
	Multiplicación y división	1	1,7
	Subtotal	25	42,4
Incorrecta	Regla de tres	2	3,4
	Tabla de proporcionalidad	1	1,7
	Subtotal	3	5,1
Considera la situación como no proporcional		31	52,5
Total		59	100,0

Dentro de la categoría –Regla de tres y otro procedimiento" hemos incluido un tipo de resolución que hemos denominado: –Regla de tres y razonamiento proporcional con identificación de la razón interna" (Anexo F2), con la cual referimos a la respuesta dada por uno de los sujetos que plantea una regla de tres (no la usa para resolver), pero resuelve realizando un procedimiento que involucra un razonamiento de tipo proporcional, en el cual identifica el valor de la razón interna r = 4 (S-3, P-13). En la Fig. 5.12 presentamos tal respuesta.


6.2)

b) 3kg —> 3meses = 12 meses, por tanto si en 3 meses

x —> 1año ha aumentado 3kg, y 12 meses son 4 veces 3(meses), entonces 3·4= 12, 12 kg ~~ha~~ pesa en 1 año//

La razón de proporcionalidad aquí es 4=r, puesto que tanto los meses como los kg aumentan 4 veces su cantidad. Es una proporcionalidad directa, a mayor cantidad de meses mayor es la cantidad de kg que pesa el bebé.

Fig. 5.12: Uso de la regla de tres y un razonamiento de tipo proporcional en el que se identifica la razón (S-3, P-13).

Se debe señalar que en este procedimiento de resolución se manifiesta el uso de una estrategia del tipo –dentro", la cual estuvo prácticamente ausente en las resoluciones dadas por los sujetos. Con el uso de esta estrategia se reconoce de manera más específica una covariación constante entre las variables involucradas; si para los meses: 12 meses = 4 × 3 meses, entonces para los kilos 12 kg. = 4 × 3 kg. El resultado de los 12 kg en un año se obtiene por medio de la multiplicación de la razón, es por ello que hemos identificado el uso de esta estrategia con la categoría ―Multiplicación por la razón interna", a la cual, debido a que se presenta con mayor frecuencia en la resolución del *problema (d)*, referiremos en el análisis de las respuestas de ese problema.

Debemos referir al predominio que presenta el uso de la regla de tres como procedimiento de resolución; 23 de los 28 sujetos que dan alguna resolución, hacen uso de la regla de tres.

Por otra parte, interpretamos que el hecho que el problema no implicara una doble relación de proporcionalidad (paquetes/cajas, precio/cajas), como en el problema anterior, parece favorecer una manifestación menor de respuestas incorrectas (3/28).

5.7.2.3.3. Tipos de resolución problema (c)

El *problema (c)* es proporcional en el que se pone en relación la cantidad ingresada en la cuenta con la cantidad existente en la misma, o la que te entrega el banco luego de un lapso determinado. No obstante, según lo observado en el sub-apartado 5.7.2.1, Tabla 5.2, sólo 10 sujetos (17%) consideraron la situación planteada en el problema como proporcional. Aún cuando es relativamente pequeño el número de sujetos, resulta de interés identificar qué estrategias de resolución son puestas en juego en esta particular situación.

En la Tabla 5.18 hemos resumido los tipos de resolución manifestados, han sido reconocidos tres tipos, en los cuales hemos agrupado siete de las 10 respuestas en las que se da alguna resolución al problema en cuestión. Para las otras tres respuestas restantes, de esas 10, no se provee de resolución alguna. A continuación describimos las tres categorías correspondientes a esos tres tipos de resolución. En el Anexo F3 presentamos los tipos de respuestas que han sido agrupados en tales categorías.

Categoría "Relación de identidad", refiere al reconocimiento de la no variación de la cantidad de dinero ingresada, independientemente del tiempo transcurrido. Esa relación de igualdad entre la cantidad de dinero ingresada y la cantidad de dinero en cualquier instante de tiempo se interpreta como una relación de proporcionalidad. El proceso de resolución correspondiente puede estar referido al reconocimiento de la relación lineal $y = x$; siendo: y = dinero ingresado, x = dinero en la cuenta. No obstante, en las respuestas de los sujetos, que reconocen esa igualdad entre las cantidades de dinero, no se traduce en una representación como la mencionada, sino que sólo refieren a la producción de una frase del tipo ―Tiene la misma cantidad”. Esta frase se manifiesta como el reconocimiento de que la cantidad de dinero no varía si no se realizan nuevos ingreso o si el banco no paga ningún tipo de interés.

Tabla 5.18: Frecuencias de los tipos de resolución del *problema (c)*.

Tipo de respuesta	Tipo de resolución	N	%
Proporcional	Relación de identidad: tiene la misma cantidad	4	6,8
	Uso incorrecto de la regla de tres	2	3,4
	Cálculo del 2% de comisión	1	1,7
	No resuelve	3	5,1
	Subtotal	10	17,0
No proporcional (no amerita resolución)		46	78,0
No responde		3	5,1
Total		59	100,0

Categoría “Regla de tres”, cuyo uso se manifiesta de manera incorrecta en las dos resoluciones observadas para este problema.

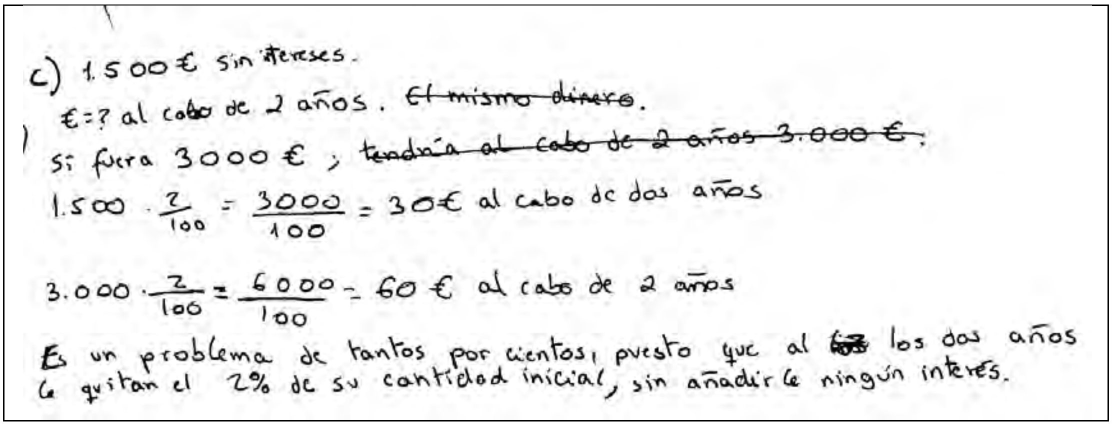

c) 1.500 € sin intereses.
€=? al cabo de 2 años. ~~El mismo dinero.~~
si fuera 3000 € ; ~~tendría al cabo de 2 años 3.000 €.~~
$1.500 \cdot \frac{2}{100} = \frac{3000}{100} = 30€$ al cabo de dos años
$3.000 \cdot \frac{2}{100} = \frac{6000}{100} = 60$ € al cabo de 2 años
Es un problema de tantos por cientos, puesto que al los dos años le quitan el 2% de su cantidad inicial, sin añadirle ningún interés.

Fig. 5.13: Cálculo del 2% como cantidad que será descontada al cabo de dos años (S-1, P-35).

Categoría “·Cálculo del 2% de comisión” refiere a conferir al banco la propiedad del cobro de comisiones como parte del funcionamiento común e imposiciones propias de este tipo de entes financieros. En la Fig. 5.13 presentamos la respuesta correspondiente.

En relación con estos tres tipos de resolución, referiremos a continuación sobre diversos aspectos que tienen lugar.

La primera resolución constituye una aproximación a lo esperado: reconocer la situación planteada como de proporcionalidad, basados en que la relación que se establece entre las cantidades de dinero (dinero ingresado / dinero en cualquier instante de tiempo) es de igualdad y por tanto de razón igual a uno.

No obstante, la frase del tipo “Tiene la misma cantidad”, utilizada por los sujetos como resolución del problema, es interpretada por ellos de dos maneras distintas: tanto para reconocer la situación como proporcional, como para reconocerla como no proporcional. Esto conduce a identificar dos significados distintos dados a la misma situación, basados en dos interpretaciones dadas a una misma frase.

Más aún, el uso de esa frase para basar el juicio de la situación como no proporcional, estuvo asociada, en general, al reconocimiento de una relación contante del tipo “dinero por tiempo”, en la cual, mientras el tiempo (t) transcurre, la cantidad de dinero permanece constante. Es decir, se trata de una relación del tipo $y(t) = k$, en la cual la variable tiempo (t) cambia, mientras la cantidad de dinero (k) permanece constante.

Esta interpretación, totalmente plausible, basada en la ausencia de una covariación entre las cantidades de magnitud consideradas (15 sujetos; 25,4%, Tabla 5.11, antes vista) nos condujo a reconocer que la situación planteada en el *problema (c)* admite una resolución como situación proporcional y otra como no proporcional, en función de las relaciones que se establezcan entre las cantidades de magnitud involucradas en el problema.

El segundo tipo de resolución, mostrado en la Tabla 5.18, nos muestra la persistente confianza en un método de resolución (regla de tres) que a juicio de los sujetos debería ser aplicable en cualquier situación que sea interpretada como proporcional.

El tercer tipo de resolución, mostrado en esa tabla, invoca a una interpretación, desde una perspectiva social, del funcionamiento de un banco, desde la cual, de acuerdo con la experiencia, se sabe que un banco regularmente cobra comisiones sobre el dinero depositado en ellos.

Estas interpretaciones nos conducen a reconocer las formas de razonamiento que sustentan la manifestación de estos tipos de resolución, lo cual, a la vez, nos da ideas sobre cómo podríamos tratar con ellas en el contexto de su tratamiento didáctico.

Para finalizar lo relativo a los tipos de resolución del *problema (c)*, referiremos a una comparación entre las categorías previstas (sub-apartado 5.6.3.2) y las identificadas en las resoluciones dadas por los sujetos. En este sentido, observamos que las resoluciones presentadas por los sujetos (7 resoluciones, 11,9%) están comprendidas por las categorías previstas: Cc.3, Cc.1, Cc.2, respectivamente. Este hecho indica que el estudio previo dio cuenta de la totalidad de las respuestas usadas por los sujetos al resolver el *problema (c)*.

5.7.2.3.4. Tipos de resolución problema (d)

El *problema (d)* es un problema pseudo-proporcional, que tiene características similares al *problema (b)*. Esta condición le exime de resolución. No obstante, de acuerdo con lo observado en el sub-apartado 5.7.2.1, Tabla 5.2, un alto porcentaje de los sujetos (54 sujetos, 91,5%) considera la situación como proporcional, lo cual conduce a que provean de alguna resolución.

Para el tratamiento de las resoluciones dadas a este problema procederemos de manera similar a como lo hemos hecho con el *problema (b)*. Así, las resoluciones presentadas son analizadas sin tomar en cuenta el error que se comete al considerar la situación como proporcional, la calificación de la resolución (correcta/incorrecta) se da en función del procedimiento empleado.

En la identificación de los tipos de resolución dadas al *problema (d)*, observamos una manifestación de algunos de los tipos o categorías descritos anteriormente. En el Anexo F4 presentamos las categorías de resolución identificadas, así como los diferentes tipos de respuestas comprendidas en ellas. Al igual que en el *problema (a)* dentro de la categoría ―Tabla de proporcionalidad" hemos incluido una respuesta en la que el sujeto hace uso de una tabla de valores y una representación gráfica. Esta respuesta es similar a la presentada en la Fig. 5.10, sub-apartado 5.7.2.3.1. Ambas respuestas (de los *Problemas (a)* y *(d)*) son dadas por el mismo sujeto (S-34).

Un tipo de resolución que había tenido una presencia menos expresa en algunas de las respuestas dadas a los problemas anteriores (*problema (b)*, Fig. 5.12), aparece ahora de manera más expresa, en la que se refiere directamente a la identificación de la razón interna y a su uso para resolver el problema. Los tipos de respuestas que hacen ese uso los hemos agrupado en la categoría ―*Multiplicación por la razón interna*", la cual consiste en el uso de la ―estrategia dentro", referida en el sub-aparatado 1.7.1, del capítulo 1.

En la Tabla 5.19 presentamos las frecuencias de las categorías de resolución identificadas.

Se puede observar en la Tabla 5.19 que la estrategia dominante de resolución es el uso de la regla de tres; 40/59 sujetos (67,8%) hacen uso de un procedimiento que involucra el uso de esa regla.

Tabla 5.19: Frecuencias de los tipos de resolución del *problema (d)*, agrupadas de acuerdo con la calificación correcta/incorrecta.

Calificación	**Tipo de resolución**	**N**	**%**
Correcta	Regla de tres	34	57,6
	Regla de tres y otro procedimiento	4	6,8
	Ecuación de proporcionalidad	4	6,8
	Reducción a la unidad	3	5,1
	Tabla de proporcionalidad	2	3,4
	Multiplicación y división	1	1,7
	Multiplicación por la razón interna	2	3,4
	Subtotal	50	84,8
Incorrecta	Regla de tres	1	1,7
	Regla de tres y otro procedimiento	1	1,7
	Multiplicación por la razón interna	2	3,4
	Subtotal	4	6,8
Considera la situación como no proporcional (no amerita resolución)		5	8,5
Total		59	100,0

Debemos referir que un reducido grupo de sujetos (4/59 sujetos; 6,8%) muestran procedimientos incorrectos; dos de ellos asociados a confusiones entre las cantidades de pasteles y de minutos involucrados en el problema, el tercero relativo a un uso no adecuado de la ecuación de proporcionalidad y el cuarto a un error en los datos. Al comparar estos resultados con los del *problema (a)*, observamos que es mayor la cantidad de resoluciones incorrectas (14/51), lo cual puede atribuirse a la complejidad del *problema (a)*, cuya resolución involucra el uso de una relación múltiple de proporcionalidad, que comprende el uso de las razones: “paquetes por cajas”, precio por cajas”, “precio por paquetes”.

Asimismo, al comparar los procedimientos incorrectos manifestados en las resoluciones de los *problemas (b)*, *(c)* y *(d)*, observamos que tienen una frecuencia prácticamente similar: 3 sujetos en el *problema (b)*, 3 sujetos en el *problema (c)* y 4 en el *problema (d)*, prevaleciendo en las resoluciones dadas el uso de estrategias similares.

5.8. Discusión de los resultados

En este apartado presentamos lo relativo a las respuestas de nuestras preguntas de investigación (**P2** y **P3**) y el logro de los objetivos empíricos (**OE3** y **OE4**) propuestos. En tal sentido, realizamos una exposición en la que abordamos: (a) el desarrollo del conocimiento sobre la proporcionalidad exhibido por los futuros profesores participantes, (b) las aportaciones del análisis epistémico/cognitivo, (c) los tipos de resolución identificados y (d) lo relativo al estudio de la proporcionalidad/no proporcionalidad de situaciones.

Sobre el desarrollo del conocimiento en torno a la proporcionalidad

Para referirnos a este aspecto hemos considerado necesario establecer algún criterio que nos permitan comparar los resultados observados, a partir de los instrumentos (primero y segundo) aplicados a la muestra de futuros profesores de primaria. En este orden de ideas, un criterio fundamental consiste en que los ítems-problemas deben estar dirigidos a evaluar las mismas cosas. Es así como consideramos que el ítem 1 del primer instrumento y el *problema (a)* del segundo satisfacen este criterio. Asimismo, las partes 3a y 3c, del ítem 3, y los *problemas (b) y (d)* también lo satisfacen, puesto que se trata de situaciones pseudo-proporcionales, para las se debe hacer un juicio sobre la proporcionalidad. Finalmente, observamos que la parte 3b del ítem 3 y el *problema (c)*, tienen en común que se tratan de problemas proporcionales y no son del tipo valor faltante, que posiblemente requieren (con mayor proclividad que los otros ítems-problemas) del uso de una relación, entre las cantidades de magnitud consideradas, del tipo $y = kx$, con $k = 4$ en el ítem 3b y $k = 1$ en el *problema (c)*. No obstante, para este último caso, reconocemos que las cualidades específicas de cada ítem-problema no permiten realizar una descripción sobre el desarrollo de la noción de proporcionalidad en los sujetos participantes.

Asimismo, reconocemos cierta diversidad entre los ítems-problemas considerados, en cuanto a: los contextos a los cuales refieren, las formas de sus enunciados, las consignas en ellos propuestas, los potenciales procedimientos efectivos para su resolución. Sin embargo, como hemos referido, lo común reconocido en ellos, nos permite avanzar hacia la identificación de posibles cambios en las actuaciones de los sujetos en torno a la resolución de problemas proporcionales y no proporcionales.

Más específicamente, en función de los objetivos propuestos, las consideraciones anteriores nos conducen a establecer cuatro tipos de comparación, respecto a dos de las variables objeto de estudio como lo son: (a) cómo resuelve un problema proporcional de valor faltante, (b) cómo justifica un futuro profesor sobre la proporcionalidad en una situación proporcional, (c) cómo reconoce problemas pseudo-proporcionales, y (d) cómo justifica un futuro profesor sobre la proporcionalidad/no proporcionalidad en una situación pseudo-proporcional.

Con respecto a la primera interrogante observamos que para el ítem 1, del primer instrumento (Tabla 4.1, capítulo 4), 57/60 sujetos (95%) lo resuelven correctamente, haciendo un uso predominante de la regla de tres como estrategia de resolución (53/57; 93%). Mientras que en la resolución del *problema (a)*, del segundo instrumento (Tabla 5.16, del presente capítulo), observamos que 37/59 sujetos (62,8%) lo resuelven correctamente, predominando nuevamente el uso de la regla de tres como procedimiento de resolución (19/37; 51,4%). Se debe señalar que el uso de la regla de tres también se presenta como predominante en las respuestas incorrectas del problema (9/14; 64,3%).

Estos resultados nos conducen a reconocer que no se ha registrado, por medio de las resoluciones dadas al ítem-problema considerado, un desarrollo en el conocimiento de la proporcionalidad de los sujetos de la muestra. Consideramos que la tendencia a una actuación menos efectiva en la resolución del *problema (a)* se debe a que en él se plantea una situación de mayor complejidad (antes referida) en relación con la planteada en el ítem 1 del primer instrumento.

Con respecto a la segunda interrogante, observamos para el ítem 3b, primer instrumento (Tabla 4.4, capítulo 4), que ninguna de las respuestas dadas por los sujetos es totalmente correcta; 39/60 (65%) no dan respuesta, lo hace incorrectamente o sólo provee de la proposición del tipo: ―Sí son proporcionales”. El resto de las respuestas; 21/60 (35%)

fueron identificadas como parcialmente correctas, basadas en aspectos parciales (sentido de covariación, aspectos numéricos y gráficos asociados a la situación respectiva) relativos a la noción de proporcionalidad. Por otra parte, en las respuestas dadas al *problema (a)* (Tabla 5.5, del presente capítulo), observamos que 29/59 sujetos (49,2%) muestran argumentos débilmente relacionados con la idea de proporcionalidad, mientras 26/59 sujetos (44,1%) exhiben argumentos moderadamente relacionados con la noción de proporcionalidad, y sólo 4/59 sujetos (6,8%) muestran ideas más próximas a esa noción. En este último grupo de cuatro sujetos se incluye un único sujeto que hace un razonamiento en el que involucra el uso expreso de la idea de razón.

Estos resultados indican un nimio progreso de los sujetos en el uso de argumentos para justificar la proporcionalidad de una situación. Se debe tomar en cuenta que existen ciertas diferencias entre el ítem 3b y el *problema (a)*, sin embargo, tienen en común el hecho de ser ambas situaciones proporcionales. Una de las diferencias que se debe señalar es que para el ítem 3b se sugiere el uso de una tabla para proveer de una justificación de la proporcionalidad de la situación, lo cual se muestra como una solicitud moderadamente atendida por los sujetos de la muestra (20/60; 33,3%). Mientras para el *problema (a)* no se sugiere el uso de una estrategia específica para justificar en torno a la proporcionalidad de la situación, lo cual da lugar a una amplia manifestación de formulaciones que intentan proveer de una justificación. Finalmente, se debe reconocer que la sugerencia hecha para el ítem 3b, de usar una tabla para dar la justificación, prácticamente no tuvo incidencia en las justificaciones dadas en el *problema (a)*, puesto que en ninguna de las justificaciones sobre la proporcionalidad del problema se hace uso de tablas.

Con respecto a la tercera cuestión: cómo un futuro profesor reconoce problemas pseudo-proporcionales, observamos en la Tabla 4.3 (capítulo 4) que 46/60 sujetos (76,7%) consideran que la situación pseudo-proporcional planteada en el ítem 3a es de proporcionalidad, mientras 5/60 sujetos (8,3%) la consideran no proporcional y 9/60 sujetos (15%) no dan respuesta. Se debe destacar que un considerable grupo de sujetos (32/51; 62,8%) no provee de una explicación sobre el porqué considera la situación como proporcional/no-proporcional, mientras 18/51 sujetos (35,3%) utilizan argumentaciones basadas en la covariación "más en A, más en B" (12/18; 66,7%) o en representaciones gráficas y relaciones numéricas (6/18; 33,3%), observándose, en este caso, el predominio del sentido de covariación para justificar (erróneamente) la proporcionalidad de la situación.

En otro sentido encontramos los resultados relativos al ítem 3c. Observamos en la Tabla 4.6 (capítulo 4) que 44/60 sujetos (73,3%) consideran que la situación planteada en ese ítem no es de proporcionalidad, donde 43 de estos sujetos no presentan argumentos, o son incompletos, sobre los cuales basan ese reconocimiento. Sólo un sujeto provee de argumentos basados en la inexistencia de una razón contante entre edad y altura de las personas, para identificar la situación como no proporcional. Se debe destacar que sólo un sujeto, basado en la idea de covariación ―más en A, más en B", considera la situación como proporcional.

Los resultados relativamente opuestos entre estos dos ítems, indicados en los párrafos anteriores, considerando que tienen enunciados análogos, pueden deberse al contexto al cual está referido cada ítem. En el caso del ítem 3a el contexto es intra-matemático y las relaciones numéricas entre lado y superficie de un cuadrado conllevan la covariación como una de sus características inherentes, lo cual es percibido como suficiente para decidir que la situación es proporcional. Estas condiciones no se presentan de manera tan explícita en el problema 3c. Como señalamos en el capítulo 4, el ítem 3c, debido al contexto en que se encuentra enmarcado, puede ser juzgado haciendo uso de razonamientos basados en la intuición y en la experiencia cotidiana.

Al comparar los resultados obtenidos en los ítems 3a y 3c con los observados en el *problema (b)* y en el *problema (d)* observamos, en el juicio a estos problemas, una mayor tendencia a reconocer una situación pseudo-proporcional como proporcional, es decir, una mayor presencia de la ilusión de la linealidad al emitir un juicio sobre la proporcionalidad de las situaciones comprendidas en estos dos problemas. Aún cuando el contexto intra-matemático continúa determinando que el ítem 3a sea más proclive a ser considerado como proporcional, parece que la diferencia entre los enunciados de los ítems-problemas determina que estos últimos sean más propensos a ser considerados como proporcionales.

En efecto, de acuerdo con lo presentado en la Tabla 5.8, 28/59 sujetos (47,5%) consideran que la situación pseudo-proporcional planteada en el *problema (b)* es proporcional, mientras 31/59 sujetos (52,5 %) consideran que la situación no es de proporcionalidad. Este reconocimiento erróneo de situaciones pseudo-proporcionales como proporcionales se agrava más aún al observar los resultados obtenidos en el *problema (d)*, puesto que 53/59 sujetos (89,8%) consideran que la situación pseudo-proporcional planteada en ese problema es de proporcionalidad, mientras sólo 5/59 sujetos (8,5%) consideran que la situación no es de proporcionalidad. Es conveniente observar que los contextos en los que se enmarcan el ítem 3c y los *problemas (a) y (d)*, son similares.

Estos resultados conducen a reconocer que no ha sido posible registrar un desarrollo del conocimiento en torno a la proporcionalidad, por parte de los sujetos de la muestra, que les permita reconocer situaciones pseudo-proporcionales. Con respecto a la posible actuación menos efectiva, observada en las respuestas dadas por los sujetos a los diferentes problemas, consideramos, tal como hemos venido refiriendo, que su explicación se encuentra en la diversidad de los enunciados de los ítems-problemas y la diversidad de contextos en los cuales se enmarcan las situaciones expuestas en ellos.

Esta explicación ha sido reconocida en diversos trabajos en la literatura especializada (De Bock et al., 2007; Fernández et al., 2010; Modestou y Gagatsi, 2007). En el caso del ítem 3c, su enunciado no está formulado en los términos de un problema de valor faltante, mientras los *problemas (b)* y *(d)*, su enunciado, corresponde con uno de la forma valor faltante, lo que es reconocido como uno de los indicadores que determina la manifestación de la ilusión de la linealidad (Fernández et al., 2010; Modestou y Gagatsi, 2007; Van Dooren et al., 2009). Por otra parte, al considerar esa manifestación entre los *problemas (b)* y *(d)*, observamos que se considera más plausible que la relación ―cantidad de comida por cantidad de tiempo" sea de proporcionalidad, en comparación con la relación ―edad por peso" de un bebé durante su primer año de vida. Es decir, en este último caso, es el contexto, en el cual está enmarcada la situación, el que parece determinar la manifestación predominante de la ilusión de la linealidad. Argumentaciones similares explican el predominio de la ilusión de la linealidad en la valoración del ítem 3a.

Finalmente, respecto a la cuarta cuestión: ¿Qué explicación provee el futuro profesor sobre las condiciones que le permiten considerar un problema peseudo-proporcional como un problema proporcional o no proporcional?, hemos observado en el ítem 3a el predominio del sentido de una covariación del tipo ―más en A, más en B" como argumento principal para considerar una situación pseudo-proporcional como proporcional. En el caso del ítem 3c se observa un predominio de las argumentaciones basadas en el contexto, es decir, en la relación edad/altura, para decidir sobre la no proporcionalidad de la situación.

En el *problema (b)* observamos un relativo predominio del juicio no-proporcional de la situación pseudo-proporcional (31/59, 52,5%). No obstante, 28/59 sujetos (47,5%) consideran la situación como proporcional (Tabla 5.8). Resulta interesante observar que para ambos casos, se manifiesta el sentido de covariación del tipo “más en A, más en B”, como la argumentación dominante; tanto para quienes consideran la situación como proporcional (12/24; 50%) como para los que la consideran como no proporcional (13/30; 43,3%).

En el *problema (d)*, en el cual se observa una clara tendencia a considerar una situación pseudo-proporcional como proporcional (53/59; 89,8%), se manifiestan: (a) el sentido de covariación (22/47; 46,8%) y (b) el posible uso de la regla de tres como proceso de resolución del problema (9/47; 19,2%), como las argumentaciones predominantes en la justificaciones dadas por los sujetos (Tabla 5.14). Esta tendencia indica que los sujetos de la muestra siguen basando sus argumentaciones en torno a la proporcionalidad, haciendo uso de reglas; unas de índole intuitivas-cualitativas de covariación y otras de tipo algorítmico. En cualquier caso, tales argumentos, representan un manejo de aspectos parciales de la noción de proporcionalidad que no se consolidan en una concepción total de esa noción.

Estos resultados indican que no ha sido posible registrar algún progreso en torno al conocimiento de la proporcionalidad, en la muestra de futuros profesores considerada, al observar las explicaciones que ellos proveen para intentar justificar la proporcionalidad/no-proporcionalidad de situaciones pseudo-proporcionales.

Las aportaciones del análisis epistémico/cognitivo

Hemos referido en el capítulo 4 sobre algunos de los posibles beneficios de la puesta en práctica del análisis epistémico y cognitivo. El uso mostrado en ese capítulo de la técnica de análisis desarrollada involucró una integración de dos tareas de análisis que propician la actividad de investigación en torno a un proceso de instrucción: preparación, aplicación y resultados de una prueba diagnóstica referida a nociones de proporcionalidad. Este uso integrado lo observamos en la determinación de las categorías de posibles respuestas dadas por los sujetos, deducidas del análisis epistémico previo, y su contrastación con las respuestas efectivamente manifestadas por ellos.

En este capítulo, hemos mostrado un uso similar de estas herramientas de análisis. Hemos, por un lado, realizado los análisis epistémicos de cuatro problemas, incluidos en una prueba de control, relativos a la proporcionalidad. A partir de dichos análisis se obtuvieron algunos resultados previos. Estos resultados nos han permitido observar, de manera expresa: (a) la puesta en juego de los objetos y significados activados durante un proceso de resolución experto, su articulación en dicho proceso y la identificación de posibles conflictos de significado, y (b) la determinación de categorías de posibles respuestas de resolución en torno al problema, asociadas con el proceso de resolución realizado y analizado.

Este tipo de análisis corresponde con una actividad en la que se profundiza sobre aspectos relacionados con el *conocimiento común y especializado del contenido*, que se interpretan como componentes del conocimiento necesario para la actividad de enseñanza de la matemática (Ball, Thames y Phelps, 2008). En este orden de ideas, identificamos, como parte de estas formas de conocimiento las siguientes:

En cuanto a *elementos lingüísticos*, el conocimiento de la proporcionalidad se encuentra asociado al uso de diferentes representaciones: tabla de proporcionalidad, modelizaciones verbales-simbólicas-simbólicas implicadas en el uso de algoritmos de resolución, expresiones del tipo $y = kx$ o $y = kx + b$ para denotar relaciones entre las cantidades de magnitudes involucradas; expresiones que sustentan la manifestación de relaciones entre cantidades de magnitud o variables-datos cuya posibilidad de sistematicidad refiere a la puesta en juego de una situación de proporcionalidad, expresiones lingüísticas en los enunciados que conllevan a su interpretación por medio de una covariacion del tipo ―más en A, más en B”.

En cuanto a *conceptos*, se han reconocido una diversidad de ideas asociadas a la construcción de un concepto total de la proporcionalidad: magnitudes proporcionales, sucesión de parejas de magnitudes proporcionales, tabla de proporcionalidad, razón, la manifestación de una razón constante entre cantidades de magnitud, función lineal (relación multiplicativa entre dos variables) versus función afín (relación aditiva entre dos variables), multiplicación/división como formas de relación entre variables o cantidades de magnitud, covariación no proporcional.

En cuanto a *procedimientos*, se han identificado el uso de diferentes técnicas, algoritmos y operaciones que se manifiestan en los procesos de resolución de problemas proporcionales: multiplicación, división, regla de tres, ecuaciones de proporcionalidad construcción de tablas, técnicas de razonamiento implicadas en el uso correcto de la inducción (generalización incorrecta de una razón particular), determinación de una razón de valor igual a uno, técnicas de razonamiento basadas en el uso de cuantificadores lógicos (para todo versus existe) para sustentar la no generalización de una razón en una situación determinada.

En cuanto a las *propiedades* hemos identificado el uso de proposiciones en las que se enuncian las condiciones y las relaciones causales utilizadas en los procedimientos desarrollados: relación multiplicativa entre las cantidades de magnitud o variables involucradas en las situaciones consideradas, reglas que permiten concatenar diferentes representaciones para proveer de un sentido unitario y sistémico a un proceso de resolución, condiciones que se establecen de acuerdo con las relaciones entre las cantidades de magnitud involucradas en una situación determinada.

En cuanto a los *argumentos* hemos identificado distintas justificaciones que sirven de sustento a los procedimientos desarrollados y las propiedades empleadas. Argumentos puestos en juego en: (a) el reconocimiento de especificidades contextuales de las situaciones planteadas en los problemas que conducen a identificarlas como proporcionales o no proporcionales, (b) la identificación de la relación (razón constante) entre las cantidades de magnitud o variables involucradas en las situaciones consideradas, la cual es asociada con el reconocimiento antes referido, (c) la posibilidad de la generalización de esa relación, que da lugar al desarrollo del sentido de razón, la cual depende de cómo se asocian esas cantidades-variables en el contexto en el que se inscribe la situación específica, (d) el reconocimiento de una situación proporcional/no-proporcional, basado, posiblemente, en razonamientos como los descritos en los numerales anteriores.

Luego, por otro lado, hemos realizado el análisis cognitivo, para el cual fueron fijadas como variables de interés: (a) el juicio sobre la proporcionalidad de los cuatro problemas, (b) la justificación dada para sustentar tales juicios, y (c) los procesos de resolución llevados a efecto. La realización de este análisis nos ha permitido aproximarnos a dar respuestas a los objetivos de investigación, inicialmente formulados para el desarrollo de este estudio, destacándose como conclusión fundamental que no ha sido posible registrar algún progreso en la adquisición del *conocimiento común del contenido* en torno a la noción de proporcionalidad, por parte de los sujetos de la muestra, específicamente en lo relativo a la distinción entre situaciones proporcionales y pseudo-proporcionales y las justificaciones expresadas en torno a las mismas.

Como resultado de este análisis podemos referir que la cognición de los sujetos de la muestra, relativa a la noción de proporcionalidad, se encuentra asociada con un uso de aspectos parciales de la proporcionalidad (la idea de relación entre dos cantidades de magnitud o dos variables, el uso de reglas intuitivas-cualitativas de covariación entre cantidades de magnitud o variables del tipo ―más en A, más en B”, el uso de reglas basadas en la aplicación de algoritmos, la disposición de datos en una tabla, el uso de relaciones numéricas particulares ligadas al contexto al cual refiere la situación que se trate, o a la aplicación de un determinado tipo de operaciones entre las cantidades de magnitudes involucradas), con la cual no logran exhibir una formulación conceptual total respecto a esta noción: como relación de covariación entre cantidades de magnitud o variables, determinada por una razón constante, que caracteriza la forma en que se relacionan esas cantidades o variables en una situación dada, reconociéndose que esa relación admite distintas formas de representación: como una ecuación (de igualdad entre dos razones), como una tabla (cuyos elementos en las celdas corresponden con una covariación constante, determinadas por una razón), como una gráfica cartesiana (de una línea recta que pasa por el origen de coordenadas), como una relación modelizada por una ecuación del tipo $y = kx$, donde x, y son las cantidades-variables relacionadas y k es la razón o la constante de proporcionalidad.

En fin, la descripción de la cognición de los sujetos observada, expuesta en el párrafo anterior, nos aproxima al desarrollo del *conocimiento del contenido y de los estudiantes* como otro de los componentes del conocimiento necesario para la enseñanza de la matemática, en los términos referidos por Ball y colaboradores (Hill, Ball y Schilling, 2008).

Finalmente, hemos podido observar, al comparar los resultados obtenidos por medio del análisis epistémico y el análisis cognitivo, una considerable coincidencia en cuanto a las respuestas dadas por los sujetos y las previstas a partir del análisis epistémico previo, tanto en los tipos de argumentaciones empleadas por los sujetos en torno a la proporcionalidad, como en los tipos de resoluciones de problemas proporcionales. Este hecho constituye un valor agregado al uso de la herramienta de análisis epistémico, puesto que el mismo aproxima a una buena predicción de las acciones que pueden tener lugar en torno al desarrollo de una actividad matemática determinada, en un contexto instruccional específico.

Asimismo, el análisis cognitivo ha permitido observar manifestaciones que nos aproximan a comprender las formas de razonamiento y el uso que hacen los sujetos del conocimiento relativo a la proporcionalidad, al resolver problemas proporcionales o no-proporcionales, destacándose el uso de aspectos parciales de ese conocimiento que no terminan de integrarse en una idea general que involucra el uso de la invariabilidad de la razón como aspecto central. Asumiendo una perspectiva desde la cual podemos observar las contribuciones de ambas herramientas de análisis, vemos, una vez más, que el uso integrado de ambas herramientas provee de información de interés en torno a las posibles acciones que pueden manifestarse en el proceso de resolución de un problema matemático determinado.

Sobre los tipos de resolución

El análisis epistémico convoca a proveer de una resolución experta del problema que se trate. De acuerdo con el instrumento aplicado sólo dos de los problemas (*problema (a) y problema (c)*) ameritaban una resolución. Para el *problema (a)*, que consiste en un problema de valor faltante, el predominio del uso de la regla de tres, como procedimiento de resolución observado en el capítulo anterior, nos condujo a proveer y analizar una resolución utilizando tal procedimiento. En los sub-apartados precedentes hemos referido a las aportaciones relativas al análisis epistémico realizado sobre tal tipo de resolución, en el que merece la pena reseñar que se trata de un proceso que requiere de dos procedimientos de modelización (verbal-simbólica y simbólica-simbólica) y cuyo uso puede conducir a obtener una solución del problema, sin que haya garantía de la manifestación de un razonamiento proporcional (Cramer, Post y Currier, 1993; Lamon, 2007; Lesh, Post y Behr, 1988).

En este orden de ideas, hemos reconocido que existe mayor riqueza en el análisis, al hacerlo sobre diversos tipos de resolución (capítulo 4), no obstante, con el fin de aproximarnos al tipo de resolución predominante, nos hemos limitado (en el presente capítulo) a analizar este tipo de resolución. En correspondencia con lo manifestado en el capítulo 4 y el análisis realizado, observamos (en la Tabla 5.16) el predominio del uso de la regla de tres como procedimiento de resolución de este tipo de problemas (29/51; 56,9%), siendo 19/29 sujetos quienes hacen un uso correcto de ese procedimiento. Por otra parte, el uso de otros procedimientos, que proveen de mayor garantía de la puesta en juego de un razonamiento proporcional (reducción a la unidad, tabla de proporcionalidad, uso de las operaciones de multiplicación y división), tienen una manifestación menos frecuente (19/51; 37,3%), siendo 17/19 sujetos los que hacen un uso correcto de algún tipo de esas resoluciones, quedando prácticamente ausentes el uso de estrategias creativas relacionadas con el uso de representaciones gráficas, dibujos, esquemas, estrategias aditivas del tipo ―building-up", referidas en el capítulo 1. Estos resultados coinciden con los señalados en otras investigaciones al referir sobre los procesos de resolución más frecuentes en problemas de valor faltante por parte de futuros profesores (Berk, et al, 2009; Lo, 2004; Monteiro, 2003; Rivas, Castro, Godino y Konic, 2009).

Para el *problema (c)* el análisis epistémico lo realizamos sobre una resolución en la que se identifica la razón igual a uno, como el cociente de cantidades de dinero iguales, cuyo desarrollo debería conducir a la relación $y = x$, la cual debe ser reconocida como una manifestación particular de la relación de proporcionalidad $y = kx$, con $k = 1$, siendo y la cantidad de dinero en la cuenta y x la cantidad de dinero ingresada.

Para este problema, la mayoría de los sujetos (46/53; 86,8%), al considerarlo como una situación no proporcional, no proveen de una resolución. Sólo 4/10 sujetos, que consideran la situación como proporcional, proveen de una resolución en la que identifican la igualdad entre las cantidades de dinero como una relación de proporcionalidad. Estos resultados indican que problemas de este tipo tienen un alto índice de dificultad para ser reconocidos como proporcionales y para proveer de algún tipo de resolución. En este orden de ideas, reconocemos tres posibles aspectos asociados con estas manifestaciones; el primero refiere a la presencia de una razón igual a uno, lo cual, a la vez, determina la ausencia de una covariación del tipo ―más en A, más en B", comúnmente presente en los enunciados de problemas directamente proporcionales, el segundo refiere a que el problema involucra sólo el uso de razones internas cuya magnitud es ―riqueza" medida en dinero, y el tercero refiere a que la estrategia de resolución del problema no está asociada al uso de un algoritmo del tipo regla de tres, ecuación de proporcionalidad o reducción a la unidad.

Estas cualidades, poco comunes en problemas de proporcionalidad, hacen de este problema un caso singular cuyo uso en los trabajos de investigación consultados no ha sido reportado. Es necesario, por tanto, realizar mayor investigación sobre la puesta en juego de este tipo de problemas en la formación y desarrollo del razonamiento proporcional. En este sentido, recomendamos fomentar su uso más frecuente tanto en la escuela como en la formación de futuros profesores, así como el desarrollo de investigación en torno a tal uso.

Finalmente, debemos referir a que en los problemas pseudo-proporcionales (*problema (b) y problema (d)*) se ha manifestado una alta frecuencia de su juicio como una situación proporcional, lo que ha conducido a proveer de una resolución. En este sentido, se reconoce el predominio del uso de la regla de tres como estrategia de resolución (23/28; 82,1% en el *problema (b)*; 40/5; 70,1% en el *problema (d)*). Estos resultados, aunado a lo señalado en la literatura especializada, llama la atención e invita a realizar acciones en torno a los procesos de instrucción de la escuela y la formación de futuros profesores relativas al desarrollo del razonamiento proporcional.

Sobre el estudio de la proporcionalidad/no proporcionalidad de una situación

Juzgar una situación-problema proporcional, del tipo valor faltante, como no proporcional es una manifestación poco frecuente, eso lo pudimos observar en la resolución de la primera parte del *problema (a)*, en la que solamente 7 de 59 sujetos (11,9%) exhibió esa manifestación. Pudimos observar, en las respuestas de los sujetos, que sólo 3 de ellos mostraron algún tipo de explicación relacionada con la idea de proporcionalidad (Tabla 5.4), pero, en los tres casos, tales explicaciones hacen uso de una negación de un hecho cuya veracidad está expresamente garantizada por la situación en cuestión, es decir, se niega, por ejemplo, la existencia de una covariación constante entre las magnitudes involucradas, haciendo uso de proposiciones del tipo: ―No hay aumento de las dos magnitudes en la misma cantidad" o ―No existe un factor k, por el cual el precio dependa del número de paquetes" (véase Anexo E1).

La otra manifestación, en la que se juzga una situación no proporcional como proporcional, es más común (De Bock et al., 2007; Modestou et al., 2008). Este tipo de manifestación es conocida en la literatura especializada como ―ilusión de la linealidad”.

Los resultados observados hasta ahora parecen indicar que al hablar del estudio de la no proporcionalidad de una situación, deberíamos considerar al menos dos aspectos, a saber: (a) los resultados observados en el capítulo 4, que refieren a la manifestación de aspectos parciales involucrados en la construcción de una regla general caracterizadora de la proporcionalidad, siendo estos aspectos parciales erróneamente considerados como suficientes para caracterizar la proporcionalidad, y (b) que el arribo a una caracterización de la proporcionalidad comprende la conjunción de una cierta diversidad elementos, referidos en el apartado 2.8 del capítulo 2 (el sentido de covariación, el sentido de razón como la relación multiplicativa que debe existir entre las magnitudes consideradas, el tipo de relación funcional que puede establecerse entre los valores de las magnitudes involucradas, aspectos contextuales que determinan el comportamiento sistémico de las variaciones observadas, entre otros), cuya manifestación parcial puede conducir a juzgar erróneamente o no una situación no proporcional.

En relación con estos dos aspectos, observamos otros dos asuntos, sumamente interesantes en el estudio de la proporcionalidad/no proporcionalidad de situaciones. Por una parte, de acuerdo con la literatura referida, se considera que ser capaz de distinguir entre situaciones proporcionales y no proporcionales forma parte del desarrollo del razonamiento proporcional, y que, en cierto sentido, esta actividad se encuentra en la cúspide de ese desarrollo. No obstante, por otra parte, las argumentaciones en torno a la no proporcionalidad de una situación dada pueden darse identificando la no manifestación de alguno de los elementos, que representan un aspecto parcial de la caracterización de la proporcionalidad, lo que indica que se puede formular un juicio correcto sobre la no proporcionalidad de una situación no proporcional, sin que sea necesario un conocimiento de esa regla general que involucra la conjunción de los elementos parciales constituyentes.

Llegados a este punto, consideramos que la complejidad de la decisión sobre la proporcionalidad/no proporcionalidad de una situación se encuentra en la proximidad que exista entre la situación no proporcional con una situación proporcional, en la que cumpliéndose algunos de los aspectos parciales se tome la decisión de juzgarla erróneamente como proporcional, siendo no proporcional. Particularmente hemos observado que el sentido de covariación, aunado a una relación-razón inicial del tipo “a por cada b” y el contexto específico-favorable de la situación problema que se trate, son características que al ser satisfechas por la situación problema, fomentan la manifestación de la ilusión de la linealidad, lo cual nos dice que la presencia de estas tres características aproximan la situación no proporcional a una situación proporcional, haciéndose la toma de decisión sobre la proporcionalidad más compleja.

De manera que, distinguir entre situaciones proporcionales y no proporcionales está en relación con esa complejidad, la cual puede organizarse en función de las características (elementos caracterizadores de la proporcionalidad) que se consideren en la formulación de la situación problema que se trate. Debemos reconocer que esta primera aproximación al estudio de la proporcionalidad/no proporcionalidad de situaciones requiere de mayor investigación, dirigida específicamente al manejo de esas características y la complejidad relativa con que pueden formularse distintos tipos de situaciones-problema.

Finalmente, debemos reconocer que en el estudio realizado, específicamente en el análisis cognitivo desarrollado, nos hemos limitado a hacer un análisis vertical sobre las respuestas dadas por los sujetos, es decir, el comportamiento del grupo de sujetos en las resoluciones de cada problema. Quedaría, por tanto, pendiente realizar un análisis horizontal, es decir el comportamiento de un mismo sujeto en las resoluciones de los diferentes problemas, lo cual nos podría informar sobre la coherencia y permanencia de los argumentos y las resoluciones empleadas por los sujetos. Esto, sin duda, será parte de otra investigación.

CAPITULO 6

COMPETENCIAS PARA EL ANÁLISIS EPISTÉMICO DE TAREAS DE RAZONAMIENTO PROPORCIONAL EN FUTUROS PROFESORES

6.1. Introducción

En este capítulo informamos sobre algunos avances logrados al realizar actividades de formación, de futuros profesores de primaria, que incluyen el uso de herramientas específicas dirigidas al desarrollo de competencias de análisis didáctico en su faceta epistémica, en torno a la resolución de dos problemas de proporcionalidad, pertenecientes al 6º curso de primaria.

Con la realización de estas actividades se pretende lograr los objetivos OE5 y OE6 formulados para el desarrollo de esta investigación. Es decir, se trata en este capítulo de informar los resultados de una intervención formativa, en la que se implementa una herramienta de análisis epistémico/cognitivo, con lo cual se persigue el desarrollo de competencias de análisis didáctico en su faceta epistémica y el desarrollo del conocimiento especializado del contenido, en una muestra de futuros profesores.

El desarrollo de las acciones se da con la puesta en juego de dos trabajos prácticos, referidos en el sub-apartado 3.8.2, del capítulo 3, los cuales fueron denominados como:

(1) Trabajo Práctico Nº 1: Análisis de los Conocimientos Puestos en Juego en la Solución de un Problema —*Problema del yogurt*— ver en Anexo C2, y

(2) Trabajo Práctico Nº 2: Práctica 1: Las Matemáticas como Actividad de Resolución de Problemas —*Problema de la limonada*— ver en Anexo C3.

La resolución de las tareas propuestas en estos trabajos prácticos se inscribe en las actividades regulares que tienen lugar en el dictado de la asignatura: ―Currículo de Matemáticas en Educación Primaria", que es cursada por estudiantes del segundo año de la carrera de magisterio, de la Universidad de Granada.

Para la preparación de estos trabajos prácticos se realizó, como actividad previa, por parte del formador, un análisis epistémico (aplicación de la GROS) a cada problema matemático a ser resuelto en los trabajos prácticos referidos. Al mismo tiempo, la resolución de las tareas incluidas en dichos trabajos prácticos, involucra la aplicación de la GROS por parte de los futuros profesores. Con esta acción se busca dar respuesta a la última pregunta de investigación formulada, la cual refiere al uso de la GROS por parte de futuros profesores y su potencialidad para mejorar su formación didáctico-matemática en torno a la proporcionalidad.

Uno de los fundamentos esenciales, en el desarrollo de las acciones de la investigación desarrollada e informada en este capítulo, se encuentra en los resultados de los dos primeros estudios realizados, de los cuales hemos informado en los capítulos 4 y 5, donde se ha observado una relación entre el uso de la GROS y el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático necesario para la enseñanza. De manera que, con la puesta en juego de estos dos trabajos prácticos que involucran: (a) la resolución de problemas de proporcionalidad, y (b) el análisis de sus enunciados y sus resoluciones, por medio del reconocimiento de algunos de los objetos y significados activados; se trata de observar el desarrollo de ese conocimiento, el cual, a la vez, guarda relación con el desarrollo de competencias de análisis didáctico, que se persigue lograr en el proceso de formación de los futuros profesores participantes.

En términos de la identificación a la cual hemos referido en el apartado 2.5, del capítulo 2, consideramos que las acciones involucradas en el desarrollo de estos dos trabajos prácticos se identifican con el desarrollo de las formas del conocimiento del profesor, propuestas por Ball y colaboradores (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008).

Es decir, se busca desarrollar competencias de análisis didáctico, al tiempo que se desarrolla el conocimiento didáctico-matemático o conocimiento necesario para la enseñanza de la matemática. En efecto, tal como señalamos en los resultados presentados en el capítulo 5, la realización del análisis epistémico conlleva el desarrollo del conocimiento común y especializado del contenido y una aproximación al desarrollo del conocimiento del contenido y de los estudiantes, lo cual es considerado, de acuerdo con Ball y colaboradores, como formas del conocimiento necesario para la enseñanza de la matemática.

En síntesis la relación: Uso de la GROS → Desarrollo de competencias de análisis didáctico → Desarrollo del conocimiento didáctico-matemático necesario para la enseñanza, a la cual refieren los tres últimos objetivos empíricos formulados (capítulo 3, sub-apartado 3.4.2.2), es considerada la ruta a ser recorrida e informada en este capítulo.

6.2. Tipo de investigación y contexto de estudio

En este tercer estudio desarrollamos una investigación de tipo cualitativa-descriptiva, que forma parte de un proyecto cuyo objetivo central es el estudio y diseño de herramientas para el desarrollo del conocimiento matemático necesario para la enseñanza. Otros trabajos que forman parte de este proyecto pueden verse en http://www.ugr.es/~jgodino/index.htm.

El diseño de investigación corresponde con el desarrollo de un primer ciclo de una investigación acción, en el cual se ha seguido un procedimiento similar al inicialmente bosquejado por Cohen, Manion y Morrison (2007). Una edición final de ese diseño puede ser vista en Cohen, Manion y Morrison (2011). En la Fig. 6.1 presentamos una articulación de los diferentes procedimientos ejecutados, que hemos desarrollado de acuerdo con la propuesta de los autores referidos.

El problema identificado corresponde con la pregunta P4 de investigación formulada, la cual refiere al desarrollo de la formación didáctico-matemático, en torno a la proporcionalidad, de futuros profesores de primaria. Esto está asociado en nuestro trabajo a la posibilidad de desarrollar competencias de análisis didáctico, en torno a la resolución de problemas de proporcionalidad, por parte de una muestra de futuros profesores de primaria.

Como una posible vía de intervención para abordar el problema, hacemos uso de una herramienta de análisis epistémico/cognitivo, que hemos llamado GROS, cuya descripción y avance fue presentado en el apartado 4.3, del capítulo 4. Esta herramienta, cuyo uso inicial estuvo a cargo de un profesor formador y de un grupo de investigadores noveles, ha permitido arribar a algunos resultados de interés para la formación de futuros profesores, en torno a la proporcionalidad, de los cuales hemos informado en los capítulos precedentes. De acuerdo con la cuestión planteada se pretende realizar una intervención, en la que los futuros profesores utilicen esa herramienta para realizar análisis didácticos, sobre tareas relativas a la proporcionalidad, con el fin de desarrollar su formación didáctico-matemática en torno a ese contenido.

El Plan de intervención ejecutado está en relación con la puesta en juego de un modelo de enseñanza, el cual se ha implementado por medio del diseño y aplicación de dos trabajos prácticos, resueltas por la muestra de futuros profesores.

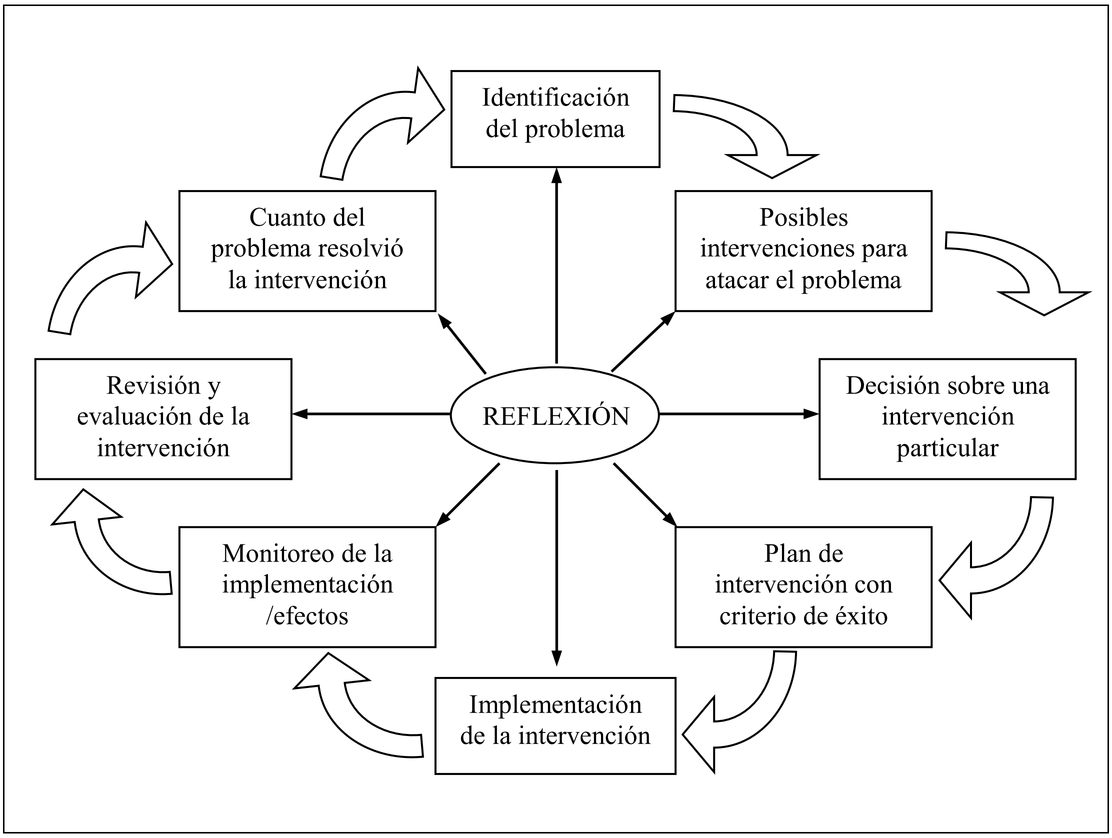


Fig. 6.1: Proceso de investigación acción (Tomado de Cohen, Manion y Morrison, 2011, p. 355).

El monitoreo de las acciones llevadas a efecto se realiza por medio de la observación y análisis de los protocolos producidos por los sujetos-participantes, en las resoluciones de las tareas contenidas en los trabajos prácticos. A partir de la observación y análisis de las resoluciones dadas por los sujetos-participantes, y a la luz de los análisis epistémicos inicialmente realizados por el formador y los investigadores, se realiza una valoración de las competencias de análisis didáctico de los grupos participantes. Tal valoración, de acuerdo con los resultados de los capítulos 4 y 5, nos provee de información relativa al desarrollo del conocimiento necesario para la enseñanza de la matemática alcanzado por los grupos participantes. Cada uno de estos momentos del desarrollo del trabajo tiene lugar en un ambiente de reflexión permanente en el que el formador y los investigadores participan en la producción, aplicación y valoración de las tareas y su resolución.

Como denominador común a cada uno de los momentos desarrollados en el proceso de investigación se encuentra el uso de la Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados (GROS). Experiencias previas, informadas en los capítulos precedentes, parecen indicar que la GROS facilita la manifestación de acciones que conllevan el desarrollo del conocimiento necesario para la enseñanza de la matemática. Esta cualidad ha servido de sustento para seguir poniendo en práctica esta herramienta, la cual es usada como instrumento para realizar la intervención específica de la cual ahora informamos. La intervención que realizamos, en este caso, se caracteriza por la puesta en juego de esa herramienta por parte de futuros profesores, puesto que su uso por parte de ellos, no había sido experimentado en el desarrollo de las acciones hasta ahora informadas.

En este capítulo tratamos sobre el uso de esa herramienta tanto por parte del profesor-formador y ese grupo de investigadores, como por parte de un grupo de futuros profesores de primaria, al realizar dos trabajos prácticos. En este sentido, distinguimos tres aspectos caracterizadores del contexto donde este tercer estudio tiene lugar, a saber: (a) modelo de enseñanza, (b) sujetos participantes, y (c) actividades de formación. A continuación presentamos una descripción de estos aspectos.

6.2.1. Modelo de enseñanza

Una vez identificado el problema, continuamos nuestro trabajo con el fin de realizar una posible intervención. Sobre la base de los estudios precedentes y motivados por dar continuidad a los mismos, decidimos poner en práctica un plan de intervención, cuya implementación se encuentra asociada a la puesta en juego de un modelo de enseñanza.

En la implementación del modelo de enseñanza hemos reconocido dos contextos de acción específicos, los cuales sirven de espacio para el desarrollo de las actividades que ahora informamos. Estos dos contextos, tal y como fue referido en el apartado 3.5, capítulo 3, son: contexto material y contexto instruccional.

El *contexto material* refiere al espacio físico-académico proveído por y para el dictado de la asignatura “Currículo de Matemáticas en Educación Primaria”, de la carrera de magisterio, de la Universidad de Granada, básicamente es el mismo espacio en el que han tenido lugar los estudios informados en los capítulos 4 y 5.

El *contexto instruccional*, el cual refiere de manera más específica al modelo de enseñanza puesto en juego, consiste en el conjunto de acciones planificadas y llevadas a efecto con el fin de desarrollar competencias de los sujetos participantes en torno al análisis didáctico, relativas al contenido de la proporcionalidad a nivel de 6º curso de primaria. Ese conjunto de acciones se encuentran inscritas en las dos primeras fases de un *ciclo formativo* y comprenden el desarrollo de una *trayectoria didáctica*. Ambos procesos han sido descritos en el sub-apartado 3.5.2, del capítulo 3. La manifestación de estos procesos se ha hecho por medio de la puesta en práctica de los dos trabajos prácticos antes referidos, que serán descritos más adelante (sub-apartado 6.2.3).

Debemos referir que en el desarrollo de un ciclo formativo se puede dar lugar a varias trayectorias didácticas análogas, es decir, para la ejecución de cada trabajo práctico se desarrolló una trayectoria didáctica análoga, quedando inscritas ambas ejecuciones dentro de las dos primeras fases de un ciclo formativo. Más aún, debido a que el desarrollo de las acciones referidas se encuentra inscrito en un contexto formativo, dicho desarrollo ha estado afectado por la realización de otras actividades de formación, en las que comúnmente participan los sujetos que cursan el segundo año de la carrera de magisterio de la Universidad de Granada.

En particular, como ejercicio de preparación para la puesta en juego de los dos trabajos prácticos, se realizó una actividad, cuyo procedimiento de resolución es similar al involucrado en esos trabajos, llamada: “Análisis de los Conocimientos Puestos en Juego en un Texto Matemático”, al cual referiremos como “Problema de los significados de la suma” (ver Anexo C1). En esta actividad previa, se invitó a los sujetos a realizar el análisis epistémico de una situación propuesta, proveyéndoles de ejemplos sobre el reconocimiento de los diferentes objetos y significados, que podían tomar lugar en el problema y en la resolución propuesta por un libro de texto.

Las tres actividades (Problema de los significados de la suma y los dos trabajos prácticos) se hicieron al inicio del segundo año y en cinco sesiones de las tres primeras semanas continuas. En el desarrollo de estas tres actividades se siguieron trayectorias didácticas análogas.

Finalmente, la correspondencia entre lo pretendido a nivel general (fases de un ciclo formativo) y lo pretendido a un nivel particular (producción de los trabajos prácticos) lo observaremos en el sub-apartado 6.2.3, más adelante. Más precisamente, la correspondencia específica entre lo pretendido, lo implementado y lo logrado se observará en la exposición del resto de este capítulo. La observación de tales correspondencias se encuentra asociada al desarrollo de las fases: (a) monitoreo de la implementación, (b) revisión y evaluación de la intervención, y (c) cuánto del problema se resolvió con la intervención; las cuales conforman las etapas finales del primer ciclo del tipo de investigación-acción puesto en marcha.

6.2.2. Sujetos

Este tercer estudio informa sobre los resultados obtenidos al llevar a efecto dos actividades de formación con una sección de futuros profesores de primaria. El grupo de sujetos, conformado por 62 estudiantes, participantes del primer trabajo práctico y por 52 estudiantes, participantes del segundo trabajo práctico (en ambos trabajos participan los mismos sujetos, sólo varía el número de participantes), quienes realizan el segundo año de la carrera de magisterio, cursantes de la asignatura ―Currículo de Matemáticas en Educación Primaria", de la Universidad de Granada, básicamente es el mismo grupo de sujetos que durante el primer año conformaron el grupo de participantes de los estudios 1 y 2, cuyos resultados fueron informados en los capítulos 4 y 5, respectivamente. Las especificidades de este grupo de sujetos fueron informadas en el capítulo 3 y en los estudios referidos.

Para la realización de las actividades respectivas los sujetos fueron organizados en pequeños grupos, conformados por 2participantes por cada grupo. Los resultados que se informan corresponden con las resoluciones de dos tareas por parte de estos pequeños grupos.

6.2.3. Actividades de formación: trabajos prácticos

Las actividades de formación desarrolladas tienen lugar en torno a la puesta en juego de dos trabajos prácticos, inscritos en el desarrollo regular del curso “Currículo de Matemáticas en Educación Primaria”. Estos dos trabajos prácticos tienen como nominaciones específicas las siguientes:

(a) Trabajo práctico Nº 1: *Análisis de los conocimientos puestos en juego de la solución de un problema*

(b) Trabajo práctico Nº 2: *Practica Nº 1: Las matemáticas como actividad de resolución de problemas.*

El diseño de estos dos trabajos prácticos se encuentra regulado por dos de las primeras fases del desarrollo de un ciclo formativo, a saber: (a) resolución de problemas de acuerdo con un modelo didáctico socio – constructivo – instruccional y (b) reflexión epistémico/cognitiva sobre los objetos y significados puestos en juego en la resolución de problemas.

Para el desarrollo de estas dos fases, los trabajos prácticos se estructuran en general del siguiente modo: (i) se presenta el enunciado de una situación problema, (ii) se enuncian las consignas, en las cuales se solicita: (a) resolver el problema y describir detalladamente el procedimiento empleado, y (b) identificar los conocimientos matemáticos que se han puesto en juego para resolver el problema; (iii) aclaración sobre lo que se considera la “puesta en juego de un conocimiento matemático”, lo cual refiere a reconocer algún tipo de relación (significado) entre las entidades u objetos matemáticos siguientes: elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos; (iv) con el subtitulo “Conocimientos puestos en juego” se presenta la GROS, con formato de tabla de dos columnas y cinco filas, en las que se especifican un tipo de objeto matemático para cada fila y la relación objeto/significado entre las columnas respectivas. Este formato puede verse en el Anexo C2. Debemos señalar que la estructura del segundo trabajo práctico varía en cuanto a la información que se les proporciona a los estudiantes, los problemas y las consignas, no obstante, tal estructura contiene los elementos antes referidos. En el Anexo C3 presentamos el protocolo de este trabajo práctico.

Con el fin de desarrollar un modelo didáctico socio – constructivo – instruccional, se pone en juego una trayectoria didáctica que comprende: (a) presentación del problema y las consignas, (b) exploración personal de las posibles soluciones por parte de los estudiantes, asesorados por el profesor formador, (c) trabajo cooperativo en equipos para elaborar una respuesta compartida, (d) presentación y discusión de los resultados a partir de la intervención de algún grupo voluntario, y (d) institucionalización por el formador, explicitando los conocimientos pretendidos.

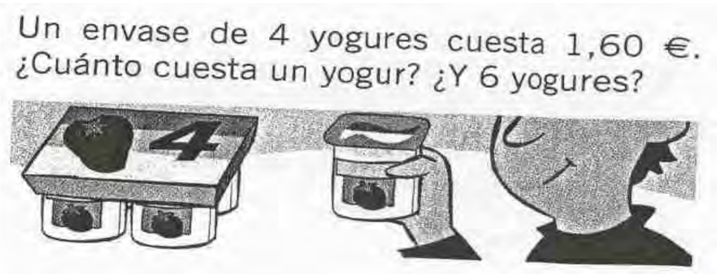
El desarrollo de esta trayectoria didáctica requirió el uso de dos sesiones de clase; de una hora cada una, para el caso del primer trabajo práctico, y un total de tres horas para el segundo trabajo práctico. Estas sesiones se distribuyeron entre las horas dedicadas a la teoría y a los módulos de supervisión correspondientes al curso referido. Especificaciones sobre cómo se llevaron a efecto los diferentes momentos de la trayectoria didáctica, su uso en el desarrollo de los trabajos prácticos y su distribución en las clases respectivas, pueden verse en el Anexo D, desde Anexo D4 hasta Anexo D7.

6.2.4. Los problemas

Desde la perspectiva del EOS se considera la resolución de problemas como actividad clave para el desarrollo de la formación en matemática. En este sentido, aún cuando las diferentes actividades involucradas en los trabajos prácticos,, antes descritos, constituyen actividades de formación, consideramos la resolución de problemas como el motor impulsor de toda la acción de formación.

En este orden de ideas, presentamos en este apartado una breve descripción de los tipos de problemas que serán empleados en las actividades de formación a ser desarrolladas en el presente estudio.

Una primera actividad tuvo lugar con un grupo de 62 futuros profesores de primaria, organizados en 31 grupos (2 integrantes en cada grupo), que cursan el segundo año de la carrera de magisterio, en la resolución de una situación problema de valor faltante del tipo ―One-by-Two-(a) Category" (Harel y Berh, 1989; p. 83), tomada de un libro de texto de 6º curso de primaria (11-13 años). La situación problema es equivalente a las que se consideran generalmente como introductorias al estudio de la proporcionalidad a nivel de 6º curso de primaria, aún cuando en el libro de texto correspondiente ésta se encuentra incluida en una lista de ejercicios propuestos. En la Fig. 6.2 mostramos el enunciado de la situación problema tal y como es presentado en el libro de texto y la transcripción realizada del mismo en la tarea de exploración.



Este problema se ha transcrito, obviando el dibujo, de la siguiente manera:

“Un envase de 4 yogures cuesta 1‘60€ ¿Cuánto cuesta un yogur? ¿Y 6 yogures?”

Fig. 6.2: Enunciado original del problema y su transcripción en la primera tarea de exploración

Las cualidades de este problema permiten su resolución utilizando diferentes estrategias; desde el uso de estrategias intuitivas (construcción progresiva o reducción a la unidad), pasando por la interpretación del problema haciendo uso de los conceptos de las operaciones de multiplicación y división, hasta el uso sofisticado de algún algoritmo (Kaput y West, 1994).

Nótese, por ejemplo, que aún cuando se trata de un problema que involucra el uso de operaciones con números decimales, se puede obtener cuánto vale un yogur calculando dos mitades sucesivas del costo de los cuatro yogures, es decir, dos yogures cuestan 80 céntimos (que es la mitad de 1‘60€) y por ende 1 yogur cuesta 40 céntimos (que es la mitad de 80 céntimos). Luego, saber cuánto cuestan 6 yogures puede ser obtenido sumando 6 veces el costo de cada yogur. Esta posibilidad, de que se puedan manifestar múltiples soluciones para este problema, puede fomentar una diversidad de respuestas en torno a su resolución por parte de los futuros profesores (Berk et al., 2009). Para efectos de referencia posterior, y como lo expusimos en el capítulo 3, este primer problema será llamado “problema del yogur”.

Una segunda actividad tuvo lugar con 52 estudiantes pertenecientes a la misma sección de participantes de la primera actividad, 10 sujetos que participaron en la resolución del primer trabajo práctico no asistieron a la aplicación del segundo. Dado que el tipo de muestra corresponde con una elección de tipo incidental (León y Montero, 2003), para efectos del estudio, es suficiente que las acciones se realicen con los sujetos inscritos-asistentes al momento de su ejecución.

El procedimiento desarrollado para el segundo trabajo práctico fue similar al seguido en el primer trabajo práctico, la totalidad de los sujetos se dividieron en 13 grupos, conformados por 4 estudiantes cada grupo. Aún cuando se realizó un trabajo individual en la aplicación de la tarea de exploración, nuestro interés se enfocó en el material de las respuestas dadas por los grupos.

El problema en esta segunda tarea de exploración es un problema de comparación de mezclas, conocido como el “problema de la limonada” o “jugo de limón”, ampliamente utilizado en diferentes estudios (Karplus, Pulos y Stage,1983b; Noelting, 1980a; 1980b) El enunciado que hemos utilizado de este problema lo presentamos en la Fig. 6.3, el cual corresponde con la traducción que hemos hecho de su enunciado originalmente presentado por Noelting (1980a, p. 219), adaptado por Karplus, Pulos Stage (1983b, p. 53) y referido por Lamon (2007, p. 637).

Siguiendo la conclusión a la que condujo la discusión presentada en el sub-apartado 1.7.1, del capítulo 1, relativas al uso de estrategias “dentro” y “entre” en la resolución de este tipo de problemas, consideramos que una de las estrategias que se puede manifestar con mayor frecuencia es la estrategia “dentro”, en la que los sujetos comparan los grados de “dulzura” de la mezcla obtenida, es decir la comparación que se realiza entre los cocientes que resultan de cada mezcla preparada por Juan y por María. Esta consideración, se encuentra convalidada por los resultados de los estudios antes referidos.

> Juan prepara una limonada utilizando 3 cucharadas de azúcar y 12 cucharadas de concentrado de jugo de limón. Mientras María utiliza 5 cucharadas de azúcar y 20 cucharadas de concentrado de jugo de limón. ¿Cuál de las dos limonadas es más dulce, la de Juan o la de María, o tienen el mismo gusto?

Fig. 6.3: Enunciado del problema de la segunda tarea de exploración. (Adaptado de Lamon, 2007; p. 637)

Más adelante, en los apartados 6.5 y 6.7, presentamos las resoluciones propuestas para estos dos tipos de problemas y los análisis epistémicos (expertos) de tales resoluciones.

Finalmente, debemos referir, tal como puede verse en el Anexo C3, que el segundo trabajo práctico contiene un segundo problema de índole aritmético-algebraica, cuyos resultados fueron presentados en Castro (2011), por ende, no fue considerado en el desarrollo de la presente investigación.

6.3. Instrumentos

Los instrumentos utilizados para el desarrollo de este tercer estudio son parte de los dos trabajos prácticos antes descritos. Para efectos de la presente investigación, estos dos trabajos han sido utilizados como instrumentos de recogida de datos. En este apartado presentamos una descripción de las dos tareas contenidas en esos trabajos prácticos, en función de su uso para el estudio y desarrollo de competencias de análisis didáctico de un grupo de futuros profesores de primaria.

Para referencia posterior, hemos convenido denotar el primer instrumento de este tercer estudio como ―Instrumento 1.3-E" que puede leerse como ―Instrumento 1 del tercer Estudio". Similarmente, el segundo instrumento de este tercer estudio será denotado por ―Instrumento 2.3-E", que se lee de manera análoga como: ―Instrumento 2 del tercer Estudio". Es necesario referir que el Instrumento 1.3-E es simplemente el Trabajo Práctico Nº 1, mientras que el Instrumento 2.3-E es una parte del Trabajo Práctico Nº 2, la que es de interés para esta investigación.

Los datos a ser recogidos, por medio de la aplicación de estos dos instrumentos relativos al desarrollo de competencias de análisis didáctico, tienen lugar por medio de dos acciones específicas de interés; a saber: (a) la resolución de dos problemas matemáticos sobre la proporcionalidad, y (b) los análisis epistémicos correspondientes a ambos problemas y sus resoluciones. A continuación detallaremos cómo se concretan estas acciones en la búsqueda de esas competencias de acuerdo con cada uno de los instrumentos aplicados.

6.3.1. Instrumento 1.3-E

El Instrumento 1.3-E, titulado: ―Análisis de los conocimientos puestos en juego de la solución de un problema", constituye un trabajo práctico que se implementó como una de las actividades iniciales, con el grupo de sujetos participantes, en el contexto al que venimos refiriendo. Su estructura, como lo hemos indicado, persigue el desarrollo de competencias de la faceta epistémica de análisis didáctico en futuros profesores de primaria. No obstante, su ejecución involucra la resolución de un problema, para lo cual el sujeto debe poner en práctica conocimientos que le permitan llegar a una solución correcta del problema.

De manera que, siguiendo lo planteado en el apartado 2.6, del capítulo 2, consideramos que la ejecución de las actividades propuestas en el Instrumento 1.3-E (véase Anexo C2) comprende primordialmente el desarrollo de dos tipos de competencia: (a) una relativa al uso competente de los elementos constituyentes del conocimiento y la capacidad para relacionarlos en la producción de la resolución de un problema de proporcionalidad y (b) otra relativa a la realización de una tarea de análisis sobre los objetos y significados puestos en juego en la resolución de un problema de proporcionalidad. Específicamente, identificamos como competencias a desarrollar las siguientes:

- Resolver problemas de proporcionalidad de 6º curso de primaria
- Reconocer objetos (elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades, argumentos) y significados puestos en juego en el proceso de resolución de un problema de proporcionalidad de 6º curso de primaria.

Siendo la segunda de estas competencias la relacionada con el desarrollo de competencias de análisis didáctico en su faceta epistémica y el conocimiento didáctico-matemático necesario para la enseñanza de la matemática.

Para tales efectos el Instrumento 1.3-E, luego del enunciado del problema, presenta dos consignas: (a) Resuelve el problema y describe detalladamente el procedimiento empleado, (b) Identifica los conocimientos matemáticos que has puesto en juego para resolver el problema. Luego, seguido de estas dos consignas, se presenta una ―Aclaración", en la cual se relaciona lo solicitado en la segunda consigna con la puesta en juego de la GROS. En esa aclaración se señala que la identificación de los ―conocimientos matemáticos", puestos en juego en la resolución del problema, está en relación con el establecimiento de algún tipo de relación (significado) entre los tipos de entidades u objetos matemáticos siguientes: elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos. Proveyéndose de una breve descripción sobre a qué refieren cada una de estas entidades.

6.3.2. Instrumento 2.3-E

El Instrumento 2.3-E es parte del Trabajo Práctico Nº 2 titulado: ―Practica Nº 1: Las matemáticas como actividad de resolución de problemas". Este trabajo práctico presenta una estructura diferente al Instrumento 1.3-E (véase Anexo C3). Esto se debe a que constituye un instrumento de control del curso referido, en el cual participan todas las secciones de ese curso, a cargo de diferentes profesores. Su estructura obedece a una secuencia formal de aspectos que caracterizan este tipo de instrumentos, la cual comprende: objetivos, contenidos, reactivos y cuestiones, documentos de estudio.

No obstante, en el aspecto reactivos y cuestiones se han incluido: (a) un problema de proporcionalidad (problema de mezclas), para el cual se pide su resolución explicitando todos sus pasos, y (b) una cuestión en la que se solicita completar la tabla que se adjunta, en la que se deben indicar los diversos objetos matemáticos puestos en juego en la resolución, así como el significado que se asigna a cada objeto. En el enunciado de esta cuestión se especifica que los objetos matemáticos refieren a las representaciones lingüísticas, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos.

La inclusión de ese problema y esa cuestión son los ítems de nuestro interés, estos constituyen lo que hemos llamado ―Instrumento 2.3-E", puesto que permiten obtener información análoga a la pretendida en la aplicación del Instrumento 1.3-E. De manera que, con los datos que se pretende conseguir con este segundo instrumento, se puede obtener información en torno a las competencias referidas en el sub-apartado anterior.

6.4. Adecuación del modelo de análisis: qué conocimiento se pone en juego…

Como hemos venido refiriendo, el modelo de análisis a ser utilizado involucra la aplicación de la GROS por parte de los profesores en formación inicial. Tal aplicación comprende el reconocimiento de los objetos (elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos) y significados puestos en juego durante la resolución de un problema matemático. Asimismo, basados en los resultados de los estudios informados en los capítulos 4 y 5, hemos referido a una relación en la que se identifican tres aspectos relacionados con la formación del futuro profesor, a saber, la relación que se manifiesta de acuerdo con:

Uso de la GROS → Desarrollo de competencias de análisis didáctico → Desarrollo del conocimiento didáctico-matemático necesario para la enseñanza.

Consideramos necesario insistir en que las concepciones de competencia y análisis didáctico expuestas en los apartados 2.6 y 2.7, del capítulo 2, han permitido la identificación del uso de la GROS con el desarrollo de competencias de análisis didáctico, identificación que se ha observado a través de su uso por parte del profesor formador, en los capítulos 4 y 5.

De la misma manera, a partir de las concepciones del conocimiento del profesor, conocimiento común y especializado del contenido, referido en los apartados 2.3 y 2.5, del capítulo 2, se ha fomentado la identificación entre el uso de la GROS y el desarrollo del conocimiento del profesor. De manera que una de las adecuaciones del modelo de análisis es la posibilidad de ser versátil para proveer de información referente a las competencias y conocimientos referidos.

De acuerdo con las aplicaciones precedentes, el uso de la GROS puede fomentar la identificación previa de posibles conflictos potenciales que pueden afrontar los estudiantes al momento de resolver los problemas correspondientes. Sin embargo, para este primer uso, por parte de los futuros profesores, en problemas de proporcionalidad, hemos omitido solicitar tal identificación.

Por otro lado, somos conscientes de que el uso de esta herramienta de análisis/reflexión, debido a su novedad y reciente creación, no es habitual en el contexto de la formación de profesores, el cual consideramos es el espacio natural, donde tiene sentido hacer su uso. Esta condición puede incidir en la calidad de la información a ser recogida. No obstante, trataremos de ser incisivos ante las producciones de los estudiantes, para obtener de ellas la mayor información posible, relativa al desarrollo de las competencias y conocimientos referidos.

Finalmente, hacer uso de la frase –conocimientos matemáticos puestos en juego en la resolución del problema”, presente en el enunciado de las consignas, y asociarla con el reconocimiento de objetos y significados de uso o de referencia que se hace de tales objetos en esa resolución, constituye el establecimiento de una interpretación clave para motivar su uso en el contexto que ahora se implementa.

6.5. Análisis epistémico del Instrumento 1.3-E

Con el fin de describir y analizar los conocimientos matemáticos involucrados en el problema del yogur, se llevó a efecto, por parte del formador y de un grupo de investigadores noveles, un análisis epistémico a priori de una posible resolución (entre otras posibles), en el que se identifican algunos de los objetos y significados puestos en juego, lo cual condujo a la determinación anticipada de conflictos potenciales y el reconocimiento de algunos elementos de interés didáctico que hemos denominado “Elementos Matemáticos-Didácticos Relevantes” (EM-DR) involucrados en la resolución del problema. A continuación referiremos a esa resolución y al análisis epistémico realizado sobre la misma.

6.5.1. Una resolución del problema y su explicación

Una de las posibles resoluciones y explicaciones de la situación problema se muestra en la Fig. 6.4. La resolución que se presenta la hemos asumido, de acuerdo con nuestra experiencia, como una de las más comúnmente utilizadas.

Problema:

“Un envase de 4 yogures cuesta 1‘60€ ¿Cuánto cuesta un yogur? ¿Y 6 yogures?”

(a) Resolución del problema y explicación detallada del proceso desarrollado:

Resolución: Si un envase tiene cuatro yogures y cuesta 1‘60 € el envase, entonces el precio de cada yogur viene dado por 1‘60/4 = 0‘40 €.
Si cada yogur cuesta 0‘40 € entonces 6 yogures costarán 6 × 0‘40 = 2‘40 €.

Descripción detallada: El precio de cada yogur se obtiene dividiendo el precio total entre el número de yogures que forman esa totalidad, es la división del todo entre las partes para obtener el valor de cada parte.
El precio de 6 yogures se obtiene multiplicando el precio de cada yogur por 6. Es el producto cuyos factores son el valor de cada objeto por el número de objetos.

Fig. 6.4: Enunciado, resolución y explicación del problema del yogur

Es necesario referir, en relación con el reconocimiento del objeto “elementos lingüísticos”, que aún cuando no hemos incluido representaciones gráficas en la resolución propuesta, estaremos atentos a su manifestación, puesto que, de acuerdo con una de las conclusiones de Bryant y Nunes (2009): “El poco uso de recursos representacionales está asociado con bajos niveles de éxito” (p. 221). En este sentido, hemos considerado relevante identificar el uso de representaciones en las explicaciones que darán los futuros profesores y el desempeño general mostrado por los grupos que hacen tal uso.

Se observa en la Fig. 6.4, que el uso de la división como “reparto” y la multiplicación como “suma reiterada” son determinantes en la resolución considerada. Así mismo, los procedimientos desarrollados son los involucrados en la aplicación de los algoritmos de división y multiplicación de números decimales. La estrategia de resolución es el cálculo de la razón unitaria, inducida por el mismo enunciado del problema. Para la resolución del problema no se ha tomado en cuenta el desarrollo detallado del algoritmo de la división y multiplicación de números decimales, no obstante, estaremos atentos a su manifestación en las resoluciones y análisis realizados por los futuros profesores.

La puesta en juego de las acciones anteriores (uso de representaciones, operaciones y definiciones de los tipos de operaciones utilizadas, procedimientos desarrollados y las razones que sustentan el uso de las operaciones y los procedimientos ejecutados) son indicadores de lo que comúnmente es activado en la resolución de un problema, puesto que constituyen aspectos relacionados con el conocimiento matemático necesario para resolverlo. Es claro que estos indicadores serán objeto de revisión en las resoluciones dadas por los participantes. En los términos de Ball y colaboradores este tipo de conocimiento es denominado *conocimiento común del contenido* (Ball, Hill y Bass, 2005).

El enunciado del inciso (a) demanda, además de la resolución del problema, una descripción detallada del proceso desarrollado en tal resolución. Para efectos de nuestro estudio consideraremos esa descripción detallada como la explicación de la resolución. Hemos utilizado el término “descripción detallada” en la consigna del instrumento para proveer de un carácter más “práctico” a la acción demandada. Además, consideramos que realizar una explicación de la resolución, amerita que los sujetos se coloquen frente a ella y hagan, al menos, una descripción de la misma.

El tipo de conocimiento puesto en juego en esta acción, está, sin lugar a dudas, más allá del conocimiento requerido para resolver el problema. Consideramos este tipo de conocimiento relacionado con el *conocimiento especializado del contenido*, referido por Ball y colaboradores. En este orden de ideas, es claro que profundizar y hacer más detallada esa descripción nos permitiría ir con mayor propiedad hacia el desarrollo de ese tipo de conocimiento

6.5.2. Identificación de objetos y significados en el problema del yogur

Para el inciso (b) se pone en juego la “Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados” (GROS), para lo cual se requiere no sólo identificar los indicadores anteriormente señalados, sino realizar una tarea en la que se le atribuyen significados de uso o de referencia a tales indicadores. Estos indicadores, en el contexto de nuestra investigación son lo que hemos venido denominando objetos matemáticos o entidades puestos en juego en la resolución de un problema.

Inicialmente mostraremos, en las figuras que van desde la Fig. 6.5 hasta la Fig. 6.9, la aplicación de la GROS por parte del profesor formador y un grupo de investigadores. Esta aplicación persigue, además de la producción del análisis epistémico como tal, los siguientes fines: (a) identificación de conflictos potenciales de manera previa, para observar su posible manifestación en las resoluciones dadas por los sujetos participantes, (b) coadyuvar en la identificación de elementos matemáticos-didácticos relevantes, relacionada con la explicación de la resolución, cuya identificación debería ser realizada por los sujetos participantes al proveer de esa explicación o al realizar el análisis cognitivo correspondiente, y (c) servir de referencia para valorar el uso que hacen de esta herramienta el grupo de futuros profesores de la muestra, de manera que, la revisión de los objetos y significados se realiza a la luz de un estudio epistémico, experto, previo. Relacionado con cada figura se presentan breves comentarios relativos a los significados y conflictos potenciales identificados.

En la Fig. 6.5 presentamos el análisis referido a los elementos lingüísticos. En el estudio de estos elementos hemos reconocido el conflicto potencial “Eludir la razón 4 yogures por 1 envase”, el cual refiere a no producir una representación (de índole cognitiva o icónica-esquemática) en la que se pueda observar la relación multiplicativa “por cada envase hay cuatro yogures” y asociada a ella algunas de las otras relaciones, que se pueden expresar lingüísticamente como: “dos yogures forman medio envase”, “6 yogures forman un envase y medio”… Estas representaciones pueden ser utilizadas en la construcción de los significados necesarios para resolver adecuadamente el problema planteado.

Tipos de objetos	**Significados (relación de referencia o de uso)**
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS (Términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas)	
Un envase tiene cuatro yogures	Cantidad de yogures en un envase (razón yogures/envase)
…cuesta 1‘60 €	Es el precio del envase y por tanto de cuatro yogures (razón precio/envase)
Multiplicación/división	Indican las operaciones requeridas para resolver el problema
Conflictos potenciales: - Eludir la razón 4 yogures por 1 envase - Eludir la razón1‘60€ por 1 envase - Uso de simbolizaciones asociadas con las operaciones involucradas	

Fig. 6.5: Reconocimiento de elementos lingüísticos

De manera análoga, el conflicto potencial “Eludir la razón 1‘60€ por 1 envase”, refiere a la no producción de representaciones en torno a la idea de razón. Aún cuando una representación de esta última razón puede ser “menos icónica-esquemática”, su manifestación cognitiva puede servir de sustento a la producción de acciones requeridas para comprender lo implicado en la resolución.

En la Fig. 6.6 presentamos el análisis relativo al objeto “conceptos”. Identificamos en ese análisis el uso del concepto de razón, posiblemente asociado con sus representaciones específicas en este problema (cada envase tiene cuatro yogures, cada envase cuesta 1‘60€).

Tipos de objetos	**Significados (relación de referencia o de uso)**
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)	
Razón	Relación multiplicativa entre dos cantidades envase/número de yogures
Razón de costo	Relación entre dos cantidades envase/precio
Número natural	Yogures en un envase (cardinal de un conjunto donde los elementos son yogures)
Número decimal	Valor del envase, de cada yogur y de 6 yogures
Multiplicación	Si se tiene el valor de cada objeto se puede obtener el valor de un número de ellos, por medio de una suma reiterada o del producto.
División	Si se tiene el valor del total de objetos se puede obtener el valor de cada objeto, remite a un reparto equitativo del todo entre las partes.
Conflictos potenciales: - Eludir el uso del concepto de razón como relación multiplicativa entre las magnitudes consideradas - Reconocer el número decimal y usos correspondientes - Uso de definiciones asociadas con las operaciones involucradas	

Fig. 6.6: Reconocimiento de conceptos

El uso de esta idea de razón faculta para producir algunas de las diferentes relaciones multiplicativas que pueden tener lugar, particularmente: “precio por cada yogur” o “precio de seis yogures”, que son demandadas por la tarea.

Paralelamente al uso de la idea de razón se puede dar lugar a la manifestación de dos significados relativos a las nociones de las operaciones de multiplicación y división. La multiplicación es interpretada como una suma reiterada, mientras la división como reparto equitativo. Estas interpretaciones pueden representar un conflicto, puesto que las mismas son necesarias para dar sentido al uso de esas operaciones y proveer de espacio para su manifestación como procedimientos necesarios para obtener una solución del problema planteado.

En la Fig. 6.7 presentamos el análisis del objeto “procedimientos”. En relación con los significados dados a las operaciones de multiplicación y división, desde un punto de vista conceptual, anteriormente referidos, encontramos significados asociados a estos términos desde un punto de vista procedimental. En este orden de ideas, para la operación de multiplicación se pone en práctica el algoritmo de multiplicación de números decimales, que permite el cálculo del costo de 6 yogures. Similarmente para la operación de división, se aplica el algoritmo de división de números decimales, el cual permite calcular la razón unitaria del precio de cada yogur. Este aspecto puede ser conflictivo, toda vez que no se recuerde el procedimiento involucrado en tales algoritmos.

Tipos de objetos	**Significados (relación de referencia o de uso)**
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
División	Algoritmo que permite obtener el costo de cada yogur (cálculo de la razón unitaria)
Multiplicación	Algoritmo que permite obtener el costo de 6 yogures (razón precio/6 yogures)
Modelización	Permite suprimir y restituir las magnitudes respectivas en la aplicación de los algoritmos correspondientes para obtener las cantidades de magnitud solicitadas
Conflictos potenciales: - Uso de algoritmos correspondientes a las operaciones involucradas - Interpretar los resultados de la aplicación de un algoritmo según las cantidades de magnitud involucradas	

Fig. 6.7: Reconocimiento de procedimientos

Asimismo, el procedimiento de resolución ejecutado involucra un proceso de modelización, el cual consiste en suprimir el uso de las magnitudes asociadas a los valores numéricos de las cantidades de magnitud involucradas, para hacer uso sólo de los valores numéricos en la aplicación del algoritmo correspondiente, luego, al resultado numérico obtenido por medio de tal aplicación, se le restituye la magnitud que corresponde. El conflicto puede presentarse en la interpretación que debe darse al resultado de la aplicación del algoritmo respectivo, de acuerdo con las magnitudes involucradas.

En la Fig. 6.8 presentamos el análisis correspondiente al objeto propiedades. Identificamos las propiedades P_1 y P_2 como propiedades de facto, que se pueden deducir directamente del enunciado del problema. Refieren a razones entre las cantidades de magnitud involucradas en el problema, que posiblemente no sean reconocidas como relaciones multiplicativas y por ende dificulte deducir las propiedades P_3 y P_4.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
PROPIEDADES (Enunciados para los cuales se requiere una demostración o prueba)	
P_1: Un envase contiene 4 yogures	Establece la razón envase/número de yogures
P_2: Los yogures están contenidos en un envase, cuyo valor es 1‘60€	El costo de un yogur se puede obtener a partir del costo del envase
P_3: 1 yogur cuesta 0‘40 €	Es el costo calculado para un yogur
P_4: 6 yogures cuestan 2‘40 €	Es el costo calculado para 6 yogures
Conflictos potenciales: - Reconocimiento de las razones (yogures/envase; precio/envase) como relaciones multiplicativas. - Uso de relaciones multiplicativas que permiten obtener los resultados.	

Fig. 6.8: Reconocimiento de propiedades

Las propiedades P_3 y P_4 refieren a los resultados, los cuales han sido obtenidos mediante el proceso de resolución. Se debe notar una secuencia que se manifiesta en el uso y producción de las propiedades identificadas, a saber, corresponden con un proposición condicional del tipo —si (P_1 y P_2) entonces (P_3 y P_4)”, lo cual se puede interpretar como la proposición general que caracteriza la forma de la resolución dada al problema. De manera que la resolución del problema consiste en la demostración de esa proposición general, donde la deducción involucrada (o solución del problema) requiere la conexión entre las proposiciones P_1, P_2 y P_3, P_4.

En la Fig. 6.9 presentamos el análisis relativo a los objetos argumentos. Observamos que el uso de las propiedades P_1 y P_2, justificadas por A_1 y A_2, respectivamente, debe proveer de alguna de las siguientes interpretaciones o la conjunción de ambas: (a) una interpretación en la que se reconozca la presencia de las razones incluidas y, por ende, las relaciones multiplicativas entre las cantidades de magnitud involucradas, y (b) una interpretación en la que se reconozca la necesidad de hacer uso de las operaciones de multiplicación y/o división para resolver el problema.

Cualquiera de estas dos interpretaciones, o su conjunción, representa la posibilidad de realizar un procedimiento que permite conectar las propiedades P_1 y P_2 con las propiedades P_3 y P_4.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
ARGUMENTOS (Justificaciones, demostraciones o pruebas de las propiedades utilizadas)	
A_1: Es una propiedad dada en el enunciado. A_2: Relación que permite obtener el costo de un yogur si se conoce el costo del envase. A_3: Se obtiene al aplicar las propiedades P_1 y P_2 y hacer uso de la división como reparto en partes iguales. A_4: Se obtiene al utilizar la propiedad P_3 y hacer uso de la multiplicación como suma reiterada del precio unitario de cada yogur[43].	
Conflictos potenciales: - Reconocer y hacer uso de las razones que sustentan la identificación y uso de las relaciones multiplicativas entre las magnitudes involucradas en el problema.	

Fig. 6.9: Reconocimiento de argumentos

Es necesario referir que en la primera interpretación se hace un uso expreso de la idea de razón, mientras, la segunda interpretación, puede dar lugar a un uso no explícito de la idea de razón.

Los argumentos A_3 y A_4, que justifican las propiedades P_3 y P_4, respectivamente, refieren al uso y reconocimiento de los patrones de razonamiento (tanto para la división como reparto, como para la multiplicación como suma reiterada) que sustentan las relaciones multiplicativas requeridas para establecer las conexiones necesarias y, por ende, la resolución del problema.

6.5.3. Identificación de conflictos potenciales y el conocimiento didáctico-matemático en el problema del yogur

La identificación de conflictos potenciales, a partir del reconocimiento de los objetos y significados activados en el proceso de resolución analizado, nos aproxima a establecer, de manera previa, las posibles dificultades que pueden tener los estudiantes al momento de resolver el problema.

[43] **Nota:** Para cada propiedad P_i corresponde un argumento A_i, $i = 1… 4$.

Con el fin de observar de manera sintetizada los conflictos potenciales identificados, relacionados con los diferentes objetos considerados, presentamos en la Tabla 6.1 una recopilación de los mismos.

A modo de síntesis de lo expuesto en la Tabla 6.1, reconocemos como aspectos centrales de los conflictos potenciales identificados los siguientes: (a) el uso de simbolizaciones y representaciones asociadas a la idea de razón y al uso de las operaciones de multiplicación y división, (b) el uso de relaciones multiplicativas o cantidades intensivas para reconocer y poner en juego la idea de razón o significados asociados al uso de las operaciones de multiplicación y división, (c) el uso adecuado de algoritmos de la división y multiplicación implicados en la resolución del problema, (d) el uso de una modelización por medio de la cual se suprimen y se restituyen las magnitudes asociadas a los valores numéricos de las cantidades de magnitud involucradas en el problema y su resolución.

Tabla 6.1: Conflictos potenciales identificados de acuerdo con los objetos matemáticos considerados

Tipo de objeto	Conflictos potenciales
Elementos lingüísticos	- Eludir la razón 4 yogures por 1 envase - Eludir la razón1‘60€ por 1 envase - Uso de simbolizaciones asociadas con las operaciones involucradas
Conceptos	- Eludir el uso del concepto de razón como relación multiplicativa entre las magnitudes consideradas - Reconocer el número decimal y usos correspondientes - Uso de definiciones asociadas con las operaciones involucradas
Procedimientos	- Uso de algoritmos correspondientes a las operaciones involucradas - Interpretar los resultados de la aplicación de un algoritmo según las cantidades de magnitud involucradas
Propiedades	- Reconocimiento de las razones (yogures/envase; precio/envase) como relaciones multiplicativas. - El uso de relaciones multiplicativas que permiten obtener los resultados.
Argumentos	- Reconocer y hacer uso de las razones que sustentan la identificación y uso de las relaciones multiplicativas entre las magnitudes involucradas en el problema.

Estos aspectos centrales, derivados a partir de la identificación de los conflictos potenciales, refieren a posibles dificultades que pueden hacerse presentes en la resolución del problema. Consideramos que la determinación de estos aspectos, de acuerdo con la interpretación que hacemos de la propuesta de Ball y colaboradores, está en relación con el desarrollo del conocimiento matemático necesario para la enseñanza, el cual, para efectos de nuestro trabajo, hemos dado en llamar conocimiento didáctico-matemático. Más específicamente, estos aspectos se encuentran en relación con lo que hemos denominado ―elementos matemáticos-didácticos relevantes", a los cuales referiremos en el siguiente sub-apartado.

6.5.4. Identificación de elementos matemáticos-didácticos relevantes en el problema del yogur

Al hablar de Elementos Matemáticos-Didácticos Relevantes (EM-DR) queremos referirnos a elementos en torno a los cuales se sintetizan los resultados de los análisis didácticos que se realizan sobre un problema matemático y su resolución. Reconocemos estos elementos como uno de los aspectos emergentes de la tarea de análisis epistémico, reconocido en este tercer estudio. Consideramos que el avance registrado, fruto de la actividad de análisis-reflexión involucrada en la aplicación de la GROS, nos ha conducido a producir esos elementos de síntesis, los cuales, entendemos, están relacionados con el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático necesario para la enseñanza de la matemática.

En este sentido, inscribimos en el desarrollo de competencias de análisis didáctico del futuro profesor, el reconocimiento o proximidad con que ellos pueden identificar el uso de este tipo de elementos, para lo cual se observará la explicación dada al problema y la aplicación de la GROS al proceso de resolución. De manera que, estamos interesados en: (i) identificar elementos matemáticos-didácticos relevantes (EM-DR) involucrados en la resolución del problema, (ii) observar en qué medida esos elementos son utilizados y reconocidos por los profesores en formación inicial.

La aplicación de la GROS por el profesor formador y el grupo de investigadores noveles (desde Fig. 6.5 hasta Fig. 6.9, antes presentadas) y la identificación de conflictos potenciales, ha permitido reconocer algunos de los EM-DR1[44], a saber:

- EM-DR1.1: Las representaciones y simbolizaciones asociadas a la idea de razón y al uso de las operaciones de multiplicación y división que pueden servir de sustento al desarrollo y uso del concepto de razón y de esas operaciones.

[44] EM-DR1 refiere a los elementos matemático-didáctico relevantes relativos al problema del yogur o del primer estudio. Luego EM-DR2 referirá a esos elementos pero relativos al problema de la limonada o del segundo estudio.

- EM-DR1.2: La idea de razón (Lamon, 2007), de cantidades de magnitudes intensivas (Kaput y West, 1994), o de unidades compuestas (Bryant y Nunes, 2009) como fundamento del desarrollo del razonamiento multiplicativo, y por ende proporcional, requerido para la resolución del problema.

- EM-DR1.3: La manifestación de un proceso de modelización, que interviene en la producción de las propiedades P_3 y P_4 (Fig. 6.8, antes presentada), que permite asignar el rasgo ―costo por unidad” o ―costo por 6 yogures” a los valores numéricos obtenidos, por medio de la aplicación de los algoritmos correspondientes.

- EM-DR1.4: Diferentes usos/significados dados a los mismos términos, de acuerdo con el papel que juegan como objetos matemáticos en la resolución del problema. Por ejemplo, a las operaciones de multiplicación y división se les confiere diferentes significados de acuerdo al objeto que refieren (elemento lingüístico, concepto, procedimiento) durante la resolución del problema.

- EM-DR1.5: Patrones de razonamiento (división como reparto equitativo, multiplicación como suma reiterada), utilizados como argumentos para sustentar el uso de las propiedades identificadas y una explicación de la resolución respectiva.

Como resultado preliminar consideramos pertinente señalar que la identificación de los EM-DR corresponde con una tarea sobre el conocimiento matemático de interés didáctico, por lo que la producción de esos elementos de síntesis, a nuestro entender, tienen relación con el desarrollo de lo que Ball y colaboradores han denominado *conocimiento especializado del contenido* (Ball, Hill y Bass, 2005; Hill et al., 2007; Hill Ball y Schilling, 2008).

En este orden de ideas, reconocemos que la explicación dada a la resolución del problema (Fig. 6.4, antes presentada) conlleva una intención de enseñanza y por tanto puede corresponder con la manifestación de un *conocimiento especializado del contenido*, no obstante, en dicha explicación no se hacen evidentes todos los elementos relevantes señalados, que son el resultado de una tarea de análisis-reflexión que trata de profundizar en el estudio e identificar detalles sobre un problema y su resolución, por medio del reconocimiento de los objetos y significados activados en la resolución de un problema de la matemática escolar, tomando en cuenta la identificación previa de posibles errores y dificultades que pueden confrontar las personas al resolverlo.

Se trata de un tipo de conocimiento didáctico-matemático que va más allá de la resolución del problema como tal, que pretende comprender de manera más específica los aspectos involucrados en la misma. En palabras de Ball y colaboradores, la realización de esta tarea, ―…evidencia que saber matemáticas para enseñar demanda un conocimiento profundo y detallado que va más allá de lo que es necesario para ejecutar un algoritmo de manera confiable.” (Ball, Hill y Bass, 2005; p. 21).

6.6. Análisis cognitivo del problema del yogur

Una vez realizado el análisis epistémico y a la luz de los resultados obtenidos de su puesta en juego, procedimos a la implementación de la intervención, la cual consistió, en una primera fase, en las acciones ejecutadas en torno a la aplicación del instrumento 1.3-E, en el contexto instruccional antes descrito. Los resultados de esa implementación, que los interpretamos como el monitoreo, revisión y evaluación de la intervención, se inicia con el análisis cognitivo de las respuestas de los estudiantes.

En los capítulos precedentes, en la realización de los análisis cognitivos correspondientes, hemos enfocado nuestro interés en la identificación de los tipos de respuestas dadas por los sujetos al resolver el problema. En esta ocasión, debido a la generalizada homogeneidad observada en torno a los tipos de resolución exhibidos por los grupos, pondremos el énfasis en la identificación de los tipos de explicación sobre la resolución del problema. La forma común de resolución exhibida por los sujetos es similar a la expuesta en la Fig. 6.4, antes presentada.

El estudio que realizamos sobre las respuestas dadas por los sujetos (resolución y explicación), tiene como fin último identificar la presencia de los EM-DR1 en tales resoluciones y explicaciones.

6.6.1. Categorización de los tipos de explicación

Los 31 grupos (formado por dos sujetos cada grupo) dan una respuesta correcta al problema del yogur. Básicamente, las resoluciones dadas se caracterizan por el uso de las operaciones de multiplicación y división. Las explicaciones dadas por los grupos se han categorizado en 8 tipos (4 para la multiplicación y 4 para la división). La descripción/resumen de los tipos de explicaciones identificadas se muestra en la Tabla 6.2.

Se observa en la Tabla 6.2 los cinco tipos de respuestas identificadas y la respectiva descripción, en las cuales los tres últimos tipos de explicación son comunes para ambas operaciones (multiplicación y división). Mientras que el tipo de explicación “suma reiterada” corresponde sólo a la operación multiplicación, y “reparto equitativo” corresponde sólo a la operación de división. Las descripciones dadas a estos dos primeros tipos de explicación corresponden con lo propuesto en la literatura especializada consultada (De Corte y Verschaffel, 1996; Fischbein, et al., 1985; Kaput y West, 1994). Generalmente, referiremos al uso de estos dos tipos de explicación, en los términos propuestos por Kaput y West (1994), como patrones de razonamiento. Las demás descripciones, correspondientes al resto de los tipos de explicación identificados, no requieren de mayor aclaración.

En la Fig. 6.10 presentamos un ejemplo de los tipos de explicación identificados.

Tabla 6.2: Descripción de los tipos de explicaciones identificadas

Tipo de explicación	Descripción
Suma reiterada	Modelo intuitivo, patrón de razonamiento o concepto asociado a la multiplicación
Reparto equitativo	Modelo intuitivo, patrón de razonamiento o concepto asociado a la división
Representación Gráfica	Uso de representaciones gráficas para realizar la explicación
Descripción del procedimiento	Descripción del tipo: “Para saber cuál es el precio de cada yogur debemos dividir el precio total de los cuatro yogures entre cuatro” (Análogo para la multiplicación)
Otra	Énfasis en la técnica o en el algoritmo utilizado para la resolución.

Se puede observar en la Fig. 6.10, en la respuesta en la que se usa una representación gráfica (G1-26)[45], que esa representación gráfica es utilizada para ilustrar el uso de las operaciones de división y multiplicación, siendo el uso de estas operaciones una manifestación explícita de las relaciones multiplicativas requeridas para la resolución del problema. En este caso el recurso de la representación es utilizado para sustentar la resolución del problema, lo cual sólo se manifiesta en la resolución dada por uno solo de los grupos.

[45] Utilizaremos la notación (G1-n), donde n es un números natural, n = 1, 2,… 31, para referir a los grupos de futuros profesores que participaron en la aplicación del Instrumento 1.3E.

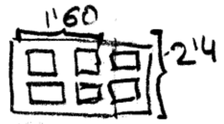
—▷ Para averiguar cuanto cueste 1 yogur debemos dividir la cantidad que ya sabemos que cuestan los 4 yogures por 4. Es decir, el dividendo corresponde a la cantidad que cuestan 4 yogures (1'60 €); el divisor corresponde a la cantidad en que se va a repartir equitativamente el dividendo. Esto se explica porque la cantidad expresada en el problema como 1'60€ corresponde a sólo 4 yogures. que se conseguiría añadiendo 4 veces la cantidad de un yogur.

Suma reiterada (G1-19)

Seis yogures cuestan 2'40 €. —▷ Para averiguar cuanto cuestan 6 yogures debemos multiplicar el precio de un yogur por 6 yogures que son los que queremos calcular. Para ello, debemos ir sumando sucesivamente la cantidad que cuesta un yogur hasta 6 veces.

Reparto equitativo (G1-19)

a) Resolución del problema y descripción detallada del procedimiento empleado:



1 envase de 4 yogures → 1'60€

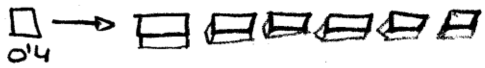
0'4 + 0'4 + 0'4 + 0'4

¿cada yogur?

1'60 | 4
0 | 0'4 cuesta cada yogur.

0'4 x6 = 2'4 cuestan 6 yogures.

Descripción:

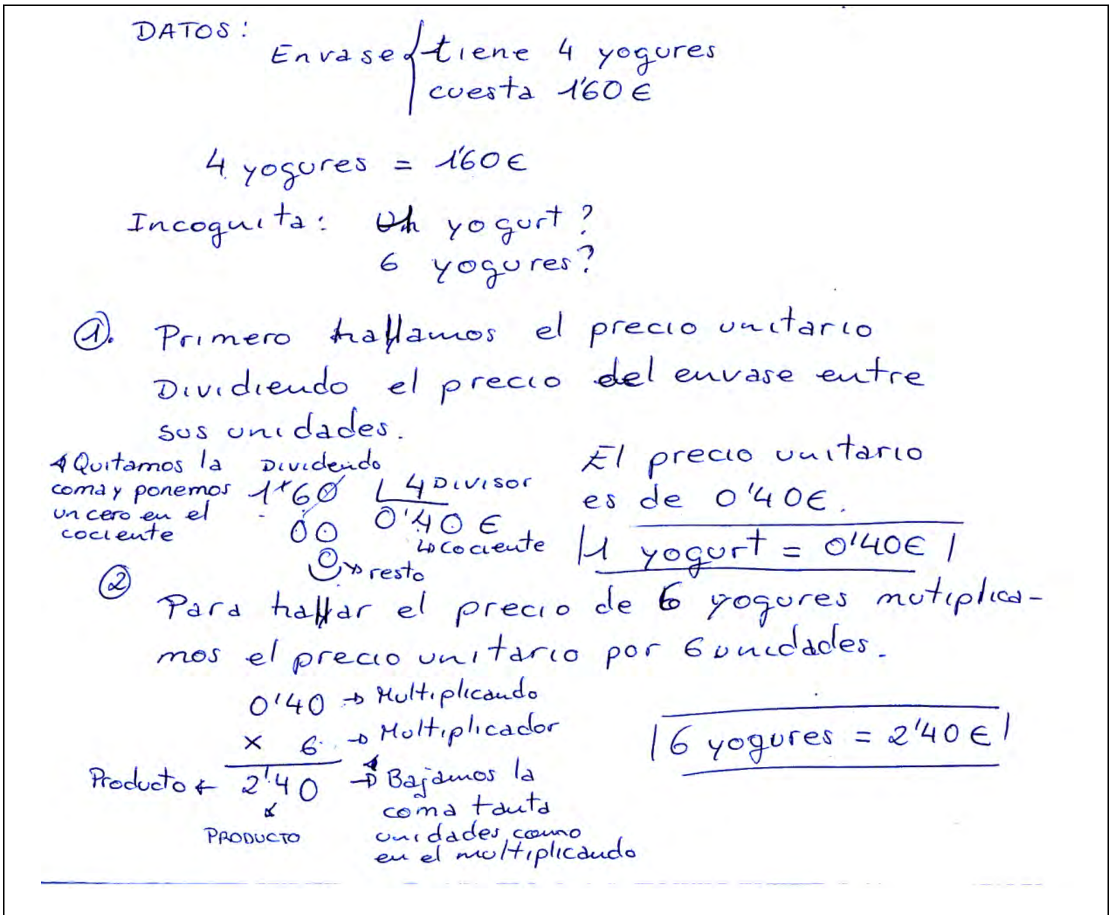


Representación gráfica (G1-26)

Puesto que cuatro yogures cuestan 1'60€, para conocer el precio de una unidad dividimos el total 1'60 entre 4 y obtenemos de resultado 0'40. En segundo lugar para calcular la siguiente cuestión usamos la multiplicación y para conocer el precio de 6 yogures, multiplicamos 6 yogures por el precio de un yogur.

Descripción (G1-3)

Fig. 6.10: Ejemplos de los tipos de explicaciones identificados (*continua…*)



Otra (G1-29)

Fig. 6.10: Ejemplos de los tipos de explicaciones identificados (*continuación*)

La frecuencia con que se manifiestan los tipos de explicaciones identificados, se presentan en la Tabla 6.3 y la Tabla 6.4. En la Tabla 6.3 presentamos las frecuencias de los tipos de explicación referidas a la división, y en la Tabla 6.4 las referidas a la multiplicación.

Tabla 6.3: Frecuencias de los tipos de explicaciones dadas por los grupos en la explicación de la operación de división

Número de Grupos (N = 31)	Explicación/División			
	Reparto equitativo	Representación Gráfica[a]	Descripción del procedimiento.	Otra
	5	2	23	3
%	16,1	6,5	74,2	9,7

[a] Explicación tipo reparto equitativo, adicionalmente usan una representación gráfica.

En la Tabla 6.3 se observa: (a) un predominio de la categoría ―Descripción del procedimiento" (74,2% de las explicaciones), (b) una baja presencia de la categoría ―Reparto equitativo" (16,1% de las explicaciones) y (c) un uso muy bajo de representaciones gráficas (6,5% de las explicaciones) para proveer de la explicación respectiva. No obstante, los dos grupos que utilizaron representaciones gráficas en sus explicaciones, coinciden en realizar una explicación de la resolución del problema asociando la división con la idea de reparto equitativo.

Las explicaciones dadas por los sujetos, relativas a la operación de multiplicación, presentan gran similitud con lo observado en las explicaciones dadas sobre la operación de división. En efecto, en la Tabla 6.4 puede observarse lo siguiente: (a) un predominio de la categoría “Descripción del procedimiento” (61,3% de las explicaciones), (b) una baja presencia de la categoría “Suma reiterada” (25,8% de las explicaciones) y (c) un uso muy bajo de representaciones gráficas (6,5% de las explicaciones). No obstante, al igual que en la división, los dos grupos que utilizaron representaciones gráficas en sus explicaciones, coinciden en realizar una explicación de la resolución del problema haciendo uso de la idea de suma reiterada para referirse a la operación de multiplicación.

Tabla 6.4: Frecuencias de los tipos de explicaciones dadas por los grupos en la explicación de la operación de multiplicación

Número de Grupos (N = 31)	Explicación/Multiplicación			
	Suma reiterada	Representación Gráfica[a]	Descripción del procedimiento	Otra
	8	2	19	4
%	25,8	6,4	61,3	12,9

[a] Explicación tipo suma reiterada, adicionalmente usan una representación gráfica.

Un hecho que debe ser resaltado es la coincidencia entre los dos grupos que hacen uso de representaciones gráficas, al tiempo que basan sus explicaciones de la división y la multiplicación haciendo uso de las ideas de reparto equitativo y suma reiterada, respectivamente. Este hecho induce a pensar que los sujetos que hacen uso de representaciones gráficas exhiben un mejor desempeño al realizar la explicación. Este resultado coincide con una de las conclusiones del estudio de Bryant y Nunes (2009). Es por tanto recomendable fomentar el uso de representaciones para posiblemente mejorar el desempeño de los sujetos para dar la explicación de la resolución de un problema.

6.6.2. Análisis epistémico/cognitivo versus análisis cognitivo en el problema del yogur

Uno de los resultados en el cual hemos intentado sintetizar la tarea de análisis epistémico realizada, ha consistido en la identificación de los Elementos Matemáticos-Didácticos Relevantes (EM-DR). Uno de los propósitos que nos hemos planteado en el desarrollo de este trabajo es observar las aproximaciones al uso o identificación de estos elementos, por parte de los futuros profesores, al resolver el problema y realizar la explicación de la resolución respectiva. Consideramos esas posibles aproximaciones como un inicio al desarrollo del conocimiento didáctico-matemático necesario para la enseñanza de los futuros profesores, lo cual constituye uno de los objetivos centrales de este tercer estudio.

En este orden de ideas, la valoración de esa proximidad (en función del uso y/o reconocimiento de los EM-DR1) constituye una ponderación entre el análisis epistémico/cognitivo[46] y el análisis cognitivo realizados. En la Tabla 6.5 presentamos las frecuencias de las manifestaciones de uso de los EM-DR1, observadas en la resolución y en la explicación dadas por los grupos participantes. En la Fig. 6.11 mostramos algunos ejemplos de ese uso.

Observamos en la Tabla 6.5, de acuerdo con lo expuesto en el sub-apartado anterior al analizar las explicaciones dadas por los futuros profesores, una primera aproximación exhibida por ellos hacia el uso de EM-DR1, como lo son: (a) los referidos al uso de representaciones (EM-DR1.1), exhibido por 2 de los grupos (6,5%) y (b) los referidos al uso de patrones de razonamiento como argumentos para sustentar la explicación de la resolución del problema (EM-DR1.5), exhibido por 5 grupos en la operación de división (16,5%) y por 8 de los grupos (25,8%) en la operación de multiplicación.

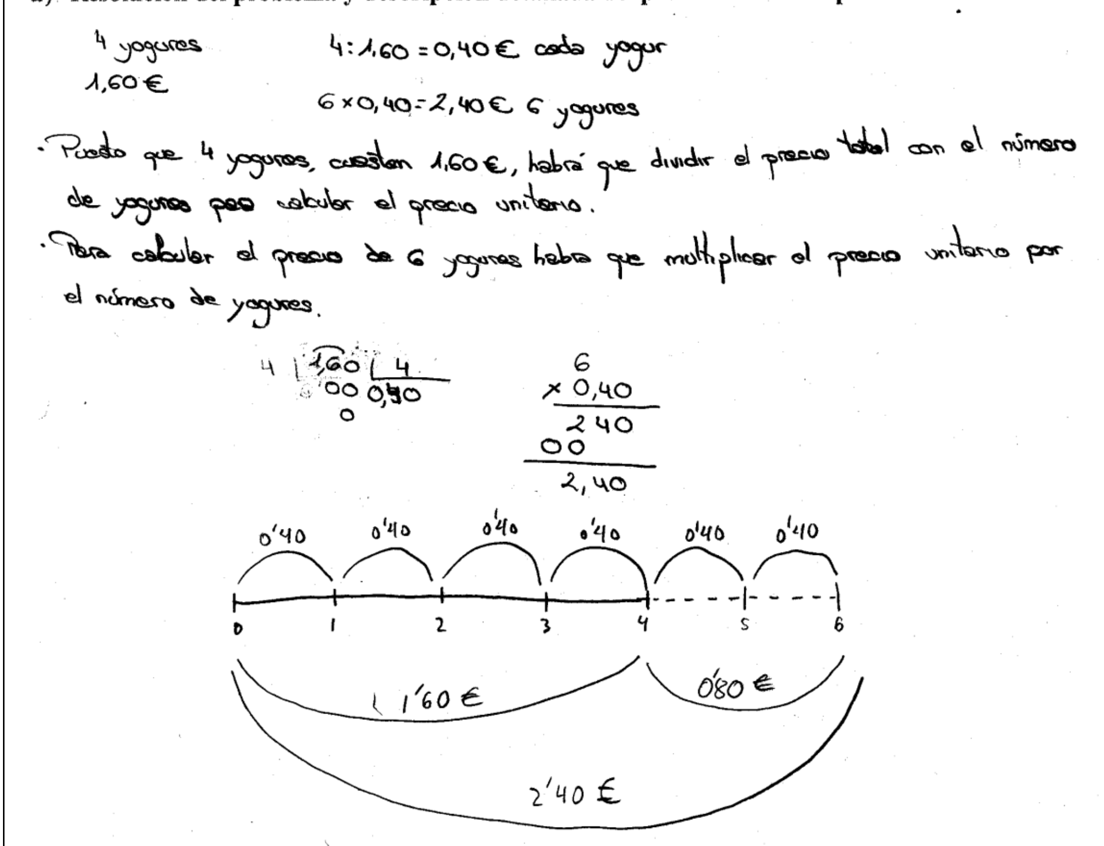
Tabla 6.5: Uso de los Elementos Matemáticos-Didácticos Relevantes (EM-DR1) por parte de los sujetos de la muestra en el problema del yogur

	Elementos matemáticos-didácticos relevantes					
	EM-DR1.1	EM-DR1.2	EM-DR1.3	EM-DR1.4	EM-DR1.5	
					División	Multiplicación
Número de Grupos (N = 31)	2	0	31	31	5	8
(%)	6,5	0	100	100	16,5	25,8

Asimismo, se observa la ausencia de una manifestación explícita del uso de la idea de razón, de cantidades intensivas o unidades compuestas en las resoluciones y explicaciones dadas por los grupos, es decir, el EM-DR1.1 no es utilizado explícitamente por los grupos. Esto coincide con la resolución propuesta por nosotros (Fig. 6.4, antes presentada), puesto que es posible resolver el problema sin hacer uso

[46] Análisis que incluye, además del reconocimiento de objetos y significados activados en la resolución del problema, la identificación de conflictos potenciales y, posiblemente, el reconocimiento de elementos matemático-didácticos relevantes.

expreso de la idea de razón. En este orden de ideas, reconocemos que el uso de frases del tipo: ―0,40 € cada yogur”, ―2,40 € 6 yogures” (Fig. 6.11, G1-27), refieren a un uso, al menos, subyacente de la idea de razón o de unidades compuestas, las cuales, luego, son representadas gráficamente.



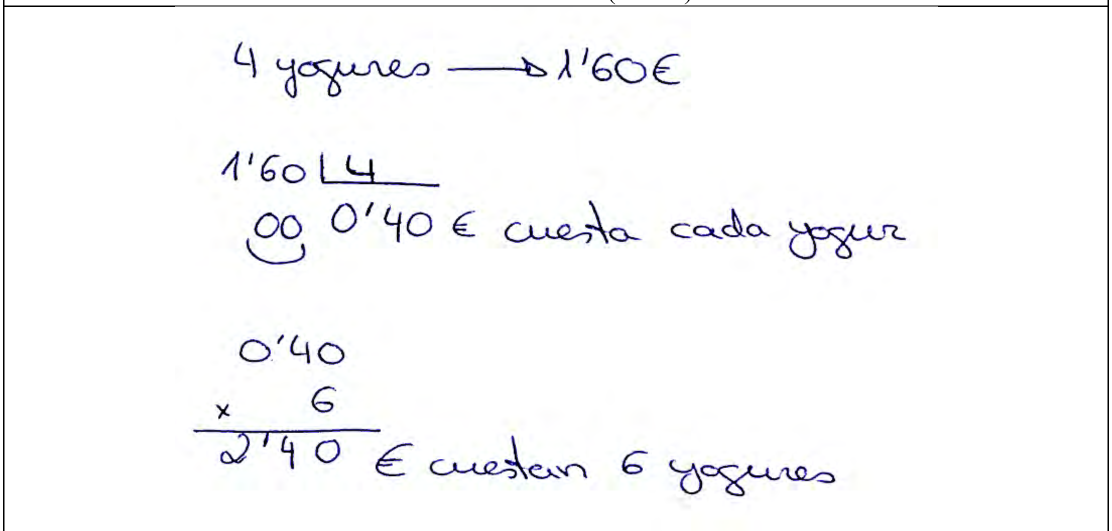
a) Resolución del problema y descripción detallada del procedimiento empleado:

4 yogures 4:1,60 = 0,40 € cada yogur
1,60 €
6 × 0,40 = 2,40 € 6 yogures

· Puesto que 4 yogures, cuestan 1,60 €, habrá que dividir el precio total con el número de yogures para calcular el precio unitario.

· Para calcular el precio de 6 yogures habrá que multiplicar el precio unitario por el número de yogures.

Uso del EM-DR1.1 (G1-27)



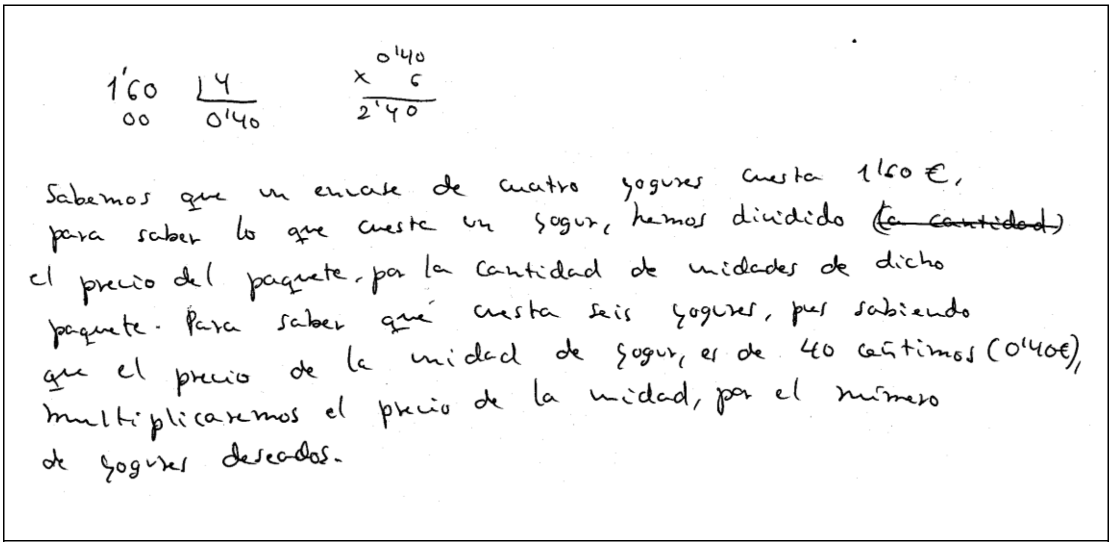
4 yogures → 1'60€

1'60 ⌊4
00 0'40 € cuesta cada yogur

0'40
× 6
2'40 € cuestan 6 yogures

Uso del EM-DR1.3 en la resolución (G1-2)

Fig. 6.11 Ejemplos de uso de los EM-DR1 por parte de los grupos (*continua…*)



1'60 |4
00 0'40

0'40
× 6
2'40

Sabemos que un envase de cuatro yogures cuesta 1'60 €, para saber lo que cuesta un yogur, hemos dividido ~~la cantidad~~ el precio del paquete, por la cantidad de unidades de dicho paquete. Para saber qué cuesta seis yogures, pues sabiendo que el precio de la unidad de yogur, es de 40 céntimos (0'40€), multiplicaremos el precio de la unidad, por el número de yogures deseados.

Uso del EM-DR1.3 en la explicación (G1-7)

Fig. 6.11: Ejemplos de uso de los EM-DR1 por parte de los grupos (*continuación*)

Sin embargo, consideramos apropiada la manifestación explícita de esa idea, puesto que su uso representa un avance en el desarrollo del razonamiento multiplicativo y por ende del razonamiento proporcional de la persona (Bosch, 1994; Kaput y West, 1994; Vergnaud, 1988), lo cual no pudo ser observado en las respuestas dadas por los sujetos.

El proceso de modelización implicado en el procedimiento de resolución, en el cual se suprimen/restituyen las magnitudes que corresponden con los valores numéricos (EM-DR1.3), es utilizado por todos los grupos participantes. En algunos casos la restitución de las magnitudes respectivas se realiza en la resolución (Fig. 6.11, G1-2), o en la explicación (Fig. 6.11, G1-7) pero se observa, en el procedimiento global de la respuesta, la manifestación de ese proceso.

En relación con el uso de diferentes significados dados a los términos multiplicación y división (EM-DR1.4) se observa su uso por parte de la totalidad de los sujetos. Por ejemplo, en las explicaciones del tipo ―otra” (como la presentada en la Fig. 6.10, G1-29, antes vista), se logra observar un uso de al menos dos significados (asignados por los grupos) a los términos de división y multiplicación, a saber; uno referido al algoritmo y otro referido a los conceptos asociados a estos términos. Este hecho será refrendado por los significados asignados a estos términos en los análisis epistémicos realizados por los grupos.

Por otra parte, encontramos que los sujetos que utilizan los patrones de razonamiento para sustentar la explicación de la resolución, hacen uso del EM-DR1.5: 5 grupos hacen uso de patrones de razonamiento relativos a la división y 8 grupos relativos a la multiplicación. Un ejemplo de ese uso los mostramos en la Fig. 6.10 (antes presentada). Estos grupos realizan, en esta acción, un uso didáctico-matemático avanzado de estos significados al hacerlos explícitos en la explicación respectiva.

Debemos referir, en función del uso y/o reconocimiento que hacen los sujetos de estos elementos, que en las respuestas globales (resolución y explicación) dadas por los grupos, se observa sólo el uso de los mismos. No ha sido posible observar una manifestación explícita del reconocimiento de ese uso que se hace de esos elementos. Por ejemplo, en el caso del EM-DR1.1, uno de los grupos (Fig. 6.10, G1-26) hace uso de una representación gráfica para resolver el problema, otro grupo (Fig. 6.11, G1-27) hace uso de este recurso para explicar la resolución, sin embargo, no se observa una manifestación explícita del reconocimiento de ese recurso como necesario para la resolución del problema o su explicación.

Similarmente sucede con los demás elementos (EM-DR1.2… EM-DR1.5), se observa un uso de los mismos, mas no se hace un reconocimiento explícito de ese uso. Se debe comprender que esa actividad de reconocimiento implica una acción de índole meta-cognitiva que amerita una abstracción mayor que la requerida por la explicación de la resolución. Más aún, reconocer los EM-DR es una acción que se realiza sobre la actividad de reconocimiento de objetos y significados, y esta actividad se hace sobre la resolución y/o explicación. En la Fig. 6.12 presentamos un esquema en el que se puede visualizar las relaciones entre el uso/reconocimiento de los EM-DR y las acciones de resolución, explicación y análisis por medio de la GROS.

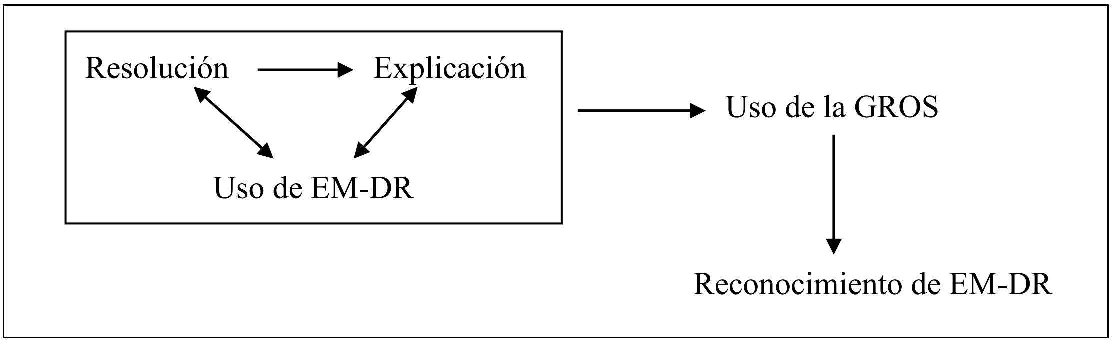


Fig. 6.12: Relaciones de uso y reconocimiento de los EM-DR con las acciones de resolución, explicación y análisis

En este orden de ideas, consideramos que las acciones solicitadas en las consignas (resolución y explicación de la resolución) no son suficientes para motivar tal reconocimiento. En tal sentido, presentamos en el apartado 6.9 lo referido al resultado del análisis epistémico realizado por la muestra de futuros profesores, donde observaremos manifestaciones relativas a ese reconocimiento.

A continuación presentamos el análisis epistémico relativo al segundo trabajo práctico y algunos resultados preliminares de su realización.

6.7. Análisis epistémico del Instrumento 2.3-E

Continuando con la implementación de la intervención, se planificó el segundo trabajo práctico, es decir, la aplicación del Instrumento 2.3-E, que comprende el problema de la limonada. El procedimiento que se sigue para el estudio de este problema es similar al realizado para el problema del yogur, el cual comprende el análisis epistémico/cognitivo que involucra el reconocimiento de conflictos potenciales y los elementos matemáticos-didácticos relevantes.

6.7.1. Una resolución del problema explicitando todos los pasos

Hemos realizado una resolución del problema en la que hacemos uso de la estrategia de la reducción a la unidad, lo cual, en términos de lo expuesto en el sub-apartado 1.7.1, del capítulo 1, de acuerdo con los trabajos de Karplus Noeltin (1980a; 1980b) y Karplus, Pulos y Stage (1983a; 1983b), coincide con el uso de la estrategia ―dentro” en problemas de mezcla, en los que se comparan los cocientes de las razones involucradas, que en este caso resulta ser el grado de acidez de la mezcla.

El uso de esta estrategia ha sido reconocido en la literatura especializada (Bosch, 1994; Freudenthal, 1983, Kaput y West, 1994; Karplus, Pulos y Stage, 1983b) como una de las más comúnmente utilizadas. En la Fig. 6.13 mostramos esa resolución. De acuerdo con Lamon (2007) el uso de esta estrategia permite obtener un índice con el cual es posible realizar una comparación entre las razones para determinar la relación (orden) existente entre ellas.

Se puede ver en la resolución propuesta en la Fig. 6.13 que se ha tratado de explicitar todos los pasos involucrados. Asimismo, se ha propuesto la posibilidad de resolver el problema invirtiendo los términos de las razones inicialmente consideradas, lo cual lleva al cálculo del cociente que refiere al grado de dulzura de la mezcla.

Al igual que la resolución propuesta para el problema del yogur, en esta resolución no hemos hecho uso de representaciones gráficas. Sin embargo, estaremos atentos a su uso por parte de los sujetos participantes. Hemos omitido en la transcripción de la resolución los cálculos realizados, relativos a la fracción equivalente y el cociente. El comentario “suponiendo que los productos sean del mismo tipo” trata de proveer de mayor pertinencia al uso modelo lineal-proporcional en la resolución del problema.

Problema:

Juan prepara una limonada utilizando 3 cucharadas de azúcar y 12 cucharadas de concentrado de jugo de limón. Mientras María utiliza 5 cucharadas de azúcar y 20 cucharadas de concentrado de jugo de limón. ¿Cuál de las dos limonadas es más dulce, la de Juan o la de María, o tienen el mismo gusto?

a) Resolución del problema explicitando todos los pasos:

En el caso de Juan, la razón entre el número de cucharadas de limón y el número de cucharadas de azúcar es, 12 c. de limón por cada 3 c. de azúcar, o sea, 4 c. de limón por cada c. de azúcar. Esta razón unitaria, 4c. limón/1 c. azúcar, es una medida del “grado de acidez” de la limonada preparada por Juan.
En el caso de María, por cada 20 c. de limón usa 5 c. de azúcar; luego la razón unitaria entre ambas cantidades es también de 4 c. de limón por cada cucharada de azúcar.
Por tanto, ambas razones son iguales, luego tienen el mismo “grado de acidez” (tendrán el mismo gusto, suponiendo que los productos sean del mismo tipo).

Si la comparación multiplicativa se hace entre las cucharadas de azúcar respecto de las de concentrado de limón la razón entre las cantidades correspondientes será de 1 c. de azúcar por cada 4 c. de limón, razón que se puede considerar como la medida del “grado de dulzura” de la limonada. El valor numérico de la medida del “grado de dulzura” (1/4, o sea, 25%) es el mismo en ambas limonadas.

Para el cálculo de la razón unitaria se ha procedido usando dos métodos: simplificación de la razón-fracción o cálculo de la fracción equivalente, y cálculo del cociente.

Fig. 6.13: Enunciado, resolución y explicitación del problema de la limonada

En el sub-apartado 6.3.2 hicimos una descripción del Instrumento 2.3-E, en el que observamos que además de la resolución del problema, solicitada en el inciso (a), en el inciso (b) se solicita poner en práctica la GROS, es decir, identificar los objetos y significados puestos en juego en la resolución del problema. A continuación proveemos de un ejemplo de uso de esta herramienta por parte del profesor formador y el grupo de investigadores noveles.

6.7.2. Identificación de objetos y significados en el problema de la limonada

Como sabemos el análisis epistémico/cognitivo mediante la aplicación de la GROS involucra el reconocimiento de los objetos y significados activados en el proceso de resolución de un problema matemático. En las figuras que van desde la Fig. 6.14 hasta la Fig. 6.18 presentamos un ejemplo de aplicación de la GROS a la resolución propuesta en la Fig. 6.13. Esta aplicación persigue los mismos fines referidos en la aplicación de la GROS en el problema del yogur (sub-apartado 6.5.2).

Tipos de objetos	**Significados (relación de referencia o de uso)**
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS (Términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas)	
3 cucharadas azúcar 12 cucharadas limón 5 cucharadas azúcar 20 cucharadas limón	Cantidades de las magnitudes volumen de limón y de azúcar, medidas de las cantidades tomando una cucharada como unidad
¿Qué limonada es más dulce?	Razón unitaria de cantidades de volumen de limón y de azúcar
“grado de acidez/dulzura”	Comparación de razones, magnitudes intensivas (acidez o dulzura)
1/4 c. azúcar/ 1 c. limón	Medida del grado de dulzura
4 c. limón/ 1 c. azúcar	Medida del grado de acidez
¼, 25%	Valor numérico (racional) de las medidas del grado de dulzura
Conflictos potenciales: - Interpretar la cucharada como unidad imprecisa de medición de volumen. - Interpretar cantidades extensivas como términos de una razón o cantidad intensiva. - Interpretar las mezclas (de Juan y María) como resultados de procesos diferentes y por tanto no comparables.	

Fig. 6.14: Reconocimiento de elementos lingüísticos

En la Fig. 6.14 presentamos el reconocimiento de los elementos lingüísticos en las que básicamente nos hemos centrado en identificar las expresiones que juegan un papel relevante en el enunciado y la resolución.

En los conflictos potenciales hemos identificado dos posibles interpretaciones dadas a los términos “cucharada” y a “mezclas”. Se debe notar que cualquiera de estas interpretaciones conduce a que el problema no se pueda resolver por medio de métodos lineales. Este aspecto se manifiesta debido a que la situación problema pertenece al primero de los escenarios descritos en el sub-apartado 2.2.5, capítulo 2, en el que el modelo lineal se aplica sobre la base de supuestos aceptados convencionalmente.

En la Fig. 6.15 presentamos lo relativo al reconocimiento de los conceptos. Uno de los más relevantes refiere al uso de cantidades intensivas, puesto que en problemas de mezclas adquiere un matiz específico, en el que se ―funden” las cantidades de magnitud iniciales para dar paso a un nuevo tipo de magnitud. Ese proceso en el que se funden las cantidades implica cierta complejidad, puesto que involucra la ―conversión de magnitudes” que han sido discretizadas, para dar paso a una nueva magnitud de índole continua. Asociado a este concepto entramos los demás conceptos reconocidos en el análisis, especialmente el de razón, que fomenta el cálculo de la razón unitaria, lo cual es necesario para realizar la comparación correspondiente, siendo requerido, posiblemente, el uso de una fracción o de un cociente. Estos aspectos han conducido a identificar los conflictos potenciales asociados específicamente al uso de esos conceptos en la resolución del problema respectivo.

Tipos de objetos	**Significados (relación de referencia o de uso)**
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)	
Magnitudes (extensivas)	Magnitudes continuas (volumen) discretizadas (número de cucharadas)
Magnitudes (intensivas)	Grado de dulzura o acidez de la limonada
Cantidades	Valores numéricos de las medidas de magnitudes: Número natural, racional. Indican el número de cucharadas, o la razón entre cantidades.
Medidas	Cantidades expresadas mediante la elección de una unidad de medida y el número de unidades correspondientes
Razón; razón unitaria	Relación multiplicativa entre cantidades de magnitud (número de cucharadas de limón *por cada* cucharada de azúcar, …)
Fracción/ cociente	Cociente indicado entre dos números naturales que refiere a una razón o cantidad intensiva.
Conflictos potenciales: - La magnitud intensiva (grado de dulzura o acidez) es medida por un cociente indicado, una fracción o una razón unitaria, cuyas magnitudes extensivas (azúcar, concentrado de limón) forman parte de una razón. - La razón unitaria como objeto que hace factible la comparación requerida. - Cociente indicado como valor numérico que mide la cantidad de mezcla.	

Fig. 6.15: Reconocimiento de conceptos

En la Fig. 6.16 presentamos el análisis referido a los procedimientos.

Uno de los aspectos fundamentales que se manifiesta en el reconocimiento de los procedimientos está referido a interpretar los resultados que se obtienen a partir de la división que se realiza o dar sentido a las fracciones que se comparan o que son equivalentes.

Es claro que el proceso de modelización, identificado como un procedimiento, permite interpretar y dar sentido al algoritmo aplicado y a las comparaciones requeridas. En relación con estos aspectos, hemos identificado los dos primeros conflictos potenciales. El tercer conflicto potencial identificado refiere a un posible desconocimiento de los procedimientos que permiten resolver el problema, o considerar que los resultados que se obtienen de esos procedimientos no son suficientes para dar cuenta sobre el gusto que adquieren ambas limonadas. En cualquier caso, ambas manifestaciones obstaculizan la resolución del problema.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
Cálculo de fracciones equivalentes o división de dos números naturales	Conducen a obtener la razón unitaria
Comparación de fracciones/cocientes	Dar respuesta al problema
Modelización	Permite suprimir y restituir las magnitudes respectivas en la aplicación de los cálculos/algoritmos correspondientes para obtener las cantidades de magnitud solicitadas.
Conflictos potenciales: - Determinación de la equivalencia entre fracciones. - Interpretar los resultados de la aplicación de un algoritmo según las cantidades de magnitud involucradas - Para saber el grado de dulzura o acidez será necesario hacer las mezclas y degustarlas.	

Fig. 6.16: Reconocimiento de procedimientos

En la Fig. 6.17 presentamos los resultados del análisis respecto a las propiedades reconocidas en la resolución del problema.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
PROPIEDADES (Enunciados para los cuales se requiere una justificación o prueba)	
P_1: Las razones(mezclas) iniciales no son directamente comparables	Justifica la realización de procedimientos que permitan hacer la comparación
P_2: La covariación entre las mezclas es constante	Permite comparar mezclas “diferentes”
P_3: Las mezclas tienen el mismo sabor	Es la respuesta al problema
Conflictos potenciales: - Mezclas “diferentes” son comparables. - No encontrar P_3.	

Fig. 6.17: Reconocimiento de propiedades

Con la propiedad P_2, hemos querido referir a la relación de variación entre las mezclas que se comparan en función de la variación de cada mezcla. Esta propiedad permite interpretar los resultados de las fracciones o los cocientes que se obtienen en el procedimiento. En este orden de ideas el procedimiento general de resolución sigue una secuencia del tipo $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3$. Esta secuencia representa la proposición general de resolución del problema.

El primer conflicto potencial identificado puede manifestarse por medio de interpretaciones dadas a las razones (mezclas) iniciales desde dos perspectivas, una numérica y la otra física, desde las cuales las mezclas son consideradas como diferentes y por ende no se pueden comparar. Esta dificultad puede conducir a la manifestación del segundo conflicto potencial. En general, este segundo conflicto puede ser consecuencia de un uso inadecuado de los objetos/significados precedentes.

En la Fig. 6.18 presentamos el reconocimiento de los argumentos, en los cuales se identifica, como aspecto fundamental, lo relativo a las interpretaciones de los resultados, obtenidos por medio de los procedimientos de cálculo del cociente o de la determinación de la fracción equivalente, puestos en juego para determinar las razones unitarias respectivas, Esas interpretaciones, realizadas sobre esas razones, permiten hacer la comparación que conduce a la conclusión de que las limonadas tienen el mismo gusto.

Tipos de objetos	**Significados (relación de referencia o de uso)**
ARGUMENTOS (Justificaciones o pruebas de las propiedades utilizadas)	
A_1: Las razones iniciales (3c. de azúcar/12c. de limón y 5c. de azúcar/20c. de limón) dan lugar a limonadas para las cuales no es posible afirmar directamente si tienen el mismo gusto o no, excepto, posiblemente, por degustación. A_2: Los valores numéricos obtenidos (razones unitarias expresadas por medio de fracciones o cocientes), refieren a cantidades de magnitud intensivas, que muestran que ambas mezclas se preparan agregando razones unitarias iguales de c.de azúcar/c. de limón. A_3: Las razones entre el número de cucharadas de limón y el de azúcar es el mismo en ambos preparados (los grados de acidez y dulzura, medidos por las razones correspondientes, son los mismos en las dos limonadas)	
Conflictos potenciales: - Razones unitarias iguales que no explican la acidez o dulzura de las limonadas	

Fig. 6.18: Reconocimiento de argumentos

Estos reconocimientos han conducido a la identificación del conflicto potencial, asociado a la interpretación de las razones unitarias que se obtienen, como una posible dificultad en la resolución del problema.

6.7.3. Identificación de conflictos potenciales y el conocimiento didáctico-matemático en el problema de la limonada

Como referimos en el sub-apartado 6.5.3 la identificación de los conflictos potenciales, por medio de la tarea de análisis epistémico, nos aproxima al conocimiento de los posibles errores, dificultades y obstáculos que hipotéticamente pueden afrontar los sujetos en la resolución del problema. Asimismo, en el apartado 2.8, capítulo 2, hemos sintetizado, de acuerdo con la literatura especializada consultada, algunos elementos caracterizadores de la noción de proporcionalidad.

Una primera convalidación de la tarea de identificación de los conflictos potenciales, en relación con la producción del conocimiento didáctico-matemático, consiste en verificar si los conflictos identificados refieren a esos elementos caracterizadores. Más aún, la existencia de otros elementos caracterizadores, no referidos en esa síntesis, significan un desarrollo de esa forma de conocimiento. En este orden de ideas, En la Tabla 6.6 presentamos las relaciones entre los conflictos potenciales identificados y sus relaciones con algunos de los elementos caracterizadores, referidos en apartado 2.8, del capítulo 2, y otros que emergen a partir del análisis epistémico y la identificación de esos conflictos.

Tabla 6.6: Relación entre los conflictos potenciales identificados y elementos caracterizadores del razonamiento proporcional

Objetos	Conflictos potenciales	Elemento caracterizador
Elementos lingüísticos	- Interpretar la cucharada… - Interpretar cantidades… - Interpretar las mezclas….	Influencia del contexto Cantidades intensivas-extensivas Sentido de razón
Conceptos	- La magnitud intensiva … - La razón unitaria … - Cociente indicado …	Cantidades intensivas-extensivas Sentido de razón Magnitudes intensivas y sus medidas
Procedimientos	- Determinación de equivalencia… - Interpretar los resultados… - Para saber el grado de dulzura…	Equivalencia – no-equivalencia Modelización: número-cualidad[47] Sentido de razón
Propiedades	- Mezclas diferentes son com… - No encontrar P1	Sentido de covariación Razón-proporción-comparación
Argumentos	- Razones unitarias iguales …	Razón-proporción-comparación

[47] Refiere a considerar sólo el valor numérico de la cantidad intensiva, dejando de lado las magnitudes, para realizar cálculos requeridos, y luego restituir al número obtenido la cualidad correspondiente.

A partir de las relaciones identificadas en la Tabla 6.6, se deduce que buena parte de los conflictos potenciales se encuentran relacionados con algunos de los elementos caracterizadores señalados en el apartado 2.8. Sólo dos de los conflictos potenciales refieren a elementos caracterizadores que no fueron identificados en ese apartado, a saber, los referidos a: “Modelización: número-cualidad” y “Razón-proporción-comparación”.

No obstante, el primero de estos elementos caracterizadores refiere a un procedimiento común, involucrado en la resolución de muchos tipos de problemas; proporcionales y no proporcionales, referidos a situaciones-problemas de la realidad, que contemplan la aplicación de un algoritmo a cantidades de magnitud. En particular, su puesta en juego es requerida para la resolución del problema en cuestión.

El segundo elemento refiere a una descripción general del proceso involucrado en la resolución del problema, el cual es una forma de referir a la manifestación de la secuencia $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3$, cuya puesta en juego es requerida para resolver el problema.

De manera que la interpretación de estos dos elementos como caracterizadores refiere, más bien, a que estos son requeridos para la resolución del problema, por tanto una interpretación más justa consiste en concebirlos como caracterizadores de la resolución del problema. No obstante, consideramos que el reconocimiento de estos elementos caracterizadores de la resolución se encuentra en relación con el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático necesario para la enseñanza de la matemática. Específicamente, la identificación de la secuencia $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3$, nos provee de una perspectiva que sistematiza la resolución del problema, nos informa sobre lo que hemos llamado el “funcionamiento de la resolución del problema”, lo cual, de acuerdo con los referido en el apartado 2.5, del capítulo 2, constituye una de las características del *conocimiento especializado del contenido*.

Sobre la base de lo expuesto consideramos de interés didáctico y matemático la tarea de análisis epistémico/cognitivo, es decir, la tarea reconocimiento de objetos, significados y conflictos potenciales en torno a una situación problema específica, puesto que: (a) coloca en una perspectiva sistémica de la práctica matemática que tiene lugar, (b) provee de una configuración que permite una visión más profunda y general del conocimiento matemático que se moviliza, y (c) potencia la identificación de posibles conflictos de aprendizaje. Estos alcances de esa actividad de análisis, conduce a considerarla como adecuada para el fomento y desarrollo del “conocimiento especializado del contenido” y una aproximación al “conocimiento del contenido y de los estudiantes” referido por Ball y colaboradores (Hill, Ball y Schilling, 2008).

6.7.4. Identificación de elementos matemáticos-didácticos relevantes en el problema de la limonada

En el sub-apartado 6.5.4 referimos sobre lo que hemos denominado “elementos matemáticos-didácticos relevantes (EM-DR). Siguiendo las ideas expuestas en los sub-apartados precedentes y haciendo uso del significado que propusimos a la identificación de EM-DR, hemos reconocido como aspectos de síntesis, de la tarea de análisis realizada al problema de la limonada, los siguientes elementos:

- EM-DR2.1: Representaciones y simbolizaciones asociadas a la idea de razón, al uso de fracciones equivalentes y a la operación de división, que pueden servir de sustento al desarrollo y uso de los conceptos asociados con tales representaciones.

- EM-DR2.2: Cantidades extensivas-intensivas, consiste en interpretar las cantidades de magnitud extensivas como términos de una razón, que constituyen una nueva cantidad intensiva (razón) que permitirá, por medio de algunos cálculos, obtener expresiones (razones unitarias) de esas cantidades intensivas, que indican el grado de acidez/dulzura de las mezclas preparadas. El uso de estas cantidades está relacionado con la puesta en juego de relaciones escalares y funcionales, referida como uno de los elementos caracterizadores del razonamiento proporcional, así como también con el desarrollo del sentido de razón.

- EM-DR2.3: Sentido de razón-proporción, que permite interpretar las cantidades intensivas (razones) iniciales y establecer la relación con las cantidades intensivas (razones unitarias) que resultan de la aplicación de cálculos o algoritmos. En términos más generales refiere a la relación entre estados de razón inicial y estados de razón final implicados en la resolución del problema.

- EM-DR2.4: Modelización, que consiste en suprimir y restituir las magnitudes respectivas en la aplicación de los cálculos o algoritmos correspondientes, para obtener las cantidades de magnitud que serán comparadas. Este procedimiento permite interpretar los resultados de la realización de un cálculo o aplicación de un algoritmo según las cantidades de magnitud involucradas.

- EM-DR2.5: Sentido de covariación, que refiere a interpretar la variación entre las mezclas que se deben comparar, en función de la variación de cada mezcla. Este procedimiento permite interpretar los resultados de las fracciones o los cocientes que se obtienen en los cálculos o algoritmos aplicados.

- EM-DR2.6: Comparación de razones, que permite relacionar las razones dadas inicialmente y también las razones unitarias obtenidas por medio de la realización de cálculos o aplicación de algoritmos, para establecer la igualdad del gusto de las mezclas preparadas.

Es pertinente referir que la tarea de identificación de los EM-DR descritos, corresponde, como expusimos en el sub-apartado 6.5.4, con una tarea de desarrollo del conocimiento didáctico-matemático necesario para la enseñanza de la matemática.

En términos de la interpretación que hacemos de la propuesta de Ball y colaboradores, consideramos el reconocimiento de los EM-DR como una actividad asociada al desarrollo del *conocimiento especializado del contenido* y la identificación de conflictos potenciales como una aproximación al *conocimiento del contenido y de los estudiantes*. (Ball, Hill y Bass 2005; Hill, Ball y Schilling, 2008).

6.8. Análisis cognitivo del problema de la limonada

Como una segunda parte de la implementación de la intervención llevada a efecto, una vez realizado el análisis epistémico/cognitivo[48] previo y la planificación respectiva, se procedió a aplicar el Instrumento 2.3-E. Uno de los datos recogidos por medio de esa aplicación es las respuestas que proveen los futuros profesores al problema de la limonada. En este orden de ideas, para el análisis de esos datos, realizamos lo que hemos denominado el análisis cognitivo, el cual, al igual que en sus usos anteriores, refiere básicamente al análisis de las respuestas dadas por los grupos al problema en cuestión.

[48] Como hemos referido antes, este análisis incluye, además del reconocimiento de objetos y significados activados en la resolución del problema, la identificación de conflictos potenciales y, en nuestro caso, el reconocimiento de elementos matemático-didácticos relevantes.

Para la presentación de este análisis expondremos primero un resumen de los tipos de respuestas identificados a partir del estudio de las respuestas dadas por los sujetos y luego confrontaremos esos tipos de respuestas con los aspectos reconocidos en el análisis epistémico/cognitivo previo.

6.8.1. Tipos de respuestas

Una primera revisión de las respuestas dadas por los 13 grupos de futuros profesores permite concluir que todos obtienen una respuesta correcta para el problema. No obstante, el análisis cognitivo se concibe como una herramienta cuyo uso permite ir más allá del simple estudio de la dualidad de respuestas correctas versus respuestas incorrectas. En la Tabla 6.7 presentamos un resumen de los tipos de respuestas identificados por medio del estudio de las resoluciones dadas por los grupos al problema.

Tabla 6.7: Tipos de respuestas identificadas en el análisis cognitivo de las resoluciones dadas por los grupos al problema de la limonada

<table>
<tr><th colspan="2">Categoría</th><th>Sub-categoría</th><th>Frecuencia</th><th>Porcentaje</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Uso de la reducción a la unidad</td><td rowspan="2">Uso de la regla de tres</td><td>Uso de cantidades intensivas</td><td>2</td><td>15,4</td></tr>
<tr><td>No uso de recursos gráficos</td><td>2</td><td>15,4</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Uso sólo de la división</td><td>Uso de cantidades intensivas</td><td>6</td><td>46,2</td></tr>
<tr><td>No uso de cantidades intensivas</td><td>4</td><td>30,8</td></tr>
<tr><td>Uso de recursos gráficos</td><td>3</td><td>23,1</td></tr>
<tr><td>No uso de recursos gráficos</td><td>7</td><td>53,9</td></tr>
<tr><td colspan="3">Total Uso de la reducción a la unidad</td><td>12</td><td>92,3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">No-uso de la reducción a la unidad</td><td rowspan="2">Fracciones equivalentes</td><td>Uso de cantidades intensivas</td><td>1</td><td>7,7</td></tr>
<tr><td>No uso de recursos gráficos</td><td>1</td><td>7,7</td></tr>
<tr><td colspan="3">Total No-uso de la reducción a la unidad</td><td>1</td><td>7,7</td></tr>
<tr><td colspan="3">Total</td><td>13</td><td>100</td></tr>
</table>

Al referir a características del análisis cognitivo, debemos reconocer que la realización del análisis epistémico/cognitivo previo tiene incidencia en la tarea de análisis de las respuestas dadas por los sujetos. Es decir, los tipos de respuestas, que hemos clasificado en categorías y sub-categorías presentadas en la Tabla 6.7, seguramente tienen alguna influencia de ese análisis previo. No obstante, consideramos que la interpretación que se realiza sobre las respuestas es apropiada, puesto que informa sobre las manifestaciones de las resoluciones de acuerdo con los tipos de resoluciones referidas en el apartado 1.7, del capítulo 1.

En este orden de ideas, hemos identificado como categoría dominante de respuesta “la reducción a la unidad” (12/13 grupos; 92,3%). Al observar los grupos que conjugan el uso de la reducción a la unidad con el uso de cantidades intensivas, es decir, los grupos que reconocen la razón unitaria “4 c. de limón/1 c. de azúcar”, la cual ha sido identificada en el análisis epistémico previo como el objeto conceptual “Razón: razón unitaria” observamos que un considerable porcentaje (8/13 grupos; 61,5%) hacen este uso, lo que nos conduce a reconocer que el 61,5% de los grupos hacen un uso consciente de ese concepto. En la Fig. 6.19 presentamos un ejemplo de este tipo de respuesta (G2-10)[49].

El grupo (G2-9), que no hace uso de la reducción a la unidad, utiliza una igualación de denominadores, por medio del cálculo del mínimo común múltiplo de ambos denominadores. Este grupo realiza este procedimiento con el fin de obtener fracciones equivalentes que permitan hacer la comparación solicitada. En la Fig. 6.20 presentamos la respuesta dada por este grupo.

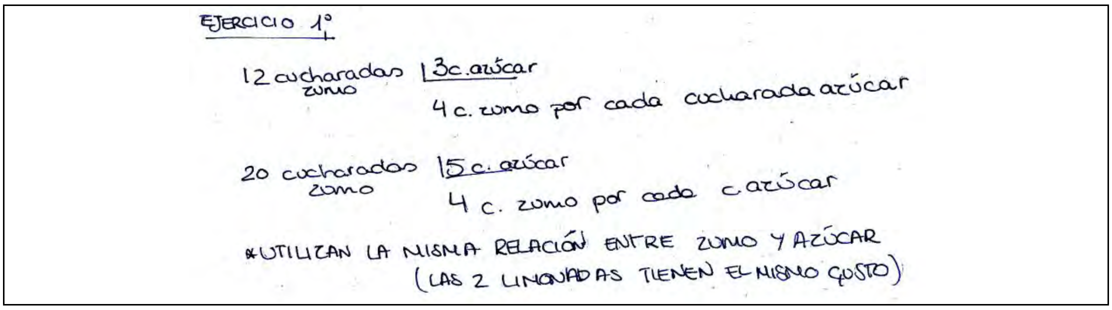
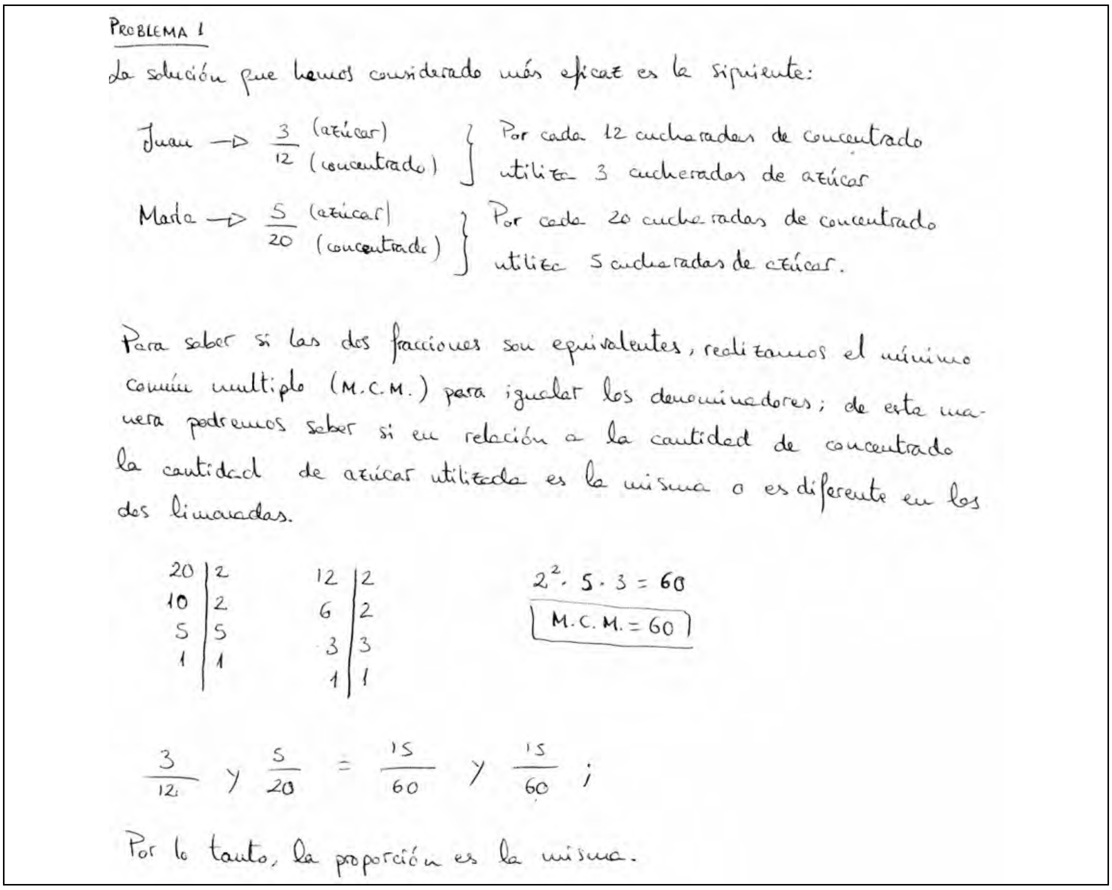

EJERCICIO 1º
12 cucharadas zumo | 3c.azúcar
4 c. zumo por cada cucharada azúcar
20 cucharadas zumo | 5 c. azúcar
4 c. zumo por cada c.azúcar
*UTILIZAN LA MISMA RELACIÓN ENTRE ZUMO Y AZÚCAR
(LAS 2 LIMONADAS TIENEN EL MISMO GUSTO)

Fig. 6.19: Ejemplo de uso de la reducción a la unidad y razón unitaria (G2-10)

Se observa en la resolución que realiza este grupo el reconocimiento de las razones iniciales que caracterizan las limonadas de Juan y de María, y luego realizan el cálculo de las fracciones equivalentes. Aún cuando este grupo no hace uso de cantidades intensivas para hacer la comparación demandada, observamos un uso apropiado de los

[49] Utilizaremos la notación (G2-n), donde n es un números natural, n = 1, 2,… 13, para referir a los grupos de futuros profesores que participaron en la aplicación del Instrumento 2.3-E.

conceptos y procedimientos matemáticos requeridos para obtener la solución del problema.



PROBLEMA 1

La solución que hemos considerado más eficaz es la siguiente:

Juan → $\frac{3}{12}$ (azúcar) / (concentrado) } Por cada 12 cucharadas de concentrado utiliza 3 cucharadas de azúcar

María → $\frac{5}{20}$ (azúcar) / (concentrado) } Por cada 20 cucharadas de concentrado utiliza 5 cucharadas de azúcar.

Para saber si las dos fracciones son equivalentes, realizamos el mínimo común múltiplo (M.C.M.) para igualar los denominadores; de esta manera podremos saber si en relación a la cantidad de concentrado la cantidad de azúcar utilizada es la misma o es diferente en las dos limonadas.

20	2
10	2
5	5
1	1

12	2
6	2
3	3
1	1

$2^2 \cdot 5 \cdot 3 = 60$

$\boxed{M.C.M. = 60}$

$\frac{3}{12}$ y $\frac{5}{20}$ = $\frac{15}{60}$ y $\frac{15}{60}$;

Por lo tanto, la proporción es la misma.

Fig. 6.20: Ejemplo de cálculo de fracciones equivalentes, sin el uso de la razón unitaria (G2-9).

Dentro de la categoría reducción a la unida hemos identificado la manifestación de dos categorías: ―uso de la regla de tres” y ―uso sólo de la división”. A la vez, dentro de estas categorías, se ha reconocido la puesta en juego de cuatro sub-categorías que caracterizan las respuestas respectivas en función de: Uso/no uso de cantidades intensivas; Uso/no uso de representaciones gráficas.

En este sentido, 4/13 grupos (30,8%), que hacen uso sólo de la división, no muestran un uso explícito de cantidades intensivas, asociando a los cocientes obtenidos una frase del tipo: ―Como obtenemos el mismo resultado, significa que los gustos de la limonada es igual”. En la Fig. 6.21 presentamos la respuesta del grupo (G2-2) que emplea esta frase. En este tipo de manifestaciones deja sin lugar la obtención de la razón unitaria para ambas mezclas para realizar la comparación de manera más pertinente.

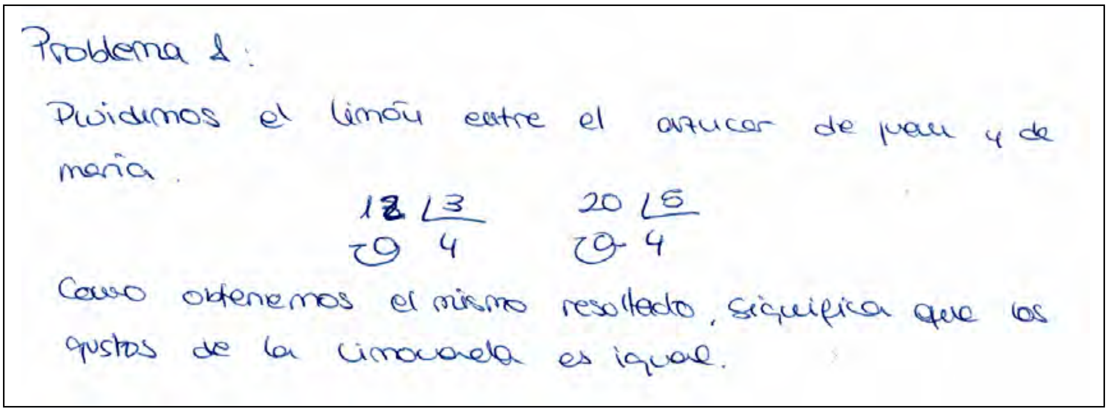


Fig. 6.21: Ejemplo de respuesta en la que no se evidencia el uso explícito de cantidades intensivas (G2-2).

En relación con el uso de recursos gráficos, observamos que sólo 3/13 grupos (23,1%) hacen uso representaciones gráficas para resolver el problema, en la Fig. 6.22, presentamos dos ejemplos de esas representaciones.

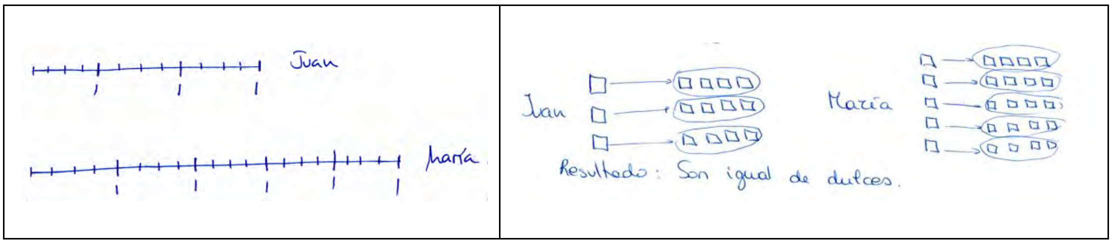


Fig. 6.22: Ejemplos de uso de representaciones gráficas en la resolución del problema (G2-3 y G2-7, respectivamente)

Las representaciones utilizadas dan cuenta del uso de relaciones multiplicativas en las que se observa el reconocimiento de la razón unitaria 4c. de limón/1c. de azúcar. El hecho que sólo 3 grupos hagan uso de este tipo de representaciones nos conduce a concluir que pocos grupos hacen uso de representaciones gráficas asociadas a la resolución del problema de las limonadas.

6.8.2. El análisis epistémico/cognitivo versus el análisis cognitivo en el problema de la limonada

A modo de conclusión de los análisis epistémico/cognitivo previo y el análisis cognitivo realizado sobre las resoluciones del problema de la limonada, dadas por los sujetos, presentamos a continuación posibles congruencias entre el uso/reconocimiento de elementos matemático-didácticos relevantes (EM-DR2) y las acciones realizadas por los futuros profesores al dar respuestas al problema de la limonada. Al igual que el trabajo realizado en el sub-apartado 6.6.2, consideramos que las posibles aproximaciones entre estos elementos y las acciones de los futuros profesores al resolver un problema matemático, constituyen una forma de valoración de las actividades de análisis realizadas.

De acuerdo con las consideraciones expuestas al final del sub-apartado 6.6.2 (Fig. 6.12) las acciones realizadas en torno a la resolución de un problema no son suficientes para observar el posible reconocimiento que posiblemente pueden hacer los sujetos de los EM-DR. En este sentido, se considera necesaria la realización de una actividad de análisis de la resolución del problema para posibilitar el reconocimiento de esos elementos.

En ese orden de ideas, nos limitaremos a identificar el uso de los EM-DR2 que hacen los futuros profesores al dar respuesta al inciso (a) del Instrumento 2.3-E, es decir, en la resolución del problema de la limonada. Lo relativo al reconocimiento de esos elementos se realizará sobre la base del estudio de los análisis epistémicos, realizados por los futuros profesores, sobre la resolución de ese problema. Los resultados de tal estudio los presentaremos en el sub-apartado 6.9.4.

En la Tabla 6.8 hemos resumido las frecuencias de uso de los EM-DR2, descritos en el sub-apartado 6.7.4, por parte de los grupos de la muestra de futuros profesores al resolver el problema de la limonada y al explicar su resolución.

Tabla 6.8: Uso de los Elementos Matemáticos-Didácticos Relevantes (EM-DR), por parte de los sujetos de la muestra en el problema de la limonada

Número de Grupos (N = 13)	Elementos matemáticos-didácticos relevantes					
	EM-DR2.1	EM-DR2.2	EM-DR2.3	EM-DR2.4	EM-DR2.5	EM-DR2.6
	3	8	9	8	4[a]	8
(%)	23,1	61,5	69,2	61,5	30,8	61,5

[a] A lo sumo 4 grupos, probablemente, hacen uso de este EM-DR.

En relación con el uso de EM-DR2.1, de acuerdo con el análisis cognitivo realizado, sólo 3/13 grupos (23,1%) hacen uso de representaciones gráficas que sirven de sustento al desarrollo del concepto de razón y por medio del cual explicitan las relaciones multiplicativas entre las cantidades de magnitud involucradas en el problema (Fig. 6.22, presentada anteriormente). Esto indica que pocos grupos hacen uso de este elemento.

Respecto al uso de EM-DR2.2 hemos observado, en el análisis cognitivo realizado, que 8/13 grupos (61,5%) hacen uso de cantidades extensivas y reconocen con ellas el grado de acidez o dulzura de cada limonada. Esto nos indica que un considerable número de grupos hacen uso del EM-DR2.2.

Respecto al EM-DR2.3, hemos observado, de acuerdo con el análisis cognitivo, que uno de los grupos (Fig. 6.20 (G2-9), antes presentada), que emplea un procedimiento de cálculo de fracciones equivalentes, establece una relación entre las razones iniciales y finales, no obstante esa relación queda “atrapada” en lo numérico, puesto que los resultados del cálculo realizado no son interpretados en función de las magnitudes involucradas. Además, las razones finales, aún cuando resultan estar representadas por la misma fracción, no son razones unitarias. En este sentido, consideramos que este grupo ha realizado un uso parcial del EM-DR2.3.

Por otra parte, los grupos que hacen uso del EM-DR2.2 (8/13 grupos; 61,5%), aún cuando los procedimientos realizados (regla de tres o sólo división, correspondientes con la estrategia “dentro” en los términos propuestos por Karplus, Pulos y Stage (1983a; 1983b) para problemas de mezcla) parecen aislar las razones iniciales de las razones finales, la conexión entre estos estados de la razón se restituye por medio del uso de las cantidades intensivas. Interpretamos este hecho como una puesta en juego del razonamiento proporcional, en el que la relación entre dos razones se manifiesta de manera no explícita, sustentada en las relaciones multiplicativas entre las cantidades de magnitud y las magnitudes involucradas. En estos términos, reconocemos que estos 8/13 grupos hacen uso del EM-DR2.3. De manera que 9/13 grupos (69,2%) hacen uso del EM-DR2.3, lo que indica que un número considerable de grupos hacen uso de ese elemento.

En relación con el EM-DR2.4, relativo al uso del procedimiento de modelización, hemos observado en el análisis cognitivo, que los 4 grupos que no hacen uso de las cantidades intensivas (Tabla 6.7, antes presentada), no restituyen a los resultados de la operación de división o la aplicación de la regla de tres a las magnitudes (intensivas) que le corresponden. Una manifestación similar es observada con el grupo (Fig. 6.20 (G2-9), antes presentada) que utiliza el cálculo de fracciones equivalentes en su resolución, puesto que este grupo no restituye de manera explícita las magnitudes (intensivas) respectivas a los resultados de los cálculos realizados. Por tanto, se observa que 8/13 grupos (61,5%) hacen uso del EM-DR2.4, lo que indica un uso considerable de este elemento por parte de los futuros profesores de la muestra.

El uso del EM-DR2.5 refiere al uso del sentido de covariación, la cual hemos descrito como la interpretación de las variaciones entre las mezclas en función de las variaciones en cada mezcla. Esta interpretación identifica la puesta en juego de ese sentido de covariación con el uso de la estrategia –entre” en los términos propuestos por Karplus, Pulos y Stage (1983a; 1983b) para la resolución de problemas de mezcla. En este sentido, de acuerdo con el análisis cognitivo realizado, sólo uno de los grupos (Fig. 6.20 (G2-9), antes presentada) pone en juego un procedimiento que se asemeja con ese tipo de estrategia; el cálculo de fracciones equivalentes, puesto que este procedimiento implica estudiar posibles variaciones entre dos razones (fracciones) por medio de la variación de los términos correspondientes en cada razón (fracción). No obstante, el procedimiento implementado por este grupo no conduce a interpretar los resultados del cálculo realizado de acuerdo con las magnitudes involucradas. Por tanto, este grupo hace un uso parcial del EM-DR5.

Por otra parte, al observar las representaciones gráficas utilizadas por 3/13 grupos (dos de las cuales fueron presentadas en la Fig. 6.22, antes presentada), vemos que en la elaboración de esas representaciones es altamente probable la manifestación de ese sentido de covariación, puesto que en las agrupaciones que se comparan tienen como unidad de medida la razón unitaria –1c. de azúcar/4c. de limón”. De manera que la comparación de la variación de la mezcla está en función de la variación de sus componentes. Este hecho nos conduce a reconocer que estos 3/13 grupos hacen probablemente un uso implícito del EM-DR5. En cualquier caso, el uso de este elemento sólo se hace presente, probablemente, por parte de un número reducido de grupos.

El EM-DR2.6 refiere básicamente a la comparación entre razones para concluir respecto al gusto de las limonadas. En este sentido, el uso del EM-DR2.6 puede estar referido a reconocer que para ambas limonadas la razón unitaria (grado de acidez o dulzura) es la misma (1c. de azúcar/4c. de limón) y concluir que ambas limonadas tienen el mismo gusto. En este orden de ideas, de acuerdo con el análisis cognitivo realizado, 8/13 grupos (61,5%) reconocen que ambas limonadas tienen la misma razón unitaria y por tanto el gusto de ambas limonadas es el mismo. Esto indica que un un número considerable de grupos hacen uso del EM-DR2.6.

En general, se observa que más del 60% de los grupos participantes hacen uso de cuatro de los EM-DR2. Esta manifestación se encuentra íntimamente asociada al uso de cantidades intensivas, de la razón unitaria y el reconocimiento de los resultados de las operaciones y algoritmos aplicados. Sólo dos de los EM-DR2 son usados por una minoría de los grupos (menor al 31%). Respecto a esta última manifestación debemos señalar que estos dos EM-DR2 refieren a estrategias alternativas de solución que sólo fue exhibida por pocos grupos, en oposición o complemento, a la estrategia de reducción a la unidad la cual se manifestó con alta frecuencia.

6.9. Desarrollo de competencias de análisis didáctico

La valoración y desarrollo de competencias de análisis didáctico han sido considerados los aspectos centrales de este trabajo de investigación. En términos del diseño de investigación acción desarrollado esta fase corresponde, de manera más específica, a la evaluación de la intervención realizada, puesto que refiere, de manera expresa, al logro de los dos últimos objetivos pretendidos en la realización de esta investigación, los cuales refieren al desarrollo de competencias de análisis epistémico y al conocimiento necesario para la enseñanza de la matemática.

En este orden de ideas, consideramos que el estudio de los análisis epistémicos realizados por los futuros profesores, constituye la acción clave de este trabajo de investigación, puesto que tal estudio es el que nos permitirá evaluar el desarrollo de competencias de análisis didáctico (en su faceta o dimensión epistémica) por parte de los futuros profesores de la muestra.

En relación con la producción y desarrollo del conocimiento necesario para la enseñanza de la matemática, hemos venido refiriendo al mismo por medio de la identificación de conflictos potenciales y el uso/reconocimiento de lo que hemos denominado ―elementos matemático-didáctico relevantes" (EM-DR). En este sentido, en los apartados 6.5 y 6.7 hemos presentado los análisis epistémicos expertos de los problemas del yogur y la limonada, respectivamente, a partir de los cuales fueron observadas algunas contribuciones, relativas a la producción y desarrollo de esa forma de conocimiento, por medio del reconocimiento de posibles conflictos de significado en la resoluciones de esos problemas y la identificación de elementos didáctico-matemáticos relevantes (EM-DR).

En el sub-apartado 6.6.2, tomando como referencia los EM-DR1, identificados a partir del análisis epistémico del problema del yogur, realizamos una valoración del análisis epistémico/cognitivo y el análisis cognitivo. Esa valoración consistió en observar el uso/reconocimiento de esos elementos en las resoluciones/explicaciones dadas por los sujetos a ese problema, concluyéndose que las acciones de resolución y explicación no son suficientes para dar cuenta del reconocimiento de esos elementos.

En este sentido, de acuerdo con la Fig. 6.12, antes presentada, consideramos que el estudio de los análisis epistémicos producidos por parte de los futuros profesores nos puede informar sobre el uso/reconocimiento de esos elementos, y por ende, del desarrollo del conocimiento necesario para la enseñanza de la matemática. Sobre este asunto referiremos en los sub-apartados 6.9.2 y 6.9.4.

A continuación referiremos a los análisis epistémicos realizados por los futuros profesores sobre las resoluciones/explicaciones realizadas sobre el problema del yogur.

6.9.1. Análisis epistémico realizado por los futuros profesores del problema del yogur

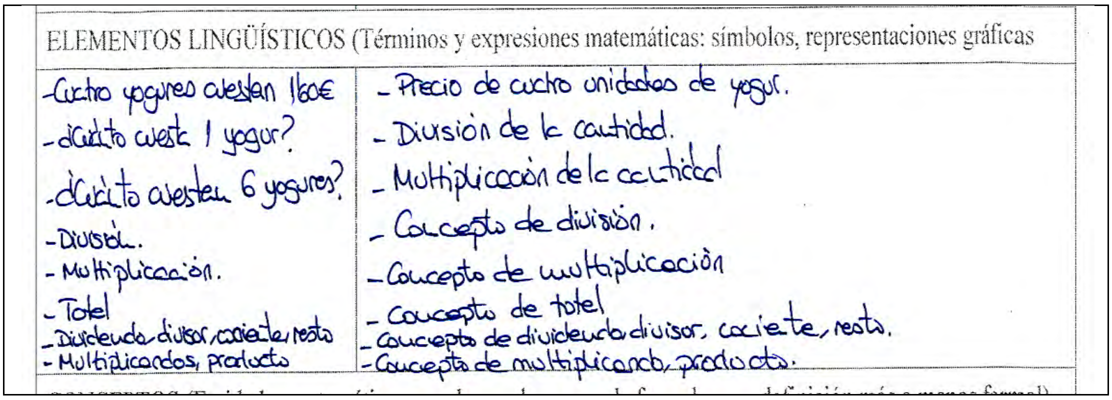
Presentaremos a continuación un resumen de los análisis epistémicos realizados por la muestra de futuros profesores al problema del yogur. Este resumen lo hacemos por medio de (a) una comparación entre los objetos identificados en el análisis experto y la frecuencia con estos se hacen presentes en los realizados por los grupos, (b) una comparación entre los significados asignados a los objetos identificados en ambos análisis, y (c) frecuencia de objetos identificados por parte de los futuros profesores no identificados en el análisis experto

Las comparaciones referidas nos permitirán realizar una valoración del desarrollo de competencias de análisis didáctico, referidas al reconocimiento de objetos y significados puestos en juego en la resolución del problema del yogur. Para efectos de uso posterior, el análisis epistémico experto será referido como análisis a priori o análisis previo.

6.9.1.1. Competencias de reconocimiento de elementos lingüísticos y sus significados

El estudio de los *elementos lingüísticos*, identificados por la muestra de futuros profesores, nos indica que uno de los elementos lingüísticos más frecuentemente reconocido es el referido a las frases del enunciado del problema: “Un envase de cuatro yogures cuesta 1'60€”, “Cuánto cuesta 1 yogur”, “Y 6 yogures”. Los significados asignados refieren a: (a) papel que juegan estas frases en el planteamiento del problema (datos, incógnitas…), (b) la acción que se debe realizar en correspondencia con lo solicitado, por ejemplo a la frase “Cuánto cuesta un yogur” se le hace corresponder como significado la frase: “División del precio total entre cuatro yogures”, (c) parafraseo de la frase, por ejemplo a la frase: “Un envase de cuatro yogures cuesta 1'60€” se le hace corresponder como significado la frase: “Precio de cuatro unidades de yogur”.

En la Fig. 6.23 presentamos un ejemplo de estos elementos y sus significados, reconocidos por uno de los grupos. En la Tabla 6.9 se pueden ver las frecuencias con que se presentan estos elementos.



ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS (Términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas	
- Cuatro yogures cuestan 1'60€	- Precio de cuatro unidades de yogur.
- ¿Cuánto cuesta 1 yogur?	- División de la cantidad.
- ¿Cuánto cuestan 6 yogures?	- Multiplicación de la cantidad
- División.	- Concepto de división.
- Multiplicación.	- Concepto de multiplicación
- Total	- Concepto de total
- Dividendo, divisor, cociente, resto	- Concepto de dividendo, divisor, cociente, resto.
- Multiplicandos, producto	- Concepto de multiplicando, producto.

Fig. 6.23: Ejemplo del reconocimiento de los elementos lingüísticos por uno de los grupos (G1-3)

Se puede observar en la Tabla 6.9 que otros de los elementos comúnmente identificados por los grupos son los términos de “División” y “Multiplicación”, a los cuales se les asocia como significado las frases: “Concepto de división” y “Concepto de multiplicación”, respectivamente.

Asimismo, se observa con frecuencia el reconocimiento de los elementos de la división y multiplicación (dividendo, divisor, cociente, resto; multiplicandos, producto), a los cuales se le asigna como significado una frase similar a la de los términos de división y multiplicación: —Concepto de…” (Véase Fig. 6.23, antes presentada).

Tabla 6.9: Frecuencias de los elementos lingüísticos reconocidos por los grupos en el problema del yogur

Número de Grupos (N = 31)	Elementos lingüísticos frecuentemente reconocidos					
	Un envase de cuatro yogures cuesta 1,60€	Cuánto cuesta 1 yogur	Y 6 yogures	División	Multiplicación	Elementos de la división y Multiplicación
	23	22	25	13	13	8
%	74,2	71	80,7	41,9	41,9	25,8

Algunos reconocimientos particulares, hechos por grupos de manera individual, son: (a) lo relativo al uso de algunos términos del sistema de numeración decimal posicional (centésimas, décimas, unidades, decenas, centenas), (b) simbolizaciones involucrados que no se relacionan con el uso de las operaciones (4, 1'60, €, 6), (c) simbolizaciones asociadas al uso de la operaciones de multiplicación y división (reconocida por dos de los grupos: arreglo de la división, —en caja”, y disposición tabular de la multiplicación, (véase Fig. 6.24), (d) representaciones gráficas utilizadas en la resolución del problema (véase en Fig. 6.24 (G1-26)), (e) esquematización general del papel que juegan los elementos lingüísticos en la resolución del problema y su explicación (véase en Fig. 6.24 (G1-27)), incluyéndose el papel que juegan las representaciones gráficas utilizadas en la explicación de la resolución.

En general se observa, en relación con el desarrollo de competencias de análisis didáctico referidas en el sub-apartado 6.3.1; un reconocimiento aceptable de los elementos lingüísticos por parte de la muestra. Al valorar la manifestación de ese reconocimiento, en función del análisis epistémico experto, debemos referir que un número considerable de grupos (promedio mayor al 60%) reconocieron los elementos lingüísticos previstos, lo cual indica una manifestación del desarrollo de esa competencia.

Asimismo, se observa que algunos grupos (25,8%) reconocieron elementos lingüísticos que no fueron señalados en el análisis experto (elementos de la división y multiplicación, por ejemplo), lo que indica la manifestación de acciones positivas en torno al uso de la herramienta. Particularmente, el uso de representaciones gráficas, exhibido por sólo dos de los grupos, el cual es reconocido como un elemento lingüístico (véase Fig. 6.24 (G1-26) y (G1-27)), no fue previsto en el análisis experto y es utilizado por estos dos grupos tanto en la resolución/explicación del problema como en el análisis realizado por medio de la GROS.

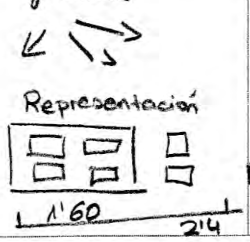
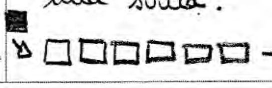
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS (Términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas	
- multiplicación - división - "¿Cuánto cuesta 1 yogur?" - "¿Y 6 yogures?" - "Un envase de 4 yogures cuesta 1'60€" - Dividendo - Divisor - disposición tabular del algoritmo de la multip. y división	- Concepto de multiplicación - concepto de división - Reparto de una cantidad entre otra - Adición de la misma cantidad 6 veces. - Precio de 4 yogures. - Cantidad que cuestan 4 yogures. - Cantidad entre la que se va a repartir el dividendo (en partes iguales). - algoritmo de multip. (en columnas) y algoritmo de división (en caja).

Identificación de la disposición tabular de las operaciones (G1-19)

ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS (Términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas	
- 4 yogures cuestan 1'60 € - ¿Cuánto cuesta 1 yogurt? - ¿Cuánto cuestan 6 yogures? - División $\begin{array}{l\|l} a & b \\ \hline r & c \end{array}$ - Multiplicación	- ~~precio~~ Cantidad ~~Cantidad~~ de yogures y precio de los 4 juntos. - precio ~~cantidad~~ de un solo envase, - precio ~~cantidad~~ de 6 envases. - pasos, colocación de los números y utilización del algoritmo resta para obtener la solución. - multiplicador, multiplicando, resultado.

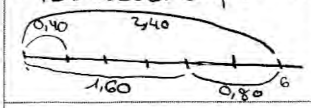
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)

Reconocimiento de representación tabular de la operación de división (G1-22)

ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS (Términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas	
flechas Representación  1'60 2'4	Reparto /dividir/ separar Es una forma de expresar gráficamente una suma.  Forma de expresar gráficamente una multiplicación

CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)

Reconocimiento de la representación gráfica utilizada en la resolución (G1-26)

ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS (Términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas	
4 yogures 1,60 €	Planteamiento del problema
-Puesto que 4 yogures… - Para calcular el precio…	Explicación
 0,40 2,40 1,60 0,80 6	Aclaración

CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)

Reconocimiento de la representación gráfica reconocida en la explicación (G1-27)

Fig. 6.24: Reconocimiento de representaciones asociadas a las operaciones de multiplicación y división en la resolución/explicación del problema del yogur

No obstante, al referir a los significados dados por los grupos a los elementos lingüísticos identificados, se observa una descripción superficial y próxima a la paráfrasis. Particularmente, no se identifica la presencia de la idea de razón en los términos-frases del enunciado. Estas manifestaciones nos inducen a pensar que la competencia de reconocimiento de significados asociados a los elementos lingüísticos se ha manifestado de manera limitada.

6.9.1.2.Competencias de reconocimiento de conceptos y sus significados

El estudio del objeto conceptos en los análisis epistémicos realizados por los futuros profesores revelan que los conceptos más reconocidos son los asociados a las operaciones puestas en juego en el proceso de resolución, a saber; las operaciones de división (28 grupos; 90,3%) y multiplicación (27 grupos; 87,1%). En la Tabla 6.10 presentamos las frecuencias con que son identificados los conceptos más comúnmente identificados.

Tabla 6.10: Frecuencias de los conceptos reconocidos por los grupos en el problema del yogur.

Número de Grupos (N = 31)	Conceptos frecuentemente reconocidos						
	División	Multiplicación	Número decimal	Número natural	Elementos de la división y multiplicación	Conjunto	Suma
	28	27	16	12	6	6	3
%	90,3	87,1	51,6	38,7	19,4	19,4	9,7

Los conceptos de número decimal y número natural son reconocidos con menor frecuencia, menos de la mitad de los grupos reconocen el uso de estos conceptos en la resolución/explicación que realizan del problema.

Se puede observar en la Tabla 6.10 el reconocimiento de la mayoría de los objetos conceptuales identificados en el análisis epistémico experto. A excepción del concepto razón, todos los demás conceptos del análisis epistémico previo son reconocidos en el análisis epistémico realizado por los grupos de futuros profesores. Se debe señalar además el reconocimiento de algunos conceptos, no previstos en el análisis epistémico previo, que son reconocidos con cierta frecuencia por los grupos.

Otros conceptos que son reconocidos por uno o dos grupos de los sujetos participantes, no previstos en el análisis a priori, son los siguientes: (a) por dos grupos: unidad, resta, número entero, unión de conjuntos, total, (b) por un grupo: envase, suma total, multiplicación total, división total, correspondencia entre magnitudes, proporcionalidad entre cantidades, problema, entre, número, cantidad, partes/partir, seis/cuatro.

Estas manifestaciones indican un buen desarrollo de la competencia de reconocimiento de conceptos en la resolución de problemas, exhibida por algunos de los grupos de futuros profesores. Manifestándose con mayor frecuencia los inicialmente reconocidos en el análisis a priori. Aún cuando ese reconocimiento no es realizado por la totalidad de los grupos, la tarea de análisis realizada permite y fomenta su manifestación.

Respecto a los significados asignados a los diferentes conceptos identificados, sólo referiremos a tres de ellos, los que se han presentado con mayor frecuencia (división, multiplicación y número decimal).

En este orden de ideas, observamos en la Tabla 6.11, los asignados al concepto de división, presentándose con mayor frecuencia (17 grupos; 54,8%) el referido a identificar este concepto con la idea de repartición de una cantidad en partes iguales. La división como cuotas solo es utilizada por dos grupos, mientras otros dos refieren a ―separar; disminuir” como significados asociados a esta operación. Los demás significados refieren a paráfrasis y usos específicos de la operación en el problema.

Tabla 6.11: Frecuencias de los significados asignados al concepto de división por parte de los grupos.

Significados de división	**N**	**%**
Repartir en cantidades iguales	17	54,8
Restar varias veces una misma cantidad	2	6,4
Separar, disminuir	2	6,4
Dividir una cantidad en partes iguales	1	3,2
Concepto de división	1	3,2
La operación de división	1	3,2
División del precio entre el número de componentes de un envase	1	3,2
Cálculo para averiguar el precio de un yogur	1	3,2
Explicación gráfica de dicha operación	1	3,2
No responde	4	13,0
Total	31	100,0

En la Tabla 6.12 mostramos los significados asignados por los grupos al concepto de multiplicación. Dentro del significado ―Suma reiterada” hemos agrupado diferentes frases utilizadas por los sujetos para referir a ese significado, frases como: ―Repetir tantas veces una misma cantidad”, ―Suma repetida de una cantidad”, ―Suma sucesiva”, ―Suma repetida de valores”, ―Sumar un número determinado de veces una misma cantidad”, “Suma compuesta por sumandos iguales”, “Adición del precio del yogur seis veces”, “Sumar varias veces una cantidad”, “Suma reiterada de una cantidad un número determinado de veces”, “Adición reiterada de una cantidad un determinado número de veces”, “Suma repetida del mismo número”.

Tabla 6.12: Frecuencias de los significados asignados al concepto de multiplicación por parte de los grupos.

Significados de multiplicación	**N**	**%**
Suma reiterada	16	51,6
Aumentar, incrementar	3	9,7
Cálculo para averiguar el precio de seis yogures	3	9,7
Concepto de Multiplicación	1	3,2
La operación de Multiplicación	1	3,2
Multiplicar una cierta cantidad directamente por las unidades que pide	1	3,2
Explicación gráfica de dicha operación	1	3,2
No responde	5	16,1
Total	31	100,0

Se puede observar en la Tabla 6.12 que el significado suma reiterada se presenta como uno de los más frecuentemente reconocido por los grupos (16 grupos; 51,6%). La multiplicación como aumento o incremento sólo es utilizada por tres grupos, mientras otros tres refieren al uso específico que se hace de esa operación para obtener uno de los resultados requeridos para la resolución del problema. Los demás significados, asignados de manera individual por diferentes grupos, refieren a paráfrasis y a una expresión gráfica asociada a esta operación.

Los resultados del estudio de los significados dados al concepto de número decimal, por parte de los grupos, los hemos resumido en la Tabla 6.13. Se puede observar en esa tabla que solo uno de los significados, dado por uno de los grupos, refiere a una definición correcta de lo que es un número decimal, al referir: “Número que puesto en forma de fracción, su denominador es una potencia de 10. La parte decimal es finita. (Clase de número racional)”. Otro de los grupos, asigna como significado, el uso específico que se hace del concepto de número decimal en la resolución del problema, al referir: “1'60€ (precio del pack de cuatro yogures)”. Este significado prácticamente coincide con el significado dado en el análisis previo. Los demás significados refieren a una paráfrasis o una idea errada en torno a lo que es un número decimal.

Hemos considerado conveniente hacer una distinción en la categoría “No responde”, puesto que a esa categoría pertenecen aquellos grupos que no reconocen el concepto de número decimal y tampoco su significado (primera sub-categoría), y los que reconocen el concepto, aunque no dan ningún significado asociado a ese concepto (segunda sub-categoría). Ambas manifestaciones son preocupantes, puesto que las mismas refieren a un desconocimiento (más evidente para los grupos en la segunda categoría) de lo que significa un número decimal. En general, sólo seis grupos dan significados correctos al concepto de número decimal, los demás grupos dan un significado erróneo o no dan ningún significado.

Tabla 6.13: Frecuencias de los significados asignados al concepto de número decimal por parte de los grupos.

Significados de número decimal		**N**	**%**
Número que puesto en forma de fracción, su denominador…		1	3,2
1'60€ (precio del pack de cuatro yogures)		1	3,2
Clase de número racional		3	9,7
Número fraccionario		1	3,2
Sistema basado en base 10 para identificar números inferiores a la unidad		1	3,2
Número natural que no es entero		1	3,2
Números enteros: naturales y decimales		1	3,2
No responde	No reconoce objeto ni significado	15	48,4
	Reconoce objeto pero no significado	7	22,6
Total		31	100,0

Al valorar los significados identificados por los grupos, a la luz de los identificados en el análisis a priori, observamos una manifestación considerable de los significados dados a los conceptos de división y multiplicación, más del 50% de los grupos asignan significados a estos conceptos muy próximos a los identificados en el análisis experto.

Un desempeño menos satisfactorio se observa en el reconocimiento de los significados dados al concepto de número decimal, puesto que sólo dos de los grupos reconocen un significado avanzado o de uso de ese concepto (dos primeros significados mostrados en la Tabla 6.13), siendo el significado de uso coincidente con el previsto en el análisis a priori.

Estas manifestaciones nos informan de un desarrollo aceptable de la competencia referida al reconocimiento de significados de los conceptos implicados en la resolución y explicación del problema del yogur.

6.9.1.3. Competencias de reconocimiento de procedimientos y sus significados

En relación con la identificación del objeto procedimientos, en la Tabla 6.14 mostramos un resumen de los tipos de procedimientos identificados por los grupos y las frecuencias con que estos se manifiestan. Observamos que los algoritmos de la división y la multiplicación son identificados como procedimientos por una mayoría considerable de los grupos (30 grupos; 96,8%). Algunos grupos reconocen que estos algoritmos son aplicados específicamente con números decimales (10 grupos para la división; 32,3%, y 9 grupos para la multiplicación; 29%).

Tabla 6.14: Frecuencias de los tipos de procedimientos reconocidos por los grupos en problema del yogur

Número de Grupos (N = 31)	Tipos de procedimientos				
	Algoritmo de división	Algoritmo de Multiplicación	División con decimales	Multiplicación con decimales	Algoritmo de la suma
	30	30	10	9	3
%	96,8	96,8	32,3	29	9,7

Otros procedimientos reconocidos por los grupos de manera individual fueron: “Colocación de la coma a la hora de obtener el resultado”, “Colocación vertical de la división”, “Reglas para operaciones con números decimales”, “Algoritmo de la resta”.

Al valorar el reconocimiento de los procedimientos por parte de los grupos, según los procedimientos reconocidos en el análisis epistémico experto, observamos un desempeño satisfactorio por parte de los grupos al reconocer los procedimientos relativos a la puesta en juego de los algoritmos de la división y la multiplicación en la resolución del problema. Además, varios de los grupos (entre 9 y 10 de los grupos) hacen un reconocimiento específico de los tipos de algoritmos de división y multiplicación que se ponen en juego. Estas manifestaciones indican un buen desarrollo de la competencia de reconocimiento de procedimientos (algoritmos) realizados en la resolución de un problema.

No obstante, el procedimiento de modelización, que se pone en juego para suprimir-restituir las magnitudes correspondientes a los valores numéricos operados y obtenidos, no es reconocido por ninguno de los grupos. Esto puede deberse a que este procedimiento se manifiesta de forma subyacente; su uso es menos evidente que el uso de los algoritmos involucrados.

Para el estudio de los significados asociados a los procedimientos, reconocidos por los grupos, nos limitaremos a considerar los de mayor frecuencia y que coinciden con el reconocimiento realizado en el análisis epistémico experto, en este caso nos limitaremos a los procedimientos de división y multiplicación.

Los resultados del estudio de los significados, asociados al procedimiento de división, reconocidos por los grupos, los presentamos en la Tabla 6.15. Los significados en esa tabla son el resultado de agrupar diferentes frases, empleadas por los grupos para enunciar el significado que ellos asignan al algoritmo de la división. Esa agrupación se ha hecho por medio de una interpretación de proximidad de las diferentes frases con el significado presentado en la Tabla 6.15. Por ejemplo, en la categoría “Permite hallar el valor de la división” han quedado agrupadas las frases: “Permite hallar el valor de la división, disminuyendo el resultado total”, “Permite obtener el resultado de la división”, “Permite hallar el resultado”, “Permite hallar el valor de la división, justificando las llevadas”, “Operación necesaria para la resolución de este problema”.

Con el fin de sintetizar aún más los resultados presentados en la Tabla 6.15, observamos que estos se pueden agrupar haciendo uso de cuatro interpretaciones: (a) interpretación como uso, relativa al resultado que se obtiene a partir de la aplicación del algoritmo, en esta interpretación se agrupan los cuatro primeros significados presentados en la tabla, (b) interpretación en la que se usa la definición de la división como reparto, posiblemente para referir a una acción implicada en el uso del algoritmo, esta interpretación refiere al quinto significado presentado en la tabla (c) interpretación como descripción del algoritmo, la cual refiere al sexto significado presentado en la tabla, y (d) interpretación como paráfrasis en la que se agrupan los dos últimos significados presentados en la tabla.

Tabla 6.15: Frecuencias de los significados asignados al algoritmo de la división por parte de los grupos.

Significados de algoritmo de la división		**N**	**%**
Permite hallar el valor de la división		6	16,1
Permite obtener el precio de un yogur		6	16,1
Permite hallar el resultado teniendo en cuenta los decimales		5	16,1
Operación realizada para averiguar lo que cuesta una unidad		4	12,9
Nos sirve para repartir una cantidad en diferentes partes		2	6,5
Procesos o pasos a seguir para realizar una división		2	6,5
Dividir utilizando el proceso de las llevadas		1	3,2
Dividir algoritmo de la división		1	3,2
No responde	No reconoce objeto ni significado	1	3,2
	Reconoce objeto pero no significado	3	9,7
Total		31	100,0

A partir de estas interpretaciones observamos que la mayor cantidad de significados, dados por los grupos al algoritmo de la división, refiere al uso que se hace de ese algoritmo para obtener un resultado (21 grupos, 67,3%). Esta manifestación coincide con el significado dado al procedimiento de división en el análisis epistémico experto.

El estudio de significados asociados al algoritmo de la multiplicación, reconocidos por los grupos, nos ha conducido a identificar una gran similitud entre los significados asignados al algoritmo de la división y al de la multiplicación. Esa similitud puede observarse en el resumen que presentamos en la Tabla 6.16, en la que referimos a los significados dados por los grupos al algoritmo de la multiplicación.

Tabla 6.16: Frecuencias de los significados asignados al algoritmo de la multiplicación por parte de los grupos.

Significados de algoritmo de la multiplicación		**N**	**%**
Permite hallar el valor de la multiplicación		6	19,4
Permite obtener el precio de 6 yogures		6	19,4
Permite hallar el resultado teniendo en cuenta los decimales		5	16,1
Operación realizada para averiguar lo que cuestan 6 unidades		4	12,9
Nos sirve para aumentar de forma proporcional una cantidad		2	6,5
Procesos o pasos a seguir para realizar una multiplicación		2	6,5
Multiplicar utilizando el proceso de las llevadas		1	3,2
Multiplicar algoritmo de la multiplicación		1	3,2
No responde	No reconoce objeto ni significado	1	3,2
	Reconoce objeto pero no significado	3	9,7
Total		31	100,0

Al igual que con los significados identificados para el algoritmo de la división, los asignados para el algoritmo de la multiplicación pueden ser agrupados de acuerdo con cuatro interpretaciones análogas a las referidas para el algoritmo de la división. Esa agrupación nos conduce a obtener que 21 grupos (67,3%) asignen un significado al algoritmo de la multiplicación similar al asignado en el análisis epistémico experto.

De manera que, la valoración del reconocimiento de los significados asignados por los grupos a los procedimientos de división y multiplicación, a la luz del análisis epistémico experto, de acuerdo con los resultados precedentes, nos indica que 21/31 grupos (67,3%) realizan una identificación de significados asociados a los algoritmos de división y multiplicación similares a los asociados a esos procedimientos en el análisis experto. Además, algunas asignaciones de significado, resumidas en las interpretaciones (b) y (c) antes expuestas (4/31 grupos; 12,9%), refieren a significados correctos, no previstos en el análisis a priori. Estas manifestaciones indican un desarrollo satisfactorio de la competencia de reconocimientos de significados de los procedimientos puestos en juego en la resolución del problema del yogur, exhibida por un considerable número de grupos participantes (25/31 grupos; 80,6%).

6.9.1.4. Competencias de reconocimiento de propiedades y sus significados

Los resultados del estudio de las propiedades más frecuentes, reconocidas por los grupos, los hemos resumido en la Tabla 6.17. Se observa que una de las frases que es mayoritariamente reconocida como una piedad refiere al uso de ―Reglas del sistema de numeración decimal" (12 grupos; 38,7%). Las propiedades: ―1 yogur cuesta 0‘40€" y ―6 yogures cuestan 2‘40€", reconocidas por 11 grupos (35,5%), refieren a las respuestas dadas al problema, cuya justificación se encuentra en los procedimientos desarrollados. La propiedad ―Un envase de cuatro yogures cuesta 1‘60€" es reconocida por sólo 5 grupos (16,1%). La frase ―Prueba de la división" es reconocida por 4 grupos (12,9%) como una propiedad.

Otras frases reconocidas como propiedades por uno o dos de los grupos son las siguientes: (a) por uno de los grupos: ―Precio por unidad", ―Asociativa de cantidades", ―División de un número decimal", ―Total", ―Desplazamiento de la coma", ―Un envase de 4 yogures… ¿y 6 yogures?, (b) por dos grupos: ―Conmutativa", ―¿Cuánto cuesta 1 yogur?", ―¿y 6 yogures?", ―Prueba de la multiplicación", ―Propiedades de la división", ―Propiedades de la multiplicación", ―División", ―Multiplicación". Se debe señalar que algunas de estas frases, consideradas de manera aislada, no constituyen propiedades. Sin embargo en el estudio de los significados dados a algunas de ellas observaremos que pueden ser interpretadas como propiedades.

Tabla 6.17: Frecuencias de las propiedades reconocidas por los grupos en problema del yogur

Número de Grupos (N = 31)	Propiedades				
	Reglas del sistema de numeración decimal	1 yogur cuesta 0‘40€	6 yogures cuestan 2‘40€	Un envase de cuatro yogures cuesta 1‘60€	Prueba de la división
	12	11	11	5	4
%	38,7	35,5	35,5	16,1	12,9

Al valorar las propiedades reconocidas por los grupos, de acuerdo con las propiedades identificadas en el análisis epistémico experto, observamos que las propiedades P_1 y P_2 del análisis experto se encuentran resumidas en la propiedad ―Un envase de cuatro yogures cuesta 1’60€", la cual es reconocida por sólo 5/31 grupos (16,1%). Respecto a las propiedades P_3 y P_4 del análisis experto, vemos que son reconocidas por 11/31 grupos (35,5%). Estas manifestaciones indican que pocos grupos de la muestra de futuros profesores han alcanzado un desarrollo satisfactorio de la competencia de reconocimiento de las propiedades puestas en juego en la resolución del problema del yogur.

No obstante, la propiedad referida al uso de ―Reglas del sistema de numeración decimal", que presenta la mayor frecuencia de reconocimiento por parte de los grupos (12 grupos; 38,7%), no fue reconocida en el análisis previo. El uso de estas reglas puede estar asociado al uso de propiedades puestas en juego en la ejecución de los algoritmos de multiplicación y división de números decimales, lo cual es un aspecto interviniente y relevante en el proceso de resolución. En este sentido, consideramos que una adecuada valoración del reconocimiento de esta propiedad amerita el estudio de los significados asignados por los grupos a la misma, lo cual presentamos a continuación.

El estudio de los significados asignados a las propiedades, reconocidos por los grupos nos indica que la propiedad relativa al uso de ―Reglas del sistema de numeración decimal", refiere, de acuerdo al significados dados por 11 de los 12 grupos que reconocen esa propiedad, a las propiedades utilizadas en la realización de los algoritmos de multiplicación y división de números decimales. Sólo uno de los grupos que reconoce esta propiedad no le asigna significado.

Además se debe señalar que asociado a este significado, para referir al reconocimiento de propiedades, algunos grupos utilizan frases como: ―División de un número decimal", ―Propiedades de la división", ―Propiedades de la multiplicación", ―Desplazamiento de la coma", ―Multiplicación", ―División". En total, 4 grupos asocian a estas frases o palabras el significado de uso de las propiedades involucradas en la ejecución de la multiplicación y división con números decimales. De manera que sintetizando en torno a los grupos que reconocen el significado de uso de esas propiedades, encontramos que 15/31 grupos (48,4%) realizan ese reconocimiento.

Respecto a los significados asignados a las propiedades ―1 yogur cuesta 0'40€" y ―6 yogures cuestan 2'40€", son reconocidas por 9/11 grupos como ―las soluciones del problema", Uno de los grupos utiliza la frase ―Resultados que requieren un procedimiento" para asignar el significado a estas dos propiedades. El otro grupo no provee de significados a estas propiedades. Respecto a los significados asignados, observamos coincidencia entre ambos significados, puesto que refieren a la solución del problema o, lo que es lo mismo, resultado que se ha obtenido mediante su resolución.

En relación con los significados asignados a la propiedad “Un envase de cuatro yogures cuesta 1‘60€”, observamos que cada grupo (4/5 grupos que reconocen esta propiedad) asigna un significado particular. Uno de los grupos no asigna significado a esa propiedad. Los significados asignados son: (a) “Enunciado a partir del cual se puede resolver el problema”, (b) “Se debe tener en cuenta que un envase está compuesto de cuatro yogures, y que 1'60€ se refiere al precio del envase de 4 yogures”, (c) “Cada yogur cuesta lo mismo”, (d) “Te dice cuánto valen 4 yogures”. Los significados (b) y (c) merecen atención. El significado (b) pretende, posiblemente, hacer más explícita la relación “envase/números de yogures/precio” dada en el enunciado del problema, reconocida como la propiedad en cuestión. Mientras el significado (c) constituye una propiedad esencial, que se manifiesta de manera no explícita en la resolución, pero, que faculta el cálculo del precio unitario o razón unitaria, y, por tanto, la resolución del problema. Lo lamentable es que estos reconocimientos sean realizados sólo por 2/31 grupos.

La valoración de los significados dados a las propiedades, reconocidos por los grupos de futuros profesores, en función de los significados asignados a las mismas en el análisis epistémico experto, remite a reconocer que ha habido manifestaciones de los grupos en los que estos reconocen los significados, de las propiedades, identificados en el análisis previo. No obstante, tales reconocimientos se presentan con frecuencias relativamente bajas (4/31 propiedades P_1 y P_2; 10/31 propiedades P_3 y P_4). Esto indica que pocos grupos desarrollan la competencia de reconocimiento de significados puestos en juego en las propiedades utilizadas en la resolución del problema del yogur.

No obstante, hemos observado la manifestación del reconocimiento de significados relativos a propiedades puestas en juego en la ejecución de los algoritmos de multiplicación y división de números decimales, que son reconocidos por aproximadamente la mitad de los grupos (15/31 grupos, 48,4%). Esta manifestación muestra un mejor desempeño de los grupos en el reconocimiento de esas propiedades. Además, conmina a considerar lo relativo a la aplicación de estos algoritmos como objeto del análisis epistémico para ser tomado en cuenta en estudios futuros.

6.9.1.5. Competencias de reconocimiento de argumentos y sus significados

El estudio del objeto argumentos en los análisis epistémicos realizados por los futuros profesores nos ha conducido a observar una diversidad de exposiciones cuya síntesis se ha realizado sobre la base una interpretación que queremos dejar explicitada en el desarrollo del presente sub-apartado. En este orden de ideas, presentamos en la Tabla 6.18 una transcripción de las diferentes exposiciones provistas por los grupos para referir al objeto argumentos. Estos han sido organizados de manera que se puedan reconocer de manera sencilla las categorizaciones que posteriormente hacemos de esas exposiciones.

Una característica general que se observa en la mayoría de los argumentos proveídos por los futuros profesores es que los mismos parecen estar dirigidos a justificar el uso de las operaciones de división y/o multiplicación, y los resultados que se obtienen por medio de tal uso. A la vez se observa que el uso y resultados de esas operaciones han sido reconocidos por los grupos en los objetos/significados de procedimientos y/o propiedades. El hecho que los grupos hayan puesto en relación los argumentos y las propiedades reconocidas, puede obedecer a la indicación que se da en la GROS, relativa a los argumentos, la cual refiere: ―ARGUMENTOS (Justificaciones, demostraciones o pruebas de las propiedades utilizadas)"

En esta línea de ideas, consideramos que la mayoría de los argumentos utilizados se pueden clasificar de acuerdo con dos categorías: (a) los que utilizan patrones de razonamiento (división como reparto, multiplicación como suma reiterada), (b) los que proveen de una descripción del procedimiento realizado en el que se encuentran involucradas las operaciones de división y/o multiplicación.

Dentro de esta segunda categoría se distinguen tres tipos de argumentaciones: (i) descripción total, que refiere a una buena descripción de ambas operaciones (ii) descripción parcial, que refiere a una descripción de una sola de las operaciones o descripciones parcialmente correctas, y (iii) descripciones generales o en las que se hace paráfrasis del procedimiento realizado.

Dos tipos de argumentos no comprendidos en las categorías antes descritas (dos últimas filas de la Tabla 6.18) son los siguientes: (a) argumento dirigido a justificar el uso de las reglas del sistema de numeración decimal, y (b) transcripción de los algoritmos de división y multiplicación realizados en la resolución (véase en Anexo J, argumentos dados por el G1-27).

Tabla 6.18: Argumentos dados por los grupos en el problema del yogur

Justificación de la multiplicación con decimales (Este argumento es dado por tres grupos)
Deductivo llegamos a una conclusión a partir de un enunciado o pregunta inicial
Realizamos operaciones de multiplicación y división. Efectuando estas operaciones paso a paso
Se hace estos procedimientos para calcular el precio de la unidad y las de varias unidades que pide en el segundo apartado.
A partir del problema dado, nos introduce al aprendizaje de dos nuevas operaciones matemáticas, como son la multiplicación y la división.
Hemos llegado a la conclusión, hemos deducido, por la forma del enunciado del problema, que este, debe ser resuelto con una división y una multiplicación.
El procedimiento del problema es deductivo porque el enunciado satisface las condiciones del concepto de multiplicación y división. Por tanto la solución del problema se obtiene calculando la multiplicación y división de los datos dados.
Deductivo → Dado el enunciado hemos creído conveniente utilizar el algoritmo de la división y multiplicación con decimales.
<u>Deductivo</u> -Ya que se sabe el precio de 4 yogures, por lo tanto se deduce que por una regla de 3, o una división se puede sacar el precio de un yogur, para, en adelante, averiguar el precio de 6 yogures. -Se puede tener la duda de si el IVA de un yogur es el mismo que el del pack de 4 yogures
¿Cuánto cuesta un yogur? Con esta expresión se deduce que mediante la división, obtenemos el precio de 1 yogur partiendo del precio de un envase de 4 yogures.
¿Cuánto cuesta un yogur? Se deduce que si 4 cuestan 1'60€, uno cuesta 0'40, porque se deduce que cada yogur cuesta lo mismo.
La segunda pregunta es deductiva, porque desde el enunciado de la situación problema, satisface las condiciones del concepto de multiplicación a partir de las cantidades obtenidas de la primera pregunta que es la regla general a seguir para obtener la solución a la segunda pregunta que es un caso concreto.
Deductivo: El enunciado de la situación-problema satisface las condiciones del concepto de la multiplicación y división, la solución del problema se obtiene realizando una serie de operaciones, primero una división para averiguar el valor de una unidad y luego una multiplicación para hallar el precio de 6 unidades.
Deductivo: El enunciado de la situación-problema satisface las condiciones del concepto de la multiplicación y división. Modelización: Se debe tener en cuenta que cada yogur ha de tener el mismo valor. Esto se sabe ya que al realizar la operación el resto es cero.
Todos los yogures deben tener el mismo precio, si esto no sucediera nos sería imposible encontrar la solución al problema. ¿Por qué sabemos que todos tienen el mismo valor? Porque el resto de la división es cero.
Para calcular el precio de un yogur hemos considerado que cada unidad del pack vale igual, por lo que hemos dividido el precio del pack entre el número de unidades que lo contienen. Al saber el precio de un yogur, lo multiplicamos por 6 unidades que resultará el precio de los 6 yogures.
· Situación de reparto total de 4 yogures en partes iguales. ·Situación deductiva: el enunciado del problema conlleva a calcular utilizando el algoritmo de la división y el de la multiplicación.
Hemos dividido el precio total del envase entre el número total de yogures que contiene cada envase para conocer el precio de un yogur, ya que se supone que cada yogur del envase cuesta lo mismo. Hemos multiplicado, una vez conocido el precio unitario de un yogur, por seis para conocer el precio total de los seis
Hemos utilizado la división porque es la propiedad que nos permite repartir una cierta cantidad entre tantas partes como se desee. La suma se ha utilizado para obtener un resultado total a partir de varias cantidades, al igual que la multiplicación.
Dado que el valor de los yogures es igual procedemos a la repartición del precio de 4 yogures en partes iguales, repartición realizada correctamente, a partir del algoritmo de la división. Finalmente para averiguar el precio de 6 yogures hemos realizado correctamente el algoritmo de la multiplicación, debido a que se trata de una suma repetida
- Realización de la operación. - Un yogur cuesta 0'40 céntimos porque repartimos lo que cuesta cuatro yogures entre la cantidad de yogures que es 4. - 6 yogures cuestan 2'40 euros porque como ya se ha obtenido el precio de un yogur vamos sumando para calcular lo que cuestan 6 yogures, con lo cual se suma 6 veces 0'40.
Transcribe los algoritmos de división y multiplicación hechos en la resolución del problema
Deductivo porque partimos de lo general a lo particular. Utilizamos reglas generales para resolver el caso en concreto, particularizando nuestra ejecución a la norma o ley.

De acuerdo con las categorías y sub-categorías descritas, las argumentaciones expuestas por los sujetos pueden ser organizadas de la siguiente manera: (a) las ocho primeras filas de la Tabla 6.18, en las que se agrupan los argumentos dados por 10 grupos, corresponden con argumentaciones de la sub-categoría “descripciones generales o en las que se hace paráfrasis del procedimiento realizado”, (b) las siguientes nueve filas de la Tabla 6.18, de los argumentos dados por nueve grupos, se agrupan en la sub-categoría “descripción parcial”, (c) la argumentación presentada en la fila 18 de la Tabla 6.18, dada por uno de los grupos, corresponde con la sub-categoría “descripción total”, (d) las argumentaciones presentadas entre las filas 19 a la 21 de la Tabla 6.18, dadas por tres grupos, corresponden con la categoría “uso de patrones de razonamiento”. Los dos argumentos no incluidos en estas categorizaciones se interpretan como categorías en sí mismos.

En la Tabla 6.19 resumimos la organización de las argumentaciones, dadas por 25/31 grupos, de acuerdo con las categorizaciones antes descritas. Los seis grupos restantes no dan ningún tipo de argumentos.

Tabla 6.19: Frecuencias de los tipos de argumentos dados por los grupos en el problema del yogur

	Tipos de argumentos					
	Uso de patrones de razonamiento	Descripciones			Reglas numeración decimal	Transcripción de algoritmos
		Total	Parcial	Paráfrasis		
Número de Grupos (N = 25)	3	1	9	10	1	1
%	9,7	3,2	29	32,3	3,2	3,2

Una valoración de los argumentos dados por los futuros profesores, según los argumentos expuestos en el análisis epistémico experto, muestra que los argumentos incluidos en las descripciones parciales y totales reconocidos por los grupos (10 grupos; 32,3%) se aproxima a los argumentos A_1 y A_2 reconocidos en el análisis previo. Asimismo, el reconocimiento del uso de patrones de razonamiento para justificar los procedimientos implicados en la resolución del problema, exhibido por tres de los grupos (9,7%), corresponde con el reconocimiento de los argumentos A_3 y A_4 del análisis previo. Estas manifestaciones indican que pocos grupos exhibieron el reconocimiento de los argumentos requeridos para justificar las propiedades/procedimientos puestos en juego en la resolución que se hace del problema del yogur. Lo cual conduce a concluir que pocos grupos desarrollan la competencia de reconocimiento del objeto argumentos.

6.9.2. Reconocimiento de EM-DR en el problema del yogur

El último objetivo, planteado en el desarrollo de esta investigación, refiere a valorar el uso de la faceta epistémica del análisis didáctico en el desarrollo de facetas del conocimiento matemático necesario para enseñar en el futuro profesor. En este sentido, en el apartado 6.6 referimos al uso/reconocimiento de los elementos matemáticos-didácticos relevantes (EM-DR1), identificados en el sub-apartado 6.5.4, como un indicador del desarrollo del conocimiento matemático necesario para la enseñanza de la matemática.

De acuerdo con lo expuesto en el sub-apartado 6.6.2 se pudo verificar el uso de estos elementos en el proceso de resolución y explicación de la resolución del problema del yogur. Concluimos en ese sub-apartado que estas acciones (resolución y explicación de la resolución) no parecen ser suficientes para motivar el reconocimiento de esos elementos, generándose la expectación en torno a que la tarea de análisis epistémico/cognitivo, por parte del futuro profesor, podría dar cuenta del reconocimiento de esos elementos y por ende del desarrollo del conocimiento didáctico-matemático.

En este orden de ideas, procederemos a continuación a valorar el reconocimiento de esos elementos, por parte de los futuros profesores, por medio de los análisis epistémicos realizados por ellos.

En el sub-apartado 6.9.1.1 observamos que sólo dos de los grupos (Fig. 6.24, antes presentada, grupos G1-26 y G1-27) identifican el uso que se hace de representaciones gráficas en el proceso de resolución y explicación de la resolución del problema. Se debe señalar que sólo esos dos grupos hicieron uso de representaciones gráficas al resolver y explicar la resolución del problema, lo cual induce a pensar, que el reconocimiento de las representaciones gráficas depende de uso en la resolución/explicación del problema. Esta posible relación conduce a incluir como parte del planteamiento del problema una consigna que solicite el uso de representaciones gráficas en el proceso de resolución/explicación.

Asimismo, en lo relativo al reconocimiento de símbolos asociados al uso de las operaciones realizadas, sólo dos de los grupos identifican el arreglo que se hace para realizar la división y la disposición tabular de los números para realizar la multiplicación (Fig. 6.24, antes presentada, grupos G1-19 y G1-22).

Estas manifestaciones señalan que pocos grupos (a lo sumo 4/31grupos; 12,9%) reconocen el primer elemento matemático-didáctico relevante (EM-DR1.1), por tanto, pocos grupos exhiben el desarrollo de un conocimiento didáctico-matemático (especializado) necesario para la enseñanza, relativo al uso de representaciones y simbolizaciones, al resolver el problema del yogur.

Respecto al uso/reconocimiento de la idea de razón, observamos que sólo uno de los grupos, Fig. 6.25 (G1-20), exhibe un uso de la idea de razón, quien al referir al significado del objeto lingüístico "1 envase (4 yogures)", señala: "6 yogures (1'5 envase)". Este hecho indica una manifestación nimia del uso de la idea de razón (mas no de su reconocimiento), por parte de los grupos, es decir, los sujetos no exhiben el reconocimiento del segundo elemento matemático-didáctico relevante (EM-DR1.2) de manera explícita.

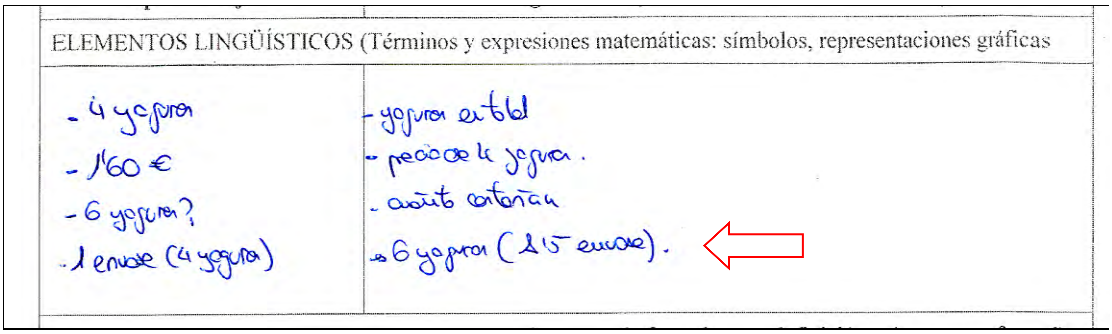


Fig. 6.25: Uso de la idea de razón (G1-20)

En relación con el reconocimiento del proceso de modelización que permite suprimir/restituir las magnitudes correspondientes a los valores numéricos operados, sólo se ha podido observar que uno de los grupos, Fig. 6.26 (G1-14), al referir al objeto conceptos, establece la correspondencia:

Objeto:	Significado:
"Proporcionalidad entre cantidades" →	Relación entre 2 cantidades que influye en el resultado final

Lo cual parece involucrar el reconocimiento del proceso de modelización referido. Esta manifestación nos indica que sólo uno de los grupos exhibe indicios de reconocimiento del tercer elemento matemático-didáctico relevante (EM-DR1.3).

CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)	
-Multiplicar	Suma re-iterada de una cantidad un nº determinado de veces
-División	A una cantidad inicial (Dividendo) se le resta un nº (divisor) varias veces (cociente) quedando un ~~solo~~ resto.
-Nº decimal	Número que, puesto en forma de fracción, su denominador es una potencia de 10. La parte decimal es finita. (clase de nº racional)
-Proporcionalidad entre cantidades.	Relación entre 2 cantidades que influye en el resultado final,

Fig. 6.26: Reconocimiento del EM-DR1.3: Modelización (G1-14)

La acción de reconocer que existen diferentes usos dados a los términos de división y multiplicación, relativa al reconocimiento del cuarto elemento matemático-didáctico relevante (EM-DR1.4), es realizada por diferentes grupos. En efecto, hemos observado que la multiplicación y división han sido reconocidas por los grupos como elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos y propiedades. En la Fig. 6.27 mostramos un ejemplo de ese reconocimiento.

CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)	
División	Hace referencia al concepto de repartir una cantidad en partes iguales.
Multiplicación	Hace referencia a una suma compuesta por ~~tres~~ sumandos iguales
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
División	Operación realizada para obtener el precio de un yogur
Multiplicación	Es la operación realizada para obtener el precio de 6 yogures, partiendo del precio de 1 yogur. En la que multiplicamos un número entero por una fracción.

Fig. 6.27: Reconocimiento del EM-DR1.4: Diferentes significados, mismos términos (G1-10)

La división (multiplicación) al ser reconocida como elemento lingüístico (Tabla 6.9, 13/31 grupos; 41,9%) le es asignado el significado ―concepto de división (multiplicación)”. Asimismo, la división y multiplicación al ser reconocidas como conceptos (Tabla 6.10: 28/31 grupos/división, 27/32 grupos/multiplicación) le son asignados diversos significados (Tabla 6.11 para la división, Tabla 6.12 para la multiplicación), predominando el significado de reparto equitativo para la división (17/31 grupos, 54,8%) y suma reiterada para la multiplicación (16/31 grupos, 51,6%). De la misma manera, se observó un reconocimiento altamente frecuente de la división (multiplicación) como procedimiento (30/31 grupos; 96,8%), puesto que, generalmente, este término es utilizado como sinónimo de algoritmo de la división (algoritmo de la multiplicación). Finalmente, sólo 2/31 grupos (6,5%) reconocen el término división (multiplicación) como propiedad, asignándole significados que refieren, más bien, a su interpretación como procedimientos.

Lo anterior indica la manifestación de un *conocimiento especializado del contenido*, relativo al reconocimiento de distintos usos/significados asignados a los términos división y multiplicación (como elemento lingüístico, concepto o procedimiento), observándose que esta manifestación es exhibida en promedio por un considerable porcentaje de los grupos.

Debemos señalar que en buena medida las manifestaciones antes señaladas se hacen explícitas debido al uso de la GROS. Estas manifestaciones son consideradas un uso avanzado de los significados, puesto que la acción de hacerlos explícitos se encuentra más allá de su uso *per se*.

Otro de los aspectos que se hace patente con la aplicación de la GROS es el reconocimiento explícito que hacen los sujetos de la puesta en juego de los patrones de razonamiento (división como reparto equitativo, multiplicación como suma reiterada) en el proceso de resolución. En efecto, hemos podido observar, en la Tabla 6.11, que 17/31 grupos (54,8%), reconocen el uso de la división como reparto en cantidades iguales, y, en la Tabla 6.12, hemos observado que 16/31 grupos (51,6%) reconocen el uso de la multiplicación como suma reiterada. Estos resultados indican que más de la mitad de los grupos reconocen el uso de patrones de razonamiento en la resolución del problema. Al comparar estos resultados con los previamente referidos sobre el uso de EM-DR5, en las explicaciones de las resoluciones dadas por los sujetos (Tabla 6.5: 5/31 grupos/división, 8/31 grupos /multiplicación), observamos un crecimiento sustancial de ese uso.

No obstante, la valoración del quinto elemento matemático-didáctico relevante (EM-DR1.5), incluye hacer uso o reconocer estos patrones como argumentos, de modo que se utilicen para sustentar las propiedades o procedimientos puestos en juego en la resolución/explicación del problema. En este sentido, hemos observado, en la Tabla 6.19, que sólo 3/31 grupos (9,7%) argumentan haciendo uso de patrones de razonamiento, es decir, pocos grupos exhiben el uso/reconocimiento de estos patrones al momento de reconocer los argumentos que sustentan el uso de propiedades y/o procedimientos, puesto en juego en la resolución/explicación del problema.

De manera que el uso/reconocimiento de EM-DR1.5, exhibido por los futuros profesores informa sobre la manifestación de un *conocimiento especializado del contenido*, relativo al uso/reconocimiento de patrones de razonamiento en la resolución/explicación del problema, el cual es exhibido por más de la mitad de los grupos. Pero, luego, el uso/reconocimiento de esos patrones para justificar las propiedades y/o procedimientos puestos en juego en la resolución/explicación del problema, es exhibido por muy pocos grupos. Esto indica poca manifestación de la competencia para argumentar por parte de los grupos, lo que hemos interpretado como una dificultad adherida al uso de la GROS.

6.9.3. Análisis epistémico realizado por los futuros profesores del problema de la limonada

Presentaremos ahora un resumen de los análisis epistémicos, realizados al problema de la limonada, por parte de los 13 grupos participantes en la aplicación del Instrumento 2.3-E. Este resumen lo hacemos siguiendo la pauta establecida en el sub-apartado 6.9.1; por medio de comparaciones entre los objetos identificados en el análisis epistémico experto y los observados en los análisis realizados por la muestra de futuros profesores.

Como referimos en ese sub-apartado, tales comparaciones nos servirán para valorar el desarrollo de competencias en la faceta epistémica del análisis didáctico, referidas al reconocimiento de objetos y significados activados en la resolución del problema de la limonada.

6.9.3.1. Competencias de reconocimiento de elementos lingüísticos y sus significados

El estudio de los *elementos lingüísticos*, indica que las frases que conforman el enunciado del problema son los elementos lingüísticos reconocidos con mayor frecuencia por parte de los grupos. Sin embargo, esas frecuencias son relativamente bajas (5/13 grupos; 38,5%). Este reconocimiento coincide con lo realizado en el análisis experto. En la Tabla 6.20 presentamos las frecuencias con que los elementos lingüísticos, identificados en el análisis experto, son reconocidos por los grupos.

La razón unitaria 1c. de azúcar / 4c. de limón es reconocido por sólo uno de los grupos. También podemos observar en la Tabla 6.20 la manifestación de otros elementos lingüísticos que no fueron identificados en el análisis experto, a saber, los referidos al uso de simbolizaciones (4/13 grupos; 30,8%) y de representaciones gráficas (3/13 grupos; 23,1%).

Tabla 6.20: Frecuencias de los elementos lingüísticos reconocidos por los grupos en el problema de la limonada.

<table>
<tr><th rowspan="3">Número de Grupos (N = 13)</th><th colspan="6">Elementos lingüísticos frecuentemente reconocidos</th></tr>
<tr><th colspan="3">Frases del enunciado</th><th rowspan="2">1c. de azúcar / 4c. de limón</th><th rowspan="2">Uso de simbolizaciones</th><th rowspan="2">Uso de representaciones</th></tr>
<tr><th>3 o 5c. azúcar</th><th>12 o 20c. limón</th><th>¿Cuál es más dulce?</th></tr>
<tr><td></td><td>6</td><td>6</td><td>6</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td></tr>
<tr><td>%</td><td>46,2</td><td>46,2</td><td>46,2</td><td>7,7</td><td>30,8</td><td>23,1</td></tr>
</table>

El uso de simbolizaciones, reconocidas por los grupos, refiere específicamente al uso de flechas para establecer relaciones, se trata de simbolizaciones del siguiente tipo: “Juan → 3 azúcar →12 limón; María → 5 azúcar → 20 limón”. Por otro lado, el uso de representaciones gráficas, las cuales fueron inicialmente usadas por los grupos para resolver el problema, luego ese uso es reconocido por medio del análisis epistémico que realizan los mismos grupos (dos de estos tipos de representaciones fueron mostrados en la Fig. 6.22, (G2-3) y (G2-7)).

Otros elementos lingüísticos reconocidos por uno o dos grupos, que no fueron reconocidos en el análisis experto, son los siguientes: (a) por dos grupos: “¿Tienen el mismo gusto?”, “División”, (b) por un grupo: “¿? Signos de interrogación”, “3, 12, 5, 14 - números”, “Razón”, “Relación entre dos razones”, “Proporción”, “Cucharada”, “M.C.M.”, “Tabla”. En la Fig. 6.28 mostramos un ejemplo del reconocimiento de los elementos lingüísticos realizado por grupo G2-3.

Las manifestaciones referidas, muestran que los grupos reconocen, aunque con una frecuencia relativamente baja, la mayoría de los elementos lingüísticos identificados en el análisis experto. Además, muestran reconocer una variedad considerable de elementos lingüísticos, no reconocidos en el análisis experto, de los cuales se hace uso en la resolución del problema. Esto nos indica que la competencia de reconocimiento de elementos lingüísticos, exhibida por los futuros profesores, muestra un desarrollo moderadamente satisfactorio.

Tipos de objetos	Significados
• Representaciones: (términos y expresiones matemáticas; símbolos; repr. gráfica)	
• 3 cucharadas de azúcar	• Cantidad de azúcar que usa Juan
• 12 cucharadas de limón	• Cantidad de zumo que usa Juan
• 5 cucharadas de azúcar	• Cantidad de azúcar que usa María
• 20 cucharadas de limón	• Cantidad de zumo que usa María
• ¿Cuál de ellas es más dulce?	• Comparación de ambas limonadas
• ¿Tienen el mismo gusto?	• Se igualan las dos limonadas.
• División	• Concepto de división.
• Dibujo (línea, recta) para representar.	• Representación gráfica para dar una visualización de la proporción.
• Razón	• Comparación entre dos mezclas.
• Relación entre dos razones	• Igualdad entre dos razones.

Fig. 6.28: Ejemplo del reconocimiento de elementos lingüísticos por uno de los grupos en el problema de la limonada (G2-3).

En lo relativo a los significados asignados por los grupos a los elementos lingüísticos más frecuentes y que fueron identificados en el análisis previo, encontramos que los 6 grupos asignan significados a las frases del enunciado, relativas a las cantidades de cucharadas de azúcar y de limón, muy próximos al asignado en el análisis experto.

Con respecto al significado asignado a la cuestión ¿Qué limonada es más dulce? Se presentan cuatro significados diferentes que los 6 grupos proveen: (a) dos grupos consideran que la pregunta refiere a la “Comparación que debe hacerse entre dos razones”, (b) un grupo considera que refiere a la “Comparación de ambas limonadas”, (c) un grupo considera que refiere a “Comparación de cantidad de azúcar”, (d) un grupo considera que “Plantea la incógnita que hay que hallar”, y (e) un grupo no asigna significado. De manera que 5 de los 6 grupos, que reconocen este objeto, asignan un significado adecuado a esta cuestión en función del papel que juega en la resolución del problema.

En relación con el significado asignado a la razón unitaria (4c. limón/1c. azúcar), reconocida por un solo grupo, refiere a la “Medida del grado de acidez”, lo cual coincide con la interpretación que se hace de este objeto en el análisis experto.

Estas manifestaciones muestran que, aunque con baja frecuencia, los significados asignados a los elementos lingüísticos por parte de los grupos se aproximan a los propuestos en el análisis experto. Esto indica una manifestación, aunque poco frecuente, del desarrollo de la competencia de reconocimiento de significados asignados a elementos lingüísticos, activados en la resolución del problema de la limonada, por parte de la muestra de futuros profesores.

6.9.3.2. Competencias de reconocimiento de conceptos y sus significados

El estudio del reconocimiento de los conceptos en los análisis epistémicos realizados por los sujetos, nos informa que en buena medida, aunque en algunos casos con frecuencias relativamente bajas, los diferentes conceptos reconocidos en el análisis experto, son reconocidos por los futuros profesores. En la Tabla 6.21 mostramos las frecuencias de esos reconocimientos. Observamos que uno de los conceptos reconocidos con mayor frecuencia es el de división o cociente (7/13 grupos; 53,9%).

Tabla 6.21: Frecuencias de los conceptos reconocidos por los grupos en el problema de la limonada.

Número de Grupos (N = 13)	Conceptos reconocidos					
	División/cociente	Cantidades	Razón	Magnitudes	Medidas	Proporciones
	7	7	5	1	1	6
%	53,85%	53,85%	38,46			46,15

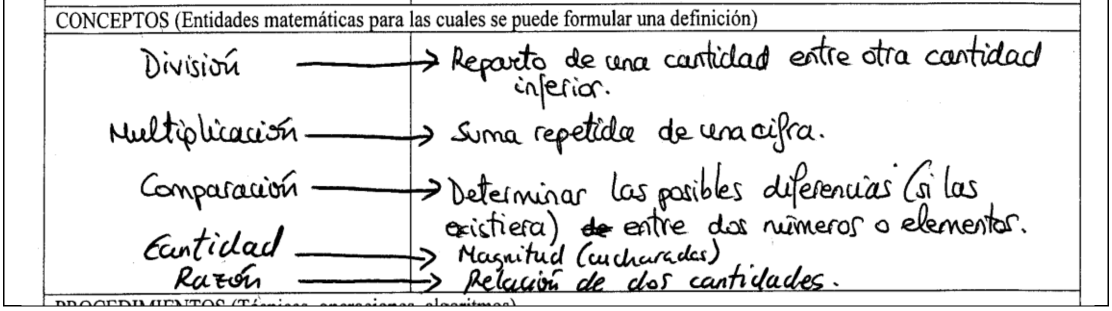
Similarmente sucede con el concepto cantidad. No obstante, la frecuencia que se presenta en la tabla para el concepto “Cantidades” es el producto de haber interpretado ese concepto de acuerdo con el significado asignado al mismo en el análisis experto, de modo que se dio lugar a considerar que el reconocimiento del concepto "Números naturales", exhibido por 4 grupos, corresponde con un tipo particular de cantidad. En este orden de ideas, al juntar los 3 grupos que reconocen los conceptos "Cantidades" y los 4 que reconocen "Números naturales", obtenemos la frecuencia mostrada en la Tabla 6.21 (7/13 grupos; 53,9%) para ese concepto.

El concepto de razón es reconocido por 5/13 grupos (38,5%), lo que indica una manifestación moderada del reconocimiento de ese concepto. Los conceptos de magnitudes y medidas presentan una frecuencia mínima, puesto que uno solo de los grupos reconoce esos conceptos. También observamos que casi la mitad de los grupos (6/13 grupos; 46,2%) reconocen el concepto “Proporciones”, que no fue reconocido en el análisis experto.

Otros conceptos reconocidos por los grupos, que no han sido referidos en el análisis experto son los siguientes: (a) por dos grupos: “Conjunto”, “Multiplicación”, “Comparación”, (b) por un grupo: “Unión de conjuntos distintos”, “M.C.M”, “Volumen”, “Grado de acidez”.

Estas manifestaciones señalan que los futuros profesores reconocen, por medio del análisis epistémico realizado, la puesta en juego de diversos conceptos, manifestándose una tendencia a ser reconocidos, con mayor frecuencia, los identificados en el análisis experto. Estos hechos indican una manifestación del desarrollo de la competencia de análisis didáctico, referida al reconocimiento de conceptos, por parte de los futuros profesores.

Respecto a los significados asignados a los conceptos reconocidos, sólo referiremos a los que han sido identificados en el análisis experto y que, al mismo tiempo, han sido reconocidos con mayor frecuencia por los grupos, es decir, los conceptos de división/cociente, cantidades y razón. En la Fig. 6.29 mostramos un ejemplo de un grupo que reconoció estos tres conceptos.


CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición)

División → Reparto de una cantidad entre otra cantidad inferior.
Multiplicación → Suma repetida de una cifra.
Comparación → Determinar las posibles diferencias (si las existiera) ~~de~~ entre dos números o elementos.
Cantidad → Magnitud (cucharadas)
Razón → Relación de dos cantidades.

Fig. 6.29: Ejemplo de conceptos reconocidos con mayor frecuencia (G2-11)

En la Tabla 6.22 presentamos los significados asignados por los grupos al concepto de división/cociente y las frecuencias respectivas.

Observamos que los dos primeros significados asignados, reconocidos por 5 de los 7 grupos, conducen a una interpretación adecuada de la división o el cociente 12/3 = 4 ó 20/5 = 4, como: “4c. de limón por cada cucharada de azúcar”. Específicamente el significado “Repartir en cantidades iguales” parece el más natural, puesto que al asignar el segundo significado reconocido: “Veces que una cantidad contiene a otra” al concepto de división, el cociente 12/3 = 4, 4 debe ser interpretado como el número que debe ser tomado 3 veces para obtener 12, es decir, 12 contiene 3 veces 4, lo que indica que por cada cucharada de azúcar se tienen 4c. de limón, pero esta interpretación involucra un uso tácito de la propiedad conmutativa de la multiplicación.

Tabla 6.22: Frecuencias de los significados asignados al concepto de división/cociente por parte de los grupos.

Significados de división	**N**	**%**
Repartir en cantidades iguales	3	23,1
Veces que una cantidad contiene a otra	2	15,4
Proporción	1	7,7
Concepto de la operación de división	1	7,7
No reconocen el concepto/significado de división	6	46,2
Total	13	100,0

El significado “Proporción” dado al concepto de división por uno de los grupos, puede referir a un uso poco pertinente pero muy difundido que se hace del concepto de proporción, en el cual se confunde con el de razón. Sobre este asunto referimos en el sub-apartado 1.6.3, del capítulo 1. En este orden ideas, interpretar la relación 12/3 = 4/1 como una proporción, podría referir a un uso avanzado de las ideas involucradas en la división/cociente que incluye su interpretación como una razón. No obstante, los datos recogidos no son suficientes para sostener que estas interpretaciones hayan sido realizadas.

En la Tabla 6.23 presentamos los significados dados al concepto cantidad y las frecuencias respectivas. El significado “Cardinal de un conjunto”, que se presenta con la mayor frecuencia (4/13 grupos; 30,8%), corresponde con el concepto de “Número natural”, incluido en el concepto “Cantidades”, de acuerdo con la interpretación dada a este concepto en el análisis experto. De esta interpretación resulta la asignación de ese significado. Se debe señalar que 1 de estos 4 grupos asigna el significado: “Cardinal del conjunto cuyos elementos son cucharadas”, lo que refiere al valor numérico de la medida de magnitud en cucharadas.

Tabla 6.23: Frecuencias de los significados asignados al concepto de cantidades por parte de los grupos.

Significados de cantidad	**N**	**%**
Valores particulares de las magnitudes	1	7,7
Magnitud, cucharadas	2	15,4
Cardinal de un conjunto	4	30,8
No reconocen el concepto/significado de cantidad	6	46,2
Total	13	100,0

Observamos que todos, excepto posiblemente el primero, de los significados asignados al concepto de cantidad refieren, a lo sumo, al valor numérico de las medidas de magnitud con cucharadas como unidad de medida, por lo que se observa que el reconocimiento de cantidades intensivas o la razón entre cantidades como una nueva cantidad está prácticamente ausente.

De manera que el reconocimiento de significados del concepto cantidad por parte de los grupos, se manifiesta con poca frecuencia y de manera parcial.

En la Tabla 6.24 presentamos los significados dados al concepto de razón, observamos que los dos primeros significados, reconocidos por 3 grupos, están muy próximos al referido en el análisis experto, mientras, el tercer significado, refiere a una descripción superficial de ese concepto.

Tabla 6.24: Frecuencias de los significados asignados al concepto de razón por parte de los grupos.

Significados de razón	**N**	**%**
Cocientes indicados entre número de cucharadas de azúcar y de limón	2	15,4
Relación multiplicativa entre cantidades de magnitud	1	7,7
Relación de dos cantidades	2	15,4
No reconocen el concepto/significado de razón	8	61,5
Total	13	100,0

Las manifestaciones anteriores, relativas al reconocimiento de significados de los conceptos identificados, señala que algunos (pocos) grupos reconocen significados adecuados a los conceptos reconocidos. Esto representa una manifestación del desarrollo de la competencia de reconocimiento de significados, de algunos de los conceptos activados en la resolución del problema de la limonada, la cual es exhibida por pocos grupos.

6.9.3.3. Competencias de reconocimiento de procedimientos y sus significados

Un resumen del estudio de los procedimientos reconocidos por los sujetos, en el análisis realizado a la resolución del problema de la limonada, es presentado en la Tabla 6.25.

Debemos referir que dentro del procedimiento “División” presentado en la tabla hemos incluido los términos o frases: “División” (6/13 grupos), “Algoritmo de la división” (2/13 grupos), “Regla de la división” (1/13 grupos), “2’5, 12÷3” (1/13 grupos), que han sido reconocidos por los grupos como procedimientos.

Tabla 6.25: Frecuencias de los tipos de procedimientos reconocidos por los grupos en problema de la limonada

Número de Grupos (N = 13)	Tipos de procedimientos				
	División	Comparación	Razón	Representación gráfica	Multiplicación
	10	5	2	2	2
%	76,9	38,5	15,4	15,4	15,4

Asimismo, dentro del procedimiento “Comparación”, presentado en la tabla, han quedado incluidos: "Equivalencia", "Proporción", "Igualdad de razones", "Comparar" y "Comparación de fracciones", que han sido reconocidos como procdedimientos, de manera individual por algunos grupos.

De esta manera, observamos en la Tabla 6.25 que el procedimiento “División”, que consideramos asociado al objeto “División de números naturales”, identificado en el análisis experto, es reconocido por un considerable número de grupos (10/13 grupos; 76,9%). Mientras, el procedimiento “Comparación”, que consideramos asociado al objeto “Comparación de fracciones”, reconocido en el análisis experto, es reconocido por 5 grupos (38,5%). No obstante, el procedimiento “Modelización”, identificado en el análisis experto, no es reconocido por ninguno de los grupos. Al tiempo que se observan otros significados reconocidos por los grupos, de manera individual, los cuales son: “Regla de tres (proporción directa)”, “M.C.M.” y “Simplificar”.

Estos hechos, en los que se observa que para al menos dos procedimientos, de los 3 identificados en el análisis experto, son reconocidos por un buen número de grupos, y, en adición, los grupos muestran reconocer procedimientos no reconocidos en el análisis experto, indican una manifestación del desarrollo de la competencia de reconocimiento de procedimientos, puestos en juego en la resolución del problema de la limonada, observándose el reconocimiento del uso del algoritmo de la división como uno de los más frecuentes.

El estudio sobre los significados asignados a los procedimientos lo limitaremos a los dos procedimientos reconocidos con mayor frecuencia por los grupos y que coinciden con los identificados en el análisis experto, estos son los procedimientos: división y comparación.

Los significados asignados al procedimiento división por los grupos los resumimos en la Tabla 6.26. Dentro del significado “Hallar la razón unitaria”, que coincide con el significado dado al procedimiento de división en el análisis experto, han quedado incluidos los siguientes significados: “Permite hallar la proporción de 1 cucharada de azúcar por cada 4 de zumo”, “Permite calcular la cantidad de cucharadas de limón por cada cucharada de azúcar”, “Procedimiento matemático que ayuda a establecer la proporción”, “Hallar la razón”.

Observamos que 4/13 grupos (30,8%) asignan un significado al procedimiento de división muy próximo al referido en el análisis experto para este procedimiento. Los tres significados restantes, si bien refieren al procedimiento que se realiza, más bien representan una idea o patrón de razonamiento asociado al concepto de división o a una paráfrasis del procedimiento.

Tabla 6.26: Frecuencias de los significados asignados al procedimiento división por parte de los grupos.

Significados de división	**N**	**%**
Hallar la razón unitaria	4	30,8
Repartir una cantidad en partes iguales	2	15,4
Regla de la división: $D = d \cdot q + r$	2	15,4
Operación de división, $12 \div 3 = 4$ Juan ; $20 \div 5 = 4$ María	2	15,4
No reconocen el concepto/significado de división	3	23,1
Total	13	100,0

Respecto al significado asignado al procedimiento comparación, los significados dados los hemos agrupado en dos tipos: (a) los más próximos al significado propuesto en el análisis experto, entre los que se encuentra: “Permite comparar el grado de dulzura”, “Dar respuesta al problema” y (b) los que se limitan a una paráfrasis o un enunciado general, que son los siguientes: “Comparación entre dos cantidades”, “Comparar dos razones”, “Determinar las posibles diferencias (si las existiera) entre dos números o elementos”. De manera que sólo dos de los significados asignados al procedimiento comparación se aproximan al referido en el análisis experto.

Las manifestaciones relativas a los significados, dados a los procedimientos referidos por parte de los grupos, muestran una puesta en escena de un desarrollo de la competencia de reconocimiento de significados de los procedimientos, puestos en juego en la resolución del problema de la limonada, el cual fue exhibido por pocos grupos de la muestra.

6.9.3.4. Competencias de reconocimiento de propiedades y sus significados

El estudio de las propiedades o proposiciones reconocidas por los grupos, en torno a las resoluciones dadas al problema de la limonada, nos ha conducido a identificar que los grupos reconocen como propiedades oraciones que no son proposiciones, tales como interrogantes u oraciones que indican la realización de una acción. Por ejemplo, dentro de las interrogantes hemos observado las siguientes: ―¿Cuál de las limonadas es más dulce?”, ¿Cuál de las dos limonadas es más dulce, la de Juan o la de María, o tienen el mismo gusto?”, las cuales son propuestas por 3/13 grupos como propiedades o proposiciones. En el caso de oraciones que indican una acción encontramos: ―Prueba de la proporcionalidad directa”, ―Algoritmo de la división”, "Calcular cuál de las dos limonadas es más dulce, o si por el contrario las dos son iguales", las cuales son propuestas por 3/13 grupos como proposiciones.

Las manifestaciones anteriores nos indican una interpretación inadecuada de lo que refieren las propiedades o proposiciones puestas en juego en la resolución de un problema. Esta es una cuestión a tener en cuenta en la revisión y puesta en acción de futuras intervenciones formativas sobre el contenido abordado.

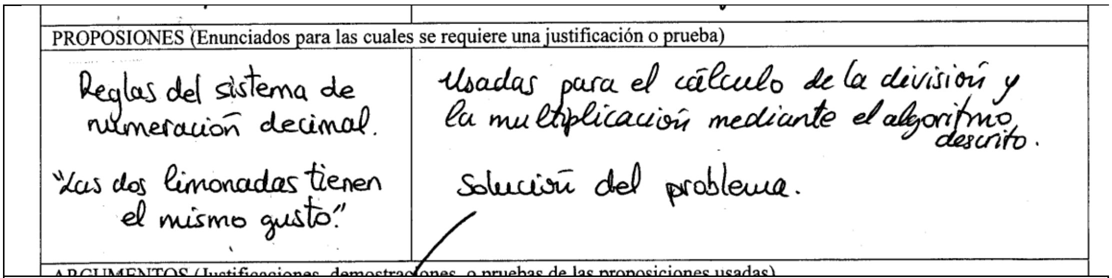
Por otro lado se observan tres tipos de proposiciones reconocidas por los sujetos: (a) las que refieren a que ambas limonadas tienen el mismo gusto (sabor), entre las que encontramos: ―Tienen el mismo gusto”, ―Las dos limonadas tienen el mismo gusto”, ―Las dos limonadas tienen la misma proporción”, (b) las que refieren a la razón unitaria entre las limonadas, que incluyen las proposiciones: ―La razón entre azúcar y limón para María y para Juan es 4”, ―Las limonadas A y B tienen una proporción de 1 cucharada de azúcar por 4 de limón”, ―Por cada cucharada de azúcar se le añade 4 de limón, en ambas limonadas esa es la relación”, y (c) las que refieren a las razones iniciales: ―Juan →

3/12, María → 5/20”. En la Tabla 6.27 presentamos un resumen de estas propiedades y las frecuencias con que fueron reconocidas por los grupos. En la Fig. 6.30 mostramos ejemplos de los reconocimientos hechos con mayor frecuencia por los grupos de las propiedades referidas.

Tabla 6.27: Frecuencias de las propiedades reconocidas por los grupos en el problema de la limonada.

Número de Grupos (N = 13)	Propiedades		
	Tienen el mismo gusto	La razón de ambas limonadas es 1c. azúcar/4c. limón	Juan → 3/12, María → 5/20
	4	3	1
%	30,8	23,1	7,7

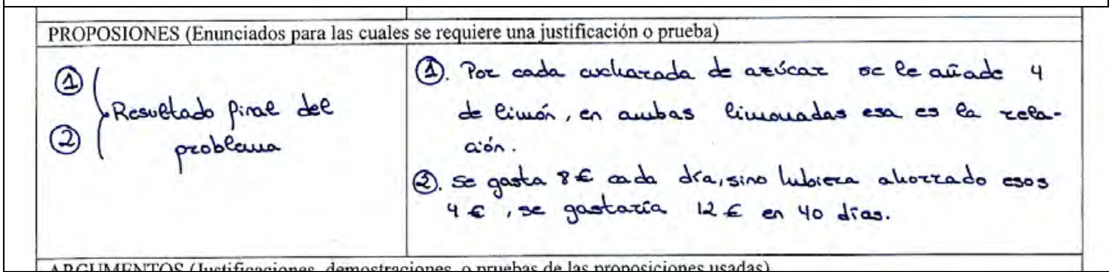
Observamos que únicamente la propiedad “P_3: Las mezclas tienen el mismo sabor”, identificada en el análisis experto, es reconocida como propiedad por 4/13 grupos (30,8). Asimismo, se observa que 3/13 grupos reconocen la razón unitaria “1c. de azúcar/4c. de limón” como una propiedad, exhibiendo un uso apropiado del reconocimiento de este tipo de objetos.


PROPOSIONES (Enunciados para las cuales se requiere una justificación o prueba)

Reglas del sistema de numeración decimal. “Las dos limonadas tienen el mismo gusto”	Usadas para el cálculo de la división y la multiplicación mediante el algoritmo descrito. Solución del problema.

ARGUMENTOS (Justificaciones, demostraciones, o pruebas de las proposiciones usadas)

Reconocimiento de la propiedad “Las dos limonadas tienen el mismo gusto” (G2-11)


PROPOSIONES (Enunciados para las cuales se requiere una justificación o prueba)

① ② Resultado final del problema	①. Por cada cucharada de azúcar se le añade 4 de limón, en ambas limonadas esa es la relación. ②. Se gasta 8€ cada día, si no hubiera ahorrado esos 4€, se gastaría 12€ en 40 días.

ARGUMENTOS (Justificaciones, demostraciones, o pruebas de las proposiciones usadas)

Reconocimiento de la propiedad relativa a la razón unitaria “1c. de azúcar /4c. de limón” (G2-12)

Fig. 6.30: Ejemplos del reconocimiento de las propiedades por parte de los grupos

Las manifestaciones referidas indican que el reconocimiento de propiedades se presenta como una actividad compleja, puesto que algunos de los grupos de futuros profesores proveen de frases que no representan propiedades, y, al mismo tiempo, frases que sí representan propiedades. Además, pocos grupos reconocen la propiedad fundamental P_3, que es la solución del problema. No obstante, 8/13 grupos (61,5%) reconocen al menos una propiedad de manera adecuada. De manera que, este último hecho es un indicador del desarrollo de la competencia de reconocimiento de propiedades en el problema de la limonada por parte de los futuros profesores, aunque la frecuencia de reconocimiento de más de una propiedad por grupo es prácticamente inexistente.

El estudio de los significados asignados por los grupos a las propiedades reconocidas, se limitará a referir a los significados dados a las propiedades: “Tienen el mismo gusto” y “La razón de ambas limonadas es 1c. de azúcar/4c. de limón”. Consideramos que ambas propiedades están íntimamente relacionadas y, por ende, sus significados pueden ser similares al propuesto para la propiedad P_3, en el análisis experto.

Los significados dados por los grupos se han agrupado en dos tipos de significados: (a) los que son próximos al significado dado a la proposición P_3 en el análisis experto, en el que han quedado incluidos: “Solución del problema” y “Resultado final del problema” y (b) paráfrasis o justificación de alguna de las propiedades reconocidas, en la que han quedado incluidos: “Las dos limonadas tienen la misma cantidad de azúcar en relación con la cantidad de concentrado”, “La razón entre azúcar/limón en cada uno de los casos es la misma, con lo cual deducimos que las limonadas son iguales de dulces”, “Si cada 3 de azúcar hay 12 de limón, por cada cucharada de azúcar habrá 4 de limón y si cada 5 de azúcar hay 20 de limón, por cada cucharada de azúcar habrá 4 de limón”. En la Tabla 6.28 presentamos las frecuencias con que se presentan estos dos significados.

Tabla 6.28: Frecuencias de los significados asignados, a las propiedades reconocidas con mayor frecuencia por los grupos, en el problema de la limonada.

	Significados de las propiedades más frecuentes		
Número de Grupos	Es la solución al problema	Paráfrasis o justificación de alguna de las propiedades reconocidas	No provee significado
(N = 13)	3	3	1
%	23,1	23,1	7,7

Observamos que 3/13 grupos (23,1%) asignan significados, a las proposiciones reconocidas, similares al asignado a la proposición P_3 en el análisis experto. Asimismo, 3/13 grupos (23,1%) hacen paráfrasis o tratan de justificar las proposiciones reconocidas, con el fin de proveer significado a las mismas. Sólo 1 de los grupos no provee significado a las proposiciones reconocidas. Estas manifestaciones, aunque son exhibidas por pocos grupos, representan expresiones del desarrollo de competencias de reconocimiento de significados de las proposiciones puestas en juego en la resolución del problema de la limonada.

6.9.3.5. Competencias de reconocimiento de argumentos y sus significados

Los diferentes argumentos expuestos por los grupos, en relación con la resolución del problema de la limonada, los hemos transcrito y ordenado con fines específicos en la Tabla 6.29.

Tabla 6.29: Argumentos presentados por los grupos en torno al problema de la limonada

Tienen el mismo sabor, los grados de dulzura y acidez son iguales en ambos casos
Las dos limonadas tienen el mismo gusto, dado que las proporciones de azúcar y limón son las mismas en las dos limonadas.
Porque a mayor aumento de una, mayor aumento de la otra en la misma proporción
Ambos dibujos muestran cómo se reparten el azúcar y el limón
Son igual de dulces, pues la cantidad de azúcar por cantidad de limonada indica lo dulce que está. Tras comparar correctamente la proporción de azúcar que hay en cada una de las limonadas podemos constatar que son igual de dulces.
La razón 12/3 es igual a la razón 20/5, de lo cual deducimos que ambas limonadas son iguales de dulces
Tienen la misma proporcionalidad, pues hemos realizado unas divisiones (12 -:- 3 y 20-:- 5) para averiguar si las cantidades son proporcionales
Igualando las dos proposiciones iniciales con un mismo denominador, nos damos cuenta de que son proporcionales y tienen la misma cantidad de azúcar en relación con la cantidad de concentrado
Hemos dividido la cantidad de cucharadas de concentrado de limón entre las cucharadas de azúcar que usa Juan. Después hemos realizado la misma operación con las cantidades usadas por María. Por último hemos comparado las proporciones obtenidas en las operaciones anteriores para hallar la incógnita
A través de la división queremos calcular cuántas cucharadas de concentrado a una de azúcar, es decir su equivalencia, para calcular la proporción en cada caso y calcular la solución del problema
El enunciado de la situación-problema satisface las condiciones del concepto de división, por tanto la solución del problema se obtiene dividiendo las dos razones (cucharadas de limón y cucharadas de azúcar) y observamos que contienen el mismo grado de acidez
Puesto que se añade una cucharada de azúcar por cada cuatro cucharadas de limón, podemos decir que las cantidades son proporcionales en ambos casos

Una característica común, observada en los diferentes argumentos, es que están dirigidos a justificar la resolución o solución del problema, es decir, algunos se dirigen a explicar el procedimiento desarrollado en la resolución del problema, mientras otros sólo tratan de justificar por qué las limonadas son iguales de dulces. De acuerdo con esta distinción y tomando en cuenta los argumentos identificados en el análisis experto, se observa que los argumentos presentados en la Tabla 6.29, se pueden agrupar en tres tipos, a saber:

(a) Argumento-solución: los que refieren a una justificación específica de la solución del problema, generalmente expresada por medio de una paráfrasis, en el que agrupamos los argumentos dados en las cinco primeras filas de la Tabla 6.29, estos tipos de argumentos se relacionan con el argumento A_3 del análisis experto.

(b) Argumento-resolución: los que hacen mención al procedimiento involucrado o presentan una descripción del mismo (división, equivalencia de fracciones, reducción a la unidad). Este tipo de argumentos lo podemos observar en las filas 6 – 11 de la tabla referida. Dentro de este tipo de argumentos se pueden observar dos usos diferentes: (i) los que no presenta una justificación del procedimiento empleado (filas 6 – 9 de la Tabla 6.29); (ii) los que presentan una justificación de los procedimientos (división, equivalencia de fracciones, reducción a la unidad) puestos en juego (filas 10 y 11 de la Tabla 6.29). Esta distinción permite observar una aproximación de los cuatro primeros usos, referidos en (i), al argumento A_3 del análisis experto. Mientras, los dos siguientes, descritos en (ii), parecen referir a un reconocimiento de condiciones iniciales del problema (razones iniciales no directamente comparables), para las cuales se requiere realizar un procedimiento específico que conduce a la solución. En este orden de ideas, observamos, en estos dos últimos argumentos, una manifestación próxima al reconocimiento de los argumentos A_1 y A_3 propuestos en el análisis experto.

(c) Argumento-covariación: refiere a la justificación de la resolución del problema haciendo uso del reconocimiento de la covariación entre las mezclas, por el efecto de la variación en cada mezcla, por medio de agregar a cada mezcla la razón unitaria –4c.de limón/1c. de azúcar”. Este tipo de argumento lo observamos en la última fila de la Tabla 6.29, el cual es similar al argumento A_2 del análisis experto.

Un resumen de las frecuencias de los argumentos presentados por los grupos, en función de los argumentos propuestos en el análisis experto, lo presentamos en la Tabla 6.30.

Tablas 6.30: Frecuencia de los argumentos presentados por los grupos en función de los propuestos en el análisis experto

	Tipos de argumentos			
	Argumentos identificados con A_1	Argumentos identificados con A_2	Argumentos identificados con A_3	No presenta argumentos
Número de Grupos (N = 13)	2	1	11	1
%	15,4	7,7	84,6	7,7

Observamos 11/13 grupos (84,6%) refieren a argumentos que se identifican con el argumento A_3, no obstante, la calidad de los argumentos presentados en las cuatro primeras filas refieren a paráfrasis en torno a la proposición —Ambas limonadas tienen el mismo gusto”, en las que no se refiere a un procedimiento matemático específico (división, fracciones equivalentes, razones unitarias) que sustenta esa proposición. Lo cual nos conduce a reconocer que 7/13 grupos (53,8%) emplean argumentos en los que se justifica la solución obtenida del problema de manera similar a la propuesta en el análisis experto.

El resto de los argumentos presentados por los grupos, que fueron identificados con los argumentos A_2 y A_3 del el análisis experto, se presentan con muy bajas frecuencias, 2/13 grupos (15,4%) identificados con $A_{1,}$ y 1/13 grupos (7,7%) identificados con A_2.

Lo expuesto anteriormente son manifestaciones del desarrollo de la competencia de análisis didáctico, referida al reconocimiento de argumentos en la resolución del problema de la limonada. Aún cuando, ese reconocimiento no es extensamente exhibido por los grupos de la muestra, se debe reconocer que la actividad de análisis realizada constituye una vía para fomentar tales manifestaciones.

6.9.4. Reconocimiento de EM-DR en el problema de la limonada

En el desarrollo de este trabajo hemos propuesto la tarea de reconocimiento de elementos matemático-didácticos relevantes (EM-DR). Estos elementos han sido definidos en el sub-apartado 6.5.4, como los elementos que sintetizan los resultados del análisis epistémico. Esta característica esencial, permite observar su manifestación a partir del análisis epistémico respectivo.

En este sentido, hemos considerado pertinente tratar de observar el reconocimiento de los mismos por parte de los grupos, haciendo uso del estudio que hemos realizado en el sub-apartado anterior, de los análisis epistémicos realizados por ellos en torno al problema de la limonada. Es decir, se trata de realizar una valoración de la actuación de los sujetos, en esos análisis epistémicos, en función del reconocimiento de los EM-DR. Los EM-DR que serán utilizados como referentes en esa valoración, han sido expuestos en el sub-apartado 6.7.4. Esa valoración nos permitirá aproximarnos a observar posibles manifestaciones del desarrollo del conocimiento didáctico-matemático necesario para la enseñanza.

Respecto al reconocimiento de representaciones y simbolizaciones asociadas al uso de conceptos puestos en juego en la resolución del problema, observamos en la Tabla 6.20, antes presentada, (sub-apartado 6.9.3.1), que relativamente pocos grupos reconocen el uso de estos elementos: reconocimiento de simbolizaciones, 4/13 grupos (30,8%), reconocimiento de representaciones, 3/13 grupos, (23,1%). Es decir, pocos grupos reconocen el EM-DR2.1.

Respecto al reconocimiento de cantidades extensivas-intensivas, en los términos planteados en el EM-DR2.2, observamos que en el reconocimiento del concepto cantidades, realizado por los grupos, solo se refiere al uso de cantidades extensivas, quedando el reconocimiento de cantidades intensivas prácticamente ausente (Tabla 6.23, antes presentada). No obstante, en el reconocimiento del concepto de razón, 5/13 grupos (38,5%) proveen de un significado a este concepto que los aproxima al uso de cantidades intensivas. (Tabla 6.24, antes presentada). Lo que indica que el reconocimiento de cantidades intensiva no es exhibido de manera explícita por parte de los grupos, sin embargo, la idea de cantidad intensiva es utilizada por algunos de los grupos para expresar las razones unitarias involucradas en la resolución del problema.

En relación con el reconocimiento del sentido de razón-proporción, en los términos expuestos en la descripción del EM-DR2.3, observamos que 3/13 grupos (23,1%) reconocen la razón unitaria ―1c. de azúcar/4c. de limón” como relación que permite comparar ambas limonadas (Tabla 6.27, antes presentada). Es decir, pocos grupos exhiben el reconocimiento de EM-DR2.3.

El estudio realizado, de los análisis epistémicos llevados a efecto por los futuros profesores, indica que el procedimiento de modelización implicado en la resolución del problema, al cual refiere el EM-DR2.4, no es reconocido por ninguno de los grupos participantes.

Observamos, en el estudio de los argumentos expuestos por los grupos, que sólo uno de ellos reconoce el sentido de covariación, en los términos referidos en la descripción del EM-DR2.5, el cual se encuentra asociado al argumento A2, propuesto en el análisis experto (Tabla 6.30, antes presentada). De manera que el estudio realizado exhibe que sólo uno de los grupos reconoce el elemento EM-DR2.5.

En el caso del reconocimiento del EM-DR2.6, que refiere a las comparaciones entre razones, observamos, de acuerdo con el estudio de los argumentos presentados por los grupos (Tabla 6.30, antes presentada. Argumentos identificados con A_1), que sólo 2/13 grupos refieren de manera explícita a condiciones iniciales del problema (relación entre razones iniciales) para luego establecer las relaciones entre las razones unitarias, obtenidas por medio de los procedimientos implementados (división/reducción a la unidad). La relación entre las razones unitarias obtenidas permite comparar los grados de acidez/dulzura de las limonadas correspondientes.

El estudio del reconocimiento de los EM-DR2 indica que el análisis epistémico realizado por los futuros profesores, ha permitido observar una manifestación, aunque exhibida por pocos grupos, de ese reconocimiento. Lo que evidencia que esta herramienta de análisis permite observar tal manifestación.

Dado que ese reconocimiento constituye una actividad de profundización en el estudio de la resolución de un problema matemático, relativo a la proporcionalidad en educación primaria, consideramos que tal reconocimiento involucra el desarrollo del *conocimiento especializado del contenido*. Por tanto, se evidencia que el uso de la herramienta para el estudio de la faceta epistémica del análisis didáctico (GROS), propuesta y aplicada en esta investigación, puede ser útil para desarrollar esa forma de conocimiento, en el contexto de la formación de futuros profesores.

6.10. Discusión de resultados

El problema de investigación planteado en este estudio refiere al desarrollo de la formación didáctico-matemático de futuros profesores, en torno a la proporcionalidad. El logro de tal desarrollo lo hemos interpretado asociado al desarrollo de competencias de análisis didáctico y al conocimiento didáctico-matemático necesario para la enseñanza de la matemática.

Dada la complejidad que implican los análisis didácticos en el marco del EOS en las diversas facetas, nuestra investigación se ha centrado en un componente clave de dicho análisis didáctico, como es la faceta epistémica. Para la realización de esos análisis se ha utilizado una herramienta de análisis epistémico (GROS), puesta en juego por parte de los futuros profesores de la muestra.

Al ubicarnos en la última de las acciones del proceso de investigación acción que hemos desarrollado en un primer ciclo, debemos responder a la cuestión sobre cuánto del problema se resolvió con la intervención que hemos llevado a efecto. Para responder a esta cuestión, en consonancia con el logro de los objetivos OE4, OE5 y OE6 de investigación plateados, referiremos al desarrollo de tres aspectos: (a) desarrollo del conocimiento común del contenido, (b) desarrollo de competencias de la faceta epistémica de análisis didáctico y (c) desarrollo del *conocimiento especializado del contenido*.

6.10.1. Sobre el desarrollo del conocimiento común del contenido

Sobre el desarrollo del conocimiento común del contenido, en los términos propuestos por Ball y colaboradores (Ball, Thames y Phelps, 2008), implica realizar una correcta resolución de los problemas (del yogur y la limonada) considerados en el estudio realizado. Como hemos podido observar, en la exposición de este informe, los problemas considerados fueron correctamente resueltos por los grupos participantes (sub-apartado 6.6.1, problema del yogur, y sub-apartado 6.8.1, problema de la limonada), lo que indica la manifestación de un desarrollo apropiado del conocimiento común del contenido de los futuros profesores de las muestras, relativo a la resolución de los problemas referidos. Donde se percibe dificultad en la actuación de los futuros profesores es al momento de realizar las correspondientes explicaciones sobre los proceso de resolución ejecutados. No obstante, el conocimiento requerido para realizar tales explicaciones, de acuerdo con la interpretación que hacemos de la propuesta de Ball y colaboradores, refiere más bien al *conocimiento especializado del contenido*, sobre el cual hablaremos más adelante.

Asimismo, debemos referir, en concordancia con lo reseñado por la literatura respectiva, que las respuestas correctas de los problemas mostradas por los sujetos, sobre todo en la resolución del problema de la limonada, no parecen necesariamente estar asociadas a una comprensión de la resolución que se realiza, en la que se dificulta restituir las magnitudes que corresponden a los valores obtenidos por medio de los cálculos realizados, es decir, se observa dificultad para interpretar los resultados de los cálculos que son utilizados en el proceso de resolución (Lamon, 2007; Lesh, Post y Behr, 1988; Smith, 2002). Esta dificultad fue percibida tanto en las respuestas dadas en el instrumento aplicado, como en las observaciones realizadas (Anexo D7, Observación Nº 7).

6.10.2. Sobre el desarrollo de competencias de análisis didáctico

Sobre el desarrollo de competencias de análisis didáctico, específicamente en la faceta epistémica, planteamos en el apartado 2.6, del capítulo 2, el reconocimiento de objetos y significados en la resolución de un problema matemático, como las competencias a desarrollar por medio de la intervención a realizar. En este sentido, la valoración del desarrollo de esas competencias se hizo por medio de la proximidad entre el análisis epistémico experto y los realizados por los futuros profesores. Los resultados indican que la puesta en juego de la GROS, por parte de las muestras de futuros profesores, provee de manifestaciones en las que es posible observar el desarrollo de esas competencias. En general, esas manifestaciones fueron evidenciadas en las tareas realizadas por un número pequeño de grupos participantes, pero el uso de la herramienta puede dar cuenta de la puesta en juego de esa competencia de reconocimiento.

Hemos podido observar que algunas de las competencias que se manifiestan con mayor frecuencia son las relativas al reconocimiento de los elementos lingüísticos, los conceptos y los procedimientos activados en el proceso de resolución. Esta manifestación parece estar de acuerdo con lo que la literatura pedagógica reconoce comúnmente como contenidos de interés, sobre todo lo relativo a lo conceptual y procedimiental. Lo referente al reconocimiento de las propiedades y los argumentos se presenta con menor frecuencia, lo cual puede estar relacionado con la poca familiaridad que tienen los sujetos con este tipo de reconocimiento. La dificultad relativa al reconocimiento de las propiedades y los argumentos fue percibida en las observaciones realizadas durante el desarrollo de las clases, pocos estudiantes se mostraron interesados en intervenir al respecto.

Reivindicamos el reconocimiento de estos dos últimos tipos de objetos puesto que refieren, como hemos señalado antes, al ―funcionamiento de la resolución" y a las razones que sustentan ese ―funcionamiento", las cuales, sin lugar a dudas, refieren a competencias que deben ser desarrolladas por el (futuro) profesor (Adler y Davis, 2006; NCTM, 2000).

Como primeras conclusiones de estas experiencias de análisis se puede afirmar que la actividad ha significado un reto para los futuros profesores, resultando conflictivo el reconocimiento y discriminación de los tipos de objetos y significados involucrados en el proceso de resolución, sobre todo lo relativo a los significados y más aún cuando se trata de los objetos propiedades y argumentos, puesto que usualmente supone un cierto nivel de actividad metacognitiva a la que los futuros profesores no están habituados.

Se considera válido el esfuerzo que comprende la realización de estas actividades de análisis porque potencia el desarrollo de competencias de análisis didáctico, en su faceta epistémica. Esta consideración fue puesta en evidencia por parte de algunos de los grupos de futuros profesores de la muestra de esta investigación. Las bajas frecuencias de las manifestaciones que evidencian esa consideración, deben ser tomadas en cuenta para el desarrollo de posteriores aplicaciones y la planificación de procesos de instrucción correspondientes, los cuales deberían encaminarse a hacer más habitual este tipo de actividades.

Además, realizando una extrapolación de las experiencias del profesor-formador y el grupo de investigadores noveles, reconociendo las distancias, la actividad de análisis desarrollada puede permitir ―hacer conscientes” a los profesores en formación inicial, en los términos propuestos por Mason y Spence (1999), del conocimiento necesario, puesto en juego, en la resolución de una situación-problema. Tal conciencia, potenciará las posibilidades de ―saber para actuar en el momento” (knowing-to act in the moment) de quien más tarde orientará el proceso de enseñanza y aprendizaje.

6.10.3. Sobre el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático

Respecto al desarrollo del conocimiento didáctico-matemático necesario para la enseñanza de la matemática, hemos llevado a cabo dos acciones relacionadas con el análisis epistémico. Estas acciones son: (a) identificar posibles conflictos de significado que pueden manifestarse durante el proceso de resolución y (b) producir elementos de síntesis que hemos denominado elementos matemático-didácticos relevantes (EM-DR). Consideramos que ambas acciones se encuentran relacionadas con el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático necesario para la enseñanza. Particularmente, la identificación de conflictos potenciales se interpreta como una acción que permite una aproximación al *conocimiento del contenido y de los estudiantes* y el uso/reconocimiento de EM-DR está en relación con el desarrollo del *conocimiento especializado del contenido*.

Como se ha podido observar en la exposición de este informe, la realización de estas dos acciones, sólo se ha podido hacer a nivel del formador, en colaboración con tres investigadores noveles, sin embargo, el estudio realizado sobre ellas ha permitido valorar: (a) las explicaciones de las resoluciones de los problemas por parte de los grupos de futuros profesores, por medio del uso/no uso de los EM-DR previamente identificados, y (b) los análisis epistémicos realizados por los futuros profesores, por medio de los análisis expertos y del reconocimiento de los EM-DR utilizados en los procesos de resolución implementados.

Las valoraciones realizadas han conducido a determinar el desarrollo de competencias de la faceta epistémica de análisis didáctico y del *conocimiento especializado del contenido*. La valoración del desarrollo de esas competencias ha sido referida en el sub-apartado anterior, mientras la valoración del desarrollo del *conocimiento especializado del contenido* ha sido realizada por medio de la presencia/ausencia de EM-DR en los análisis epistémicos realizados por los futuros profesores. Las conclusiones señalan que las acciones de reconocimiento de objetos y significados, puestos en juego en la resolución de un problema, permiten observar reconocimientos de EM-DR, exhibidos por los futuros profesores. Tales reconocimientos constituyen manifestaciones del *conocimiento especializado del contenido*. Aún cuando las manifestaciones de reconocimiento de EM-DR se producen con baja frecuencia en los análisis realizados por los grupos, la presencia de esas manifestaciones nos lleva a recomendar el uso de estos análisis para el fomento de la formación didáctico-matemático de futuros profesores.

Finalmente, queda como tarea pendiente la realización de nuevos estudios, dirigidos a valorar de manera más específica, por medio de otros instrumentos que incluyan el uso de entrevistas, estudios de pequeños grupos, de casos, sobre las acciones realizadas en torno a la puesta en juego de esta herramienta de análisis. Un aspecto que podría ser abordado a brevedad es solicitar a los futuros profesores la identificación de conflictos potenciales y de elementos matemático-didácticos relevantes a partir de las realizaciones de los análisis epistémicos correspondientes.

CAPITULO 7

SÍNTESIS Y CONCLUSIONES

7.1. Introducción

En este capítulo presentamos las tres últimas partes de este informe de investigación. De acuerdo con el diseño de investigación asumido, estas partes son: (a) Respuestas a las preguntas de investigación, (b) Identificación de hallazgos y aportaciones, y (c) Generación de nuevas hipótesis de investigación. Así mismo, hemos incluido en la exposición de este capítulo un apartado que hemos llamado ―Discusión de algunos resultados”, en el cual identificamos aquellos aspectos que fueron reconocidos en la literatura consultada y que se manifestaron en la parte empírica de nuestro trabajo.

Respecto a las respuestas a las preguntas de investigación, aún cuando hemos ido dando respuesta a las mismas en los capítulos correspondientes a los resultados de cada estudio, hemos considerado conveniente presentar en este capítulo, a modo de síntesis, en una secuencia ordenada, las respuestas a nuestras preguntas de investigación. Asimismo, mostramos en este capítulo una valoración del logro de los objetivos empíricos de investigación.

En relación con la identificación de hallazgos y aportaciones, hemos incluido en lo que llamamos aportaciones algunas de las interpretaciones deducidas a partir de lo estudiado en el desarrollo de este trabajo, así como algunos instrumentos y estrategias utilizados en el mismo. En ese mismo orden de ideas consideramos como hallazgos los aspectos nuevos para los cuales, en algunos casos, en la literatura especializada se ha hecho referencia a la necesidad de su estudio. Particularmente hacemos énfasis en los hallazgos relacionados con la aplicación de la herramienta de análisis epistémico/cognitivo propuesta.

Lo relativo a la generación de nuevas hipótesis de investigación ha quedado incluido en el apartado final que hemos denominado “Cuestiones abiertas”. También referiremos en ese apartado a asuntos que se “han quedado en el tintero”, cuestiones que recomendamos su estudio y que posiblemente asumamos como continuación del estudio que ahora informamos.

7.2. Sobre las preguntas de investigación y los objetivos

La pregunta de investigación **P1**: “¿Qué conocimiento sobre la proporcionalidad tienen los futuros maestros que inician la carrera de magisterio?”, que corresponde con el objetivo de investigación **OE1**: “Describir el conocimiento sobre proporcionalidad exhibido por un grupo de futuros profesores al iniciar su proceso de formación profesional”, la hemos abordado por medio de un estudio diagnóstico sobre el conocimiento relativo a la proporcionalidad abordada en educación primaria, con el que inician su formación los estudiantes de la carrera de magisterio de la Universidad de Granada.

A este respecto, mostramos en el apartado 4.8, del capítulo 4, seis características del conocimiento relativo a la proporcionalidad, exhibido por los futuros profesores de la muestra, entre los cuales se destaca que ese conocimiento se encuentra caracterizado por aspectos parciales (disposición lineal de los puntos en un gráfico cartesiano, la covariación, el uso de reglas intuitivas-cualitativas, la elaboración de tablas de magnitudes proporcionales, uso de relaciones numéricas particulares) relativos a la proporcionalidad. Lo cual puede indicar que las experiencias previas de formación (educación primaria, secundaria y bachillerato) no han sido suficientes para que los sujetos alcancen esa configuración.

La pregunta de investigación **P2**: “¿Qué conocimiento sobre la proporcionalidad adquieren los futuros maestros durante su primer año de formación inicial?”, que corresponde con el objetivo **OE3**: “Describir el conocimiento sobre proporcionalidad exhibido por un grupo de futuros profesores al concluir su primer curso de formación profesional relativo a ese tema”, la hemos tratado de responder por medio de la aplicación de un ítem relativo a la proporcionalidad de educación primaria, incluido en una prueba de control, al final del primer cuatrimestre de un curso del primer año de la carrera de magisterio de la Universidad de Granada.

Al respecto, presentamos en la sección 5.8, del capítulo 5, una descripción sobre el conocimiento manifestado por los futuros profesores en ese ítem. La descripción presentada se hizo de acuerdo con las actuaciones de los futuros profesores ante las siguientes cuestiones: (a) cómo resuelve un problema proporcional de valor faltante, (b) cómo justifica la proporcionalidad en una situación proporcional, (c) cómo reconoce problemas pseudo-proporcionales, y (d) cómo justifica la proporcionalidad/no proporcionalidad en una situación pseudo-proporcional.

En este sentido, para la primera cuestión se ha observado el predominio del uso de algoritmos basados en reglas, específicamente el uso de la regla de tres se hace presente en la mayoría de las respuestas dadas por los futuros profesores. En relación con la segunda cuestión se observó que una considerable parte de los futuros profesores exhibe argumentos basados en ideas débiles o moderadamente próximas a la idea de proporcionalidad. Sobre la tercera cuestión hemos observado una tendencia dominante a considerar problemas pseudo-proporcionales como proporcionales, sobre todo aquellos en los que la estructura lingüística del problema es similar a un problema de valor faltante proporcional. En relación con la cuarta cuestión hemos podido ver el predominio del uso de reglas para justificar la proporcionalidad/no-proporcionalidad de las situaciones pseudo-proporcionales consideradas. Una de las reglas más frecuentes es la de covariación ―más en A, más en B”, utilizada para justificar tanto la proporcionalidad como la no proporcionalidad de la situación. Asimismo, la posibilidad del uso de la regla de tres es utilizada para argumentar que las situaciones pseudo-proporcionales dadas son de proporcionalidad. Se observa en estas dos últimas cuestiones un predominio de la manifestación de la ilusión de la linealidad en buena parte de las respuestas dadas por los futuros profesores.

La pregunta de investigación **P3**: ―¿Puede el uso de la GROS, por parte del profesor formador, potenciar el proceso de formación didáctico-matemática, en torno a la proporcionalidad, de futuros maestros?”, que corresponde con los objetivos **OE2**: ―Valorar el uso de una herramienta de análisis didáctico (análisis epistémico y cognitivo), en el contexto de la elaboración de un diagnóstico sobre los conocimientos relativos a la proporcionalidad, con el cual una sección de futuros profesores inicia su formación profesional” y **OE4**: ―Implementar el uso de una herramienta de análisis epistémico/cognitivo en un proceso de formación, dirigido al desarrollo de competencias de análisis didáctico de futuros profesores sobre razonamiento proporcional", ha sido respondida de manera parcial durante todo el desarrollo de la parte empírica de este trabajo de investigación, puesto que el uso de la GROS por parte del profesor formador ha tenido lugar, de manera transversal, durante todo el proceso de investigación empírico desarrollado, informado en los capítulos 4 al 7 del presente documento.

En la primera aplicación de la GROS, informada en el capítulo 4, se pudo observar que su uso por parte del profesor-formador le provee de manera específica de un manejo consciente de los objetos/significados involucrados en los procesos de resolución de los problemas, lo cual le permitió prever posibles conflictos de significado que podrían presentarse en su resolución por parte de los estudiantes. Esta toma de conciencia, la relacionamos con lo señalado por Mason y Spence (1999) como un procedimiento útil, que podría incluirse en el proceso de planificación de la instrucción, puesto que fomenta una mejor actuación del profesor en el momento de realizar la práctica de enseñanza en el aula de clase. Asimismo, la previsión de posibles conflictos de significados se encuentra relacionada con el estudio de errores y dificultades asociadas con la resolución de los problemas, lo cual es reconocido como una actividad inscrita en el desarrollo del conocimiento matemático necesario para la enseñanza de la matemática. En términos de la propuesta de Ball y colaboradores, este tipo de conocimiento es llamado ―conocimiento del contenido y de los estudiantes" (Hill, Ball y Schilling, 2008).

En la segunda aplicación, informada en el capítulo 5, se pudo observar que su uso por parte del profesor-formador y el grupo de investigadores colaboradores, permite realizar una articulación de los diferentes objetos/significados, identificados en el análisis, en el proceso de resolución de los problemas considerados. Esta articulación la interpretamos como una profundización en la comprensión de la matemática involucrada en los problemas y resoluciones consideradas.

En ambas aplicaciones (primera y segunda), el uso de la herramienta de análisis contribuyó con la previsión de posibles tipos de respuestas, en la que ha sido reconocida la conjunción de diferentes objetos (tablas, gráficos, reglas) que podrían entrar en juego para conformar diferentes configuraciones de la resolución de los problemas. Esta anticipación sobre posibles respuestas es considerada en algunos estudios como una de las áreas que deben ser tomadas en cuenta en la formación de futuros profesores (Inoue y Buczynski, 2011). El desarrollo de esta competencia puede contribuir a superar algunos de los desatinos observados en las actuaciones de los futuros profesores cuando evalúan las respuestas dadas por alumnos en problemas de proporcionalidad (Hines y McMahon, 2005). Como actividad de valoración de ese reconocimiento previo de posibles respuestas, hemos observado que en buena medida, las respuestas expresamente manifestadas por los sujetos participantes, han quedado comprendidas en las categorías de respuestas previstas. Esto indica que las previsiones realizadas tienen validez para predecir los comportamientos esperados en torno a las resoluciones realizadas. Somos conscientes que ese reconocimiento de las categorías de posibles respuestas se ha hecho inicialmente a nivel del profesor formador, por lo que consideramos un asunto pendiente el estudio de ese reconocimiento por parte de futuros profesores.

Las manifestaciones positivas, consecuencias del uso de la herramienta de análisis epistémico/cognitivo considerada, observadas en su primera y segunda aplicación, nos motivaron a tratar de observar su aplicación por parte de los profesores en formación inicial, lo cual dio paso a la tercera aplicación.

En la tercera aplicación, informada en el capítulo 6, la GROS fue utilizada tanto por el profesor-formador como por la muestra de futuros profesores. En relación con el uso de esa herramienta por parte del profesor-formador, en colaboración con el grupo de investigadores noveles participantes, fue posible realizar dos tipos de valoraciones haciendo uso de los elementos matemático-didácticos relevantes (EM-DR), deducidos a partir del análisis epistémico previo. La primera valoración, referida a las explicaciones dadas por los sujetos a las resoluciones de los problemas propuestos, se realizó tomando como criterio el uso/no uso de los EM-DR correspondientes.

Con respecto a la segunda valoración, referida a los análisis epistémicos realizados por los futuros profesores, se hizo asumiendo como criterios dos aspectos: (a) la proximidad entre los análisis realizados por los futuros profesores y el análisis experto, y (b) el reconocimiento de los EM-DR por parte de los futuros profesores en los análisis realizados por ellos. Los resultados de estas valoraciones corresponden con la respuesta a la pregunta **P4** de investigación, la cual presentamos a continuación.

En el capítulo 6 se ha abordado la pregunta de investigación **P4**: ¿Puede el uso de la GROS, por parte de futuros maestros, potenciar su proceso de formación didáctico-matemática, en torno a la proporcionalidad?, que corresponde con los objetivos **OE5**: ―Identificar y desarrollar competencias de la faceta epistémica del análisis didáctico en futuros profesores al resolver tareas de proporcionalidad de educación primaria", y **OE6**: ―Valorar el uso de una herramienta de análisis epistémico/cognitivo en el desarrollo de categorías del conocimiento matemático necesario para enseñar en futuros profesores.

La identificación de las competencias se realizó apegada a las acciones involucradas en la aplicación de la GROS, de manera que las competencias a ser consideradas refieren al reconocimiento de objetos y significados matemáticos puestos en juego en la resolución/explicación de un problema de proporcionalidad de 6º curso de primaria. En este sentido, se valora el desarrollo de dos tipos de competencia: (a) reconocimiento de objetos matemáticos puestos en juego en la resolución/explicación de un problema y (b) reconocimiento de significados dados a los objetos identificados.

Los resultados indican que los futuros profesores exhiben un desarrollo satisfactorio de la competencia de reconocimiento de objetos matemáticos involucrados en la resolución/explicación de problemas de valor faltante y de comparación. Esta valoración se sustenta en que los futuros profesores muestran una buena aproximación a reconocer los objetos matemáticos identificados en los análisis expertos correspondientes.

No obstante, respecto a la competencia de reconocimiento de significados, pocos grupos reconocen los significados asignados a los objetos reconocidos, de acuerdo con los análisis expertos respectivos. Esto indica una actuación poco satisfactoria de los grupos en el desarrollo de la competencia de reconocimiento de significados matemáticos asignados a los objetos identificados.

En relación con el desarrollo de las facetas del conocimiento didáctico-matemático necesario para la enseñanza de la matemática, haciendo uso de la interpretación que hacemos de la propuesta de Ball y colaboradores (Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008), hemos observado que los futuros profesores resuelven correctamente los problemas de valor faltante y comparación considerados, lo que indica un desarrollo apropiado del *conocimiento común del contenido*. No obstante, el predominio del uso de algoritmos, basados en reglas, como procedimiento de resolución del problema del yogur, genera dudas sobre si en tales resoluciones se ha puesto en juego el razonamiento proporcional correspondiente (Lamon, 2007; Lesh, Post y Behr, 1988). Esta duda nos condujo a considerar las explicaciones formuladas por los futuros profesores sobre las resoluciones dadas a ese problema. Las valoraciones de esas explicaciones se hicieron tomando como criterio el uso/no uso de los EM-DR respectivos. Esas valoraciones las hemos incluido en lo relativo al desarrollo del conocimiento especializado del contenido, al cual referimos a continuación.

En relación con el *conocimiento especializado del contenido*, valorado por medio del uso/reconocimiento de elementos matemático-didácticos relevantes (EM-DR), por parte de los futuros profesores, en dos acciones específicas: (a) en las explicaciones dadas a las resoluciones de los problemas, y (b) en los análisis epistémicos realizados por los propios estudiantes.

En lo relativo al uso de los EM-DR en las explicaciones dadas por los futuros profesores, hemos visto (Tabla 6.5, capítulo 6), en el caso del problema del yogur, que algunos de los EM-DR1 (específicamente EM-DR1.3 y EM-DR1.4) son utilizados por todos los grupos de futuros profesores. Mientras que los EM-DR1 restantes (EM-DR1.1, EM-DR1.2, EM-DR1.5) son poco utilizados, particularmente, para el EM-DR1.2 no se observa un uso explícito por parte de los sujetos. Estos resultados pueden resumirse diciendo que la mayoría de los EM-DR1 fueron utilizados por pocos grupos. Por otra parte, respecto al uso de los EM-DR2 que hacen los sujetos en la resolución dada al problema de la limonada, se presenta una manifestación contraria, es decir, la mayoría de los EM-DR2 fueron usados por la mayoría de los grupos. Estas manifestaciones no coincidentes pueden deberse a los tipos de problemas considerados. Puesto que, mientras en el problema del yogur el uso de la idea de razón puede no manifestarse, en el problema de la limonada, la idea de razón, mejor reconocida por los estudiantes como proporción (Anexo D7, Observación Nº 7), es prácticamente ineludible. Sin embargo, no podemos ser concluyentes respecto a este hecho; consideramos necesario poner mayor atención a este suceso en futuras investigaciones.

En lo relativo al reconocimiento de los EM-DR, en los análisis epistémicos realizados por los futuros profesores, se ha observado que estos elementos son reconocidos por pocos grupos. Es decir, la manifestación del desarrollo de esta faceta del conocimiento didáctico-matemático necesario para la enseñanza fue exhibida por pocos sujetos. No obstante, tales manifestaciones son expresiones del desarrollo del *conocimiento especializado del contenido,* mostrado por algunos de los grupos de futuros profesores participantes. Estas expresiones se presentan como consecuencia de la puesta en práctica de la herramienta de análisis epistémico correspondiente, lo cual indica que el uso de esa herramienta fomenta el desarrollo de esa faceta del conocimiento necesario para la enseñanza de la matemática.

7.3. Discusión de algunos resultados

Dedicaremos este apartado a presentar algunos aspectos que han sido reseñados en la literatura consultada, que hemos observado en el desarrollo empírico de esta investigación. Los hallazgos y aportaciones, que constituyen lo novedoso que plantea la realización de esta investigación, se presentan en el apartado 7.4.

Sobre el uso de representaciones

Como expusimos en el sub-apartado 1.7.6, consideramos el uso de representaciones gráficas un recurso útil en la resolución de problemas, puesto que permiten establecer vínculos entre el mundo real y el mundo matemático (Post y Cramer, 1989). Referimos en varias ocasiones a la omisión de estas representaciones en las resoluciones propuestas y en los análisis epistémicos expertos realizados. Sin embargo, también referimos que estaríamos atentos a su manifestación en las respuestas dadas por los futuros profesores.

En este orden de ideas, hemos observado en la literatura consultada opiniones a favor del uso de representaciones informales (Lamon, 1995; Lamon, 2007, Misailidou y Williams, 2003a; 2004) y en contra (Cai y Wang, 2006). Pero el uso de representaciones formales (tablas de proporcionalidad, representaciones gráficas: sagitales, tabulares, cartesianas; y simbólicas-algebraicas) parecen gozar de la aceptación de los diferentes investigadores.

Lo relativo al uso de una tabla o un gráfico cartesiano lo estudiamos en la aplicación del primer y segundo cuestionario (capítulos 4 y 5), lo cual aparece débilmente asumido por los estudiantes como recurso apropiado para interpretar las situaciones de proporcionalidad. Por otra parte, pudimos observar en las resoluciones/explicaciones de los problemas del yogur y la limonada el uso de representaciones gráficas por parte de dos y tres grupos, respectivamente. Lo que nuevamente parece indicar que el uso de representaciones gráficas es una opción débilmente asumida por los futuros profesores para basar sus resoluciones/explicaciones de problemas de valor faltante o de comparación.

Una relación que se hizo patente en las elaboraciones de los participantes, es que los pocos sujetos-grupos que hacen uso de representaciones gráficas, como en los casos observados en las resoluciones del problema del yogur o la limonada (Fig. 6.10, (G1-26); Fig. 6.11, (G1-27); Fig. 6.22, (G2-3) y (G2-7), capítulo 6), hacen explícita la comprensión que tienen sobre el problema y su resolución. Lo cual potencia ese uso, como un recurso didácticamente útil para realizar las explicaciones que corresponden. Este resultado convalida lo señalado por Bryan y Nunes (2009) quienes sostienen que el uso de representaciones se encuentra asociado con el buen desempeño de los estudiantes.

Estos resultados conducen a recomendar el uso de representaciones gráficas para potenciar un mejor desempeño de los sujetos en la resolución/explicación de problemas de proporcionalidad como los estudiados en esta investigación.

Sobre los tipos de problemas y su resolución

Hemos limitado nuestro estudio al uso de problemas de proporcionalidad que comúnmente se aplican en la educación primaria (valor faltante y de comparación). El uso de estos problemas, en el contexto de esta investigación, ha sido complementado por medio de consignas en las que se solicita explicar, ejemplificar, representar, justificar, identificar conocimientos matemáticos y significados puestos en juego en las resoluciones. Asimismo, hemos hecho uso de un problema de proporcionalidad cuya razón es la unidad y de problemas pseudo-proporcionales. Los tipos de problemas y las consignas utilizados han servido para dar pertinencia a su uso tanto para la formación de profesores como para los objetivos propuestos en esta investigación.

Al hablar sobre los tipos de resolución observados en el desarrollo de este trabajo, encontramos, por ejemplo en el caso de los problemas de valor faltante, el predominio del uso de algoritmos, tipo regla de tres, para su resolución. Quedando relegadas, otras estrategias de resolución, a un uso poco frecuente. En particular la manifestación de estrategias creativas en las que se explicite la expresión del razonamiento proporcional involucrado está casi ausente. Más aún, de acuerdo con lo observado en la discusión de la resolución del segundo cuestionario (Anexo D3: Observación Nº 3), el uso de la regla de tres parece haber suplantado no sólo el uso de diversas estrategias de resolución, sino también cualquier manifestación del razonamiento proporcional convocado en la resolución del problema. Este resultado es coherente con lo registrado en la literatura especializada, puesto que ha sido reseñada en varios trabajos la sustitución que realizan los sujetos del razonamiento proporcional por medio del uso de resoluciones basados en reglas (Lamon, 2007; Lesh, Post y Behr, 1988; Weinberg, 2002).

Adicionalmente encontramos que la aplicabilidad o no de la regla de tres, en una situación determinada, es el criterio utilizado para determinar si esa situación es de proporcionalidad o no. La aplicabilidad de la regla de tres se basa en la estructura lingüística del problema, de modo que un problema pseudo-proporcional tiene una alta probabilidad de ser considerado como proporcional. En consecuencia, ese uso de la regla de tres, fomenta la manifestación de la ilusión de la linealidad, lo cual coincide con lo señalado en la literatura respectiva (Modestou et al., 2008; Van Dooren et al., 2005; Van Dooren et al., 2008).

Llamamos la atención sobre estos resultados puesto que consideramos que el uso de problemas que se resuelvan utilizando reglas, donde posiblemente la manifestación del razonamiento proporcional (que debería ser convocado) no tenga lugar, no debería ser una actividad predominante en el ámbito de la formación de futuros profesores. Es cierto que el futuro profesor debe saber usar algoritmos basados en reglas para resolver problemas proporcionales, pero los resultados observados en este trabajo, nos conducen a recomendar la inclusión y predominio, en la formación inicial de profesores, de situaciones-problema ricas, cuya resolución amerite la puesta en juego del razonamiento proporcional, más que la aplicación de un algoritmo o regla de resolución.

En esta línea de ideas, de acuerdo con Bayazit (2012), este planteamiento parece formar parte del avance que se está fomentando actualmente en la didáctica en torno al razonamiento proporcional. En su estudio sobre el fomento del razonamiento proporcional en nuevos libros de texto, Bayazit (2012) señala que en los libros considerados existe un 75% de situaciones-problema, cuya resolución amerita la puesta en juego del razonamiento proporcional, y sólo un 25% que se resuelven haciendo uso de algoritmos. El predominio de esas situaciones-problema en los libros de texto representa un avance didáctico en la enseñanza de la proporcionalidad.

Como consecuencia de estos planteamientos, en el ámbito de la formación de futuros profesores, es necesario ir hacia el diseño y uso de situaciones-problema, cuya resolución requiera, más que el uso de algoritmos, la puesta en juego del razonamiento proporcional. Al mismo tiempo, es necesario evaluar aquellas que son resolubles por medio de algoritmos y determinar su pertinencia, uso e introducción en la planificación de la enseñanza. Además, es necesario considerar el desarrollo de investigaciones en las que se realice el estudio de distintos tipos de situaciones-problema y sus repercusiones en la enseñanza en los diferentes niveles educacionales, incluyendo la formación inicial de profesores y profesores en servicio.

En este orden de ideas, aún cuando en los problemas que hemos utilizado no hemos incluido mayor novedad, la aportación que consideramos central en este trabajo se encuentran en las consignas que han sido incluidas, especialmente la que refiere a la puesta en juego de la GROS. La actividad de análisis/reflexión convocada por el uso de la GROS, por parte de los futuros profesores, ha permitido ir más allá de las resoluciones de los problemas. Como vimos en el capítulo 6, ese uso ha permitido observar: (a) el desarrollo de competencias de análisis epistémico de los futuros profesores, y (b) el uso/reconocimiento de elementos matemáticos-didácticos relevantes relativos a la proporcionalidad, lo que ha sido interpretado como una aproximación al desarrollo del *conocimiento especializado del contenido* por parte de ellos.

Finalmente, reconocemos como necesario el desarrollo de investigaciones en la que se conjugue el uso de la GROS y el de situaciones-problema que requieran de la puesta en juego del razonamiento proporcional.

Sobre el estudio de la proporcionalidad/no proporcionalidad de las situaciones

El análisis epistémico realizado sobre las respuestas de los sujetos a las situaciones pseudo-proporcionales consideradas, nos ha permitido observar tres características de los problemas pseudo-proporcionales que los aproximan a ser considerados como proporcionales y que, en consecuencia, fomentan la manifestación de la ilusión de la linealidad. Estas tres características son: (a) el sentido de covariación, aunado a (b) una relación-razón inicial del tipo ―a por cada b” y (c) el contexto específico-favorable de la situación problema que se trate. Los resultados discutidos en el capítulo 5, indican que una situación-problema, cuyo enunciado satisfaga estas tres condiciones, se encuentra muy próxima a ser considerada como un problema de proporcionalidad, aún cuando no lo sea.

En la literatura especializada, estas características son resumidas en lo que se denomina estructura lingüística del enunciado. No obstante, reconocerlas de manera específica, ayuda a comprender la proximidad entre situaciones no-proporcionales y proporcionales, lo cual, de acuerdo con lo señalado en la discusión de los resultados en el capítulo 5, está en relación directa con la manifestación o no de la ilusión de la linealidad (De Bock et al., 2007; Modestou y Gagatsi, 2007; Modestou, et al., 2008).

Lo observado en el *problema (c),* analizado en ese capítulo, corrobora las conclusiones respecto a las características lingüísticas de la situación-problema para que sea considerada como proporcional. En efecto, la situación planteada en el *problema (c)* es una situación proporcional, no obstante, dado que su enunciado no involucra características como las referidas conduce a que una considerable mayoría de sujetos la consideren como no proporcional. Estas manifestaciones nos conducen a reconocer que el juicio realizado sobre una situación-problema, como la expuesta en el *problema (c)*, como proporcional o no-proporcional requiere de mayor investigación.

Sobre algunas contribuciones del análisis epistémico y cognitivo

De acuerdo con lo estudiado en el apartado 1.11, del capítulo 1, la dificultad asociada a la interpretación del resultado del cociente igual a 4 en ambas limonadas ha sido observada en la literatura especializada de acuerdo con tres variables: el tipo de razón y/o estructura numérica de la razón (tipo de cantidad intensiva cuya estructura numérica es entera), el contexto y la cognición del sujeto (Alatorre y Figueras, 2005; Heller et al., 1989). No obstante, la estructura numérica (entera) de la razón no debería tener mayor incidencia (Karplus, Pulos y Stage, 1983a; 1983b), así como tampoco, la familiaridad del sujeto con el contexto (Heller et al., 1989). En relación con la cognición del sujeto encontramos lo señalado por Kaput y West (1994), relativo a las herramientas de representación disponibles y el modelo de Clark y colaboradores para interpretar las relaciones entre razón y fracción (Clark, Berenson y Cavey, 2003). Respecto al modelo de Clark y colaboradores, de acuerdo con lo referido en el apartado 1.9 sobre las relaciones entre fracción y razón, atendiendo a las conclusiones de Person, Berenson y Greespon (2004), se ha observado que algunos de los futuros profesores de la muestra quedan “atrapados” en el ámbito de las fracciones y no logran moverse fluidamente entre las interpretaciones y relaciones que deben establecerse entre fracción, fracción/razón y razón.

Desde el modelo de análisis epistémico/cognitivo que hemos asumido para el estudio de este problema, hemos observado: (a) en cuanto a los *elementos lingüísticos*: la necesidad de uso y reconocimiento de representaciones adecuadas para comprender/explicar el problema, (b) sobre lo *conceptual*: uso y reconocimiento de conceptos claves (magnitudes extensivas e intensivas, razón unitaria, fracción/cociente) para movilizar de manera adecuada interpretaciones y relaciones en torno a los objetos fracción y razón, (c) sobre lo *procedimental*: uso y reconocimiento de interpretaciones adecuadas para los resultados obtenidos por medio de la aplicación de un algoritmo o cálculo, (d) en cuanto a las *propiedades*: uso y reconocimiento de proposiciones que permiten deducir la solución del problema, por ejemplo, la secuencia “$P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3$” reconocida en el análisis experto, y (e) respecto a los *argumentos*: uso y reconocimiento de las justificaciones de esas proposiciones y por lo tanto de la solución dada al problema. Así tenemos, por ejemplo, el argumento: “A_2: Los valores numéricos obtenidos (razones unitarias expresadas por medio de fracciones o cocientes), refieren a cantidades de magnitud intensivas, que muestran que ambas mezclas se preparan agregando razones unitarias iguales de c.de azúcar/c. de limón”, el cual involucra una explicación acerca de la preparación de las dos limonadas que hace que tengan el mismo gusto o sabor.

En la Fig. 7.1 mostramos las relaciones entre los objetos matemáticos movilizados e identificados en el proceso de resolución del problema, así como su identificación en los modelos teóricos propuestos en la literatura referida.

Observamos en común, de acuerdo con lo reconocido por medio del análisis realizado, y lo referido en la literatura, que el estudio del problema de la limonada parece haber puesto en evidencia la manifestación de al menos tres aspectos relativos al desarrollo del razonamiento proporcional que deben ser conocidos por los futuros maestros para su correcta resolución, interpretación y uso. El primero de estos aspectos refiere al uso y reconocimiento de representaciones gráficas que permiten comprender/explicar la solución del problema. El segundo aspecto refiere al uso y reconocimiento de cantidades intensivas o interpretación de la razón como una nueva unidad. El tercer aspecto refiere a las posibilidades del sujeto de movilizarse fluidamente entre las diferentes interpretaciones y relaciones entre fracción, fracción/razón y razón.

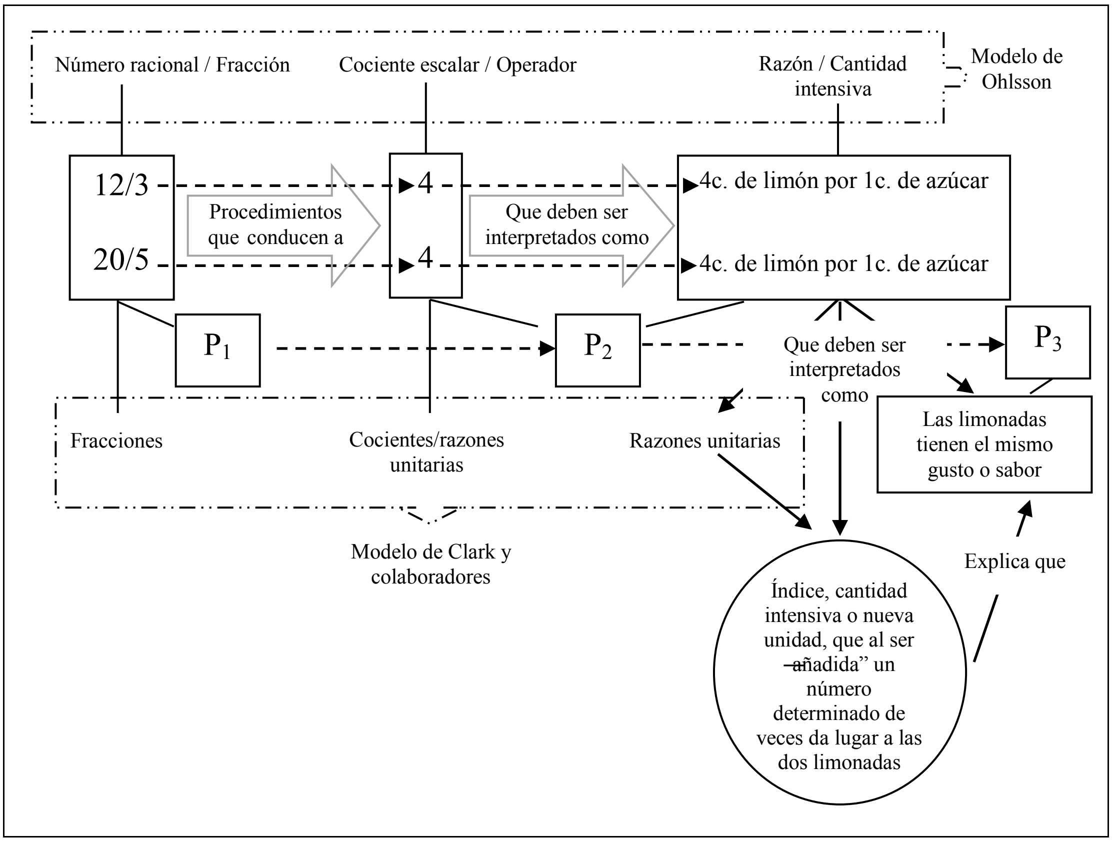


Fig. 7.1: Relaciones entre los objetos matemáticos movilizados durante la resolución del problema de la limonada

No obstante, el análisis epistémico/cognitivo realizado parece organizar lo reseñado en la literatura especializada e ir más allá, al permitir identificar una secuencia de proposiciones cuya consecución deductiva conduce a la solución del problema y cuyas justificaciones permiten explicar el proceso de resolución.

7.4. Hallazgos y aportaciones

En este apartado sintetizamos los hallazgos y aportaciones derivadas de la realización de esta investigación. Presentamos primero lo que hemos considerado aportaciones, las cuales refieren a algunas interpretaciones que han sido deducidas por medio del estudio teórico y empírico realizado, que incluye el uso de algunos instrumentos y estrategias en su desarrollo. Asimismo, hemos incluido lo que consideramos como hallazgos, algunos aspectos nuevos, que posiblemente han sido referidos en la literatura, pero, aquí los hemos interpretado de manera diferente o con una visión que le imprime un carácter original.

Aportaciones

Una primera aportación refiere a la *complejidad involucrada en la temática de la enseñanza aprendizaje de la proporcionalidad*, de la cual dimos algunos elementos de información en el primer capítulo de nuestro trabajo. La aproximación realizada en esa exposición pretende sostener la necesidad de continuar realizando investigación relativa a esa temática, tanto a nivel de la formación de futuros profesores como en los otros niveles educativos. En esa exposición se aborda la problemática tomando en cuenta cuestiones que siguen abiertas y que deben ser objeto de estudios posteriores.

En este orden de ideas, consideramos de particular relevancia lo relativo a las estrategias de resolución, para lo cual hemos pretendido observar una secuencia de construcción en el razonamiento proporcional, partiendo desde lo intuitivo como fundamento, dirigiendo la atención hacia la construcción de estrategias de ―construcción progresiva" y culminando con el uso de estrategias algorítmicas y formales. En este caso reconocemos, por ejemplo, la necesidad de producir situaciones-problema organizadas de acuerdo con esa secuencia, considerando los aspectos involucrados en la complejidad a la que se ha referido en los apartados 1.8 al 1.11 del capítulo 1.

Una segunda aportación refiere a las características que hemos deducido, a partir del estudio de la literatura correspondiente, de dos aspectos de considerable importancia en el ámbito de la investigación sobre el razonamiento proporcional y formación de profesores. El primer aspecto refiere al llamado *conocimiento especializado del contenido*, propuesto por Ball y colaboradores, con amplia aceptación en la comunidad de investigadores del conocimiento del profesor. Para esta faceta del conocimiento necesario para la enseñanza de la matemática hemos logrado deducir ocho características que presentamos en el sub-apartado 2.5, del capítulo 2.

El segundo aspecto refiere a la *caracterización de referencia* que hacemos *del razonamiento proporcional*, en la cual describimos ocho características que han sido identificadas por distintos estudios realizados en torno a esta forma de razonamiento.

Una propuesta de estudio que ha quedado abierta, a partir de esa primera aproximación, es la construcción de un significado de referencia haciendo uso de las facetas de estudio propuestas por el EOS.

Una tercera aportación refiere a la elaboración y aplicación de una herramienta de análisis epistémico/cognitivo, cuyo uso en el ámbito de la formación de profesores, puede contribuir tanto al fomento de un mejor desempeño del profesor-formador, como al desarrollo de competencias de la faceta epistémica del análisis didáctico de futuros profesores. Asimismo, se presenta como una herramienta que promueve una profundización del conocimiento matemático; pero no se trata de un conocimiento matemático de interés para el matemático, sino de interés didáctico, que se considera necesario para la enseñanza, particularmente en tres de sus facetas: conocimiento común, especializado y de los estudiantes, de acuerdo con la propuesta de Ball y colaboradores Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008).

Además de estos aspectos de interés para la formación de profesores, esa herramienta presenta características teórico-metodológicas, cuya aplicación puede fomentar el desarrollo de la actividad de investigación en la educación matemática, realizada desde la propia práctica de la enseñanza.

Una cuarta aportación, relacionada con el uso que se hace de esa herramienta en el desarrollo de la presente investigación, refiere a la identificación de aspectos relativos al conocimiento común y especializado del contenido sobre proporcionalidad, organizados de acuerdo con los tipos de objetos reconocidos por medio del análisis epistémico y cognitivo aplicado a una resolución experta de un problema y las respuestas dadas por los sujetos participantes, respectivamente. Es así como, por ejemplo, en el apartado 5.8 del capítulo 5, hemos referido, en la sección que hemos denominado ―*Las aportaciones del análisis epistémico/cognitivo*", los objetos matemáticos relativos a la proporcionalidad que han sido reconocidos por medio del análisis de una resolución experta, así como también por el análisis cognitivo realizado sobre las respuestas dadas por los futuros profesores a los problemas considerados.

Una quinta y última aportación refiere a que el trabajo desarrollado es una muestra de la factibilidad de poner en práctica, en el ámbito de la formación de profesores, de la herramienta de análisis epistémico y cognitivo, mediante la que se ha logrado obtener información más allá de la referida a la resolución de problemas por parte de futuros profesores, o de los tipos de respuestas emitidos por ellos sobre problemas de razón y proporción.

Consideramos que en este trabajo nos hemos aproximado a una convalidación de lo señalado en la literatura correspondiente, respecto a lo insuficiente que resulta el conocimiento común del contenido (que permite obtener una respuesta correcta ante un problema matemático) para la formación de futuros profesores (Adler y Davis, 2006; Ball, Hill y Bass, 2005; NCTM, 2000; Sullivan, 2008b). En efecto, hemos podido ver que el uso de la herramienta de análisis epistémico, por parte del futuro profesor, constituye una vía para poner en evidencia la producción de una solución correcta, siguiendo un conjunto de pasos o procedimientos aprendidos, pero sin el conocimiento del significado matemático de la proporcionalidad involucrado en el proceso de resolución. Esta manifestación ha sido observada no sólo en las tareas de análisis realizadas por algunos de los sujetos participantes, sino también en las observaciones de las clases respectivas (Anexo D4, observación Nº 4). En este sentido, el uso de esta herramienta provee al profesor-formador de información pertinente acerca del conocimiento del futuro profesor; si ese conocimiento está limitado a un conocimiento común, insuficiente para su formación, o si éste ha logrado desarrollar un conocimiento más avanzado y especializado, necesario para la enseñanza.

De esta manera, el uso de esta herramienta adquiere relevancia en el ámbito de formación de profesores, coadyuvando a satisfacer la necesidad de forjar una formación didáctico-matemática de los futuros profesores, dirigida a reconocer objetos y procesos, particularmente de significación, puestos en juego en una actividad matemática. Es decir, ese uso ayuda a inscribir la reflexión epistémico/cognitiva como una actividad pertinente para el desarrollo de las competencias requeridas en la formación de futuros profesores.

Hallazgos

Un primer hallazgo lo encontramos en la *doble utilidad del uso de la GROS por parte del profesor-formador*, puesta de manifiesto en los resultados informados en los capítulos 4 y 5 de este documento, en los cuales hemos podido observar que ese uso permite:

a) Obtener información sobre la complejidad matemática involucrada en el problema y hacerse consciente de la red de significados implicados en su resolución; de los posibles conflictos y dificultades, fomentando una actuación pertinente en la puesta en práctica de ese problema en el desarrollo de la clase de matemática.

b) Contribuye con el establecimiento de categorías de posibles tipos de respuestas asociadas a un tipo de resolución, los cuales pueden ser interpretados como planteamientos hipotéticos sobre posibles actuaciones de los estudiantes. Estos a la vez, por medio del análisis cognitivo de las respuestas de los estudiantes, permiten realizar contrates y valorar la “totalidad” de manifestaciones que han tenido lugar en el proceso de aplicación respectivo. Consideramos que esta práctica promueve la actividad de investigación en torno a la enseñanza, fomentando la investigación desde la propia práctica.

Ciertamente, consideramos que los procesos de investigación desarrollados e informados en los capítulos 4 y 5, podrían ser considerados como referentes de posibles investigaciones que pueden tener lugar en distintos ámbitos-niveles de educación matemática y con diferentes contenidos matemáticos, en la que el uso de la herramienta de análisis epistémico/cognitivo constituye el ente vertebrador del desarrollo de las acciones. No sólo en torno a las aplicaciones de pruebas (diagnóstico o de control), sino de cualquier actividad de enseñanza que involucre la resolución de problemas por parte de los estudiantes. Pensamos que la inclusión de esta herramienta en la planificación educacional fomenta el desarrollo de la actividad de investigación educativa desde la propia práctica.

Un segundo hallazgo, refiere a la evaluación del posible avance manifestado en torno al conocimiento de la proporcionalidad, logrado por los futuros profesores durante su primer cuatrimestre de formación inicial. El procedimiento empleado para el registro de ese posible avance consistió básicamente en la aplicación de dos cuestionarios relativos a ese conocimiento. Las manifestaciones registradas de las actuaciones de los futuros profesores participantes, por medio de los ítems-problemas que constituyeron los instrumentos empleados, indican que prácticamente no hubo avance en el conocimiento exhibido por los futuros profesores durante su primer cuatrimestre de formación. Por otra parte, se debe considerar la posibilidad de que el avance logrado por ellos no pudo ser registrado por medio de la aplicación de los instrumentos considerados. No obstante, en particular, de acuerdo con lo presentado en el apartado 5.8 del capítulo 5, no se registran avances en las estrategias de resolución empleadas para resolver problemas de valor faltante, asimismo, no se observan avances considerables en el uso de argumentos para distinguir entre problemas proporcionales y pseudo-proporcionales.

Un tercer hallazgo, refiere a las categorizaciones que hacemos sobre las justificaciones dadas por los sujetos participantes para decidir si una situación es directamente proporcional o no. Esas categorizaciones (expuestas en el apartado 5.7 del capítulo 5, y en el Anexo E) nos han permitido realizar una descripción del conocimiento manifestado por los futuros profesores sobre la proporcionalidad, cuando ellos realizan un juicio sobre la proporcionalidad/no-proporcionalidad de las situaciones-problema propuestas. Una primera conclusión señala que los futuros profesores hacen uso de argumentos superficiales y con poco sustento en los aspectos claves del razonamiento proporcional. Muy pocos sujetos basan sus juicios en ideas (de razón, covariación constante, relación lineal…) próximas a la noción de proporcionalidad. Estas manifestaciones dieron lugar a nuevas categorizaciones de las respuestas de los sujetos, de acuerdo con la proximidad (débil, moderada y fuerte) de esas respuestas con la idea de proporcionalidad. Estas categorizaciones han permitido observar que el conocimiento relativo a la proporcionalidad de los futuros profesores se manifiesta por medio de ideas que se encuentran débilmente relacionadas con la noción de proporcionalidad.

Un cuarto hallazgo refiere al reconocimiento de propiedades y argumentos en torno a la resolución de un problema, incluido en la tarea de análisis. A nuestro entender esta actividad y los resultados que resultan de ella constituyen una aportación origianl en este tipo de estudios.

Con respecto al reconocimiento de propiedades, hemos podido ver que el mismo puede ser interpretado como una aproximación al ―funcionamiento de una resolución", puesto que ese funcionamiento puede ser descrito por medio de la identificación de una secuencia de las propiedades puestas en juego en el proceso de resolución. Tal y como fue referido en los análisis epistémicos de los problemas del yogur y de la limonada, un funcionamiento de las resoluciones consideradas puede describirse por medio de la identificación de una secuencia de propiedades ($P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3$), la cual caracteriza y sistematiza las resoluciones empleadas.

En relación con este hallazgo encontramos que los argumentos dados, dirigidos básicamente a justificar las propiedades identificadas, constituyen una explicación de la resolución, los cuales, sin lugar a dudas, deberían formar parte del discurso a ser empleado en la labor de enseñanza que lleva(rá) a efecto el (futuro) profesor. Estas características, asociadas al reconocimiento de propiedades y argumentos, proveen a la tarea de análisis epistémico y cognitivo de mayor relevancia para su uso en la labor de formación de futuros profesores.

Un último hallazgo, registrado por medio del desarrollo de la presente investigación, está en relación con lo que fue señalado como una de las aportaciones de la herramienta de análisis empleada. Refiere específicamente al uso de esa herramienta para el desarrollo de la faceta epistémica del análisis didáctico y el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático necesario para la enseñanza.

Con respecto al desarrollo de la faceta epistémica del análisis didáctico hemos visto que el uso de la herramienta en referencia, por parte de los futuros profesores, ha permitido observar la manifestación (aunque con bajas frecuencias) del desarrollo de competencias de reconocimiento de objetos y significados matemáticos activados durante los proceso de resolución de los problemas considerados. Las bajas frecuencias de esos reconocimientos pueden deberse a que los futuros profesores no están habituados a la realización de este tipo de tareas, la cual involucra una actividad de análisis/reflexión de índole meta-cognitiva. En este sentido se recomienda el uso extendido de esta herramienta con el fin de hacerla de uso común en la formación de futuros profesores.

En relación con el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático necesario para la enseñanza, particularmente lo relativo al reconocimiento de los elementos matemático-didácticos relevantes (EM-DR), y su uso para valorar el desarrollo del conocimiento especializado del contenido, es considerado como uno de los hallazgos metodológicos más importantes, deducidos del uso de la herramienta en referencia.

Finalmente, a modo de síntesis, los aspectos presentados en este capítulo, referidos en el desarrollo de los capítulos 4 al 6, pretenden contribuir con la fundamentación empírica del uso de la GROS, para el desarrollo de competencias de análisis didáctico y de las categorías del conocimiento necesario para la enseñanza de la matemática, en el contexto de la formación de profesores.

7.5. Cuestiones abiertas

Nos hemos propuesto en este último capítulo presentar la síntesis y conclusiones de este trabajo, y hemos optado por presentar aspectos relativos a las respuestas a las preguntas de investigación planteadas, corresponder con los objetivos formulados, a proveer de algunos resultados, aportaciones y hallazgos relacionados con la problemática del aprendizaje de la proporcionalidad. No obstante, en el tránsito de esa presentación, y en correspondencia con lo señalado en los capítulos 4 al 6, hemos observado diversos asuntos importantes que no hemos podido abordar. En este apartado referiremos a tales asuntos. Asimismo, en relación con esos asuntos, presentamos algunas hipótesis para futuras investigaciones.

Una primera acotación que debemos hacer refiere a los tipos de problemas que hemos abordado en el desarrollo de esta investigación. Nos hemos limitado al estudio de algunos problemas particulares, y como referimos en el apartado 1.15 del capítulo 1, hemos dejado de lado las relaciones entre proporcionalidad y: porcentajes, escalas, geometría, probabilidades, función lineal, conexiones, entre otras, las cuales son fuentes de diversos tipos de problemas relativos a la proporcionalidad. A excepción del *problema (c)* en el que se propone una situación cuya razón es la unidad, para el cual consideramos debe realizarse mayor investigación, los demás problemas considerados en este estudio pueden ser resumidos en dos tipos; problemas de valor faltante y problemas de comparación. No obstante, consideramos necesario el estudio de diferentes tipos de problemas, puesto que, de acuerdo con lo observado en los que hemos estudiado en este trabajo, presentan particularidades de interés para la didáctica.

Asimismo, como hemos referido en el apartado 7.3 de este capítulo, es necesario realizar estudios en los que se considere el uso de problemas que requieran el uso de estrategias en el que se ponga en juego el razonamiento proporcional. En esta línea de ideas, reconocemos que los tipos de problemas analizados por los futuros profesores, por medio de la GROS, se han limitado a dos tipos: uno de razón y proporción o de valor faltante, y otro de comparación (de mezclas), los cuales, de acuerdo con la literatura consultada, referida en el apartado 1.6, del capítulo 1, pertenecen al ámbito de la proporcionalidad en educación primaria.

Además, en relación con la diversidad de estudios que se pueden generar al considerar diferentes tipos de problemas, también resulta de interés el estudio de diferentes tipos de resolución de cada tipo de problema. El estudio de diferentes procedimientos matemáticos para resolver un mismo problema es conocido en la literatura especializada como el estudio de la ―flexibilidad" (Berk et al., 2009; Yakes y Star, 2011). Es de esperarse que el análisis epistémico/cognitivo pueda ser considerablemente enriquecido por medio del análisis de diferentes tipos de respuestas. Por tanto, cobra interés estudiar diferentes posibles resoluciones de un problema y su análisis respectivo, con lo cual se estaría fomentando la flexibilidad, con el uso de la GROS como valor agregado.

Considerando lo que venimos refiriendo queda entonces abierta la posibilidad de realizar otros estudios, en los que se usen otros tipos de problemas, entre los que se encuentran: problemas de escala, de porcentaje, de semejanza, problemas pseudo-proporcionales…, cuya formulación debe ser elaborada de modo que su resolución requiera de la puesta en juego del razonamiento proporcional y se considere la posibilidad de diferentes tipos de resolución.

Como hipótesis inicial y común a la posible realización de tales investigaciones consideramos que los análisis epistémicos y cognitivos, relativos al uso de diferentes tipos de problemas y resoluciones, proveerá de información de interés didáctico en el estudio de la proporcionalidad y fomentará el desarrollo de competencias de análisis epistémico de los posibles (futuros) profesores participantes.

En relación con lo que venimos exponiendo sobre el uso de la GROS, hemos observado la identificación previa de conflictos potenciales, como una actividad posiblemente inherente a la actividad de reconocimiento de objetos y significados, activados durante el proceso de resolución de problemas matemáticos. No obstante, esta actividad ha quedado circunscrita a los análisis realizados a nivel del profesor formador, no habiendo sido considerada su identificación por parte de los futuros profesores. En este orden de ideas, consideramos necesario la realización de estudios dirigidos a explorar la identificación de conflictos potenciales, como parte de la tarea de análisis epistémico/cognitivo, por parte de los futuros profesores.

Asimismo, en relación con el uso de la GROS por parte de los futuros profesores, observamos en el capítulo 6 que algunos grupos mostraron ser competentes para reconocer objetos y significados puestos en juego en las resoluciones de los problemas. No obstante, vimos en los capítulos 4 y 5 que el uso de esa herramienta a nivel del profesor formador permitió determinar categorías de posibles respuestas a los problemas analizados. En este sentido, como señalamos en el aparatado 7.2, de este capítulo, una de las actividades pendientes en el desarrollo de esta investigación es el estudio del reconocimiento anticipado de posibles respuestas que podría ser realizado por los futuros profesores. Ese reconocimiento es considerado como uno de los aspectos que debería ser desarrollado en la formación inicial de profesores (Hines y McMahon, 2005; Inoue y Buczynski, 2011). Asimismo, de acuerdo con los resultados de este trabajo, tal reconocimiento puede estar asociado a la realización de actividades de análisis epistémico/cognitivo, en torno a la resolución de problemas matemáticos, particularmente referidos a la proporcionalidad. Una primera aproximación a ese estudio la hemos realizado en Rivas, Godino y Castro (2012), no obstante, es necesario profundizar los hallazgos iniciales allí reportados. En este sentido, consideramos este asunto como una cuestión abierta a futuros estudios.

Como posible hipótesis, para una continuidad probable de estos estudios, consideramos que el uso de la GROS por parte de los futuros profesores puede contribuir como guía del análisis de las resoluciones de los problemas y por ende coadyuvar en la actividad de prever posibles respuestas a los problemas considerados, así como a identificar previamente conflictos potenciales que pueden hacerse presentes durante el proceso de su resolución.

Otro aspecto del conocimiento relativo a la proporcionalidad, al que nos ha conducido el uso de la GROS, lo observamos en el capítulo 6, relativo a lo que hemos denominado elementos matemático-didáctico relevantes (EM-DR). Al igual que los conflictos potenciales y la categorización de posibles respuestas, esta actividad ha sido limitada a ser realizada a nivel del profesor formador. En este sentido, ha quedado pendiente el posible estudio sobre la determinación de elementos de esa índole por parte de los futuros profesores.

Como posible hipótesis, de ese uso de la GROS por parte de los futuros profesores, consideramos probable que los sujetos participantes reconozcan algunos de los EM-DR, que se aproximen a los identificados a partir del análisis epistémico experto.

Finalmente, debemos referir a algunas cuestiones de índole metodológica que podrían ser consideradas para la realización de estudios posteriores. Por ejemplo, consideramos la necesidad de la realización de nuevos estudios, dirigidos a valorar de manera más específica, por medio de otros instrumentos que incluyan el uso de entrevistas, estudios de pequeños grupos, de casos, sobre acciones realizadas en torno a la puesta en juego de esta herramienta de análisis. Asimismo, el estudio del progreso sobre el conocimiento relativo a la proporcionalidad de los futuros profesores, visto desde las actuaciones de cada sujeto a lo largo de la investigación realizada, donde tal estudio incluya el uso de la GROS por parte de los sujetos participantes, y la valoración de ese progreso se realice posterior a ese uso. En este orden de ideas, debemos reconocer que en el estudio realizado, específicamente lo relativo al análisis cognitivo, nos hemos limitado a hacer un análisis vertical sobre las respuestas dadas por los sujetos, es decir, el comportamiento del grupo de sujetos en las resoluciones de cada problema. Quedaría, por tanto, pendiente realizar un análisis horizontal, es decir el comportamiento de un mismo sujeto en las resoluciones de los diferentes problemas, lo cual nos podría informar sobre la coherencia, pertinencia y permanencia del uso que se hace de objetos y significados activados durante los procesos de resolución puestos en juego por los sujetos. Esto, sin duda, será parte de otra investigación.

REFERENCIAS

Abramowitz, S. (1975). *Adolescent understanding of proportionality: The effects of task characteristics*. Tesis doctoral no publicada, Stanford University, Palo Alto, CA.

Adjiage, R. (2005). Ratios and proportions: Complexity and teaching at grades 6 and 7. En G. Lloyd, M. Wilson, J.L.M. Wilkins y S.L. Behm, (Eds.), *Proceedings of the 27th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1-2). Virginia Tech: PME-NA

Adjiage, R. y Pluvinage, F. (2007). An experiment in teaching ratio and proportion. *Educational Studies in Mathematics, 65*, 149–175

Adler, J. y Davis, Z. (2006). Opening another black box: Researching mathematics for teaching in mathematics teacher education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(4), 270-296.

Adler, J. (2009). A methodology for studying mathematics for teaching. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 29*(1), 33-58.

Akatugba, A. H. y Wallace, J. (1999). Sociocultural influences on physics students' use of proportional reasoning in a non-Western country. *Journal of Research in Science Teaching, 36*(3), 305–320.

Alatorre, S. y Figueras, O. (2003). Interview design for ratio comparison tasks. En N. Pateman, B. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 17-24). Honolulu, HI: PME.

Alatorre, A. y Figueras, O. (2005). A developmental model for proportional reasoning in ratio comparison tasks. En H. L. Chick, y J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 25-32). Melbourne: PME.

Allain, A. (2000). *Development of an instrument to measure proportional reasoning among fast-track middle school students*. Tesis de Master no publicada. North Carolina State University. Disponible en: http://www.lib.ncsu.edu/etd/public/etd-1411417310121061/etd.pdf

Allen, V., Moore, C. y Dixon, J. (1992). Development of intuitive and numerical proportional reasoning. *Cognitive Development, 7*, 81-108.

Asper, M. (2009). The two cultures of mathematics in ancient Greece. En E. Robson y J. Stedall (Eds.), *The Oxford handbook of the history of mathematics* (pp. 107-132). Oxford University Press.

Azcarate, P. (2004). Los procesos de formación: En busca de estrategias y recursos. En E. Castro, y E. De la Torre (Eds.), *Investigación en educación matemática, VIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. La

Coruña: Universidad de la Coruña. Recuperado el 15 de septiembre de 2008, desde: http://www.seiem.es/publicaciones/actas.htm

Ball, D. L. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal, 90*, 449-466.

Ball, D. L. y Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. En J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives of mathematics teaching y learning* (pp. 83-104). Westport, CT: Greenwood Publishing Group Incorporated.

Ball, D. L. y Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In E. Summt y B. Davis (Eds.), *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14). Edmonton, AB: Canadian Mathematics Education Study Group.

Ball, D. L., Bass, H. y Hill, H. (2004). Knowing and using mathematical knowledge in teaching: Learning what matters. En A. Buffler y R. Laugksch (Eds.), *Proceedings of the 12th Annual Conference of the Southern African Association for Research in Mathematics, Science, and Technology Education* (pp. 51-65). Durban, South Africa: SAARMSTE.

Ball, D. L., Hill, H. C. y Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator, 29*, 14-22.

Ball, D. L., Lubienski, S. y Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: The insolved problem of teachers, mathematical knowledge. En V. Richarson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433 – 456). New York: Macmillan.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Bart, W. M. y Williams-Morris, R. (1990). A refined item digraph analysis of a proportional reasoning test. *Applied Measurement in Education, 3*(2), 143-165

Baxter, G. P. y Junker, B.W. (2001). Designing cognitive-developmental assessments: A case study in proportional reasoning. Paper presented at the *Annual Meeting of the National Council for Measurement in Education*. Seattle, Washington.

Bayazit, I. (2012). Quality of the task in the new Turkish elementary mathematics textbooks: The case of proportional reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education, on line first*. Recuperado el 30 de agosto de 2012 desde: http://www.springerlink.com/content/e50u151236x8353t/.

Behr, M. y Harel, G. (1990). Students‘ errors, misconceptions, and cognitive conflict in application of procedures. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 12*(3-4), 75-84.

Behr, M., Harel, G., Post, T. y Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 296-333). Macmillan: New York.

Ben-Chaim, D., Fay, J. T., Fitzgerald, M. W., Benedetto, C. y Miller, J. (1998). Proportional reasoning among 7th grade students with different curricular experience. *Educational Studies in Mathematics, 36*, 247–273.

Ben-Chaim, D., Keret, Y. e Ilany, B. (2007) Designing and implementing authentic investigative proportional reasoning tasks: the impact on pre-service mathematics teachers' content and pedagogical knowledge and attitudes. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*, 333–340.

Berk, D., Taber, S.B., Gorowara, C.C. y Poetzl, C. (2009) ―Developing prospective elementary teachers' flexibility in the domain of proportional reasoning". *Mathematical Thinking and Learning, 11*(3), 113-135.

Block, D. (2001). *La noción de la razón en las matemáticas de la escuela primaria. Un estudio didáctico*. Tesis de doctorado no publicada. Departamento de de Investigaciones Educativas, Cinvestav-IPN. México.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: el caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 20*(1), 7-40.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*. Tesis doctoral no publicada. Universidad Autónoma de Barcelona, Departamento de Matemáticas. Barcelona, España.

Boyer, T., Levine, S., y Huttenlocher, J. (2008). Development of proportional reasoning: Where young children go wrong. *Developmental Psychology, 44(5)*, 1478-1490.

Bryant, P. y Nunes, T, (2009). Multiplicative reasoning and mathematics achievement. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, y H. Sakonidis (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 2, pp. 217-224. Thessaloniki, Greece: PME.

Burciaga, J.R. (2007). A love of discovery: Science Education—The second career of Robert Karplus. *American Journal of Physics, 75*(4), 383-384.

Byrne, O. (1847). *The first six books of the Elements of Euclides*. London: William Pickering.

Cai, J., y Wang, T. (2006). U.S. and Chinese teachers' conceptions and constructions of representations: A case of teaching ratio concept. *International Journal of Science and Mathematics Education, 4*, 145-186.

Carpenter, T.P., Fennema, E. y Romberg, T.A. (Eds.) (1993). *Rational numbers: An integration of research*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Carpenter, T.P., Frankle, M.L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann-Elsevier Inc.

Carr, W. y Kemmis, S. (1988). *Teoría crítica de la enseñanza: la investigación-acción en la formación del profesorado*. Barcelona: Martínez Roca.

Carraher, D., Schliemann, A.D., Brizuela, B. y Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(2), 87-115.

Carrasco, J. y Calderero, J. (2000). *Aprendo a investigar en educación*. Madrid: Ediciones Rialp, S.A.

Case, R. (1979). Intellectual development and instruction: a neo-piagetian view. In A. Lawson (Ed.), *The Psychology of Teaching for Thinking and Creativity* (pp. 59-102). ERIC, Columbus, Ohio.

Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1992). Choice of structure and interpretation of relation in multiplicative compare problems. En W. Geeslin y K. Grahan (Eds.) *Proceedings of the 16th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 113-120). Hampshire: PME.

Castro, W.F. (2011). *Evaluación y desarrollo de competencias de análisis didáctico de tareas sobre razonamiento algebraico elemental en futuros profesores*. Tesis doctoral no publicada. Granada: Universidad de Granada

Castro, W. y Godino, J.D. (2009). Cognitive configurations of pre-service teachers when solving an arithmetic-algebraic problem. *Proceedings of the Sixth Conference of European Research in Mathematics Education*. Université Claude Bernard, Lyon, France. Disponible en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm.

Castro, W.F., Godino, J.D. y Rivas, M. (2011). Relatividad socio-cultural de los significados del álgebra y los procesos de transposición didáctica en el marco del álgebra escolar. En M.C. Cañadas, J.M. Contreras y A.B. Heredia (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Dimensión histórica, social y cultural de las matemáticas* (pp. 289-299). Granada: SAEM Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Castro, W.F., Godino, J.D. y Rivas, M. (2011). Razonamiento algebraico en educación primaria: Un reto para la formación inicial de profesores. *Unión, 25*, 73-88

Chapman, R.H. (1975). The development of children's understanding of proportions. *Child Development, 46*(1), 141-148.

Charles, K. y Nason, R. (2000). Young children's partitioning strategies. *Educational Studies in Mathematics, 43*(2), 191-221.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-226.

Clark, M. (2005). Using multiple-missing-values problems to promote the development of middle-school students' proportional reasoning. En G.M. Lloyd, M.R. Wilson, J.L.M. Wilkins y S.L. Behm (Eds.), *Proceedings of the 27th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Recuperado el 10 de Julio de 2008 desde: http://convention2.allacademic.com/index.php?cmd=pmena_guest

Clark, M.R. (2003). *Using numerical comparison problems to promote middle-school students' understanding of ratio as an intensive quantity.* Tesis doctoral no publicada. Graduate Faculty of North Carolina State University. Recuperado el 10 de Julio de 2008 desde: http://ncsu.edu/crmse/research_papers/use_numerical.pdf

Clark, M.R., Berenson, S.B. y Cavey, L.O. (2003). A comparison of ratio and fractions and their roles as tools in proporcional reasoning. *Journal of Mathematical Behavior, 22*(3), 297-317

Clements, D.H. y Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 81-89.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison. K. (2007). *Research methods in education*. 6th ed. London: Routledge.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison. K. (2011). *Research methods in education*. 7th ed. London: Routledge.

Condon, G. W., Landesman, M. F. y Calasanz-Kaiser, A. (2006). What's on your radar screen? Distance-rate-time problems from NASA. *Mathematics Teaching in the Middle School, 12*(1), 6-12.

Confrey, J., Maloney, A., Nguyen, K., Mojica, G. y Myers, M. (2009). Equipartitioning/splitting as foundation of rational number reasoning using learning trajectories. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 345-352). Thessaloniki, Greece: PME.

Confrey, J. y Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(X), 66-86.

Cramer, K. y Post, T. (1993a). Connecting research to teaching proportional reasoning. *Mathematics Teacher, 86* (5), 404-407.

Cramer, K. y Post, T. (1993b). Making connections: A case for proportionality. *Arithmetic Teacher, 60*(6), 342-346.

Cramer, K., Post, T. y Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: Research implications. En D. Owens (Ed.), *Research Ideas for the Classroom* (pp. 159-178). New York: Macmillan Publishing Company.

Creswell, J.W. y Miller, D.L. (2000). Determining validity in qualitative inquiry. *Theory into Practice, 39*(3), 124-131.

D'Amore, B., Godino, J.D. y Fandiño, M.I. (2007). *Competencias y matemática*. Bogotá: Magisterio.

Dantzig, T. (2008). *Number: The language of science*. London: Turnaround Publisher.

Davis, G. E. (2003). Teaching and classroom experiments dealing with fractions and proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behavior, 22*, 107–111

DBRC (The Design Based Research Collective) (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher*, 32(1), 5-8.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., y Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity: From analysis to improvement*. New York: Springer Science+Business Media, LLC.

De Corte, E. y Verschaffel, L. (1996). An empirical test of the impact of primitive intuitive models of operations on solving word problems with a multiplicative structure. *Learning and Instruction, 6*(3), 219-242.

Dehaene, S. (1997). *The number sense: How the mind creates mathematics*. New York: Oxford University Press.

Díaz de León, J.J., Soto Mayorga, M.A. y Martínez Sánchez, A. (2007). Razonamiento proporcional intuitivo en alumnos de primaria y secundaria. *Revista Interamericana de Psicología, 41*(3), 371-378.

Dole, S. y Shield, M. (2008). The capacity of two Australian eighth-grade textbooks for promoting proportional reasoning. *Research in Mathematics Education, 10*(1), 19-35.

Elliot, J. (2000). *La investigación-acción en educación.* (4ta. ed.). Madrid: Morata.

Empson, S.B., Junk, D. Dominguez, H. y Turner, E. (2005). Fraction as the coordination of multiplicatively releated quantities: A cross-sectional study of children's thinking. *Educational Studies in Mathematics, 63*(1), 1-28.

Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*, 94-116.

Even, R. y Tirosh, D. (2002). Teachers' knowledge and understanding of students' mathematical learning. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 219-240). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Fennema, E. y Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. En D. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 147-164). New York: Macmillan.

Fernández, C. y Llinares, S. (2011). De la estructura aditiva a la multiplicativa: efecto de dos variables en el desarrollo del razonamiento proporcional. *Infancia y Aprendizaje, 34*(1), 67-80.

Fernández, C., Llinares, S., Van Dooren, W., De Bock, D. y Verschaffel, L. (2010). How do proportional and additive methods develop along primary and secondary school? En M. M. F. Pinto y T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 353-360). Belo Horizonte: PME.

Fernandez, C., Llinares, S. y Valls, J. (2008). Implicative analysis of strategies in solving proportional and nonproportional problems. En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 369-376). Morelia, Mexico: PME.

Fernández García, F. (2008). Proporcionalidad entre magnitudes. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 533-558). Madrid: Síntesis.

Fernández Lajusticia, A. (2009). *Razón y proporción. Un estudio en la escuela primaria*. Valencia-España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València.

Fernández Lajusticia, A., Figueras, O., Gómez, B., Monzó, O. y Puig, L. (2009). *Competencias en razón y proporción en la escuela primaria.* Valencia-España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València.

Ferrucci, B.J. y Carter, J. (2009). Proportional reasoning models in developing mathematics education curricula for prospective elementary school teachers. En L. Paditz y A. Rogerson (Eds.), *Proceedings of the 10th International Conference of the The Mathematics Education into the 21st Century Project: "Models in developing mathematics education* (pp. 162-165). University of Applied Science, Dresden, Saxony, Germany: The Mathematics Education into the 21st Century Project. Recuperado el 12 de marzo de 2010 desde: http://math.unipa.it/~grim/21_project/21Project_dresden_sept_2009.htm

Filloy, E., Rojano, T. y Puig, L. (2008). *Educational algebra. A theoretical and empirical approach*. New York: Springer Science+Business Media, LLC.

Fiol, M.L. y Fortuny, J.M. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Madrid: Síntesis.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M.S. y Marino, M.S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(1), 3-17.

Flores, P. (2004). Profesores de matemática reflexivos: Formación y cuestiones de investigación. En E. Castro, y E. De la Torre (Eds.), *Investigación en educación matemática, VIII Simposio de la SEIEM*. La Coruña: Universidad de la Coruña. Disponible en: http://www.seiem.es/publicaciones/actas.htm

Flores, P. (2005). Papel del análisis didáctico en el desarrollo de competencias profesionales del profesor de matemáticas. Trabajo presentado en el *Seminario Análisis Didáctico en Educación Matemática*. Málaga.

Font, V. Planas, N. y Godino, J.D. (2010) Modelo para el análisis matemático en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje, 33*(1), 89-105.

Franklin, C. y Ballau, M. (2005). Reliability and validity in qualitative research. En R. Grinnell y Y. Unrau, (Eds.), *Social work: Research and evaluation. Quantitative and qualitative approaches* (pp.438-449). Nueva York: Oxford University Press.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Reidel Publishing, Dordrecht.

Fuller, R.G. (Ed.) (2002). *A love of discovery: Science education, the second career of Robert Karplus*. Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York.

García, F. J. (2005). *De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Jaén, España.

García, F.J., Bosch, M., Gascón, J. y Ruiz, L. (2007). Integración de la proporcionalidad escolar en una organización matemática regional en torno a la modelización funcional: los planes de ahorro. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F.J. García (Eds.), *Sociedad Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD)* (pp. 439-459). Jaén: Universidad de Jaén.

Godino, J.D. (2002). Perspectiva ontosemiótica de la competencia y comprensión matemática. *La Matematica e la sua Didattica, 4*, 434-450

Godino, J.D. y Batanero, C. (2004). Proporcionalidad y su didáctica para maestros. En J. Godino (Dir.). *Didáctica de las matemáticas para maestros* (pp. 271-286). Granada: Universidad de Granada. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/manual/didactica_maestros.pdf

Godino, J.D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M.R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma, 27*(2), 221-252.

Godino, J.D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.

Godino, J.D. Castro, W.F., Rivas, M. y Konic, P. (2008). Competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. En M. Molina, P. Pérez-Tyteca y M.A. Fresno (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Competencias Matemáticas* (pp. 315-323). Granada: SAEM Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Godino, J.D., Font, V. y Wilhelmi, M.R. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *Publicaciones, 38*, 25-49

Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. F. y Konic, P. (2008a). Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. *Actas de las VI Jornadas de Educación Matemática Región de Murcia*. Murcia: Centro de Profesores y Recursos. Disponible en: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm

Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. F., Konic, P. (2008b). Epistemic and cognitive analysis of an arithmetic–algebraic problem solution. ICME 11, TSG 27: Mathematical knowledge for teaching. Disponible en: http://tsg.icme11.org/document/get/391

Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. F. y Konic, P. (2008c). Sviluppo di competenze di analisi didattica nella formazione degli insegnanti di matematica. In G. Arrigo (Ed.). *Atti del Convegno de didattica della matematica.* (pp. 25-39). Cantone: Centro didattico cantonale.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*(4), 13-31.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias, 27*(1), 59–76.

Golafshani, N. (2003). Understanding reliability and validity in qualitative research. *The Qualitative Report, 8*(4), 597-606. Recuperado el 23 de Julio de 2007, desde: http://www.nova.edu/ssss/QR/QR8-4/golafshani.pdf

Gómez, B. (2006). Los ritos en la enseñanza de la regla de tres. En A. Maz Machado, M. Torralbo Rodríguez y L. Rico Romero (Eds.), *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la educación matemática* (pp. 49-69). Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral no publicada. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada

González, J. y Wagenaar, R. (2003). *Tuning educational structures in Europe. Final Report*. Phase one. Bilbao: Universidad de Deusto. http://europa.eu.int/comm/education/policies/educ/tuning/tuning_es.html.

González Mari, J.L. (2006). El análisis didáctico matemático como conjunto de medios para comprender y organizar los fenómenos de la educación matemática. En P. Bolea, M. González y M. Moreno (Eds.), *Seminarios de investigación X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 9-14). Huesca: SEIEM.

Graeber, A.O. (1999). Forms of knowing mathematics: What preservice teachers should learn. *Educational Studies in Mathematics, 38*(1-3), 189-208.

Grouws, D. (Ed.). (1992). *Handbook of research mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan Publishing Company.

Gualdrón Pinto, E. y Gutiérrez Rodríguez, A. (2007). Estrategias correctas y erróneas en tareas relacionadas con la semejanza. En P. Bolea, M. Camacho, P. Flores, B. Gómez, J. Murillo y M.T. González (Eds.), *Investigación en Educación*

Matemática. X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 63-82). Huesca: SEIEM.

Guba, E. y Lincoln, Y. (1989). *Fourth generation evaluation*. Newbury Park: Sage.

Harel, G. y Berh, M. (1989). Structure and hierarchy of missing value proportion problems and their representation. *Journal of Mathematical Behavior, 8*(1), 77-119.

Harel, G., y Confrey, J. (Eds.). (1994). *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. Albany, NY: State University of New York Press.

Hart, K.M. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16*. London: John Murray Publishers Ltd.

Hart, K.M. (1984). *Ratio: Children's strategies and errors*. Winsor, England: NFER-NELSON Publishing.

Hart, K.M. (1988). Ratio and proportion. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations for the middle grades* (pp. 198-219). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Hegedus, S., Kaput, J. y Lesh, R. (2007). Technology becoming infrastructural in mathematics education. In R. Lesh, E. Hamilton y J. Kaput (Eds.), *Foundations for the future in mathematics and science* (pp. 173–192). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Heller, P.M., Ahlgren, A., Post, T., Behr, M. y Lesh, R. (1989). Proportional reasoning: The effect of two context variables, rate type, and problem setting. *Journal of Research in Science Teaching, 26*(3), 205–220

Heller, P., Post, T. y Behr, M. (1985). The effect of rate type, problem setting and rational number achievement on seventh grade students performance on qualitative and numerical proportional reasoning problems. En S. Damarin y M. Shelton (Eds.), *Proceedings of the seventh General Meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 113-122). Columbus, Ohio: PME.

Herber, E.S. (2010). *An investigation of middle secondary student's mathematical conceptions of rate*. Tesis doctoral no publicada. Ballarat, Victoria, Australia: Graduate School of Information Technology and Mathematical Sciences, University of Ballarat.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2006). *Metodología de la investigación* (4ta ed.). México: McGraw-Hill.

Hiebert, J. y Behr, M. (Eds.). (1988). *Number concepts and operations for the middle grades*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Hill, H.C., y Ball. D.L. (2004). Learning mathematics for teaching: Results from California´s mathematics professional development institutes. *Journal for Research in Mathematics Education, 35* (5), 330-351.

Hill, H.C., Ball, D.L., y Schilling, S.G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

Hill, H.C., Rowan, B., y Ball, D.L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal, 42*(2), 371-406.

Hill, H.C., Schilling, S.G., y Ball, D.L. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *The Elementary School Journal, 105*(1), 11-30.

Hill, H.C., Sleep, L., Lewis, J.M., y Ball, D.L. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge: What knowledge matters and what evidence counts? In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 1, pp. 111-155). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Hines, E. y McMahon, M.T. (2005). Interpreting middle school students‘ proportional reasoning strategies: Observation from preservice teachers. *School Science and Mathematics, 105*(2), 88-105.

Hoffer, A. (1988). Ratios and proportional thinking. En T. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8: Research based methods* (pp. 285-313). Boston: Allyn & Bacon.

Hoyles, C. Noss, R. y Pozzi, S. (2001). Proportional reasoning in nursing practice. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(1), 4-27.

Ilany, B., Keret, Y., y Ben-Chaim, D. (2004). Implementation of a model using authentic investigative activities for teaching ratio and proportion in pre-service elementary teacher education. En M.J. Høines y A.B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 81–88). Bergen, Norway: PME.

Inhelder, B., y Piaget, J. (1996). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. (M. T. Cevasco, Trad.). París: Presses Universitaires de France. (Trabajo original publicado en 1955). (Traducido del Francés: De la logique de l‘enfant à la logique de l‘adolescent, 1955)

Inoue, N. y Buczynski, S. (2011). You asked open-ended questions, now what? Understanding the nature of stumbling blocks in teaching inquiry lessons. *The Mathematics Educator, 20*(2), 10–23

Jeong, Y., Levine, S., y Huttenlocher, J. (2007). The development of proportional reasoning: Effect of continuous vs. discrete quantities. *Journal of Cognition and Development, 8*(2), 237-256.

Jonnaert, P. (2002). *Compétences et socioconstructivisme. Un cadre théorique*. Bruselas: De Boeck & Larcier.

Jonnaert, P., Barrete, J., Masciotra, D. y Yaya, M. (2008). La competencia como organizadora de los programas de formación: hacia un desempeño competente. *Profesorado. Revista de curriculum y formación del profesorado, 12*(3), 1-32.

Kahan, J.A., Cooper, D.A., y Bethea, K.A. (2003). The role of mathematics teachers' content knowledge in their teaching: A framework for research applied to a study of student teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *6*, 223-252.

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. In D. Grouws (Ed.), *A handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515–556). New York: Macmillan.

Kaput, J. (1994). Democratizing access to calculus: New routes using old routes. En A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp. 77–156). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. y West, M. (1994). Missing-value proportional reasoning problems: Factors affecting informal reasoning patterns. En G. Harel y J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 235-287). Albany, NY: State University of New York Press.

Kaput, J. y Roschelle, J. (1998). The mathematics of change and variation from a millennial perspective: New content, new context. En C. Hoyles, C. Morgan y G. Woodhouse (Eds.), *Rethinking the mathematics curriculum* (pp. 155–170). London: Springer-Verlag.

Kaput, J. y Hegedus, S. (2002). Exploiting classroom connectivity by aggregating student constructions to create new learning opportunities. En A. D. Cockburn y E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 177-184). Norwich, UK: PME.

Karplus, E.F., Karplus, R. y Wollman, W. (1974). Intellectual development beyond elementary school IV: Ratio, the influence of cognitive style. *School Science and Mathematics, 74*(6), 476-482.

Karplus, R., Adi, H. y Lawson, A.E. (1980). Intellectual development beyond elementary school VIII: Proportional, probabilistic, and correlational reasoning. *School Science and Mathematics, 80*(8), 673-683.

Karplus, R., Karplus, E., Formisano, M. y Paulsen, A-C. (1977). A survey of proportional reasoning and control of variables in seven countries. *Journal of Research in Science Teaching, 14*(5), 411-417.

Karplus, R. y Karplus, E.F. (1972). Intellectual development beyond elementary school III- Ratio: a longitudinal study. *School Science and Mathematics, 72*(8), 735-742.

Karplus, R. y Peterson, R.W. (1970). Intellectual development beyond elementary school II: Ratio a survey. *School Science and Mathematics, 70*(9), 813-820.

Karplus, R., Pulos, S. y Stage, E.K. (1983a). Early adolescents proportional reasoning on "rate" problems. *Educational Studies in Mathematics, 14*(3), 219-233.

Karplus, R., Pulos, S. y Stage, E.K. (1983b). Proportional reasoning of early adolescents. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 45-90). New York: Academics Press, INC.

Kenney, P.A. Lindquist, M.M. y Heffernan, C.L. (2002). Butterflies and caterpillars: Multiplicative and proportional reasoning in the early grades. En B. Litwiller y G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 87-99). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Kenny, P. y Silver, E. (1997). Probing the foundations of algebra: Grade 4 pattern items in NAEP. *Teaching Children Mathematics, 3*(6), pp. 268-274.

Kent, L.B., Arnosky, J. y McMonagle, J. (2002). Using representational contexts to support multiplicative reasoning. En: B. Litwiller y G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp.145-152). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Khoury, H.A. (2002) Classroom challenge. Exploring proportional reasoning: Mr. Tall/Mr. short. En: B. Litwiller y G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp.100-102). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieren, T. (1980). The rational number construct--its elements and mechanisms. En T. Kieren (Ed.), *Number and measurement* (pp. 101-144). Columbus, OH: ERIC.

Kilpatrick, J. Swafford, J. y Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Koellner-Clark, K. y Lesh, R. (2003) Whodunit? Exploring proportional reasoning through the footprint problem. *School Science and Mathematics, 103*(2), 92-98.

Kolodiy, G. (1975). The cognitive development of high school and college science students. *Journal of College Science Teaching, 5*(1), 20-22.

Konic, P.M., Godino, J.D. y Rivas, M.A. (2010). Análisis de la introducción de los números decimales en un libro de texto. *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 74*(3), 57-74.

Kotsopoulos, D. y Lavigne, S. (2008). Examining ―mathematics for teaching" through an analysis of teachers' perceptions of student ―learning paths". *International Electronic Journal of Mathematics Education, 3*(1), Recuperado el 10 de septiembre de 2009, desde: http://www.iejme.com/012008/d1.pdf.

Lamon, S.J. (1989). *Ratio and proportion: Preinstructional cognitions*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Wisconsin, Madison.

Lamon, S.J. (1993a). Ratio and proportion: Children's cognitive and metacognitive processes. En T.P. Carpenter, E. Fennema y T.A. Romberg (Eds.), *Rational numbers. An integration of research* (pp. 131-156). Hillsdale, NJ: Lawrens Erlbaun Associates, Publishers.

Lamon, S.J. (1993b). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(1), 41-61.

Lamon, S.J. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. En G. Harel y J. Confrey (Eds.), *The Development of Mutltiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 89-120). Albany, NY: State University of New York Press.

Lamon, S.J. (1995). Ratio and proportion: Elementary didactical phenomenology. En J. T. Sowder, y B. P. Schappelle (Eds.), *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades* (pp. 167-198). New York: State University of New York Press.

Lamon, S.J. (1996). The development of unitizing: Its role in children's partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(2), 170-193.

Lamon, S.J. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. 2da ed. Mahwah NJ: Lawrence Earlbaum.

Lamon, S.J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. En F.K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 1, pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lamon, S.J. y Lesh, R. (1992). Interpreting responses to problems with several levels and types of correct answers. En R. Lesh y S.J. Lamon (Eds.), *Assessment of performance in school mathematics* (p. 319-342). Washington, DC: American Association for the Advancement of Science.

Lannin, J., Barker, D. y Townsend, B. (2007). How student view the general nature of their errors. *Educational Studies in Mathematics, 66*(1), 43-59.

Lawson, A.E. (1982). The relative responsiveness of concrete operational seventh grade and college students to science instruction. *Journal of Research in Science Teaching, 19*(1), 63 - 77.

Lawson, A.E. y Snitgen, D.A. (1982). Teaching formal reasoning in a college biology course for preservice teachers. *Journal of Research in Science Teaching, 19*(3), 233 - 248.

Lawton, C. (1993). Contextual factors affecting errors in proportional reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(5), 460-466.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. y Stein, M.K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research, 60*(1), 1-64.

León, O. y Montero, I. (2003). *Diseño de Investigaciones*. Madrid: McGraw-Hill.

Lesh, R., Lamon, S.J., Behr, M. y Lester F. (1992). Future directions for mathematics assessment. En R. Lesh y S.J. Lamon (Eds.), *Assessment of performance in school* *mathematics* (pp. 379-425). Washington, DC: American Association for the Advancement of Science.

Lesh, R., Post, T., y Behr, M. (1988). Proportional reasoning. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations for the middle grades* (pp. 93-118). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lester, F.K. (2005). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 37* (6), 457-467.

Levin, S.W. (2002). Proportional reasoning: One problem, many solutions. En B. Litwiller y G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios and proportions* (pp. 138-144). Reston, VA.: National Council of Teachers of Mathematics.

Li, X. (2006). *Cognitive analysis of students' errors and misconceptions in variables, equations, and functions*. Tesis doctoral no publicada.Texas A&M University.

Litwiller, B. y Bright, G. (Eds.) (2002). *Making sense of fractions, ratios and proportions. 2002 yearbook*. Reston, VA.: National Council of Teachers of Mathematics.

Llinares, S. (2004). Aprendizaje del profesor y estrategias de formación. Características de una agenda de investigación. En E. Castro, y E. De la Torre (Eds.), *Investigación en educación matemática, VIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.* A Coruña: Universidad de la Coruña. Disponible en: http://www.seiem.es/publicaciones/actas.htm

Llinares, S., y Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teachers educators as learners. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 429–459). Rotterdam: Sense Publishers.

Llinares, S. y Valls, J. (2009). The building of pre-service primary teachers‘ knowledge of mathematics teaching: interaction and online video case studies. *Instructional Science, 37*, 247-271

Lloyd, G.E.R. (1992). Methods and problems in the history of ancient science: The Greek case. *Isis, 83*(4), 564-577.

Lo, J-J. (2004). Prospective elementary school teachers‘ solution strategies and reasoning for a missing value proportion task. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp 265–272). Bergen, Norway: PME.

Lo, J-J. y Watanabe, T. (1997). Developing ratio and proportion schemes: A story of a fifth grader. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(2), 216-236.

Lupiáñez, J.L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral no publicada. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Mack, N.K. (1990). Learning fractions with understanding: building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*, 16-32

Mack, N.K. (1995). Critical ideas, informal knowledge, and understanding fractions. En En J. T. Sowder, y B. P. Schappelle (Eds.), *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades* (pp. 67-84). New York: State University of New York Press.

Mason, J. y Spence, M. (1999). Beyond mere knowledge of mathematics: the importance of knowing-to act in the moment. *Educational Studies in Mathematics, 38*(1-3), 135–161.

Mellar, H. (1991). Modelling students' thinking on a proportional reasoning task. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 22*(1), 111-119.

Mertens, D. (2005). *Research and evaluation in Education and Psychology: Integrating diversity with quantitative, qualitative, and mixed methods*. Thousand Oaks: Sage.

Ministerio de Educación y Ciencia (2005). *INECSE: PISA 2003 Pruebas de matemáticas y de solución de problemas*. Madrid: Autor.

Misailidou, C. y Williams, J. (2003a). Children‘s arguments in discussion of a ‗difficult‘ ratio problem: The role of a pictorial representation. En *Proceedings of the 3rd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 3).* Recuperado el 12 de abril de 2007 desde: http://www.lettredelapreuve.it/Newsletter/03Printemps/Printemps03.html

Misailidou, C. y Williams, J. (2003b). Children's proportional reasoning and tendency for an additive strategy: the role of models. *Research in Mathematics Education, 5*(1), 215-247.

Misailidou, C. y Williams, J. (2004). Helping children to model proportionally in group argumentation: overcoming the ‗constant sum‘ error. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp 321–328). Bergen, Norway: PME.

Modestou, M., Elia, I., Gagatsis, A. y Spanoudis, G. (2008). Behind the scenes of pseudo-proportionality. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 39* (3), 313–324.

Modestou, M. y Gagatsis, A. (2007). Students‘ improper proportional reasoning: A result of the epistemological obstacle of ―linearity". *Educational Psychology, 27* (1), 75–92

Monterio, C. (2003). Prospective elementary teachers' misunderstanding in solving ratio and proportion problems. En N. Pateman, B. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp 317–323). Honolulu, HI: PME.

Moss, J. (2002). Percents and proportion at the center: Altering the teaching sequence for rational number. En B. Litwiller y G. Bright. (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 109-120). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Nabors, W. (2002). *Proportional Reasoning: The case of Michael*. U.S. Department of Education. Office of Educational Research and Improvement. Reporte ERIC 468 914.

Nabors, W. (2003). From fractions to proportional reasoning: a cognitive schemes of operation approach. *Journal of Mathematical Behaviour, 22*(2), 133-179.

National Council of the Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The Council.

National Council of Teachers of Mathematics. (2007). *Mathematics teaching today: Improving practice, improving student learning* (2nd ed.). Reston, VA: NCTM.

Niaz, M. (1988). The role of cognitive style and its influence on proportional reasoning. *Journal of Research in Science Education. 26*(3), 221-135.

Niaz, M. (1989). Translation of algebraic equations and its relation to formal operational reasoning. *Journal of Research in Science Teaching, 26*(9), 785–793.

Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept: Part I – Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics, 11*(2), 217-253.

Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept: Part II – Problem-structure at successive stages; problem-solving strategies and the mechanism adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics, 11*(3), 331-363.

Norton, S. J. (2005). The construction of proportional reasoning. En H.L. Chick y J.L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 17-24). Melbourne: PME.

Norton, S. J. (2006). Pedagogies for engagement of girls in the learning of proportional reasoning through technology practice. *Mathematics Education Research Journal, 18* (3), 69-99.

Noss, R. y Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings, Learning cultures and computers*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

OECD (2004). *Learning for tomorrow's world: First results from PISA 2003*. Paris: OECD.

OECD (2010). *PISA 2009 Results: What students know and can do. Student performance in reading, mathematics and science* (Volume I). OECD: Autor. Disponible en: http://dx.doi.org/10.1787/9789264091450-en.

Ohlsson, S. (1988). Mathematical meaning and applicational meaning in the semantic of fractions and related concepts. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.). *Number concepts and operations for the middle grades* (pp. 53-92). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ohtani, M. (2009). In search of theoretical perspective on the ―Lesson Study" in mathematics. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 105-108). Thessaloniki, Greece: PME.

Oliveira, I. (2009). Proporcionalidade: estratégias utilizadas na resolução de problemas por alunos do ensino fundamental no Quebec. *Bolema, 22*(34), 57-80.

Peled, I., y Bassan-Cincinatus, R. (2005). Degrees of freedom in modelling: Taking certainty out of proportion. En H.L. Chick y J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 57-64). Melbourne: PME.

Peltier, M.L. (2003). Problemas aritméticos. Articulación, significados y procedimientos de resolución. *Educación Matemática, 15*(3), 29-55.

Person, A., Berenson, S. y Greenspon, P. (2004). The role of number in proportional reasoning: a prospective teacher's understanding. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 17–24). Bergen, Norway: PME

Piaget, J. (1981). *Seis estudios de psicología*. Barcelona: Seix Barral

Piaget, J., Grize, J., Szeminska, A. y Bang, V. (1977). *Epistemology and psychology of functions*. Dordrecht: Reidel Publishing.

Pinker, S. (1997). *How the mind works*. New York: W.W. Norton & Company.

Ponte, J. P., y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practice. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research of the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Roterdham: Sense Publishers.

Ponte, J.P. y Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and develeopment. En L.D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (2nd ed.) (pp. 223-261). New York: Routledge.

Post, T. y Cramer, K. (1989). Knowledge, representation and quantitative thinking. En M. Reynolds (Ed.), *Knowledge base for beginning teachers* (pp. 221-232). Elmsford, NY.: Pergamon Press.

Post, T., Cramer, K., Harel, G., Kieren, T. y Lesh, R. (1998). Research on rational number, ratio and proportionality. En *Proceedings of the 20th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, PME-NA XX, (Vol. I, pp. 89-93). Raleigh, North Carolina. Recuperado el 28 de enero de 2007 desde: http://www.cehd.umn.edu/rationalnumberproject/archive/default.html.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (págs. 61-94). Barcelona: Horsori

Resnick, L. B. (1986). The development of mathematical intuition. En M. Perlmutter (Ed.), *Perspectives on intellectual development: The Minnesota Symposia on Child Psychology* (Vol. 19, pp. 159-194). Hillsdale, NJ: Erlbaun.

Resnick, L.B. y Singer, J.A. (1993). Protoquantitative origins of ratio reasoning. En T. P. Carpenter, E. Fennema y T.A. Romberg (Eds.), R*ational numbers: An integration of research* (pp. 107-130). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Rico, L. (1992). *Investigación sobre errores de aprendizaje en educación matemática*. Granada: Departamento de de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Rico, L. (1997). Reivindicación del error en el aprendizaje de las matemáticas. *Épsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales", 38*, 185-198.

Rico, L. (2004). Evaluación de competencias matemáticas. Proyecto PISA/OCDE 2003. En E. Castro y E. De la Torre (Eds.), *Investigación en educación matemática, VIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.* La Coruña: Universidad de la Coruña.
Disponible en: http://www.seiem.es/publicaciones/actas.htm

Rico, L. y Lupiáñez, J.L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.

Rivas, M. (1998). *Análisis evaluativo del desarrollo de estructuras cognoscitivas en estudiantes de séptimo grado y su relación con el rendimiento escolar en matemáticas*. Tesis de Maestría no publicada. Mérida: Departamento de Matemáticas de la Universidad de Los Andes, Venezuela.

Rivas, M. (1999). *El razonamiento formal y sus implicaciones en el rendimiento escolar en matemáticas*. Mérida-Venezuela: Consejo de Publicaciones de la Universidad de Los Andes, CODEPRE.

Rivas, M., Godino, J. D., y Castro, W. F. (2008). Análisis de objetos y procesos matemáticos en la solución de un problema aritmético-algebraico. En M. Molina, P. Pérez-Tyteca, y M. A. Fresno. *Investigación en el aula de matemáticas. Competencias matemáticas.* (pp. 163-172). Granada-España: S.A.E.M. Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Rivas, M. (2009). *Estudio exploratorio sobre el razonamiento proporcional en futuros maestros*. Tesis de Máster no publicada. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, España.

Rivas, M. Castro, W.F., Godino, J.D. y Konic, P (2009). El sentido numérico en problemas de linealidad y no-linealidad en la formación inicial de maestros. En J.M. Cardeñoso y M. Peñas (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Sentido numérico* (pp. 209-215). Granada: SAEM Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Rivas, M.A. Castro, W.F. y Konic, P. (2009). Epistemic and cognitive configurations of preservice teachers when solving a missing value problem. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol. 1, p. 457) Thessalonika-Grecia: PME

Rivas, M., Godino, J. D., Castro, W. F. y Konic, P. (2009). Análisis epistémico y cognitivo de situaciones-problema sobre magnitudes proporcionales en la formación matemática de maestros. En I. Guzmán (Coord.). *Memorias del VI Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. (pp. 1311-1316). Puerto Montt – Chile: CIBEM.

Rivas, M., Godino, J. D. y Konic P. (2009). Análisis epistémico y cognitivo de tareas en la formación de profesores de matemáticas. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 453-462). Santander: SEIEM.

Rivas, M. y Godino, J.D. (2010). Desarrollo del conocimiento del profesor mediante el estudio de configuraciones epistémicas y cognitivas de la proporcionalidad. *Educere, 14*(48), 189-205

Rivas, M.A. Godino, J.D. y Castro, W.F. (2010). Developing prospective teachers' mathematical knowledge to teach proportionality. En M. F. Pinto y T.F. Kawasaki, (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 96). Belo Horizonte, Brazil: PME.

Rivas, M.A., Godino, J.D. y Castro, W.F. (2012). Desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. *Bolema, 26*(42B), 559-588.

Roschelle, J., Tatar, D. y Kaput, J. (2008). Getting to scale with innovations that deeply restructure how students come to know mathematics. En A. E. Kelly, R. Lesh y J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education* (pp. 369–395). New York: Routledge.

Roschelle, J., Knudsen, J. y Hegedus, S. (2010). From new technological infrastructures to curricular activity systems: Advanced designs for teaching and learning. En M. J. Jacobson y P. Reimann (Eds.), *Designs for learning environments of the future:*

International perspectives from the learning sciences (pp. 233-262). New York: Springer-Verlag.

Roschelle, J., Shechtman, N., Tatar, D., Hegedus, S., Hopkins, B., Empson, S., Knudsen, J. y Gallagher, L. (2010). Integration of technology, curriculum, and professional development for advancing middle school mathematics: Three large-scale studies. *American Educational Research Journal, 47*(4), 833-878.

Ruiz, E.F. y Lupiáñez, J.L. (2010). Use of Dynamic Geometry as a support to paper and pencil activities for comprehension of ratio and proportion topics. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 8*(1), 207-234.

Ruiz, E. y Valdemoros, M. (2006). Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de Paulina. *Relime, 9* (2), 299-324.

Salgado Lévano, A.C. (2007). Investigación cualitativa: Diseños, evaluación del rigor metodológico y retos. *Liberabit, 13*, 71-78.

Sanz, A., Pozo, J., Pérez, M. y Gómez, M. (1996). El razonamiento proporcional en expertos y novatos: El efecto del contenido. *Revista de Psicología General y Aplicada, 49* (2), 337-352.

Schön, D. (1992). *La formación de profesionales reflexivos.* Barcelona: Paidós.

Schwartz, J. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operation. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations for the middle grades* (pp. 41-52). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 2-14.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London: The Falmer Press.

Silverman, J. y Thompson, P. W. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*, 499-511.

Silvestre, A.I. y Ponte, J.P. (2008). Tarefas de investigação e novas tecnologias no ensino da proporcionalidade. *Educação e Cultura Contemporânea, 5*(9) (Mayo).

Simon, M.A. y Blume, G.W. (1994). Mathematical modeling as a component of understanding ratio-as-measure: A study of prospective elementary teachers. *Journal of Mathematical Behavior, 13*(2), 183- 197

Singer, J., Kohn, S., y Resnick, L. (1997). Knowing about proportions in different contexts. En T. Nunes y P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 115-132). Hove: Psychology Press.

Smith, J. (2002). The development of students‘ knowledge of fractions and ratios. En B. Litwiller y G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 87-99). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Solar, H. y Zamorano, A. (2007). Algebrización en la proporcionalidad de magnitudes. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F.J. García (Eds.), *Sociedad Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD)* (pp. 507-526). Jaén: Universidad de Jaén.

Sowder, J., Armstrong, B., Lamon, S., Simon, M., Sowder, L., y Tompson, A. (1998). Educating teachers to teach multiplicative structures in the middle grades. *Journal of Mathematics Teacher Education, 1*(2), 127–155.

Spinillo, A.G., y Bryant, P.E. (1999). Proportional reasoning in young children: Part-Part comparisons about continuous and discontinuous quantity. *Mathematical Cognition, 5*(2), 181-197.

Stafylidou, S. y Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction, 14*(5), 503-518.

Stavy, R., Babai, R., Tsamir, P., Tirosh, D., Lin, F. y Mcrobbie, C. (2006). Are intuitive rules universal? *International Journal of Science and Mathematics Education 4*, 417-436

Steele, M.D. (2005). Comparing knowledge bases and reasoning structures in discussions of mathematics and pedagogy. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(4), 291-328.

Steffe, L. (1988). Children's construction of number sequences and multiplying schemes. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations for the middle grades* (pp. 119-140). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Steinthorsdottir, O. B. (2005). Girls journey towards proportional reasoning. En Chick, H. L. y Vincent, J. L. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 225-232). Melbourne: PME.

Steinthorsdottir, O. B. (2006). Proportional reasoning: Variable influencing the problems difficulty level and one's use of problem solving strategies. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková. (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 169-176). Prague: PME.

Stenbacka, C. (2001). Qualitative research requires quality concepts of its own. *Management Decision, 39*(7), 551-555

Stewart, I. (2008). *Historia de las matemáticas*. Barcelona-España: Crítica.

Stenhouse, L. (2003). *Investigación y desarrollo del currículo*. (5ta ed.). Madrid: Morata.

Streefland, L. (1984). Search for roots of ratio: some thoughts on the long term learning process (Towards… a theory) Part I: Reflections on a teaching experiments. *Educational Studies in Mathematics, 15*(4), 327-348.

Streefland, L. (1985). Search for roots of ratio: some thoughts on the long term learning process (Towards… a theory) Part II: The outline of the long term learning process. *Educational Studies in Mathematics, 16*(1), 75-94.

Sullivan, P. (2008a). Education for the knowledge to teach mathematics: it all has to come together. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*, 431–433

Sullivan, P. (2008b). Knowledge for teaching mathematics. En P. Sullivan y T. Wood, (Eds.), *Knowledge and Beliefs in Mathematics and Teaching Development* (pp. 1-9). Rotterdam: Sense Publishers.

Taylor, A. y Jones, G. (2009). Proportional reasoning ability and concepts of scale: surface area to volume relationships in science. *International Journal of Science Education, 31*(9), 1231-1247.

Tejada, J. (1999). Acerca de las competencias profesionales (I). *Herramientas, 56*, 20-30.

Thompson, A.G. y Thompson, P.W. (1996). Talking about rates conceptually, Part II: Mathematical knowledge for teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 27* (1), 2-24.

Thompson., P. (1994). The development of the concepto of speedy and its relationship to concept of rate. En G. Harel y J. Confrey (Eds.). *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 179-234). Albany, NY: State University of New York Press.

Thompson, P. W., y Thompson, A. G. (1994). Talking about rates conceptually, Part I: A teacher‘s struggle. *Journal for Research in Mathematics Education, 25* (3), 279-303.

Tirosh, D., Even, R., y Robinson, N. (1998). Simplifying algebraic expressions: Teacher awareness and teaching approaches. *Educational Studies in Mathematics, 35*(1), 51-64.

Tirosh, D. y Stavy, R. (1999). Intuitive rules: A way to explain and predict students‘ reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 38*(1-3), 51-66.

Tourniaire, F. (1986). Proportions in elementary school. *Educational Studies in Mathematics, 17*(4), 401-412.

Tourniaire, F., y Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, *16*(2), 181-204.

Valverde, G. (2008). *Razonamiento proporcional: un análisis de las actuaciones de maestros en formación*. Tesis de Master no publicada. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Valverde, G. (2012). *Competencias matemáticas promovidas desde la razón y la proporcionalidad en la formación inicial de maestros de educación primaria*. Tesis doctoral no publicada. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Van de Walle, J.A. (2001). *Elementary and middle school mathematics. Teaching developmentally*. 4ª edición. New York: Addison Wesley Longman Inc.

Van den Brink, J. y Streefland, L. (1979). Young children (6-8), ratio and proportion. *Educational Studies in Mathematics,10*, 403-420.

Van der Maren, J.M. (1995). *Méthodes de recherche pour l'éducation*. Bruxelles: De Boeck Université.

Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2003). The illusion of linearity: expanding the evidence towards probabilistic reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 53*, 113–138.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. *Cognition and instruction, 23*(1), 57–86

Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2008). The linear imperative: An inventory and conceptual analysis of students' overuse of linearity. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(3), 311-342.

Van Dooren, W., De Bock, D. Gillard, E. y Verschaffel, L. (2009). Add? Or Multiply? A study on the development of primary school students' proportional reasoning skills. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y C. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 281-288). Thessalonika, Grecia: PME.

Van Dooren, W, De Bock, D y Verschaffel, L. (2010). From addition to multiplication …and back: The development of students' additive and multiplicative reasoning skills. *Cognition and Instruction, 28*(3), 360-381.

Vass, E., Schiller, D., y Nappi, A. J. (2000). The effect of instructional intervention on improving proportional, probabilistic, and correlational reasoning skills among undergraduate education majors. *Journal of Research in Science Teaching, 37* (9), 981-995.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 127-174). New York: Academics Press, INC.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations for the middle grades* (pp. 141-161). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Villamil Mendoza, L.E. (2008). La noción de obstáculo epistemológico en Gastón Bachelard. *Espéculo. Revista de estudios literarios, 38*, Revista Digital Cuatrimestral, ISSN: 1139-3637. URL: http://www.ucm.es/info/especulo/numero38/index.html

Vygotski, L.S. (2000). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Crítica

Watanabe, T. (2008). Algebra in elementary school: A Japanese perspective. En C.E. Greenes y R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics* (pp. 183-194). Reston, VA: NCTM.

Weinberg, S. L. (2002). Proportional reasoning: one problem, many solutions!. En: B. Litwiller; G. Bright (Eds.). *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 yearbook* (pp. 138-144) Reston, VA.: NCTM.

Westrich, K. y Berg, C. (2011). Villi, Villi everywhere: Biological structures, surface area, & proportional thinking. *The American Biology Teacher, 73*(3), 156-161.

Wollman, W. and Lawson, A. (1978). The influence of instruction on proportional reasoning in seventh graders. *Journal of Research in Science Teaching, 15*(3), 227-232.

Wong, K. Y., Zaitun M. T. y Veloo, P. (2001). Situated sociocultural mathematics education: Vignettes from Southeast Asian practices. En B. Atweh, H. Forgasz, y B. Nebres (Eds.), *Sociocultural research on mathematics education: An international research perspective* (pp. 113-134). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Yakes, C. y Star, J.R. (2011). Using comparison to develop flexibility for teaching algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(3), 175-191.

LISTA DE ANEXOS

Departamento de Didáctica de la Matemática
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Granada

ANEXOS DE LA TESIS DOCTORAL,

ANÁLISIS EPISTEMICO Y COGNITIVO DE TAREAS DE PROPORCIONALIDAD EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

MAURO A. RIVAS OLIVO

GRANADA, 2012

LISTA DE ANEXOS

MATEMÁTICA Y SU DIDÁCTICA

NOMBRE:

---

1) Un coche consume 8,4 litros de gasolina cada 100 km. ¿Cuántos kilómetros puede recorrer con 25,2 litros?

2) ¿Cuáles de las siguientes tablas expresan magnitudes proporcionales? (Los números expresan las medidas de las cantidades correspondientes)

A	1	2	3	4	5
B	7	14	21	28	35

L	4	8	12	16	20
S	36	72	108	144	180

T	1	2	3	4	5
E	100	200	300	400	500

Comprueba tus respuestas, representando gráficamente cada tabla en diagramas cartesianos.

3) De los siguientes pares de magnitudes, ¿cuáles son directamente proporcionales?
   a) Lado del cuadrado y su superficie
   b) Lado del cuadrado y su perímetro
   c) Edad y altura de las personas
   Justifica tu respuesta usando una tabla para cada caso.

4) Explica con tus propias palabras cuándo dos magnitudes son directamente proporcionales. Pon un ejemplo, construye su tabla y represéntala gráficamente.

MATEMÁTICA Y SU DIDÁCTICA
1º A de EDUCACIÓN PRIMARIA. Curso 2007-08

EXAMEN, Primer Parcial, 12 de Febrero de 2008

NOMBRE	DNI	FIRMA

1. La noción de número natural y sus usos. Enuncia y explica los axiomas de Peano.
2. a) Describe las reglas que caracterizan los sistemas de numeración aditivo, multiplicativo y posicional.

b) Construye un sistema aditivo de base 7, inventando los símbolos necesarios, y utilízalo para expresar el número $1634_{(10}$. c) Haz las transformaciones necesarias para convertir el sistema aditivo que has inventado en un sistema posicional de base 7 y vuelve a escribir el número 1634 en el nuevo sistema posicional de base 7.

3. a) Efectúa la siguiente sustracción de números expresados en base 12:
   8AB30419 – 538A168B
   b) Describe y explica cómo funcionan los dos algoritmos para realizar una sustracción designados habitualmente como, "con llevada escrita" y "tomar prestado", refiriendo la explicación al caso de la resta anterior.
   c) Indica las propiedades aritméticas y del sistema de numeración decimal en que se basan ambos algoritmos.

4. Cuando lanzamos una pelota desde una cierta altura, rebota hasta un quinto de la altura a la que se lanzó. Si después de tres botes la altura alcanzada es 6 cm. ¿a qué altura inicial se lanzó la pelota?
   1) Resuelve el problema; 2) Explica la solución utilizando alguna representación gráfica; 3) Explica la solución utilizando notación algebraica.

5. Resuelve las siguientes cuestiones:
   a) ¿Son decimales los números 1'3456789 y 27'454545 … (45 repetido indefinidamente). Justifica la respuesta.
   b) ¿Cuál es la fracción que es igual 27'454545 … (45 repetido indefinidamente).
   c) ¿Es un número decimal el número cuya expresión decimal es 4'58999… (una infinidad de 9)? Justifica la respuesta.
   d) Explica la diferencia entre "número decimal" y "expresión decimal de un número real".

6. Algunos de los siguientes problemas son de proporcionalidad y otros no.

6.1) Determinar cuáles de las situaciones descritas a continuación pueden considerarse como de proporcionalidad. Explicar con detalle las condiciones que cumple cada enunciado para considerarlo como problema de proporcionalidad, o que no es de este tipo.

   a) Si los cereales se venden en cajas de tres paquetes, a 1'80 € la caja, ¿Cuánto costarán 12 paquetes?
   b) Si un bebé aumenta de peso 3 Kg. en tres meses ¿cuánto aumentará en el primer año?
   c) Un banco no paga interés anual por el dinero que cada cliente ingresa en él. Si un cliente ingresa 1.500 €, ¿cuánto dinero tendrá en su cuenta después de 2 años si no ha hecho nuevos ingresos? ¿Cuánto dinero tendrá si en lugar de 1.500 €, hubiera ingresado 3.000 €?
   d) Pedro puede comer 2 pasteles en 3 minutos. ¿Cuánto tiempo le llevará comer 24 pasteles?

6.2) Resuelve aquellas situaciones que has considerado como de proporcionalidad.

ANÁLISIS DE LOS CONOCIMIENTOS PUESTOS EN JUEGO EN UN TEXTO MATEMÁTICO

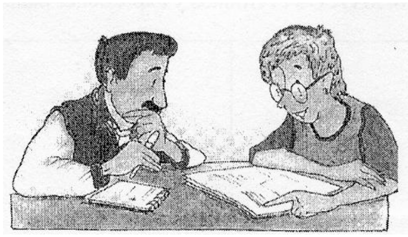
Nombres:

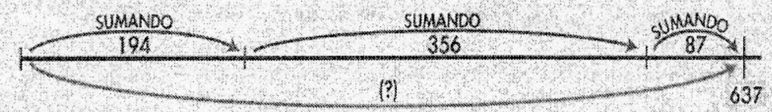
En un libro de 5º curso de primaria encontramos el siguiente problema como introducción al tema de la "Suma y la resta", y la explicación de los autores de la suma y el algoritmo de sumar usando el problema como ejemplo. Identificar los conocimientos matemáticos puestos en juego en este texto matemático cumplimentando la tabla adjunta.

La suma. Significados

El colegio La Peña finalizó el curso pasa-do con 194 niños y niñas de Educación Infantil y 356 de Educación Primaria. A comienzos del curso se han matriculado 87 nuevos alumnos y alumnas.

- ¿Cuántos hay en total?





Observa

Para hallar el número total de alumnos y alumnas se realiza una suma.

	C	D	U
	2	1	
SUMANDOS	1	9	4
	3	5	6
	+	8	7
SUMA o TOTAL	6	3	7

Sumar es reunir, juntar, añadir, aumentar, incrementar...

Para sumar se colocan los sumandos uno debajo del otro haciendo coincidir en columna las unidades con las unidades, las decenas con las decenas, etc.

En total hay 637 alumnos y alumnas.

En una suma se conoce el valor de cada parte y se calcula el total.

Aclaración:

Vamos a considerar que se pone en juego un "conocimiento matemático" cuando se establece algún tipo de relación (significado) entre los siguientes tipos de entidades u objetos:

- *Elementos lingüísticos* (términos, expresiones, notaciones, gráficos…)
- *Situaciones-problemas* (aplicaciones, ejercicios,…)
- *Conceptos* (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función,…)
- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo)
- *Propiedades o proposiciones* (enunciados sobre conceptos o procedimientos cuya validez requiere elaborar una argumentación).
- *Argumentos* (enunciados usados para justificar las propiedades y procedimientos, deductivos o de otro tipo).

GUÍA PARA EL RECONOCIMIENTO DE OBJETOS Y SIGNIFICADOS

Tipos de objetos	**Significados (relación de referencia o de uso)**
SITUACIONES - PROBLEMAS	
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS (Términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas…)	
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)	
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
PROPIEDADES (Enunciados para los cuales se requiere una justificación o prueba)	
ARGUMENTOS (Justificaciones, demostraciones o pruebas de las propiedades usadas)	

ANÁLISIS DE LOS CONOCIMIENTOS PUESTOS EN JUEGO EN LA SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

Nombres:

Un envase de 4 yogures cuesta 1'60 €. ¿Cuánto cuesta un yogur? ¿Y 6 yogures?
a) Resuelve el problema y describe detalladamente el procedimiento empleado.
b) Identifica los conocimientos matemáticos que has puesto en juego para resolver el problema.

Aclaración:

Vamos a considerar que se pone en juego un "conocimiento matemático" cuando se establece algún tipo de relación (significado) entre los siguientes tipos de entidades u objetos matemáticos:

- Elementos lingüísticos: términos, expresiones, notaciones, gráficos…
- Conceptos: introducidos mediante definiciones o descripciones… número, punto, recta,…
- Procedimientos: algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo.
- Propiedades o proposiciones: enunciados sobre conceptos o procedimientos cuya validez requiere elaborar una argumentación.
- Argumentos: enunciados utilizados para justificar las propiedades y procedimientos, deductivos o de otro tipo.

---

a) Resolución del problema y descripción detallada del procedimiento empleado:

Resolución:

b) Conocimientos puestos en juego:

Tipos de objetos	**Significados (relación de referencia o de uso)**
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS (Términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas	
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)	
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
PROPIEDADES (Enunciados para los cuales se requiere una demostración o prueba)	
ARGUMENTOS (Justificaciones, demostraciones o pruebas de las propiedades utilizadas)	

CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN PRIMARIA. 2008-2009

PRÁCTICA 1:
LAS MATEMÁTICAS COMO ACTIVIDAD DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Objetivos:

1. Reflexionar sobre la naturaleza de las matemáticas y su relación con la resolución de problemas.
2. Reconocer los objetos, significados y procesos matemáticos puestos en juego en la resolución de problemas.
3. Identificar en los currículos oficiales el papel que se le asigna a la resolución de problemas y qué estrategias se mencionan explícitamente.

Contenidos:

Teórico: Perspectiva de las matemáticas; resolución de problemas; objetos, significados y procesos matemáticos

Matemático: Aritmética, Geometría.

Reactivo y cuestiones:

a) Resuelve los siguientes problemas, explicitando todos los pasos:

1. Juan prepara una limonada utilizando 3 cucharadas de azúcar y 12 cucharadas de concentrado de zumo de limón. María utiliza 5 cucharadas de azúcar y 20 cucharadas de concentrado de zumo de limón. ¿Cuál de las dos limonadas es más dulce, la de Juan o la de María, o tienen el mismo gusto?

2. Un estudiante recibió de sus padres una cierta cantidad de dinero para comer durante 40 días. Sin embargo, encontró sitios en donde pudo ahorrar 4 euros al día en la comida. De esta forma, el presupuesto inicial le duró 60 días. ¿Cuánto dinero recibió?

b) Para cada uno de los problemas completar la tabla que se adjunta como anexo indicando los diversos objetos matemáticos que habéis puesto en juego en la resolución, así como el significado que se asigna a cada objeto. Se considera como objeto matemático los procedimientos específicos aplicados, las representaciones lingüísticas (símbolos, gráficos, etc.), los conceptos, propiedades y argumentaciones que intervienen en la resolución.

c) Identifica los procesos matemáticos puestos en juego en la resolución de los problemas.

d) Identifica el papel que se le asigna a la resolución de problemas en los currículos oficiales (importancia, orientaciones metodológicas, etc.)

Documentos de estudio:

Castro, E. (Ed.). Didáctica de la matemática en la educación primaria. Madrid: Síntesis

Godino, J.D. (Dir) (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros. Capítulo 1: Perspectiva educativa de las matemáticas* (Fotocopias, Facultad), pp. 19-42.

FICHA PARA EL RESUMEN DEL TRABAJO EN EQUIPOS

Equipo número: **Componentes del equipo:**
Práctica Nº 1: LAS MATEMÁTICAS COMO ACTIVIDAD DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
RESOLUCIÓN: Cada miembro del equipo ha resuelto cada problema de una manera personal. Comparar dichas resoluciones y elaborar una que consideréis más eficaz o “experta”. Incluir a continuación dicha resolución para cada uno de los problemas propuestos. (Añadir las hojas que sean necesarias).

REFLEXIÓN:
(1) Completar la tabla de "objetos y significados" para la resolución "experta" que habéis elaborado para cada problema, a partir de las tablas personales que habéis preparado previamente.
(incluirlas en hojas anexas)

(2) Hacer un resumen del papel que se le asigna a la resolución de problemas en los currículos oficiales (importancia, orientaciones metodológicas, etc.), tanto para el currículo del MEC como para el de la Junta de Andalucía.

Anexo: Conocimientos puestos en juego en la solución de tareas matemáticas

Tipos de objetos	**Significados**
REPRESENTACIONES (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, …)	
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición, más o menos formal)	
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
PROPOSICIONES (Enunciados para las cuales se requiere una justificación o prueba)	
ARGUMENTOS (Justificaciones, demostraciones, o pruebas de las proposiciones usadas)	
OTROS PROCESOS MATEMÁTICOS	

CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN PRIMARIA. 2007-2008

PRÁCTICA 2: DIFICULTADES Y ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS. (PROPORCIONALIDAD)

Objetivos:

- Detectar posibles errores que cometen los alumnos al trabajar con proporcionalidad.
- Percibir el papel que juega el error como fuente de aprendizaje.
- Ejemplificar la noción de obstáculo cognitivo en el campo del aprendizaje de la proporcionalidad.
- Identificar el papel que se da a la proporcionalidad en el Decreto de Enseñanzas Mínimas

Contenidos:

Teórico: Aprendizaje. Recursos.

Matemático: Aritmética; proporcionalidad.

Reactivo y cuestiones

Las siguientes cuestiones corresponden a una prueba realizada por una maestra para evaluar el conocimiento de sus alumnos acerca de la proporcionalidad. Responde las preguntas que se plantean.

Cuestión 1*: En un aula de cuarto grado los niños necesitan 5 hojas cada día para alimentar a 2 orugas. ¿Cuántas hojas necesitarán para alimentar 12 orugas?*

Respuestas de los niños

A) Ellos añadieron 10 orugas, y por eso yo añadi 10 hojas

B) Yo vi los numeros 5 y 2 y sumé 3+2=5 entonces fuí 3 numeros mas allá de 12

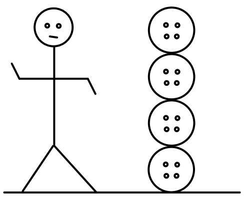
C)

hojas	orugas
5	2
6	3
7	4
8	5
9	6
10	7
11	8
12	9
13	10
14	11
15	12

Pregunta 1. Analiza y explica los eventuales errores de estos niños.

Cuestión 2*: La altura de "señor bajito" es 4 botones, mientras la altura de "señor alto" es 6 botones. Si usamos clips, la medida de "señor bajito es de 6 clips. ¿Cuál será la altura de "señor alto" medida con clips?*

Este es "señor bajito"



Respuestas de los niños:

Nicolás: "señor alto" mide 10 clips, porque él es alto, por tanto 4 + 6 = 10.

Ruth: "señor alto" mide 8 clips, 6 – 4 = 2, y 6 + 2 = 8 clips.

Florencio: "señor alto" mide 9 clips. "Señor bajito" mide 6 clips, 2 más que 4. Por tanto, por cada dos botones hay un clip más. Lo mismo debería suceder con "señor alto" por lo que (2 + 1) + (2 + 1) + (2 + 1) = 9

Pregunta 2. Trata de precisar la causa del error de los niños que están equivocados.

***Cuestión 3*[1]**: *Para hacer un mouse de chocolate para 9 personas se necesitan 6 huevos. Para 15 personas se precisan 10 huevos. a) ¿Cuántos huevos se necesitan para hacer el pastel para 24 personas?; b) ¿Y para 30 personas?*

Respuestas de los niños

	a) para 24 personas	**b) para 30 personas**
María	*Se necesitan 24 huevos para 24 personas*	*Se necesitan 30 huevos para 30 personas*
Cristóbal	*24 + 3 = 27 huevos*	*30 + 5 = 35 huevos*
Manuel	*Número de huevos para 1 persona es 9:6 = 1'5.* *Número de huevos para 24 personas 24 x 1'5 = 36'0*	*Número de huevos para 30 personas: 30 x 1'5 = 45'0*
Tomás	*Son necesarios: 15 + 9 = 24* *10 + 6 = 16 huevos*	*Para 30 personas, 15 + 15 = 30, 10 + 10 = 20 huevos*

Pregunta 3. ¿Encuentras algún hecho común que invalide las tres primeras respuestas? ¿Cuál? ¿De dónde proviene el error (parcial) de Tomás?

Cuestión 4: *En un cierto mapa, la escala indica que 5 centímetros representan 9 Km. Supóngase que la distancia entre dos ciudades en ese mapa mide 2 centímetros. Describe cómo encontrarías la distancia real entre estas dos ciudades.*

Respuestas de los alumnos

Joaquín: *"Divides los 5 centímetros por 2 y multiplicas el resultado por 9, 22 ½ kilómetros"*.

Benito: *"Encuentras cuantos kilómetros hay en un centímetro. El resultado que obtienes lo multiplicas por 2"*.

Alicia:

k.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
c.	1	1 ½	2	2 ½	3	3 ½	4	4 ½	5

Pregunta 4. Analiza la lógica interna de las soluciones dadas por los niños.

Pregunta 5. Qué finalidad puede tener el tratar de buscar "la lógica interna" de estas soluciones? ¿Qué puede hacer la maestra si no la encuentra? ¿Y que hacer si la maestra la logra entender?

Cuestión 5: *Cuál es el valor de x si* $\frac{4}{6} = \frac{2}{x}$.

Respuesta: *Vicente dice que el valor de x es 4, pero Jerónimo no está de acuerdo.*

Pregunta 6: Trata de precisar la causa del error del niño que está equivocado. ¿Se puede relacionar su error con alguno otro de los encontrados anteriormente?

Pregunta 7. ¿En qué ciclo piensas que se ha propuesto este test? ¿Con qué finalidad? ¿Cómo debe explotar los resultados de este test la maestra?

Documentos de estudio

Godino (Dir) (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. (Fotocopias, Facultad),

1. Dificultades, errores y obstáculos (en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas) (pp.73-76).
2. Desarrollo cognitivo y progresión en el aprendizaje de la proporcionalidad; Situaciones y recursos; Conflictos en el aprendizaje. Instrumentos de evaluación. (pp. 274-284).
3. Castro, E. (Coord.) (2001). *Didáctica de la Matemática en Educación Primaria*. Proporcionalidad entre magnitudes (pp.533-558).

[1] Actividad incluida en Godino (Dir.) (2004). Didáctica de las matemáticas para maestros p. 285. (Fotocopias Facultad)

FICHA PARA ACTIVIDADES PRÁCTICAS DE CURRÍCULO DE PRIMARIA

Nombre del equipo:
Práctica Nº 2: DIFICULTADES Y ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS. (PROPORCIONALIDAD)
RESOLUCIÓN: 1) Incluir a continuación las respuestas a cada una de las cuestiones planteadas por la maestra y a las preguntas formuladas sobre las mismas. *(Añadir las hojas que sean necesarias)*

REFLEXIÓN:

1) Describir los tipos de errores que habéis detectado en las respuestas de los estudiantes a las cuestiones, los conocimientos puestos en juego en las mismas y explicar su lógica interna.
2) Indicar cuáles de estos errores obstaculizan la comprensión y uso de la proporcionalidad.
3) Hacer una tabla resumen de la información incluida en el Decreto de Enseñanzas Mínimas referida al razonamiento proporcional.

Documentos de estudio

Godino (Dir) (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. (Fotocopias, Facultad),

1. Dificultades, errores y obstáculos (en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas) (pp.73-76).
2. Desarrollo cognitivo y progresión en el aprendizaje de la proporcionalidad; Situaciones y recursos; Conflictos en el aprendizaje. Instrumentos de evaluación. (pp. 274-284).

Desarrollo cognitivo y progresión en el aprendizaje de la proporcionalidad (Resumen)

El razonamiento proporcional se considera como uno de los componentes importante del pensamiento formal adquirido en la adolescencia. Las nociones de comparación y covariación están en la base subyacente al razonamiento proporcional, siendo a su vez los soportes conceptuales de la razón y la proporción. El desarrollo deficiente de estas estructuras conceptuales en los primeros niveles de la adolescencia obstaculiza la comprensión y el pensamiento cuantitativo en una variedad de disciplina que van desde el álgebra, la geometría y algunos aspectos de la biología, la física y la química.

Diversas investigaciones han mostrado, sin embargo, que la adquisición de las destrezas de razonamiento proporcional es insatisfactoria en la población en general. Estas destrezas se desarrollan mas lentamente de lo que se había supuesto; incluso hay evidencias de que una gran parte de las personas nunca las adquieren en absoluto. Estas cuestiones no se enseñan bien en las escuelas, que con frecuencia sólo estimulan la manipulación de símbolos y fórmulas carentes de significado[2].

Desarrollo del razonamiento proporcional

El esquema de proporción es considerado por Piaget como un componentes básico del razonamiento formal, que será necesario, entre otros, para adquirir conceptos como el de probabilidad y correlación. Sin embargo, esto no quiere decir que los niños no tengan una percepción progresiva de las proporciones. El desarrollo de esta idea, también sigue las etapas típicas de la teoría de Piaget, quien estudió cómo los niños la usan cuando tienen que estimar la probabilidad de un suceso.

Una situación problema típica es la siguiente:

Tarea: Mi madre ha preparado dos jarras de limonada. En la jarra A ha mezclado dos vasos de agua y un vaso de zumo de limón. En la jarra B ha mezclado tres vasos de agua y uno de zumo de limón. ¿En cual de las dos jarras el sabor a limón es más intenso?

En la Tabla 1 describimos algunas etapas que pasan los niños para resolver problemas como el anterior[3], hasta llegar a alcanzar el razonamiento proporcional del adulto.

Tabla1

Etapa	**Nombre**	**Edad media (años, meses)**	**Ejemplo (a, b) vs (c, d)**	**Capacidad requerida**	**Estrategia /razonamiento**
0	Simbólica	2, 0	(1,0) vs (0, 3)	Distinguir el agua del zumo de limón	Buscar la jarra que sólo tiene zumo
IA	Intuitiva Inferior	3; 6	(1, 4)vs (2, 4)	Comparar el primer elemento del par	Las dos jarras tienen igual cantidad de agua. Una tiene más zumo de limón Luego tiene el sabor más intenso
IB	Intuitiva media	6; 4	(1, 2) vs(1, 4)	Compara el segundo término del par	Las dos jarras tienen igual cantidad de limón. Una tiene más agua Luego tiene el sabor menos intenso
IC	Intuitiva superior	7; 0	(5,2) vs (3,4)	Observa la relación de orden inversa entre los términos de los dos pares	En la jarra A hay más zumo que agua En la jarra B hay más agua que zumo Luego A tiene el sabor más intenso

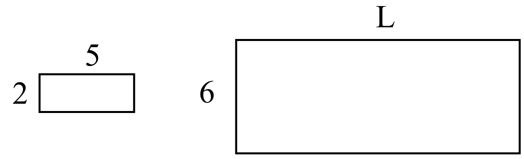
Tabla 1 (continuación)

IIA	concreta inferior	8;1	(1,1) vs (3,3)	igualdad de términos en cada par	En la jarra A hay igual de agua que zumo En la jarra B también hay igual de agua que zumo Luego el sabor es igual
IIB	Concreta superior	10; 5	(4, 2) vs (6,3)	La misma proporción entre los términos de ambos pares	En la jarra A hay doble cantidad de agua que zumo En la jarra B hay doble cantidad de agua que zumo Luego el sabor es igual
IIIA	Formal inferior	12; 2	(2,1) vs (4, 3)	En alguno de los pares los términos son múltiplos	En la jarra A hay doble cantidad de agua que zumo En la jarra B hay menos del doble de agua que zumo Luego el sabor de A es más fuerte
IIIB	Formal superior	15; 10	(3, 5)vs (5,8)	Comparar fracciones con distinto denominador	En la jarra A, de 8 vasos de líquido 3 son de limón En la jarra B, de 13 vasos de líquido 5 son de limón 3/8 =39/104 5/13=40/104 Luego en B el sabor es más intenso porque de las mismas partes totales (104) hay una más de limón.

[2] Hoffer (1988)
[3] Noelting (1980)

Conflictos en el aprendizaje de la proporcionalidad

Razones y proporciones



Diversas investigaciones han puesto de manifiesto que los estudiantes basan su razonamiento intuitivo sobre las razones y proporciones en técnicas aditivas y de recuento en lugar de razonar en términos multiplicativos, lo que indica una deficiencia importante. Por ejemplo, cuando se les pide encontrar la longitud del lado L, los alumnos dicen con frecuencia que es 9 en lugar de 15. Los alumnos tienden a sumar una cantidad en lugar de multiplicar por un factor de escala.

Para resolver el problema de las mezclas (comparar en qué jarra el sabor del zumo de limón es más intenso, descrito anteriormente), la estrategia aditiva consistiría es comparar la diferencia entre vasos de agua y zumo de limón en cada jarra. También hacemos notar que algunas estrategias propias de una etapa sirven para resolver con éxito los problemas más sencillos, que presentamos en la Tabla 1, pero no son válidos en el caso general.

Porcentajes

La comprensión de los porcentajes se considera con frecuencia como fácil de lograr pero hay datos experimentales abundantes de lo contrario. El uso incorrecto de los porcentajes es frecuente no sólo entre los estudiantes de secundaria sino incluso también en los adultos. Se encuentran errores flagrantes, lo que sugiere que con frecuencia las ideas básicas pueden no estar claras. Por ejemplo, en algunas investigaciones se ha encontrado que alrededor de la tercera parte de los estudiantes de 17 años respondieron erróneamente la siguiente cuestión:

"Si el 5% de los alumnos han faltado hoy a clase, ¿5 de cuántos han faltado?"

Un error en esta idea fundamental sobre los porcentajes sugiere que no sabían que 100 es la base de comparación de los porcentajes.

En otra investigación, alrededor de la mitad de los alumnos de 6º curso de primaria respondieron erróneamente la pregunta: *"¿Cuál es el 100% de 48?"*

Es fácil encontrar en los medios de comunicación anuncios que revelan errores, confusiones y distorsiones sobre el uso de los porcentajes. Indicamos dos ejemplos:

1. *"Precios rebajados el 100%"*.

Si este anuncio fuera correcto, los artículos serían gratis. Probablemente, los precios se redujeron el 50%. Si un producto que costaba originalmente 400 €. se vendía a 200 €., el anuncio calculó el 100% sobre el precio de venta, cuando debería haberlo hecho sobre el precio original.

2. *"De todos los doctores consultados, el 75% recomendó nuestro producto"*.

Este tipo de afirmación podría ser un anuncio de alguna compañía. Si el anuncio dijera que "3 de cada 4 doctores que hemos entrevistado recomienda nuestro producto", la reacción del consumidor podría ser diferente. Los porcentajes se pueden usar con frecuencia para disfrazar los números implicados. Los porcentajes permiten hacer comparaciones de manera fácil debido al uso común de la base 100, pero pueden llevar a suponer que se ha usado una muestra mayor de la que efectivamente se ha usado.

Ítems de evaluación

A continuación incluimos información sobre algunos ítems usados en investigaciones sobre razonamiento proporcional y sus porcentajes de éxito a diferentes edades. Indicar cuál es la solución correcta y algunas soluciones incorrectas para cada uno de ellos.

Ítem 1. Encuentra el término que falta para que las dos fracciones sean equivalentes

	Porcentaje de respuestas correctas	
Fracción	12 años	13 años
1/3= 2/?	72	77
4/12= 1/?	56	52
2/7 = ¿/4	57	63

Ítem 2. Supongamos que x/y representa un número. Si se duplican los valores de x e y el nuevo número es:

- la mitad de grande que x/y
- igual a x/y
- doble de grande que x/y

(15% de respuestas correctas a los 9 años; 18% de respuestas correctas a los 11 años).

Ítem 3. Una clase de matemáticas tiene 13 niños y 16 niñas. Cada nombre se escribe en un trozo de papel. Todos los trozos se ponen en un sombrero y el profesor saca uno sin mirar. Señala la frase correcta:

	Porcentajes de respuestas		
	11 años	12 años	13 años
Es más probable que el nombre sea de un niño	7.7	3.4	2.7
Es más probable que el nombre sea de una niña	63.7	75.9	68.5
Es igual de probable que sea de un niño que de una niña	26.4	20.7	28.8

Ítem 4. Si 2 /25 = n/500, entonces n =

A) 10 ; B) 20; C) 30; D) 40; E) 50

Ítem 5. Si se sube el precio de una lata de guisantes de 50 a 60 pesetas, ¿Cuál es el porcentaje de aumento en el precio?

A) 83.3% ; B) 20%; C) 18.2%; D) 16.7%; E) 10%

Ítem 6. La profesora pregunta por qué 4/5 es mayor que 2/3. ¿Cuál de los siguientes niños razonó correctamente?

A) María dijo "porque 4 es mayor que 2"
B) Juan dijo; "porque 5 es mayor que 3"
C) Sonia dijo. "porque 4/5 está más cerca de 1 que 2/3"
D) Jaime dijo: "porque 4 + 5 es más que 2 + 3."

Referencias

Fernandez, F. (2001). Proporcionalidad entre magnitudes. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 533-558). Madrid: Síntesis.

Godino, J. (Dir.) (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros*.
Disponible en: http://www.ugr.es/local/jgodino

Hoffer, A. R. (1988). Ratios and proportional thinking. En Th. R. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8*. Boston: Allyn and Bacon.

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II. Problem structure at successive stages: Problem solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics*, 11 (3), 331-363.

GUIÓN DE OBSERVACIÓN

Asignatura: Matemáticas y su Didáctica
Sección A
Profesores: Juan D. Godino
Número de participantes: 60.
Hora de Teoría[1]

Observación Nº	Grupo	Fecha y hora	Actividad realizada
1	1er Año, Sección A	22-01-2008; 8:30-10:30 a.m.	Aplicación de la prueba diagnóstico

Descripción de la actividad:

De acuerdo con la planificación elaborada por el profesor formador, el inicio al estudio de la proporcionalidad en el desarrollo del curso "Matemática y su Didáctica", se da con la aplicación de una prueba diagnóstica sobre ese contenido. La prueba consta de 4 ítems, en el que se incluyen: un problema de valor faltante, valoración de situaciones de proporcionalidad (uso de tablas y diagramas cartesianos como criterios de valoración), concepto-definición de magnitudes proporcionales, enunciado de un ejemplo y representaciones en una tabla y un gráfico cartesiano asociadas a ese concepto.

La prueba se aplica de manera individual a toda la sección de los estudiantes asistentes. Para el proceso de aplicación se sigue el desarrollo de una trayectoria didáctica específica que incluye:

- Presentación de las consignas.
- Exploración personal
- Trabajo cooperativo en equipos para elaborar una respuesta compartida.
- Presentación y discusión
- Institucionalización por el formador o un asesor, explicitando los conocimientos pretendidos

La actividad se desarrolló siguiendo esta pauta.

Observaciones:

El número de sujetos asistentes fue de 60 estudiantes. El profesor-formador hizo una breve introducción a la actividad a desarrollar en la que incluyó una justificación, los objetivos a lograr y una breve descripción de las consignas de los ítems del instrumento. Todos asumieron la resolución de la prueba de manera adecuada, aunque inicialmente fue necesario que el profesor-formador usara la frase "vamos ánimo" en varias ocasiones.

[1] El horario de la asignatura tiene tres horas por semana, distribuidas de la siguiente manera: dos horas de teoría y una hora de modulo de supervisión (MDS). En el desarrollo de la investigación se estarán utilizando ambas de horas para llevar a efecto las actividades de interés.

La actividad se desarrolló de acuerdo con la planificación prevista; siguiendo la trayectoria didáctica pautada, con la participación permanente del profesor-formador, dirigiendo la realización de cada uno de los momentos de la trayectoria, orientando respecto a las dudas sobre las respuestas de los ítems. Debemos referir que los dos últimos momentos de la trayectoria sólo fueron cumplidos para los ítems 1 al 3.

La aplicación de la prueba se realizó durante los primeros 35 minutos (dos primeros momentos de la trayectoria), luego se dio un receso de 10 minutos y se procedió a continuar con el desarrollo de los momentos siguientes de la trayectoria respectiva, en el resto de la clase.

La exploración personal de las respuestas a los ítems planteados duró 35 minutos, algunos estudiantes terminaron antes de este tiempo. Cada estudiante entregó las respuestas dadas a los ítems del instrumento. Una vez concluida la exploración personal se dio un receso de 10 minutos aproximadamente. A solicitud del profesor formador se organizaron los grupos, entre tres y cuatro estudiantes por grupo. Les fue devuelto el instrumento y se procedió a una discusión entre los grupos para elegir una respuesta compartida, de cada uno de los ítems.

Luego de elegida las respuestas compartidas, por los distintos grupos, fueron recogidos nuevamente los instrumentos. Se solicitó a uno de los sujetos, de uno de los grupos, que expusiera cuál de las respuestas habían sido elegidas. Para lo cual uno de los estudiantes pasó al frente y escribió en la pizarra la respuesta elegida para el primer ítem. La respuesta elegida, caracterizada por el uso de la regla de tres como procedimiento de resolución, fue reconocida por el resto de los grupos como la que todos eligieron entre las respuestas consideradas.

El profesor-formador preguntó sobre qué condiciones permitían decidir que el problema era resoluble utilizando una regla de tres, a lo cual el sujeto que estaba al frente refirió que era un problema del “tipo regla de tres. Otro sujeto, de otro de los grupos, señaló que se podía hacer uso de las otras preguntas dadas en la prueba: utilizar una tabla, o un gráfico para ver si da una línea recta. El profesor-formador preguntó sobre otras posibles formas para determinar si es aplicable o no la regla de tres o no al problema, pero no se presentaron más intervenciones por parte de los estudiantes. De manera que el profesor-formador aprovechó ese momento para referir que se trataba de una situación proporcional, en la que las variaciones entre el combustible y los kilómetros recorridos obedecían a una relación caracterizada por la existencia de una constante, tal relación es de la forma $y = kx$ y su representación en diagramas cartesianos, ciertamente era una línea recta.

Para el ítem 2, no fue necesaria mayor discusión, las respuestas fueron todas coincidentes; todas las situaciones son de proporcionalidad y que las gráficas cartesianas son líneas rectas. El profesor-formador interrogó sobre algo que se observará en común en las gráficas cartesianas elaboradas, pero ninguno de los sujetos atinó a señalar que todas las líneas rectas deberían pasar por el origen de coordenadas. Por lo que fue necesario institucionalizar este aspecto por medio de la intervención del profesor-formador.

Para el ítem 3a, hubo diferentes opiniones, el sujeto que pasó al frente consideró que las magnitudes lado del cuadrado y su superficie eran directamente proporcionales, puesto que al hacerse más grande el lado del cuadrado, mayor era su superficie. Otro sujeto, de otro de los grupos consideró que la gráfica cartesiana asociada a la superficie de un cuadrado era una parábola y no una línea recta, por tanto el lado del cuadrado y su superficie no eran magnitudes proporcionales. Otro sujeto esgrimió que era posible aplicar la regla de tres en un problema en que se supieran tres datos sobre lados de un cuadrado y la superficie, y faltara uno de los datos, bien sea el lado o la superficie. Las opiniones quedaron divididas entre estas tres razones. Todas parecían razones válidas para argumentar sobre la respuesta del problema. Fue necesaria la intervención del profesor formador y explicar las razones por las cuales esas magnitudes no son directamente proporcionales.

Sobre el ítem 3b se presentó poca controversia puesto que sólo uno de los grupos consideró que las magnitudes no eran directamente proporcionales, y no presentaron argumentaciones al respecto. Al ser conminados a considerar las razones antes expuestas, en la que la relación entre el lado l y el perímetro p de un cuadrado viene dada por $p = 4l$, cuya representación cartesiana es una línea recta que pasa por el origen de coordenadas, mostraron, aunque no totalmente convencidos, que esa razón era suficiente para considerar que las magnitudes lado y perímetro de un cuadrado son directamente proporcionales.

Sobre el ítem 3c también se presentó poca controversia, hubo una opinión prácticamente generalizada de que las magnitudes edad y altura no son directamente proporcionales. Las razones presentadas son diversas, observándose cierto predominio del uso de argumentos basados en el contexto o a la “independencia” entre estas magnitudes. Este predominio coadyuvó a la institucionalización en torno a la situación propuesta por ese ítem.

En general la sugerencia de utilizar una tabla para justificar sobre la proporcionalidad o no proporcionalidad de las magnitudes consideradas, no parece haber tenido mucho impacto en las argumentaciones exhibidas por los sujetos en el desarrollo de las discusiones.

El profesor-formador informó sobre la respuesta correcta del ítem 4, a modo de institucionalizar lo referente a cuándo dos magnitudes son proporcionales. Lo cual sirvió para concluir la clase.

GUIÓN DE OBSERVACIÓN

Asignatura: Matemáticas y su Didáctica
Sección A
Profesores: Juan D. Godino
Número de participantes: 93.
Hora de Teoría

Observación Nº	Grupo	Fecha y hora	Actividad realizada
2	1er Año, Sección A	12-02-2008; 8:30-10:30 a.m.	Aplicación de prueba de control

Descripción de la actividad:

De acuerdo con la planificación elaborada para el desarrollo del curso, se aplicó la prueba de control, cuya duración abarcó la totalidad de las horas de clase de la sesión respectiva. Esta prueba constaba de 6 ítems, en la cual se evaluaban los diferentes temas estudiados en el desarrollo del primer cuatrimestre del curso "Matemática y su Didáctica". El ítem 6 de la prueba refirió al tema de proporcionalidad. Este ítem fue considerado, para efectos de nuestra investigación, como instrumento de recogida de datos. Los datos a ser recabados refieren, básicamente, a las respuestas dadas por los sujetos al ítem en cuestión. En ese ítem se plantean cuatro situaciones, para las cuales se debe hacer una valoración sobre si refieren a situaciones de proporcionalidad o no, y se deben resolver solo aquellas que se consideren de proporcionalidad. Dos de las situaciones son proporcionales y dos son pseudo-proporcionales. Una de las situaciones proporcionales consiste en una "proporción identidad", en la que la constante de proporcionalidad es igual a uno. Se pretende con este ítem observar las actuaciones de los sujetos al resolver un problema de proporcionalidad, donde el uso de algoritmos como el de la regla de tres, no tiene sentido. En relación con los ítems pseudo-proporcionales se quiere observar las argumentaciones utilizadas por los futuros profesores al valorar la proporcionalidad en ese tipo de situaciones.

Observaciones:

La aplicación de la prueba se realizó con la formalidad con que suceden este tipo de eventos; el profesor-formador entregó las hoyas de la evaluación a cada estudiante y estos se dedicaron a dar las respuestas a los ítems.

Durante el desarrollo de la prueba se informó a los estudiantes, sobre la discusión en torno a la resolución de la prueba, en una sesión de clase en la modalidad MDS (Modulo de Supervisión), la cual tendría lugar al día siguiente. Reconociendo las distancias, se podría interpretar la aplicación de la prueba, como el desarrollo de los dos primeros momentos de la trayectoria didáctica propuesta para llevar a efecto las acciones de enseñanza y aprendizaje en el curso.

Transcurridos 1 hora 45 minutos todos los estudiantes concluyeron la prueba, quienes habían entregado su resolución en la medida en que iban terminando. La corrección de la prueba se hizo de manera inmediata y los protocolos de las mismas quedaron a cargo de quien informa, para la realización de los análisis de las respuestas dadas al ítem 6.

Los sujetos que participaron en la aplicación de esta prueba fueron 93. Para efectos de nuestro estudio, debido a que se persigue hacer una comparación entre las respuestas dadas al primer instrumento y esta prueba, se considerarán solamente las pruebas de los sujetos que hayan presentado ese primer instrumento.

GUIÓN DE OBSERVACIÓN

Asignatura: Matemáticas y su Didáctica
Sección A
Profesores: Juan D. Godino
Número de participantes: 36.
MDS

Observación Nº	Grupo	Fecha y hora	Actividad realizada
3	1er Año, Sección A	13-02-2008; 8:30-9:30 a.m.	Revisión de la prueba de control

Descripción de la actividad:

Tal como fue anunciado en el momento de aplicación de la prueba de control, el día de hoy se realizó una sesión de MDS con el fin de discutir en torno a las respuestas dadas por los sujetos a los ítems de la prueba.

Observaciones:

El profesor-formador inició su intervención preguntando sobre cómo les había parecido el examen, a lo cual los estudiantes replicaron que había estado difícil, que no se esperaban un examen con preguntas tan difíciles. Ante esto el profesor-formador refirió que la mayoría de las preguntas habían sido resueltas en las diferentes sesiones de trabajo desarrolladas y las demás habían sido asignadas para su estudio.

El profesor-formador solicitó que le dijeran cuál consideraban había sido la pregunta más difícil del examen. Se presentaron opiniones divididas, no obstante, la mayoría coincidió en que el ítem más difícil fue el 2, que refería a la construcción de un sistema de numeración aditivo de base 7, la escritura de números y operaciones en ese sistema. Uno de los estudiantes solicitó al profesor que lo resolviera, quien se dedicó, no sólo a resolver ese ítem sino a hacer una explicación detallada de los diferentes aspectos relacionados con su resolución y mostrar otros ejemplos similares al propuesto en el examen.

Una vez realizada la explicación, el profesor-formador volvió a preguntar cuál (otra) de las preguntas les había parecido complicada. Uno de los estudiantes señaló que la referida al problema de "los rebotes de la pelota", para la cual el profesor explicó una resolución, haciendo énfasis en su resolución desde un punto de vista algebraico.

Ante la no referencia a la pregunta 6, sobre proporcionalidad, el profesor-formador preguntó que les había parecido lo solicitado en ese ítem. Uno de los estudiantes intervino señalando que se trataba de situaciones en las que lo que se necesita era saber si la regla de tres era aplicable o no, por tanto no era tan complicado. Ante esto el profesor formador refirió a la resolución del la situación planteada en el numeral c) de ese ítem 6.

Luego de leer el problema, conjeturó "esta situación no parece ser una situación en la que se pueda aplicar la regla de tres, o sí… Luego preguntó ¿es proporcional o no esta situación? Uno de los estudiantes intervino y dijo que sí, que se trataba de una situación proporcional en la que la cantidad de dinero no variaba, "al permanecer igual; la razón entre cantidad ingresada y la que tienes después de un tiempo es igual siempre, es proporcional"… El profesor-formador, entonces concluyó que el uso de la regla de tres puede resultar insuficiente para realizar juicios en torno a la proporcionalidad de una situación.

Seguidamente, el profesor-formador vinculó esta conclusión con la resolución de los problemas de los numerales b) y d) de la prueba y luego de leerlos, preguntó "fijate en estos problemas, ¿se puede aplicar o no la regla de tres?"… Ante el silencio de los estudiantes, el profesor-formador emplazó a un estudiante y directamente le hizo la pregunta, quien, no con mucha seguridad, respondió "sí, pero más en la situación de los pasteles que la del bebé, pues que la del bebé depende de muchos factores". Ante esto, el profesor-formador, preguntó: ¿alguien tiene una opinión distinta?... Uno de los estudiantes dijo: "se puede aplicar la regla de tres pero las situaciones no son proporcionales en realidad". El profesor volvió a preguntar si alguien tenía otra opinión, ante lo cual uno de los estudiantes dijo: "si se puede aplicar la regla de tres, son proporcionales, pero estas situaciones no son proporcionales"… Hubo comentarios no distinguibles entre los estudiantes… El profesor-formador: "¿Por qué no son proporcionales? El estudiante: "porque Pedro se puede cansar de comer pasteles, no es máquina y no come cada pastel gastando el mismo tiempo". El profesor-formador preguntó por alguna otra opinión, ante lo cual no hubo más intervenciones.

Finalmente, el profesor-formador clarificó que la relación de proporcionalidad entre dos magnitudes no puede reducirse al uso de un algoritmo como la regla de tres. Que ciertamente las dos situaciones no son proporcionales, los argumentos dados por ellos son adecuados (la relación peso/edad de un bebé depende de muchos factores, la relación comer pasteles / tiempo no obedece a que se gaste el mismo tiempo en comerse cada pastel), pero que deben ser reforzados por el uso de una tabla o un gráfico cartesiano, en el que se trate de observar las posibles covariaciones entre las magnitudes involucradas, teniendo en cuenta que esa covaraición debe ser constante, que en último término la relación entre magnitudes proporcionales está modelizada por una ecuación del tipo $y = kx$, donde x e y son los valores de las cantidades de magnitudes y k es la razón o la constante de proporcionalidad.

Observamos que el desarrollo de la actividad dio lugar a un intercambio interesante, que las ideas manejadas por los futuros profesores sobre la proporcionalidad siguen siendo incompletas, basadas en particularidades asociadas a la proporcionalidad, pero que no se consolidan en una idea global que involucra las diferentes particularidades. Estas ideas parciales les permiten obtener un resultado correcto, aún cuando no se tiene una comprensión total de lo que significa la proporcionalidad. Asimismo, se observa la persistencia de una sobrevaloración del uso del algoritmo regla de tres para decidir si una situación es, o no es, proporcional. Finalmente, llama poderosamente la atención que los sujetos consideran que con lo que saben sobre proporcionalidad es suficiente, este resultado se deduce debido a que los estudiantes no refirieron al problema 6 como una situación difícil de resolver.

GUIÓN DE OBSERVACIÓN

Asignatura: Currículo de Matemáticas en la Educación Primaria
Sección A
Profesores: Juan D. Godino y Rafael Roa
Número de participantes: 62.
Hora de Teoría

Observación Nº	Grupo	Fecha y hora	Actividad realizada
4	2do Año, Sección A	Fecha: 07-10-2008 Hora: 8:30-10:30 a.m.	Trabajo Práctico Nº 1: Resolución del problema del yogur

Descripción de la actividad:

La actividad se desarrolla en torno a las consignas contenidas en el trabajo práctico denominado "Análisis de los conocimientos puestos en juego en la solución de un problema", que para efectos de nuestra investigación hemos dado llamar "Trabajo Práctico Nº 1".

La resolución de las cuestiones de ese trabajo involucra básicamente tres tareas: (a) la resolución de un problema de proporcionalidad (problema del yogur), (b) la explicación dada a la resolución realizada y (c) hacer uso de la GROS para reconocer los conocimientos puestos en juego en el proceso de resolución. En esta sesión se realizan las dos primeras tareas, siguiendo un procedimiento que involucra el desarrollo de los tres primeros momentos de la trayectoria didáctica referida en la Observación Nº 1, antes realizada.

Este trabajo práctico se presenta en formato de un folio (hoja de trabajo). En el anverso del folio se presenta el título, nombre del (los) participante(s), enunciado del problema, las consignas y una aclaración en la que se describe lo que se entiende como tipos de conocimientos matemáticos que se ponen en juego en la resolución de un problema, quedando en esta cara de la hoja suficiente espacio para realizar la resolución del problema y su explicación. En el reverso, se presenta la GROS, la cual, de acuerdo con la segunda consigna del trabajo, debe ser utilizada para reconocer los objetos y significados matemáticos activados en el proceso de resolución.

Para el desarrollo de las acciones, quien informa actuó como asesor y, junto al profesor-formador, participó aclarando dudas y proveyendo de orientaciones en la resolución del problema y su explicación.

Observaciones:

Para llevar a efecto la actividad el profesor-formador hizo entrega de las hojas de trabajo a cada participante y solicitó realizar el trabajo de acuerdo con las consignas allí enunciadas.

Varios de los estudiantes consultaron sobre lo sencillo que resultaba resolver el problema, tenían dudas que su resolución no revistiera mayor dificultad. Ante estas dudas se les informaba que el interés de la actividad estaba puesto más en la explicación que se debía dar sobre la resolución y el reconocimiento de los conocimientos matemáticos que se ponen en juego en ese proceso de resolución.

En cuanto observamos que la mayoría de estudiantes había hecho la resolución del problema y había dado una explicación, se les solicitó que conformaran grupos de dos integrantes para continuar con el resto del trabajo. Una vez conformados los grupos de trabajo (quedaron constituidos 31 grupos), se les solicitó que produjeran una solución y una explicación compartida, para lo cual les fue entregada a cada grupo una nueva hoja de trabajo. Luego de obtener la solución y la explicación compartida se inició el trabajo con la GROS.

Iniciado el trabajo con la GROS, se notó, debido a la proliferación de consultas por parte de los grupos, que no se sabía cómo comenzar el proceso de identificación. Ante esto, el profesor-formador optó por hacer una recomendación a toda la sección, refiriendo que ya se había hecho un trabajo similar con el problema de los significados de la suma (estudiado en una clase anterior el 01-10-2008) y que deberían recordar que, por ejemplo, los elementos lingüísticos refieren a los términos en el enunciado relacionados con la puesta en juego de algún conocimiento matemático. Ante esta aclaratoria, uno de los estudiantes señaló que la pregunta que se hacía en el enunciado implicaba hacer cuentas y que por tanto ese era un elemento lingüístico...

Dado que la primera hora de clase estaba por concluir y la segunda hora sería dedicada a una clase teoría sobre resolución de problemas, se pausó este trabajo y se les recomendó a los grupos que trabajaran en el reconocimiento del resto de los objetos y significados matemáticos que se usan en la resolución del problema. Lo que se pretende es que para la clase siguiente (MDS) el trabajo se traiga concluido, puesto que los protocolos de los mismos serán considerados para la evaluación del curso. Se les recomendó utilizar como guía el trabajo realizado con “significados de la suma”, cuya resolución había sido colocada en la web, en el “Tablón de los estudiantes”.

Respecto a la resolución del problema y su explicación observamos el desarrollo de un procedimiento que inscribe la puesta en juego de los tres primeros momentos de la trayectoria didáctica propuesta.

La actuación inicial de los estudiantes en torno al trabajo solicitado (uso de la GROS), parece indicar que la tarea de reconocimiento de objetos y significados activados en el proceso de resolución de un problema matemático, constituye una tarea compleja para ellos.

GUIÓN DE OBSERVACIÓN

Asignatura: Currículo de Matemáticas en la Educación Primaria
Sección A
Profesores: Juan D. Godino y Rafael Roa
Número de participantes: 42.
MDS

Observación Nº	Grupo	Fecha y hora	Actividad realizada
5	2do Año, Sección A	Fecha: 08-10-2008 Hora: 8:30-9:30 a.m.	Trabajo Práctico Nº 1: Discusión del análisis con la GROS, problema del yogur

Descripción de la actividad:

La actividad desarrollada consistió en la presentación de uno de los análisis realizados por un grupo de estudiantes, haciendo uso de la GROS, sobre la resolución del problema del yogur, ante los demás compañeros. Los objetos y significados reconocidos por uno de los grupos, sería sometido al arbitrio de los demás estudiantes participantes. Luego se realizaría una valoración global al ser comparado, dicho análisis, con un análisis experto propuesto por el profesor-formador.

Observaciones:

Continuando con la actividad iniciada en la clase anterior, el profesor-formador preguntó si habían terminado el trabajo con el problema del yogur, ante lo cual pocos estudiantes respondieron afirmativamente. Se solicitó, entonces, que alguno de los estudiantes voluntariamente pasara adelante y expusiera ante sus compañeros el trabajo realizado, los estudiantes comenzaron a mirarse unos a otros y ninguno se atrevía a pasar.

Ante esto, el profesor-formador comenzó a nombrar estudiantes de una lista. Los dos primeros estudiantes nombrados no se encontraban en clase. El tercer estudiante nombrado estaba en clase, pero no había realizado el trabajo. El cuarto estudiante nombrado, que para efectos de esta observación será llamado "Estudiante 1" pasó al frente con su trabajo en mano. El profesor-formador le sugirió que leyera el primer objeto lingüístico identificado y cuál había sido el significado asignado. El Estudiante 1 leyó el primer objeto lingüístico reconocido: "un envase de cuatro yogures cuesta 1'60 euros", a lo cual asignó el significado: "es lo que valen cuatro yogures".

El profesor-formador preguntó al resto de los estudiantes su opinión respecto a ese elemento y el significado asignado, uno de los estudiantes respondió que en su grupo también habían reconocido esa frase como un elemento lingüístico, puesto que refería a una cantidad que debía ser tomada en cuenta para resolver el problema. Respecto al significado asignado, era similar al asignado por su grupo, por tanto lo consideraba correcto. No hubo más opiniones respecto a este primer elemento reconocido.

El procedimiento respecto al primer elemento lingüístico se repitió con el reconocimiento del segundo elemento lingüístico, el cual refirió a la pregunta dada en el enunciado: "¿cuánto cuesta un yogur?" y el significado asignado por el grupo del Estudiante 1 fue: "división de la cantidad". Uno de los estudiantes admitió coincidir con el reconocimiento de ese elemento lingüístico pero difirió respecto al significado asignado, puesto que consideraban que ese elemento lingüístico refería a la pregunta del problema, cuya respuesta era parte de su solución.

Para concluir sobre los elementos lingüísticos el profesor formador solicitó al investigador valorara las identificaciones realizadas a la luz del análisis experto realizado. El investigador asintió sobre la validez de los elementos reconocidos y los significados asignados, lo cuales fueron considerados como adecuados. Ante esta valoración, el profesor-formador consideró pertinente agregar sobre el posible uso de representaciones gráficas, bien sea para resolver el problema o para la explicación de la resolución, como un aspecto importante a ser considerado como elemento lingüístico.

Se prosiguió con respecto al primer concepto reconocido, para el cual el Estudiante 1 refirió que se trata del concepto de: "multiplicación", y el significado asignado es: "aumentar, incrementar". El profesor-formador preguntó porque asignan ese significado a multiplicación y el Estudiante 1 respondió "pues porque al saber el precio de un yogur, conocer el precio de seis yogures es aumentar seis veces el precio de uno". Al preguntar la opinión al resto de la sección, uno de los estudiantes admitió coincidir en el reconocimiento del concepto de multiplicación, pero el significado refería más a lo último que había dicho el Estudiante 1, es decir, la multiplicación como una "suma un número de veces la misma cantidad". El investigador, a solicitud del profesor-formador, valoró como adecuada la segunda interpretación dada al concepto de multiplicación, lo cual está respaldado por el significado asignado en el análisis epistémico experto respectivo.

El profesor-formador solicitó al Estudiante 1 prosiguiera con los procedimientos. El Estudiante 1 refirió al: "algoritmo de la multiplicación" y el significado dado fue: "permite hallar el valor de la multiplicación, incrementando el valor". El profesor-formador preguntó si no había algún otro procedimiento reconocido, a lo cual el Estudiante 1 respondió: "sí, el algoritmo de la división" y el significado asignado fue: "permite hallar el valor de la división, disminuyendo el resultado total". El profesor-formador invitó al resto de la sección a opinar al respecto. Uno de los estudiantes, el mismo que había intervenido sobre el concepto de la multiplicación, señaló que el algoritmo de la división fue utilizado para obtener el valor de un yogur, y ese fue el significado que su grupo le dio. A solicitud del profesor-investigador, el investigador rescató el significado asignado por el grupo espectador, puesto que el algoritmo de la división ciertamente permite halla el costo de cada yogur, es decir, es el valor de la razón unitaria "precio por yogur", conocida también como "precio unitario".

El profesor-formador solicitó al Estudiante 1 que refiriera a las propiedades reconocidas. El Estudiante 1 dijo haber reconocido la proposición: "un envase de cuatro yogures cuesta 1'60 euros" y el significado asignado fue: "es el enunciado a partir del cual se puede resolver el problema". Al consultar al resto de los estudiantes, respecto a este reconocimiento, uno de ellos dijo haber reconocido una frase similar: "cuatro yogures cuestan 1'60 euros", en cuanto al significado asignado consideran que: "te dice cuánto valen cuatro yogures". En la valoración realizada por el investigador, se reconoce que ciertamente ambas proposiciones representan prácticamente la misma propiedad y que debe ser tomada en cuenta para la resolución del problema. En cuanto al significado asignado, se considera más adecuado referir a que la relación establecida "4 yogures por 1'60 euros" es la que permite conocer cuál es el valor de un yogur, por tanto, el significado que debería asignarse a esa propiedad es lo que ella permite: "conocer el valor de un yogur", lo cual es fundamental para la resolución del problema.

Finalmente, al ser interrogado sobre los argumentos reconocidos, el Estudiante 1 leyó:

> Deductivo, el enunciado de la situación-problema satisface las condiciones del concepto de la multiplicación y división, la solución del problema se obtiene realizando una serie de operaciones, primero una división para averiguar el valor de una unidad y luego una multiplicación para hallar el precio de 6 unidades.

Al consultar con el resto de los estudiantes este argumento, uno de ellos, el mismo que había intervenido sobre el reconocimiento de las propiedades, observó que existe coincidencia entre el argumento dado por el grupo del Estudiante 1 y el dado por su grupo, puesto que también consideran que la resolución ha requerido el uso de un razonamiento deductivo que permite usar las operaciones para saber, "por medio de una división o una regla de 3, el precio de un yogur, para, en adelante, averiguar el precio de 6 yogures".

Para finalizar, el profesor-formador comentó que los argumentos dados referían más bien a una justificación del proceso de resolución, más que a justificaciones de las propiedades utilizadas. La finalización de la hora de clase no permitió continuar con la discusión referente a los argumentos. Asimismo, se percibió poco interés por la discusión de esta parte, posiblemente se haya debido a que su discusión se dio cerca del final de la clase. No obstante, el desanimo parecía provenir desde que se inició las discusión en torno a las propiedades identificadas.

Se solicitó a los estudiantes entregar los protocolos de los trabajos realizados, quienes quisieran o quienes no lo habían terminado, tendrían oportunidad hasta la clase siguiente para realizar la entrega correspondiente. El investigador recalcó que la producción de ese trabajo era importante, pues la misma formaba parte de la evaluación del curso. Sólo 12 protocolos de trabajo fueron entregados.

Se debe señalar que el desarrollo de esta sesión siguió un procedimiento que incluye la puesta en juego de los dos últimos momentos de la trayectoria didáctica referida en la Observación Nº 1.

GUIÓN DE OBSERVACIÓN

Asignatura: Currículo de Matemáticas en la Educación Primaria
Sección A
Profesores: Juan D. Godino y Rafael Roa
Número de participantes: 52.
Hora de Teoría

Observación Nº	Grupo	Fecha y hora	Actividad realizada
6	2do Año, Sección A	Fecha 14-10-2008 Hora: 8:30-10:30 a.m.	Trabajo Práctico Nº 2: Resolución del problema de la limonada

Descripción de la actividad:

Continuando con la realización de acciones encaminadas al desarrollo de competencias de análisis didáctico (epistémico/cognitivo) en la formación de los futuros profesores, se llevó a efecto una nueva actividad con un trabajo práctico, que hemos denominado: "Trabajo Práctico Nº 2".

Este trabajo práctico tiene como una de sus características formar parte de los protocolos utilizados por todas las secciones del curso "Currículo de Matemáticas en la Educación Primaria", a cargo de diferentes profesores, es decir, constituye un instrumento de evaluación instituido para el dictado de esa asignatura. Este trabajo tiene la siguiente estructura:

(i) se presenta el enunciado de dos situaciones problema,
(ii) se enuncian las consignas, en las cuales se solicita: (a) resolver los problemas y describir detalladamente el procedimiento empleado en la resolución de cada problema, y (b) identificar los conocimientos matemáticos que se han puesto en juego para resolver los problemas;
(iii) una aclaración sobre lo que debe hacerse con la consigna que incluye la frase "puesta en juego de un conocimiento matemático", lo cual refiere a reconocer el significado de los siguiente objetos matemáticos: elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos;
(iv) una tabla con el título "Conocimientos puestos en juego", la cual es uno de los formatos que se ha elaborado para la puesta en juego de la Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados (GROS), en esa tabla, de dos columnas y cinco filas, se especifica un tipo de objeto matemático para cada fila y la relación objeto/significado entre las columnas respectivas.

Los dos problemas contenidos en este trabajo práctico tratan; uno sobre un problema proporcional de comparación y el otro sobre un problema aritmético-algebraico. Para efectos de nuestro estudio sólo nos interesa poner atención sobre los hechos alrededor de la resolución del problema proporcional de comparación (problema de la limonada), su explicación y aplicación de la GROS a la resolución.

Al igual que en las actividades llevadas a cabo anteriormente, la planificación realizada para el desarrollo de esta actividad ha previsto llevar a cabo una trayectoria didáctica que incluye los tres primeros momentos de la trayectoria descrita en la primera observación realizada. La experiencia de la aplicación del primer trabajo práctico indica que se requieren dos sesiones de clase para la realización de la totalidad del trabajo. Esta experiencia se desarrolla siguiendo derroteros similares a los puestos en juego en el primer trabajo práctico.

Observaciones:

La sesión se inició con la conformación de los equipos de trabajo los cuales estarían funcionando a lo largo del cuatrimestre para la elaboración del trabajo final: "elaboración de una unidad didáctica". Asimismo, se fueron asignando a los diferentes grupos los temas a ser estudiados por cada grupo para tal elaboración. En la conformación de los equipos de trabajo, la sección fue dividida en dos grupos de práctica (A y B), que serían atendidas por dos profesores diferentes y de manera simultánea.

El trabajo en sí, se inició con la intervención del profesor-formador, quien expuso el procedimiento que se seguiría en el desarrollo de la actividad. Sugirió la resolución individual de los problemas, que podía haber comunicación entre los alumnos, posiblemente en parejas, puesto que no se trataba de una situación de examen. La resolución del problema se justifica, puesto que consiste en un paso previo a cualquier estudio que se quiera realizar al respecto. Paralelamente a estas explicaciones el profesor-formador y dos de los investigadores colaboradores iban repartiendo la hoja de trabajo a cada uno de los estudiantes asistentes.

Se inició la actividad de resolución de los dos problemas. Los estudiantes consultaban dudas entre ellos mismos, al profesor-formador y a los investigadores colaboradores. Uno de los estudiantes consultó con el relator refiriendo a la resolución del problema de la limonada diciendo: "según lo que dice el problema yo sé que tengo que hacer una división, pero qué pasa con el 4 que me da aquí… y aquí también me da cuatro… que eso dice que son iguales de dulces las dos limonadas… vale, eso es". Más que una consulta el estudiante necesitaba un interlocutor que escuchara sus planteamientos, que aún cuando su interlocutor no intervino sino simplemente se centro en escucharle, tal acción le permitió hilar los razonamientos correspondientes para resolver el problema.

Otro de los sujetos consideró que la mejor manera de resolver este problema era hacer el experimento, ante lo cual el investigador le señaló que se pueden hacer cuentas que permiten llegar a una resolución sin necesidad de hacer la experimentación respectiva. Por ejemplo, se puede pensar en que el dulzor de estas limonadas puede ser el mismo si resultan de agregar las mismas cantidades de zumo de limón y de azúcar o el dulzor es diferente si esas cantidades son diferentes. El estudiante se quedó pensando mirando la hoja de trabajo y luego dijo: "ah ya está, sí ya está" y comenzó a desarrollar un procedimiento de cálculo de fracciones equivalentes.

Se pudo observar que la mayoría de los sujetos estaban optando por hacer una división y al obtener el mismo cociente, igual a cuatro para ambas mezclas, concluían que ambas limonadas tenían el mismo gusto.

Uno de los estudiantes preguntó sobre qué se debía hacer para explicitar todos los pasos, que si se bebían enumerar. El investigador sugirió que lo que se solicita es dar una explicación sobre la resolución que no era necesario estar enumerando. El estudiante dijo "escribo un texto y ya está". El investigador respondió afirmativamente.

Se pudo observar que la explicitación de todos los pasos o la explicación solicitada se manifestó, en buena medida, como una descripción del procedimiento de resolución.

La resolución del problema de la limonada y su explicación se hizo rápidamente, al parecer no revistió mayor dificultad para los estudiantes. Una vez concluida esta resolución se inició la resolución del segundo problema de índole aritmético-algebraico.

Una vez que la mayoría de los estudiantes habían terminado el trabajo "individual", el profesor-formador sugirió la conformación de los grupos de trabajo, para continuar con la siguiente actividad, la elección de una respuesta compartida. Para esta actividad se repartió una nueva hoja de trabajo para cada grupo. Cuando la mayoría de los grupos había producido una respuesta compartida, el profesor-formador solicitó que algún estudiante pasará adelante a exponer a sus compañeros la respuesta que su grupo había elegido para cada problema.

El profesor-formador animó a uno de los estudiantes a que lo hiciera. El estudiante afirmó que no había tenido necesidad de hacer ningún cálculo, que ellos pensaron en el problema y se dieron cuenta "que ambos niños utilizan la misma proporción de 4 cucharadas de limón por cada cucharada de azúcar"… El profesor-formador refirió que más que la misma proporción es la misma razón…

El profesor-formador preguntó si alguien había hecho otra resolución. Una estudiante refirió que el problema se resolvía haciendo una división: "si divides las cucharadas de limón de limón entre…(inaudible)… cucharadas de azúcar te da siempre 4… 4 cucharadas de limón por cada cucharada de azúcar"… El profesor-formador: "eso en el caso de Juan, y en el caso de María". La estudiante: "20 cucharadas de limón entre 5 de azúcar… te sale 4 también". El profesor formador: "… entonces eso te lleva a pensar que ahí hay una igualdad de dos razones, verdad, y por consiguiente deben tener el mismo sabor". Seguidamente se dio inicio a la discusión del segundo problema.

Respecto a la resolución del segundo problema, en medio de la discusión, uno de los grupos, a solicitud del profesor formador de que expusiera su resolución, confesó no haber llegado al resultado correcto, puesto que habían utilizado una regla de tres. Luego han tratado de llegar al resultado correcto pero se han quedado atascados. Este problema es un caso en el que el uso de la regla de tres puede representar un obstáculo para obtener una solución correcta del problema.

Luego de concluida la discusión en torno al segundo problema, el profesor-formador refirió a la continuación de la actividad haciendo uso de la GROS. Para ello el profesor formador repartió una hoja contentiva de la GROS, una por cada equipo. Al inicio el profesor había hecho mención a que este tipo de trabajo se venía realizando con otros problemas que habían sido resueltos en sesiones anteriores. Con lo cual, teniendo como referencia las experiencias previas se inicia la segunda parte del trabajo.

Los estudiantes continuaron haciendo consultas sobre posibles soluciones a los problemas planteados. Hubo necesidad de hacer aclaratorias sobre el concepto de razón a varios de los grupos, puesto que no lograban interpretar el cociente que resultaba de las divisiones de las cucharadas de limón por cucharadas de azúcar. Luego de la discusión, era necesario ponerse de acuerdo en cuál era la mejor solución, para luego iniciar su análisis, lo cual exigía una mejor comprensión del procedimiento de resolución y los resultados que se obtienen. El profesor continuó asignando los temas de investigación para la elaboración de la unidad didáctica. El investigador asesoró a dos de los grupos para iniciar el reconocimiento de los elementos lingüísticos relativos a la resolución del problema de la limonada, en el cual se buscaba precisar algunas de las interpretaciones de las magnitudes: cucharadas, dulzura o acidez.

Se observó que varios de los grupos avanzaron considerablemente en el análisis respectivo, quedando pendiente para la clase siguiente la puesta en común de los objetos y significados reconocidos en el análisis del proceso de resolución asumido.

Antes de terminar la clase el profesor-formador solicitó a los grupos que entregaran los protocolos del trabajo del problema del yogur. Fueron entregados los 19 protocolos restantes.

Un aspecto que se observa en la resolución de este problema es la dificultad para interpretar el cociente que se obtiene al dividir la cantidad de cucharadas de limón entre la cantidad de cucharadas de azúcar (12c. de limón / 3c. de azúcar; 20c. de limón / 5c. de azúcar), el cual debería ser interpretado como la razón unitaria: 4 cucharadas de limón por cada cucharada de azúcar. Esta dificultad se encuentra asociada a lo que hemos reconocido en el análisis experto como procedimiento de modelización, en relación con el cual se ha identificado el conflicto potencial: "Interpretar los resultados de la aplicación de un algoritmo según las cantidades de magnitud involucradas".

A la vez, la igualdad entre estos dos cocientes (razones) debería conducir a pensar que ambas limonadas tienen el mismo gusto, pero la interpretación/justificación final debería: (a) incluir el uso de cantidades de magnitudes intensivas para expresar la medida del grado de dulzura o acidez de la limonada preparada, o (b) referir a que cada limonada se puede preparar agregando un número determinado de veces la misma razón unitaria: 4c. de limón por 1c. de azúcar. Pero ninguna de esas interpretaciones pudo ser observada durante el desarrollo de la sesión.

GUIÓN DE OBSERVACIÓN

Asignatura: Currículo de Matemáticas en la Educación Primaria
Sección A
Profesores: Juan D. Godino y Rafael Roa
Número de participantes: 50.
MDS

Observación Nº	Grupo	Fecha y hora	Actividad realizada
7	2do Año, Sección A	Fecha: 15-10-2008 Hora: 8:30-9:30 a.m.	Trabajo Práctico Nº 2: Discusión del análisis con la GROS, problema de la limonada

Descripción de la actividad:

Esta actividad se da en torno al análisis epistémico realizado por los futuros profesores en equipos de trabajo constituidos. Este análisis se realiza sobre el problema de la limonada. Algunos equipos (sólo dos, de acuerdo con lo observado) concluyeron la elaboración del análisis durante el desarrollo de la sesión anterior. Otros debieron concluirlo en horas extra-clase.

El procedimiento implementado es similar al ejecutado para el análisis del problema del yogur. Se solicita la presentación del análisis de uno de los grupos de estudiantes, ante los demás compañeros. Los objetos y significados reconocidos por ese grupo, se someten a consideración de los demás estudiantes de la sección, con el objeto de observar coincidencias, complementariedades y omisiones entre los análisis realizados. Asimismo, se prevé la realización de una valoración global al ser comparado, dicho análisis, con un análisis experto elaborado por el profesor-formador en colaboración con el grupo de investigadores noveles.

Esta actividad se realiza de acuerdo con el desarrollo de los dos últimos momentos de la trayectoria didáctica que se ha venido implementando en las diferentes sesiones, correspondiendo el tercer momento (Trabajo cooperativo en equipos para elaborar una respuesta compartida) con una actividad realizada en un momento previo a esta sesión de clase.

Observaciones:

Se inicia el trabajo con la intervención del profesor-formador refiriendo inicialmente si había quedado claro lo correspondiente a los equipos de trabajo y los temas asignados para los equipos, puesto que, en adelante, el trabajo de los grupos encaminado a la elaboración de la unidad didáctica, sería el aspecto central del desarrollo de la asignatura.

El profesor-formador contextualizó la prosecución de la actividad de análisis epistémico realizados por los equipos, interrogando: "¿habéis estado trabajando con la identificación de los conocimientos puestos en juego en la resolución de los problemas que estamos estudiando?"… El profesor-formador animó a una de las estudiantes a que pasara adelante y expusiera ante sus compañeros lo que su grupo había realizado. "Vamos ánimo" es la frase regularmente utilizada por el profesor para motivar a los estudiantes a realizar las actividades solicitadas.

La "Estudiante A" pasó al frente y miró al profesor-formador, esperando alguna indicación. El profesor-formador le sugirió que leyera lo que habían hecho. La estudiante preguntó: "¿lo de la tabla?"… La Estudiante A comenzó a leer lo correspondiente a los elementos lingüísticos identificados para el problema de la limonada: "3 cucharadas de azúcar, que significa cantidad de cucharadas de azúcar…" Leyó una lista de las cantidades de magnitudes de azúcar y limón, enunciadas en el problema, y la asignación del significado dado a estas cantidades (extensivas), refiriendo a una descripción del tipo "cantidad de cucharadas de…" Un último elemento lingüístico identificado fue la frase "tienen el mismo gusto", a la cual no asignaron ningún significado.

El profesor-formador refirió que además de las cantidades de magnitudes extensivas reconocidas, se manifestaban otro tipo de cantidades de magnitud, por ejemplo ¿qué significado merece la frase "4c. de limón por 1c de azúcar"? Un estudiante dijo: "eso es la razón". La Estudiante A: "nosotros tenemos la razón en los conceptos". El profesor-formador: "¿y qué cosa mide esa razón?... vamos a ver lo que estamos tratando de ver es si alguna de las limonadas es más acida que la otra, ¿o no?"… Estudiante A: "es lo que hemos puesto aquí; tienen el mismo gusto". El profesor-formador: "Vale, vale, pero ¿por qué llegamos a ese resultado? Otra estudiante: "por las divisiones que hacemos… que dan el mismo resultado". El profesor-formador: "¿qué significa ese cociente igual a 4?". Otro estudiante: "es la razón de que por 4 cucharadas de limón se echa una de azúcar… es igual en las dos limonadas". El profesor-formador, ante el carácter circular que estaba adquiriendo la discusión, optó por explicar que esa razón mide una cantidad de magnitud, en este caso se dice que mide una cantidad de magnitud intensiva, qué cantidad de magnitud es esa, pues en el caso de 4c. de limón por 1c. de azúcar está midiendo el grado de acidez de la limonada. Esta cantidad de magnitud también debió ser reconocida junto a las otras cantidades medidas en cucharadas, las cuales son cantidades de magnitudes intensivas.

Prosiguiendo con el análisis, en relación con los conceptos identificados, la Estudiante A leyó: "cantidad, lo que significa magnitud, cucharadas, cantidad; y razón lo que significa relación de dos cantidades". El profesor-formador solicitó al resto de la sección si habían visto algún otro concepto. Una estudiante señaló que dividir también era un concepto que se utiliza, pues permite "…saber cuántas cucharadas de limón se usa por cada cucharada de azúcar y si son iguales entonces se resuelve el problema". La Estudiante A señaló: la división la tenemos en los procedimientos.

El profesor-formador, refiriendo al investigador, ¿qué otro concepto hemos identificado. El investigador refirió al concepto de cantidades de magnitudes intensivas que permiten, en este caso, sintetizar las dos cantidades extensivas que forman la razón en una nueva unidad de magnitud intensiva, utilizada para medir el grado de acidez o dulzura de las limonadas respectivas… se trata de reconocer la razón como una nueva unidad, que en este caso mide cantidades intensivas de cucharadas de limón por cucharadas de azúcar…

En el caso de los procedimientos, La estudiante A leyó: "Igualdad de razones que significa comparar dos razones; y división lo que significa repartir descomponer". El profesor-formador preguntó al resto de los estudiantes si habían reconocido algún otro procedimiento. Un estudiante señaló que ellos habían hecho uso de la regla de tres para resolver el problema y que habían identificado ese algoritmo en los procedimientos. El profesor-formador interrogó sobre por qué utilizar la regla de tres, ante lo cual el estudiante vaciló y no dio una respuesta. Otro estudiante, quien reconoció que su grupo había hecho uso de la regla de tres, aunque no la reconoció como procedimiento, argumentó: "porque existe una relación lineal directa entre las magnitudes de azúcar y zumo… además nos pareció más lógico para el momento de la explicación… la división sale de la regla de tres y la incógnita es cuántas cucharadas de limón tiene la limonada por 1 cucharada de azúcar, que son 4 para las dos… así se sabe que las limonadas tienen el mismo gusto".

El profesor-formador asintió sobre los argumentos dados por el estudiante, pero recalcó que el uso de la regla de tres requiere saber primero que se está ante una situación de proporcionalidad y el hecho de encontrarse ante una relación directa o inversa no era suficiente: "Se sabe, en el contexto de lo que se estamos estudiando, que la situación de las limonadas es proporcional, eso se sabe de antemano, porque así se ha establecido desde el inicio de su resolución. Pero se debe tener presente que se cumplen las condiciones para la aplicación de la regla de tres".

Respecto a las propiedades, la Estudiante A leyó una única proposición identificada: "tienen el mismo gusto o sabor y significa que es la solución del problema". El profesor-formador solicitó al resto del grupo si habían identificado alguna otra propiedad o proposición. Uno de los estudiantes señaló que ellos habían reconocido como proposición la siguiente: "La razón entre azúcar y limón para María y Juan es 4 y esto significa que la razón para cada uno de los casos es la misma, con lo cual deducimos que las limonadas son iguales de dulces". El profesor-formador observó que ambas proposiciones parecían referir a lo mismo; a la solución de la igualdad del gusto en las limonadas. Luego preguntó: "alguien ha hecho algo diferente"… Seguidamente preguntó al investigador alguna otra propiedad. El investigador reconoció que la propiedad identificada por los grupos, referida a la solución, es fundamental. No obstante, se puede reconocer otra propiedad relevante, a saber, el hecho que las mezclas dadas inicialmente no son "directamente comparables", lo que induce a realizar un procedimiento que permita hacer la comparación.

Finalmente, lo relativo al objeto argumentos, la Estudiante A leyó:

El enunciado de la situación-problema satisface las condiciones del concepto de división, por tanto la solución del problema se obtiene dividiendo las dos razones (cucharadas de limón y cucharadas de azúcar).

El profesor-formador señaló que este argumento refería a una justificación sobre el uso de la división en la resolución del problema. Solicitó si algún otro equipo había identificado otro argumento. Una estudiante señaló que su grupo había dado otra justificación, al respecto leyó:

> Puesto que se añade una cucharada de azúcar por cada cuatro cucharadas de limón, podemos decir que las cantidades son proporcionales en ambos casos.

El profesor-formador observó que este argumento parece referir a que las mezclas se pueden hacer añadiendo un cierto número de veces, una misma razón, lo cual parece justificar el hecho que las limonadas tengan igual gusto. Al ser consultado el investigador, este asintió que el argumento utilizado en el análisis experto coincide con esa línea de ideas, puesto que ciertamente ambas mezclas se pueden preparar añadiendo la misma razón; 3 veces en el caso de Juan y 5 veces en el caso de María.

Una vez concluida la discusión el profesor-formador solicitó la entrega de los protocolos del trabajo práctico correspondiente. Fueron entregados en total 13 protocolos.

Se pudo observar al final de esta sesión que los objetos propiedades y argumentos se presentan como los más difíciles para los estudiantes, al momento de su discusión se observó menos ánimos para participar.

Un aspecto interesante, observado en esta sesión, es la necesidad de una redimensión del concepto de razón como relación entre cantidades, requerida para que sea interpretada como una nueva unidad (Fernández y Llinares, 2011), lo que en términos de Lamon (2002) se denomina proceso de unitización, de modo que la razón pasa a constituir un índice de medición del grado de acidez o dulzura de las mezclas elaboradas.

Otro aspecto interesante es el uso del término proporcionalidad en lugar del término razón que se hace presente comúnmente en el discurso de los estudiantes. Por ejemplo, la frase: “las cantidades son proporcionales en ambos casos”, utilizada en el argumento del grupo que intervino, muestra ese uso. En este caso, la proporcionalidad debería ser deducida a partir del hecho que “las razones son iguales en ambos casos”, por tanto las mezclas son proporcionales.

Categorías de respuestas del problema (a) (Tipo de Justificación)

PROPORCIONAL

Solo la frase (JP_SF)

- ➔ El precio será proporcional al número de cajas

La idea de relación como caracterización (JP_IRC)

- ➔ Relación directa entre euros y paquetes
- ➔ Hay relación entre el precio y el número de paquetes
- ➔ Tiene relación
- ➔ El precio de la caja está en relación con el precio total
- ➔ Dos magnitudes son proporcionales cuando dependen la una de la otra

Relación entre cajas, paquetes y precio (JP_RCP)

- ➔ Existe relación entre lo que cuesta cada paquete y el total de paquetes
- ➔ Una caja contiene 3 paquetes, es decir, podemos averiguar lo que cuestan 12
- ➔ Existe proporción entre cajas y paquetes*

Frases que expresan poca relación con la idea de proporcionalidad (JP_FEPRIP)

- ➔ Expresa cosas que son de igual magnitud
- ➔ A partir de un dato fijo se puede establecer un precio exacto
- ➔ Multiplicando u operando en cantidades exactas
- ➔ Si tres paquetes son 1'80€ podemos adivinar cuánto cuestan 12 paquetes

La idea de variación, cambio o aumento (Más → más) (JP_M-m)

- ➔ Más → más
- ➔ Aumento proporcional
- ➔ Los euros aumentan en proporción con los paquetes
- ➔ Cajas valen lo mismo… aumento proporcional

Regla de tres (JP_R-3)

- ➔ Se puede aplicar regla de tres
- ➔ Nos dan los datos necesarios para aplicar la R-3
- ➔ Se resuelven usando R-3
- ➔ Se emplea R-3, te piden 4 elementos y te dan 3
- ➔ Una caja contiene 3 paquetes, es decir, podemos averiguar lo que cuestan 12 (Usa una regla de tres numérica para resolver)

Frases que expresan relación con la idea de proporcionalidad (JP_FERIP)

- ➔ Ambas cantidades deben ser multiplicadas por el mismo número
- ➔ Constante k que es la misma
- ➔ Si se multiplica por un número fijo suben las dos cantidades

La idea de razón (JP_IR)

- ➔ El precio por caja es una razón constante

NO PROPORCIONAL

Solo una frase (JNP_SF)

- ➔ Los datos no son proporcionales

Frases que expresan poca relación con la idea de proporcionalidad (JNP_FEPRIP)
- ➔ Solo aparece una magnitud €

Frases que expresan relación con la idea de proporcionalidad (JNP_FERIP)
- ➔ No existe un factor k, por el cual el precio dependa del número de paquetes*

La idea de variación, cambio o aumento (Más → más) (JNP_M-m)
- ➔ No hay un aumento de las dos magnitudes en la misma cantidad*
- ➔ A medida que aumenta una cantidad no lo hace la otra en la misma medida, en la misma proporción

Categorías de respuestas del problema (b) (Justificación)

PROPORCIONAL

La idea de relación como caracterización (JP_IRC)
- ➔ Aparecen dos magnitudes relacionadas peso y tiempo
- ➔ Pone en relación los kilos con los meses

La idea de variación, cambio o aumento (Más → más) (JP_M-m)
- ➔ El peso aumenta en proporción con los meses
- ➔ Aumento proporcional
- ➔ Más → más
- ➔ Aumenta x kilos en tres meses, lo hará en 12x en un año, aumentando así la cantidad (Usa regla de tres para resolver) *
- ➔ Las magnitudes dadas aumentan todas la misma cantidad

Regla de tres (JP_R-3)
- ➔ Se emplea la regla de tres, te piden 4 elementos y te dan 3
- ➔ Se puede aplicar la R-3

Frases que expresan relación con la idea de proporcionalidad (JP_FERIP)
- ➔ Se puede hallar un factor que relaciona el peso con los meses (Usa reducción a la unidad para resolver)
- ➔ Al multiplicar una magnitud por un número la otra se multiplica por el mismo número (Usa regla de tres para resolver)
- ➔ Sube 3 kg de peso en 3 meses, podemos averiguar lo que aumenta en el primer año (Resuelve usando unas pseudo-tabla de proporcionalidad).

La idea de razón (JP_IR)
- ➔ Cada tres meses son 3 kg
- ➔ Por cada mes aumenta 3 kg
- ➔ Razón 1 Kg por mes

NO PROPORCIONAL

Solo la frase: No es proporcional (JNP_SF)
- ➔ No está en proporción la edad con el peso
- ➔ El peso… no se considera un caso de proporcionalidad
- ➔ Las cantidades no dependen la una de la otra

Frases que expresan poca relación con la idea de proporcionalidad (JNP_FEPRIP)
- ➔ No piden la misma magnitud de los datos que se presentan en el problema

La idea de variación, cambio o aumento (Más → más) (JNP_M-m) [Hemos incluido en esta categoría algunos argumentos que comprenden términos como “igual” y “lo mismo”, que podrían estar refiriendo a la idea de razón]
- ➔ El peso no aumenta lo mismo con los meses
- ➔ El bebe puede perder peso

- ➔ El peso puede aumentar o disminuir y no proporcionalmente
- ➔ Un bebe no engorda la misma cantidad en un periodo de tiempo
- ➔ El bebe no engorda todos los meses igual
- ➔ El peso no aumenta en relación con el tiempo siempre igual
- ➔ No tiene que aumentar igual peso cada mes
- ➔ No siempre va a engordar lo mismo
- ➔ Todos los meses no se aumenta lo mismo

Depende de otros factores (JNP_DOF)

La razón inicial no es correcta o no influye (JNP_RINCNI)

- ➔ El peso que haya ganado en 3 meses no influye en el peso del primer año
- ➔ No todos los bebés aumentan esa cantidad de peso en tres meses

La idea de razón (JNP_IR)

- ➔ Razón 1 Kg por mes, no es constante
- ➔ No se puede determinar la constante de proporcionalidad, depende de muchos factores
- ➔ El bebe puede no engordar 3 kilos cada 3 meses

CONDICIONAL (COND)

Condicionando la situación

- ➔ Puede ser si aumenta 1 kilo por mes
- ➔ Matemáticamente hablando …se puede aplicar la regla de tres

Categorías de respuestas del problema (c) (Justificación)

PROPORCIONAL

La idea de relación como caracterización (JP_IRC)
- ➔ Relaciona dinero con años sin que influyan más factores
- ➔ Aparecen dos magnitudes relacionadas dinero y tiempo

La idea de variación, cambio o aumento (Más → más) (JP_M-m)
- ➔ Aumento proporcional [Si en un año tiene 1500€ en dos años tendrá 3000€]
- ➔ El dinero aumenta con los meses
- ➔ Más → más (más tiempo, más dinero)

Relación de variación entre cantidades de dinero (JP_RVD)
- ➔ Le quitan el 2% de la cantidad inicial*
- ➔ La constante es el interés que es cero*
- ➔ Dinero ingresado = dinero en la cuenta ["Si aumenta los ingresos aumentará el dinero y si por el contrario no se produce ningún movimiento, el dinero seguirá siendo el mismo"]

NO PROPORCIONAL

Solo la frase (JNP_SF)
- ➔ No es de proporcionalidad

La idea de la proporcionalidad como una relación entre datos o algún tipo de operación no expresada (JNP_IPRDO)
- ➔ No nos dan ningún dato proporcionable
- ➔ No piden la misma magnitud de los datos que se presentan en el problema
- ➔ No está en relación la cantidad que se ingresa con lo que se hubiera ingresado
- ➔ Las cantidades no dependen la una de la otra
- ➔ La solución usa operaciones no proporcionales

Relación de variación entre cantidades de dinero (JNP_RVD)
- ➔ Ambas magnitudes (dinero) son la misma
- ➔ La magnitud "interés" no aumenta
- ➔ Más -/-> más (dinero/dinero) [dinero/dinero: "únicamente hay una variable, por lo que esta no puede variar respecto a otra"]
- ➔ El sujeto no ingresa más dinero
- ➔ No hay variación de la cantidad inicial
- ➔ El banco no paga intereses ["El dinero ingresado no aumentará ni disminuirá"]
- ➔ El cliente no ingresa más dinero
- ➔ No gana interés [dinero/dinero: "ingresa 1500€ no recibe ningún interés con lo que a los dos años tendrá lo mismo"]
- ➔ No hay intereses, el dinero seguirá siendo siempre el mismo
- ➔ La cantidad que aumenta varía con los años [Sobre la base de que el dinero depositado gana intereses, el pago de intereses sobre intereses hace que la situación sea no proporcional]

La idea de variación, cambio o aumento (Más → más) (JNP_M-m)

- ➔ No se añade nada en equitatividad (por tiempo)
- ➔ El banco no paga interés [dinero/tiempo: "al cabo de un tiempo sigue teniendo lo mismo]
- ➔ Más -/-> más (dinero/tiempo) [dinero/tiempo: "La primera magnitud no aumenta en la misma cantidad que lo hace la segunda"]
- ➔ No gana interés [dinero/tiempo: "debido a que no gana interés no aumenta el dinero… en ningún momento… es siempre la misma cantidad"]
- ➔ El dinero no aumenta proporcionalmente a los años transcurridos
- ➔ El banco no paga intereses [dinero/tiempo: "El banco no paga intereses por tanto el dinero es el mismo y el tiempo ha transcurrido"]

Regla de tres (JNP_R-3)

- ➔ No te piden 4 elementos de los cuales uno de ellos no está
- ➔ No dan los datos necesarios para aplicar R-3
- ➔ No requiere R-3

Categorías de respuestas del problema (d) (Justificación)

PROPORCIONAL

La idea de relación como caracterización (JP_IRC)
- ➔ Tienen relación
- ➔ Una magnitud influye sobre la otra
- ➔ Dos magnitudes son proporcionales cuando depende la una de la otra*
- ➔ Aparecen dos magnitudes cantidad y tiempo
- ➔ El número de pasteles se relaciona con los minutos
- ➔ Hay relación entre las magnitudes de los pasteles y el tiempo
- ➔ Hay proporción entre los pasteles y el tiempo

La idea de variación, cambio o aumento (Más → más) (JP_M-m)
- ➔ Aumento proporcional
- ➔ Cambio constante
- ➔ Existe relación entre los datos, hay una variación de cantidad
- ➔ La primera magnitud aumenta en la misma cantidad que lo hace la segunda*
- ➔ En proporción lo que ha tardado en comer 2p tardará un cierto tiempo en comer 24
- ➔ El tiempo aumenta con el número de pasteles que se ha comido
- ➔ Más --> más

Regla de tres o del producto cruzado (JP_R-3)
- ➔ Se realiza la R-3 para averiguar cuánto tarda en comerse 24p
- ➔ Se utiliza la R-3
- ➔ Obedece al formato de la R-3
- ➔ Nos dan los datos necesarios para aplicar la R-3
- ➔ Se resuelve usando R-3
- ➔ Si se come 2p en 3m podemos averiguar en cuantos minutos puede comerse 24p (hace uso de una regla de tres para encontrar la solución)
- ➔ 2 pasteles en 3 minutos, 24 en x tiempo
- ➔ Usando 2p en 3m podemos averiguar cuánto tiempo tardará en comerse 24p, mediante una simple igualdad

La idea de razón (JP_IR)
- ➔ Razón constante
- ➔ Razón constante 3m por 2p
- ➔ Puede comer 2p en 3m
- ➔ 2 pasteles en 3 min, 24 en x tiempo
- ➔ La proporción es 2/3
- ➔ Es una constante que Pedro puede comer 2p en 3m*
- ➔ Ambas cantidades deben ser multiplicadas por el mismo número

CONDICIONAL

Condicionando la situación (JP_COND)
- ➔ Suponiendo que Pedro no se canse de ir comiendo pasteles*
- ➔ Si mantiene la velocidad de comer...
- ➔ Lo vamos a tomar como una cuestión matemática…

NO PROPORCIONAL

La idea de variación, cambio o aumento (Más → más) (JNP_M-m)

- ➔ Cuanto más comemos menos nos entra
- ➔ Influyen otras variables como el tamaño del pastel que tardaría más o menos en comerlo

La idea de razón (JNP_IR)

- ➔ Pedro no es máquina se va llenando y tardará más tiempo en comer dos pasteles
- ➔ No hay constante de proporcionalidad al comer pasteles
- ➔ No cada tres minutos se come tres pasteles

Categorías de respuestas del problema (a) (Tipo de resolución)

CORRECTA

Regla de tres (RC_R-3)
- ➔ Regla de tres numérica
- ➔ Regla de tres algebraica

Regla de tres y otro procedimiento (RC_R-3OP)
- ➔ Regla de tres numérica y ecuación de proporcionalidad *
- ➔ Regla de tres y aditivo *
- ➔ Regla de tres y tabla de proporcionalidad
- ➔ Relación 1caja ≡ 3paquetes cuestan 1’80€ y regla de tres*

Ecuación de proporcionalidad (RC_EP)

Reducción a la unidad (RC_RU)

Reducción a la unidad y otros procedimientos (RC_RUOP)
- ➔ Reducción a la unidad usando regla de tres (usa la regla de tres para hallar el precio unitario de cada paquete)
- ➔ Reducción a la unidad y tabla de proporcionalidad

Tabla de proporcionalidad (RC_TP)
- ➔ Tabla de valores y representación gráfica

Multiplicación/división (RC_MD)
- ➔ Reduce paquetes a cajas y multiplicación
- ➔ Uso de la relación 1 caja = 3 paquetes, que cuestan 1,80€ →12 paquetes cuestan 4 por 1’80€.

INCORRECTA

Regla de tres (RI_R-3)
- ➔ Regla de tres algebraica *
- ➔ Regla de tres algebraica cálculo incorrecto: 1 caja = 3 paquetes (Se evita la doble aplicación de la regla de tres)
- ➔ Regla de tres numérica cálculo incorrecto

Regla de tres y otros procedimientos (RI_R-3OP)
- ➔ Regla de tres que traduce en un ecuación de proporcionalidad, cálculo incorrecto: 1 caja = 3 paquetes (Se evita la doble aplicación de la regla de tres)

Ecuación de proporcionalidad (RI_EP)

Multiplicación/división (RI_MD) *

Categorías de respuestas del problema (b) (Resolución)

CORRECTA[1]

Regla de tres (RC_R-3)
- ➔ Regla de tres algebraica
- ➔ Regla de tres numérica

Regla de tres y otro procedimiento (RC_R-3OP)
- ➔ Regla de tres y razonamiento proporcional con identificación de la razón* (Prueba 13, sujeto 3).
- ➔ Regla de tres aditivo

Reducción a la unidad (RC_RU)

Multiplicación/división (RC_MD)

INCORRECTA

Regla de tres (RI_R-3)
- ➔ Regla de tres algebraica
- ➔ Regla de tres numérica

Tabla de proporcionalidad (RI_TP)

Sobre el uso de la regla de tres

Se pueden observar dos aspectos, uno que el uso de la regla de tres puede constituir una herramienta super valiosa que ayuda a resolver un problema de proporcionalidad. El problema está en su uso “irracional”.

Puede suceder que ante un problema proporcional el sujeto se encuentre limitado a no resolver el problema si no hace uso de la regla de tres… aún cuando maneje los saberes necesarios para juzgar correctamente la situación como proporcional: covariación que involucra una razón constante…

La pregunta que debe hacerse es: si el sujeto necesita la regla de tres es porque no puede dar lugar a un procedimiento-razonamiento requerido para resolver el problema de manera más apropiada. O ¿es posible que el uso-desarrollo de un procedimiento-razonamiento en el que no esté involucrada la regla de tres sea más adecuado para fomentar el desarrollo del RP?

[1] Esta valoración se hace independientemente de que la situación ha sido incorrectamente considerada como proporcional.

Categorías de respuestas del problema (c) (Resolución)

Relación de igualdad que se expresa por medio de una frase del tipo: “Tiene la misma cantidad”

- ➔ Tiene la misma cantidad, … el dinero ni aumenta ni disminuye
- ➔ Seguirá teniendo la misma cantidad, no ha hecho nuevos ingresos

Regla de tres

- ➔ Regla de tres algebraica incorrecta
- ➔ Regla de tres algebraica/aditivo incorrecta

Cálculo del 2%, se considera que el banco descontará el 2% del capital inicial al cabo de dos años*.

Categorías de respuestas del problema (d) (Resolución)

CORRECTA[1]

Regla de tres (RC_R-3)
- ➔ Regla de tres algebraica
- ➔ Regla de tres numérica

Regla de tres y otro procedimiento (RC_R-3OP)
- ➔ Regla de tres algebraica / aditivo* (Prueba 31, sujeto 41)
- ➔ Regla de tres numérica y ecuación de proporcionalidad
- ➔ Regla de tres algebraica y tabla de proporcionalidad

Ecuación de proporcionalidad (RC_EP)

Reducción a la unidad (RC_RU)

Tabla de proporcionalidad (RC_TP)
- ➔ Tabla de valores y representación gráfica* (Prueba 19, sujeto 34)

Multiplicación/división (RC_MD)
- ➔ 24 pasteles son 12 veces 2, $12 \times 3 = 36$ minutos

Multiplicación por la razón (RC_MR)
- ➔ La razón (r) de proporcionalidad en esta situación es 12…* (Prueba 13, sujeto 3)
- ➔ El objeto del problema es siempre un número que se va a repetir las veces descritas en el problema y los número van aumentando proporcionalmente $24 = 2 \times 12; 12 \times 3 = 36$ min. (Uso correcto de la estrategia “dentro”).

INCORRECTA[2]

Regla de tres (RI_R-3)
- ➔ Usa 2p en 2m, en lugar de 2p en 3m, error en los datos.

Regla de tres y otro procedimiento (RI_R-3OP)
- ➔ Regla de tres y ecuación de proporcionalidad: Plantea una regla de tres, luego plantea una ecuación de proporcionalidad y resuelve utilizando un procedimiento incorrecto: uso no adecuado de la igualdad * (Prueba 5)

Multiplicación por la razón (RI_MR)
- ➔ Confunde pasteles con minutos: Usa $2/3 \times 24$ en lugar de $3/2 \times 24$.
- ➔ 24 min ÷ 3 min = 8; 2 pasteles × 8 = 16 (Ambas cifras se han multiplicado por una constante k = 8). (Uso incorrecto de la estrategia “dentro”, al confundir el número de pasteles con el número de minutos

[1] Esta valoración se hace independientemente de que la situación ha sido incorrectamente considerada como proporcional.
[2] Se valora la realización del procedimiento empleado, asumiendo que la situación que se resuelve es de proporcionalidad.

Categorías según proximidad a la idea de proporcionalidad

Débil

- ➔ No justifica / no responde (Todas las respuestas, n = 9)
- ➔ Solo una frase (Todas las respuestas, n = 3)
- ➔ La idea de relación como caracterización (Todas las respuestas, n = 2)
- ➔ Proporción… relación entre datos y operaciones (Todas las respuestas, n = 5)
- ➔ La idea de variación, … (Más → más) (JP_ M – m) (n = 3)
    - o Aumento proporcional [Si en un año tiene 1500€ en dos años tendrá 3000€]
    - o El dinero aumenta con los meses
    - o Más → más (más tiempo, más dinero)
- ➔ Relación de variación entre cantidades de dinero (n = 1)
    - o La cantidad que aumenta varía con los años [Sobre la base de que el dinero depositado gana intereses, el pago de intereses sobre intereses hace que la situación sea no proporcional]
- ➔ Regla de tres (Todas las respuestas, n = 3)

Moderada

- ➔ Relación… entre cantidades de dinero (JP_RVD, n = 2; JNP_RVD, n = 14)
    - o Le quitan el 2% de la cantidad inicial
    - o La constante es el interés que es cero
    - o Ambas magnitudes (dinero) son la misma
    - o La magnitud "interés" no aumenta
    - o Más -/-> más (dinero/dinero) [dinero/dinero: "únicamente hay una variable, por lo que esta no puede variar respecto a otra"]
    - o El sujeto no ingresa más dinero
    - o No hay variación de la cantidad inicial
    - o El banco no paga intereses [dinero/dinero: "El dinero ingresado no aumentará ni disminuirá"]
    - o El cliente no ingresa más dinero
    - o No gana interés [dinero/dinero: "ingresa 1500€ no recibe ningún interés con lo que a los dos años tendrá lo mismo"]
    - o No hay intereses, el dinero seguirá siendo siempre el mismo

Fuerte

- ➔ La idea de variación,… (Más → más) (JNP_M–m)(Todas las respuestas n = 15)
- ➔ Relación de variación entre cantidades de dinero (JP_RVD) (n = 2)
    - o Dinero ingresado = dinero en la cuenta ["Si aumenta los ingresos aumentará el dinero y si por el contrario no se produce ningún movimiento, el dinero seguirá siendo el mismo"]

C4EJO: 18/23 18/60

MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA 22 Enero 2008 S.30

NOMBRE: [redacted] P.16.

1. Un coche consume 8,4 litros de gasolina cada 100 km. ¿Cuántos kilómetros puede recorrer con 25,2 litros?

8'4 l —— 100 Km
25'2 l —— x Km

$\frac{25'2 \cdot 100}{8'4} = 300$

Puede recorrer 300 Km con 25'2 l.

2. ¿Cuáles de las siguientes tablas expresan magnitudes proporcionales? (Los números expresan las medidas de las cantidades correspondientes).

A	1	2	3	4	5
B	7	14	21	28	35

Sí, Esta tabla expresa magnitudes propor.

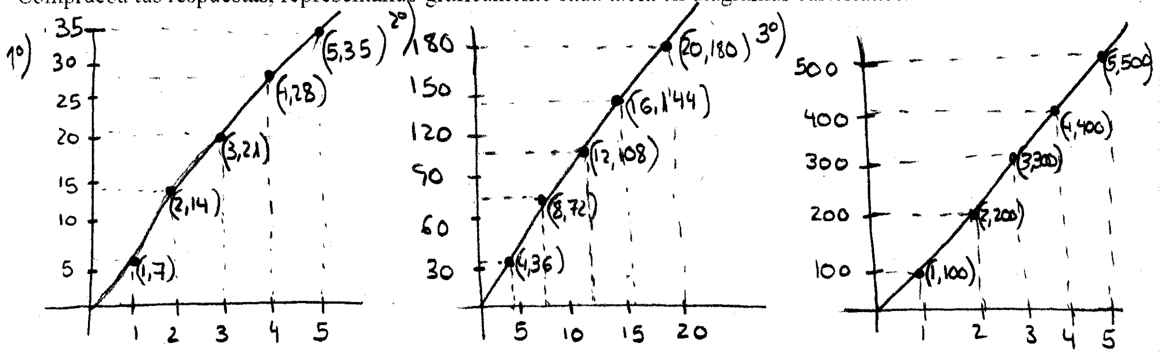
L	4	8	12	16	20
S	36	72	108	144	180

Esta tabla expresa magnitudes proporcionales

T	1	2	3	4	5
E	100	200	300	400	500

Esta tabla expresa magnitudes proporcionales.

Comprueba tus respuestas, representando gráficamente cada tabla en diagramas cartesianos.



3. De los siguientes pares de magnitudes, ¿cuáles son directamente proporcionales?
a) Lado del cuadrado y su superficie. Sí
b) Lado del cuadrado y su perímetro. Sí
c) Edad y altura de las personas. NO
Justifica tu respuesta realizando una tabla para cada caso.

a)

L	1	2	3	4
S	12	24	34	42

b)

L	1	2	3	4
P	4	8	12	16

c)

E	1	2	3.	
A	60	62	50	

4. Explica con tus propias palabras cuándo dos magnitudes son proporcionales. Pon un ejemplo, construye su tabla y represéntala gráficamente.

Dos magnitudes son proporcionales cuando ambas aumentan en una misma proporción.

C4 ES1.1: 9/10 DEL P.55 AL P.57 NO PRESENTARON 36/60

MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA — 22 Enero 2008 S.20

P. 58.

NOMBRE: [redacted]

1. Un coche consume 8,4 litros de gasolina cada 100 km. ¿Cuántos kilómetros puede recorrer con 25,2 litros?

8,4 litros → 100 Km

25,2 → x → $x = \frac{25,2 \times 100}{8,4} = \boxed{300 \text{ Km}}$

→ $\boxed{25,2 = 3 \cdot (8,4) \quad \text{Recorrerá tres veces más.}}$

2. ¿Cuáles de las siguientes tablas expresan magnitudes proporcionales? (Los números expresan las medidas de las cantidades correspondientes).

A	1	2	3	4	5
B	7	14	21	28	35

L	4	8	12	16	20
S	36	72	108	144	180

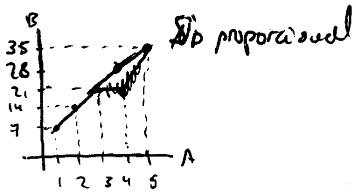
T	1	2	3	4	5
E	100	200	300	400	500

~~(La tabla (A,B) no es proporcional, no presenta variables proporcionales.)~~

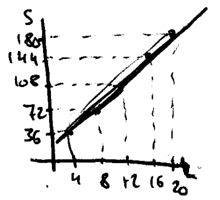
Son todas proporcionales.

Comprueba tus respuestas, representando gráficamente cada tabla en diagramas cartesianos.

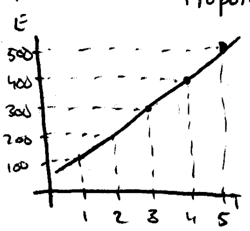
(A,B) ~~No proporcional~~



(L,S) Proporcional



(T,E) Proporcional

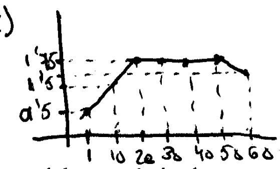


3. De los siguientes pares de magnitudes, ¿cuáles son directamente proporcionales?
a) Lado del cuadrado y su superficie.
b) Lado del cuadrado y su perímetro.
c) Edad y altura de las personas.
Justifica tu respuesta realizando una tabla para cada caso.

Son directamente proporcionales a) y b).

La c) no es proporcional porque a una edad la estatura no varía, hasta la vejez que decrece.

c)



4. Explica con tus propias palabras cuándo dos magnitudes son proporcionales. Pon un ejemplo, construye su tabla y represéntala gráficamente.

Son proporcionales dos magnitudes cuando una depende de la otra, y las dos van variando (aumento o disminución) en la misma cantidad por ejemplo.

x	0	1	2	3	4
y	0	3	6	9	12

C4 EJO: 1/3 · 24/60

MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA 22 Enero 2008 S. 60

P. 87.

NOMBRE: [redacted]

1. Un coche consume 8,4 litros de gasolina cada 100 km. ¿Cuántos kilómetros puede recorrer con 25,2 litros?

8'4 litros de gasolina — 100 Km
25'2 litros " — x

+ Con 25'2 litros de gasolina puede recorrer 300 Km

$$x = \frac{25'2 \cdot 100}{8'4} = \frac{2520}{8'4} = 300 \text{ Km}$$

2. ¿Cuáles de las siguientes tablas expresan magnitudes proporcionales? (Los números expresan las medidas de las cantidades correspondientes).

A	1	2	3	4	5
B	7	14	21	28	35

Es una magnitud proporcional; ya que a "A" se le va sumando 1 y a "B" se le suma 7 progresivamente.

L	4	8	12	16	20
S	36	72	108	144	180

Es una magnitud proporcional; ya que a "L" se le va sumando 4 y a "S" se le va sumando 36.

T	1	2	3	4	5
E	100	200	300	400	500

Es una magnitud proporcional, porque a "T" se le va sumando 1 y a "E" se suma 100.

Comprueba tus respuestas, representando gráficamente cada tabla en diagramas cartesianos.

TABLA 1.

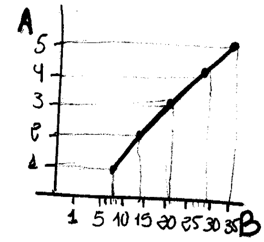


TABLA 2

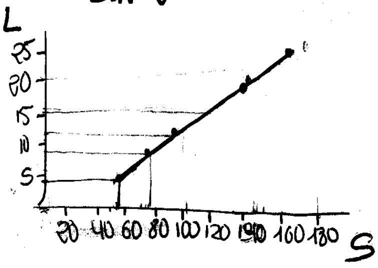
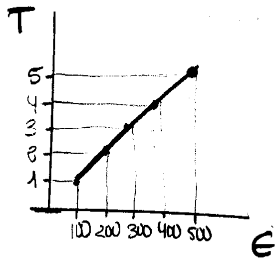
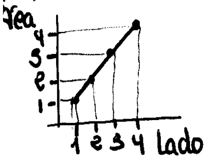


TABLA3

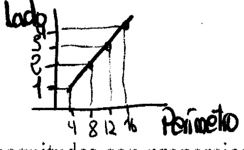


3. De los siguientes pares de magnitudes, ¿cuáles son directamente proporcionales?
a) Lado del cuadrado y su superficie.
b) Lado del cuadrado y su perímetro.
c) Edad y altura de las personas. Atrás. 3.c.
Justifica tu respuesta realizando una tabla para cada caso.

a) Es directamente Proporcional, A medida que uno aumenta también lo hace el otro.



b) Es directamente proporcional; ya que si, por ejemplo el lado mide uno su perímetro es 4.



4. Explica con tus propias palabras cuándo dos magnitudes son proporcionales. Pon un ejemplo, construye su tabla y represéntala gráficamente.

C4EJ1.2 5/5 53/60

MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA 22 Enero 2008 S.12

NOMBRE: [redacted] P.07.

1. Un coche consume 8,4 litros de gasolina cada 100 km. ¿Cuántos kilómetros puede recorrer con 25,2 litros?

Si con 8.4 l recorre 100 km, con 25.2 l recorre x } 8.4 — 100, 25.2 — x $\Rightarrow x = \frac{25.2 \cdot 100}{8.4} = 300$

300 km recorrerá con 25.2 litros de gasolina.

2. ¿Cuáles de las siguientes tablas expresan magnitudes proporcionales? (Los números expresan las medidas de las cantidades correspondientes).

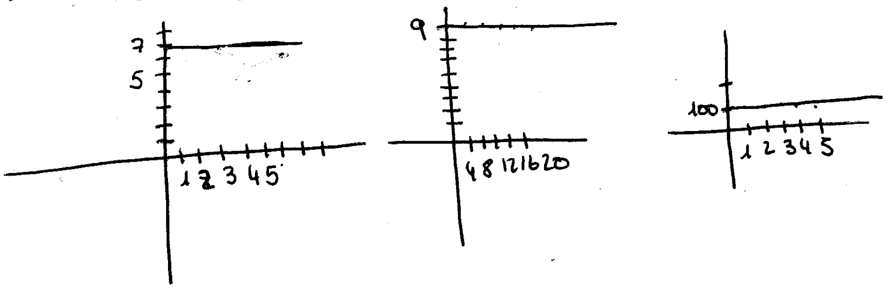
A	1	2	3	4	5
B	7	14	21	28	35

L	4	8	12	16	20
S	36	72	108	144	180

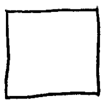
T	1	2	3	4	5
E	100	200	300	400	500

Todas ~~Las dos~~ últimas si son proporcionales, porque al dividir la fila de abajo con la de arriba se obtiene siempre el mismo número. (Mientras que en el primero hay un número que no coincide)

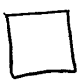
Comprueba tus respuestas, representando gráficamente cada tabla en diagramas cartesianos.



3. De los siguientes pares de magnitudes, ¿cuáles son directamente proporcionales?
a) Lado del cuadrado y su superficie. Sí, es directamente proporcional
b) Lado del cuadrado y su perímetro. sí, es directamente proporcional
c) Edad y altura de las personas. No, ~~no~~ es proporcional
Justifica tu respuesta realizando una tabla para cada caso.



→ el cuadrado al dividir su superficie en 4 sale siempre igual



→ ocurre lo mismo con su perímetro

7 años

Una persona → no mide en altura proporcionalmente a su edad, ya que no es algo perfecto en cuanto me cuida, sino que varía.

4. Explica con tus propias palabras cuándo dos magnitudes son proporcionales. Pon un ejemplo, construye su tabla y represéntala gráficamente.

1T 2/2

Proporción debido a las tablas

Dos magnitudes son proporcionales cuando al dividirlas por un mismo número, se obtiene el mismo resultado. Es decir, cuando dividimos un número por otro y este por otro distinto a la vez y el resultado es igual decimos que son proporcionales.

C4EJ1.1ª: 2/2 P.73 - P.75 No presentaron 48/60

MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA 22 Enero 2008 S.38

P.76.

NOMBRE: [redacted]

1. Un coche consume 8.4 litros de gasolina cada 100 km. ¿Cuántos kilómetros puede recorrer con 25,2 litros?

8'4 litros —— 100
25'2 lit —— x

$x = \frac{25'2 \cdot 100}{8'4} = 300$ km

$\boxed{x = 300 \text{ Km}}$

2. ¿Cuáles de las siguientes tablas expresan magnitudes proporcionales? (Los números expresan las medidas de las cantidades correspondientes).

A	1	2	3	4	5
B	7	14	21	28	35

L	4	8	12	16	20
S	36	72	108	144	180

T	1	2	3	4	5
E	100	200	300	400	500

1 — 7
2 — x

$x = \frac{2 \cdot 7}{1} = 14$

2 — 14
3 — x

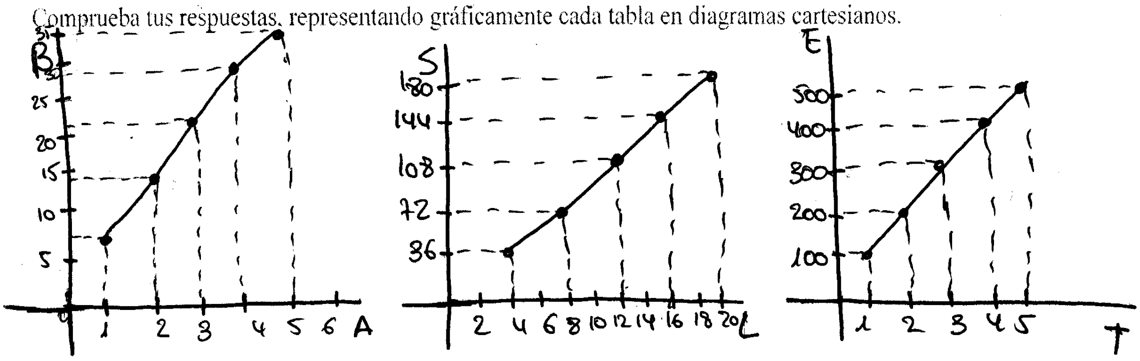
$x = \frac{3 \cdot 14}{2} = 21$

3 — 21
4 — x

$x = 28$

Las tres tablas expresan magnitudes proporcionales

Comprueba tus respuestas, representando gráficamente cada tabla en diagramas cartesianos.



3. De los siguientes pares de magnitudes, ¿cuáles son directamente proporcionales?
a) Lado del cuadrado y su superficie. Si es proporcional
b) Lado del cuadrado y su perímetro. Si es proporcional
c) Edad y altura de las personas. No es proporcional.
Justifica tu respuesta realizando una tabla para cada caso.

Lado	3	4	5	6	7
Sup.	9	16	25	36	49

Lado	1	2	3	4	5
perim	3	6	9	12	15

↳ TRIÁNGULO ?

Edad	0	10	20	30	40
Altura	40	1'5	160	163	164

4. Explica con tus propias palabras cuándo dos magnitudes son proporcionales. Pon un ejemplo, construye su tabla y represéntala gráficamente.

Magnitudes proporcionales son aquellas que aumentan o disminuyen la misma cantidad y al mismo tiempo.

C4EJ1.1: 6 10

33/60

MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA

22 Enero 2008 S.5.

P.69

NOMBRE: [redacted]

1. Un coche consume 8,4 litros de gasolina cada 100 km. ¿Cuántos kilómetros puede recorrer con 25,2 litros?

$8'4 \text{ —— } 100$

$25'2 \text{ —— } x$

$\frac{25'2 \cdot 100}{8'4 \cdot x} = \frac{2520}{8'4x} \Rightarrow x = \frac{2520}{8'4} = \boxed{300}$ Km

2. ¿Cuáles de las siguientes tablas expresan magnitudes proporcionales? (Los números expresan las medidas de las cantidades correspondientes).

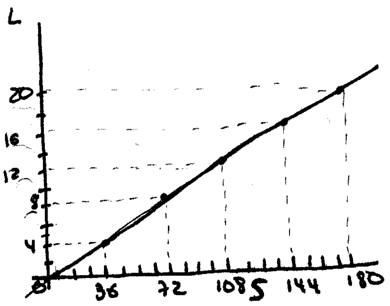
A	1	2	3	4	5
B	7	14	21	28	35

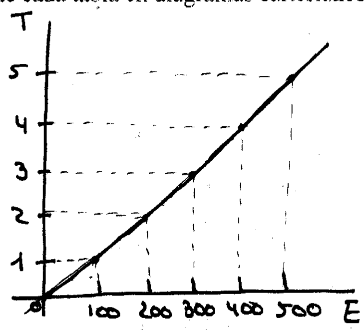
L	4	8	12	16	20
S	36	72	108	144	180

T	1	2	3	4	5
E	100	200	300	400	500

Son proporcionales ~~la segunda y la tercera~~ todas.

Comprueba tus respuestas, representando gráficamente cada tabla en diagramas cartesianos.





3. De los siguientes pares de magnitudes, ¿cuáles son directamente proporcionales?
a) Lado del cuadrado y su superficie.
b) Lado del cuadrado y su perímetro.
c) Edad y altura de las personas.
Justifica tu respuesta realizando una tabla para cada caso.

4. Explica con tus propias palabras cuándo dos magnitudes son proporcionales. Pon un ejemplo, construye su tabla y represéntala gráficamente.

No presentó último examen! C4EJO: 6/23 6/60

MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA 22 Enero 2008 S. 21

NOMBRE: [redacted]

1. Un coche consume 8,4 litros de gasolina cada 100 km. ¿Cuántos kilómetros puede recorrer con 25,2 litros?

Puede recorrer 300 km

$$\begin{array}{r} 8,4 \\ 8,4 \\ +\,8,4 \\ \hline 25,2 \end{array}$$

2. ¿Cuáles de las siguientes tablas expresan magnitudes proporcionales? (Los números expresan las medidas de las cantidades correspondientes).

A	1	2	3	4	5
B	7	14	21	28	35

Si es proporcional A de B porque se van multiplicando correctamente y el resultado es exacto

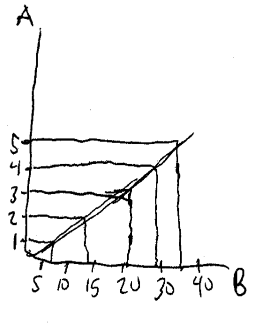
L	4	8	12	16	20
S	36	72	108	144	180

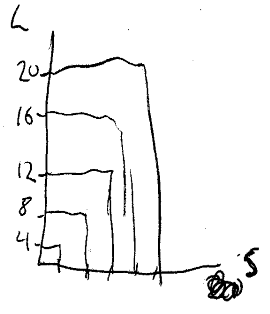
No es proporcional, porque la multiplicación no coincide

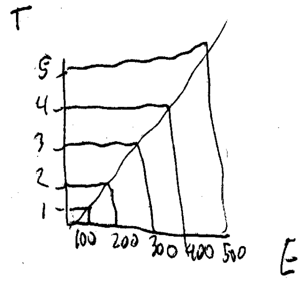
T	1	2	3	4	5
E	100	200	300	400	500

Si lo es

Comprueba tus respuestas, representando gráficamente cada tabla en diagramas cartesianos.

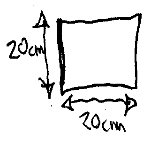






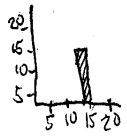
3. De los siguientes pares de magnitudes, ¿cuáles son directamente proporcionales?
a) Lado del cuadrado y su superficie.
b) Lado del cuadrado y su perímetro. No porque el perímetro es la medida de todo el conjunto
c) Edad y altura de las personas. No porque puede variar dependiendo de la persona
Justifica tu respuesta realizando una tabla para cada caso.

Es proporcional el caso A



4. Explica con tus propias palabras cuándo dos magnitudes son proporcionales. Pon un ejemplo, construye su tabla y represéntala gráficamente.

Cuando es equivalente por ejemplo un hombre que pesa y mide lo mismo



9

[redacted] 1º Primaria A

6

6.1) a) No es ~~pro~~ una situación de proporcionalidad

b) Puede ser situación de proporcionalidad si cada tres meses aumenta el bebé el peso de 3 kg, quiere decir que aumenta quilo por mes.

c) No es una situación de proporcionalidad.

d) ~~Si es situación de~~ proporcionalidad

No es proporcional porque aunque aumente la cantidad de tiempo la cantidad de dinero no aumenta en una misma proporción cada año

6.2) b) La situación b se considera una situación de proporcionalidad si cada tres meses el niño aumenta el peso de 3 kg.

3 meses ⟶ 3 kg

12 meses — x kg

$x = \frac{12 \times 3}{3} = 12$

S: Son 12 kg lo que el niño pesará al final del año porque aumenta quilo por mes y por eso se considera una situación de proporcionalidad.

d) 2p ⟶ 3 min

24p ⟶ x

$x = \frac{24 \cdot 3}{2} = 36$

24 : 2 = 12

36 : 3 = 12

S: 36 minutos le llevará comer 24 pasteles.

3 : 2 = 1'5

En un minuto y medio el niño se come un pastel por tanto es proporcional porque en 3 m se come 2 pasteles.

6'2

5. a) 1'3456789 → Si, ya que ~~es~~ es finito, tiene terminación en un número,

27'454545... → No, ya que no es finito y es periódico, se repite ~~infinitamente~~ indefinidamente el 45.

b)

c) ~~4~~ 4'58999... → ~~No~~, ya que es infinito.

6. 6.1.) a) Si es proporcionalidad → Nos da todos los datos necesarios para poder hacer una regla de tres: 1 incógnita y 3 datos.

b) Si es proporcionalidad → En este caso, matemáticamente hablando, si puede ser de proporcionalidad pero realmente no.*

c) No es proporcionalidad → No nos da todos los datos necesario para operar con una regla de tré.

d) Si es proporcionalidad. → ~~Nos da todos los datos necesarios~~ para operar con una regla de trés: 1 incógnita y 3 datos.

* En este caso, si lo llevamos a la realidad, tenemos que tener en cuenta ~~que los bebés no aumentan~~ de peso todos los meses por igual. Matemáticamente si podemos calcular la regla de tres.

6.2)

a)

3 paquetes —— 1'8 €

12 paquetes —— x €

$$\frac{12 \times 1'8}{3} = 21'6 \text{ €}$$ cuestan los 12 paquetes de cereales.

82

B) No es de proporcionalidad porque no existe relación directa entre la edad de un bebe y su peso.
La prueba está en que el bebe puede perder peso y eso no sería posible si la relación fuese proporcional.

C) ~~Sí es de proporcionalidad pero no tiene mucho sentido puesto que ambos~~
No es de proporcionalidad pues ambas magnitudes son la misma.
Si metes 100 € al año tienes 100 €
Si metes 1500 € al año tienes 1500 €
⋮ ⋮ ⋮

D) Es de proporcionalidad a nivel teórico si suponemos que Pedro no se cansa al ir comiendo pasteles pero no lo es a nivel práctico porque es probable que Pedro se vaya cansando y en los dos últimos pasteles tarde más que en los dos primeros.

6.2:

A)
$$3 \longrightarrow 1'80$$
$$12 \longrightarrow X$$

$$\begin{array}{r} 1'80 \\ \times\ 12 \\ \hline 360 \\ 180\ \ \\ \hline 21'60 \end{array}$$

$\boxed{\text{12 paquetes cuestan } 7'2\ €}$

$$\begin{array}{l|l} 21'60 & 3 \\ \hline 060 & 7'20 \\ 00 & \end{array}$$

Esto es mediante la regla de tres, también se puede hacer igualando las razones.

$$\frac{1'80}{3} = \frac{X}{12} \Rightarrow 12 \cdot 1'80 = 3 \cdot X$$
$$\Downarrow$$
$$X = \frac{12 \cdot 1'80}{3}$$
$$\Downarrow$$
$$x = 7'2\ €$$

c) el problema no es proporcional, ya que dice que el banco <u>no</u> paga interés, entonces al cabo de un tiempo sigo teniendo lo mismo.

b) Sí mantiene la velocidad de comer, sí es un problema de proporcionalidad, ya que cada 3 minutos irá comiéndose 2 pasteles. S-6

6.2)

a)

cajas	1			2			3			4		
paquetes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
precio	1'80			3'60			5'40			7'20		

Cuatro cajas que son 12 paquetes costará 7'20 €.

b)

pasteles	2	4	8	10	---	24
minutos	3	6	12	15		36

Tardará 36 minutos en comerse 24 pasteles.

5

[redacted] 12-2-08

6) 6.1 Los apartados "~~b~~" y "c" no son problemas de proporcionalidad, ya que en el caso de "~~b~~" no es proporcional la relación entre peso y edad, ya que depende de cuanto coma y la gestión interna de cada persona, este apartado es subjetivo porque no hay relación directa ~~entre~~ los variables. En el apartado "c" a mi parecer, podemos tomarlo como no proporcional ya que se podría decir que en este banco la variable intereses no existe, por lo que el dinero que se ingrese, y no se modifique, siempre será constante.

Como llamada de atención señalo que el apartado "d" lo podemos tomar como no proporcional y subjetivo, si pensamos en las características, hambre, resistencia, etc de Pedro, pero en este ~~caso lo vamos a tomar como una cuestión matemática.~~ 5-20

6.2

a) 1 caja → 3 paquetes (1'80€ caja)

¿12 paquetes cuanto costarán?

1'80 : 3 = 0'60 € paquete

0'60 x 12 = $\boxed{7'20\ €}$ o directamente $\boxed{1'80€ \times 4 = 7'20€}$

d) Pedro come 2 pasteles en 3 minutos, ~~¿cuántos pasteles~~ ~~en~~ ¿cuánto tardará en comer 24 pasteles?

$\frac{3}{2} = 1'5$ (un minuto y medio cada pastel, ahora calculamos cuánto tardará en comer 24).

1'5 x 24 = $\boxed{36\ minutos}$

Solución: Pedro tardará en comer 24 pasteles, 36 minutos.

2

B) No es de proporcionalidad porque no existe relación directa entre la edad de un bebe y su peso.
La prueba está en que el bebe puede perder peso y eso no sería posible si la relación fuese proporcional.

C) ~~Si es de proporcionalidad pero no tiene mucho sentido puesto que ambos~~
No es de proporcionalidad pues ambas magnitudes son la misma.
Si metes 100 € al año tienes 100 €
Si metes 1500 € al año tienes 1500 €
⋮ ⋮ ⋮

D) Es de proporcionalidad a nivel teórico ~~es probable~~ si suponemos que Pedro no se cansa al ir comiendo pasteles pero no lo es a nivel práctico porque es probable que Pedro se vaya cansando y en los dos últimos pasteles tarde más que en los dos primeros.

6.2:

A) $3 \rightarrow 1'80$
$12 \rightarrow X$

$$\begin{array}{r} 1'80 \\ \times\ 12 \\ \hline 360 \\ 180\ \ \\ \hline 21'60 \end{array}$$

$21'60 : 3 = 7'2$

$\boxed{\text{12 paquetes cuestan } 7'2 €}$

Esto es mediante la regla de tres, también se puede hacer igualando las razones.

$$\frac{1'80}{3} = \frac{X}{12} \Rightarrow 12 \cdot 1'80 = 3 \cdot X$$

$$\Downarrow$$

$$X = \frac{12 \cdot 1'80}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$X = 7'2 €$$

[illegible]

5\. c) No, no ~~es~~ número decimal ya que su parte decimal es ~~infinita~~.

5\. d) número decimal: aquel número que tiene una parte entera (cualquier ~~número~~) ~~y~~ otra decimal (finita).

5-41

6 a) 1º Planteamiento:

3 paquetes → 1'80 €

12 paquetes → X

$$X = \frac{1'80 \cdot 12}{3} = 7'20$$

$$x = 7'20$$

2º Planteamientos:

12 pag
$$\begin{cases} 3p \to 1'80 \\ 3p \to 1'80 \\ 3p \to 1'80 \\ 3p \to 1'80 \end{cases}$$

$$1'80 + 1'80 + 1'80 + 1'80 = 7'20$$

→ Este es un problema de proporcionalidad, pues los euros aumenta en proporción con los paquetes, todo está relacionado.

b) 1º planteamiento:

3 Kg —— 3 veces

x —— 12 veces.

$$x = \frac{3 \cdot 12}{3} = 12 \text{ kg}$$

$$x = 12 \text{ kg}$$

2º planteamiento:

12 veces
$$\begin{cases} 3 \text{ veces} \to 3 \text{ kg} \\ 3 \text{ veces} \to 3 \text{ kg} \\ 3 \text{ veces} \to 3 \text{ kg} \\ 3 \text{ veces} \to 3 \text{ kg} \\ 3+3+3+3 = 12 \text{ kg} \end{cases}$$

S-45

6 6.2

Situacion Δ:

$$\begin{matrix} 3 \text{ — } 1'80 \\ 12 \text{ — } x \end{matrix} \Bigg\} \frac{1'80 \times 12}{3} = 7'20\ €$$

$1'80 \,|\, 3$; $0\,0\,60$; $60 \times 12 = 7'20$

Cajas	1	2	3	4	5
€	80	1'20	1'80	2'40	3'00

Situacion D:

$$\begin{matrix} 2 \text{ — } 3\,m \\ 24 \text{ — } x \end{matrix} \Bigg\} x = \frac{24 \cdot 3}{2} = \frac{72}{2} = 34\,m.$$

Post.	1	2	3	4
Min.	1'5 mi	3	4'5 mi	6 mi

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F, G, H, I,
(10 11 12 13 14 15 16 17 18)

3

$$\begin{array}{r} 8AB30419 \\ -\ 538A168B_{(12} \\ \hline 26228727 \end{array}$$

0

Tomar Prestado

Para restar dos cantidades, cuando el sustraendo es mayor que el minuendo se pasa una unidad de orden mayor a una inferior y se descompone. En este caso con B (que vale 11) es mayor q 9 se pasa una unidad de las docenas a las unidades y se descompone en 12 unidades. Asi se hace con las decenas, centenas ... y despues de pasados todos se quitan de minuendo las cantidades del sustraendo.

llevada escrita

Como el minuendo es mayor que el sustraendo, lo contamos como si fuera de orden superior, y en el orden superior del sustraendo anotamos una unidad más.

[redacted] 1 A E. Primaria

6) a) Cajas de 3 paquetes.

~~Paquete = 1'8~~

1 Caja = 1'80.

12 paquetes = 4 cajas. → $\begin{array}{r|l} 12 & 3 \\ \hline 0 & 4 \end{array}$

Regla de tres

$$\left.\begin{array}{l} 1 \longrightarrow 1'80 \\ 4 \longrightarrow x \end{array}\right\} \frac{4 \times 1'80}{1} = \boxed{7'20}$$

4 cajas costará 7'20€

También se puede hacer la Regla de 3 con paquetes, envez de con cajas. como arriba.

$$\left.\begin{array}{l} 3 \longrightarrow 1'80 \\ 12 \longrightarrow x \end{array}\right\} \frac{12 \times 1'80}{3} = \frac{21'60}{3} = \boxed{7'20€}$$

- Este apartado si es de proporcionalidad porque se emplea la regla de tres, debido a que te pide 4 elementos y solo te dan 3.

b) Aumenta 3Kg en 3 meses., en 12 meses cuanto aumentará?

También se hace regla de 3

$$\left.\begin{array}{l} \overset{(Kg)}{3} \longrightarrow 3 \\ x \longrightarrow 12 \end{array}\right\} \frac{3 \times 12}{3} = \frac{36}{3} = \boxed{12}$$

En el primer año aumentará ~~kas~~ de peso hasta llegar a

12 Kg

[redacted]

6.- a) Este problema es de proporcionalidad. Si aumenta el número de paquetes vendidos, aumentará el coste como ganancia.

1 Caja de tres paquetes = 1'80 €

1'80 : 3 = 0'60 € un paquete.

1 —— 0'60

12 —— $x = \frac{0'60 \cdot 12}{1} = \boxed{7'2\ €}$

R = 12 paquetes costarán 7'2 €

b) Problema de proporcionalidad. Conforme tenga más meses irá pesando más.

~~1 año — 12 meses.~~

3 — 3kg

12 — $x = \frac{12 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3}} = \boxed{12\ kg}$

R = En el primer año aumentará 12 kg

c) Este problema no es de proporcionalidad. Si ingresa una ~~cierta~~ cantidad (sea la que sea) y no ingresa una cantidad fija mensualmente, por ejemplo, no pueden aumentar los ingresos. Aunque vaya pasando el tiempo, 2 años, no van a aumentar los ingresos.

[redacted] Juan [redacted] (5)

a)

6-).2) De esta manera, según las consideraciones dadas, y según la interpretación que he dado, considero como problema de proporcionalidad, únicamente el a, debido a las razones dadas anteriormente, y porque es el único que matemáticamente es así y no puede variar.

De esta manera:

Cereales se venden en cajas de 3 paquetes y cuesta 1'80 €.

Esto implica que 1'80 € (valor de la caja) : 3 paquetes que tiene la caja, el resultado es 0'60 € por ~~caja~~ paquete

Así, 12 paquetes X(por) 0'60 € que cuesta cada uno es igual a = 7'2 €

$$= \begin{array}{r} 12 \\ \times\, 0'6 \\ \hline 7'2\,€ \end{array} = 7'2\,€.$$

~~Así, como son proporcionales se~~ podría construir una tabla para verlo claramente

Paquetes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Precio	0'6	1'2	1'8	2'4	3	3'6	4'2	4'8	5'4	6	6'6	7'2

De esta manera queda reflejado que son proporcionales y que K, la constante, en este caso equivale a 0'6.

b) Según mi consideración no lo es, si el niño engordara constantemente como si fuera una máquina explotaría, pero en este caso sería:

3 Kg : 3 meses = 1 Kg/1 mes

Al tener 12 meses el año, ~~Buenos~~ y aumentaría 12 Kg, uno por mes, eso considerando un año en total, sin incluir los 3 meses anteriores.

c) No es posible ni interpretable que sea de proporcionalidad.

d) Si interpretáramos que el niño mantuviera constante esa velocidad y capacidad para poder comer pasteles sería:

3 minutos : 2 pasteles = 1'5 minutos/pastel ; De esta manera 24 pasteles · 1'5 minutos

$$= \begin{array}{r} 24 \\ \times\, 1'5 \\ \hline 36'0 \end{array} = 36'0 \text{ minutos.}$$

c) el problema no es proporcional, ya que dice que el banco no paga interés, entonces al cabo de un tiempo sigo teniendo lo mismo.

b) Sí mantiene la velocidad de comer, sí es un problema de proporcionalidad, ya que cada 3 minutos irá comiendose 2 pasteles. S-6

6.2)

a)

cajas	1			2			3			4		
paquetes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
precio	1'80			3'60			5'40			7'20		

Cuatro cajas que son 12 paquetes costará 7'20 €.

b)

pasteles	2	4	8	10	---	24
minutos	3	6	12	15		36

Tardará 36 minutos en comerse 24 pasteles.

5

La expresión decimal es la notación decimal de una fracción a través de la parte entera (anterior a la coma), la coma y la parte decimal. Con la expresión decimal se pueden expresar el número que representa a la fracción ya sea racional o irracional.

(*) Continuación número decimal.

Los periódicos se dividen a su vez en:

- Puro: se repite siempre el mismo o los mismos números. 5'888...
- Mixto: hay una parte que no se repite y otra que se repite indefinidamente.

7'5432727...

6] 6.1] a) Si; porque conforme vayan aumentando las cajas irá aumentando el dinero, es decir; hay una constante K en cada lado que siempre es la misma.

1'

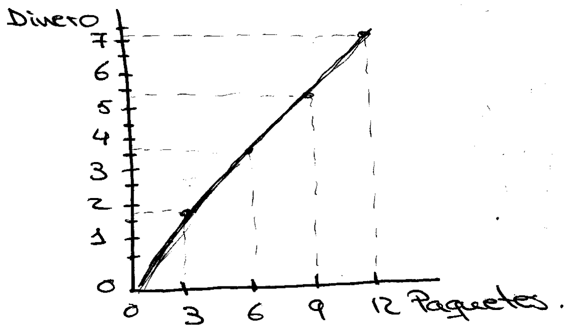
b) No es proporcional porque es muy relativo ya que no todos aumentan por igual y además también influyen una serie de factores.

c) No es proporcional porque siempre se mantiene igual ya que no hay ningún ~~tipo~~ de ingreso que pueda ser constante ~~confor-~~me pasa el tiempo.

d) Si es proporcional porque hay una constante en cada magnitud que aumenta ~~progresiva~~mente.

6.2] Cereales.

3 → 1'80€
6 → 3'60€
9 → 5'40€
12 → 7'20€



3) $\frac{5}{5} = \frac{125}{125}$ = Altura

$\frac{1}{5}$ = 1er bote

$\frac{1}{125}$ = 3er bote = 6m

6m —— $\frac{1}{125}$

x —— $\frac{125}{125}$

?

$x \frac{1}{\cancel{125}} = 6 \frac{125}{\cancel{125}}$

$x = 6 \cdot 125$

$\boxed{x = 750 \text{ m.}}$

5 a) Si son decimales ya que son números distintos de 0 en ningún decimal termina en 0.

0

b) $\frac{2745}{100}$

c) si ya que 9 es un número distinto de 0 esta expresión se llamaría expresión decimal mixta.

d) un número decimal es todo número que no llega una parte a la unidad y que es mas pequeño que 1 por lo que se representaría con una , y el número que le sigue. Este número es mayor que 0 la expresión decimal de un número real sería el número no es decimal ya que llega a la unidad pero se reduce para cambiarlo a decimal dividiendo ese número por el número que quieras poner de denominador.

6 6.1 a) este se refiere a un problema de proporcionalidad ya que expresa cosas que son de igual magnitud; por un lado habla de cajas y por otro lado habla de paquetes con un precio cada uno. Entre la caja y el paquete hay relación ya que cada caja contiene 3 paquetes.

0'8

b) No es proporcionalidad ya que el peso del niño no depende de los meses y depende de muchos mas factores ajenos a el.

c) Este si es un problema de proporcionalidad ya que se relaciona el dinero con los años sin que influyan mas factores.

d) Este tambien es un problema de proporcionalidad ya que el numero de de pasteles se relaciona con los minutos.

6.2

a) 12 paquetes = 6 cajas

1,80€ cada caja

6 · 1,80 = 10,80 €

6 cajas

b) dentro de 2 años tendrá 1.500€

y si hubiera ingresado 3.000€ hubiera tenido 3.000€

d) $\frac{2}{3} \rightarrow \frac{24}{x}$ — pasteles — min.

$2x = 3 \cdot 24$

$2x = 72$

$x = \frac{72}{2}$

$\boxed{x = 36 \text{ minutos}}$

6.2

a) Cereales → 3 paquetes → 1'80 €
12 paquetes → X €

$X = \frac{12 \cdot 1'80}{3}$;

X = 11'60 €/12 paquetes.

b) Bebé → 3 kilos ⇒ 3 meses
X kilos ⇐ 12 meses

$X = \frac{12 \cdot 3}{3}$;

X = 12 kilos/año.

d) Pedro → 2 pasteles ⇒ 3 minutos
24 pasteles → X minutos

$X = \frac{24 \cdot 3}{2}$;

X = 36 minutos

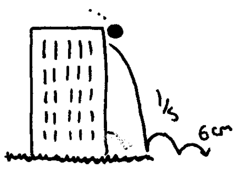
4) Pelota → Rebota ~~[illegible]~~ · 1/5 x.
2º rebote: 6 cm.
¿Altura inicial?

$6 - \frac{1}{5}x = 0$

$\frac{30 - 1x}{5} = 0$; $30 - 1x = 0$

X = 30 cm, lo que rebota inicialmente ~~[illegible]~~
entonces son: 30cm + 6cm = 36 cm ~~es~~ ~~[illegible]~~ lo que mide de alto el lugar desde donde se lanzó la pelota.

b)



c)

$6 - \frac{1}{5}x = 0$ = total de cm que mide la altura desde donde se lanzó la pelota.

d) En este caso, si se considera una proporcionalidad y de tipo directa, Pedro debe comer en un tiempo límite de tres minutos 2 pasteles, pues a más minutos, le corresponderá más cantidad de pasteles...

6.2

a) Nº ~~Cajas~~ paquetes — € (céntimos)

1 —— 180
12 —— X

$1X = 180 \cdot 12$
$1X = 2160$
$X = \frac{2160}{1} = 2160$ cént.

Solución → 2160 cént. 12 paquetes. O sea 21,6 €.

b) Min. — Nº Pasteles

3 —— 2
X —— 24

$2X = 24 \cdot 3$
$2X = 72$
$X = \frac{72}{2}$ / $X = 36$ min

4. $\frac{1}{5}$ de X (altura) $= \frac{1}{5}X$

$\frac{3}{5} \rightarrow 6$cm

$\frac{1}{5}X + \frac{3}{5} = 6$

$5X + \frac{3}{5} = 6$

$25X + 3 = 6$
$25X = 6 - 3$
$25X = 3$
$X = \frac{25}{3}$

- Desde una altura de 8'3 m.

$25 \div 3 = 8'3$ (resto 10, 1)

6)

6.1) a) Éste problema no es de proporcionalidad puesto que no hay un aumento de las dos magnitudes en la misma cantidad (r: razón de ~~proporcionalidad~~)

0 b) Éste problema sí es de proporcionalidad puesto que las magnitudes dadas aumentan todas en la misma cantidad (r: razón).

c) Este problema no es de proporcionalidad aunque en este caso la magnitud "intereses" no aumenta. No hay ninguna razón (r) de proporcionalidad.

d) Este problema se es de proporcionalidad puesto que hay ~~2 mag~~ una cantidad proporcional al aumento de las magnitudes. Hay una razón (r) que determina el aumento de ambas magnitudes (minutos y pasteles).

6.2)

b) 3kg —> 3 meses
x —> 1 año

= 12 meses, por tanto si en 3 meses ha aumentado 3 kg, y 12 meses son 4 veces 3 (meses), entonces 3·4 = 12; 12 kg ~~ha~~ pesa en 1 año//

La razón de proporcionalidad aquí es 4 = r, puesto que tanto los meses como los kg aumentan 4 veces su cantidad. Es una proporcionalidad directa, a mayor cantidad de meses mayor es la cantidad de kg que pesa el bebe.

d) 2 pasteles —> 3 minutos
24 pasteles —> x minutos

Observamos que en 3 minutos toma 2 pasteles. 24 pasteles son 12 veces los 2 pasteles, es decir, 2 pasteles x 12 = 24 pasteles, por tanto deducimos que si los 2 pasteles se los tomó en 3 minutos los 24 pasteles se los tomará en 3 x 12 = 36 minutos//

Así que la razón (r) de proporcionalidad en ésta situación es r = 12, puesto que tanto los pasteles como los minutos aumentan 12 veces su cantidad. Es una proporcionalidad directa, ya que a más pasteles mayor número de minutos necesitara

6) b) 3 kg → 3 meses $\quad x = \frac{12 \cdot 3}{3} = \frac{36}{3} = \underline{12}$ kg ; es un problema de
x kg — 12 meses

0'Y proporcionalidad directa puesto que si con 3 meses pesa 3 kg; a los 12 meses deberá pesar 12 kg. Tanto el 3 como el 12 se multiplican por un mismo número; el 1.

c) 1.500 € sin intereses.
€ = ? al cabo de 2 años. ~~El mismo dinero~~.

0 si fuera 3000 € ; ~~tendría al cabo de 2 años 3.000 €~~.

$1.500 \cdot \frac{2}{100} = \frac{3000}{100} = 30$€ al cabo de dos años

$3.000 \cdot \frac{2}{100} = \frac{6000}{100} = 60$ € al cabo de 2 años

Es un problema de tantos por cientos, puesto que al los dos años le quitan el 2% de su cantidad inicial, sin añadirle ningún interés.

d) 2 pasteles — 3 minutos $\quad x = \frac{24 \cdot 3}{2} = \frac{72}{2} = \underline{36}$ minutos $\quad 72 \,|\, 12 \;\; 12 \;\; 36 \;\; 0$
24 pasteles — x minutos

0 Este es un problema de proporcionalidad puesto que si puede comer en 3 minutos 2 pasteles, ¿cuánto tiempo tardará en comer 24? Es de proporcionalidad directa.

a) 1 caja 3 paquetes; 1 caja = 1,80€
12 paquetes → € = ?

12 : 3 = 4 cajas $\quad$ 1,80 × 4 = 7,20

1,80 · 4 = $\underline{7,20}$€ los 12 paquetes.

Este es un problema de proporcionalidad puesto que hay una relación directa entre los euros y los paquetes.
Una caja son 1,80 € ; 4 cajas 7,20 €.

G-19.

ANÁLISIS DE LOS CONOCIMIENTOS PUESTOS EN JUEGO EN LA SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

Nombres: Lidia Gálvez Martín
[redacted]

[redacted]

Un envase de 4 yogures cuesta 1'60 €. ¿Cuánto cuesta un yogur? ¿Y 6 yogures?
a) Resuelve el problema y describe detalladamente el procedimiento empleado.
b) Identifica los conocimientos matemáticos que has puesto en juego para resolver el problema.

Aclaración:

Vamos a considerar que se pone en juego un "conocimiento matemático" cuando se establece algún tipo de relación (significado) entre los siguientes tipos de entidades u objetos matemáticos:

- Elementos lingüísticos: términos, expresiones, notaciones, gráficos...
- Conceptos: introducidos mediante definiciones o descripciones... número, punto, recta,...
- Procedimientos: algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo.
- Propiedades o proposiciones: enunciados sobre conceptos o procedimientos cuya validez requiere elaborar una argumentación.
- Argumentos: enunciados utilizados para justificar las propiedades y procedimientos, deductivos o de otro tipo.

---

a) Resolución del problema y descripción detallada del procedimiento empleado:

→ 1'60 ÷ 4 = 0'40

$$\begin{array}{r|l} 1'60 & 4 \\ \hline 00 & 0'40 \\ 0 & \end{array}$$

Un yogur cuesta 0'40 €

→ Para averiguar cuanto cueste 1 yogur debemos dividir la cantidad que ya sabemos que cuestan los 4 yogures por 4. Es decir, el dividendo corresponde a la cantidad que cuestan 4 yogures (1'60 €); el divisor corresponde a la cantidad en que se va a repartir equitativamente el dividendo. Esto se explica porque la cantidad expresada en el problema como 1'60€ corresponde a sólo 4 yogures. que se conseguiría añadiendo 4 veces la cantidad de un yogur.

→ 0'40 × 6 = 2'40

$$\begin{array}{r} 0'40 \\ \times\ 6 \\ \hline 2'40 \end{array}$$

Seis yogures cuestan 2'40 €.

→ Para averiguar cuanto cuestan 6 yogures debemos multiplicar el precio de un yogur por 6 yogures que son los que queremos calcular. Para ello, debemos ir sumando sucesivamente la cantidad que cuesta un yogur hasta 6 veces.

G-26

ANÁLISIS DE LOS CONOCIMIENTOS PUESTOS EN JUEGO EN LA SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

Nombres: [redacted]

Un envase de 4 yogures cuesta 1'60 €. ¿Cuánto cuesta un yogur? ¿Y 6 yogures?

a) Resuelve el problema y describe detalladamente el procedimiento empleado.

b) Identifica los conocimientos matemáticos que has puesto en juego para resolver el problema.

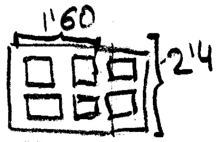
Aclaración:

Vamos a considerar que se pone en juego un "conocimiento matemático" cuando se establece algún tipo de relación (significado) entre los siguientes tipos de entidades u objetos matemáticos:

- Elementos lingüísticos: términos, expresiones, notaciones, gráficos…
- Conceptos: introducidos mediante definiciones o descripciones… número, punto, recta,…
- Procedimientos: algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo.
- Propiedades o proposiciones: enunciados sobre conceptos o procedimientos cuya validez requiere elaborar una argumentación.
- Argumentos: enunciados utilizados para justificar las propiedades y procedimientos, deductivos o de otro tipo.

---

a) Resolución del problema y descripción detallada del procedimiento empleado:



*

1 envase de 4 yogures → 1'60 €

0'4 + 0'4 + 0'4 + 0'4

¿cada yogur?

1'600 | 400
0

0'4 cuesta cada yogur.

0'4 × 6 = 2'4 cuestan 6 yogures

Descripción:

Si conocemos que un envase de cuatro yogures cuesta 1'60 podemos averiguar lo que cuesta 1 yogur dividiendo el precio del envase entre 4 (que es el número de yogures que hay) debido a que cuando estamos dividiendo, estamos repartiendo una cantidad en diferentes partes.

A continuación, para saber cuanto valen seis yogures, nos basamos en lo que cuesta 1 (que lo conocemos) y lo multiplicamos por seis (cuyo resultado será el que queremos hallar). Utilizamos la multiplicación porque este algoritmo nos es útil para aumentar una cantidad un determinado número de veces.

* Prueba de la división →

G-3.

ANÁLISIS DE LOS CONOCIMIENTOS PUESTOS EN JUEGO EN LA SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

Nombres: [redacted]

Un envase de 4 yogures cuesta 1'60 €. ¿Cuánto cuesta un yogur? ¿Y 6 yogures?
a) Resuelve el problema y describe detalladamente el procedimiento empleado.
b) Identifica los conocimientos matemáticos que has puesto en juego para resolver el problema.

Aclaración:

Vamos a considerar que se pone en juego un "conocimiento matemático" cuando se establece algún tipo de relación (significado) entre los siguientes tipos de entidades u objetos matemáticos:

- Elementos lingüísticos: términos, expresiones, notaciones, gráficos…
- Conceptos: introducidos mediante definiciones o descripciones… número, punto, recta,…
- Procedimientos: algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo.
- Propiedades o proposiciones: enunciados sobre conceptos o procedimientos cuya validez requiere elaborar una argumentación.
- Argumentos: enunciados utilizados para justificar las propiedades y procedimientos, deductivos o de otro tipo.

a) Resolución del problema y descripción detallada del procedimiento empleado:

4 yogures → 1'60€

1 yogur → $\frac{1'60€}{4}$ = 0'40 €

1'60 | 4
0 | 0'40

6 yogures → 0'40 × 6 = 2'40

$$\begin{array}{r} 0'40 \\ \times 6 \\ \hline 2'40 \end{array}$$

Puesto que cuatro yogures cuestan 1'60€, para conocer el precio de una unidad dividimos el total 1'60 entre 4 y obtenemos de resultado 0'40. En segundo lugar para calcular la siguiente cuestión usamos la multiplicación y para conocer el precio de 6 yogures, multiplicamos 6 yogures por el precio de un yogur.

G-29

ANÁLISIS DE LOS CONOCIMIENTOS PUESTOS EN JUEGO EN LA SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

Nombres:
[redacted]

Un envase de 4 yogures cuesta 1'60 €. ¿Cuánto cuesta un yogur? ¿Y 6 yogures?
a) Resuelve el problema y describe detalladamente el procedimiento empleado.
b) Identifica los conocimientos matemáticos que has puesto en juego para resolver el problema.

Aclaración:

Vamos a considerar que se pone en juego un "conocimiento matemático" cuando se establece algún tipo de relación (significado) entre los siguientes tipos de entidades u objetos matemáticos:

- Elementos lingüísticos: términos, expresiones, notaciones, gráficos…
- Conceptos: introducidos mediante definiciones o descripciones… número, punto, recta,…
- Procedimientos: algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo.
- Propiedades o proposiciones: enunciados sobre conceptos o procedimientos cuya validez requiere elaborar una argumentación.
- Argumentos: enunciados utilizados para justificar las propiedades y procedimientos, deductivos o de otro tipo.

a) Resolución del problema y descripción detallada del procedimiento empleado:

DATOS: Envase { tiene 4 yogures
cuesta 1'60 €

4 yogures = 1'60 €

Incognita: ~~Un~~ yogurt?
6 yogures?

1. Primero ~~ha~~llamos el precio unitario Dividiendo el precio ~~del~~ envase entre sus unidades.

Quitamos la coma y ponemos un cero en el cociente

Dividendo 1'6~~0~~ | 4 Divisor
00 → 0'40 € → Cociente
0 → resto

El precio unitario es de 0'40 €.

$\boxed{1 \text{ yogurt} = 0'40 €}$

2. Para ha~~ll~~ar el precio de 6 yogures mutiplicamos el precio unitario por 6 unidades.

0'40 → Multiplicando
× 6 → Multiplicador
Producto ← 2'40 → Bajamos la coma tanta unidades como en el multiplicando

PRODUCTO

$\boxed{6 \text{ yogures} = 2'40 €}$

G-27

ANÁLISIS DE LOS CONOCIMIENTOS PUESTOS EN JUEGO EN LA SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

Nombres: [redacted]

Un envase de 4 yogures cuesta 1'60 €. ¿Cuánto cuesta un yogur? ¿Y 6 yogures?
a) Resuelve el problema y describe detalladamente el procedimiento empleado.
b) Identifica los conocimientos matemáticos que has puesto en juego para resolver el problema.

Aclaración:

Vamos a considerar que se pone en juego un "conocimiento matemático" cuando se establece algún tipo de relación (significado) entre los siguientes tipos de entidades u objetos matemáticos:

- Elementos lingüísticos: términos, expresiones, notaciones, gráficos...
- Conceptos: introducidos mediante definiciones o descripciones... número, punto, recta,...
- Procedimientos: algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo.
- Propiedades o proposiciones: enunciados sobre conceptos o procedimientos cuya validez requiere elaborar una argumentación.
- Argumentos: enunciados utilizados para justificar las propiedades y procedimientos, deductivos o de otro tipo.

a) Resolución del problema y descripción detallada del procedimiento empleado:

4 yogures
1,60 €

4 : 1,60 = 0,40 € cada yogur

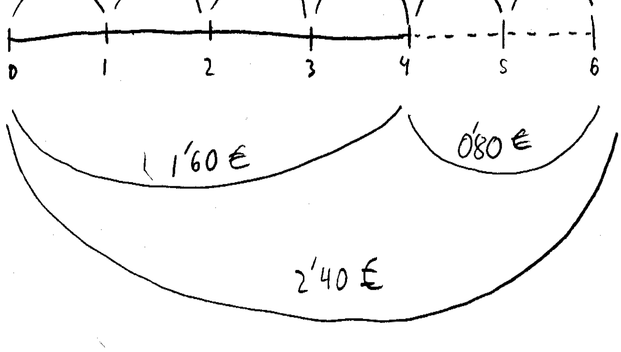
6 × 0,40 = 2,40 € 6 yogures

· Puesto que 4 yogures, cuestan 1,60 €, habrá que dividir el precio total con el número de yogures para calcular el precio unitario.

· Para calcular el precio de 6 yogures habrá que multiplicar el precio unitario por el número de yogures.

1,60 | 4
00 0,40
0

6
× 0,40
240
00
2,40



G-2

ANÁLISIS DE LOS CONOCIMIENTOS PUESTOS EN JUEGO EN LA SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

Nombres: [redacted]

Un envase de 4 yogures cuesta 1´60 €. ¿Cuánto cuesta un yogur? ¿Y 6 yogures?

a) Resuelve el problema y describe detalladamente el procedimiento empleado.

b) Identifica los conocimientos matemáticos que has puesto en juego para resolver el problema.

Aclaración:

Vamos a considerar que se pone en juego un "conocimiento matemático" cuando se establece algún tipo de relación (significado) entre los siguientes tipos de entidades u objetos matemáticos:

- Elementos lingüísticos: términos, expresiones, notaciones, gráficos…
- Conceptos: introducidos mediante definiciones o descripciones… número, punto, recta,…
- Procedimientos: algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo.
- Propiedades o proposiciones: enunciados sobre conceptos o procedimientos cuya validez requiere elaborar una argumentación.
- Argumentos: enunciados utilizados para justificar las propiedades y procedimientos, deductivos o de otro tipo.

a) Resolución del problema y descripción detallada del procedimiento empleado:

4 yogures ⟶ 1'60€

1'60 |4

00 0'40 € cuesta cada yogur

0'40

× 6

2'40 € cuestan 6 yogures

En primer lugar dividimos 1'60€ que es lo que cuesta cuatro yogures entre 4, para calcular lo que cuesta un yogur. De esta manera sabemos que un yogur cuesta 0'40 €.

En segundo lugar, multiplicamos lo que cuesta un yogur (0'40€) por 6 y obtenemos lo que cuestan 6 yogures (2'40€)

G-7

ANÁLISIS DE LOS CONOCIMIENTOS PUESTOS EN JUEGO EN LA SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

Nombres: [redacted]

Un envase de 4 yogures cuesta 1'60 €. ¿Cuánto cuesta un yogur? ¿Y 6 yogures?
a) Resuelve el problema y describe detalladamente el procedimiento empleado.
b) Identifica los conocimientos matemáticos que has puesto en juego para resolver el problema.

Aclaración:

Vamos a considerar que se pone en juego un "conocimiento matemático" cuando se establece algún tipo de relación (significado) entre los siguientes tipos de entidades u objetos matemáticos:

- Elementos lingüísticos: términos, expresiones, notaciones, gráficos...
- Conceptos: introducidos mediante definiciones o descripciones... número, punto, recta,...
- Procedimientos: algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo.
- Propiedades o proposiciones: enunciados sobre conceptos o procedimientos cuya validez requiere elaborar una argumentación.
- Argumentos: enunciados utilizados para justificar las propiedades y procedimientos, deductivos o de otro tipo.

a) Resolución del problema y descripción detallada del procedimiento empleado:

1'60 | 4
00   0'40

0'40
x 6
2'40

Sabemos que un envase de cuatro yogures cuesta 1'60 €, para saber lo que cueste un yogur, hemos dividido ~~(la cantidad)~~ el precio del paquete, por la cantidad de unidades de dicho paquete. Para saber qué cuesta seis yogures, pues sabiendo que el precio de la unidad de yogur, es de 40 céntimos (0'40€), multiplicaremos el precio de la unidad, por el número de yogures deseados.

b) Conocimientos puestos en juego:

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS (Términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas	
-Cuatro yogures cuestan 1'60€ -¿Cuánto cuesta 1 yogur? -¿Cuánto cuestan 6 yogures? -División. -Multiplicación. -Total -Dividendo, divisor, cociente, resto -Multiplicandos, producto	-Precio de cuatro unidades de yogur. -División de la cantidad. -Multiplicación de la cantidad -Concepto de división. -Concepto de multiplicación -Concepto de total -Concepto de dividendo, divisor, cociente, resto. -Concepto de multiplicando, producto.
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)	
-Conjunto -Nº Natural -División y multiplicación -Total -Nº Decimal -Divisor -Dividendo -Cociente -Resto	-Colección de 4 yogures. -Colección de 6 yogures. -Cardinal de los conjunto. -División: separar, partir / Multiplicar: aumentar, -Resultado de un producto y de una división. - -Nº de partes en que se separa. -Cantidad que se reparte. -Resultado obtenido. -
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
-División con decimales. -Multiplicación con decimales	-Permite hallar el valor de una unidad con decimales. -Aplicamos dicha operaciones para obtener el precio de 6 unidades.
PROPIEDADES (Enunciados para los cuales se requiere una demostración o prueba)	
-Reglas del sistema de numeración decimal -0'40 céntimos -2'40 €	-Usadas para el cálculo de la división y multiplicación realizadas -Es la solución de lo que cuesta la unidad -Es la solución de lo que cuestan 6 unidades.
ARGUMENTOS (Justificaciones, demostraciones o pruebas de las propiedades utilizadas)	
Justificación de la multiplicación con decimales.	

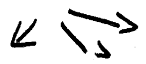
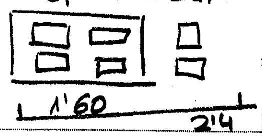
b) Conocimientos puestos en juego:

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS (Términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas	
- multiplicación - división - "¿Cuánto cuesta 1 yogur?" - "¿Y 6 yogures?" - "Un envase de 4 yogures cuesta 1'60€" - Dividendo - Divisor - disposición tabular del algoritmo de la multip. y división	- Concepto de multiplicación - concepto de división - Reparto de una cantidad entre otra - Adición de la misma cantidad 6 veces. - Precio de 4 yogures. - Cantidad que cuestan 4 yogures. - Cantidad entre la que se va a repartir el dividendo (en partes iguales). - algoritmo de multip. (en columnas) y algoritmo de división (en caja).
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)	
- División - Multiplicación - Nº natural - Nº decimal	- Reparto de una cantidad en partes iguales. - Adición reiterada de una cantidad un determinado nº de veces. - Cardinal de los conjuntos. - Nº fraccionado
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
- algoritmo de multiplicar y dividir "llevándose" - multiplicación relacionada con la suma	- permite hallar el valor de la multiplicación y división, justificando los llevados. - multiplicar como sumar reiteradamente.
PROPIEDADES (Enunciados para los cuales se requiere una demostración o prueba)	
- "Un yogur cuesta 0'40€" - "Seis yogures cuestan 2'40€" - Reglas del Sist. Num. Decimal	- Es la solución de una pregunta del problema. - " " " " " " " ". - Para el cálculo de la multiplicación y la división mediante el algoritmo descrito.
ARGUMENTOS (Justificaciones, demostraciones o pruebas de las propiedades utilizadas)	
El procedimiento del problema es deductivo porque el enunciado satisface las condiciones del concepto de multip. y división. Por tanto la solución del problema se obtiene calculando la multiplic. y división de los datos dados.	

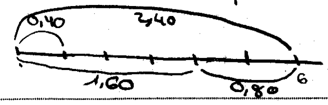
b) Conocimientos puestos en juego:

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS (Términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas	
- 4 yogures cuestan 1'60 € - ¿Cuánto cuesta 1 yogurt? - ¿Cuánto cuestan 6 yogures? - División $\begin{array}{l\|l} a & b \\ \hline r & c \end{array}$ - Multiplicación	- ~~precio~~ ~~cantidad~~ Cantidad de yogures y precio de los 4 juntos. - ~~cantidad~~ precio de un solo envase, - ~~cantidad~~ precio de 6 envases. - pasos, colocación de los números, y utilización del algoritmo resta para obtener la solución. - multiplicador, multiplicando, resultado.
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)	
- nº decimales - nº naturales - División - Multiplicación.	- números - cardinal de los conjuntos - es repartir en partes iguales. - es sumar una misma cantidad un nº determinado de veces.
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
- Algoritmo de dividir con decimales - Algoritmo de multiplicar con decimales	- Permite hallar el valor de la división justificando el movimiento de la coma hacia la izquierda en el dividendo colocando un 0 en el cociente. - Permite hallar el valor de la multipli
PROPIEDADES (Enunciados para los cuales se requiere una demostración o prueba)	
- 1 envase cuesta 0,40 € - 6 envases 2,40 € -	- solución a la primera cuestión. - solución del valor/precio de 6 la 2ª cuestión.
ARGUMENTOS (Justificaciones, demostraciones o pruebas de las propiedades utilizadas)	
· Situación del reparto del precio total de 4 yogures en partes iguales. · Situación <u>deductiva</u>: el enunciado del problema conlleva a calcular utilizando el algoritmo de la división y el de la multiplicación.	

b) Conocimientos puestos en juego:

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS (Términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas	
flechas 	Reparto / dividir / separar
Representación 	Es una forma de expresar gráficamente una suma.  → Forma de expresar gráficamente una multiplicación
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)	
Dividir	Repartir, separar, partir de forma equitativa (igual)
Entre	Dividir.
Número	Expresión matemática que designa una cantidad
Cantidad	Representación de un número
Partes / partir	Divisiones
Valer	Decir el precio de algo
Seis / cuatro	Entidad ~~cuantitativa~~ que da nombre a una cantidad
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
División →	Nos sirve para repartir una cantidad en diferentes partes.
Multiplicación →	Nos sirve para aumentar de forma proporcional una cantidad.
PROPIEDADES (Enunciados para los cuales se requiere una demostración o prueba)	
Prueba de la división →	Nos sirve para comprobar si es correcto el resultado. La representación de las flechas nos es útil para comprobar que la operación es correcta, teniendo en cuenta que se suman las cantidades que indica cada flecha.
Prueba de la multiplicación →	Esta prueba es similar a la anterior
ARGUMENTOS (Justificaciones, demostraciones o pruebas de las propiedades utilizadas)	

b) Conocimientos puestos en juego:

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS (Términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas	
4 yogures 1,60 €	Planteamiento del problema
- Puesto que 4 yogures... - Para calcular el precio...	Explicación
	Aclaración
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)	
División Multiplicación Unidad	Explicación gráfica de dichas operaciones.
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
División Multiplicación	Operaciones necesarias para la resolución de este problema.
PROPIEDADES (Enunciados para los cuales se requiere una demostración o prueba)	
0,40€ cada yogur 2,40 € 6 yogures	Resultados que requieren un procedimiento.
ARGUMENTOS (Justificaciones, demostraciones o pruebas de las propiedades utilizadas)	
1,60 | 4 00 0,40 0 6 × 0,40 2 40 00 2,40	

b) Conocimientos puestos en juego:

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS (Términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas	
- 4 yogures - 1'60 € - 6 yogures? - 1 envase (4 yogures)	- yogures en total - precio de los yogures. - cuánto cuestan - 6 yogures (1'5 envases).
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)	
- suma - suma total - ÷ total - x total - conjunto - nº natural	- concepto de suma - resultado de la suma - resultado de la división - resultado de la multiplicación - yogures, nº de envases - reunir, añadir, juntar.
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
- algoritmo de la división llevándose - algoritmo de la suma llevándose - algoritmo de la multiplicación llevándose	- procedimiento que se hace para llegar al resultado teniendo en cuenta las propiedades de la división - procedimiento que se hace para llegar al resultado teniendo en cuenta la propiedad de la suma. - procedimiento que se hace para llegar al resultado teniendo en cuenta las propiedades de la multiplicación.
PROPIEDADES (Enunciados para los cuales se requiere una demostración o prueba)	
- Relación del sistema de numeración decimal - en total hay 4 yogures que valen 1'60 €. - Propiedades de la ÷ - " de la x	- es lo que nos permite realizar la operación. - te dice cuánto valen 4 yogures - cómo se llega al resultado de la ÷ - cómo se llega al resultado de la x.
ARGUMENTOS (Justificaciones, demostraciones o pruebas de las propiedades utilizadas)	
- Deductivo - Ya que se nos dice el precio de los yogures, por lo tanto se deduce que por una regla de 3, o una división se puede sacar el precio de un yogur, para, en adelante, averiguar el precio de 6 yogures. - Se puede tener la duda de si el IVA de un yogur es el mismo que el del pack de 4 yogures.	

b) Conocimientos puestos en juego:

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS (Términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas	
-Un envase de 4 yogures cuesta 1'60€ -¿Cuánto cuesta un yogurt? -¿Y 6 yogures? -Elementos de la división -Multiplicandos y solución -División y multiplicación decimal	→ Cantidad de dinero de un nº determinado de yogures → Algoritmo de división entre cantidades iniciales. → Algoritmo de multiplicación entre el resultado y nuevo dato. → Correcta colocación → Correcta colocación → Correcta colocación de la coma.
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)	
-Multiplicar -División -Nº decimal -Proporcionalidad entre cantidades.	→ Suma reiterada de una cantidad un nº determinado de veces. → A una cantidad inicial (Dividendo) se le resta un nº (divisor) varias veces (cociente) quedando un ~~solo~~ resto. → Número que, puesto en forma de fracción, su denominador es una potencia de 10. La parte decimal es finita. (clase de nº racional) → Relación entre 2 cantidades que influye en el resultado final,
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
- Algoritmo de multiplicación - Algoritmo de división - Algoritmos anteriores con nºs decimales	→ Multiplicar utilizando el procedimiento de las llevadas. → División en la que entran en juego los conceptos de dividendo, divisor, cociente y resto. → Aplicar los conceptos de multiplicación y división anteriores teniendo en cuenta la parte decimal.
PROPIEDADES (Enunciados para los cuales se requiere una demostración o prueba)	
-Prueba de la multiplicación -Prueba de la división	→ Dividiendo (~~uno de los~~) el resultado obtenido entre uno de los multiplicandos, este ~~es~~ resultado debe darnos el otro miembro. → Aplicar la fórmula siguiente: Dividendo = divisor × cociente + resto.
ARGUMENTOS (Justificaciones, demostraciones o pruebas de las propiedades utilizadas)	

b) Conocimientos puestos en juego:

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS (Términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas	
- Cuesta 1'60€ - ¿Y 6 yogures?	Esta expresión hace referencia al precio de un envase de 4 yogures Esta cuestión se refiere a cuánto cuestan 6 yogures.
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)	
División Multiplicación	Hace referencia al concepto de repartir una cantidad en partes iguales. Hace referencia a una suma compuesta por ~~los~~ sumandos iguales
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
División Multiplicación	Operación realizada para obtener el precio de un yogur Es la operación realizada para obtener el precio de 6 yogures, partiendo del precio de 1 yogur. En la que multiplicamos un número entero por una fracción.
PROPIEDADES (Enunciados para los cuales se requiere una demostración o prueba)	
~~del~~ Un envase de 4 yogures cuesta 1'60€	Al referirse a un envase se debe de tener en cuenta que éste está compuesto de 4 yogures, y que 1'60€ se refiere al precio del envase de 4 yogures.
ARGUMENTOS (Justificaciones, demostraciones o pruebas de las propiedades utilizadas)	
¿Cuánto cuesta un yogur? ⟹ Con esta expresión se deduce que mediante la división, obtenemos el precio de 1 yogur partiendo del precio de un envase de 4 yogures.	

7/

FICHA PARA EL RESUMEN DEL TRABAJO EN EQUIPOS

Equipo número: 10 **Componentes del equipo:** [redacted]

Práctica Nº 1:
LAS MATEMÁTICAS COMO ACTIVIDAD DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS [redacted]

RESOLUCIÓN:

Cada miembro del equipo ha resuelto cada problema de una manera personal. Comparar dichas resoluciones y elaborar una que consideréis más eficaz o "experta". Incluir a continuación dicha resolución para cada uno de los problemas propuestos. (Añadir las hojas que sean necesarias).

EJERCICIO 1º

12 cucharadas zumo | 3c. azúcar
4 c. zumo por cada cucharada azúcar

20 cucharadas zumo | 5 c. azúcar
4 c. zumo por cada c. azúcar

* UTILIZAN LA MISMA RELACIÓN ENTRE ZUMO Y AZÚCAR (LAS 2 LIMONADAS TIENEN EL MISMO GUSTO)

Ejercicio 2º

40 días × 4 € = 160 € | 20 días
8€ menú 60 días

8€ + 4€ = 12 € menú al principio (para 40 días)
12€ × 40 días = $\boxed{480€}$

8

FICHA PARA EL RESUMEN DEL TRABAJO EN EQUIPOS

Equipo número: A1-9 **Componentes del equipo:** [redacted]

Práctica Nº 1:
LAS MATEMÁTICAS COMO ACTIVIDAD DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

RESOLUCIÓN:

Cada miembro del equipo ha resuelto cada problema de una manera personal. Comparar dichas resoluciones y elaborar una que consideréis más eficaz o "experta". Incluir a continuación dicha resolución para cada uno de los problemas propuestos. (Añadir las hojas que sean necesarias).

PROBLEMA 1

La solución que hemos considerado más eficaz es la siguiente:

Juan → $\frac{3 \text{ (azúcar)}}{12 \text{ (concentrado)}}$ Por cada 12 cucharadas de concentrado utiliza 3 cucharadas de azúcar

María → $\frac{5 \text{ (azúcar)}}{20 \text{ (concentrado)}}$ Por cada 20 cucharadas de concentrado utiliza 5 cucharadas de azúcar.

Para saber si las dos fracciones son equivalentes, realizamos el mínimo común múltiplo (M.C.M.) para igualar los denominadores; de esta manera podremos saber si en relación a la cantidad de concentrado la cantidad de azúcar utilizada es la misma o es diferente en las dos limonadas.

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{array} \qquad 2^2 \cdot 5 \cdot 3 = 60 \quad \boxed{M.C.M. = 60}$$

$$\frac{3}{12} \text{ y } \frac{5}{20} = \frac{15}{60} \text{ y } \frac{15}{60};$$

Por lo tanto, la proporción es la misma.

6

FICHA PARA EL RESUMEN DEL TRABAJO EN EQUIPOS

Equipo número: A1-2

Componentes del equipo: [redacted]

Práctica Nº 1:
LAS MATEMÁTICAS COMO ACTIVIDAD DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

RESOLUCIÓN:

Cada miembro del equipo ha resuelto cada problema de una manera personal. Comparar dichas resoluciones y elaborar una que consideréis más eficaz o "experta". Incluir a continuación dicha resolución para cada uno de los problemas propuestos. (Añadir las hojas que sean necesarias).

Problema 1:

Dividimos el limón entre el azúcar de juan y de maría.

$12 \div 3 = 4$, resto 0 $\qquad$ $20 \div 5 = 4$, resto 0

Como obtenemos el mismo resultado, significa que los gustos de la limonada es igual.

Problema 2:

Se realizan diferentes operaciones.

Ahorro total

40 días $\times 4$ € $= 160$ € se ahorra en 40 días.

$160 \div 20 = 8$ €, resto 0 — se gasta al día

Gasto real/día

$60 \times 8 = 480$ £ es el dinero que le dan sus padres.

Anexo 1: Ejercicio 1.

Juan < 3 azúcar, 12 limón

$$\begin{array}{r|l} 12 & 3 \\ \hline 0 & 4 \end{array}$$

María < 5 azúcar, 20 limón

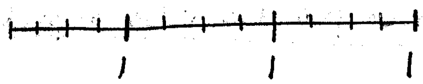
$$\begin{array}{r|l} 20 & 5 \\ \hline 0 & 4 \end{array}$$

El problema nos sugiere una comparación entre la mezcla de Juan y la mezcla de María.

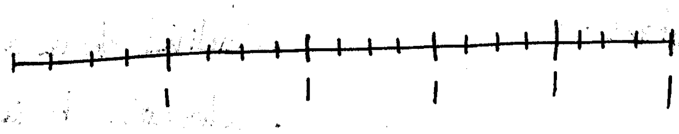
Vemos cual es la proporción de azúcar por 1 limón (zumo de limón) de cada mezcla.

$$\frac{12}{3} = 4 \qquad \frac{20}{5} = 4 \qquad 4 = 4$$

Como la proporción es la misma en cada caso, ambas mezclas están mezclas están igual de dulce.



Juan



María.

(7)

FICHA PARA EL RESUMEN DEL TRABAJO EN EQUIPOS

Equipo número: 7 **Componentes del equipo:** [illegible]

[illegible]

Práctica Nº 1:
LAS MATEMÁTICAS COMO ACTIVIDAD DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

RESOLUCIÓN:

Cada miembro del equipo ha resuelto cada problema de una manera personal. Comparar dichas resoluciones y elaborar una que consideréis más eficaz o "experta". Incluir a continuación dicha resolución para cada uno de los problemas propuestos. (Añadir las hojas que sean necesarias).

1 Juan

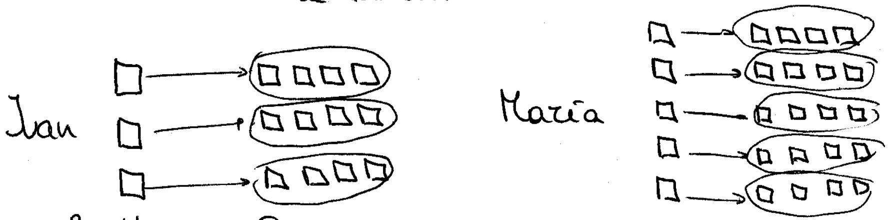
3 cucharadas de azúcar → 12 cucharadas de concentrado de zumo de limón.

María

5 cucharadas de azúcar → 20 cucharadas de concentrado de zumo de limón.

$\begin{array}{r|l} 12 & 3 \\ \hline & 4 \end{array}$ → a cada cucharada de azúcar le corresponden 4 de limón.

$\begin{array}{r|l} 20 & 5 \\ \hline & 4 \end{array}$ → a cada cucharada de azúcar le corresponden 4 de limón.



Resultado: Son igual de dulces.

2 x € durante 40 días

4 € ahorró al día de los 40

le duró el presupuesto 60 días.

40 · 4 = 160 € se ahorra

160 € se gasta en 20 días más

20 + 20 + 20 = 60 días

En 20 días se gasta 160 €

160 × 3 = 480 € es el presupuesto inicial.

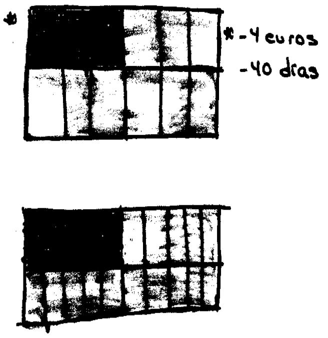
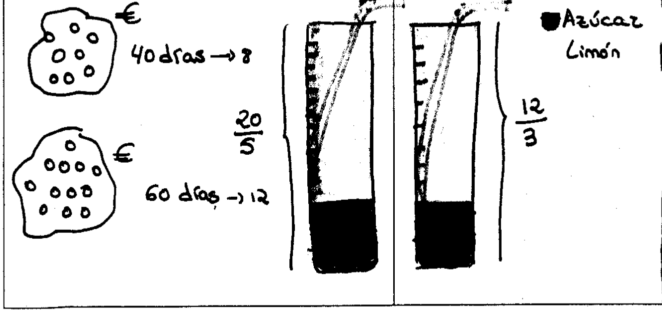
Tipos de objetos	Significados
• REPRESENTACIONES: (términos y expresiones matemáticas; símbolos; repr. gráfica)	
• 3 cucharadas de azúcar	• Cantidad de azúcar que usa Juan
• 12 cucharadas de limón	• Cantidad de zumo que usa Juan
• 5 cucharadas de azúcar	• Cantidad de azúcar que usa María
• 20 cucharadas de limón	• Cantidad de zumo que usa María
• ¿Cuál de ellas es más dulce?	• Comparación de ambas limonadas
• ¿Tienen el mismo gusto?	• Se igualan las dos limonadas.
• División	• Concepto de división.
• Dibujo (línea, recta) para representar.	• Representación gráfica para dar una visualización de la proporción.
• Razón	• Comparación entre dos mezclas.
• Relación entre dos razones	• Igualdad entre dos razones.
• CONCEPTOS: (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición.	
• Números naturales	• Cardinal de un conjunto.
• Conjunto	• Colección de ingredientes.
• Unión de conjuntos distintos	• Colección de la unión de ingredientes.
• Dividir	• Separar, partir, repartir.
• Multiplicación	• Consiste en sumar un número tantas veces como el otro lo indique

PROBLEMA 1. A1 - 11

Anexo: Conocimientos puestos en juego en la solución de tareas matemáticas

Tipos de objetos	**Significados** (relación de referencia o de uso)
REPRESENTACIONES (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, …)	
Juan... 3 cucharadas de azúcar y 12 de limón.	El total está dividido en dos partes, dos tipos de ingredientes. La suma de las partes da el conjunto.
María ... 5 cucharadas de azúcar y 20 de limón.	" " " "
Tabla	Representación de la proporcionalidad de los ingredientes.
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición)	
División →	Reparto de una cantidad entre otra cantidad inferior.
Multiplicación →	Suma repetida de una cifra.
Comparación →	Determinar las posibles diferencias (si las existiera) ~~de~~ entre dos números o elementos.
Cantidad →	Magnitud (cucharadas)
Razón →	Relación de dos cantidades.
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
Dividir	Repartir una cantidad en partes iguales.
Multiplicar	Sumar repetidas veces un número.
Simplificar	Hallar la fracción irreducible.
Comparar	Una cantidad respecto a la otra.
PROPOSIONES (Enunciados para las cuales se requiere una justificación o prueba)	
Reglas del sistema de numeración decimal.	Usadas para el cálculo de la división y la multiplicación mediante el algoritmo descrito.
"Las dos limonadas tienen el mismo gusto."	Solución del problema.
ARGUMENTOS (Justificaciones, demostraciones, o pruebas de las proposiciones usadas)	
"Las dos limonadas tienen el mismo gusto."	Dado que las proporciones de azúcar y limón son las mismas en las dos limonadas.

Anexo: Conocimientos puestos en juego en la solución de tareas matemáticas

Tipos de objetos	**Significados** (relación de referencia o de uso)
REPRESENTACIONES (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, …)	
	•AZUCAR *En el dibujo, se puede observar que la proporción de azúcar y de limón es la misma. ~~*Dinero y días de los que el estudiante dispone.~~
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición)	
Multiplicación Relación División (otra cara)	→ Compuesto por: Multiplicando - Multiplicador y resultado consiste en repetir tantas veces el multiplicando como indica el multiplicador → Compuesto por: 2 datos con la misma unidad (ej: días) y 1 dato con distinta unidad (ej: euros) cuyá relación de proporción entre ambos dará como resultado un cuarto dato que tendrá como unidad la misma que el tercero
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
- Multiplicación - División - Relación	→ Para hallar el dinero ahorrado en 40 días → - Para hallar el dinero que gasta cada día - Para hallar el porcentaje de azúcar por cucharadas de limón → Para hallar el dinero que gasta en los 60 días.
PROPOSIONES (Enunciados para las cuales se requiere una justificación o prueba)	
① ② Resultado final del problema	①. Por cada cucharada de azúcar se le añade 4 de limón, en ambas limonadas esa es la relación. ②. se gasta 8€ cada día, sino hubiera ahorrado esos 4€, se gastaría 12€ en 40 días.
ARGUMENTOS (Justificaciones, demostraciones, o pruebas de las proposiciones usadas)	
	Ambos dibujos muestran como se reparten las monedas por un lado y por el otro, el azúcar y el limón.

ISSN 0103-636X

Desarrollo del Conocimiento para la Enseñanza de la Proporcionalidad en Futuros Profesores de Primaria

Development of Knowledge for Teaching Proportionality in Prospective Elementary Teachers

Mauro A. Rivas*
Juan D. Godino**
Walter F. Castro***

Resumen

Este artículo informa sobre los resultados de un proceso instruccional en el ámbito de la formación inicial de profesores de matemáticas, cuyo objetivo es desarrollar el conocimiento necesario para la enseñanza de la matemática en futuros maestros de primaria. Este proceso comprende: (a) la resolución de un problema de proporcionalidad, (b) el análisis de la resolución del problema haciendo uso de una herramienta de análisis epistémico, y (c) las valoraciones dadas por futuras maestras a tres tipos de respuestas del problema, elaboradas por alumnos de 6º curso de primaria. Los resultados indican que este proceso formativo promueve el desarrollo del conocimiento necesario para la enseñanza de la proporcionalidad. Para concluir se discuten algunas implicaciones de estos resultados para la formación de profesores.

* Máster Oficial en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad de Granada (UGR). Profesor de la Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela. Dirección postal: Avenida Alberto Carnevalli, Conjunto Residencial Campo Neblina, Segunda Etapa, Torre 4, Apto. 2-4-18. Mérida, Venezuela. *E-mail*: rmauro@ula.ve.

** Doctor en Matemáticas por la Universidad de Granada (UGR). Catedrático de Didáctica de la Matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada (UGR), Granada, España. dirección postal: Facultad de Educación. Campus de Cartuja. 18071. Granada, España. *E-mail*: jgodino@ugr.es.

*** Doctor en Matemáticas por la Universidad de Granada (UGR). Profesor de la Universidad de Antioquia, Medellin, Colombia. Dirección postal: Carrera 83 B numero 27 A 41, Barrio Belen - Los Alpes, Medellin, Colombia. *E-mail*: wcastro@ugr.es.

Palabras-clave: Formación de Profesores. Razonamiento Proporcional. Análisis Epistémico. Conocimiento del Profesor.

Abstract

This paper describes some outcomes of an educational process in a teacher mathematics education context. The main objective of the education process is to develop the mathematical knowledge necessary to teach at the elementary grade-level. This process involves: (a) the proportionality problem resolution, (b) analysis of the problem resolution using an epistemic analysis tool, and (c) prospective assessment of three types of sixth graders' responses to a proportionality problem. The results point out that the formative process fosters the development of mathematical knowledge for teaching. Finally, some implications for prospective teacher education are discussed.

Keywords: Teacher Education. Proportional Reasoning. Epistemic Analysis. Teacher Knowledge.

1 Introducción

Desde la propuesta inicial de Shulman (1986, 1987) sobre el conocimiento pedagógico del contenido, se ha observado un creciente interés por el estudio del conocimiento del profesor. En las últimas décadas, ese interés ha tenido una incidencia considerable en el campo de la Educación Matemática (ADLER, 2009; HILL; BALL, 2004). La producción académica y científica en torno al conocimiento necesario para la enseñanza de la matemática ha mostrado un importante crecimiento (KOTSOPOULOS; LAVIGNE, 2008), observándose una profusa producción de artículos en revistas científicas.

Asimismo, el estudio de la proporcionalidad en el campo de la Educación Matemática se encuentra respaldado por una considerable producción científica y académica (BERK et al., 2009; KHOURY, 2002; LESH; POST; BEHR, 1988). Su importancia en el currículo escolar se encuentra refrendada por el papel que se le ha conferido para el desarrollo de buena parte de los contenidos curriculares de la matemática de todos los niveles educacionales (BERK et al., 2009; LAMON, 2005; LESH; POST; BEHR, 1988; NCTM, 2000). De acuerdo con los *Principios y Estándares* de la NCTM (2000, p. 217): "[…] la proporcionalidad es un elemento integrador importante que conecta muchos temas matemáticos estudiados en los grados 6-8". En este sentido, Lamon (2005, p. 3) considera el razonamiento proporcional como "[…] una medida de la comprensión de las ideas matemáticas elementales, y también es parte de la fundamentación de conceptos más complejos".

En relación con el estudio de la proporcionalidad en el ámbito de la formación de profesores, se observa un interés, cada vez más extendido, en el desarrollo de investigaciones dirigidas al estudio del conocimiento matemático y didáctico necesario para enseñar la proporcionalidad (GILBERT; GILBERT, 2009; LO, 2004; SOWDER et al., 1998; THOMPSON; THOMPSON, 1996). Situados en este contexto de investigación, nuestro estudio procura informar sobre los resultados obtenidos de la observación de las acciones de un grupo de futuras maestras, al resolver un problema de proporcionalidad, analizar su resolución y estudiar tres tipos de respuestas dadas a ese problema por alumnos de 6º curso de primaria.

Los tres tipos de respuestas consideradas coinciden con los niveles del razonamiento proporcional identificados por Karplus, Adi y Lawson (1980); Karplus, Karplus y Wollman (1972); Khoury (2002). El problema utilizado es ampliamente conocido en la literatura como: *Mr. Tall/Mr. Short*, el cual ha sido objeto de diversas investigaciones (HART, 1988; KARPLUS; PETERSON, 1970; KHOURY, 2002; LAMON, 2005).

El carácter instruccional que determina las acciones que tienen lugar en el desarrollo de esta investigación, la inscribe en el ámbito de la formación de profesores. En este sentido, estamos interesados en observar el desarrollo de tres de las formas del conocimiento del profesor, propuestas por Ball et al. (2005), a saber: El conocimiento común del contenido, el especializado y el conocimiento de los estudiantes y el contenido[1]. En función de este interés, en el ámbito de la formación inicial de profesores, nos hemos planteado los siguientes objetivos:

- Analizar el *conocimiento común del contenido* sobre la proporcionalidad directa y simple, puesto en juego por futuras maestras, al resolver un problema relativo a ese contenido matemático.
- Fomentar el desarrollo del *conocimiento especializado del contenido* relativo a la enseñanza de la proporcionalidad de un grupo de futuras maestras, por medio de un análisis epistémico, haciendo uso de la *Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados* (GROS)[2]
- Fomentar el desarrollo del *conocimiento de los estudiantes y el contenido* relativo a la enseñanza de la proporcionalidad, de un grupo de futuras maestras, al analizar tres tipos de respuestas dadas a un

[1] Una breve descripción de estos tipos de conocimiento se presenta en el apartado siguiente.
[2] Un ejemplo del uso de esta herramienta puede verse en Godino et al. (2008).

problema de proporcionalidad por alumnos de 6º curso de primaria.

Esta contextualización, en un ambiente de formación, en la que se conjugan varias actividades para el estudio y desarrollo del conocimiento del profesor, especialmente del *conocimiento de los estudiantes y el contenido* (KCS)[3] es coherente con el planteamiento de Hill, Ball y Schilling (2008, p. 375), quienes sostienen:

> […] el conocimiento de los estudiantes y el contenido es usado en tareas de enseñanza que involucran atender tanto al contenido específico como a algo particular sobre los aprendices, por ejemplo, cómo los estudiantes aprenden […] los errores y falsas ideas que comúnmente surgen durante este proceso.

2 Marco teórico

2.1 La proporcionalidad y la formación inicial de profesores

De acuerdo con Lesh, Post y Behr (1988, p. 97) el papel del razonamiento proporcional dentro del currículo escolar es esencial: "[…] como fundamento del álgebra y de otros niveles superiores en matemáticas […] como culminación de la aritmética, el número y los conceptos numéricos".

Desde esta perspectiva, se considera el razonamiento proporcional como una habilidad relevante para el trabajo apropiado con las matemáticas del nivel medio y avanzado del currículo escolar. No obstante, algunas investigaciones sostienen que buena parte de las personas no llegan a desarrollar esta forma de razonamiento de manera adecuada (LAMON, 2005; ONUCHIC; ALLEVATO, 2008). En su lugar, la escuela enseña reglas que permiten, de manera mecánica, resolver la mayoría de los tipos de tareas que comúnmente se presentan, tanto en el ámbito educativo, como en el desenvolvimiento social y profesional de las personas. Lamon (2007) señala que el uso de reglas (regla de tres, del producto cruzado etc.) permite evitar la puesta en juego de un razonamiento proporcional, dando lugar a respuestas correctas, pero sin la manifestación de este tipo de razonamiento (WEINBERG, 2002).

De acuerdo con Piaget y colaboradores, el razonamiento proporcional es uno de los ocho esquemas que caracterizan el nivel de desarrollo formal de la persona (INHELDER; PIAGET, 1996). El razonamiento proporcional es

[3] Corresponde al término en inglés *Knowledge Content and Student*

adquirido en el estadio de las operaciones formales, se requiere del uso de un razonamiento hipotético- deductivo, el cual le permite al sujeto utilizar una relación matemática (razón) y, a partir de esta, deducir una segunda relación también matemática (proporción). El razonamiento proporcional es, en consecuencia, una relación entre relaciones.

Asimismo, estos autores reconocen como precursor del razonamiento proporcional el desarrollo de un razonamiento intuitivo, covariacional, de índole cualitativa (BEHR et al., 1992; LAMON, 2007; STREEFLAND, 1985), que debería dirigirse hacia formas más especializadas de conocimiento que pudiera servir de fundamento para el desarrollo del razonamiento proporcional. A la vez, el razonamiento proporcional constituye la base de conocimientos matemáticos más avanzados (proporcionalidad, funciones lineales, trigonometría, geometría, estudios de la pendiente, entre otros). En este sentido, es recomendable distinguir entre lo que es el razonamiento proporcional y la proporcionalidad; al respecto Lamon (2005, p. 3) sostiene:

> La proporcionalidad desempeña un rol en las aplicaciones dominadas por los principios físicos –temas tales como la ventaja mecánica, la fuerza, la óptica, la acústica, solo por mencionar algunos. El razonamiento proporcional, tal como es usado en este libro, es un prerrequisito para comprender contextos y aplicaciones basados en la proporcionalidad.

Desde la perspectiva teórica descrita, observamos la enseñanza de la proporcionalidad como una tarea compleja, que requiere que el profesor pueda ir más allá de la simple aplicación de reglas, y que razone proporcionalmente, además de iniciar una agenda de trabajo dirigida a lograr el desarrollo del razonamiento proporcional en sus alumnos.

En esta línea de ideas, consideramos que una alternativa para abordar esta problemática se encuentra en la formación inicial de profesores. Es conveniente proporcionar a los futuros maestros la formación requerida para que puedan afrontar, con pertinencia, la compleja tarea que les corresponde desempeñar.

Situados en el ámbito de la formación inicial de profesores y el razonamiento proporcional, observamos, de acuerdo con diversos estudios (BEN-CHAIM; ILANY; KERET, 2008; GILBERT; GILBERT, 2009; LO, 2004; PERSON; BERENSON; GREENSPON, 2004; SOWDER et al., 1998; THOMPSON; THOMPSON, 1996), que los profesores en formación inicial, inclusive profesores en servicio, exhiben dificultades para comprender y enseñar los conceptos de razón y proporción. Person, Berenson y Greenspon (2004), en su estudio sobre el rol de los números en la comprensión del razonamiento proporcional, señalan las dificultades exhibidas por futuros profesores de bachillerato, para manejarse fluidamente entre las diferentes interpretaciones dadas a los números en problemas relativos a la proporcionalidad, quedando *atrapados* en el uso de procedimientos basados en fórmulas, casi impedidos para realizar y comprender el razonamiento proporcional involucrado.

Más aún, de acuerdo con el estudio de Thompson y Thompson (1996), no es suficiente comprender el concepto de razón para desarrollar una actividad de enseñanza pertinente sobre ese concepto. Resultados similares, referidos a la insuficiencia del conocimiento del contenido *per se* para lograr una enseñanza efectiva (HILL; BALL, 2004; RIBEIRO, 2009; SOWDER et al., 1998), apoyan la necesidad de desarrollar en los futuros profesores el conocimiento matemático necesario para la enseñanza.

2.2 Herramientas del EOS y conocimiento del profesor

Desde la perspectiva del Enfoque Onto-Semiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS), Godino y colaboradores (Godino, Batanero y Font, 2007) han concebido y diseñado una herramienta de estudio denominada *análisis epistémico*[4], con el fin de identificar los elementos constituyentes y caracterizadores de las configuraciones puestas en juego durante el desarrollo de una práctica matemática. La puesta en práctica de esta herramienta de análisis ha dado lugar a la *Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados* (GROS), la cual comprende la identificación de los diferentes objetos matemáticos (elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, proposiciones, argumentos), en correspondencia con sus respectivos significados, puestos en juego en la resolución de un problema matemático en un contexto instruccional.

Al considerar algunas de las propuestas para el estudio del conocimiento del profesor (GODINO, 2009; HILL; BALL; SCHILLING, 2008; SCHOENFELD; KILPATRICK, 2008), se observa que la herramienta de análisis epistémico referida potencia el desarrollo de tres de los tipos de conocimientos propuestos por Ball y colaboradores (GODINO, 2009), a saber: (1) conocimiento

[4] Una aplicación de esta forma de análisis puede verse en Godino et al. (2008).

común del contenido, esto es, conocimiento puesto en juego para resolver problemas matemáticos, para lo cual un matemático, o incluso un sujeto adulto con suficiente conocimiento, está capacitado; (2) conocimiento especializado del contenido, relacionado con la elección y diseño de situaciones, modos diversos de representación y justificación de los contenidos curriculares; (3) conocimiento del contenido y de los estudiantes, esto es, el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben, o aprenden un contenido matemático específico. Estos tipos de conocimientos se inscriben en la forma de conocimiento denominada como *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (MKT)[5], actualmente promovida por un amplio número de investigadores (ADLER, 2009; BALL et al., 2005; HILL; BALL; SCHILLING, 2008; RIBEIRO, 2009; SILVERMAN; THOMPSON, 2008; PETERSON; WILLIAMS, 2008).

Los efectos del desarrollo del MKT sobre la calidad de la instrucción en educación matemática han sido estudiados por Hill et al. (2008, p. 430), observándose que "[…] hay una asociación significativa, fuerte y positiva entre los niveles de MKT y la calidad de la instrucción matemática". En este orden de ideas, en este documento informamos sobre el desarrollo de tres de los niveles del MKT, en un grupo de maestros en formación inicial, al resolver un problema de proporcionalidad, analizar la resolución y valorar tres tipos de respuestas dadas al problema por alumnos de 6º curso de primaria.

2.3 Niveles del razonamiento proporcional

El problema *Mr. Tall/Mr. Short* (Cuadro 1), diseñado por Karplus (KARPLUS; PETERSON, 1970), es un problema de proporcionalidad, de valor faltante, del tipo "One-by-One (1x1) Category" (HAREL; BEHR, 1989, p. 83), cuyas unidades de medida, aunque diferentes, se encuentran en un mismo espacio de medida, y su índice de dificultad 4, corresponde con la estructura "P(R, i_b, N)" (HAREL; BEHR, 1989, p. 108). Su uso como problema en el presente estudio se ha inspirado en la idea de los niveles de razonamiento proporcional propuesta por Karplus, Adi y Lawson (1980); Karplus, Karplus y Wollman (1972); Khoury (2002) (Cuadro 1). En este sentido, los tres tipos de respuestas analizadas, que fueron dadas al problema por alumnos de 6º grado de primaria, coinciden con la propuesta de estos autores, al hablar de tres de los cuatro niveles del razonamiento proporcional. Una descripción de tales niveles se presenta en Cuadro 1.

[5] Corresponde al término en Inglés *Mathematical Knowledge for Teaching.*

Nivel I (Ilógico)	El estudiante no proporciona explicación, exhibe un cálculo ilógico o una adivinanza, o realiza una estimación general sobre la base de una observación descriptiva...
Nivel A (Aditivo)	El estudiante enfoca las diferencias entre 6 y 4 botones, y luego asume que la misma diferencia debe existir cuando se usan los clips…
Nivel TR (Transicional)	El estudiante usa un enfoque aditivo dirigido a la correspondencia entre las medidas de cada figura… por cada dos botones hay un clip adicional…
Nivel R (Razón)	El estudiante usa una relación de razón constante o hace una comparación multiplicativa de las medidas de ambas figuras…
Problema *Mr. Tall/Mr. Short*: *La altura de señor bajito es 4 botones, mientras la altura de señor alto es 6 botones. Si usamos clips, la medida de señor bajito es de 6 clips. ¿Cuál será la altura de señor alto medida con clips?*	

Cuadro 1. Niveles del razonamiento proporcional en el problema *Mr. Tall/Mr. Short* (KHOURY, 2002, p. 100).

Se debe reconocer que existen muchas otras clasificaciones sobre los tipos de respuestas correctas e incorrectas asociadas a la resolución de problemas de proporcionalidad (BENANDER; CLEMENT, 1985; BERK et al., 2009; HART, 1988; OLIVEIRA, 2009; WEINBERG, 2002). No obstante, para efectos del problema particular aquí considerado, hemos estimado suficiente acogernos a los tres tipos de respuestas identificadas en una muestra de alumnos de 6º de primaria, coincidentes con la propuesta de los autores antes referidos.

3 Metodología

Este trabajo forma parte de un proyecto de investigación dirigido a la concepción de herramientas para el estudio y desarrollo del conocimiento del profesor, en el contexto de la formación inicial de profesores de primaria. La investigación es de carácter cualitativo-descriptivo, del tipo estudio de casos (PONTE, 2006). Su desarrollo contempla tres momentos: (a) resolución de un problema matemático de manera individual y supervisada por un asesor, (b) realización de un análisis de las resoluciones del problema, grupal y sin supervisión, y (c) debate grupal sobre tipos de respuestas del problema con la participación del asesor. Esta metodología se enmarca en la propuesta de una investigación, de corte naturalista (LINCOLN; GUBA, 1985), que involucra un proceso formativo.

3.1 Contexto de investigación y participantes

El contexto de esta investigación es el de la formación inicial de profesores de primaria, enmarcado en la asignatura *Currículo de Matemáticas en Educación Primaria,* correspondiente al segundo año de la carrera de magisterio. Las participantes conforman un grupo de trabajo integrado por cuatro futuras maestras, del segundo curso de magisterio. El primer autor actuó como asesor de este grupo para el desarrollo del trabajo del cual se informa en este artículo. Este grupo participó voluntariamente en el estudio. Los tres tipos de respuestas, dadas al problema considerado, fueron obtenidos a partir de su aplicación a una muestra de 23 alumnos de 6º curso de primaria, de un colegio concertado.

3.2 Recogida de datos: resolución – análisis – valoración de respuestas

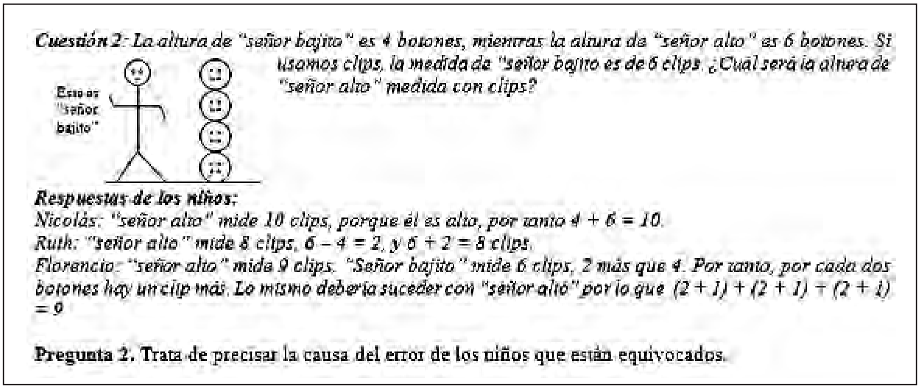
El proceso de recogida de datos involucra información obtenida durante el desarrollo de tres sesiones distintas con el grupo de futuras maestras.

En la primera sesión se resolvió el problema *Mr. Tall/Mr. Short*, de manera individual, por cada maestra en formación inicial, en presencia del asesor. Los protocolos de las resoluciones elaboradas fueron recogidos al finalizar la actividad de resolución. En la segunda sesión, de carácter grupal, se realizó el análisis epistémico del problema y su resolución. Esta parte del trabajo se desarrolló sin ningún tipo de supervisión, el testimonio de su realización quedó plasmado en el protocolo producido y entregado por las participantes. En la tercera sesión se debatió, con la participación del asesor, sobre los análisis de los tres tipos de respuestas dadas al problema por alumnos de 6º curso de primaria. Estas sesiones fueron realizadas fuera de las clases regulares impartidas por el formador.

De manera que, las fuentes de datos fueron: a) las resoluciones del problema, b) el análisis epistémico de la resolución del problema, c) el análisis de tres tipos de respuestas dadas al problema por alumnos de 6º curso de primaria. Además de los protocolos escritos de cada una de estas actividades, se realizó un registro de audio de la tercera sesión.

Luego de resolver el problema (primera sesión), se solicitó a las futuras maestras realizar grupalmente el análisis epistémico correspondiente (segunda sesión). En preparación para esta segunda sesión, las futuras maestras realizaron con anterioridad un análisis similar en el aula de clase, sobre la resolución de otro problema de proporcionalidad, de valor faltante del tipo “One-by-Two (2x1) Category” (HAREL; BERH, 1989, p. 83). Adicionalmente, tuvieron acceso a dos análisis epistémicos: uno de un problema aritmético-algebraico y otro de proporcionalidad de valor faltante, del tipo referido. Estos análisis fueron elaborados por el formador encargado del curso en colaboración con los autores de este documento. Un ejemplo de este tipo de análisis puede verse en Godino et al. (2008). Como recurso de apoyo sobre el razonamiento proporcional, les fue recomendada a las futuras maestras la lectura del trabajo de Khoury (2002).

Para la tercera sesión se les propuso a las futuras maestras la realización de la tarea que se presenta en la Figura 1, constituye la *Cuestión 2* de un conjunto de seis cuestiones que forman parte de un trabajo práctico de la asignatura y curso referidos. En esta sesión se solicitó a las futuras maestras responder a la *Pregunta 2* (Figura 1). La descripción del contexto en el que se solicitó a las futuras maestras la realización de la tarea se observa en la siguiente consigna: *Las siguientes cuestiones corresponden a una prueba realizada por una maestra para evaluar el conocimiento de sus alumnos acerca de las razones y proporciones. Responde las preguntas que se plantean.*



Cuestión 2: La altura de "señor bajito" es 4 botones, mientras la altura de "señor alto" es 6 botones. Si usamos clips, la medida de "señor bajito es de 6 clips. ¿Cuál será la altura de "señor alto" medida con clips?

Esto es "señor bajito"

Respuestas de los niños:
Nicolás: "señor alto" mide 10 clips, porque él es alto, por tanto 4 + 6 = 10.
Ruth: "señor alto" mide 8 clips, 6 – 4 = 2, y 6 + 2 = 8 clips.
Florencio: "señor alto" mida 9 clips. "Señor bajito" mide 6 clips, 2 más que 4. Por tanto, por cada dos botones hay un clip más. Lo mismo debería suceder con "señor alto" por lo que (2 + 1) + (2 + 1) + (2 + 1) = 9

Pregunta 2. Trata de precisar la causa del error de los niños que están equivocados.

Figura 1 - La tarea

Se observa, en la Figura 1, que las respuestas consideradas, dadas por tres alumnos de 6º curso de primaria (Nicolás, Ruth y Florencio), corresponden con los tres primeros niveles del razonamiento proporcional descritos en el Cuadro 1, donde se ha omitido el *Nivel R*. Esta omisión se debe a que las respuestas a ser analizadas fueron elaboradas por alumnos de 6º curso de primaria (11-13 años), para quienes, inicialmente, no es pertinente exigir ese nivel de razonamiento proporcional. Ese nivel de razonamiento podría ser el exhibido por las futuras maestras.

Para facilitar la referencia a las elaboraciones de las participantes utilizaremos una numeración en correspondencia con las soluciones dadas al problema. Así, por ejemplo, designamos a la Futura Maestra número 1, a quien dio la Solución 1 al problema (Figura 2), y la denotaremos por FM-1. De manera que FM-2 denota a la futura maestra que dio la Solución 2 (Figura 2), y así sucesivamente.

4 Resultados

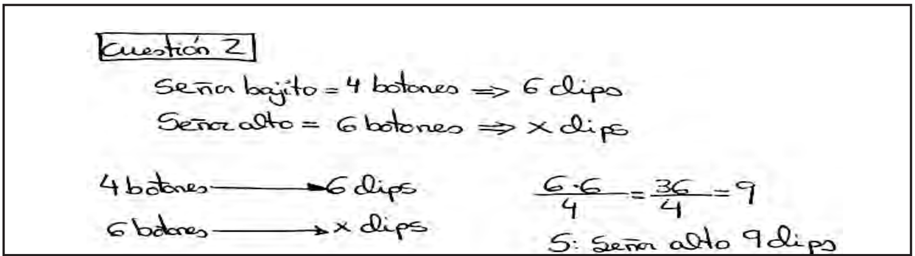
4.1 Tipos de soluciones

En la Figura 2 se muestran los cuatro tipos de respuestas elaboradas por las futuras maestras. En la *Solución 1* se observa un uso correcto de la regla de tres. En la *Solución 2* se observa un uso de la regla de tres en la que se incluyen algunas rectificaciones. En la *Solución 3* se muestra el uso de la ecuación de proporcionalidad (igualdad entre dos razones). En la *Solución 4* se observa un razonamiento de tipo aditivo incorrecto, similar al mostrado por Ruth (Figura 1).

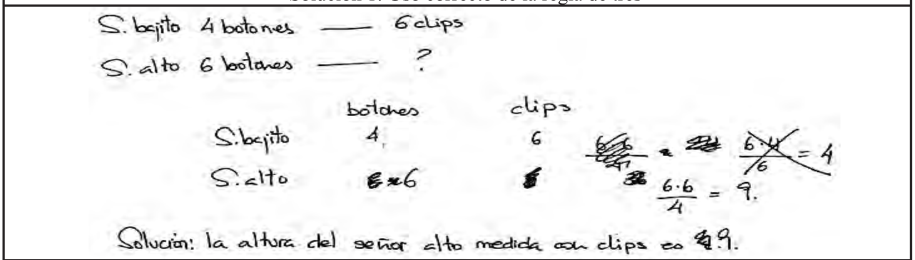
4.2 Análisis epistémico

El análisis epistémico se realiza para desarrollar aspectos relevantes del conocimiento especializado del contenido. Para la realización de este tipo de análisis se pone en juego la Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados (GROS). El resultado del uso de esta herramienta por parte de las futuras maestras puede verse en la Figura 3.

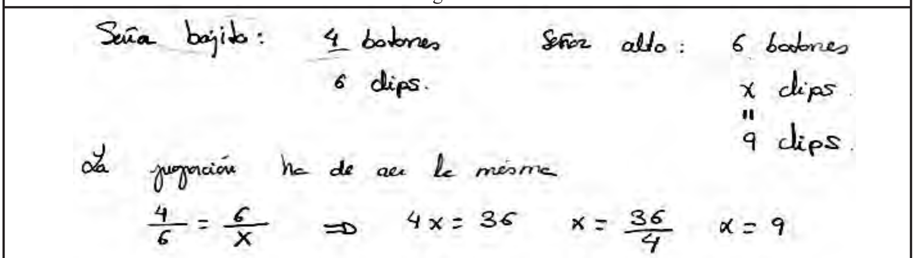
Se observa, en la Figura 3, que las futuras maestras hacen una lista de los diferentes objetos: elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos y proposiciones. Los significados asignados a estos objetos son un tanto limitados. En la identificación que realizan de las *Proposiciones* se observa el reconocimiento de: (a) una relación cualitativa de covariación, relativa a una forma elemental de razonamiento proporcional (BEHR et al., 1992; LAMON, 2007; STREEFLAND, 1985), del tipo “más en A, más en B” (TIROSH; STAVY, 1999, p. 52), al enunciar: *Sr. Alto mide más que Sr. Bajo entonces Sr. alto mide más clips que Sr. bajo* (Figura 3); y (b) la relación *Por cada dos botones hay un clip más […]* (Figura 3), la cual debería conducir al reconocimiento de la razón *2 botones por 3 clips*, o a la comparación multiplicativa entre las alturas respectivas, pero ninguno de estos reconocimientos es exhibido por las futuras maestras.



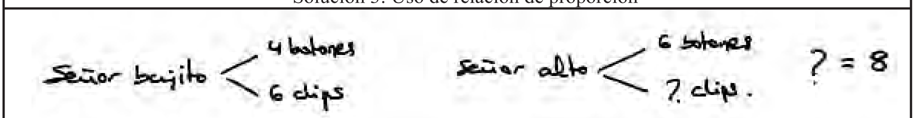
Solución 1: Uso correcto de la regla de tres



Solución 2: Uso de regla de tres con rectificaciones



Solución 3: Uso de relación de proporción



Solución 4: Uso de razonamiento aditivo incorrecto

Figura 2 - Tipos de soluciones

Con respecto al objeto *Argumentos* (Figura 3), las futuras maestras exhiben un intento por explicar la existencia de esa relación (razón) constante, entre los botones y los clips, de las medidas del señor Bajo, para establecer esa misma relación entre las medidas-alturas del señor Alto, al afirmar:

Cuestión 2.

Tipos de objetos	Significados
▪ Elementos Lingüísticos.	
– 4 botones	Elementos de un conjunto cuyo cardinal es 4
– 6 "	" " 6
– 6 clips	" " 6
– "Señor bajito"	
– "Señor alto"	Dos alturas distintas
– ¿Cuál será la altura de "señor alto" medida en clips?	Cuestión a resolver
– Suma	Concepto de suma
– Resta	Concepto de resta
▪ Conceptos.	
– Cantidades	Nº de botones y clips (Sr. Bajito: 4 botones = 6 clips; Sr. alto: 6 botones = ? clips)
– Nº Natural	Cardinal de los conjuntos
– Sumar	Añadir, incrementar...
– Restar	Sustraer, quitar...
– Proporción	Comparación
– Razón	Relación
– Magnitud – altura	Medida de longitud
▪ Procedimientos.	
– Algoritmo de sumar y – Algoritmo de restar	Para hallar la altura del Sr. Alto en clips.
– Proporción	Búsqueda de la razón, la relación.
▪ Proposiciones.	
– "Señor alto" mide 10 clips – "Sr. alto" mide 8 clips – Por cada dos botones hay un clips más, por tanto, "Sr. alto" mide 9 clips. – "Sr. alto" mide más que "Sr. Bajo". Entonces "sr. alto" mide más clips que "Sr. bajo"	} Respuestas al problema
▪ Argumentos.	

– Hay una relación entre Sr. alto y Sr. bajo. Conocemos a lo que equivale la altura de Sr. Bajo en botones y clips. Entre estos dos elementos debe haber una relación, razón, que debe ser la misma entre los botones y clips del Sr. alto.

Figura 3 - Análisis epistémico de las futuras maestras (uso de la GROS)

Hay una relación entre Sr. alto y Sr. bajo. Conocemos a lo que equivale la altura de Sr. Bajo en botones y en clips. Entre estos dos elementos debe haber una relación, razón, que debe ser la misma entre los botones y los clips del Sr. alto. (Figura 3).

No obstante, no llegan a enunciar de manera específica los términos de esa relación, ni los valores de esa razón (2 botones por 3 clips). Esta observación coloca el razonamiento proporcional exhibido por las futuras maestras en el *Nivel TR (Transicional)* (Cuadro 1), puesto que no muestran el reconocimiento de la razón constante o una comparación multiplicativa precisa entre los botones y los clips y, finalmente, una relación (igualdad) entre las razones referidas a las alturas respectivas.

4.3 Valoraciones de las respuestas por parte de las futuras maestras

Los tres tipos de respuestas dadas al problema por alumnos de 6º curso de primaria (Nicolás, Ruth y Florencio, Figura 1), fueron analizadas en un debate por las cuatro futuras maestras, con la participación del asesor. Además de las respuestas de los alumnos, les fue entregado, a las futuras maestras, un folio en el que se describían los diferentes niveles del razonamiento proporcional mostrados en el Cuadro 1. A partir de la *Pregunta 2. Trata de precisar la causa del error de los niños que están equivocados* (Figura 1), las futuras maestras opinaban voluntariamente sobre sus percepciones al respecto. El debate correspondiente fue grabado en audio.

A continuación, se presenta un fragmento de una transcripción del audio del debate en relación con la valoración de la respuesta de Ruth. Como se ha indicado antes, se utilizará FM-1 para designar a la futura maestra quien dio la Solución 1 al problema, FM-2 para la futura maestra que dio la Solución 2, y así sucesivamente. La letra I designa al investigador.

FM-4: Pero entonces no tiene por qué ser proporcional... jum… y en este caso realmente no lo es.
FM-2: Eso lo que te he dicho yo
FM-3: ¿Cómo?
FM-2: Yo no me he planteado eso, yo que me he hecho la regla de tres
FM-1: Yo también he hecho la regla de tres
FM-2: De toda la vida de Dios…
FM-4: Yo he pensado primero y he dicho cuatro aumenta aquí dos… (Inaudible)…

FM-2: Yo lo he hecho automáticamente

I: ¿Automáticamente?

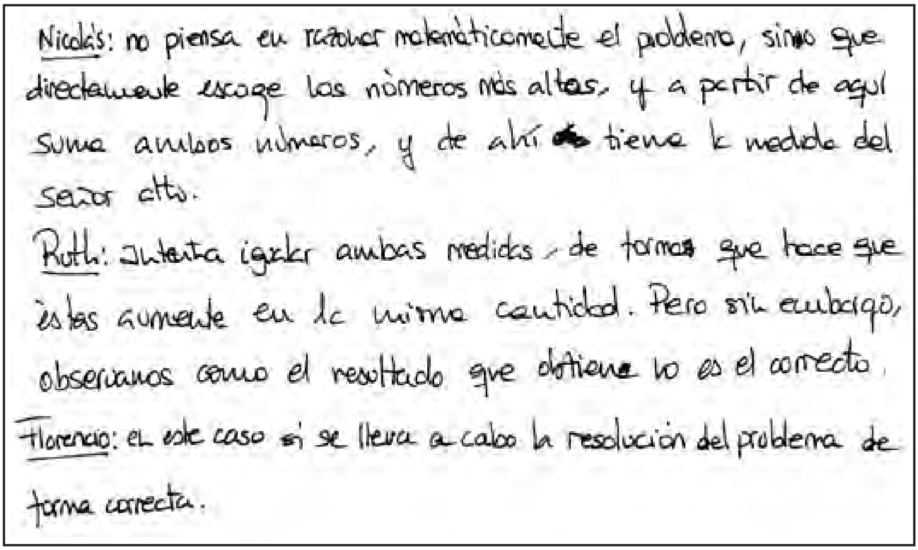
FM-2: Es que me sale

FM-1: Es que debe haber alguna otra forma pero…vamos…

FM-2: Es que yo me lo he planteado cuando ella [FM-4] me lo ha dicho, si no yo no me lo planteo.

Se observa en este fragmento del debate que a las futuras maestras les resulta difícil, inicialmente, comprender y explicar la respuesta dada por Ruth. La FM-4 ha considerado inicialmente que la respuesta dada por Ruth puede ser correcta, pues coincide con la solución que ella dio al problema en una primera oportunidad. Lo cual la lleva a dudar sobre si el problema involucra una situación de proporcionalidad o no. Expone su duda a las demás participantes; dos de ellas (FM-1 y FM-2), apoyadas en la resolución utilizando la regla de tres, simplemente valoran como errónea la respuesta y no estiman necesario hacer otras consideraciones sobre el procedimiento utilizado por Ruth.

A partir del intercambio de opiniones, sobre cada respuesta, cada una de las futuras maestras redactó un texto con el fin de sintetizar el resultado del debate. En este orden de ideas, se presentan en la Figura 4 y Figura 5, dos de las síntesis más representativas, elaboradas por dos de las futuras maestras: FM-2 y FM-3. Las valoraciones de las otras dos futuras maestras están comprendidas en estas dos valoraciones.



Nicolás: no piensa en razonar matemáticamente el problema, sino que directamente escoge los números más altos, y a partir de aquí suma ambos números, y de ahí tiene la medida del señor alto.

Ruth: intenta igualar ambas medidas, de forma que hace que éstas aumente en la misma cantidad. Pero sin embargo, observamos como el resultado que obtiene no es el correcto.

Florencio: en este caso sí se lleva a cabo la resolución del problema de forma correcta.

Figura 4 - Valoración de respuestas de la futura maestra Nº 2 (FM-2)

En relación con las valoraciones realizadas a la respuesta de Nicolás, se observa (Figura 4 y Figura 5) que las futuras maestras se aproximan a la caracterización de esta forma de respuesta de acuerdo con el *Nivel I (Ilógico)* descrito en Cuadro 1. De hecho, la FM-3 cita este nivel del razonamiento proporcional en su valoración (Figura 5).

En las valoraciones dadas a la respuesta de Ruth, se observa que FM-2 parece dar crédito a que el procedimiento utilizado por Ruth podría conducir a un resultado correcto, al afirmar: *Intenta igualar ambas medidas, de forma que hace que éstas aumente en la misma cantidad.* (Figura 4). No parece identificar que tal aumento se basa en un razonamiento aditivo incorrecto, más aún si observamos que su valoración: *Pero sin embargo, observamos cómo el resultado que obtiene no es el correcto,* se basa en que el resultado obtenido por Ruth no es el mismo que ella ha obtenido utilizando la regla de tres.

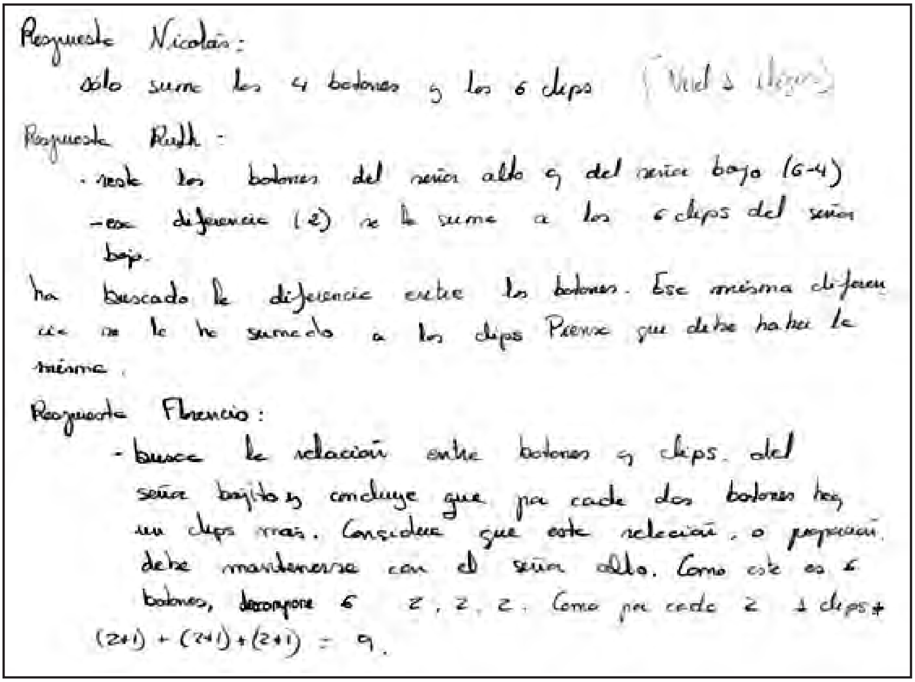

Respuesta Nicolás:
sólo suma los 4 botones y los 6 clips (Nivel 1 ilógico)
Respuesta Ruth:
- resta los botones del señor alto y del señor bajo (6-4)
- esa diferencia (2) se la suma a los 6 clips del señor bajo.
ha buscado la diferencia entre los botones. Esa misma diferencia se la ha sumado a los clips Piensa que debe haber la misma.
Respuesta Florencio:
- busca la relación entre botones y clips del señor bajito y concluye que por cada dos botones hay un clips más. Considera que esta relación, o proporción, debe mantenerse con el señor alto. Como este es 6 botones, descompone 6 2, 2, 2. Como por cada 2 1 clips +
(2+1) + (2+1) + (2+1) = 9.

Figura 5 - Valoración de respuestas de la futura maestra Nº 3 (FM-3)

La FM-3 realiza una valoración diferente de la respuesta de Ruth, al afirmar: *Ha buscado la diferencia entre los botones. Esa misma diferencia se la ha sumado a los clips. Piensa que debe haber la misma.* (Figura 5). Se identifica, en esta valoración, el reconocimiento de que el razonamiento realizado por Ruth se basa en mantener constante la diferencia entre los botones y los clips, lo cual caracteriza el razonamiento aditivo incorrecto del *Nivel A (Aditivo)* (Cuadro 1) del razonamiento proporcional.

En el caso de las valoraciones dadas a la respuesta de Florencio, observamos que la FM-2 emite una valoración elemental, al señalar: *Florencio: en este caso sí se lleva a cabo la resolución del problema de manera correcta.* (Figura 4). Esta valoración está posiblemente basada en la observación del resultado, sin prestar atención al procedimiento de resolución puesto en juego por Florencio.

La valoración de la FM-2 presenta un contraste evidente con la valoración realizada por la FM-3, quien señala que: *Florencio: busca la relación entre botones y clips…concluye que por cada dos botones hay un clip más. Considera que esta relación, o proporción debe mantenerse con el señor alto.* (Figura 5). En esta valoración la FM-3 exhibe comprensión del razonamiento puesto en juego por Florencio y explica cómo él llega al resultado correcto.

5 Discusión

5.1 Sobre las resoluciones y el uso de reglas

Los cuatro tipos de respuestas mostradas en la Figura 2 se pueden reducir a tres tipos: (1) regla de tres, (2) relación de proporción, y (3) razonamiento del tipo *Nivel A (Aditivo)* (Cuadro 1).

Aunque las futuras maestras (FM-1 y FM-2) son capaces de resolver correctamente el problema utilizando reglas, encontramos algunas limitaciones para reconocer los significados de los objetos matemáticos puestos en juego en la resolución. Así, el *conocimiento común del contenido* (uso de reglas), que les permite obtener una solución correcta del problema, poco o nada contribuye al reconocimiento de los significados de los objetos puestos en juego durante el proceso de resolución. Esto coincide con las conclusiones de Mohr (2008, p. 42) quien señala que muchos estudios han revelado que aún cuando los participantes dan ‘respuestas correctas’ estos “[…] carecen de una comprensión de los significados que están detrás de sus procedimientos o soluciones.”

Particularmente, Lamon (2005; 2007); Onuchic y Allevato (2008); Weinberg (2002) señalan que el uso de reglas en la resolución de problemas de proporcionalidad puede dar lugar a respuestas correctas sin que se haya manifestado un razonamiento proporcional. Además, las participantes que resuelven el problema, utilizando la regla de tres, han exhibido dificultades para valorar de manera apropiada las respuestas de los alumnos, lo cual reafirma que el conocimiento de reglas poco o nada contribuye a comprender y explicar las respuestas dadas por los alumnos. Así, el conocimiento común basado en reglas para resolver problemas de proporcionalidad contribuye poco al conocimiento matemático necesario para la enseñanza. Estos resultados cuestionan el uso de reglas para resolver problemas de proporcionalidad en el contexto de formación de futuros maestros.

Con respecto a la solución dada por la FM-3 (relación de proporción, Solución 3, Figura 2) se observa un procedimiento correcto, en el que pareciera poner en juego un razonamiento proporcional del *Nivel R (Razón)* (Cuadro 1), sin embargo no se manifiesta ese nivel de razonamiento en el análisis epistémico respectivo, por lo que la resolución de FM-3 puede deberse a un uso de los elementos de la razón y la proporción que no involucra una comprensión apropiada de tales conceptos.

El uso de frases del tipo - *a* es a *b* como *c* es a *d* -, en algunos casos aprendidas de manera mecánica, conducen a establecer la relación $a/b = c/d$, sin que medie un razonamiento proporcional del Nivel R. No obstante, al observar las valoraciones dadas a los tres tipos de respuestas de los alumnos, se ve que la FM-3 muestra mayor comprensión de los razonamientos puestos en juego en las diferentes respuestas. Tanto el análisis epistémico como las valoraciones de las respuestas revelan dos aspectos: (a) la complejidad del uso de la GROS, antes referida, y (b) la participación de la FM-3 en el grupo fue determinante para el reconocimiento de objetos (propiedades y argumentos) antes referidos. El tipo de resolución empleada, y la revisión del material sugerido para la lectura, hacen que la FM-3 evidencie una disposición favorable hacia la adquisición y desarrollo del conocimiento matemático necesario para la enseñanza.

Es necesario destacar que la observación de las resoluciones dadas al problema por las futuras maestras proporciona una información limitada, pues, a partir de ellas no es posible, por ejemplo, establecer si las participantes son capaces de realizar un razonamiento proporcional del *Nivel R (Razón)* (Cuadro 1), al resolver problemas de proporcionalidad.

5.2 Sobre el análisis epistémico realizado por las futuras maestras

El trabajo en grupo, al aplicar la GROS (Figura 3), ha favorecido el reconocimiento de un conjunto amplio de objetos matemáticos (elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos) puestos en juego en la resolución del problema. Consideramos que identificar estos objetos fomenta el desarrollo del *conocimiento especializado del contenido*. No obstante, el significado asignado a los mismos resulta limitado puesto que se reduce a un parafraseo que poco informa sobre el conocimiento de los objetos identificados por las futuras maestras. Este hecho puede deberse a dos razones, a saber: (a) los tipos de respuestas dadas al problema, dado que se basan en el uso de reglas, imponen serias limitaciones para el análisis correspondiente, y (b) la dificultad asociada al uso de la Guía de Reconocimiento de Objetos y Significados, puesto que tal uso comprende una actividad de reflexión y metacognición, en la que se indaga sobre los significados asignados a los objetos activados durante el proceso de resolución de un problema matemático.

A pesar de estas limitaciones, hemos observado en la identificación de los objetos *Proposiciones* y *Argumentos* (Figura 3) el reconocimiento de aspectos relativos a formas elementales del razonamiento proporcional, hasta el *Nivel TR (Transicional)*, sin mostrarse evidencia de formas más avanzadas del razonamiento proporcional. En su lugar, se observa cierta deficiencia en el uso del concepto de razón, así como, también, ausencia de un conocimiento apropiado de la comparación multiplicativa de las medidas implicadas. Si bien es cierto que resolver el problema no ha exigido ir más allá del nivel del razonamiento proporcional manifestado, también es verdad que no se ha mostrado una asignación apropiada al significado del concepto de razón (Figura 3). En este sentido, el uso de la guía para reconocimiento de objetos y significados proporciona información más precisa sobre el nivel de razonamiento proporcional puesto en juego por las futuras maestras, lo cual no fue posible observar a partir de las meras resoluciones dadas al problema.

Es menester referir que algunos de los reconocimientos efectuados en torno a los objetos *Propiedades* y *Argumentos*, antes mencionados, pueden haber sido influidos por la información contenida en el documento de Khoury (2002), recomendado a las futuras maestras para su lectura, puesto que en ese documento está incluida parte de la información de la tarea (Figura 1). Por lo que el reconocimiento de la relación *por cada dos botones hay un clip más*, la cual es fundamental para comprender y explicar el proceso de resolución, puede provenir del uso de tal información. Una evidencia del uso de esa información se observó en la valoración de las respuestas de los alumnos elaborada por la FM-3, quien hizo uso del texto de ese documento (Figura 5).

En cualquier caso, observamos que la elaboración del análisis epistémico ha servido para dar lugar a un proceso de reflexión, en el que las futuras maestras ponen en juego un conocimiento especializado que busca comprender y explicar la resolución del problema, más allá del uso de reglas, utilizadas inicialmente por ellas. Este análisis ha dado lugar a una actividad en la que las futuras maestras han tenido que cuestionarse sobre los significados en los cuales se ponen en juego los términos razón y proporción, lo cual coloca a las futuras maestras en una situación de producción y reflexión que tiene interés para el profesional encargado de la actividad de enseñanza.

En este orden de ideas, se observa cómo la realización del análisis epistémico procura un conocimiento común avanzado y consolidado del contenido, al motivar procesos de comprensión de la resolución más allá del uso de reglas, al tiempo que fomenta el desarrollo del conocimiento especializado del contenido. Se observa que este tipo de análisis da cuenta de una actividad en la que se trata de profundizar en la comprensión de la resolución del problema y su explicación, siendo esta actividad una labor propia del profesional de la docencia.

Por otro lado, un análisis epistémico experto, en el caso específico del problema considerado, debería dar cuenta del reconocimiento de que la razón se manifiesta como una relación multiplicativa entre número de botones y clips (2 botones/3 clips), referida a dos mediciones de la magnitud altura (señor bajo y señor alto), y la proporción como relación (igualdad) entre dos razones (botones/ clips del señor bajo, botones/clips del señor alto) que se comparan. La resolución de la FM-3 (Solución 3, Figura 2) parece mostrar este uso de la razón y la proporción, sin embargo, en el análisis epistémico no se reconoce tal uso; en las aproximaciones exhibidas en el análisis epistémico realizado por las futuras maestras (Figura 3), no se evidencia el reconocimiento de la proporción como relación entre relaciones (INHELDER; PIAGET, 1996). En este sentido, el análisis epistémico ha favorecido la identificación de cierta deficiencia en el razonamiento proporcional de las futuras maestras.

Finalmente, tal como se ha observado en el análisis epistémico realizado por las futuras maestras (Figura 3), el reconocimiento de las proposiciones y los argumentos posibilita hacer consciente al resolutor de la complejidad subyacente a la resolución del problema, posiblemente ignorada durante la resolución. Este aspecto es otra de las razones que parece apoyar nuestra hipótesis de que la actividad de reconocimiento de objetos y significados potencia el desarrollo del *conocimiento especializado del contenido*.

5.3 Sobre las valoraciones de las respuestas de los alumnos

En relación con los análisis de los tres tipos de respuestas dadas por los alumnos de 6º curso de primaria se observó, en el debate, que la mayoría de las futuras maestras mostraron dificultad para comprender, reconocer y explicar un tipo de respuesta diferente al dado por ellas, incluyendo el caso en que la respuesta es correcta (respuesta dada por Florencio).

Se debe destacar, por ejemplo, en la valoración de la FM-2, el no reconocimiento de la diferencia (entre los botones) y su permanencia (entre los clips), para juzgar la respuesta de Ruth. Su valoración queda restringida al reconocimiento de una covariación (aumento en la misma cantidad) muy general, propio de una forma de pensamiento precursora del razonamiento proporcional, de índole intuitiva-cualitativa (BEHR et al., 1992; LAMON, 2007; STREEFLAND, 1985). Esta forma de pensamiento refuerza el uso de razonamientos aditivos incorrectos, que adolece de la precisión requerida para valorar adecuadamente el razonamiento puesto en juego por Ruth.

Se observa, también, que la mayoría de las futuras maestras se muestran a favor de proponer un único método de resolución que permita resolver todos los problemas de razonamiento proporcional. Estos resultados coinciden con lo señalado por Hines y McMahon (2005, p. 104), quienes señalan:

> Cuando los futuros maestros encuentran métodos usados por sus alumnos que ellos no reconocen o no entienden, tienden a valorarlos como métodos menos avanzados, y se muestran reacios a analizar el pensamiento de los estudiantes, aún cuando los métodos de los alumnos sean apropiados y conduzcan a respuestas correctas. Así, los maestros en formación recomiendan que las estrategias de solución de sus alumnos sean reemplazadas con 'métodos correctos', refiriéndose a los métodos estándar con los cuales están más familiarizados.

Asimismo, se considera que la dificultad para comprender el pensamiento de los niños, exhibida por las maestras, apoya resultados reseñados en la literatura, en los que se afirma que la habilidad para dar respuestas correctas a problemas de proporcionalidad, no necesariamente garantiza que el resolutor sea capaz de razonar proporcionalmente (BERK et al., 2009; HINES; MCMAHON, 2005; MOHR, 2008; ONUCHIC; ALLEVATO, 2008). En este caso, el uso de la regla de tres y el producto cruzado evita que las futuras maestras pongan en juego el concepto de razón y/o razonar sobre la constante de proporcionalidad (LAMON, 2007; WEINBERG, 2002). En términos del estudio de Berk et al. (2009), sería conveniente desarrollar la *flexibilidad*[6] en el uso de procedimientos matemáticos de los futuros maestros, para fomentar la implementación de procedimientos diferentes al uso de reglas para la resolución de problemas de proporcionalidad.

Aún cuando, inicialmente, la tarea de análisis de las respuestas de los alumnos de 6º curso de primaria resultó limitada, observamos que la asignación de la lectura del documento de Khoury (2002), el reconocimiento de objetos y significados realizados con la GROS y la metodología de debate desarrollada, favorecieron posteriormente el reconocimiento y la profundización en aspectos específicos de la razón y proporción, involucrados en las respuestas de Ruth y Florencio. Esto se reflejó en las valoraciones de las respuestas elaboradas por la FM-3 (Figura 5), en las cuales, esta futura maestra muestra que comprende tanto el razonamiento aditivo (erróneo) puesto en juego por Ruth, como la manifestación de un razonamiento proporcional del *Nivel TR (Transicional)* en la respuesta de Florencio.

Esta comprensión evidencia el desarrollo del *conocimiento de los estudiantes y el contenido*, logrado por medio de la realización de una tarea, en la que se solicita a la futura maestra valorar tres tipos de respuestas dadas por alumnos a un problema de proporcionalidad. Habiendo sido precedida esta tarea por la resolución del problema en cuestión y su análisis epistémico respectivo. Una de las manifestaciones particulares del desarrollo de este tipo de conocimiento lo observamos en la comprensión de la respuesta de Ruth, quien pone en juego un razonamiento de tipo aditivo incorrecto en la resolución del problema. Este tipo de razonamiento ha sido ampliamente estudiado (Oliveira, 2009), es considerado un tipo de error muy frecuente y de mucho interés en el estudio de la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad.

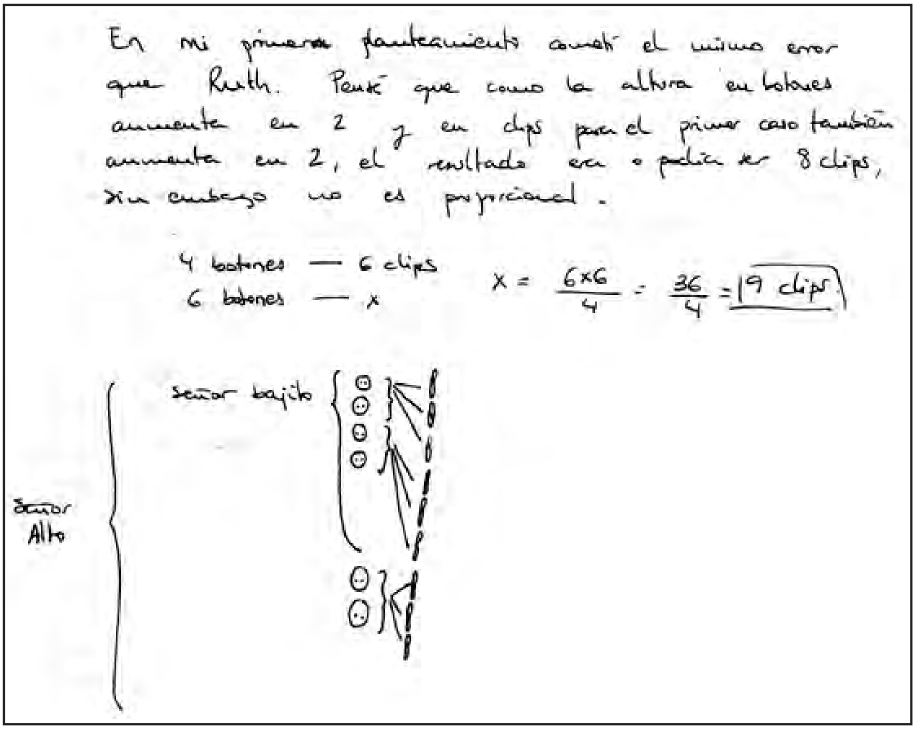
6 Implicaciones para la formación de profesores

Uno de los aspectos reseñados en la literatura, como relevante para la concepción y desarrollo de una actividad de enseñanza, es diseñar situaciones retadoras para los alumnos (POTARI; JAWORSKI, 2002; PONTE, 2007). En este sentido, las actividades de aplicación de la GROS y el análisis de las respuestas dadas por alumnos de 6º curso de primaria a un problema no son

[6] Según Berk et al. (2009), la flexibilidad refiere a la competencia de resolver una misma tarea mediante diversas estrategias.

actividades comunes y constituyeron retos para las participantes.

Una manifestación observable del proceso desencadenado por estas situaciones de reto fue exhibida en una reflexión final realizada por una de las futuras maestras, quien se enfrentó a una respuesta incorrecta similar a la dada por ella; intentó corroborarla mediante el uso de la regla de tres. Sus soluciones, obtenidas mediante dos estrategias diferentes, no coincidían. La maestra reflexionó y conjeturó que el problema podría no ser de razonamiento proporcional, como se observa en la afirmación: *[…] sin embargo no es proporcional*, mostrada en la Figura 6, considera que la solución, incorrecta, obtenida inicialmente no se corresponde con una situación de proporcionalidad, produciéndose un *desequilibrio cognitivo*.



En mi primer planteamiento cometí el mismo error que Ruth. Pensé que como la altura en botones aumenta en 2 y en clips para el primer caso también aumenta en 2, el resultado era o podría ser 8 clips, sin embargo no es proporcional.

4 botones — 6 clips
6 botones — x

$x = \frac{6 \times 6}{4} = \frac{36}{4} = 9$ clips

Figura 6 - Reflexión final de una de las futuras maestras

En términos de la teoría piagetiana del aprendizaje, el equilibrio cognitivo fue alcanzado al observar la respuesta dada por Florencio, en la que el alumno usa un enfoque aditivo correcto (Nivel TR –Transicional– del razonamiento proporcional) dirigido a la correspondencia entre las medidas de cada figura: por cada dos botones hay un clip adicional. Este enfoque aditivo del Nivel TR, guarda cierta similitud con el procedimiento puesto en juego por ella, pero se diferencia en el carácter *relativo* que sustenta la resolución de Florencio, versus el carácter *absoluto* que sustenta la resolución dada por Ruth (LAMON, 2005).

Se observa, además, en la reflexión de la futura maestra (Figura 6), diversos aspectos que informan sobre la manifestación de un desarrollo del conocimiento matemático necesario para la enseñanza. En efecto, como primer aspecto se observa la adquisición de un *conocimiento común del contenido*: al darse cuenta que ha dado una respuesta incorrecta al problema, compara su resultado con el obtenido por medio de la aplicación de la regla de tres, observa la discrepancia entre los resultados. Concluye, reconociendo que considerar las diferencias (manifestación de un razonamiento aditivo, similar al mostrado por Ruth, Figura 1 y aplicado por ella Figura 2) produce un error, por lo que renuncia a esa forma de resolución.

Como segundo aspecto, se observa un desarrollo de un *conocimiento especializado*: al reconocer en la respuesta de Florencio una forma alternativa de resolución del problema, en la que se pone en juego el uso de un razonamiento proporcional transicional correcto, prescindiendo del uso de la regla. Un tercer aspecto, relativo al *conocimiento de los estudiantes y el contenido*: al reconocer en la respuesta de Florencio una forma de pensamiento del alumno relativa al razonamiento proporcional.

Finalmente, un cuarto aspecto relativo al desarrollo del *conocimiento de la enseñanza y el contenido*: al proponer una respuesta al problema considerando la forma de pensamiento del alumno, identificada en la respuesta de Florencio, haciendo uso de representaciones gráficas, dirigida a explicar cómo se pone en juego ese razonamiento proporcional (Figura 6). Este tipo de conocimiento constituye otro de los dominios del conocimiento matemático necesario para la enseñanza, propuesto por Ball y colaboradores (BALL et al., 2005).

El proceso evidenciado por la futura maestra describe una trayectoria, que, de acuerdo con Brown y Borko (1992, p. 221) constituye uno de los aspectos más difíciles de aprender a enseñar, al respecto estos autores señalan: "[…] uno de los aspectos más difíciles de aprender a enseñar es efectuar la transición desde una orientación personal hacia una orientación disciplinar para pensar sobre cómo organizar y representar el contenido disciplinar para facilitar su comprensión por el alumno".

7 Conclusiones

A modo de conclusión, consideramos que el desarrollo de esta investigación nos ha permitido observar que el uso de la GROS, por parte de las futuras maestras, en lo concerniente al reconocimiento de los significados de los objetos (elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos), constituye una actividad compleja a la que no están habituadas. No obstante, el reconocimiento de los objetos identificados permitió: (a) a las futuras maestras, reconocer *Proposiciones* y elaborar *Argumentos* que trascienden la aplicación de reglas en la resolución de problemas de proporcionalidad, y (b) a los investigadores, observar conductas que informan sobre el nivel de razonamiento proporcional puesto en juego por las futuras maestras al analizar la resolución de un problema de proporcionalidad.

En este orden de ideas, consideramos que la actividad de reconocimiento de la red de objetos y significados, puestos en juego en la resolución de un problema matemático, forma parte del *conocimiento especializado del contenido* necesario para la enseñanza de la matemática.

El análisis de tres respuestas (erróneas o correctas), dadas a un problema matemático por alumnos de 6º curso de primaria, coloca a los futuros profesores en una situación rica de aprendizaje, en la que adquiere relevancia el reconocimiento de errores asociados al uso de un razonamiento aditivo. La sola resolución del problema por parte de los profesores parece no ser suficiente para gestionar la promoción del razonamiento proporcional de los niños.

Las actividades instruccionales desarrolladas, de las cuales informamos en este documento, han permitido evidenciar que su puesta en juego fomentan el desarrollo de varios de los tipos de conocimiento necesario para la enseñanza, entre los que se han reconocido: el *conocimiento común del contenido*, el *conocimiento especializado del contenido*, el *conocimiento de los estudiantes y el contenido*, y el *conocimiento de la enseñanza y el contenido* (BALL et al., 2005).

Uno de los aspectos de mayor interés para la formación de profesores es la manifestación observada en el crecimiento exhibido por una de las futuras maestras (Figura 6). La actividad desarrollada permitió a esta futura maestra evolucionar en varios sentidos: a) epistémico, al pasar de estados de menor conocimiento a estados de mayor conocimiento, b) competencia matemática, al resolver correctamente el problema, y c) didáctico, al proponer una solución al problema vinculada con las posibilidades de razonamiento de los alumnos.

Finalmente, de acuerdo con Steele (2005, p. 292), “El reto enfrentado por los formadores de maestros es asegurarse que tanto los futuros maestros como los maestros en ejercicio tengan niveles apropiados de conocimiento para la enseñanza de la matemática". Por lo que corresponde asumir el reto e impulsar el desarrollo de procesos formativos de profesores que involucren actividades similares a las presentadas en este documento.

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación, EDU2010-14947. Ministerio de Ciencia e Innovación (MCINN), España.

Referencias

ADLER, J. A methodology for studying mathematics for teaching. **Recherches en Didactique des Mathématiques,** Grenoble, v. 29, n. 1, p. 33 - 58. 2009.

BALL, D. L. et al. **A theory of mathematical knowledge for teaching**.Paper presented at the Fifteenth ICMI Study: The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics, p. 15 - 21. Rio Claro: Universidade Estadual Paulista/ UNESP, 2005. Disponible en: <http://stwww.weizmann.ac.il/G-math/ICMI/log_in.html>. Acceso en: 1 dic. 2008.

BEHR, M. et al. Rational number, ratio and proportion. In: GROUWS, D. A. (Ed.). **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.** New York: Macmillan, 1992. p. 296 - 333.

BENANDER, L.; CLEMENT, J. **Catalogue of error patterns observed in courses on basic mathematic**. New York: Working Draft, Exxon Education Foundation, 1985. Reporte ERIC, 287 - 672. Disponible en: <http://eric.ed.gov/PDFS/ED287672.pdf >. Acceso en: 12 nov. 2008.

BEN-CHAIM, D.; ILANY, B.; KERET, Y. "Atividades investigativas autênticas" para o ensino de razão e proporção na formação de professores de matemática para os níveis elementar e médio. **Bolema,** Rio Claro (SP), v. 21, n. 31, p. 125 - 159, 2008. Disponible en: < http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/issue/view/756>. Acceso en: 12 jul. 2010.

BERK, D. et al. Developing prospective elementary teachers' flexibility in the domain of proportional reasoning. **Mathematical Thinking and Learning,** Australia, v. 11, n. 3, p. 113 - 135, jul. 2009.

BROWN, C. A.; BORKO, H. Becoming a mathematics teacher. In: GROUWS, D. A. (Ed.). **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.** New York: Macmillan, 1992, p. 209-239.

GILBERT, M.; GILBERT, B. Defining and developing content knowledge for teaching. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 33th, 2009, Thessaloniki, Greece. **Proceedings**… Thessaloniki: PME, 2009, v. 3, p. 73 - 80.

GODINO, J. D. Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. **Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática,** Buenos Aires, v. n/c. n. 20, p. 13 - 31, dic. 2009. Disponible en: <http://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino%20Union_020%202009.pdf>. Acceso en: 13 marzo 2012.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. **ZDM. The International Journal on Mathematics Education,** Berlin, v. 39 n. 1 - 2, p. 127 - 135, Mar. 2007.

GODINO, J. D. et al. Epistemic and cognitive analysis of an arithmetic-algebraic problem solution. In: ICME 11th, 2008, México. **Topic Study Group 27, Mathematical Knowledge for Teaching**. Mexico, Monterrey, 2008, p. 1 - 8. Disponible en: <http://tsg.icme11.org/document/get/391>. Acceso en: 10 nov. 2008.

HAREL, G.; BEHR, M. Structure and hierarchy of missing value proportion problems and their representation. **Journal of Mathematical Behavior,** Norwood, New Yersey, v. 8, n. 1, p. 77 - 119, Mar. 1989.

HART, K. M. Ratio and proportion. In: HART, K. M. (Ed.), **Children's understanding of mathematics:** 11 - 16. London: John Murray, 1988. p. 88 - 101.

HILL, H.; BALL, D. L. Learning mathematics for teaching: Results from California's mathematics professional development institutes. **Journal for Research in Mathematics Education,** Reston, VA, v. 35, n. 5, p. 330 - 351, Nov. 2004.

HILL, H. C.; BALL, D. L.; SCHILLING, S. G. Unpacking pedagogical content knowledge: conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. **Journal for Research in Mathematics Education,** Reston VA, v. 39, n. 4, p. 372 - 400, July 2008.

HILL, H. C. et al. Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: an exploratory study. **Cognition and Instruction,** Mahwah, New Jersey, v. 26, n. 4, p. 430 - 511, July 2008.

HINES, E.; MCMAHON, M. T. Interpreting middle school students' proportional reasoning strategies: observations from preservice teachers. **School Science and Mathematics,** Columbus, Ohio, v. 105, n. 2, p. 88 - 105, Feb. 2005.

INHELDER, B.; PIAGET, J. **De la lógica del niño a la lógica del adolescente: ensayo sobre la construcción de las estructuras operatorias formales**. Barcelona: Paidós, 1996.

KARPLUS, R.; ADI, H.; LAWSON, A. Intellectual development beyond elementary school VII1: proportional, probabilistic, and correlational reasoning. **School Science and Mathematics,** Indiana, Pennsylvania, v. 80, n. 8, p. 673 - 683, Dec. 1980.

KARPLUS, E.; KARPLUS, R.; WOLLMAN, W. Intellectual development beyond elementary school 11: ratio, a survey. **School Science and Mathematics,** Indiana, Pennsylvania, v. 70, n. 9, p. 813 - 820, Dec. 1970.

KARPLUS, R.; PETERSON, R. W. Intellectual development beyond elementary school IV: ratio, the influence of cognitive style. **School Science and Mathematics,** Menasha, Wisconsin, v. 74, n. 6, p. 476 - 482, Oct. 1974.

KHOURY, H. A. Classroom challenge. exploring proportional reasoning: Mr. Tall/Mr. short. In: B. LITWILLER; G. BRIGHT (Eds.). **Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 yearbook.** Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics, 2002. p. 100 - 102.

KOTSOPOULOS, D.; LAVIGNE, S. Examining "mathematics for teaching" through an analysis of teachers' perceptions of student "learning paths". **International Electronic Journal of Mathematics Education,** Ankara, Turkía, v. 3, n. 1, Feb. 2008. Disponible en: < http://www.iejme.com/012008/d1.pdf >. Acceso en: 10 sept. 2009.

LAMON, S.J. **Teaching fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers.** Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 2005.

LAMON, S. J. Rational numbers and proportional reasoning: toward a theoretical framework for research. In: LESTER, F. K. (Ed.). **Second handbook of research on mathematics teaching and learning.** Charlotte, NC: Information Age Publishing, 2007, v.1, p. 629 - 667.

LESH, R.; POST, T.; BEHR, M. Proportional reasoning. In: BEHR, M. ; HIEBERT, J. (Eds.). **Number concepts and operations for the middle grades.** Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum, 1988. p. 93 - 118.

LINCOLN, Y. S.; GUBA, E. **Naturalistic Inquiry**. Beverly Hills, California: Sage Publications, 1985

LO, J-J. Prospective elementary school teachers' solution strategies and reasoning for a missing value proportion task. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 28th, 2004, Bergen, Norway. **Proceedings**... Bergen: PME, 2004, v. 3, p. 265 - 272.

MOHR, M. J. Mathematics knowledge for teaching: the case of preservice teachers. In: KULM, G. (Ed.). **Teacher knowledge and practice in middle grades mathematics**. Rotterdam: Sense Publishers, 2008. p. 19 - 43.

NATIONAL COUNCIL TEACHER MATHEMATICS. **Principles and Standards for School Mathematics.** Reston, VA: NCTM, 2000.

OLIVEIRA, I. Proporcionalidade: estratégias utilizadas na resolução de problemas por alunos do ensino fundamental no Quebec. **Bolema,** Rio Claro (SP), v. 22, n. 34, p. 57 - 80. 2009. Disponible en: < http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/issue/view/802>. Acceso en: 8 abr. 2010.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. As diferentes "personalidades" do número racional trabalhadas através da resolução de problemas. **Bolema,** Rio Claro, SP, v. 21, n. 31, p. 79 - 102. 2008. Disponible en: < http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/issue/view/756 > Acceso en: 12 jul. 2010.

PERSON, A.; BERENSON, S.; GREENSPON, P. The role of number in proportional reasoning: a prospective teacher's understanding. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 28th, 2004, Bergen, Norway. **Proceedings**... Bergen: PME, 2004, v. 4, p. 17 - 24.

PETERSON, B. E.; WILLIAMS, S. R. Learning mathematics for teaching in student teacher experience: two contrasting cases. **Journal of Mathematics Teacher Education,** Dordrecht, Netherland, v. 11, n. 6, p. 459 - 478, Nov. 2008.

PONTE, J. P. Estudos de caso em educação matemática. **Bolema,** Rio Claro (SP), v. 19, n. 25, p. 1-23, 2006. Disponible en: < http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1880/1657>. Acceso en: 5 dic. 2009.

PONTE, J. P. Investigations and explorations in the mathematics classroom. **ZDM. The International Journal on Mathematics Education,** Berlin, v. 39 n. 5 - 6, p. 419 - 430, Oct. 2007.

POTARI, D.; JAWORSKI, B. Tackling complexity in mathematics teaching development: Using the Teaching Triad as a tool for reflection and analysis. **Journal of Mathematics Teacher Education,** Dordrecht, Netherland, v. 5, n. 4, p. 351 - 380, Dec. 2002.

RIBEIRO, C. M. Conhecimento matemático para ensinar: uma experiência de formação de professores no caso da multiplicação de decimais. **Bolema,** Rio Claro, SP, v. 22, n. 34, p. 1 - 26. 2009. Disponible en: < http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/issue/view/802>. Acceso en: 8 abr. 2010.

SCHOENFELD, A. H.; KILPATRICK, J. Towards a theory of proficiency in teaching mathematics. In: TIROSH, D.; WOOD, T. (Eds.). **Tools and Processes in Mathematics Teacher Education.** Rotterdam: Sense Publishers, 2008. p. 321 - 354.

SHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational Researcher,** Washington, v. 15, n. 2, p. 2 - 14, Feb. 1986.

SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: Foundation of the new reform. **Harvard Educational Review,** Harvard, v. 57, n. 1, p. 1 - 22, Feb. 1987.

SILVERMAN, J.; THOMPSON, P. W. Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. **Journal of Mathematics Teacher Education,** Dordrecht, Netherland, v.11, n. 6, p. 499 - 511, Nov. 2008.

SOWDER, J. et al. Educating teachers to teach multiplicative structures in the middle grades. **Journal of Mathematics Teacher Education,** Dordrecht, Netherland, v.1, n. 2, p. 127 - 155, May 1998.

STEELE, M. D. Comparing knowledge bases and reasoning structures in discussions of mathematics and pedagogy. **Journal of Mathematics Teacher Education,** Dordrecht, Netherland, v. 8, n. 4, p. 291 - 328, Aug. 2005.

STREEFLAND, L. Search for roots of ratio: some thoughts on the long term learning process (towards… a theory) part II: the outline of the long term learning process. **Educational Studies in Mathematics,** Dordrecht, Netherland, v. 16, n. 1, p. 75 - 94, Feb. 1985.

THOMPSON, A. G.; THOMPSON, P. W. Talking about rates conceptually, part II: mathematical knowledge for teaching. **Journal for Research in Mathematics Education,** Reston, VA, v. 27, n. 1, p. 2 - 24, Jan. 1996.

TIROSH, D.; STAVY, R. Intuitive rules: a way to explain and predict students' reasoning. **Educational Studies in Mathematics,** Dordrecht, Netherland, v. 38, n. 1-3, p. 51 - 66, Mar. 1999.

WEINBERG, S. L. Proportional reasoning: one problem, many solutions!. In: LITWILLER, B.; BRIGHT, G. (Eds.). **Making sense of fractions, ratios, and proportions:** 2002 yearbook. Reston, VA.: NCTM, 2002. p. 138 - 144.

Submetido em Dezembro de 2010.
Aprovado em Junho de 2011.