EVALUACIÓN DE LA FACETA EPISTÉMICA DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO – MATEMÁTICO DE FUTUROS PROFESORES DE BACHILLERATO SOBRE LA DERIVADA

Luis R. Pino-Fan

Tesis Doctoral

Directores: Juan D. Godino y Vicenç Font

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

2013

RESUMEN

El estudio sobre los conocimientos que debe tener un profesor de matemáticas para que su enseñanza sea efectiva ha ido tomando un creciente interés en los últimos años. Sin embargo, son pocas las investigaciones orientadas al diseño de instrumentos que permitan explorar y caracterizar el conocimiento didáctico-matemático de los profesores sobre tópicos específicos. En esta investigación se informa de los resultados obtenidos mediante la aplicación de un cuestionario que se ha diseñado teniendo en cuenta un modelo específico del "Conocimiento Didáctico-Matemático". De manera específica se aborda la evaluación de la faceta epistémica de dicho conocimiento sobre la derivada en una muestra de futuros profesores de matemáticas de Bachillerato en México.

Para lograr el objetivo central de la investigación el estudio se llevó a cabo en cuatro fases: 1) Mediante un estudio sistemático de tipo histórico-epistemológico-didáctico se elabora una conceptualización de los significados de la derivada; 2) Diseño del cuestionario *CDM-Derivada*, teniendo en cuenta los significados de la derivada y criterios aportados por las investigaciones sobre Didáctica del Cálculo, así como sobre formación de profesores de matemáticas; 3) La aplicación piloto del cuestionario a una muestra de 53 futuros profesores de bachillerato en México y el diseño del cuestionario definitivo a partir de los resultados obtenidos en la primera fase; también se tienen en cuenta los resultados del estudio de triangulación mediante juicio de expertos al que se sometió el cuestionario; y 4) Aplicación del cuestionario definitivo a una muestra de 49 futuros profesores de bachillerato en México. En la cuarta fase se realizaron entrevistas clínicas a una muestra de 15 estudiantes para profundizar en la caracterización de las configuraciones cognitivas sobre la derivada.

Los resultados de nuestra investigación aportan nuevos conocimientos respecto a la caracterización de los conocimientos que los futuros profesores deberían tener para gestionar idóneamente los aprendizajes sobre la derivada de sus futuros estudiantes. Además, proporcionan pautas y criterios que permiten el diseño de metodologías didácticas para desarrollar y/o potenciar el conocimiento especializado sobre la derivada.

ABSTRACT

The study on the knowledge that a mathematics teacher should master for his/her teaching to be effective has taken an increasing interest in recent years. However, there are very few researches focused on the design of instruments to explore and characterize aspects of the teachers' didactic-mathematical knowledge on specific topics. In this research we present results obtained by means of the application of a questionnaire that we have designed, based on a "didactic-mathematical knowledge" model that allows assessing and developing such knowledge, to explore some relevant aspects of the didactic-mathematical knowledge about the derivative in a sample of prospective high school mathematics teachers in México.

In order to achieve the core research objective, this study was carried out in four phases: 1) Through a historical-epistemological-didactic and systematic study a conceptualization of the meanings of the derivative is elaborated; 2) Design of the *CDM-Derivative Questionnaire*, considering the meanings of the derivative and the criteria provided by researches on Didactic of Calculus as well as about the education of mathematics teachers; 3) The pilot application of the questionnaire to a sample of 53 future teachers of high school in Mexico and the design of the definitive questionnaire from the results obtained in the first phase; it also takes into account the results of triangulation by expert judgment to which the questionnaire was submitted; and 4) Implementation of the final questionnaire to a sample of 49 future teachers of high school in Mexico. In the fourth phase clinical interviews were conducted to a sample of 15 students to deepen in characterizing the cognitive configurations on the derivative.

The results of our research provide new insights regarding the characterization of the knowledge that prospective teachers should have to suitably manage the learning about the derivative of his/her prospective students. Furthermore, these results provide guidelines and criteria that allow the design of didactic methodologies to develop or enhance the specialized content knowledge on the derivative.

ÍNDICE

CAPÍTULO 3

CAPÍTULO 4

CAPÍTULO 5

CONSTRUCCIÓN DE UN INSTRUMENTO PARA EVALUAR LA FACETA EPISTÉMICA DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO SOBRE LA DERIVADA 165

CAPÍTULO 7

"Hasta lo más difícil se puede decir de manera simple, pero es difícil. Hasta lo más simple se puede decir de forma difícil, y es fácil."

Soya

INTRODUCCIÓN GENERAL

Desde hace aproximadamente 30 años, el estudio de los conocimientos que un profesor debería tener para la enseñanza idónea de tópicos concretos de matemáticas, ha ido tomando cada vez más interés tanto para la comunidad de investigadores en Didáctica de la Matemática interesados por la formación de profesores, como para las administraciones educativas. La principal razón es que el desarrollo del pensamiento y competencias matemáticas de los estudiantes dependen esencialmente de los conocimientos, competencias, habilidades, etc.,, de sus profesores.

Una de las problemáticas que ha generado gran interés, por parte de la comunidad de investigación sobre formación de profesores, es la identificación del conocimiento didáctico-matemático requerido por los profesores para la enseñanza de las matemáticas. Al respecto, una gran cantidad de investigaciones han sido orientadas a la identificación de los componentes del complejo de conocimientos que un profesor debería tener con el fin de desarrollar eficientemente su práctica y así, facilitar el aprendizaje de sus estudiantes (Shulman, 1986; Ball, 2000; Hill, Ball y Schilling, 2008; Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005; Godino, 2009; etc.). Como resultado de dichas investigaciones se han propuesto diversos modelos del conocimiento del profesor que tratan de describir el complejo de conocimientos que estos requieren para la enseñanza de las matemáticas. En particular, el modelo conocido como "MKT" (Mathematical Knowledge for Teaching), en la actualidad, ha cobrado relevancia dentro de las investigaciones sobre el conocimiento del profesor. Sin embargo, a pesar de que dicho modelo, MKT, resulta ser un avance significativo en la caracterización de los conocimientos que debe tener un profesor para la enseñanza de las matemáticas, aún quedan cuestiones importantes que siguen abiertas, por ejemplo, ¿De qué forma o bajo que criterios se puede evaluar o medir los diversos componentes del MKT? ¿Cómo se puede ayudar a los profesores a adquirir o desarrollar los distintos componentes del MKT? ¿Cómo se relacionan entre sí los distintos componentes del MKT?

En este sentido, el interés de este trabajo de investigación es avanzar en la caracterización de los conocimientos que requieren futuros profesores de bachillerato para la enseñanza idónea de la *derivada,* considerada una de las nociones clave del *Cálculo*. Esta noción, la derivada, ha sido objeto de especial atención desde distintas aproximaciones teóricas, particularmente las cuestiones de índole cognitiva (concepciones de los estudiantes, esquemas cognitivos y tipos de errores) e instruccionales (estrategias y alternativas para la enseñanza de la derivada), tal y como se muestra en Artigue, Batanero y Kent (2007) o en Sánchez, García y Llinares (2008). Esta gran cantidad de resultados de la investigación didáctica sobre la derivada, plantea un reto a los formadores de profesores que sintetizamos con la pregunta: ¿Qué es lo que debería conocer un profesor para que su enseñanza de las derivadas tenga la mayor idoneidad didáctica posible?

Así, en el presente trabajo de investigación nos hemos propuesto avanzar en la caracterización de aquellos conocimientos que los futuros profesores deberían tener para gestionar idóneamente los aprendizajes sobre la derivada de sus futuros estudiantes, contraponiendo "lo que deberían conocer" con los conocimientos que efectivamente tienen sobre la derivada. El objetivo consiste en establecer pautas que nos ayuden a responder aunque sea parcialmente la pregunta enunciada anteriormente y de ese modo tener criterios para diseñar acciones formativas o metodologías didácticas que permitan la mejora de la formación de profesores mediante el desarrollo y/o la potenciación del conocimiento didáctico-matemático requerido para la enseñanza de la derivada.

El trabajo que a continuación se presenta, se encuentra estructurado en siete capítulos, a través de los cuales se va consiguiendo gradualmente el fin último de esta investigación. En el Capítulo 1, antecedentes, hemos realizado un recorrido por las investigaciones sobre los modelos del conocimiento del profesor, y por la amplia literatura sobre la problemática que subyace a la enseñanza y aprendizaje de la derivada. En este primer capítulo nos fue posible plantear una aproximación a las preguntas de investigación que guiarán el rumbo de nuestro estudio. En el Capítulo 2, se recogen las nociones teóricas y metodológicas que utilizamos a lo largo de nuestro estudio, principalmente el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). Una vez presentadas dichas nociones, y contando con los planteamientos metodológicos indispensables para el entendimiento de nuestro objetivo general, planteamos las preguntas y objetivos de esta investigación.

El Capítulo 3, versa sobre la caracterización del significado global de la derivada, problemática para la cual el EOS proporciona herramientas teóricas pertinentes, en particular la noción de configuración epistémica de objetos y procesos matemáticos. Una pregunta que surge de manera natural, si lo que queremos es estudiar el conocimiento de los profesores sobre la derivada, es ¿qué es la derivada? Así, en este capítulo, realizamos un estudio histórico-epistemológico a través del cual identificamos las problemáticas más relevantes que dieron paso al surgimiento y evolución de la noción derivada. A partir de dichas problemáticas, nos fue posible identificar los significados parciales de la derivada que constituyen el holosignificado de esta noción.

Un recurso potente para los futuros profesores, respecto de su práctica futura, son los libros de texto y los planes de estudio sobre la derivada y nociones asociadas que se tienen como parte del currículo de matemáticas de bachillerato. Cuando estos futuros profesores terminen sus estudios y se inserten en alguna institución educativa de bachillerato, ¿cuáles son los significados de la derivada que, como parte de la institución, pretenderán gestionar en sus estudiantes? ¿estos significados de la derivada pretendidos por los libros de texto y los planes de estudio, son representativos del significado global de dicha noción? En el Capítulo 4 respondemos a estas cuestiones.

En el Capítulo 5, diseñamos un instrumento para explorar aspectos relevantes del conocimiento didáctico-matemático de los futuros profesores sobre la derivada. En el diseño consideramos los resultados de los capítulos anteriores y los aportes que se han realizados desde el campo de investigación sobre Didáctica del Cálculo. Así mismo se presentan los resultados obtenidos en un primer estudio (aplicación piloto del instrumento) que proporcionan pautas para el establecimiento de criterios para el análisis de los conocimientos de los profesores en formación inicial. En este mismo capítulo se toman decisiones que sustentan la validez de nuestro instrumento.

En el Capítulo 6 se presenta el "refinamiento" del instrumento de evaluación, considerando los resultados obtenidos con los desarrollos del capítulo anterior. Una vez realizadas ligeras modificaciones en el instrumento, se realiza un segundo estudio (aplicación definitiva) aplicando el instrumento a una muestra de profesores en formación inicial. Este segundo estudio nos proporciona resultados para el establecimiento de pautas o medidas para el desarrollo o potenciación de los conocimientos sobre derivadas, referentes a la faceta epistémica del Conocimiento Didáctico-Matemático, en los futuros profesores de bachillerato. Este segundo estudio, y sus resultados, afianzan la confiabilidad de nuestro estudio.

Finalmente en el Capítulo 7 se presentan las conclusiones. Para ello se da respuesta a las preguntas de investigación planteadas en el Capítulo 2, mediante la descripción de en qué medida se lograron cada uno de los objetivos específicos planteados. En este último capítulo se hace un resumen de las principales aportaciones que se tienen de nuestro estudio y se presentan algunas líneas de investigación abiertas.

CAPÍTULO 1

Área Problemática y Antecedentes

1.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo presentamos un panorama general sobre las investigaciones realizadas en el campo de la Didáctica de la Matemática referentes al problema de investigación que nos atañe: *el conocimiento didáctico-matemático de los profesores sobre la derivada*. Dichas investigaciones y desarrollos son los que orientan y enmarcan el rumbo de nuestra investigación y por ende, el objetivo principal que perseguimos. Para la presentación del área problemática y los antecedentes de nuestra investigación, hemos dividido en tres grupos las investigaciones que refieren al problema que nos compete: 1) Aquellas interesadas por la determinación y caracterización del conglomerado de conocimientos que un profesor debe tener para que su enseñanza de las matemáticas sea eficaz; 2) Aquellas vinculadas a la problemática que se enfrentan tanto alumnos como profesores en la enseñanza y aprendizaje de la derivada; y 3) Aquellas que estudian, concretamente, los conocimientos didácticos y matemáticos de los profesores relacionados con la enseñanza de la derivada.

1.2. LA PROBLEMÁTICA DE LA DETERMINACIÓN DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DE LOS PROFESORES

La formación matemática y didáctica de los futuros profesores constituye un campo de investigación que ha llamado la atención, desde hace décadas, tanto de la comunidad de investigadores en Didáctica de las Matemáticas, como de las administraciones educativas. La principal razón es que el desarrollo del pensamiento y de las competencias matemáticas de los alumnos depende de manera esencial de la formación de sus profesores.

Muestra del creciente interés que se le ha otorgado a este tema, queda reflejado en el incremento notable de investigaciones sobre la formación de profesores de matemáticas incluidas en los “handbooks” de investigación en educación matemática (Bishop et. al., 2003; English et al., 2002; Llinares y Krainer, 2006; Hill y cols, 2007; Franke y cols, 2007; Sowder, 2007), y en la publicación de revistas específicas como el Journal of Mathematics Teacher Education. Una de las problemáticas que más ha interesado y preocupado a investigadores, formadores de profesores y administraciones educativas, está relacionada con la determinación del conglomerado de conocimientos, matemáticos y didácticos, que un profesor de matemáticas debería tener para que su práctica de enseñanza de las matemáticas sea lo más idónea posible. Al respecto, existen dentro del campo de investigación de Didáctica de las Matemáticas diversas propuestas de modelos que tratan de determinar y describir los elementos que componen el conocimiento que los profesores de matemáticas deberían tener para desarrollarse eficazmente en su práctica y facilitar el aprendizaje de sus estudiantes.

Uno de los pioneros en esta área fue Shulman (1986) quien propuso en su trabajo tres categorías para el conocimiento del profesor: conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico del contenido (PCK[1]) y conocimiento curricular. El conocimiento pedagógico del contenido (PCK) es descrito por Shulman como “aquel que vas más allá del conocimiento de la materia en sí misma a la dimensión del conocimiento de la materia para la enseñanza… [el conocimiento pedagógico del contenido] es la forma particular del conocimiento del contenido que incorpora el aspecto del contenido que guarda más relación con la enseñanza” (p. 9).

De acuerdo con Shulman (1986) el PCK incluye, para los temas que habitualmente se enseñan en matemáticas, “las formas más útiles de representar las ideas, las analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones más poderosas; en una palabra, las formas de representar y formular el tema que hacen que sea más comprensible para los demás” (p. 9).

Posteriormente, en otro trabajo, Shulman (1987) amplía sus ideas y propone siete categorías para el conocimiento del profesor, lo que denomina “*categorías del conocimiento base*:

1. *conocimiento del contenido;*

[1] Siglas en inglés que hacen referencia a la expresión “Pedagogical Content Knowledge”.

2. *conocimiento pedagógico general;* que se refieren a esos principios y estrategias generales que ayudan a la gestión y organización de la clase y que aparecen para hacer trascender el contenido.
3. *conocimiento curricular;* comprensión de los materiales y programas que sirven como 'herramientas de trabajo' para los profesores.
4. *conocimiento pedagógico del contenido (PCK);* es esa amalgama especial de contenido y pedagogía que es el campo propio de los profesores, su forma especial de comprensión profesional.
5. *conocimiento de los estudiantes y sus características;*
6. *conocimiento de los contextos educativos;* que va desde el funcionamiento del grupo o la clase, el gobierno y financiamiento de los distritos escolares, hasta el carácter de las comunidades y culturas; y
7. *conocimiento de los fines, propósitos y valores de la educación"* (p. 8).

De acuerdo con Shulman (1987), hay por lo menos cuatro fuentes principales de este conocimiento base: 1) formación académica en la disciplina a enseñar; 2) los materiales y el contexto del proceso educativo institucionalizado (por ejemplo, los currículos, los libros de texto, la organización escolar y la financiación, y la estructura de la profesión docente); 3) la investigación sobre la escolarización, las organizaciones sociales, el aprendizaje humano, la enseñanza y el desarrollo, y los demás fenómenos socioculturales que influyen en el quehacer de los profesores; y 4) la sabiduría que otorga la práctica misma, las máximas que guían la práctica de los profesores competentes.

Shulman señala que de las siete categorías antes mencionadas, el *conocimiento pedagógico del contenido (PCK),* resulta de especial interés puesto que identifica el "cuerpo distintivo" de conocimiento para la enseñanza, pues representa la mezcla de contenido y pedagogía en la comprensión de cómo un tópico particular, problema o tema se organiza, representa y se adapta atendiendo a la diversidad de intereses y habilidades de los estudiantes, y se presenta para su enseñanza. Al respecto, Ponte y Chapman (2006) sostienen que el énfasis de la comunidad de investigadores fue puesto sobre la categoría *conocimiento pedagógico del contenido,* la cual en su momento representó uno de los avances más importantes en la caracterización y concepciones del conocimiento de los profesores.

Posteriormente, Grossman (1990) tomando como base los desarrollos de Shulman y sus colaboradores sobre el conocimiento base, reorganiza dichas ideas y propone un *"modelo del conocimiento del profesor"* que considera cuatro componentes principales (p. 5):

1. Conocimiento pedagógico general. "Incluye un cuerpo de conocimiento general, creencias y habilidades relacionadas con la enseñanza: conocimiento y creencias concernientes al aprendizaje y los aprendices; conocimiento de principios generales de instrucción tales como el tiempo de aprendizaje académico (Carroll, 1963), tiempo de espera (Rowe, 1974) o instrucción en pequeños grupos (Cohen, 1986); conocimiento y habilidades relacionadas con la gestión de la clase (Doyle, 1986); y conocimiento y creencias sobre los fines y objetivos de la educación" (p. 6).
2. Conocimiento del contenido. "El conocimiento del contenido se refiere a los conceptos y hechos principales dentro de un campo y las relaciones entre ellos" (p. 6).
3. Conocimiento pedagógico del contenido. Está compuesto de cuatro componentes centrales: concepciones de las propuestas para la enseñanza de un contenido, conocimiento de la comprensión de los estudiantes, conocimiento curricular y conocimiento de las estrategias instruccionales. "El primer componente se refiere a los conocimientos y creencias sobre las propuestas para la enseñanza de un contenido en diferentes grados. Esas concepciones generales de la enseñanza de un contenido están reflejadas en los objetivos de los profesores para con la enseñanza de un contenido particular" (p. 8). "El segundo componente incluye conocimiento de la comprensión de los estudiantes, concepciones, y concepciones erróneas de tópicos particulares en un área. Para generar apropiadamente representaciones y explicaciones, los profesores deberían tener algunos conocimientos sobre aquello que los estudiantes ya conocen sobre un tópico y aquello que podrían encontrar extraño" (p. 8). "El tercer componente incluye conocimiento de los materiales curriculares disponibles para la enseñanza de un contenido particular, así como el conocimiento sobre el currículum horizontal y vertical para un tema" (p.8). El cuarto componente "incluye conocimiento de las estrategias instruccionales y representaciones para la enseñanza de un tópico particular. Los profesores con experiencia pueden poseer repertorios ricos de metáforas, experimentos, actividades, o explicaciones que son particularmente efectivos para la enseñanza de un típico particular, mientras que los

profesores principiantes todavía están en el proceso de desarrollar un repertorio de estrategias instruccionales y representaciones" (p. 9).

4. Conocimiento del contexto. "Los profesores deberían basarse en su comprensión del contexto particular en el que enseñan para adaptar su conocimiento general a las necesidades específicas de la escuela y de cada uno de los estudiantes. El conocimiento del contexto incluye: conocimiento de los distritos en que los profesores trabajan, incluyendo las oportunidades, expectativas y limitaciones planteadas por el distrito; conocimiento del entorno de la escuela, incluyendo la 'cultura' de la escuela, directrices departamentales, y otros factores contextuales en el nivel de la escuela que afectan la instrucción; y conocimiento de estudiantes y comunidades específicos, y los antecedentes de los estudiantes, familias, puntos fuertes, debilidades e intereses" (p. 9).

Otro de los trabajos importantes en este campo, es el desarrollado, en diversos trabajos, por Deborah Ball y colaboradores (Ball, 2000; Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Schilling y Ball, 2004; Ball, Hill y Bass, 2005; Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008), quienes apoyándose en las ideas de Shulman (concretamente en las nociones del conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico del contenido), han propuesto la noción de "*conocimiento matemático para la enseñanza* (MKT[2])", el cual han definido como "el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno" (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 374). Este conocimiento (MKT) está conformado por dos grandes categorías, cada una de las cuales, a su vez, está conformada por otras subcategorías del conocimiento: 1) *conocimiento del contenido*, que incluye conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido y conocimiento en el horizonte matemático; y 2) *conocimiento pedagógico del contenido*, conformado por el conocimiento del contenido y los estudiantes, conocimiento del contenido y la enseñanza, y conocimiento del currículo. Los componentes del conocimiento matemático para la enseñanza, se pueden ver de forma más clara en la Figura 1.1.

[2] Siglas en inglés que hacen referencia a la expresión "Mathematical Knowledge for Teaching".

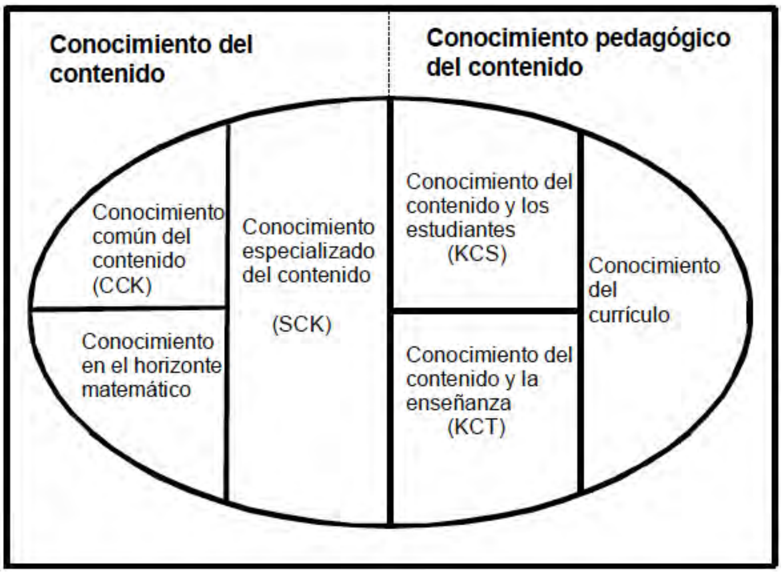


Figura 1.1. Conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 377)

El *conocimiento común del contenido* (CCK[3]) es descrito como "aquel conocimiento que es usado en el trabajo de enseñanza en formas comunes a como se utiliza en muchas otras profesiones u ocupaciones que también usan matemáticas" (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 377). En palabras de Ball, Thames y Phelps (2008) el conocimiento común del contenido es aquel que posibilita al profesor resolver correctamente los problemas o tareas matemáticas que asignan a sus estudiantes; no obstante, dichos conocimientos y habilidades matemáticas que permiten la resolución de tareas, no son exclusivos de la enseñanza, sino que son utilizados en una amplia variedad de contextos.

Por *conocimiento especializado del contenido* (SCK[4]), Ball, Thames y Phelps (2008) entienden al conglomerado de "conocimientos y habilidades matemáticas exclusivas para la enseñanza" (p. 400). Este conocimiento incluye "cómo representar con exactitud ideas matemáticas, ofrecer explicaciones matemáticas de reglas y procedimientos que comúnmente se encuentran en la enseñanza, analizar y comprender los métodos inusuales que permiten resolver un problema" (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 377-378).

El *conocimiento en el horizonte matemático* es definido como "una toma de conciencia (más como un turista experimentado y apreciativo que como un guía de turismo) del gran paisaje matemático en el que la experiencia y la instrucción presentes están situadas" (Ball y Bass, 2009, p. 6). Esto es, se trata de un tipo de conocimiento que puede guiar los siguientes tipos de actos y responsabilidades de enseñanza:

[3] Siglas en inglés que hacen referencia a la expresión "Common Content Knowledge".
[4] Siglas en inglés que hacen referencia a la expresión "Specialized Content Knowledge".

- Hacer juicios sobre la importancia matemática
- Atención al significado matemático subyacente a lo que los estudiantes opinan.
- Destacar y subrayar puntos clave.
- Anticipar y hacer conexiones
- Notar y evaluar oportunidades matemáticas
- Detectar distorsiones matemáticas o posibles precursores de confusiones o interpretaciones matemáticas erróneas posteriores.

De acuerdo con Ball y Bass (2009), la actual concepción del conocimiento en el horizonte matemático tiene cuatro elementos que lo constituyen: 1) un sentido del medio ambiente matemático que rodea la situación actual en la instrucción; 2) principales ideas disciplinares y su estructura; 3) prácticas matemáticas clave; y 4) valores y sensibilidades matemáticas fundamentales.

El *conocimiento del contenido y de los estudiantes* (KCS[5]) se define como "el conocimiento del contenido que se entrelaza con el conocimiento sobre como los estudiantes piensan, conocen o aprenden este contenido particular" (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 375).

Por su parte, el *conocimiento del contenido y la enseñanza* (KCT[6]) "combina conocimiento sobre la enseñanza y conocimiento sobre las matemáticas. Muchas de las tareas matemáticas de enseñanza requieren un conocimiento matemático para el diseño de la instrucción. Los profesores secuencian contenidos particulares para la instrucción. Los profesores eligen los ejemplos para comenzar con el proceso y los ejemplos que usan para ayudar a los estudiantes a profundizar en el contenido. Los profesores evalúan las ventajas y desventajas instruccionales de las representaciones usadas para la enseñanza de ideas específicas e identifican los diferentes métodos y procedimientos permisibles en el proceso de instrucción. Cada una de esas tareas requiere una interacción entre una comprensión matemática específica y una comprensión de los aspectos pedagógicos que afectan el aprendizaje de los estudiantes" (Ball, Thames y Phelps, 2008, p. 401). Finalmente, el *conocimiento curricular*, es entendido por el equipo de Ball y colaboradores, en el sentido de los trabajos de Grossman (1990).

[5] Siglas en inglés que hacen referencia a la expresión "Knowledge of Content and Students"
[6] Siglas en inglés que hacen referencia a la expresión "Knowledge of Content and Teaching".

A pesar de que el modelo del MKT desarrollado por Ball y colaboradores, descrito anteriormente, resulta ser un avance significativo en la caracterización de los conocimientos que debe tener un profesor para la enseñanza de las matemáticas, aún quedan cuestiones importantes que siguen abiertas, por ejemplo, ¿De qué forma o bajo qué criterios se puede evaluar o medir el MKT? ¿Cómo se puede ayudar a los profesores a adquirir o desarrollar los distintos componentes del MKT? ¿Cómo se relacionan entre sí, los distintos componentes del MKT? En palabras de Silverman y Thompson (2008): "Aunque el conocimiento matemático para la enseñanza ha comenzado a ganar atención como un concepto importante en la comunidad de investigación sobre formación de profesores, hay una comprensión limitada de lo que sea, cómo se puede reconocer, y cómo se puede desarrollar en la mente de los profesores" (p. 499).

Otras investigaciones cuyas aportaciones han tratado de contribuir a la especificación de los conocimientos que deben tener los profesores para que su enseñanza de las matemáticas sea idónea, son, por un lado, el estudio de Schoenfeld y Kilpatrick (2008) sobre la *"proficiencia" en la enseñanza de las matemáticas*, y por otro, la propuesta de Rowland, Huckstep y Thwaites (2005) sobre el *cuarteto del conocimiento* (KQ[7]). *La proficiencia en la enseñanza de las matemáticas* puede ser interpretada como los conocimientos y competencias que deberían tener los profesores para que su enseñanza se pueda considerar de calidad. Schoenfeld y Kilpatrick (2008, p. 322) proponen distinguir las siguientes dimensiones:

1. Conocer las matemáticas escolares con profundidad y amplitud. El profesor tiene múltiples maneras de conceptualizar el contenido del nivel correspondiente, representarlo de diversas maneras, comprender los aspectos clave de cada tópico, y ver conexiones con otros tópicos del mismo nivel. El conocimiento profundo del contenido le permite seleccionar las "grandes ideas" para ser propuestas a los alumnos, así como responder con flexibilidad a las cuestiones que le planteen.
2. Conocer a los estudiantes como personas que piensan. Implica tener sensibilidad sobre lo que los estudiantes piensan, lo que proporciona información adicional sobre cómo los estudiantes dan sentido a las matemáticas y sobre cómo pueden construir sus conocimientos.

[7] Siglas en inglés que hacen referencia a la expresión "Knowledge Quartet".

3. Conocer a los estudiantes como personas que aprenden. Esto supone ser consciente de la teoría del aprendizaje asumida y sus implicaciones en términos de las actividades de clase y las interacciones con los estudiantes.
4. Diseñar y gestionar entornos de aprendizaje. La creación de entornos productivos de aprendizaje incluye bastante más que la mera gestión de la clase. Implica la creación de comunidades intelectuales en las que los estudiantes se comprometen en actividades intelectuales legítimas (p. 338).
5. Desarrollar las normas de la clase y apoyar el discurso de la clase como parte de la "enseñanza para la comprensión". La clase debe trabajar como una comunidad de aprendizaje; esto supone que los alumnos tienen que adoptar ciertas normas sociales en la clase, tales como la obligación d explicar y justificar sus soluciones, deben intentar comprender el razonamiento de los otros estudiantes, preguntar si no comprenden, y desafiar los argumentos con los que no están de acuerdo.
6. Construir relaciones que apoyen el aprendizaje. El profesor debe trabajar para organizar el contenido, sus diversas representaciones, y poner en relación a los estudiantes entre sí y con el contenido. El aprendizaje emerge de estas relaciones mutuamente constituidas.
7. Reflexionar sobre la propia práctica. Lograr proficiencia en la enseñanza de las matemáticas, como lograr proficiencia matemática, es un proceso interactivo a lo largo de la vida. Ante un problema de la práctica de la enseñanza, el profesor de matemáticas necesita pensar reflexivamente sobre el problema si quiere resolverlo. Una vez hecha habitual, la reflexión puede llegar a ser el principal mecanismo para mejorar la propia práctica (p. 348).

Schoenfeld y Kilpatrick concluyen que su propuesta es el primer paso hacia una teoría de la proficiencia en la enseñanza de las matemáticas, y que indudablemente, se requieren nuevos refinamientos y elaboraciones.

El *cuarteto del conocimiento* (KQ), por su parte, es propuesto por Rowland, Huckstep y Thwaites (2005), como una herramienta que permite observar el conocimiento del contenido matemático de los profesores (tanto el MSK[8] y el PCK) en la práctica de enseñanza de las matemáticas y, desarrollar la enseñanza de dicha disciplina. Rowland, Huckstep y Thwaites

[8] Siglas en inglés que hacen referencia a la expresión "Subject Matter Knowledge" introducida por Shulman.

(2005, p. 260) consideran cuatro grandes dimensiones o unidades para el cuarteto del conocimiento (KQ):

1. Fundamentos. Esta primera dimensión se refiere, como su nombre lo indica, a los fundamentos o antecedentes teóricos y las creencias de los profesores en formación. Se trata de los conocimientos, la comprensión y de los recursos que los profesores aprenden en la "academia", de cara a su preparación (intencional o no) para su papel en el aula.
2. Transformación. Se refiere, en congruencia con los aportes del conocimiento base de Shulman, a la capacidad de un profesor para transformar el conocimiento del contenido que posee, en formas que son "pedagógicamente poderosas" (p. 261). Esto incluye la demostración de los profesores, el uso de materiales instruccionales, la elección de representaciones y la elección de ejemplos (Turner y Rowland, 2011, p. 200).
3. Conexión. Se refiere a la coherencia de la planificación de la forma en que aparece un episodio, lección o serie de lecciones, para su enseñanza. La concepción de coherencia incluye la secuenciación de los tópicos dentro y entre las lecciones, incluyendo el orden de las tareas y ejercicios (p. 263). Esto incluye hacer conexiones entre los procedimientos, hacer conexiones entre los conceptos, decisiones sobre la secuenciación y reconocimiento de la pertinencia conceptual (Turner y Rowland, 2011, p. 201).
4. Contingencia. Se refiere a eventos de la clase que son casi imposibles de planificar. Los dos componentes que constituyen esta categoría son la disposición de responder a las ideas de los niños y la preparación consecuente, cuando sea necesario, para desviarse de lo planificado cuando la lección ha sido preparada (p. 263).

Una de las desventajas del marco teórico denominado *cuarteto del conocimiento* (KQ), radica en que, aunque originalmente fue desarrollado para el estudio y desarrollo del conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido de los profesores en formación inicial, su uso se ha centrado principalmente en el estudio del conocimiento de los profesores en acción. Esto se debe al contexto en el que se estudian cada uno de los cuatro componentes del cuarteto, lo cual es señalado por Rowland, Huckstep y Thwaites (2005), "Las siguientes tres categorías, a diferencia de la primera, se refieren a la forma y el contexto en el cual el conocimiento es aplicado para la preparación y desarrollo de la enseñanza. Estas tres categorías se centran en el conocimiento en la acción, demostrado mediante la planificación para enseñar y el acto de la enseñanza en sí mismo" (p. 261).

A pesar de los avances importantes en cuanto a la caracterización del entramado complejo de conocimientos que deberían tener los profesores para que su práctica de enseñanza de las matemáticas sea efectiva, en general, como señala Godino (2009), los modelos de conocimiento matemático para la enseñanza elaborados desde las investigaciones en educación matemática, incluyen categorías demasiado globales, por lo que sería útil disponer de modelos que permitan un análisis más detallado de cada uno de los tipos de conocimiento que se ponen en juego en una enseñanza efectiva de las matemáticas. Además, "esto permitiría orientar el diseño de acciones formativas y la elaboración de instrumentos de evaluación de los conocimientos de los profesores" (Godino, 2009, p. 19).

En este sentido, Godino (2009) propone un sistema de categorías de análisis de los conocimientos matemáticos y didácticos del profesor que integra, organiza y extiende los modelos propuestos por Shulman et al., Ball et al., y Schoenfeld y Kilpatrick. Este modelo del *Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM)* es propuesto por Godino (2009) en el marco del Enfoque Onto-Semiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS)[9], e incluye seis facetas o dimensiones del *conocimiento didáctico-matemático* (CDM) para la enseñanza y aprendizaje de tópicos específicos:

1. *Epistémica:* Distribución, a lo largo del tiempo de enseñanza, de los componentes del significado institucional implementado (problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos).
2. *Cognitiva:* Desarrollo de los significados personales (aprendizajes).
3. *Afectiva:* Distribución temporal de los estados afectivos (actitudes, emociones, afectos, motivaciones) de cada alumno con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.
4. *Interaccional:* Secuencia de interacciones entre el profesor y los estudiantes orientadas a la fijación y negociación de significados.

[9] El marco teórico conocido como "Enfoque Onto-Semiótico del conocimiento y la instrucción matemática", es el que utilizaremos para el desarrollo de nuestro trabajo de investigación y se describirá con profundidad en el Capítulo 2.

5. *Mediacional:* Distribución de los recursos tecnológicos utilizados y asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos.
6. *Ecológica:* Sistema de relaciones con el entorno social, político, económico,… que soporta y condiciona el proceso de estudio.

Para cada una de estas facetas se contemplan, a su vez, diversos niveles que permiten el análisis del CDM del profesor de acuerdo con el tipo de información requerida para la toma de decisiones instruccionales. Estos niveles son:

1. *Prácticas matemáticas y didácticas.* Descripción de las acciones realizadas para resolver las tareas matemáticas propuestas para contextualizar los contenidos y promover el aprendizaje. También se describen las líneas generales de actuación del docente y discentes.
2. *Configuraciones de objetos y procesos (matemáticos y didácticos).* Descripción de objetos y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas, así como los que emergen de ellas. La finalidad de este nivel es describir la complejidad de objetos y significados de las prácticas matemáticas y didácticas como factor explicativo de los conflictos en su realización y de la progresión del aprendizaje.
3. *Normas y metanormas.* Identificación de la trama de reglas, hábitos, normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio, y que afectan a cada faceta y sus interacciones.
4. *Idoneidad.* Identificación de potenciales mejoras del proceso de estudio, que incrementen la idoneidad didáctica.

Para el desarrollo del presente trabajo de investigación tomaremos en cuenta el modelo del MKT de Ball y colaboradores y, principalmente, el modelo del CDM propuesto por Godino (2009). Sin embargo, para poder explicar de manera más profunda las "herramientas" de análisis y las características que proporciona dicho modelo, se hace necesario presentar primeramente el marco teórico que encuadrará el desarrollo de nuestro trabajo, por lo que retomaremos dicho modelo después de presentar, en el Capítulo 2, las nociones teóricas del Enfoque Onto-Semiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) que utilizaremos.

1.3. LA PROBLEMÁTICA SUBYACENTE A LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA DERIVADA

El descubrimiento del *Cálculo* es uno de los grandes logros intelectuales de la civilización, pues ha servido por más de tres siglos como la principal herramienta cuantitativa para la investigación de problemas científicos. El cálculo es fundamental para áreas de las matemáticas tales como la probabilidad, la topología, la teoría de grupos y aspectos del álgebra, la geometría y la teoría de números. Sin él, la tecnología moderna y la física podrían ser difíciles de imaginar (Kleiner, 2001).

Sin embargo, la enseñanza de las nociones del cálculo es conocida por ser una fuente de serios problemas, tanto para los alumnos como para los profesores (Hitt, 2003), de cara a la comprensión de sus ideas fundamentales.

La *derivada* es uno de los conceptos fundamentales para el estudio del cálculo, pero frecuentemente el tratamiento que se le da a este concepto en la institución escolar, se enfoca al manejo y aplicación de fórmulas y recursos algebraicos, lo que puede provocar en los estudiantes dificultades para la comprensión de este concepto. Esto es señalado por Artigue (1995), cuando advierte que aunque se puede enseñar a los alumnos a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y a resolver algunos problemas estándar, se encuentran grandes dificultades para que los estudiantes logren alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que conforman el centro de este campo de las matemáticas.

En general, la *derivada*, ha sido objeto de especial atención desde distintas aproximaciones teóricas, particularmente las cuestiones de índole cognitiva (concepciones de los estudiantes, esquemas cognitivos, tipos de errores…) e instruccionales (estrategias y alternativas para la enseñanza de la derivada), tal y como se muestra en Artigue, Batanero y Kent (2007) o en Sánchez, García y Llinares (2008).

A continuación, recogemos algunas de las aportaciones que se tienen en el campo de investigación de la educación matemática referentes a la problemática que conlleva la enseñanza y el aprendizaje de la derivada, y tratamos de organizarlas como sigue: a) estudios sobre los aspectos epistémicos que dificultan el aprendizaje de la derivada; b) estudios que versan sobre el tipo de representaciones idóneas para la enseñanza y el aprendizaje de la derivada; y c) estudios sobre el impacto que tienen los aspectos discursivos en la enseñanza y aprendizaje de la derivada.

1.3.1. Estudios sobre los aspectos epistémicos que dificultan el aprendizaje de la derivada

Como hemos señalado, la derivada es uno de los conceptos fundamentales para la comprensión de las ideas del cálculo, tal y como se refleja el trabajo de Sofronas, DeFranco, Vinsonhaler, Gorgievski, Schroeder y Hamelin (2011), en el cual se entrevista a 24 expertos en el área sobre qué significa que un estudiante comprenda los contenidos del primer año de cálculo. Los expertos que participaron en su estudio respondieron dando una visión en términos de lo que los estudiantes deberían conocer y ser capaces de hacer al finalizar su primer año de cálculo. Los 24 expertos entrevistados respondieron a preguntas tales como ¿cuáles son los conceptos principales en el primer año de cálculo? ¿cuáles son las habilidades principales? ¿cuáles son los métodos de enseñanza que utilizan para destacar la importancia de los conceptos principales identificados? ¿cuál es el énfasis que debe ponerse en las habilidades frente a los conceptos en la enseñanza del cálculo? ¿Cuál es el rol de la tecnología en la enseñanza del cálculo?, entre otras.

A partir de las respuestas que dieron los expertos a cuestiones como las anteriores, Sofronas, et al. (2011) desarrollan un "marco teórico de objetivos finales esenciales para la comprensión del cálculo de primer año" que incluye cuatro objetivos finales generales: 1) Dominio de los conceptos fundamentales y/o habilidades del primer año de cálculo; 2) Construcción de conexiones y relaciones entre los conceptos y habilidades fundamentales; 3) Habilidad de usar las ideas del primer año de cálculo para resolver problemas; y 4) Comprensión del contexto y el propósito del cálculo. Con relación al primer objetivo final, los investigadores señalan que de acuerdo a las respuestas de los expertos los conceptos y habilidades fundamentales para la comprensión del cálculo son (p. 134): Derivadas (100% de los expertos), Integrales (96% de los expertos), Límites (71% de los expertos), Series y sucesiones (38% de los expertos) y Aproximaciones (33% de los expertos). En lo que se refiere al concepto derivada, señalan que es fundamental la comprensión de la derivada como una razón de cambio, la comprensión gráfica de la derivada y facilidad con el cálculo de derivadas.

No hay que obviar que cada uno de los conceptos y habilidades que Sofronas, et al. (2011) señalan como fundamentales para la comprensión de los estudiantes del cálculo, lleva consigo diversas problemáticas que dificultan su enseñanza y aprendizaje.

Al respecto, uno de los trabajos que ha sido ampliamente citado en las investigaciones referentes a la didáctica del cálculo, es el de Artigue (1995) quien señala que las dificultades que se presentan en el aprendizaje del cálculo, se pueden agrupar en tres grandes categorías (p. 107):

a) Las asociadas con la complejidad de los objetos básicos del cálculo, tales como la comprensión de los números reales y sus propiedades y relaciones con otros conjuntos de números (decimales, racionales, irracionales, etc.), y la comprensión del concepto de función.
b) Las asociadas a la conceptualización y a la formalización de la noción de límite, que juega un papel central para la construcción de los conceptos del cálculo; y
c) Las vinculadas con las rupturas necesarias con relación a los modos de pensamiento puramente algebraicos, muy familiares, y a las especificidades del trabajo técnico en el cálculo.

Así mismo, Artigue (1998) señala que las investigaciones didácticas muestran con toda evidencia que no es fácil para los estudiantes entrar en el campo conceptual del Análisis, cuando éste no es reducido a su parte algebrizada, sino que pretende el desarrollo de los modos de pensamiento y de las técnicas que hoy en día están fundamentadas en él. De esta forma, algunos estudiantes son capaces de resolver los ejercicios que se les proponen con la aplicación correcta de las reglas de derivación; no obstante, presentan dificultades cuando necesitan manejar el *"significado del objeto derivada"*, el cual comúnmente se presenta en la enseñanza través de su expresión analítica, como límite del cociente incremental, o en su interpretación geométrica, como pendiente de la recta tangente.

Sin embargo, las investigaciones realizadas, referentes al significado del objeto derivada, se han centrado en describir las características de los significados construidos por los estudiantes, mostrando la existencia de conflictos e inconsistencias entre las construcciones realizadas y los significados formales presentados por los libros de texto (Ferrini-Mundy y Graham, 1994; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2006). En este sentido, Sierpinska (1990) señala que "Comprender el concepto será concebido como el acto de captar su significado. Este acto será probablemente un acto de generalización y síntesis de significados relacionados a elementos particulares de la 'estructura' del concepto (la estructura es la red de sentidos de las sentencias consideradas). Estos significados particulares tienen que ser captados en actos de comprensión" (p. 27).

En este sentido, Zandieh (2000) desarrolla un marco teórico para explorar la comprensión de los estudiantes sobre el concepto derivada, considerando la forma en que el concepto derivada es descrito en los libros de texto y la forma en que los investigadores de educación matemática, los matemáticos y los estudiantes, discuten sobre dicho concepto. Dicho marco teórico tiene dos componentes principales (p. 105):

1. *Representaciones múltiples o contextos*. El concepto derivada puede ser representado: a) gráficamente, como la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto; b) verbalmente, como la tasa instantánea de cambio; c) físicamente, como la velocidad o rapidez; y d) simbólicamente como el límite del cociente diferencial.
2. *Capas de pares proceso-objeto*. "Si se considera la definición simbólico formal de la derivada $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, se observa que la derivada de f, f', es una función cuyo valor en un punto está definido como el límite de un razón. A estos tres aspectos del concepto derivada (función, límite, razón) es a lo que denomino las tres "capas" del marco teórico" (p. 106). Ahora bien, "De acuerdo con Sfard, los procesos son operaciones sobre objetos previamente establecidos. Cada proceso es reificado en un objeto que a su vez actúa en otros procesos. Esto forma una cadena que llamo pares de objetos-procesos. Cada una de las capas del concepto derivada (razón, límite y función) puede ser visto como un proceso dinámico y como un objeto estático. Por ejemplo, una razón o número irracional puede ser considerado operacionalmente como una división, pero también estructuralmente como una pareja de enteros dentro de una estructura multiplicativa. El límite puede ser considerado dinámicamente como un proceso de aproximación al valor limitante o estáticamente a través de la definición épsilon-delta. Las funciones pueden ser vistas como el proceso de tomar un elemento en el dominio y aplicar sobre este un procedimiento que resulte en un elemento del rango. Las funciones pueden ser vistas estáticamente como un conjunto de pares ordenados" (p. 107).

De acuerdo con Zandieh (2000), el concepto derivada involucra tres pares proceso-objeto: “El proceso razón involucra dos objetos (dos diferencias, dos longitudes, una distancia y un tiempo, etc.) y actúa mediante una división. El objeto reificado (la razón, pendiente, velocidad, etc.) es usado en el siguiente proceso, el de tomar un límite. El proceso límite pasa a través de un número infinito de razones aproximándose a un valor particular (el valor limitante, la pendiente en un punto sobre una curva, la velocidad instantánea). El objeto reificado, el límite, es usado para definir cada valor de la función derivada. La función derivada actúa como un proceso, pasando (posiblemente) a través de un número infinito de valores de entrada y para cada uno determinando un valor de salida mediante el límite del cociente de diferencias en esos puntos. La función derivada puede ser vista como un objeto reificado, al igual que cualquier función. (La función derivada puede ser considerada como un objeto que es la salida de otro proceso, el operador derivada)” (p. 107).

Finalmente Zandieh (2000) sugiere que un estudiante no tiene una comprensión completa sobre el concepto derivada, si éste no puede reconocer y construir cada uno de los tres procesos (razón, límite y función) involucrados en la comprensión del concepto de derivada en algún contexto relevante.

Otra aproximación teórica “*la socioepistemología*”, señala que aunque en las propuestas como la de Zandieh (2000) bajo el marco de la teoría de la reificación de Sfard o las diversas propuestas de innovación didácticas para el tratamiento de la derivada, se intenta abandonar el carácter algorítmico y estático de dicho objeto, “…dichas aproximaciones siguen considerando como fin último una definición, un objeto matemático construido y no susceptible de construcción por parte del estudiante, es decir, la definición de la derivada como el límite del cociente incremental y la explicación de la secante que deviene en tangente” (Montiel, 2005a, p. 223).

La *aproximación socioepistemológica* o *socioepistemología*, “…considera como necesidad básica el dotar a la investigación de una aproximación sistémica que permita incorporar cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza” (Cantoral y Farfán, 1998, p. 3). Esta aproximación socioepistemológica “…incorpora al análisis de las interacciones del sistema didáctico las prácticas sociales asociadas a la construcción del concepto derivada, y abandona el acercamiento a la derivada a partir de la definición de límite del cociente incremental y la explicación de la secante que deviene en tangente, ya que ellos deja de lado la actividad que rodeó, acompañó y dio significado a la derivada en su contexto de origen, y por el cual se constituye como un conocimiento matemático" (Montiel, 2005b, p.668).

Así, los seguidores de esta aproximación socioepistemológica asumen que la noción de derivada sólo será adquirida hasta que ésta sea vista como una organización de las variaciones sucesivas (Cantoral y Farfán, 1998).

Las investigaciones anteriores, evidencian que no hay un consenso unificado referente al contexto o más aún, al significado de la derivada que debe ser "enfatizado" para una adecuada comprensión de dicho objeto por parte de los estudiantes. Por ejemplo, Orton (1983) realiza un estudio cualitativo en el que analiza la comprensión de 110 estudiantes sobre la diferenciación. En dicho estudio Orton pone de manifiesto las dificultades que tienen los estudiantes para demostrar una comprensión gráfica de la tangente como límite de un conjunto de líneas secantes, así como las dificultades que tienen para la comprensión de la noción de tasa de cambio en un punto. Orton (1983) enfatiza la importancia de prestar "gran cantidad de atención" al estudio de la tasa de cambio en puntos especiales de una curva (i.e., puntos donde la curva crece o decrece, puntos donde va creciendo o decreciendo más rápidamente, puntos estacionarios, puntos de inflexión puntos máximos y mínimos, etc.). Orton lo señala de la siguiente manera: "Un aspecto importante que los estudiantes deben comprender en el estudio gráfico de la tasa de cambio se refiere a la diferencia entre las líneas rectas y curvas. Para una curva, la tasa de cambio promedio puede ser calculada de la misma forma que para una línea recta, pero también existe la idea de la tasa de cambio en un punto sobre la curva, y cada punto de la curva puede dar lugar a un valor diferente para la tasa de cambio. En el caso de la línea recta uno puede también obtener la tasa de cambio en un punto, pero su valor es el mismo para cada punto, de hecho, su valor es el mismo al de la tasa de cambio promedio en algún intervalo de x. Por este motivo puede ser difícil estudiar la tasa de cambio en un punto" (Ibíd., p. 238).

Finalmente, Orton (1983) señala que una aproximación inicial a los conceptos del cálculo debería de ser informal, e involucrar exploraciones numéricas y gráficas. Así mismo, recomienda el uso de situaciones de la vida real para generar datos que se podrían emplear en gráficos lineales y no lineales que ayuden a los estudiantes a comenzar a desarrollar una comprensión de la tasa de cambio.

Otro tipo de conflictos que dificultan el aprendizaje de la derivada, se describen en Font (1999, 2005, 2008) e Inglada y Font (2003); en dichos trabajos se manifiestan una serie de *conflictos semióticos* relacionados con la notación incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y con la complejidad semiótica que conlleva el paso de la derivada en un punto a la función derivada.

Font (2005) señala dos ejemplos de *conflictos semióticos*[10] potenciales: a) cuando se considera ingenuamente que es bueno introducir diferentes representaciones del mismo objeto y se introducen el mayor número posible de representaciones y de traducciones entre ellas, sin tener en cuenta la complejidad semiótica asociada; b) En algunos libros de texto se puede observar un conflicto semiótico potencial causado por la introducción implícita de la función derivada en la definición de la derivada en un punto al usar la notación incremental $f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}_{(en\ x=a)}$ como primera notación para definir la derivada en un punto. Así, Font señala que cada manera diferente de introducir la función derivada en un proceso de enseñanza-aprendizaje conlleva a una determinada complejidad semiótica puesto que, por ejemplo, no presenta la misma complejidad semiótica dar la definición por límites, que comenzar hallando una función derivada particular (e.g., la derivada de la función $f(x) = x^2$) a partir de los valores, dados en una tabla, de la derivada de la función en diversos puntos.

En este sentido, Font (2008) señala que la realización de la mayoría de las prácticas matemáticas conlleva una complejidad semiótica importante y las representaciones utilizadas son determinantes, tanto para reducir o aumentar esta complejidad, como para la realización efectiva de la práctica.

Por su parte, Hitt (2003) muestra algunas dificultades a las que se enfrentan tanto estudiantes como profesores en el proceso de enseñanza y aprendizaje del cálculo; problemas para el aprendizaje de conceptos tales como función, límite, derivada e integral, y enfatiza que, en todos ellos, uno de los problemas subyacentes es la falta de acercamiento visual para el entendimiento de los conceptos del cálculo. Así, por ejemplo, señala que al resolver un problema no rutinario, entendido como aquel que al leer un enunciado, no viene a la mente un algoritmo predeterminado o una idea a desarrollar para resolverlo, si la lectura del enunciado no indica qué tipo de algoritmo o camino seguir, es necesario interpretarlo y

[10] De acuerdo con Godino (2002) un conflicto semiótico se entiende como una disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por el alumno y la institución.

recurrir a una representación diferente a la algebraica. En este sentido Hitt (2003) sugiere la necesidad de utilizar diferentes representaciones en forma coherente que permitan abordar los problemas en forma más eficiente, y señala que es importante promover la visualización matemática y que el desarrollo de habilidades ligadas a ésta puede impulsar a los estudiantes a un nivel más profundo de los conceptos propios del cálculo.

1.3.2. Estudios sobre las representaciones

Como hemos visto en la sección 1.3.1, el papel que juegan las representaciones en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la derivada, es crucial si se quiere lograr una correcta comprensión de los estudiantes sobre dicho objeto matemático. La toma de conciencia sobre la variedad de representaciones asociadas a un objeto matemático específico, puede facilitar el acercamiento y comprensión sobre dicho objeto en los estudiantes. La importancia del papel que tienen las representaciones, radica en que se toma por sentado que los significados de los objetos matemáticos son construidos a través del uso de los signos (D'Amore, 2006; Radford, 2000).

Así, existe un cúmulo de investigaciones enfocadas al uso y potencialidad que tienen las diversas representaciones en los actos de comprensión de la derivada, predominando aquellas enfocadas al uso de las representaciones gráficas y numéricas. Otras menos cuantiosas son las que hablan sobre las representaciones "gestuales" pero que ayudan a la comprensión del estudiante. A continuación hacemos una revisión de algunos de los trabajos relevantes enfocados a este tema.

Diversos investigadores (Orton, 1983; Asiala, et al., 1997; Aspinwall, Shaw y Presmeg, 1997; Borgen y Manu, 2002; Berry y Nyman, 2003; Habre y Abboud, 2006), desde distintas perspectivas teóricas, han desarrollado estudios en los que se identifican los elementos gráficos como fundamentales para una adecuada comprensión de la derivada. Como vimos en el apartado anterior, en su trabajo, Orton (1983) subraya la importancia del trabajo gráfico para el desarrollo del concepto de tasa de cambio; sin embargo, evidencia que la comprensión gráfica de los estudiantes en muchas ocasiones es limitada. Ejemplo de esta limitada comprensión gráfica de los estudiantes se da cuando Orton los cuestiona sobre lo que pasa con la línea secante (PQ) a un círculo, cuando Q se va aproximando cada vez más a P (Figura 1.2). Los estudiantes que participaron en su estudio, dieron respuestas tales como "… 'la línea [PQ] se hace más corta', 'se convierte en un punto', 'el área es más pequeña', 'desaparece'…" (Ibíd., p. 237).

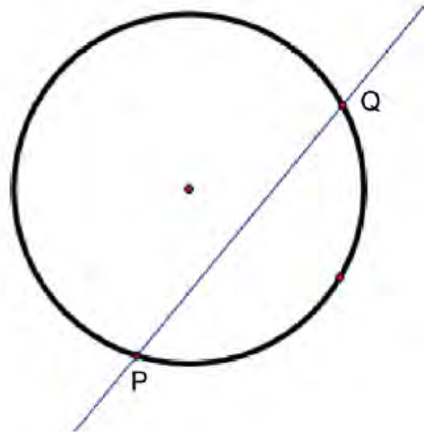


Figura 1.2. Círculo con secante PQ

Asiala, Cottrill, Dubinsky y Schwingendorf (1997), por su parte, basados en las nociones de la *teoría APOS*[11], desarrollan e implementan un tratamiento instruccional para facilitar a los estudiantes la comprensión de la derivada. Dicho tratamiento instruccional o estrategia pedagógica "que fue usada en el curso de cálculo C^4L[12], se denomina el *Ciclo de Enseñanza ACE*[13] y consiste en la combinación de *Actividades por computadora* (diseñadas para ayudar a los estudiantes a hacer las construcciones mentales en la descomposición genética), *Tareas en clase* sin computadora seguidas por una discusión (dirigidas a lograr que los estudiantes reflexionen sobre lo que habían hecho en la computadora y lo que puede hacer con lápiz y papel), y *Ejercicios* (para ayudar a los estudiantes a reforzar el conocimiento que han construido)" (Ibíd., p. 408).

Como resultado, Asiala, et al. (1997) encontraron que muchos de los estudiantes que participaron en su estudio, fueron incapaces de determinar, con base en las representaciones gráficas de funciones, la derivada en puntos específicos, y en su lugar se centraron en la generación de expresiones algebraicas de las funciones para luego derivar. Asiala, et al. (1997) señalan que dichas dificultades cognitivas se deben a "la falta de una concepción del proceso de función en los estudiantes" (p. 414). Así mismo estos investigadores afirman que

[11] Siglas en Inglés que hacen referencia a los términos "**A**ctions, **P**rocesses, **O**bjects, **S**chemas", que refieren a construcciones mentales, de un sujeto, dentro de la propuesta de la *descomposición genética*. "…una *descomposición genética* o modelo de cognición, es una descripción de construcciones mentales específicas que un estudiante puede hacer con el fin de desarrollar su comprensión del concepto" Asiala, 1997, p.400).

[12] C^4L o "**C**alculus, **C**oncepts, **C**omputers and **C**ooperative **L**earning" en inglés, es una reforma de los cursos de cálculo.

[13] En inglés de denomina "*ACE Teaching Cycle (**A**ctivities, **C**lass tasks and **E**xercises)*".

"…una cuestión clave en la comprensión gráfica de la derivada es la relación entre la derivada de una función en un punto y la pendiente de la línea tangente a la gráfica de la función en un punto. Esto forma una base para comprender la derivada como una función que, entre otras cosas, da para cada punto en el dominio de la derivada el valor correspondiente de la pendiente" (Ibíd., p. 414).

Otro trabajo realizado en el marco del estudio de las representaciones gráficas es el de Habre y Abboud (2006), quienes indagan la comprensión de los estudiantes sobre la función y su derivada en el marco de un curso experimental de cálculo. Dicho estudio evidencia que los estudiantes no tienen la misma comprensión de la derivada en el modo gráfico que en el modo analítico. Los autores concluyen que "En lo que concierne al concepto derivada, los entrevistados mostraron una comprensión gráfica casi completa de este tópico. La única cosa que muchos estudiantes (entrevistados y no entrevistados) no hicieron correctamente es definir geométricamente la derivada. Esto es quizás una consecuencia del hecho de que las definiciones matemáticas son tradicionalmente analíticas, creando un obstáculo en las mentes de los estudiantes" (p. 68).

En este mismo sentido, Berry y Nyman (2003) llevan a cabo un estudio para explorar la comprensión gráfica de los estudiantes en lo referente a "…cómo piensan los estudiantes sobre los vínculos entre la gráfica de una función derivada y la de la función original desde la cual fue obtenida" (p. 481). Para su experimento, los autores hacen uso de calculadoras graficadoras "Texas Instruments (TI-83plus)" y de sensores o detectores de movimiento llamados "Calculator Based Ranger (CBR)[14]". El CBR graba el desplazamiento de un cuerpo en movimiento en un intervalo de tiempo; los datos recolectados son pasados a la calculadora que grafica el desplazamiento del movimiento y su velocidad (i.e. gráficas de desplazamiento-tiempo y velocidad-tiempo). Los autores encontraron en su estudio, que los estudiantes tienen predominantemente una visión simbólico-algebraica del cálculo y que presentan dificultades para establecer conexiones entre la gráfica de la función derivada y la función en sí misma. Sin embargo, los autores señalan que "La habilidad para hacer conexiones entre las ideas matemáticas es un indicador importante de la comprensión" (Ibíd., p. 485). Los autores añaden "Un curso tradicional de cálculo hará conexiones algebraicas entre la integración y la diferenciación a través del Teorema Fundamental del Cálculo. Las

[14] La CBR es un producto tecnológico distribuido por la empresa *Taxas Instruments*. Más información sobre este sensor de movimiento puedes encontrarlo en: http://education.ti.com/educationportal/sites/US/productDetail/us_cbr_2.html

reglas para la diferenciación son usadas como un medio para la integración de funciones. Las conexiones gráficas subyacentes están raramente desarrolladas, sin embargo, para muchas aplicaciones, una forma algebraica de la función puede no estar disponible. Podemos argumentar que hacer las conexiones de las propiedades de las gráficas, es decir, ir de la gráfica de una función a la gráfica de una función derivada y, especialmente, el proceso inverso, desarrolla una mejor comprensión de los conceptos gráficos del cálculo" (Ibíd.).

El trabajo de Borgen y Manu (2002), por su parte, evidencia que el éxito en la resolución de un problema no implica necesariamente la comprensión de las ideas matemáticas que subyacen al mismo. Los autores realizan un estudio en el que indagan la comprensión de una estudiante llamada Janet, en un problema que involucra las nociones de puntos estacionarios y extremos de la función; concretamente el problema consistía en que "dada la función cuadrática $y = 2x^2 - x + 1$, determinar los puntos estacionarios y si estos se trataban de un máximo o un mínimo" (p. 155). Los investigadores encontraron como resultado que Janet fue capaz de aplicar los algoritmos correctamente para responder con éxito al problema, sin comprender el significado de dichos algoritmos y sin ver la relación entre la pendiente de una recta tangente en un punto y la derivada. Los investigadores señalan que para explicar la comprensión de Janet sobre los puntos estacionarios y los valores extremos de la función cuadrática presentada, es necesario determinar qué matemáticas se requieren para comprender el problema, y subrayan: "1) la habilidad para diferenciar una función; 2) Comprensión de la relación entre los puntos estacionarios y los valores máximos o mínimos de la función; y 3) habilidad para interpretar/comprender la representación gráfica de una función y su derivada" (Ibíd., p. 159).

En otro trabajo Aspinwall, Shaw y Presmeg (1997), llevan a cabo un estudio de caso con el objetivo de estudiar la comprensión de un estudiante, Tim, sobre las conexiones gráficas entre una función y su derivada. Para su investigación, los autores recurren al estudio de *las estructuras de las habilidades matemáticas* de Krutetskii el cual les ayudó a confirmar que las habilidades visuales de Tim podrían representar un obstáculo para su comprensión. Krutetskii (1976, p. 318, citado en Aspinwall, et al., 1997, p. 304) distingue entre tres tipos principales de habilidades matemáticas en el nivel escolar:

1. Analítica. Fuerte predominio de un componente lógico-verbal sobre un débil componente pictórico-visual. No pueden usar apoyos visuales en la resolución del problema y no siente la necesidad de usarlos.

2. Geométrica. Fuerte predominio de un componente pictórico-visual sobre un componente lógico-visual. Pueden y sienten la necesidad de usar apoyos visuales para la resolución del problema.
3. Armónica. Equilibrio de las dos componentes. Se divide en dos subtipos:
   a) Armónica abstracta. Pueden usar apoyos visuales en la resolución del problema pero no es el preferido.
   b) Armónica pictórica. Pueden y prefieren usar apoyos visuales para la resolución del problema.

Aspinwall, Shaw y Presmeg (1997) encontraron que Tim era un experto en la aplicación de reglas para encontrar derivadas en varias situaciones, y aunque su pensamiento evoca a la habilidad matemática del tipo *armónica pictórica* (i.e., Tim emplea apoyos visuales cuando resuelve el problema y prefiere hacerlo así), una imagen mental incorrecta asociada a la derivada de una función cuadrática obstaculizó su comprensión del problema. Tim señaló que la gráfica de una parábola contenía asíntotas verticales "si se alejaba lo suficiente del origen" lo que ocasionó que dibujara la gráfica de la función derivada, de una función cuadrática, como una función cúbica. Esta situación fue provocada por una imagen errónea que Tim había construido acerca de que las funciones cuadráticas (las gráficas) tienen asíntotas verticales. Esta imagen fue incontrolable para Tim y generó conflictos con su conocimiento de que el dominio de la parábola son todos los reales y su conocimiento analítico de que la derivada de una función cuadrática es una línea recta.

En general, los resultados de las investigaciones que han analizado el papel que desempeñan las representaciones en la construcción de una comprensión de la idea de derivada indican que los significados que construyen los alumnos están vinculados a determinados modos de representación y que tales significados no están conectados. Este hecho subraya la importancia de coordinar los diferentes modos de representación como una forma para que los estudiantes puedan comprender la derivada (Sánchez, García y Llinares, 2008, p. 277). En este sentido, como señalan Berry y Nyman (2003), "La habilidad para identificar y representar el mismo pensamiento en representaciones numéricas, gráficas y algebraicas ha sido uno de los objetivos de las reformas en la educación del cálculo (p. 483).

Otro tipo de representaciones que ha sido estudiado por la importancia que cobran en la comprensión de la cognición de los estudiantes, son las representaciones "gestuales" o perceptuales, como por ejemplo, los gestos que puede realizar un estudiante para indicar la inclinación de una recta. Por ejemplo, Hähkiöniemi (2004) llevó a cabo un estudio sobre cómo cinco estudiantes comienzan a adquirir el concepto derivada, las representaciones que adquieren en el proceso y cómo conectan dichas representaciones. Su estudio consistió en la realización de un periodo de enseñanza durante el cual se enfatizaron diferentes tipos de representaciones perceptuales y simbólicas, y en entrevistas realizadas después de dicho período de enseñanza en las que, mediante tareas realizadas por los estudiantes, se obtuvo información sobre el tipo de representaciones que los estudiantes utilizaban para comenzar a adquirir el concepto de derivada, prestando especial atención a aquellas representaciones simbólicas y perceptuales y a las conexiones que los estudiantes realizaban entre éstas. Durante el período de enseñanza, por ejemplo, fueron usadas representaciones perceptuales tales como el movimiento de una mano a lo largo de una curva, colocar un lápiz como una tangente, mirar las partes "empinadas" o muy pronunciadas y la "rectitud" local de una gráfica. Así mismo se introdujeron representaciones simbólicas para la derivada tales como el límite del cociente de incrementos, la pendiente de la tangente y las reglas para la derivación. Al analizar la información Hähkiöniemi determinó si las representaciones realizadas por los estudiantes se trataban de una acción, un objeto o un proceso. Hähkiöniemi concluye que mediante el uso de representaciones perceptuales los estudiantes podrían comprender la derivada como un objeto, puesto que dichas relaciones parecen adaptarse para comenzar a desarrollar la comprensión de la relación entre una función y su función derivada. Así mismo argumenta que, usualmente, las representaciones perceptuales más importantes son la pendiente de la tangente y la razón de cambio pero que se debería considerar enfatizar en la enseñanza algunas otras representaciones tales como lo "empinado" o muy pronunciado de una gráfica lo cual podría usarse para examinar la derivada como un objeto; y la "rectitud local" para demostrar el límite del cociente diferencial. Por último señala que, a pesar de que los estudiantes pudieron considerar la derivada como un objeto mediante representaciones perceptuales y calcular la derivada en un punto mediante representaciones simbólicas, podrían necesitar orientación para conectar estos dos tipos de representaciones.

Otro de los trabajos que van en este sentido, es el estudio de Tall (2009), en el cual se sugiere que los estudiantes se basan en estructuras de conocimiento más familiares tales como las "representaciones humanas dinámicas" para dar sentido a los significados de los conceptos del cálculo. Para ello desarrolla un marco teórico denominado *Tres mundos mentales de las matemáticas*, el cual, de acuerdo con Tall, mezcla las representaciones humanas con el simbolismo de la aritmética y el álgebra, lo cual conduce al formalismo de los números reales y los límites. Dicho marco teórico sostiene que el pensamiento matemático crece a partir de las percepciones y acciones de los estudiantes para la producción formal de las matemáticas y esto ocurre a través de tres mundos mentales de las matemáticas (Ibíd., p. 482):

1. *Las representaciones del mundo (conceptual),* basadas en la percepción y reflexión de las propiedades de objetos, inicialmente vistos y sentidos en el mundo real, pero luego imaginados en la mente.
2. *El mundo simbólico (procedimental-proceptual),* el cual crece fuera del mundo representado a través de acciones (tales como contar) y es simbolizado como conceptos pensables (tales como los números) que funcionan tanto como procesos para hacer y como conceptos para pensar (proceptos).
3. *El mundo formal (axiomático),* basado en definiciones formales y demostraciones, que invierte la secuencia de construcción del significado de definiciones basado en objetos conocidos, a conceptos formales cuyas propiedades son demostradas a partir de un conjunto teórico de definiciones.

Resulta que esos tres mundos se construyen a partir de tres habilidades fundamentales que Tall llama “set-befores” (conjuntos dados), ya que es un conjunto que tenemos antes de nuestro nacimiento en nuestros genes y se desarrolla naturalmente a través de nuestras experiencias sociales en la vida (Ibíd., pp. 482 – 483):

a) Reconocimiento de similitudes, diferencias y patrones.
b) Repetición de acciones para hacerlas rutinarias.
c) Lenguaje para nombrar a los fenómenos, hablar sobre ellos y refinar su significado.

Con base en dichas ideas teóricas, Tall (2009) propone un “enfoque localmente recto” para el estudio de nociones del cálculo, cuya intención es usar el conocimiento de los estudiantes construido antes de la sesión de cálculo, suavizando el paso de las ideas “imaginativas” de cambio de pendiente y crecimiento de áreas. Este enfoque comienza con el segundo nivel de Donald (2001; citado en Tall, 2009) de la conciencia a corto plazo para construir un sentido visual y táctil del cambio de la pendiente a través del movimiento de la mano que sigue el cambio de la pendiente. Esto da un sentido humano de la función pendiente que no es fácilmente cuantificable (¿cómo podemos calcular la pendiente con una mano?). Sin embargo, usando el tercer nivel de Donal de la conciencia ampliada o extendida y la computadora, fácilmente podemos calcular numéricamente la pendiente para dar sentido a las representaciones visuales. Así, el concepto de función pendiente se puede ver sucesivamente en tres etapas: 1) Una representación sensorial para el cambio de la pendiente; 2) Un cálculo numérico lo suficientemente bueno para sugerir la posible fórmula para la función pendiente; y 3) Cálculo simbólico de la función pendiente.

Tall (2009) concluye señalando que el enfoque de la "rectitud local" ofrece un primer acercamiento al estudio del cálculo, y que puede actuar como precursor para el análisis matemático estándar (mediante límites) o no estándar (mediante infinitesimales); o bien, ser un apoyo significativo para el cálculo práctico en sus aplicaciones.

En diversos trabajos (Font 1999; 2005; 2008; Inglada y Font 2003) se han centrado en el análisis de las *representaciones ostensivas* asociadas a $f(x)$ y $f'(x)$. Según Font (2008) el interés por buscar alternativas a la definición de la función derivada por límites que presenten menos complejidad semiótica que ésta, le llevó a plantearse la cuestión sobre cómo conseguir la emergencia de $f'(x)$ a partir de $f(x)$, la cual se concreta en cómo calcular $f'(x)$ a partir de $f(x)$. Font (1999) considera que las diferentes representaciones ostensivas de los objetos matemáticos y las traducciones entre ellas son un elemento fundamental para la comprensión y, por tanto, para la enseñanza y aprendizaje de la derivada. Así, de acuerdo con Font, el cálculo de $f'(x)$ a partir de $f(x)$ en el aula, se puede interpretar como un proceso en el que, a su vez, se han de considerar tres subprocesos:

1. Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f(x)$.
2. El paso de una representación de $f(x)$ a una forma de representación de $f'(x)$.
3. Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f'(x)$.

De esta forma, entender el cálculo de la función derivada como un proceso en el que intervienen tres subprocesos, en cada uno de los cuales se pueden utilizar diferentes representaciones, permite ampliar el "abanico" de técnicas de cálculo de la función derivada que no se restrinja al cálculo por límites o al uso de reglas de derivación. Font (2008) señala que dichas técnicas pueden ser sugeridas por las posibilidades de los graficadores de funciones, la historia de las matemáticas, etc.; y que la incorporación de graficadores en la enseñanza de la derivada produce efectos metafóricos que condicionan la comprensión de los alumnos, por lo que se deberían contemplar, además de las representaciones, otros aspectos tales como las metáforas y las argumentación utilizadas en el discurso de los profesores y alumnos, para estructurar dicha comprensión.

1.3.3. Estudios sobre los aspectos discursivos (argumentaciones, metáforas y metonimias)

Actualmente ha aumentado considerablemente el interés en investigar el discurso y la argumentación en el aula de matemáticas, ya que se ha considerado que lo que se dice de las tareas matemáticas es tanto o más importante que las propias tareas. Así, los estudios sobre estos dos aspectos, el discurso y la argumentación, se han abordado en la educación matemática desde diversas perspectivas, entre las cuales destacan las siguientes (Font, 2009, p. 16):

a) Aquellas que se han centrado en el discurso del docente (y también del alumno) cuando utiliza un razonamiento matemático para la demostración de teoremas en el salón de clase; principalmente los investigadores se han interesado en cómo se consigue dar validez a la argumentación.
b) Las investigaciones que estudian el uso de las metáforas en el discurso del profesor y de los alumnos.

Por ejemplo, Font (2009) centrándose en el segundo punto, de los anteriores, analiza dos secuencias de actividades para calcular la derivada de la función $f(x) = x^2$ en las que no se utiliza la definición de la función derivada como límite de las tasas medias de variación. Concretamente, analiza las formas de argumentación que utilizan alumnos de bachillerato cuando prueban que la derivada de la función $f(x) = x^2$ es $f'(x) = 2x$. Font señala que la validez de la argumentación en la primera secuencia que analiza, se consigue por medio de una combinación de inducción, abducción y deducción, mientras que en la segunda observa una combinación de una evidencia empírica, resultado de una abstracción reflexiva y una deducción. Así mismo señala que el uso de software dinámicos, los cuales utiliza en las secuencias de actividades que analiza, facilita la generalización que se pretende que logren los estudiantes, y que las construcciones que se pueden realizar con éstos, permite a los alumnos calcular funciones derivadas sin necesidad de utilizar límites (siempre que se haya trabajado previamente la interpretación geométrica de la derivada en un punto).

Sin embargo el uso de dichos software produce otros efectos, uno de los más importantes es que estructura implícitamente las gráficas funcionales en términos de la metáfora *"La gráfica de una función se puede considerar como la traza que deja un punto que se mueve sobre un* *camino"*, lo cual tiene sus ventajas e inconvenientes como evidencia en su trabajo de tesis doctoral (Font, 1999).

Otro trabajo relacionado con los aspectos discursivos dentro de las clases de matemáticas, es el de Zandieh y Knapp (2006) en el que exploran el rol que juegan las *metonimias*[15], como constructos cognitivos, en el razonamiento y comprensión de conceptos matemáticos de los estudiantes. En su trabajo se centran en el análisis de dos tipos de metonimias, las *parte-todo* y las *parte-parte*. Las primeras, las metonimias parte-todo, pueden ser de dos tipos *metonimias individuales* y *metonimias paradigmáticas*; el primer tipo ocurre cuando la parte es una porción de toda la estructura cognitiva, mientras que el segundo tipo ocurre cuando la parte es un prototipo de toda la categoría. El segundo tipo de metonimias, las parte-parte, ocurren cuando una parte de una estructura cognitiva representa a otra parte de la misma estructura cognitiva.

El estudio de Zandieh y Knapp (2006) toma de referencia el *marco teórico de la derivada* desarrollado por Zandieh (2000), y consistió en cinco entrevistas semi-estructuradas a nueve estudiantes de secundaria. En cada una de esas entrevistas se les preguntó a los estudiantes una amplia gama de cuestiones sobre el concepto de derivada, por lo que sus respuestas podían considerarse como una aproximación a la *imagen* que tenían formada los estudiantes sobre dicho concepto. Los autores señalan que, de acuerdo a los resultados, hay un número de formas en que las metonimias se producen en el razonamiento de los estudiantes dentro del concepto de derivada (p. 5):

1. El uso del contexto del concepto de derivada como ejemplo paradigmático (metonimia paradigmática);
2. El uso de las capas del concepto de derivada para representar el concepto total (metonimia individual);
3. La reificación potencial involucrada en el encadenamiento de los pares proceso-objeto en el marco teórico;
4. Errores usando las referencias que podrían ser descritas como metonimias pero son matemáticamente inexactas;

[15] En el diccionario de la Real Academia Española, una *metonimia* es definida como un tropo que consiste en designar algo con el nombre de otra cosa tomando el efecto por la causa o viceversa, el autor por sus obras, el signo por la cosa significada, etc., por ejemplo, "leer a Virgilio" en lugar de "leer las obras de Virgilio".

5. La habilidad de los estudiantes para impulsar su comprensión de un contexto de la derivada para ayudar a su comprensión de la derivada en diferentes contextos.

Zandieh y Knapp concluyen que las metonimias pueden ayudar de manera importante en la comprensión de cómo los estudiantes comprenden y trabajan con conceptos complicados tal como la derivada; sin embargo hay que tener cuidado con su uso, ya que al simplificar la estructura cognitiva, los estudiantes pueden tener interpretaciones erróneas.

1.4. LA PROBLEMÁTICA EN TORNO AL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DE LOS PROFESORES PARA LA ENSEÑANZA DE LA DERIVADA

De acuerdo con Ponte y Chapman (2006), las investigaciones realizadas dentro del campo de formación de profesores de matemáticas, se han centrado en diversos aspectos del conocimiento y la práctica del profesor, mismos que pueden ser agrupados en cuatro grandes categorías: a) conocimiento matemático de los profesores, b) conocimiento de los profesores para la enseñanza de las matemáticas, c) creencias y concepciones de los profesores, y d) la práctica del profesor.

En lo que se refiere a los conocimientos del profesor de matemáticas, como se evidenció en el apartado 1.2, existen diversas propuestas de modelos con los que se tratan de determinar los elementos que constituyen el conocimiento que los profesores de matemáticas deberían tener para desarrollarse lo más eficazmente posible en su práctica. Sin embargo, como vimos en ese mismo apartado, aún no existe un consenso acerca de lo que un profesor debería conocer para la enseñanza de tópicos concretos como el de derivada. Tan es así que, como vimos en ese mismo apartado (1.2) los modelos se han centrado en la caracterización de los componentes de tales conocimientos de los profesores (por ejemplo los componentes del MKT), pero ¿cuáles son los criterios que nos permiten observar dichos conocimientos en los profesores?, y más aún, ¿cómo lo potenciamos? Estas y otras cuestiones, aún siguen vigentes en la actualidad.

Otras investigaciones se han centrado en determinar el conocimiento que el profesor de matemáticas necesita para su práctica profesional, *el conocimiento profesional del profesor de matemáticas*. Llinares (2000) señala que la práctica profesional del profesor es el conjunto de actividades que genera cuando realiza tareas que definen la enseñanza de las matemáticas y la justificación dada por el profesor. Así, el conocimiento profesional está estrechamente vinculado a la acción, y de acuerdo con Ponte (1994), incluye tres tipos de conocimiento: *académico*, *profesional* y *sentido común*.

Las investigaciones sobre la práctica del profesor en lo referente a la enseñanza de la derivada se pueden clasificar, de acuerdo con Gavilán (2005), en dos grupos: aquellas relativas al uso de las nuevas tecnologías (ordenadores, calculadoras gráficas) y aquellas que señalan el uso de problemas de aplicación a ciencias del cálculo, introduciéndolo a través de problemas, por ejemplo, de la física. Dichas investigaciones relativas a la práctica del profesor cuando enseñan cálculo, ponen de manifiesto la búsqueda de formas de modelar o caracterizar dicha práctica a través del uso de herramientas tecnológicas, presencia de diferentes representaciones o uso de situaciones en las que se aplica el cálculo.

Por su parte, el estudio de las creencias y concepciones resulta necesario para comprender la práctica de los profesores de matemáticas. Estos constructos han sido intensamente investigados dentro del campo de la educación matemática y de la psicología cognitiva, entre otros aspectos, para tratar de establecer diferencias entre ellos. Por ejemplo, Flores (1998) señala que el término creencia se atribuye a una actitud y a un contenido; la actitud se encierra tanto en el grado de probabilidad de certeza como en la predisposición a la acción, lo que confiere un carácter emotivo, mientras que el contenido encierra un conocimiento que no necesita formularse en términos de modelos compartidos, y que se caracteriza por no haber sido contrastado. Las concepciones las entiende en el sentido de Thompson (1992), es decir, como el constructo que incluye tanto los aspectos emotivos (creencias) como los cognitivos, conceptuales y conscientes que organizan el pensamiento. Flores (1998) entiende a las creencias y concepciones como significados que atribuyen los profesores en formación inicial a las matemáticas y a su enseñanza y aprendizaje. Estos significados (creencias y concepciones) de los sujetos no son directamente observables, sino que pertenecen a un nivel de información más profundo, muchas veces inconsciente, no siempre accesible al sujeto investigado.

Moreno (2005), señala que las creencias juegan un papel muy importante en todo lo que se relaciona con el profesor y la toma de decisiones en su ámbito profesional, por lo que cualquier intento de implementación de la calidad docente debería pasar por detectar, identificar, analizar e interpretar cuáles son las concepciones y creencias de los profesores sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y la materia en sí misma en su contexto específico de enseñanza. Sin embargo, las investigaciones desarrolladas cuyo objetivo es determinar las creencias y concepciones de los profesores con relación a la enseñanza de la derivada, han sido muy escasas. Uno de ellas es el trabajo propuesto por García, Azcárate y Moreno (2006) en el cual se estudian las creencias y concepciones de diez profesores universitarios del área de ciencias económicas, respecto de cómo abordan la enseñanza del cálculo diferencial, qué ejemplos matemáticos o no matemáticos consideran los más adecuados para llegar al objeto derivada, qué tipos de aplicaciones de la derivada enseñan a sus estudiantes y cuál es su postura frente a una propuesta de enseñanza del cálculo con problemas que involucran situaciones reales de la carrera objeto de estudio. Los investigadores concluyen que, debido a sus creencias, casi todos los profesores abordan la enseñanza de la derivada de manera tradicional, dando más énfasis al contenido matemático, descuidando así, el contenido del área de la economía relacionado con el cálculo diferencial.

Otro estudio en este mismo sentido es el desarrollado por Bingolbali, Monaghan y Roper (2007) en el cual llevaron a cabo un estudio en el que examinaron las concepciones que tienen los estudiantes del primer curso de ingeniería mecánica sobre el concepto de derivada. Para ello recabaron datos mediante pre y post test, entrevistas y observación de clases; también se recogieron datos sobre las concepciones que tienen estudiantes de la carrera de matemáticas, mismos que sirvieron para compararlos con los datos obtenidos de los estudiantes de ingeniería. Los autores llegaron a la conclusión de que, en general, los estudiantes de ingeniería conciben la derivada en términos de razón de cambio, mientras que los estudiantes de matemáticas la conciben en términos de la pendiente de la recta tangente. Así mismo, concluyeron que los estudiantes de ingeniería veían las matemáticas como una herramienta y que necesitaban las aplicaciones del concepto de derivada para sus cursos de cálculo en su profesión. Así mismo, señalan que estas diferencias de comprensión, preferencias y concepciones, entre los estudiantes de ingeniería y los de matemáticas sobre el concepto de derivada, son una clara evidencia de que se deben considerar las opiniones y expectativas de los ingenieros, a la hora de tomar decisiones sobre qué matemáticas enseñar.

No cabe duda que el estudio de las creencias y concepciones es fundamental si queremos explorar o indagar el conocimiento de los futuros profesores, puesto que éstas son parte esencial de dicho conocimiento. Sin embargo, como señalan García, Azcárate y Moreno (2005), el estudio de las creencias y concepciones no es suficiente, sino que es necesario seguir avanzando en aspectos tales como profundizar en el conocimiento del contenido, el conocimiento de la enseñanza, etc., pero de aspectos concretos tales como el conocimiento del profesor sobre el objeto matemático derivada y su relación con otras áreas, por ejemplo, la economía.

1.5. UNA APROXIMACIÓN AL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Como hemos evidenciado a lo largo de este capítulo, la derivada ha sido objeto de especial atención desde distintas aproximaciones teóricas, particularmente las cuestiones de índole cognitiva (concepciones de los estudiantes, esquemas cognitivos y tipos de errores) e instruccionales (estrategias y alternativas para la enseñanza de la derivada), tal y como se muestra en Artigue, Batanero y Kent (2007) o en Sánchez, García y Llinares (2008).

Esta gran cantidad de resultados de la investigación didáctica sobre la derivada, plantea un reto a los formadores de profesores que sintetizamos con la pregunta:

¿Qué es lo que debería conocer un profesor para que su enseñanza de las derivadas tenga la mayor idoneidad didáctica posible?

En este sentido, en el presente trabajo de investigación, nos hemos propuesto avanzar en la caracterización de aquellos conocimientos que los futuros profesores deberían tener para gestionar los aprendizajes sobre la derivada de sus futuros estudiantes, contraponiendo esto con los conocimientos que efectivamente tienen sobre la derivada. Lo anterior es con la pretensión de establecer pautas que nos ayuden, si bien es cierto, no a responder completamente la pregunta anterior, sí a realizar aproximaciones a su respuesta, obteniendo así, una visión más amplia de hacia dónde seguir o por dónde avanzar para el diseño de acciones que permitan la mejora de la formación de profesores mediante el desarrollo y/o la potenciación del conocimiento didáctico-matemático requerido para la enseñanza de la derivada.

Para lograr esto, planteamos las siguientes preguntas, que si bien aún no constituyen las preguntas ni los objetivos específicos de nuestra investigación, sí otorgan al lector un panorama más claro acerca de lo que se abordará a lo largo de esta tesis doctoral, ya que éstas constituyen aproximaciones a nuestro problema de investigación. Estas preguntas pueden ser vistas, hasta cierto punto, como preguntas “inocentes”, pero las reformularemos una vez presentado, en el Capítulo 2, el marco teórico que utilizaremos como referencia y dentro del cual enmarcaremos nuestro trabajo, para así tener herramientas teóricas y el “vocabulario técnico” para redefinirlas de forma precisa. Estas preguntas son:

> *P1. ¿Cuál es el conocimiento didáctico-matemático que necesitan los futuros profesores de secundaria/bachillerato con relación a la enseñanza de la noción derivada, considerando el estado actual de las investigaciones en Didáctica del Cálculo?*

Esta primera pregunta está planteada en el sentido de caracterizar los componentes del complejo de conocimientos didácticos y matemáticos que requiere un profesor para la gestión adecuada de conocimientos sobre la derivada en sus futuros estudiantes de secundaria/bachillerato. No obstante, anticipándonos un poco a la respuesta a dicha pregunta, y tomando en cuenta los desarrollos realizados en los apartados 1.3 y 1.4, sobre la diversidad de significados parciales de la derivada, una pregunta que surge de manera natural es

> *P2. ¿Es posible caracterizar la complejidad de la derivada? De ser así, ¿qué es la derivada, o bien, cual o cuáles son sus significados?*

Esta segunda pregunta nos lleva a cuestionarnos, ¿los futuros profesores son consientes de esta diversidad de significados de la derivada? ¿conocen qué es la derivada? Esta y otras cuestiones, nos llevan a la pregunta tres:

> *P3. ¿Cuál es el conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada que efectivamente tienen los futuros profesores de bachillerato?*

La respuesta a esta tercera pregunta tiene como finalidad la exploración y caracterización del conocimiento didáctico-matemático inicial de los futuros profesores, puesto que lo “ideal” en su formación sería buscar un acoplamiento entre los conocimientos que efectivamente tienen (conocimiento inicial, P3) respecto de los conocimientos de referencia (lo que requieren saber, P1). Para ello como veremos de manera más profunda en la sección de metodología, hemos tomado una muestra de futuros profesores de bachillerato en México. En la búsqueda de este acoplamiento entre los conocimientos didáctico-matemáticos iniciales de los futuros profesores y el de referencia, es que surge nuestra cuarta cuestión:

P4. ¿Cómo desarrollamos y potenciamos este conocimiento didáctico-matemático en la formación inicial de los profesores de secundaria/bachillerato?

Finalmente, pero no menos importante, en la búsqueda de respuestas a las preguntas anteriores nos planteamos la siguiente:

P5. ¿Es posible contribuir teórica y metodológicamente, con nuestra investigación, al campo de formación de profesores mediante el planteamiento de una metodología didáctica que permita a los formadores de profesores potenciar, y a los futuros profesores adquirir, el conocimiento didáctico-matemático necesario para la enseñanza idónea del objeto derivada?

Así, para esta investigación nos hemos propuesto el siguiente objetivo, que al igual que en el caso de las cuestiones anteriormente planteadas, se trata de una aproximación, y será redefinido una vez hayamos presentado nuestro marco teórico de referencia.

Aproximación al Objetivo General

Determinar si los futuros profesores de secundaria/bachillerato en México, al final de su proceso de instrucción, han generado un conocimiento didáctico-matemático suficiente, para la enseñanza idónea de la derivada.

CAPÍTULO 2

Marco Teórico, Problema de Investigación y Metodología

2.1. INTRODUCCIÓN

El presente capítulo está estructurado en tres grandes apartados. En el primero de ellos presentamos las “herramientas” y nociones teóricas que enmarcan nuestra investigación las cuales utilizamos para el desarrollo de nuestro estudio; concretamente presentamos el marco teórico conocido como “enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática”. A partir de las nociones de dicho marco teórico y metodológico en el segundo apartado redefinimos nuestras preguntas y objetivos de investigación, planteando y describiendo, para cada uno de ellos, distintas fases y tareas encaminadas a la consecución de cada uno de dichos objetivos. La metodología empleada para cada fase de la investigación se describe en el apartado tres.

2.2. EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMATICA

Para lograr nuestro propósito, hemos adoptado el marco teórico conocido como Enfoque Onto-Semiótico (EOS) de la cognición e instrucción matemática desarrollada en diversos trabajos por Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino y Batanero, 1998; Godino, Batanero y Font, 2007). Dicho marco teórico incluye un modelo epistemológico sobre las matemáticas, sobre bases antropológicas y socioculturales, un modelo cognitivo, sobre bases semióticas de índole pragmatista, y un modelo instruccional coherente con los anteriores. El EOS viene desarrollándose desde 1994, en interacción con diversas investigaciones teóricas y experimentales desarrolladas en tesis doctorales y otros trabajos de investigación, y lo estamos usando porque nos provee de "herramientas" teóricas que nos permitirán realizar un análisis detallado y pertinente de los conocimientos didáctico-matemáticos que deben de tener los profesores de bachillerato para la instrucción de la derivada.

A continuación describiremos brevemente algunas de las nociones del EOS que serán de utilidad para el desarrollo de este trabajo con el fin de hacer comprensible la lectura de esta memoria.

2.2.1. Sistemas de prácticas: personales e institucionales

Dentro del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, la noción de *"sistema de prácticas"* juega un papel central tanto desde el punto de vista epistemológico como didáctico. Con esta noción se asume y hace operativo el supuesto antropológico sobre las matemáticas en que se apoya el EOS. Godino y Batanero (1994) llaman sistema de prácticas a *"toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas"* (p. 334). Así, estas prácticas pueden ser realizadas por una persona o compartidas en el seno de una institución, lo cual da lugar a las nociones de *sistemas de prácticas personales* y *sistemas de prácticas institucionales,* las cuales son definidas por Godino y Batanero (1994) como sigue:

> *"El sistema de prácticas institucionales, asociadas a un campo de problemas, está constituido por las prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas C y compartidas en el seno de la institución I" (p. 337).*

> *"Los sistemas de prácticas personales, asociadas a un campo de problemas, está constituido por las prácticas prototípicas que una persona realiza en su intento de resolver un campo de problemas C. Representamos este sistema por la notación $P_p(C)$" (p. 339).*

Como señalan Font, Godino y Gallardo (2013), las prácticas matemáticas pueden ser conceptualizadas como la combinación de una práctica operativa, a través de la cual los textos matemáticos son leídos y producidos, y una práctica discursiva, la cual permite la reflexión sobre las prácticas operativas (p. 104). Los sistemas de prácticas se proponen como respuestas a la cuestión semiótica, ¿qué significa el objeto O?, o a la cuestión ontológica,

¿qué es el objeto matemático O? (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2011). En los siguientes apartados veremos cuál es la relación subyacente entre los sistemas de prácticas, los objetos matemáticos y sus significados.

2.2.2. Objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas

En el EOS se adopta de entrada un cierto pragmatismo puesto que se considera a los *objetos matemáticos* como entidades emergentes de los sistemas de prácticas realizadas para resolver un campo de problemas (Godino y Batanero, 1994). Font, Godino y Gallardo (2013) lo señalan de la siguiente manera "*Nuestra propuesta ontológica se deriva de la prácticas matemáticas, siendo éstas el contexto básico en la que los individuos obtienen su experiencia y de las cuales los objetos matemáticos emergen. Consecuentemente, el objeto adquiere un estatus derivado de las prácticas que le preceden*" (p. 104).

En las prácticas matemáticas intervienen objetos *ostensivos* (símbolos, gráficos, etc.) y *no ostensivos* (conceptos, proposiciones, etc.), que evocamos al hacer matemáticas y que son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual. De los sistemas de prácticas matemáticas operativas y discursivas emergen nuevos objetos que provienen de las mismas y dan cuenta de su organización y estructura. Ahora bien, como vimos en la sección anterior, los sistemas de prácticas pueden ser personales o institucionales; así, si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución entonces los objetos emergentes se considerarán como *"objetos institucionales"*, mientras que si tales sistemas corresponden a una persona, entonces serán considerados *"objetos personales"*. Godino y Batanero (1994) los definen de la siguiente manera:

> *"El objeto institucional O_I es un emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de $P_I(C)$. Los elementos de este sistema son los indicadores empíricos de O_I" (p. 338). Mientras que el "objeto personal O_p es un emergente del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de $P_p(C)$" (p. 339).*

Los autores señalan que la emergencia del objeto personal es progresiva a lo largo de la historia del sujeto, como consecuencia de la experiencia y del aprendizaje; mientras que la emergencia del objeto institucional es progresiva a lo largo del tiempo. En un momento dado es reconocido como tal objeto por la institución, pero incluso después de esta etapa sufre transformaciones progresivas según se va ampliando el campo de problemas asociados.

Como hemos señalado, en las prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos (lenguaje, símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (conceptos, proposiciones, etc.); en este sentido dentro del EOS se propone la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios, intervinientes en los sistemas de prácticas (Godino, Batanero y Font, 2007):

- *Elementos lingüísticos* (términos, expresiones, notaciones, gráficos,…) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual,…).
- *Situaciones-Problemas* (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios,…).
- *Conceptos/Definiciones* (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, derivada,…).
- *Proposiciones/Propiedades* (enunciados sobre conceptos,…).
- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo,…).
- *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo,…).

A su vez estos objetos se organizan en entidades más complejas: sistemas conceptuales, teorías, etc. Estos seis tipos de entidades primarias postuladas amplían la tradicional distinción entre entidades conceptuales y procedimentales, al considerarlas insuficientes para describir los objetos intervinientes y emergentes de la actividad matemática. Las situaciones-problemas son el origen o razón de ser de la actividad; el lenguaje representa las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción; los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí.

En el apartado 2.2.4 veremos cómo estos objetos primarios están relacionados entre sí formando redes más complejas de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas.

2.2.3. Significados y tipos de significados de los objetos matemáticos

En el EOS se concibe el significado de los conceptos matemáticos (número, función, derivada,…), desde una perspectiva pragmático-antropológica. El significado de un objeto matemático se define como el *sistema de prácticas operativas y discursivas que una persona (o una institución) realiza para resolver una cierta clase de situaciones–problemas en las* *que dicho objeto interviene*. Así, el significado de un objeto matemático puede ser visto desde dos perspectivas, institucional y personal, lo cual da origen a los *significados institucionales* y *significados personales* respectivamente. Godino y Batanero (1994) definen estos significados de la siguiente manera:

> *"Significado de un objeto institucional O_I es el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge O_I en un momento dado" (p. 340).*

Esta noción de significado institucional permite introducir en la problemática epistemológica y didáctica, el estudio de la estructura de los sistemas de prácticas sociales de los que emergen los objetos matemáticos, así como su evolución temporal y dependencia institucional. En correspondencia con el significado institucional de un objeto, los autores dan la siguiente definición:

> *"Significado de un objeto personal O_p es el sistema de prácticas personales de una persona p para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto O_p en un momento dado" (p. 341).*

Hay que resaltar que los significados personales incluyen conocimiento, comprensión y competencia. Además, es obvio que los objetos personales e institucionales no tienen un único significado. Por ejemplo, en una clase de matemáticas (una institución) en donde se lleva a cabo un sistema de prácticas de donde emerge el objeto "derivada", el significado que los estudiantes atribuyan a dicho objeto dependerá de los sistemas de prácticas que lleve a cabo esa institución en particular, y que es distinto al significado subyacente a los sistemas de prácticas que lleve a cabo otra institución.

Los sistemas de prácticas se han categorizado teniendo en cuenta diversos puntos de vista. El primero es la distinción entre la faceta personal, o idiosincrásica de un sujeto, de las prácticas y la faceta institucional (compartida, social) de las mismas. Cuando esta noción se aplica a la descripción de los conocimientos de un sujeto particular será necesario distinguir el sistema global de prácticas que potencialmente puede poner en juego dicho sujeto, de los subsistemas de prácticas declaradas (en un proceso de evaluación) y logradas (al ser comparadas con unas prácticas institucionales de referencia). En cuanto a las prácticas institucionales también es necesario distinguir entre las efectivamente implementadas en un proceso de estudio, de las pretendidas, y de las prácticas de referencia. La interpretación semiótica de las prácticas lleva a hablar de tipologías de significados (ver Figura 2.1) personales (globales, declarados y logrados) y de significados institucionales [16] (implementados, evaluados, pretendidos, referenciales) (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2011).

Como señalan Godino y Batanero (1994) los significados logrados por los estudiantes dependen fundamentalmente de los significados institucionales, concretamente, de los significados pretendidos asociados a los sistemas de prácticas planificados para un proceso particular de instrucción, así como de los significados efectivamente implementados en dicha instrucción y de los evaluados. Además, el profesor, como parte de la institución escolar, debe recurrir, para la elección de los significados pretendidos, a los significados de referencia. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático. La determinación de dicho significado global (u holístico) requiere realizar un estudio histórico-epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos (sistemas de prácticas) de uso donde se pone en juego dicho objeto.

Figura 2.1. Tipología de significados sistémicos

El significado global de referencia se define a partir de dos nociones: 1) significado global, también denominado significado holístico u holo-significado, comprende los diferentes significados parciales de un objeto matemático; y 2) significado de referencia, entendido

[16] Para más detalles acerca de los tipos de significados institucionales y personales, ver Godino, Batanero y Font (2007).

como los sistemas de prácticas que se usan como referencia para elaborar los significados que se pretenden incluir en un proceso de estudio (Pino-Fan, Godino y Font, 2011; Pino-Fan, 2011). Para una institución de enseñanza concreta, el significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático.

2.2.4. Configuraciones de objetos y procesos

La noción de "sistema de prácticas" es útil para ciertos análisis de tipo macrodidáctico, particularmente cuando se trata de comparar la forma particular que adoptan los conocimientos matemáticos en distintos marcos institucionales, contextos de uso o juegos de lenguaje. Para un análisis más "fino" de la actividad matemática, en el EOS se ha introducido la tipología de objetos matemáticos primarios antes comentada (situaciones, lenguaje, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos). Estos objetos matemáticos primarios están relacionados entre sí formando *redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas*, lo que en el EOS se conoce con el nombre de *configuraciones*. Estas configuraciones pueden ser socio-epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales).

Así, para la realización de una práctica matemática y para la interpretación de sus resultados como satisfactorios se necesita poner en funcionamiento determinados conocimientos. Si consideramos, por ejemplo, los componentes del conocimiento para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una situación-problema (e.g., plantear y resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas) vemos el uso de *lenguajes*, verbales y simbólicos. Estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de *conceptos*, *proposiciones* y *procedimientos* que intervienen en la elaboración de *argumentos* para decidir si las acciones simples que componen la práctica, y ella en tanto que acción compuesta, son satisfactorias. En consecuencia, cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática, activa un conglomerado formado por situaciones–problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, articulados en la *configuración* de la Figura 2.2 (Font y Godino, 2006, p. 69).

La definición de objeto como emergente de los sistemas de prácticas, y la tipología de objetos primarios responden a la necesidad de poder describir los sistemas de prácticas, a fin de compararlos entre sí y tomar decisiones en el diseño, desarrollo y evaluación de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

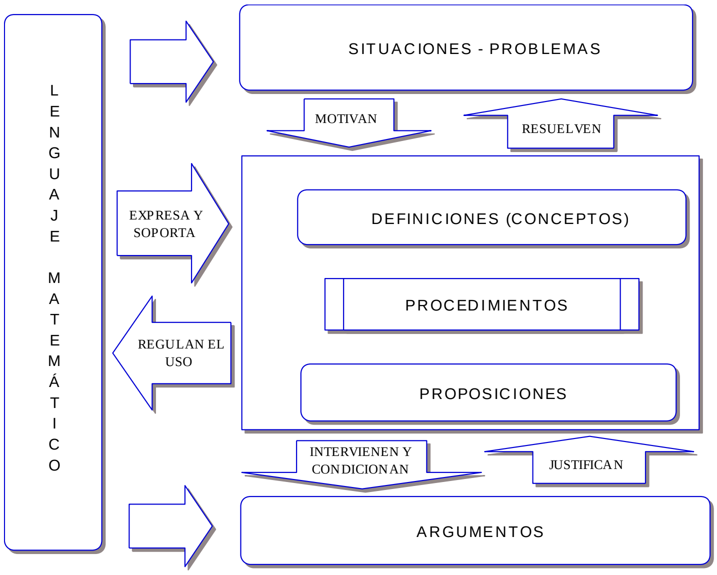


Figura 2.2. Configuración de objetos matemáticos primarios

Estos objetos matemáticos primarios que conforman la configuración, se manifiestan de diversas maneras durante la actividad matemática: el lenguaje con el cual nos referimos a ellos, que a su vez evocan a conceptos o definiciones, los cuales se operativizan mediante procedimientos y propiedades asociadas, que se manifiestan durante la solución de las tareas matemáticas. Además, cada uno de los objetos matemáticos primarios puede ser considerado desde distintas facetas o dimensiones duales: personal–institucional, unitario–sistémico, expresión–contenido, ostensivo–no ostensivo y ejemplar–tipo. Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy (2011) señalan que tanto estas dualidades como los objetos matemáticos primarios, pueden ser analizados desde una perspectiva proceso–producto, lo que conlleva a considerar los siguientes procesos:

- Institucionalización – Personalización
- Generalización – Particularización
- Descomposición/Análisis – Composición/Reificación
- Materialización – Idealización
- Representación – Significación

La emergencia de los objetos matemáticos primarios considerados en el modelo (Figura 2.2) llevan asociados, respectivamente, los procesos de problematización, comunicación, definición, algoritmización, enunciación y argumentación. La Figura 2.3 muestra el desglose, y las interacciones, de los objetos matemáticos primarios, las facetas duales desde las que éstos pueden ser vistos, y los procesos que llevan asociados.

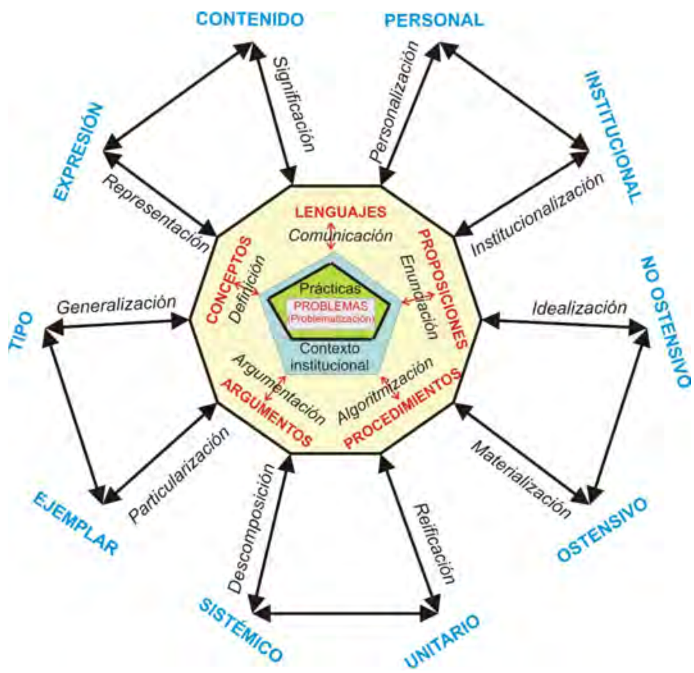


Figura 2.3. Configuración de objetos y procesos matemáticos

Otros procesos como los de resolución de problemas y la modelización pueden ser vistos como "Mega Procesos" e implican la intervención y activación de los procesos antes mencionados, los cuales se presentan en la Figura 2.3. En esta figura se puede observar el papel central que tienen en el EOS las situaciones – problemas y las prácticas realizadas para resolverlas, así como su dependencia de los contextos institucionales en que tienen lugar.

2.2.5. Relación entre creencia y configuración cognitiva

Existen diversas interpretaciones acerca de lo que es una creencia, resumimos aquí la posición de Rubio (2012). Una de la más importantes es la que proporciona Peirce (citado en Faerna, 2006), quien señala que una creencia se debe entender como "disposición para la acción". Peirce denomina genéricamente "investigación" o "indagación" al proceso que desencadena las irritaciones experimentadas por el organismo y cuyo fin es establecer un estado de creencia (Yo creo P). Así, vemos que el término "creencia" está asociado a "acciones", las cuales son respuesta a la "situación" que se le presenta al organismo, y a "proposiciones" (Yo creo P) las cuales en muchos casos son propiedades que relacionan "conceptos". Según Peirce, el sujeto ante una determinada "situación–problema", genera un proceso de "investigación" para establecer la creencia "Yo creo P". Ahora bien, si reflexionamos con más detalle sobre el mecanismo de fijación de creencias propuesto por dicho autor, vemos que el paso de la "duda" a la "creencia" exige unos métodos de razonamiento que rigen las operaciones simbólicas que permiten tal paso. Tales métodos se desarrollan por imperativo de la experiencia y se refinan con el uso. Por otra parte, es evidente que todo lo anterior requiere expresarse por medio de un cierto "lenguaje". En otros términos, la práctica realizada por un sujeto, que genera (o está de acuerdo con) una determinada creencia, se puede considerar como el resultado de la activación de algo parecido a lo que en el EOS se ha denominado "*configuración cognitiva de objetos y procesos*" o "*configuración cognitiva*".

Por ejemplo si la creencia del sujeto es que "$2 + 2 = 5$", esta creencia se puede entender como una norma personal (cognitiva) que formará parte de la configuración cognitiva que el sujeto aplicará en la realización de prácticas matemáticas en las que sumar, y de manera regular se podrá observar que siempre que el alumno tenga que sumar dos más dos dará como resultado la proposición "es cinco".

2.2.6. Relación entre concepción y significado personal de un objeto matemático

De acuerdo con Artigue (1990), la noción de concepción es uno de los constructos más usados en didáctica de las matemáticas. Este hecho justifica el que se hayan propuesto diversas caracterizaciones del término concepción, así como también el que se hayan propuesto diferentes criterios para distinguir entre creencia y concepción. Hay investigadores, por ejemplo Gil y Rico (2003) y Martínez (2003), que consideran las creencias como verdades personales incuestionables que son idiosincráticas, un conocimiento que no se cuestiona, que se asume sin ser problematizado, mientras que las concepciones serían un conocimiento más elaborado, más racional y más proposicional, que cuenta con procedimientos para valorar su validez.

En la literatura sobre creencias y concepciones se han propuesto otras distinciones para diferenciar las creencias de las concepciones. Para algunos investigadores, por ejemplo Moreno (2001) y Moreno y Azcárate (2003), la diferencia está en la temática, las concepciones tendrían que ver con las matemáticas y las creencias con la enseñanza y aprendizaje de las mismas. Otra opción está en diferenciar estos dos constructos en función de su complejidad –por ejemplo, D'Amore (2004) considera la concepción como un conjunto de creencias– o bien, en función de su carácter más básico –por ejemplo, Ponte (1994) las considera como un substrato conceptual que juega un papel importante en pensamiento y acción–, lo que en cierta medida es equivalente. En esta clasificación, las concepciones son consideradas un conjunto de creencias o bien como componentes básicos de muchas creencias diferentes. De acuerdo con esta doble perspectiva, las concepciones, para diversos autores, serían estructuras muy básicas compuestas, además de creencias, por otros componentes. Por ejemplo Thompson (1992), las caracteriza como una estructura mental general, abarcando creencias, significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales, preferencias y gustos.

Tal como explica Ramos (2006), el término "concepción" aparece también en la famosa máxima pragmática de Peirce: "Consideremos qué efectos, que puedan tener concebiblemente repercusiones prácticas, concebimos que tiene el objeto de nuestra concepción. Entonces, nuestra concepción de esos efectos es el todo de nuestra concepción del objeto" (citado en Faerna, 1996, p. 110). En esta máxima el término "concepción" se utiliza para clarificar el "significado". En efecto, se trata de una máxima para analizar el significado de los objetos en tanto que concebidos (es decir, de conceptos). En segundo lugar, el significado de un concepto, de acuerdo con dicha máxima, queda enlazado a otros significados y a otros conceptos ya que en las prácticas no interviene sólo el objeto que es el centro de nuestro interés. En tercer lugar, la máxima afirma que la concepción del objeto es la concepción de sus efectos prácticos concebibles. Ahora bien, puesto que concebir algo consiste en anticipar hipotéticamente su repercusión sobre la experiencia bajo ciertas circunstancias, esta máxima identifica la concepción con los efectos prácticos (sobre todo los futuros).

De acuerdo con Ramos (2006), cuando en el EOS se considera el significado de los objetos personales como el conjunto de prácticas en las que el objeto en cuestión juega un papel determinante, se está recogiendo esta visión pragmática de la "concepción". Además, la visión holística de los significados propuesta por el EOS, se relaciona, de cierta manera, con las investigaciones que consideran la concepción de un objeto como un sistema de creencias o como un substrato básico de las creencias. En efecto, si tomamos en cuenta la concepción de un objeto personal como equivalente al sistema de prácticas en las que el objeto juega un papel determinante, y dado que el objeto y cada práctica quedan relacionados por una configuración cognitiva que, en cierta medida, se puede considerar equivalente a la configuración asociada a una creencia, resulta que, en cierta forma, una concepción puede considerarse como un sistema de creencias.

2.2.7. El conocimiento didáctico-matemático de los profesores desde el punto de vista del Enfoque Onto–Semiótico

Desde hace aproximadamente 30 años, el estudio de los conocimientos que un profesor debería tener para la enseñanza idónea de tópicos concretos de matemáticas, ha ido tomando cada vez más interés tanto para la comunidad de investigadores en Matemática Educativa interesados en la formación de profesores, como para las administraciones educativas. La principal razón es que el desarrollo del pensamiento y competencias matemáticas de los estudiantes dependen esencialmente de los conocimientos, competencias, habilidades,…, de sus profesores.

Una de las problemáticas que ha generado un gran interés, por parte de la comunidad de investigación sobre formación de profesores, es la identificación del conocimiento didáctico-matemático requerido por los futuros profesores para la enseñanza de las matemáticas. Al respecto, una gran cantidad de investigaciones han sido orientadas a la identificación de los componentes del complejo de conocimientos que un profesor debería tener con el fin de desarrollar eficientemente su práctica y así, facilitar el aprendizaje de sus estudiantes. En ese contexto, tal y como lo presentamos en el Capítulo 1, los trabajos de Shulman (1986, 1987), Fennema y Franke (1992) y Ball (2000), muestran una visión multifacética sobre la construcción de los conocimientos requeridos para la enseñanza. Investigaciones más recientes tales como las de Ball, Lubienski y Mewborn (2001), Llinares y Krainer (2006), Ponte y Chapman (2006), Philipp (2007), Sowder (2007), Ball, Thames y Phelps (2008), Hill, Ball y Schilling (2008) and Sullivan y Wood (2008), nos muestran que no existe un acuerdo universal sobre un marco teórico para describir el conocimiento de los profesores de matemáticas (Rowland y Ruthven, 2011).

Por otra parte, otra de las discusiones que se tiene en el seno de las investigaciones sobre el conocimiento de los profesores, es en referencia, precisamente, al término “conocimiento”. ¿Qué es conocimiento? ¿Qué incluye? ¿Cuál es su relación con las competencias? No es nuestra intención generar todo un reporte acerca de estas cuestiones, pero sí nos servirán de guía para tomar un posicionamiento al respecto.

En un intento por consolidar una conceptualización del término, *conocimiento*, es posible inferir que en la investigación didáctica se recoge una aproximación al conocimiento del profesor como una integración cognitiva del conocimiento científico y conocimiento práctico, procedentes de diferentes dominios científicos y prácticos. El término “conocimiento” cobró fuerza cuando los estudios sobre el pensamiento del profesor –cuyos supuestos básicos eran: 1) el profesor es un sujeto reflexivo, racional, que toma decisiones, emite juicios, tiene creencias y genera rutinas propias de su desarrollo profesional; 2) los pensamientos del profesor influyen sustancialmente en su conducta e incluso la determinan.– dieron paso a una preocupación por el conocimiento del profesor. Este desplazamiento del interés de las investigaciones, en cierta manera, fue el resultado de un hecho evidente, que fue planteado inicialmente por Schön (1983 y 1987): Los docentes son profesionales que generan y desarrollan un conocimiento sobre la enseñanza que debe de ser investigado. Es decir, el convencimiento de que no sólo los procesos formales del pensamiento de los docentes median e influyen en el proceso de instrucción, sino que también los contenidos implícitos y explícitos en tal pensamiento, ha dirigido la atención de los investigadores hacia la necesidad de comprender mejor las características del conocimiento de los profesores. Ahora bien, la dificultad de conceptualizar el término “conocimiento” del profesor ha dado paso a diferentes intentos por delimitarlo a través de sus diversos componentes, tal y como ha quedado evidenciado en el Capítulo 1. Investigaciones posteriores a los trabajos de Shulman han puesto de manifiesto que el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido, más que considerarse como dos componentes separados, se tienen que considerar integrados (Llinares, 1996).

En la literatura no se encuentra una definición intensional del término “conocimiento”, lo que se observa es una aproximación extensional; es decir, se intenta especificar los componentes de dicho conocimiento (tal como la propuesta de Ball y colegas). Por ejemplo, según Llinares (1998), la mayoría de las investigaciones sobre el conocimiento del profesor, consideran que está formado por los siguientes componentes:

> *a) Conocimiento de matemática (conceptos, procesos…) y sobre la matemática (concepciones sobre la naturaleza de la matemática escolar); b) Conocimiento del currículum matemático; c) Conocimiento sobre las cogniciones de los aprendices: características del aprendizaje de nociones matemáticas específicas, dificultades, errores y obstáculos…; d) Conocimiento pedagógico específico de la matemática: de representaciones instruccionales, análisis de tareas, etc.; e) conocimiento sobre la enseñanza: planificación, rutinas, interacción, organización de la enseñanza, evaluación.” (p. 57).*

Desde nuestro punto de vista, el problema de estas aproximaciones por extensión, al conocimiento de los profesores, es que, como señala Godino (2009), los modelos del conocimiento matemático para la enseñanza elaborados desde las investigaciones en educación matemática, incluyen categorías demasiado globales y disjuntas. Por ejemplo, en nuestra opinión, una de las propuestas sobre el conocimiento de los profesores que ha tenido mayor impacto, es la denominada "Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)", desarrollada por Ball y colaboradores (Hill, Ball y Schilling, 2008), la cual supone avances en la caracterización de los componentes del conocimiento que debe tener un profesor para enseñar matemáticas. No obstante, a pesar de los avances que dicho modelo supone, aún quedan cuestiones fundamentales por responder, como por ejemplo, ¿Cómo determinar el conocimiento matemático para la enseñanza de los profesores con modelos que incluyen categorías demasiado globales? (Godino, 2009). Concretamente, ¿De qué forma o bajo qué criterios se puede evaluar o medir el MKT? ¿Cómo se puede ayudar a los profesores a adquirir o a desarrollar los distintos componentes del MKT? En palabras de Silverman y Thompson (2008): "Aunque el conocimiento matemático para la enseñanza ha comenzado a ganar atención como un concepto importante en la comunidad de investigación sobre formación de profesores, hay una comprensión limitada de lo que sea, cómo se puede reconocer, y cómo se puede desarrollar en la mente de los profesores" (p. 499). Además, tal y como el modelo MKT se encuentra planteado en las distintas investigaciones en las que se desarrolla, se puede observar que existe una desvinculación aparente entre los componentes del conocimiento del contenido (conocimiento común, especializado y en el horizonte matemático) y el conocimiento pedagógico del contenido (conocimiento del contenido y la enseñanza, conocimiento del contenido y los estudiantes, y conocimiento curricular).

Así, en diversos trabajos (Pino-Fan, 2010; Pino-Fan, Godino y Font, 2010; Pino-Fan, Godino y Font, 2011; Pino-Fan, 2011); hemos puesto de manifiesto que, en nuestros desarrollos enmarcados dentro del EOS, usaremos la expresión *"Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM)"* del profesor, para referir a la fusión de las conceptualizaciones del MKT (Mathematical Knowledge for Teaching) y PCK (Pedagogical Content Knowledge), al considerar que la expresión "conocimiento matemático para la enseñanza" no refleja adecuadamente los diversos componentes o facetas que se deben tener en cuenta, al igual que ocurre con la expresión "conocimiento pedagógico del contenido". Entendemos que la didáctica de la matemática es la disciplina académica y el área de conocimiento cuyo objetivo específico es la articulación coherente de las distintas facetas o dimensiones que se ponen en juego en el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Además, el término *"conocimiento"* lo utilizamos en el sentido de *constructo epistémico–cognitivo–afectivo general que incluye comprensión, competencia y disposición* (Pino-Fan, Godino y Font, 2010, p. 209). La disposición, o capacidad, se relaciona con la noción de objeto matemático y didáctico personal, es decir, aquello que posibilita la práctica. La competencia se relaciona con la activación de la configuración cognitiva adecuada, e idóneamente acoplada a la configuración epistémica o configuración de referencia, al contexto en el que se desarrolla la práctica. La comprensión tiene que ver con la relaciones que se deben establecer entre todos los elementos que intervienen en la implementación de una configuración epistémica (o cognitiva) idónea para un contexto determinado. De esta forma, para nosotros,

> *"el CDM viene a ser la trama de* ***relaciones*** *que se establecen entre los distintos objetos matemáticos primarios [y los procesos de significación], que se ponen en juego en las prácticas operativas y discursivas del profesor, realizadas con el fin de resolver un determinado campo de situaciones problemáticas para implementar procesos de instrucción eficaces (idóneos) que faciliten el aprendizaje de los estudiantes" (Pino-Fan, Godino y Font, 2010, p. 209).*

Esta manera de entender el CDM conlleva que en los trabajos de investigación enmarcados por el EOS tenga sentido formularse preguntas tales como, *¿qué debería conocer un profesor para que su enseñanza de las derivadas tenga la mayor idoneidad didáctica posible?* (Pino-Fan, 2010), o bien, preguntas relacionadas con competencias tales como, ¿qué competencias debería desarrollar un profesor para que su enseñanza de un determinado contenido matemático tenga la mayor idoneidad didáctica posible? Con relación a estas dos preguntas, en la Universidad de Granada, se han realizado recientemente tres trabajos de tesis (de máster y doctorado), utilizando el enfoque ontosemiótico. Nos referimos a la tesis de máster de Pino-Fan (2010) y a las tesis de doctorado de Konic (2011) y Castro (2012).

En el siguiente apartado, 2.2.7.1, presentamos el modelo del *"conocimiento didáctico-matemático"*, propuesto por Godino (2009), el cual permite categorizar y analizar los conocimientos didácticos-matemáticos del profesor, mediante la aplicación del enfoque ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática.

2.2.7.1. Modelo para el análisis del conocimiento didáctico-matemático

En el marco del EOS, y teniendo en cuenta los aportes de los diversos modelos que han sido propuestos para la caracterización y análisis de los conocimientos de los profesores, Godino (2009) propone un modelo denominado "modelo del conocimiento didáctico–matemático (CDM)". Este modelo, CDM, incluye seis facetas o dimensiones para el conocimiento didáctico–matemático, las cuales están involucradas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de tópicos específicos de matemáticas. Estas facetas o dimensiones del CDM son:

1. *Epistémica:* Distribución, a lo largo del tiempo de enseñanza aprendizaje, de los componentes del significado institucional implementado (problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos).
2. *Cognitiva:* Desarrollo de los significados personales (aprendizajes).
3. *Afectiva:* Distribución temporal de los estados afectivos (actitudes, emociones, afectos, motivaciones) de cada alumno con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.
4. *Interaccional:* Secuencia de interacciones entre el profesor y los estudiantes orientadas a la fijación y negociación de significados.
5. *Mediacional:* Distribución de los recursos tecnológicos utilizados y asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos.
6. *Ecológica:* Sistema de relaciones con el entorno social, político, económico,… que soporta y condiciona el proceso de estudio.

Para cada una de estas facetas o dimensiones se contemplan, a su vez, diversos niveles que permiten el análisis del CDM del profesor de acuerdo con el tipo de información requerida para la toma de decisiones instruccionales. Estos niveles de análisis son:

1. *Prácticas matemáticas y didácticas.* Descripción de las acciones realizadas para resolver las tareas matemáticas propuestas para contextualizar los contenidos y promover el aprendizaje. También se describen las líneas generales de actuación del docente y discentes.
2. *Configuraciones de objetos y procesos (matemáticos y didácticos).* Descripción de objetos y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas, así como los que emergen de ellas. La finalidad de este nivel es describir la complejidad

de objetos y significados de las prácticas matemáticas y didácticas como factor explicativo de los conflictos en su realización y de la progresión del aprendizaje.

3. *Normas y metanormas*. Identificación de la trama de reglas, hábitos, normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio, y que afectan a cada faceta y sus interacciones.
4. *Idoneidad*. Identificación de potenciales mejoras del proceso de estudio que incrementen la idoneidad didáctica.

En la Figura 2.4 se puede observar cómo interactúan las facetas y los niveles del conocimiento del profesor que acabamos de describir.

Figura 2.4. Facetas y niveles del conocimiento didáctico-matemático del profesor

El modelo de Godino (2009) propuesto desde el marco EOS, además de las facetas y niveles de análisis que refieren a categorías de análisis más “finas” de los conocimientos didáctico–matemáticos del profesor, propone una serie de pautas para la formulación de consignas (ítems de evaluación) que permitan evaluar dicho conocimiento didáctico-matemático en los profesores. Así, la propuesta es que la *faceta epistémica*, del modelo CDM, incluye y refina al conocimiento del contenido (conocimiento común, especializado y en el horizonte matemático. Ver Figura 2.5).

Faceta epistémica	Consigna
Conocimiento común	Resuelve la tarea
Conocimiento especializado:	Elabora la configuración de objetos y procesos puesta en juego en las soluciones plausibles de la tarea y otras relacionadas:
- Tipos de problemas	Identifica las variables de la tarea; generaliza (particulariza) el enunciado.
- Lenguajes (representaciones)	Resuelve las tareas usando diferentes representaciones.
- Procedimientos	Resuelve las tareas usando diferentes procedimientos (intuitivos; formales).
- Conceptos/propiedades	Identifica los conceptos y propiedades puestas en juego en las soluciones.
- Argumentos	Explica y justifica las soluciones.
Conocimiento ampliado:	
- Conexiones	-Identifica posibles generalizaciones de la tarea y conexiones con otros temas más avanzados.

Figura 2.5. Conocimiento del Contenido (común, especializado y ampliado) (Godino, 2009, p. 25)

La unión de las *facetas cognitiva* y *afectiva* refinan el conocimiento del contenido en relación a los estudiantes (Figura 2.6). La unión de las *facetas interaccional* y *mediacional* refinan la noción de conocimiento del contenido en relación con la enseñanza (Figura 2.7).

Faceta cognitiva + afectiva	Consigna
Configuraciones cognitivas (estrategias, representaciones, enunciados, argumentaciones,…)	Describe los tipos de configuraciones cognitivas que los alumnos han desarrollado al resolver la tarea (o tareas) propuesta.
Errores, dificultades, conflictos de aprendizaje, concepciones	Describe los principales tipos de conflictos de aprendizaje en la resolución de este tipo de tareas por los alumnos.
Evaluación de aprendizajes	Formular cuestiones que permitan explicitar los significados personales de los alumnos al resolver este tipo de tareas (o contenidos).
Actitudes, emociones, creencias, valores	Describe estrategias que se pueden implementar para promover que los alumnos se involucren en la solución de estas tareas (o el estudio del tema).

Figura 2.6. Conocimiento del contenido en relación con los estudiantes (Godino, 2009, p. 26)

Faceta instruccional (interaccional + mediacional)	Consigna
Configuración didáctica:	
- Roles del profesor y de los estudiantes con relación a la tarea o contenido - Modos de interacción profesor – alumnos; alumnos – alumnos; - Recursos materiales - Tiempo asignado	Describe la configuración didáctica que implementarías usando la tarea matemática dada.
Trayectoria didáctica (secuencia de configuraciones didácticas)	Describe otras tareas relacionadas con la dada y el modo de gestionar la trayectoria didáctica correspondiente.

Figura 2.7. Conocimiento del contenido en relación con la enseñanza (Godino, 2009, p. 27)

Finalmente, la *faceta ecológica* refina y se vincula con el conocimiento del currículo y las conexiones intra e interdisciplinares (Figura 2.8).

Faceta ecológica	Consigna
Orientaciones curriculares	Identifica los elementos del currículo que son abordados mediante la realización de la tarea(s) propuesta (fines, objetivos).
Conexiones intra-disciplinares	Explica las conexiones que se pueden establecer con otros temas del programa de estudio mediante la realización de la tarea o de variantes de la misma.
Conexiones interdisciplinares	Explica las conexiones que se pueden establecer con otras materias del programa de estudio mediante la realización de la tarea o de variantes de la misma.
Otros factores condicionantes	Identifica factores de índole social, material, o de otro tipo, que condicionan la realización de la tarea o el desarrollo del proyecto educativo pretendido o implementado.

Figura 2.8. Conocimiento del currículo y conexiones intra e interdisciplinares (Godino, 2009, p. 27)

2.3. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Todas esas investigaciones, presentadas en el Capítulo 1 y en la sección 2.2.7 de este capítulo, han ayudado a mejorar nuestra comprensión de los diferentes componentes del conocimiento que los profesores necesitan adquirir para enseñar eficazmente y promover el aprendizaje de sus estudiantes. Sin embargo, una comprensión más detallada de los conocimientos necesarios para enseñar matemáticas, requiere de nuestra atención sobre tópicos específicos, por ejemplo, el conocimiento que un profesor de secundaria necesita para la enseñanza de la derivada (Badillo, Azcárate y Font, 2011).

La cuestión inmediata que surge a partir de la diversidad de modelos del conocimiento del profesor planteados es, ¿cómo determinar tal conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada tomando como referencia modelos que incluyen categorías demasiado "globales" y hasta cierto punto disjuntas? Y es que a pesar de los avances que suponen los modelos propuestos para la caracterización de los conocimientos que requieren los profesores de matemáticas para la enseñanza efectiva de tópicos concretos como el de la derivada, aún no se disponen de *criterios que permitan analizar y reconocer con profundidad* dichos conocimientos, criterios que posteriormente sirvan y orienten a los investigadores mediante pautas para el desarrollo y potenciación de estos conocimientos.

El modelo del CDM propuesto por Godino (2009) trata de avanzar y aportar nuevas ideas en relación a la problemática de los modelos del conocimiento de los profesores que hemos venido comentando desde el Capítulo 1. Sin embargo, como el mismo autor señala, tanto las pautas como los ejemplos de consignas que se plantean como parte del modelo (Figuras 2.5, 2.6, 2.7 y 2.8), no son exhaustivos, por lo que hace falta refinamientos y adaptaciones para la elaboración de consignas que permitan evaluar el conocimiento didáctico-matemático de los profesores sobre tópicos concretos tales como el de derivada.

En este sentido, el interés de este trabajo de investigación es, por un lado, poner en funcionamiento el modelo del *conocimiento didáctico-matemático (CDM)* de los profesores, inicialmente planteado por Godino (2009), y así, por otro lado, avanzar en la caracterización de los conocimientos que requieren futuros profesores de bachillerato para la enseñanza idónea de la derivada. La caracterización de dichos conocimientos estamos seguros que proporcionarán pautas que permitirán el diseño de metodologías didácticas a través de las cuales se potencie y desarrolle el conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada en los profesores en formación inicial.

De esta manera, para nuestra investigación, hemos planteado los objetivos que a continuación se presentan.

2.3.1. Preguntas y objetivos de investigación

Conforme fuimos avanzando en la investigación y adentrándonos cada vez más en el amplio bagaje de investigaciones sobre "todo" lo que debería conocer un profesor para que su enseñanza de las derivadas sea idónea, nos dimos cuenta que sería, hasta cierto punto, "ambicioso" el pretender caracterizar todo el conocimiento didáctico-matemático, es decir, caracterizar el conocimiento que está implicado o inmerso en cada una de las facetas o dimensiones que se proponen en el modelo CDM. De esta forma fue necesario concretar el horizonte de nuestra investigación. Por esta razón decidimos, dada la amplia literatura consultada, que determinar tan solo los componentes de la faceta epistémica del CDM ya, de por sí, supondría un trabajo amplio y exigente.

De esta manera, dado que hemos presentado ya el marco teórico de referencia que enmarcará nuestra investigación, estamos en condiciones de replantear nuestras preguntas y objetivos de investigación.

Concretando la pregunta P1 del Capítulo 1, nuestra primer pregunta de investigación (PI) es:

> *PI-1: ¿Cuál es el conocimiento referente a la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático que necesitan los futuros profesores de bachillerato para la enseñanza idónea de la noción derivada?*

De la pregunta PI-1 se tiene el objetivo general (OG) de nuestra investigación:

> *OG: Evaluar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada de profesores en formación inicial de secundaria/bachillerato en México, y así determinar si al final de su proceso de instrucción han generado un conocimiento de la faceta epistémica del CDM suficiente para la enseñanza idónea de la derivada.*

Para la consecución del OG y así dar respuesta a la PI-1, es necesario el planteamiento de una serie de objetivos específicos (OE). Estos objetivos se derivarán de preguntas concretas de investigación. La primera pregunta está relacionado con la pregunta P2 del Capítulo 1. Además, considerando que la Faceta epistémica del CDM es la “distribución de los componentes del significado institucional implementado” , entonces nos planteamos:

PI-2: ¿Cuál es el significado holístico de la derivada?

Para responder a PI-2, nos proponemos los siguientes objetivos específicos:

> *OE-1: Caracterizar los pares <Prácticas , Configuración de objetos y procesos activados en dichas prácticas> mediante un estudio histórico-epistemológico sobre la derivada, para identificar los distintos significados parciales de dicho objeto matemático.*

OE-2: Reconstruir un significado global de referencia de la derivada mediante la consideración de los significados parciales obtenidos de la caracterización de los pares <Prácticas , Configuración de objetos y procesos activados en dichas prácticas>

OE-3: Caracterizar el significado de la derivada pretendido en los planes de estudio oficiales de bachillerato en México.

OE-4: Caracterizar el significado de la derivada pretendido en los libros de texto oficiales de bachillerato en México

OE-5: Valorar la representatividad del significado pretendido en el currículo de bachillerato tomando como referente el significado holístico

Concretando la pregunta P3 planteada en el Capítulo 1, nos planteamos:

PI-3: ¿Cuál es el conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada, referente a la faceta epistémica, que efectivamente tienen los futuros profesores de secundaria/bachillerato?

Para responder a PI-3, nos propusimos los siguientes objetivos específicos:

OE-6: Evaluar una parte del CDM sobre la derivada, concretamente el referido a lo que denominamos faceta epistémica, de acuerdo con la caracterización que se ha realizado con los objetivos anteriores

OE-6.1: Diseñar un cuestionario que sea representativo de la complejidad del significado holístico de la derivada que permita caracterizar la faceta epistémica del CDM, sobre dicha noción, de los futuros profesores de bachillerato en México.

OE-6.2: Implementar el cuestionario diseñado con OE-6.1 para evaluar la faceta epistémica del CDM de los futuros profesores de bachillerato en México

Una de nuestras pretensiones cuando comenzábamos la investigación, se encuentra vinculada a la pregunta P4 presentada en el Capítulo 1. En el sentido de P4 nos habíamos propuesto el siguiente objetivo: “Diseñar, implementar y evaluar experiencias formativas que promuevan el desarrollo de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático requerido para la enseñanza de la derivada, en los futuros profesores de secundaria/bachillerato. Dichos procesos de estudio se desarrollarán teniendo en cuenta los resultados obtenidos de la aplicación de los instrumentos de evaluación”. Sin embargo, conforme fuimos avanzando nos dimos cuenta que dicho objetivo quedaba cada vez más lejos de nuestro alcance. A decir verdad, con los resultados que se obtienen de las preguntas de investigación y objetivos planteados anteriormente, lográbamos un primer acercamiento a este objetivo que emerge de P4. No obstante los componentes que suponen aproximaciones a la respuesta de P4 y a la consecución del objetivo específico que emerge de ella, se pueden conjugar con la intencionalidad de la pregunta P5, mediante el planteamiento de pautas que permitan orientar el diseño de tales procesos de instrucción.

En lo referente a la pregunta P5 planteada en el Capítulo 1, se concreta para esta investigación en la siguiente pregunta de investigación:

PI-4: ¿Es posible contribuir teórica y metodológicamente, con nuestra investigación, al campo de formación de profesores mediante el planteamiento de una metodología didáctica que permita a los formadores de profesores potenciar, y a los futuros profesores adquirir, el conocimiento didáctico-matemático, referente a la faceta epistémica, necesario para la enseñanza idónea del objeto derivada?

Para responder a esta pregunta nos proponemos los siguientes objetivos específicos:

OE-7: A partir de la caracterización de la faceta epistémica del CDM para la derivada utilizando las herramientas teóricas y metodológicas que nos proporciona el EOS, relacionar el modelo CDM con otros constructos propuestos desde las investigaciones sobre el conocimiento del profesor para la enseñanza y aprendizaje de la derivada.

OE-7.1: Estudiar las diversas aportaciones realizadas por las investigaciones sobre el conocimiento del profesor y, concretamente, aquellas que utilizan como marco teórico el EOS y el MKT, y con base en los resultados obtenidos de los objetivos anteriores, hacer una propuesta de vinculación entre los herramientas teóricas y constructos del EOS con los del MKT.

2.4. METODOLOGÍA

Nuestra investigación tiene un alto énfasis en las características propias de la metodología cualitativa, puesto que estamos interesados en describir y caracterizar una de las dimensiones del conocimiento didáctico-matemático que deberían tener los profesores de secundaria/bachillerato para la enseñanza idónea de la derivada mediante el diseño de instrumentos que permitan evaluar dicho conocimiento en profesores en formación inicial. Las muestras de futuros profesores serán intencionales. Además, la investigación también tendrá un componente cuantitativo, en cuanto que se construirán instrumentos de evaluación de respuesta escrita que se aplicarán a muestras representativas de profesores en formación inicial en distintos momentos. Estos datos se analizarán con métodos estadísticos. Por consiguiente, nuestra investigación se inscribe dentro de un enfoque metodológico de tipo mixto (Johnson y Onwuegbuzie, 2004), puesto que se trata de un estudio de tipo exploratorio en el que se considera la observación de variables cuantitativas (grado de corrección de los ítems: respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas) y cualitativas (tipo de configuración cognitiva activadas en las distintas prácticas matemáticas llevadas a cabo). Las investigaciones por métodos mixtos son un tipo de investigación en la que un investigador o equipo de investigadores combina elementos de los enfoques de investigación cuantitativo y cualitativo (i.e. uso de puntos de vista cuantitativos y cualitativos, recolección de datos, análisis, técnicas de inferencia) para los propósitos generales de amplitud y profundidad de la comprensión y corroboración (Johnson, Onwuegbuzie y Turner, 2007). Johnson y Onwuegbuzie (2004) definen esta metodología de investigación como sigue:

> *“Las investigación por métodos mixtos está formalmente definida como la clase de investigaciones donde los investigadores mezclan o combinan técnicas de investigación, métodos, enfoques, conceptos o lenguajes, cuantitativos y cualitativos, dentro de un mismo estudio”(p. 17).*

Dadas las características de nuestro estudio, como hemos mencionado, nosotros utilizaremos una metodología de tipo mixta, cuyos componentes y fases se detallan a continuación.

2.4.1. Componentes y fases de la investigación

Para la consecución de cada uno de los objetivos específicos, planteados anteriormente, nos proponemos las siguientes fases y tareas de investigación:

Tareas para el objetivo específico 1 (Fase 1)

- Estudio para determinar significados parciales de referencia de la derivada mediante el análisis de manuales y referencias bibliográficas específicas de investigación didáctica sobre aspectos históricos – epistemológicos – didácticos.

Tareas para el objetivo específico 2 (Fase 2)

- Estudio sobre el tipo de signo que es $f'(x)$, sobre cuál es su significado y sobre cómo se comprende, mediante el análisis de los resultados de las investigaciones en el campo de Didáctica de la Matemática relativos a aspectos cognitivos – históricos – didácticos, involucrados en la enseñanza y aprendizaje de dicho objeto. La concatenacion de significados parciales de la derivada identificados en la fase 1 es lo que conformará el significado global de referencia.

Tareas para los objetivos específicos 3, 4 y 5 (Fase 3)

- Estudio sobre el tipo de configuraciones epistémico-didácticas que aparecen en los libros de texto y, en general, en las propuestas instruccionales desarrolladas en las investigaciones enmarcadas en el campo de la Didáctica de la Matemática. Dado que nuestro estudio se enmarcará en el contexto específico de futuros profesores de bachillerato mexicano, tanto las propuestas curriculares como los textos se tomarán del contexto del bachillerato mexicano.
- Estudiar la representatividad del significado global de la derivada en las configuraciones epistémico-didácticas que se proponen en la dupla <libros de texto, planes de estudio> sobre la derivada en el bachillerato mexicano.

Tareas para el objetivo específico 6 (Fase 4)

- Estudio empírico del conocimiento didáctico-matemático, referente a la faceta epistémica, inicial de los futuros profesores de secundaria/bachillerato sobre el objeto derivada. Esto se pretende realizar mediante la elaboración e implementación de un cuestionario piloto, recogida de datos y el análisis de los resultados.
- Estudio mediante la triangulación de expertos que, junto con los resultados obtenidos del punto anterior, permita la mejora del cuestionario piloto.

- Elaboración de un cuestionario definitivo para evaluar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada de los futuros profesores de bachillerato en méxico. Este cuestionario definitivo será el resultado de los dos estudios anteriores (cuestionario piloto y jucio de expertos).
- Aplicación del cuestionario definitivo a muestras intencionales de futuros profesores de bachillerato en México, análisis de los resultados y estudiar el acoplamiento entre los conocimiento iniciales y los conocimientos de referencia.

Tareas para el objetivo específico 7 (Fase 5)

- Determinar y reflexionar sobre cómo nuestro estudio y sus resultados aportan al desarrollo del marco teórico del "enfoque ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática".
- Vincular nuestros resultados obtenidos mediante la implementación del modelo CDM propuesto por Godino (2009) con otros modelos del conocimiento del profesor, concretamente, con el modelo conocido como "Mathematical Knowledge for Teaching" y así determinar cómo nuestro estudio aporta a la comunidad de investigación sobre la formación y el conocimiento de los profesores de matemáticas.

2.4.2. Población y muestra

La población de interés de esta investigación, son los futuros profesores de secundaria/bachillerato en el contexto mexicano. Son estudiantes con un conocimiento variado sobre matemáticas y concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La población objetivo se reduce a los estudiantes del último curso de la Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán, México. Se trata de estudiantes que, en menos de un año, estarán desempeñándose como docentes en distintas escuelas de nivel bachillerato en México. Mayor profundidad en la descripción de población y muestra que se tendrá para este estudio, se dará en los capítulos correspondientes a los dos momentos de la aplicación del cuestionario.

2.4.3. Variables

Como hemos mencionado, nuestro estudio se enmarca dentro de una metodología de tipo mixta, debido a que consideramos variables cuantitativas y cualitativas. Como variable cuantitativa consideramos el “grado de corrección” de las respuestas de los futuros profesores a las diversas tareas que compondrán el cuestionario. Esta variable nos permitirá discriminar entre respuestas correctas, parcialmente correctas y respuestas incorrectas. La especificación y descripción tanto de la variable “grado de corrección” como su tipología, se realizará cuando realicemos el diseño del cuestionario, dado que el grado de corrección de las respuestas (correctas, parcialmente correctas e incorrectas) dependen de las especificidades particulares de cada tarea.

La segunda variable que se considerará es de corte cualitativa y la denominaremos “tipo de configuración cognitiva”, que son las configuraciones cognitivas que los futuros profesores movilizarán a propósito de una determinada práctica. Nuevamente, nos es imposible a estas alturas describir con profundidad esta variable, ya que la diversidad de configuraciones cognitivas que activarían los futuros profesores en sus soluciones, dependerá exclusivamente del tipo de tarea. Si podemos decir, que una vez definidas las tareas que compondrán el cuestionario, podrán preverse algunos tipos de configuraciones cognitivas, y otros se determinarán a posteriori, tras la implementación del cuestionario.

2.4.4. Instrumento para la recolección de los datos

Para la recolección de los datos principalmente hemos considerado el ***diseño de un cuestionario*** que permita explorar, por medio de las prácticas matemáticas operativas y discursivas desarrolladas por los futuros profesores, el conocimiento didáctico-matemático, referente a la faceta epistémica sobre la derivada, conocimiento que se describirá mediante la descripción de las configuraciones cognitivas activadas/asociadas en dichas prácticas matemáticas. La elección metodológica de construir y aplicar un cuestionario escrito tiene la ventaja de poder ser aplicado a una muestra relativamente amplia, frente al estudio basado en entrevista a unos pocos sujetos, aunque no sea posible profundizar en la evaluación de otras facetas y matices del conocimiento didáctico-matemático. Profundizaremos en la descripción de este instrumento para la recolección de datos, cuando abordemos el capítulo destinado al diseño del mismo.

De ser necesario, y disponer de los permisos correspondientes por parte de la Universidad Autónoma de Yucatán, podríamos considerar el uso de entrevistas que permitan profundizar en la exploración de las configuraciones cognitivas que los futuros profesores evidencien en sus respuestas escritas. Una entrevista “es un diálogo iniciado por el entrevistador con el propósito específico de obtener información relevante para la investigación y enfocado por él sobre el contenido especificado... Puede servir para tres fines: 1) como medio principal de recogida de información relativa a los objetivos; 2) para probar hipótesis; y 3) como conjunción de otros métodos [en nuestro caso, el cuestionario diseñado] (Cohén y Manion, 1990). Las entrevistas pueden ser de cuatro tipos, según la clasificación de Cohén y Manion (1990): 1) entrevista estructurada, que sigue un esquema previo y, por tanto, el contenido y los procedimientos se organizan por anticipado; 2) entrevista no estructurada, en la cual el entrevistador puede modificar la secuencia de las preguntas, explicarlas o añadir información en función de las respuestas o demandas del entrevistado; 3) entrevista no directiva, en la que el entrevistador toma un rol subordinado y 4) entrevista dirigida, que consiste en una forma especial de entrevista no directiva con cierto control. Siguiendo a estos dos autores, nosotros realizaríamos entrevistas del tipo "no estructurada" o más concretamente ***entrevistas "semiestructuradas"*** si seguimos a Patton (1980) quien señala que una *entrevista semi-estructurada* es una forma o modalidad de realizar entrevista en las que se prevén los temas o tipos de cuestiones que deben ser planificados antes de su ejecución y, en el momento del desarrollo, se decide la secuencia y redacción de las preguntas que, muchas veces, van siendo marcadas por la dinámica de la conversación.

2.4.5. Técnicas para el análisis de los datos

La técnica de análisis usada para la primera variable es el análisis semiótico (Godino, 2002), la cual permite describir de manera sistemática tanto la actividad matemática realizada por los futuros profesores al resolver problemas, como los objetos matemáticos primarios (elementos lingüísticos, conceptos/ definiciones, proposiciones/propiedades, procedimientos y argumentos) y los procesos de significación que intervienen en las prácticas realizadas en la resolución de las tareas (Godino, Batanero y Font, 2007). Este análisis lo plantearemos desde la perspectiva institucional y personal lo que dará paso a la descripción detallada tanto de las configuraciones epistémicas (análisis a priori de los conocimientos; conocimientos esperados), como de las configuraciones cognitivas (análisis de las respuestas de los estudiantes; conocimientos que efectivamente poseen).

En general, en el transcurso del estudio y para cada fase de investigación, iremos utilizando las distintas herramientas de análisis que nos proporciona el enfoque ontosemiótico, mismas que han sido presentadas en el apartado 2.2 de este capítulo.

2.5. CONSIDERACIONES FINALES

En este capítulo hemos presentado el marco y los elementos teóricos que han sido considerados para el desarrollo de nuestro trabajo. Estos elementos teóricos y metodológicos, han ayudado a reformular y concretar las preguntas que habían aproximado nuestro problema de investigación en el Capítulo 1, nuestras preguntas y objetivos de investigación. Además, la puesta en marcha u operativización de los elementos teóricos y metodológicos, aquí presentados, contribuirán a la consecución de cada uno de los objetivos y a dar respuestas a cada una de nuestras preguntas de investigación.

Algunos aspectos relevantes sobre la metodología, como la validez, y sus tipos, y la fiabilidad de nuestro instrumento (cuestionario), podrá parecer a lector que nos los hemos dejado de lado. No obstante, es nuestra pretensión considerar estos aspectos, cruciales en la metodología de un trabajo de investigación, en los momentos puntuales de nuestro estudio en los que, con nuestros desarrollos, se estén aportando elementos que refieran a los aspectos de validez y fiabilidad.

CAPÍTULO 3

¿Qué es la Derivada? Reconstruyendo el Significado Holístico de Referencia

3.1. ¿PORQUÉ EL ESTUDIO DE LOS SIGNIFICADOS?

Si nuestra intención es explorar el *Conocimiento Didáctico-Matemático* (CDM) de los futuros profesores sobre un objeto matemático concreto, en nuestro caso la derivada, una pregunta inherente que surge de manera inmediata a nuestro estudio es *¿qué es la derivada?*, es decir, *¿cuáles son sus significados?* Responder a estas preguntas es primordial si lo que se quiere es comprender lo que conocen los futuros profesores sobre dicho objeto matemático. Conocer el significado holístico de los objetos matemático es de suma importancia puesto que es a partir de dicho significado que la institución y/o el profesor, como representante de la institución educativa, determina cuál o cuáles serán los significados pretendidos, los efectivamente implementados y los evaluados, en el proceso de instrucción de un tópico matemático específico.

La determinación de dicho significado global u holístico requiere de la realización de un estudio histórico-epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, en nuestro caso concreto, sobre el origen y la evolución de la derivada (Pino-Fan, Godino y Font, 2011). Así mismo se deben tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto matemático. En este sentido, en el siguiente apartado, desarrollamos un estudio histórico-epistemológico sobre el origen y la evolución de la derivada, el cual nos permitirá realizar la reconstrucción de su significado holístico de referencia.

3.2. ESTUDIO HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO SOBRE LA DERIVADA

3.2.1. La génesis del cálculo diferencial en la matemática griega

Como hemos señalado el objeto *derivada*, a lo largo de la historia, emerge de una serie de prácticas matemáticas realizadas para resolver problemas relacionados con el trazado de tangentes, cálculos de máximos y mínimos y de velocidades. La pregunta que nos surge casi en forma inmediata es, ¿en qué punto de la historia de las matemáticas, se comienzan a abordar este tipo de problemáticas?

Estudiando la historia, para responder a esas interrogantes, nos remontamos a la matemática griega donde tres grandes matemáticos, Euclides, Arquímedes y Apolonio, marcaron el rumbo de las matemáticas. Las obras de estos tres matemáticos son la causa de que al período comprendido desde el año 300 al 200 a.C., se le denominara la *Edad de Oro* de la matemática griega.

Al parecer, fue Euclides el primer matemático que introdujo la noción de recta tangente. En su *libro III* de su gran obra *Elementos de Geometría* mejor conocida como *Los Elementos*, Euclides da, entre otras, las siguientes definiciones y proposiciones:

> *“Definición II. Se dice que una recta es tangente al círculo cuando lo toca y prolongada no lo corta.*
>
> *Definición IV. Se dice que dos círculos son mutuamente tangentes cuando se tocan mutuamente y no se cortan.*
>
> *Proposición XVI. La recta perpendicular en el extremo de un diámetro cae fuera del circulo; entre esta recta y la periferia no se interpondrá ninguna otra y el ángulo del semicírculo es mayor que cualquier ángulo rectilíneo agudo y lo restante menor.*
>
> *Proposición XVII. Desde un punto dado trazar una recta tangente a un círculo dado.*
>
> *Proposición XVIII. Si una recta es tangente a un círculo y se traza el radio en el punto de contacto, este radio es perpendicular a la tangente.”*
>
> (Vera, 1970, vol. 1).

Euclides da argumentaciones puramente sintéticas para sus proposiciones, por ejemplo, para la proposición XVII, mencionada arriba, podríamos sintetizar el razonamiento de Euclides como sigue. Con base en la Figura 3.1, sea *A* el punto y *BGD* el círculo; tómese el centro *E* de éste y trace el segmento *AE*; con centro en *E* y radio *EA* trace el círculo *AZH*; desde *D* trazar *DZ* perpendicular a *AE* y una *E* con *Z* y *A* con *B*. Por ser *E* centro de los círculos *BDG* y *AHZ*, las rectas *EA* y *EZ* son iguales y también *ED* y *EB*, luego las dos *AE* y *EB* con iguales a *ZE* y *ED*, y forman el ángulo común en *E*. Por tanto, *DZ* y *AB* son iguales e iguales los triángulos *DEZ* y *EBA* y, por consiguiente, el ángulo *EDZ* será igual al ángulo *EBA*, y cómo el ángulo *EDZ* es recto, el ángulo *EBA* también será recto, y por ser *EB* perpendicular desde el centro en el extremo del diámetro, la *AB* es tangente al círculo.

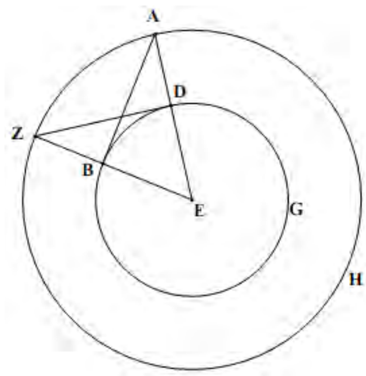


Figura 3.1. Solución de Euclides de la proposición XVII

Posteriormente, en el libro IV de sus *Elementos*, Euclides utiliza de manera implícita las nociones de rectas y circunferencias tangentes para las proposiciones referentes al trazado de polígonos circunscritos a una circunferencia.

Apolonio de Perga, conocido en su época como *El Gran Geómetra*, también trabajó el problema de las tangentes; de hecho, una de sus obras lleva el título *"Tangencias (o Contactos)"*. En este tratado, Apolonio plantea el siguiente problema: *dados tres elementos, cada uno de los cuales puede ser un punto, una recta o una circunferencia, trácese una circunferencia que sea tangente*[17] *a cada uno de los tres elementos dados.* Al problema anterior, en la actualidad, se le conoce como el *"Problema de Apolonio"*. Las soluciones que da Apolonio al problema planteado no se conocen con exactitud, pero pueden inferirse de la información que proporciona Pappus. No obstante, al parecer, el caso más difícil (dadas tres

[17] Apolonio concebía una circunferencia tangente a un punto, a una circunferencia que pase por él.

circunferencias trazar una cuarta que sea tangente a las tres dadas) no fue resuelto por Apolonio; fue Newton quien dio la solución mediante el uso de regla y compás.

En el libro I de su obra *Cónicas*, Apolonio introduce algunas proposiciones respecto a las tangentes. Ejemplo de esto, es la siguiente proposición que, por cierto, muestra de manera clara la similitud entre su concepción y la de Euclides, respecto a las tangentes:

> *"Proposición 32. La paralela desde el vértice de una sección cónica a una recta trazada ordenadamente es tangente a la sección y ninguna otra recta caerá entre la tangente y la sección."* (Vera, 1970, vol. 2).

Así mismo, en el libro II de su obra *Cónicas*, Apolonio continua con el estudio de las tangentes, demostrando, aunque de forma sintética, la propiedad que dice que si *P* es un punto cualquiera de una hipérbola de centro *C*, entonces la tangente en *P* cortará a las asíntotas *L* y *L'* que equidistan de *P*. Posteriormente, en ese mismo libro, muestra cómo trazar rectas tangentes a una cónica haciendo uso de las propiedades de la división armónica de un segmento.

Apolonio también abordó problemas de máximos y mínimos, aunque en realidad, sus teoremas de máximos y mínimos, eran teoremas sobre tangentes y normales a las secciones cónicas.

A diferencia de Euclides y Apolonio, Arquímedes no abordó de manera "explicita" el problema de las tangentes. En sus trabajos, Arquímedes utiliza la noción de recta tangente y sus propiedades, para el trazado de polígonos circunscritos a circunferencias. Sin embargo, en su obra *Sobre las espirales,* Arquímedes pudo encontrar la tangente a la curva que lleva su nombre: *la espiral de Arquímedes*.

Hay que señalar que los matemáticos griegos no disponían de una definición muy satisfactoria de la tangente a una curva *C* en un punto *P,* considerándola como una recta *L* que tiene el único punto *P* común con la curva, y tal que no pueda trazarse ninguna otra recta pasando por *P* e incluida entre la recta *L* y la curva *C* (Boyer, 1999). Posiblemente Arquímedes tuvo que romper con esta concepción para trazar la tangente de la espiral, adoptando un punto de vista cinemático que le permitió determinar la dirección instantánea del movimiento del punto mediante el cual se genera la curva.

Después de la contribución de Euclides, Apolonio y Arquímedes, no se volvieron a realizar contribuciones importantes a los problemas de tangentes, velocidades y máximos y mínimos; la *derivada* como objeto emergente de estas prácticas matemáticas, tendría que esperar hasta la edad media para recibir nuevas aportaciones para su desarrollo.

3.2.2. La noción de variación en la Edad Media

El concepto de variación continua de cantidades no apareció en la matemática de los griegos de la antigüedad clásica, pues sus cantidades eran numéricas y discretas o geométricas y estáticas. Estudiaron el movimiento uniforme (lineal o circular), de modo que los conceptos de *aceleración* y *velocidad instantánea* carecían de sentido para ellos (Cantoral y Farfán, 2004).

El estudio del cambio en general y el movimiento como caso particular, comenzó durante el siglo XIV principalmente en las universidades de Oxford y París. En Oxford, en el Merton College, los filósofos escolásticos Thomas Bradwardine y Richard Swineshead describieron la *latitud de formas,* lo que hoy puede denominarse intensidad de cualidades[18]. Estos escolásticos de Merton, estudiaban las variaciones de la intensidad de una cualidad, desde un punto a otro de un cuerpo, o desde un punto a otro del tiempo; como producto de esto, ellos lograron deducir una formulación para el caso de una velocidad de cambio uniforme que se conoce como la *Regla del Merton College* o simplemente *Regla de Merton*.

Para enunciar la regla de Merton, los escolásticos definieron: el movimiento como uniforme cuando las distancias iguales eran recorridas en tiempos iguales; la aceleración uniforme, como aquella para la cual incrementos iguales de velocidad se adquieren en intervalos de tiempo iguales; y el movimiento variable como velocidad instantánea. Así, expresada en términos de tiempo y distancia, la regla de Merton nos dice:

> *"Si un cuerpo se mueve con aceleración uniforme durante un intervalo de tiempo dado, la distancia total s es tal como aquella que se tendría durante el mismo intervalo de tiempo con una velocidad uniforme igual al promedio*

[18] En la filosofía aristotélica, cualidades son aquellos atributos que admiten intensidad (en un punto del cuerpo, en un instante del tiempo), tales como calor y densidad. Las cualidades intensivas (o locales) fueron distinguidas de las cantidades extensivas (o globales) como la altura o el peso. La velocidad instantánea fue vista como una cualidad, la intensidad del movimiento; la correspondiente cantidad era el movimiento total, es decir, la distancia recorrida (Cantoral y Farfán, 2004).

de su velocidad inicial v_o y su velocidad final v_f (es decir, su velocidad instantánea en el punto medio del intervalo de tiempo).

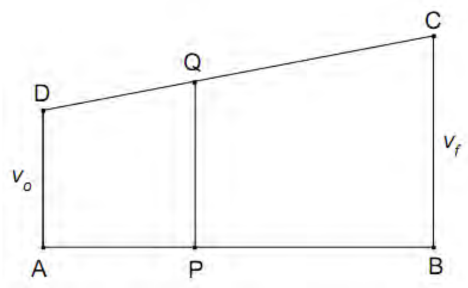


Figura 3.2. Demostración geométrica de Oresme de la Regla de Merton

Esto es, $s = \frac{1}{2}(v_o + v_f)t$, en donde t es la longitud del intervalo considerado." (Cantoral y Farfán, 2004, p. 52).

El trabajo con problemas sobre la *latitud de las formas*, llevó al planteamiento de varias series infinitas. Por ejemplo en 1345, el ya mencionado Richard Swineshead escolástico del Merton College, escribió su *Liber Calculationum* en el que, además de la regla de Merton, resuelve el siguiente problema de la *ley artificial*:

"Si a lo largo de la primera mitad de un cierto intervalo de tiempo, una forma se mantiene con cierta intensidad; a lo largo del siguiente cuarto de intervalo la forma se mantiene al doble de dicha intensidad; a lo largo del siguiente octavo de intervalo la forma se mantiene al triple de intensidad, y así ad infinitum, entonces la intensidad media durante todo el intervalo será la intensidad de la forma durante el segundo intervalo [el doble de la intensidad inicial]" (González, 1992, p. 47).

Como se puede observar el problema equivale a la suma de la serie:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{n}{2^n} + \cdots = 2$$

Para llegar al resultado, Swineshead presentó una argumentación verbal extensa y confusa. Casi treinta años más tarde, Oresme pudo demostrarlo, en forma más sencilla, mediante procedimientos geométricos.

El escolástico parisino Nicole Oresme, continúa con el desarrollo de la llamada *latitud de las formas* en su obra *Tractatus de latitudinibus formarum* en la cual escribe:

> *"La dimensión de los fenómenos está sometida a múltiples variaciones y dicha multiplicidad es difícilmente discernible si su estudio no se remite al estudio de figuras geométricas. Todo lo que varía, se sepa medir o no, lo podemos imaginar como una cantidad continua representada por un segmento rectilíneo."* (González, 1992, p. 42).

Así, la noción de gráfico como elemento descriptivo de una cualidad, es importante, pues facilita la comprensión de la variación de un fenómeno, a lo que él llama la representación gráfica de *las intensidades de las cualidades.* De esta forma, elegido un punto origen en una recta horizontal, Oresme toma como *longitudo* (longitud) nuestra abscisa, que es el tiempo, y como *latituto* (latitud) nuestra ordenada que es la intensidad o la amplitud del fenómeno, ya sea velocidad, calor u otros. La cualidad forma o propiedad se representa, de acuerdo con la variación de la intensidad, respecto del tiempo. Esta variación se refleja mediante la "figura total" o simplemente *figura* como lo llamó Oresme, es decir, el área que determina esa curva, el eje de las longitudes y las intensidades inicial y final. Por ejemplo, para la demostración geométrica que da Oresme de la regla de Merton, (véase figura 3.2) considera el movimiento uniformemente acelerado durante un intervalo de tiempo $(0,\ t)$ correspondiente a la longitud *AB*, la latitud en cada punto *P* de *AB* es una ordenada *PQ* cuya longitud es la velocidad en el instante correspondiente, por lo que el lado *CD* es una grafo velocidad – tiempo. Oresme vio que la definición de aceleración uniforme implica que *CD* es un segmento de línea recta, y que la *figura* o *figura total*, es un trapezoide con base $AB=t$ y alturas $AD=v_o$ y $BC=v_f$. Supuso que el área s de ese trapezoide es igual a la distancia total recorrida y a partir de la fórmula para hallar el área del trapezoide se sigue inmediatamente que $s = \frac{1}{2}(v_o + v_f)t$.

González (1992) señala que Oresme introduce cinco ideas innovadoras al campo de las matemáticas: a) la medida de diversas variables físicas por medio de segmentos; b) algún tipo de relación funcional entre variables; c) una aproximación a la introducción de las coordenadas mediante la representación gráfica de relaciones funcionales; d) la constancia de la disminución de la variación en las proximidades de un extremo y, e) una especie de integración o sumación continua para calcular la distancia como el área bajo el grafo velocidad – tiempo.

Hay que señalar que durante este período, los resultados fueron hallados mediante argumentaciones verbales o geométricamente mediante la representación de la forma, más que mediante consideraciones aritméticas basadas en la noción intuitiva de límite, que fue ampliamente usada durante el siglo XVII.

A finales del siglo XVI y principios del siglo XVII, fue una época fértil para las ciencias exactas como un todo. La astronomía hizo grandes progresos por medio de la obra de Johannes Kepler; Simón Stevin, por su parte, contribuyó en gran medida a la estática con su tratado *De Beghinselen der Weeghconst* (*“Los elementos del arte de la pesada”*). En la mecánica, la deducción por Galileo Galilei de las leyes de la caída libre de los cuerpos y de la trayectoria parabólica de los proyectiles, significó una ruptura con la física aristotélica y el comienzo de una nueva época en la que iba a utilizarse ampliamente la matemática en la física (Andersen, 1984).

Otra contribución de Johannes Kepler, fue la resolución de un problema de aplicación práctica sobre máximos y mínimos. De acuerdo con Durán (1996), este problema tiene su origen de una cosecha excepcional de uvas en Austria, que una vez procesada generó gran cantidad de vino. Para guardar dicho vino, a principios del siglo XVII, Kepler estudió la forma de los barriles que con menor superficie (menor cantidad de madera utilizada para hacerlos) tuviera mayor volumen (pudieran albergar más cantidad de vino). Para estudiar este problema Kepler empleo un método que es considerado el primer antecedente del que empleamos en la actualidad para el cálculo de extremos; concretamente, Kepler buscó el punto donde la variación en el volumen producida por una variación de las dimensiones fuera prácticamente nula; es decir, en términos actuales, buscó los puntos que anulaban la derivada de la función que medía el volumen.

El interés de Kepler en el cálculo de volúmenes de barriles de vino dio como resultado el libro *Nova stereometria doliorum vinariorum* (“nueva medida de volúmenes de toneles para vino”). En este libro, Kepler consideraba sólidos de revolución como si estuvieran compuestos de diversas maneras por una cantidad infinita de partes sólidas. Por ejemplo, consideraba una esfera como formada por un número infinito de conos con vértice común en el centro y base en la superficie de la esfera; esto lo conduciría al resultado de que “la esfera es igual en volumen al cono que tiene como altura el radio de la esfera y como base un círculo igual al área de dicha esfera, es decir, un círculo con el diámetro de la esfera como radio” (Andersen, 1984).

En el siguiente apartado discutiremos las aportaciones más importantes que tuvieron lugar durante el siglo XVII, las cuales dan paso al surgimiento y fundación de la derivada.

3.2.3. Siglo XVII: creación y desarrollo del cálculo diferencial

El siglo XVII representó un punto de inflexión para el desarrollo de las matemáticas en general y para el surgimiento del *cálculo infinitesimal*. Por un lado las aportaciones de Viète al campo del álgebra y la publicación de su obra "El Arte Analítica", y por otro, la creación de la *Geometría Analítica*, jugaron un factor determinante para el descubrimiento y desarrollo del cálculo diferencial.

Las investigaciones medievales sobre el movimiento, en particular las de Oresme, conducen a la idea de que el espacio recorrido por un móvil es igual al área bajo la gráfica de su velocidad en función del tiempo. Galileo toma estas ideas y las demuestra con argumentos de indivisibles. Así mismo, Galileo establece la ley fundamental de la composición vectorial del movimiento y la aplica para determinar la trayectoria descrita por un proyectil. Además, si se representa el movimiento en un gráfico de desplazamiento – tiempo, la dirección de éste da la dirección de la tangente a la trayectoria, mientras la velocidad da la pendiente de la línea tangente (González, 1992).

Estas ideas posteriormente serían recogidas y desarrolladas por matemáticos como Roberval, Torricelli y Newton, quien más tarde desarrollaría su cálculo de fluxiones.

Los problemas de diferenciación aparecen bajo tres aspectos: *velocidades*, *tangentes* y *máximos y mínimos*. El abordar estos problemas, durante este período, significó el inicio de los argumentos infinitesimales que luego desembocarían en el uso de *diferenciales*, en el cálculo diferencial de Leibniz, y de los *momentos* en el cálculo de fluxiones de Newton.

3.2.3.1. Descartes y su método de las tangentes

La creación de la *geometría analítica* es considerada la contribución más importante de Descartes (1596 – 1650) a las matemáticas. Según Boyer (1999) el objetivo del "método" (la geometría analítica) de Descartes era doble: 1) el de liberar en lo posible a la geometría, a través de los métodos algebraicos, del uso de las figuras, y 2) darle un significado concreto a las operaciones del álgebra por medio de su interpretación geométrica. Así, para resolver un problema geométrico, Descartes partía del estudio de éste para traducirlo a un lenguaje de ecuaciones algebraicas y después, una vez simplificada la ecuación lo más posible, resolvía dicha ecuación mediante la geometría. De esta forma se puede decir que la geometría analítica de Descartes es la aplicación sistemática y completa del álgebra a la geometría y viceversa.

Uno de los aspectos que debemos señalar aquí, es en cuanto a los problemas en los que estaban interesados los matemáticos de aquella época, problemas que fueron primordiales para el desarrollo del cálculo: *problemas de máximos y mínimos*, *problemas de tangentes y problemas de cuadraturas* (Durán, 1996). Descartes lo expresa de la siguiente manera:

> *"Habré dado aquí todo lo que es necesario para el estudio de las curvas, una vez que dé un método general para trazar una línea recta que forme ángulos rectos con una curva en un punto arbitrario de ella. Y me atrevería a decir que éste es no sólo el problema más útil y más general de la geometría que conozco, sino incluso de los que hubiera deseado nunca conocer"* (Descartes; citado en Boyer, 1999, p. 435).

De acuerdo con Collette (1993) Descartes elaboró tres métodos para calcular las normales (o, equivalentemente, las tangentes). El primero, apareció en el libro II de la *géométrie*, es conocido como *el método del círculo.* El *método del círculo* de Descartes es un método para el trazado de las tangentes a las líneas curvas mediante la construcción previa de la recta normal (González, 1992). El segundo método consistía en determinar la tangente a una curva considerándola como la posición particular de una secante que gira en torno al pie de la tangente, hasta que dos de sus puntos de intersección con la curva llegan a coincidir. El tercer método expresa el punto de vista adoptado en la actualidad para introducir el concepto de derivada en un punto: la tangente está determinada por una recta que gira alrededor del punto de contacto dado, hasta que el otro punto en el que aquella corte a la curva, coincida con el primero.

Es importante señalar que, aunque Descartes manifestó cierto interés por los métodos infinitesimales, no participó en su desarrollo porque sus trabajos no eran más que una ejemplificación en el desarrollo de su filosofía; de hecho su método es puramente algebraico y no recurre a los conceptos (noción intuitiva) de límite o infinitésimo, él evitaba el uso de métodos infinitesimales a causa de los riesgos que presentaban y debido a la ausencia de fundamentación teórica para el razonamiento infinitesimal. Sin embargo queriendo corregir la regla de los máximos y mínimos de Fermat, utiliza un procedimiento que es equivalente a definir la tangente como límite de la secante.

Aun así, el *método del círculo* de Descartes es puramente algebraico, donde, a diferencia de los métodos de Fermat, como veremos más adelante, queda bien claro que no aparecen consideraciones de tipo infinitesimal (González, 1992). El siguiente ejemplo (Andersen, 1984) muestra cómo Descartes aplicaba dicho método: supongamos dada la curva algebraica *ACE*, y supongamos que se pide trazar la normal a la curva en *C* (ver la figura 3.3).

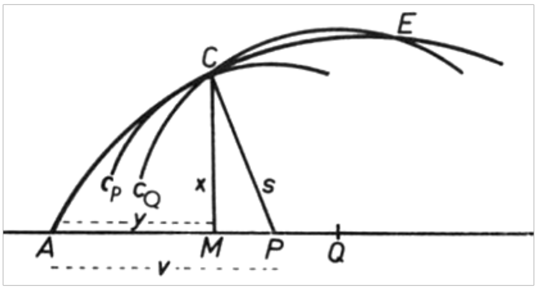


Figura 3.3. Método del círculo de Descartes

Descartes supone que la recta *CP* es la solución del problema. Sea *CM=x*, *AM=y*, *AP=v*, *CP=s*. Además de la curva *x=f(y)* o *ACE,* Descartes consideraba el círculo c_P con centro en *P* y que pasa por *C*; es decir, el círculo de ecuación $x^2 + (v - y)^2 = s^2$. La circunferencia de este círculo toca a la curva *CE* en *C* sin cortarla, mientras que la circunferencia c_Q, $x^2 + (v_Q - y)^2 = s_Q{}^2$, con centro en un punto *Q* distinto de *P* y que pasa por *C*, cortará a la curva no sólo en *C*, sino también en algún otro punto; sea este punto *E*. Esto significa que la ecuación $(f(y))^2 + (v_Q - y)^2 - s_Q{}^2 = 0$, obtenida sustituyendo *x=f(y)* en la ecuación de c_Q, tiene dos raíces distintas[19]; pero "cuanto más se aproximen uno al otro *C* y *E*, más pequeña será la diferencia de las dos raíces, y al final, cuando los puntos coincidan, las raíces serán exactamente iguales, es decir, cuando la circunferencia que pasa por *C* toque a la curva en el punto *C* sin cortarla" (Descartes, citado en Andersen, 1984, p. 30). Descartes llegó a la conclusión de que *CP* será una normal a la curva *C* cuando *P* (es decir, *v*) esté determinado de tal manera que la ecuación $(f(y))^2 + (v - y)^2 - s^2 = 0$, tenga dos raíces iguales y_0. Usando términos modernos es fácil comprobar que esta condición nos da la expresión correcta para la subnormal *MP*: $v - y_0 = f'(y_0) \cdot f(y_0)$.

Descartes dio ejemplos de su *método del círculo* hallando, entre otras cosas, la normal a la elipse. Sin embargo, a pesar de que dicho método es aplicable a cualquier curva algebraica, éste se complica cuando la ecuación de la curva no es una ecuación algebraica sencilla,

19 Descartes consideraba solamente curvas para las cuales $(f(y))^2$ es un polinomio en *y*, o y^2 un polinomio en *x*.

debido a los laboriosos cálculos que hay que hacer para determinar *v* comparando los coeficientes (Andersen, 1984).

3.2.3.2. El método de los extremos de Fermat

Fermat (1601 – 1665) representa uno de los eslabones intermedios más importantes en la transición de la matemática antigua a la moderna. Al igual que Descartes, Fermat desarrolló su propia geometría analítica. De esta forma se puede decir que tanto Descartes como Fermat son los fundadores de la geometría analítica.

Con base en las obras fundamentales de la antigüedad clásica griega (los *Elementos* de Euclides, las *Cónicas* de Apolonio, las obras de Arquímedes, la *Aritmética* de Diofanto, la *Colección matemática* de Pappus, etc.), así como en la teoría de ecuaciones de Viète (en particular en el método de la *Syncrisis* de su *Arte analítica*), Fermat desarrolla los primeros métodos generales, en la historia de las matemáticas, para la determinación de extremos (González, 2008), que posteriormente aplica a la determinación de las normales y tangentes.

Según González (2008) Fermat realizó cinco trabajos o memorias sobre máximos y mínimos:

1. *Methodus ad disquirendam maximan et miniman et de tangentibus linearum curvarum* (método para hallar máximos y mínimos). Esta memoria, también conocida como el *Methodus,* que Fermat compone entre 1629 y 1637, es un procedimiento puramente algorítmico desprovisto de todo fundamento demostrativo, donde Fermat introduce la técnica de la *adigualdad*[20]. En la segunda parte de este tratado Fermat describe el primer ejemplo de aplicación del método de máximos y mínimos al trazado de las tangentes a las líneas curvas, la tangente de la parábola, que provoca la polémica entre Descartes y Fermat sobre los máximos y mínimos y las tangentes.
2. *Ad eamdem methodum…*(sobre el mismo método de máximos y mínimos). Esta obra fue escrita en 1638 para explicar su método a Mydorgue y Desargues, cuando Descartes les pidió que actuaran como árbitros en su controversia con Fermat. En esta obra Fermat ilustra su método aplicándolo a una serie de ejemplos entre los cuales destaca la resolución del famoso problema de Pappus. Termina este trabado aplicando el método al trazado de la tangente a la elipse.

[20] La idea de hacer "adiguales" dos expresiones proviene de Diofanto, quien usa en la *Aritmética* el término griego *parisótes* para designar una aproximación a un número racional tan cercana a éste como sea posible. Xylander introduce el término latino *adaequalitas* del griego *parisótes* en su versión al latín de la *Aritmética,* publicada en 1575

3. *Analityca eiusdem methodi investigatio* (investigación analítica del método de máximos y mínimos). En este escrito Fermat, con base en su propio perfeccionamiento del método de *Syncrisis* de la teoría de ecuaciones de Viète, establece los fundamentos teóricos de su método de máximos y mínimos.
4. *La carta a Pierre Brûlart.* Publicada en 1919, en esta obra Fermat ensaya realizar un cierto desarrollo limitado en serie, y aunque no podía demostrarlo rigurosamente, le parecía verosímil que se determinaba un extremo a partir de la ecuación que resulta al anular el coeficiente del término de primer grado. Además, hacía notar que había descubierto que el coeficiente del término de segundo grado era negativo en caso de máximo y positivo en caso de mínimo.
5. *Ad methodum de máxima et minima appendix* (apéndice al método de máximos y mínimos). En esta obra escrita en 1644 Fermat aplica la misma técnica que en su primera memoria, descrita anteriormente, complementándola con una extraordinaria mejora y simplificación de un método de Viète para eliminar expresiones racionales de las ecuaciones. De esta forma Fermat pudo extender las reglas del "*Methodus*" a problemas más complicados en los que la expresión era irracional; concretamente al problema de Arquímedes[21].

La importancia del método para hallar máximos y mínimos presentado por Fermat en el "*Methodus*", además de ser el primer método general en la historia de las matemáticas para determinar máximos y mínimos, radica en la idea de incrementar una magnitud considerable a la variable independiente. Fermat describe su método de la siguiente forma:

> "*Toda la teoría de la investigación de máximos y mínimos supone la consideración de dos incógnitas y la única regla siguiente:*
>
> 1. *Sea A una incógnita cualquiera del problema (que tenga una, dos o tres dimensiones, según convenga al enunciado).*
> 2. *Se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de A en términos que pueden ser de cualquier grado.*
> 3. *Se sustituirá a continuación la incógnita original A por A+E, y se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de A y E, en términos que pueden ser de cualquier grado.*

[21] Encontrar el cono de superficie total máxima que se puede inscribir en una esfera dada.

4. *Se "adigualará", para hablar como Diofanto, las dos expresiones de la cantidad máxima o mínima.*
5. *Se eliminarán todos los términos comunes de ambos lados, tras lo cual resultará que a ambos lados habrá términos afectados de E o de una de sus potencias.*
6. *Se dividirán todos los términos por E, o por alguna potencia superior de E, de modo que desaparecerá la E, de al menos uno de los términos de uno cualquiera de los miembros.*
7. *Se suprimirán, a continuación, todos los términos donde todavía aparece la E o una de sus potencias, y se iguala lo que queda, o bien si en uno de los miembros no queda nada, se igualará, lo que viene a ser lo mismo, los términos afectados con signo positivo a los afectados con signo negativo.*
8. *La resolución de ésta última ecuación dará el valor de A, que conducirá al máximo o mínimo, utilizando la expresión original."* (González, 2008, p. 65).

Consideremos el siguiente ejemplo para ilustrar cómo aplicaba Fermat su método para el cálculo de extremos: Dividir un segmento de longitud N en dos partes de manera que el producto sea el máximo posible. Para dar solución al problema, sea A la cantidad desconocida por la que tendremos que dividir el segmento de longitud N.

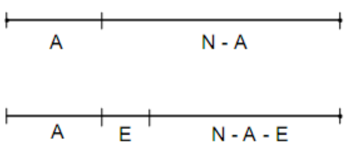


Figura 3.4. Ejemplo del método de los extremos de Fermat

De tal forma que el producto pedido estará dado por la expresión:

$$f(A) = A(N - A) = AN - A^2 \quad \text{..........................} \quad (1)$$

Ahora bien, dado que queremos que el producto sea el máximo posible, incrementemos a nuestra variable A una magnitud E, de tal forma que el producto estaría dado por:

$$f(A + E) = (A + E)(N - A - E) = AN - A^2 + NE - 2AE - E^2 \quad \text{......} \quad (2)$$

"Adigualando" las expresiones (1) y (2) obtenemos:

$$AN - A^2 \approx AN - A^2 + NE - 2AE - E^2$$

$$NE \approx 2AE + E^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Dividiendo ambos miembros de la *"adigualdad" por E, obtenemos:*

$$N \approx 2A + E \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Finalmente, haciendo *E=0*, en (4) nos queda:

$$2A = N$$

Lo que significa que el producto es máximo cuando $A = \frac{N}{2}$.

El método de los extremos fue aplicado por Fermat, alrededor de 1632, a la determinación de las normales y tangentes o, más precisamente, de las subtangentes a una curva (Collette, 1993). En la segunda parte del *"Methodus"* Fermat emplea el método de los extremos para hallar la tangente de una parábola en un punto[22]. Para ello, Fermat utiliza, además de la "adigualdad", dos propiedades: la primera es la "definición" de parábola que manejaba Apolonio la cual sostiene que "una parábola es una curva para la que dados dos de sus puntos cualesquiera *B, P*, se tiene que $\frac{BC^2}{PI^2} = \frac{CD}{ID}$" (ver figura 3.5); la segunda es la relación de semejanza entre los triángulos, que contienen las subtangentes, *BCE* y *OIE* para establecer que $\frac{BC}{OI} = \frac{CE}{IE}$.

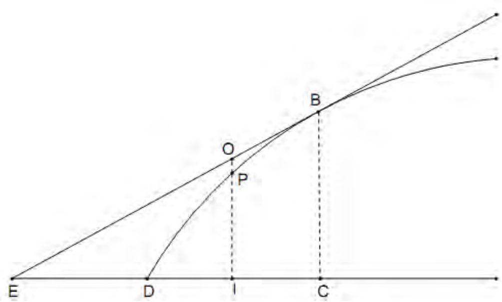


Figura 3. 5. Aplicación del método de los extremos al cálculo de la tangente a la parábola

Debemos subrayar dos cuestiones importantes, la primera es que el proceso utilizado por Fermat es, en esencia, similar al cálculo de $lim_{E \to 0} \frac{f(A+E)-f(A)}{E}$, que se emplea en la

[22] El desarrollo del ejemplo de la parábola dado por Fermat para ilustrar cómo aplica su método para la obtención de máximos y mínimos, puede verse en González (2008), pp. 109-112.

actualidad para hallar la primera derivada. Sin embargo, una de las principales críticas a su método, radica en la fundamentación del paso de la *"adigualdad"* a la igualdad y la división por E, ya que en el mismo proceso considera $E = 0$ y $E \neq 0$.

A pesar de esto, las aportaciones realizadas por Fermat al desarrollo del cálculo diferencial a través de sus trabajos sobre máximos y mínimos y tangentes, hacen que diversos matemáticos del siglo XVIII, tales como Laplace y Lagrange, lo consideren el verdadero inventor del cálculo diferencial. Como señala Durán (1996) el mismo Newton, en una carta descubierta en 1934, escribe que sus ideas para el desarrollo del cálculo las tomó del método de tangentes de Fermat.

3.2.3.3. Los métodos cinemáticos de Roberval y Torricelli

Roberval (1602 - 1675) y Torricelli (1608 – 1647) desarrollaron entre 1630 y 1640 métodos para el trazado de tangentes, basándose en argumentos cinemáticos. Roberval establece que la dirección del movimiento de un móvil que describe una circunferencia es la perpendicular en el extremo del diámetro, y de aquí, generalizando, enuncia lo que él llama axiomas o *principios de invención* para encontrar las tangentes a la curva (González, 1992). Este principio de invención se basa en la siguiente afirmación:

> *"…en todas las demás líneas curvas, cualesquiera que sean, su tocante en cualquier punto es la línea de dirección del movimiento que tiene en ese mismo punto el móvil que la describe"* (Collette, 1993, p. 40)

Como se puede observar, para Roberval, la tangente a una curva representa la dirección del movimiento del punto que describe la curva en el punto de tangencia. De acuerdo con Collette (1993, p. 40) la regla que permite a Roberval trazar la tangente a una curva dada, es la siguiente:

> *"por las propiedades específicas de la línea dada (que os serán dadas) examinad los distintos movimientos que tiene el punto que la describe en el lugar en el que queráis trazar la tocante: de todos estos movimientos compuestos en uno sólo, trazad la línea de dirección del movimiento compuesto; tendréis la tocante de la línea curva."*

Según González (1992) el método de Roberval utiliza el concepto intuitivo de movimiento instantáneo y se basa en tres principios básicos: 1) Considerar una curva como la trayectoria de un punto móvil; 2) considerar la tangente en un punto de la curva como la dirección del movimiento instantáneo en ese punto móvil, y 3) Si el movimiento que describe la curva es una combinación de movimientos simples, la línea instantánea del movimiento o dirección de la tangente puede hallarse por composición de movimientos, mediante la ley del paralelogramo. De este último principio subyace el que dicho método no sea general, ya que solamente es válido cuando el paralelogramo de velocidades resulta ser un cuadrado o un rombo.

Por su parte, Torricelli también utiliza un método para el trazado de tangentes que se basa esencialmente en una concepción dinámica de la tangente, la cual resulta de la composición de dos movimientos de un punto móvil que traza la curva. Trazar la tangente a una curva descrita por el movimiento de un punto que resulta de la composición de dos movimientos consiste en determinar la resultante de las velocidades de los dos movimientos (Collette, 1993).

Torricelli, en su obra *De motu gravium* incorporada a su *Opera Geométrica* de 1644, recoge y desarrolla los resultados de Oresme y Galileo y, tras nuevas especulaciones cinemáticas, obtiene para curvas particulares (parábolas de orden cualquiera) resultados fácilmente generalizables, que permiten establecer desde un punto de vista cinemático, el carácter inverso de las operaciones de cuadraturas, que dan el espacio conocida la velocidad, y de construcción de tangentes que dan la velocidad conocido el espacio. Es decir, si $s = s(t)$ y $v = v(t)$ representan respectivamente el espacio y la velocidad en función del tiempo, se tiene que: a) el área limitada por la curva $v = v(t)$ y el eje de las abscisas representa, para cada *t*, el espacio recorrido $s = s(t)$, y b) la pendiente de la tangente a la curva $s = s(t)$ representa, para cada *t*, la ordenada de la curva $v = v(t)$ en la abscisa *t*.

Al tomar la dirección instantánea del movimiento como conocida, tanto Roberval como Torricelli habían evitado el uso de infinitesimales en su método, el cual tenía la ventaja adicional de ser aplicable a curvas que no están referidas directamente a un sistema de coordenadas. Sin embargo, el método no era general en cuanto a que no todas las velocidades podían ser determinadas (Andersen, 1984).

3.2.3.4. Las reglas de Hudde y Sluse

En la época del matemático holandés Johann Hudde los dos temas de más interés entre los matemáticos eran la geometría analítica y el análisis matemático. Hudde y Sluse trabajaron en ambos temas. Las reglas de estos dos matemáticos proveen de algoritmos que facilitan la obtención de las raíces dobles. Hudde expresa su regla de la siguiente manera:

> *"Si una ecuación tiene una raíz doble y multiplicamos la ecuación por una progresión aritmética arbitraria, de forma que el primer término de la progresión multiplica al primer término de la ecuación y así sucesivamente, el producto obtenido es una ecuación que tiene la raíz dada."* (González, 1992, p. 193)

Boyer (1999) señala que esta regla no es más que una forma camuflada del teorema moderno que dice que si *r* es una raíz doble de la ecuación algebraica *f(x)=0*, entonces *r* también es raíz de la ecuación *f'(x)=0*. Una segunda regla dada por Hudde consiste en una modificación del teorema de Fermat que en la actualidad se formula diciendo que si *f(a)* es un valor máximo o mínimo relativo de un polinomio *f(x)*, entonces *f'(a)=0*.

En 1659, Johann Hudde dio una formulación general de un patrón subyacente a las soluciones de problemas de máximos y mínimos por el método de Fermat, que en notación moderna, afirma que dado un polinomio de la forma $y = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, entonces, se tiene un máximo o un mínimo cuando $\sum_{k=0}^{n} k a_k x^{k-1} = 0$ (Grabiner, 1983a).

De acuerdo con Andersen (1984), Hudde aplicó su regla al cálculo de valores máximos o mínimos aceptando como hipótesis que si α es un valor de *x* que hace a *p(x)* máximo o mínimo, entonces la ecuación *p(x)=p(α)* tiene dos raíces iguales. También extendió su método a una regla para determinar subtangentes, y aunque no dio ni una demostración de dicha regla, es interesante por ser una de las primeras reglas generales que se dieron: Sea una curva de ecuación $p(x,y) = 0$, donde p es un polinomio en *x* e *y*; la regla de Hudde asegura que la subtangente t correspondiente a un punto (x,y) viene dada por $t = \frac{-x(\, p(x,y),\ a,\ d)_y}{(\, p(x,y),\ a,\ d)_x}$, donde los subíndices significan que en el numerador $p(x,y)$ debe ser considerado como un polinomio en *y* mientras que en el denominador como un polinomio en *x*.

La regla de Hudde para la obtención de las raíces dobles hizo más fácil de aplicar el método de Descartes, porque podía tomarse una progresión aritmética preparada para que un posible término complicado quedara multiplicado por cero. De hecho Newton, en sus trabajos del otoño de 1664, halla la subnormal de una curva aplicando una combinación del método de Descartes y la regla de Hudde (Andersen, 1984).

Por su parte, René François de Sluse obtuvo en 1652, no se sabe si a partir de Torricelli o de forma independiente, una regla para hallar la tangente a una curva dada por una ecuación de la forma $f(x, y)=0$, donde f es un polinomio. Esta regla, que no fue publicada hasta 1673, se puede enunciar de la siguiente manera: "la subtangente en cuestión será el cociente obtenido, dividiendo los términos del polinomio $f(x, y)$ que contengan la variable y, cada uno de ellos multiplicado por el exponente de la potencia de y que aparece, por los términos en que aparezca la variable x, multiplicado cada uno de ellos por el correspondiente exponente de x y divididos todos ellos por x" (Boyer, 1999, p. 471). Lo anterior equivale a escribir, en notación actual, $\frac{yf_y}{f_x}$.

3.2.3.5. El método de las tangentes de Barrow

Después de las aportaciones realizadas por Descartes y Fermat tanto con el desarrollo de la geometría analítica y los trabajos realizados sobre los problemas de tangentes y máximos y mínimos, diversos matemáticos, entre los que podemos mencionar a Roberval, Torricelli, Wallis, entre otros, siguieron trabajando en esta misma dirección casi al mismo tiempo en el que se desarrollaban métodos para abordar problemas de cuadraturas, cálculo de áreas y volúmenes.

Sin embargo, fue en los trabajos de Barrow (1630 - 1677) que el cálculo diferencial dio el siguiente paso importante rumbo a su evolución. Barrow, apoyándose en los conceptos medievales de tiempo y movimiento, ligados a los indivisibles de Cavalieri y a la composición de movimiento de Torricelli, fue capaz de establecer (aunque de manera intuitiva) que los procesos de cálculo de tangentes eran inversos a los de cuadraturas. Collette (1993) señala que en la cuarta lección de su obra *"Lectiones opticae"* publicada en 1669, Barrow incluye un pasaje en el que menciona que a partir del conocimiento de la tangente a una curva es posible pasar a la construcción y cuadratura de otra y viceversa (a lo que hoy conocemos como Teorema fundamental del Calculo).

De todos los matemáticos que aportaron a la evolución del cálculo diferencial, Barrow fue quien más cerca estuvo de fundar el cálculo, antes que Newton y Leibniz. Sin embargo, el hacer a un lado la nueva geometría analítica y evocarse a los razonamientos geométricos de los antiguos griegos, impidió a Barrow adelantarse a la fundación del cálculo. González (1992, p. 204) lo expresa de la siguiente manera:

> *"Se puede aventurar que fue la forma geométrica de trabajar lo que impidió a Barrow, a pesar de sus magníficos resultados de anticipación, desarrollar el enfoque algorítmico que es el ingrediente esencial del cálculo, pues su obra padece una total limitación operacional que hace imprescindible la utilización constante de figuras geométricas complejas, a las que se esclaviza, porque en su descripción minuciosa puede estar la clave de la demostración"*

De todos los trabajos desarrollados por Barrow sólo en su método para la obtención de las tangentes adoptó un enfoque analítico. Su método para el cálculo de tangentes es muy parecido al de Fermat, excepto por el *triángulo diferencial*[23] también llamado *triángulo de Barrow*, y que en lugar de realizar un incremento (*E* en el método de Fermat) Barrow introduce dos incrementos *e* y *a*, lo que de acuerdo con Boyer (1999) equivale en nuestro lenguaje actual a Δx y Δy respectivamente.

Con base en la figura 3.6, Barrow describe así su método de las tangentes:

> "Sean *AP* y *PM* dos líneas rectas dadas, *PM* cortando a la curva dada en *M*, y supongamos que *MT* corta a la curva en *M* y corta a la recta *AP* en *T*.
>
> Para encontrar el segmento *PT*, consideremos un arco de la curva infinitamente pequeño *MN*. Tracemos *NQ* y *NR*, paralelas respectivamente a *MP* y *AP*. Sea *MP=m*, *PT=t*, *MR=a* y *NR=e* otros segmentos determinados por la naturaleza de la curva. Comparamos *MR* con *NR* por medio de una ecuación obtenida por cálculo. A continuación observaremos las siguientes reglas:
>
> *Regla 1.* En el cálculo omitiremos todos los términos conteniendo potencias de *a* o *e*, o productos de ellos.
>
> *Regla 2.* Después de formar la ecuación desecharemos todos los términos que consisten en letras significando cantidades determinadas o conocidas, o términos que no contienen *a* o *e* (estos términos pasándolos a un lado de la ecuación serán siempre igual a cero).

[23] También se le conoce como *triángulo característico*, y antes de Barrow ya era utilizado por Torricelli, Pascal, Neil, etc. Este triángulo es la piedra angular para el desarrollo del cálculo de Leibniz.

Regla 3. Se sustituye m (o MP) por a y t (o PT) por e, de aquí se encontrará la cantidad PT.*"* (González, 1992, pp. 205)

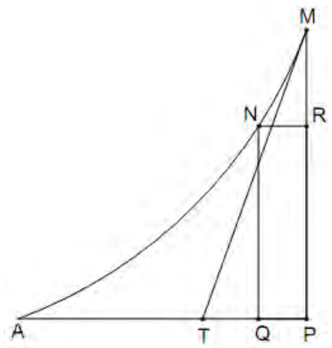


Figura 3.6. Método de las tangentes de Barrow

A continuación proponemos el siguiente ejemplo para ilustrar el método de las tangentes de Barrow. Consideremos la curva dada por la expresión $y^2 = 3x$, primero sustituyendo x y y por x+e y y+a respectivamente, obtenemos:

$$y^2 + 2ya + a^2 = 3x + 3e$$

Aplicando la *regla 1*, es decir, despreciando los términos que contienen potencias de orden superior a 1 de a y e:

$$y^2 + 2ya = 3x + 3e$$

Aplicando la *regla 2*, es decir, sustrayendo de la expresión anterior $y^2 = 3x$:

$$2ya = 3e$$

Finalmente aplicando la *regla 3*:

$$\frac{PM}{PT} = \frac{m}{t} = \frac{a}{e} = \frac{3}{2y}$$

De donde la subtangente viene dada por $PT = t = \frac{2my}{3}$.

Observemos dos aspectos importantes en el método de las tangentes de Barrow; el primero es que, al aplicar la *regla 3* (para el cálculo de la subtangente t), Barrow encuentra la razón $\frac{a}{e}$ considerando la semejanza entre los triángulos MTP y MNR. El segundo aspecto es que Barrow aplica el triángulo característico concibiendo la tangente como posición límite de la secante cuando *a* y *e* se aproximan a cero, aplicando (intuitivamente) el límite al suprimir las potencias de *a* y *e* de orden superior a uno.

3.2.4. Los fundadores del cálculo

Como señala González (1992), es indiscutible que Newton y Leibniz son los verdaderos artífices del *cálculo infinitesimal*, pero estos dos grandes genios del pensamiento se encontraron un "terreno abonado" por numerosos matemáticos, como Kepler, Cavalieri, Torricelli, Fermat, Roberval, Barrow, etc., que habían desarrollado, en la resolución de ciertos problemas, multitud de métodos y técnicas infinitesimales, de las que Newton y Leibniz "destilaron" el algoritmo universal que constituye el cálculo infinitesimal.

Como sabemos, Newton y Leibniz "fundaron"[24], de manera independiente, el Cálculo Infinitesimal. Sin embargo, y a pesar de la polémica suscitada por la supremacía de la autoría, lo cierto es que sus cálculos infinitesimales eran muy diferentes en cuanto a ideas y estilo.

Por un lado Newton comienza con la consideración de elementos infinitesimales, a la manera de Fermat y Barrow, pero enseguida deriva hacia una concepción mecánica, basada en la idea intuitiva del movimiento continuo, manejando el concepto de *fluente*, como cantidad que varía respecto al tiempo, y de *fluxión* como su velocidad de cambio respecto al tiempo (González, 1992); de ahí que al cálculo desarrollado por Newton se le conozca como *cálculo fluxional.*

El cálculo de Leibniz, por su parte, tiene un carácter más simbólico y analítico, siendo las *diferencias infinitesimales* y la suma de *infinitamente pequeños*, las bases de su cálculo diferencial e integral respectivamente (González, 1992).

A continuación describiremos las características del *cálculo de fluxiones* de Newton y el *cálculo diferencial* de Leibniz, así como las ideas y concepciones bajo las que realizaron sus desarrollos estos dos grandes matemáticos.

3.2.4.1. El cálculo fluxional de Newton

Al inicio de sus investigaciones sobre las propiedades de las líneas curvas, Newton se apoyó principalmente en el Método de las tangentes de Descartes y en la regla de Hudde para

[24] Decimos que Newton y Leibniz fundaron, y no crearon, el Cálculo diferencial, dado que las bases del cálculo, diferencial e integral, ya estaban sentadas con los desarrollos de Fermat, Barrow, Wallis etc.

determinar los extremos. En su obra *De analysi*, compuesta alrededor de 1669 pero publicada hasta 1711, Newton establece los fundamentos de su método de las series infinitas. Al principio de este tratado, Newton establece la siguiente regla:

$$\textit{Regla 1. Si } ax^{m/n} = y, \textit{ entonces el área será } z = \frac{n}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}}$$

Posteriormente, en su *De analysi*, Newton da un método general para hallar la relación entre la cuadratura de una curva y su ordenada, método del cual surge como consecuencia inmediata la *Regla 1* antes mencionada. Este método general consiste en suponer una curva cuya área está dada por la expresión $z = ax^m$, donde m es entero o fraccionario. Entonces Newton denota con *"o"* a un intervalo de tiempo muy pequeño, con *"ox"* o *"momento de x"* a un incremento infinitesimal de *x*, análogamente define *"oy"* o *"momento de y"*. Así, *"z+oy"* es el crecimiento del área cuando *x* varía un tiempo *o*. Por tanto, para una variación de tiempo *o*, se tiene que $z + oy = a(x + o)^m$. Después Newton desarrolla el segundo miembro en serie binómica infinita, cuando *m* es fraccionario, sustrae de esta serie el área $z = ax^m$, divide cada uno de los términos obtenidos por *o*, y suprime todos los términos que contienen *o* o alguna de sus potencias y obtiene finalmente que $y = max^{m-1}$.

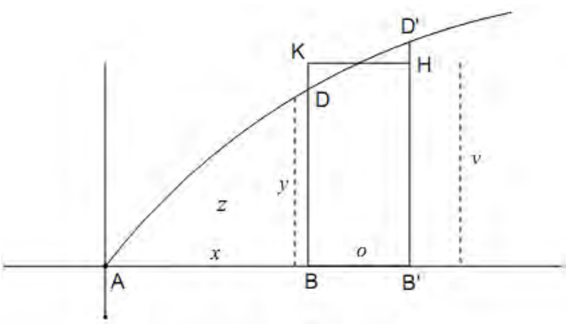


Figura 3.7. Método de Newton para hallar relaciones entre curvas y sus áreas

Ilustremos lo anterior con el siguiente ejemplo (Bos, 1984, pp. 79): De la figura 3.7, el área *ABD=z*, *AB=x*; sean $BB' = o$ y *BK=v* tales que el área $BDD'B'$ =*área* $BKHB' = ov$. Tomemos, por ejemplo, la curva para la cual $z = \frac{2}{3}x^{3/2}$ (ecuación 1), es decir (elevando al cuadrado para obtener una ecuación polinómica) $z^2 = \frac{4}{9}x^3$ (ecuación 2); entonces se tiene:

$$(z + ov)^2 = \frac{4}{9}(x + o)^3$$

de donde

$$z^2 + 2zov + o^2v = \frac{4}{9}(x^3 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3) \text{ …(ecuación 3)}$$

Sustituyendo las ecuaciones 1 en 3, simplificando y dividiendo los dos miembros de la expresión resultante por *o* nos queda:

$$2zv + ov = \frac{4}{9}(3x^2 + 3xo^2 + o^2) \text{ …(ecuación 4)}$$

Ahora, Newton toma $BB' = o$ *infinitamente pequeño* de tal forma que, como se muestra en la figura, *v*=*y*, y los términos que contienen *o* desaparecen, por lo que de la ecuación 4 obtenemos:

$$2zy = \frac{4}{3}x^2 \text{ …(ecuación 5)}$$

y finalmente, sustituyendo la ecuación 1 en 5, se obtiene:

$$y = x^{1/2}$$

En su obra *De analysi*, Newton también demuestra el recíproco, es decir, dada una curva $y = max^{m-1}$, entonces el área comprendida bajo la curva es $z = ax^m$.

En 1736 se publica la obra *Methodus fluxionum et serierum infiniturum*, también conocida como el *método de las fluxiones*. En esta obra, Newton expone su segunda concepción del análisis introduciendo en sus métodos infinitesimales el concepto de *fluxión*. Así, en el artículo 60 de esta obra Newton expresa lo siguiente:

> *"Llamaré cantidades fluentes, o simplemente fluentes, a estas cantidades que considero aumentadas gradualmente e indefinidamente; las representaré mediante las últimas letras del alfabeto v, x, y, z, para distinguirlas de las otras cantidades que, en las ecuaciones, se consideran como conocidas y determinadas, y que se representan por las primeras letras a, b, c, etc. Representaré con las mismas últimas letras coronadas con un punto $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, las velocidades con que las fluentes aumentan por el movimiento que las produce y que, por consiguiente, se pueden llamar fluxiones…"* (Collette, 1993, p. 109).

De esta forma, vemos como para Newton *x* y *y* son cantidades fluentes dado que, al ser generadas por movimiento, varían con respecto éste, y $\dot{x}$ y $\dot{y}$ son las fluxiones de las fluentes

x y y respectivamente, es decir las velocidades de dichos movimientos. Así mismo, Newton llama *"momento de la fluente"* a la cantidad infinitamente pequeña que varía una fluente como x en un intervalo de tiempo infinitamente pequeño. Por tanto, la "la velocidad $\dot{x}$ por una cantidad infinitamente pequeña o, es decir, $\dot{x}o$, representa el momento de una cantidad cualquiera x". Newton prosigue la descripción de su método:

> *"Ya que los momentos como $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ son las anexiones o aumentos infinitamente pequeños de las cantidades fluentes x e y durante los intervalos de tiempo infinitamente pequeños, se sigue que estas cantidades x e y, después de un intervalo de tiempo infinitamente pequeño, se convierten en $x + \dot{x}o$ e $y + \dot{y}o$…De ese modo, se puede sustituir en la misma ecuación $x + \dot{x}o$ e $y + \dot{y}o$ en lugar de x e y."* (Collette, 1993, p.110).

En la primera parte del *método de las fluxiones*, Newton trata la reducción de "términos complicados" mediante división y extracción de raíces con el fin de obtener sucesiones infinitas, evidenciando así, las "herramientas" que utilizará para resolver los problemas. En la segunda parte, propone una serie de problemas con el fin de mostrar la potencialidad de su método; el primero de ellos consiste en encontrar la velocidad del movimiento en un tiempo dado cualquiera, dada la longitud del espacio descrito. El segundo problema la inversa del primero.

El siguiente ejemplo (Bos, 1984) fue uno de los propuesto por Newton en su obra de 1671, y ejemplifica cómo aplicaba su método de las fluxiones. Consideremos la curva de ecuación $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ (ecuación 1), si sustituimos en ella x y y por $x + \dot{x}o$ y $y + \dot{y}o$ respectivamente, obtenemos:

$$(x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2o^2x + \dot{x}^3o^3) - (ax^2 + 2a\dot{x}ox + a\dot{x}^2o^2) \\ + (axy + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}\dot{y}o^2) - (y^3 + 3\dot{y}oy^2 + 3\dot{y}^2o^2y + \dot{y}^3o^3) = 0$$

si eliminamos ahora $x^3 - ax^2 + axy - y^3$, que es igual a cero, por la ecuación 1, dividiendo después por o y despreciando finalmente los términos en que todavía figure el factor o, nos queda:

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0$$

Con esto vemos como las *fluxiones* o velocidades de los movimientos de las fluentes, es a lo que más tarde llamaríamos la *derivada*; y los momentos como $\dot{x}o$ y $\dot{y}o$ del *cálculo de fluxiones* de Newton, serían las diferencias infinitamente pequeñas o *diferenciales* dx y dy en el cálculo diferencial de Leibniz.

3.2.4.2. El cálculo diferencial de Leibniz

A diferencia de Newton, el enfoque de Leibniz se basa fundamentalmente en el concepto de sumas y diferencias finitas (para el caso discreto) y, cuando se aplica a curvas (para el caso continuo), pueden llegar a ser infinitamente pequeñas. Tal y como señala Collette (1993), su finalidad era elaborar un método eficaz mediante el cual, sin recurrir a diagramas, ciertas propiedades de las curvas puedan ser determinadas por medio de su *cálculo de las diferencias*.

En este sentido Bos (1984), señala que fueron tres las ideas principales que permitieron a Leibniz el desarrollo de su cálculo infinitesimal. La primera era una idea filosófica fundamental, la construcción de una *characteristica generalis*, es decir, un lenguaje simbólico general mediante el cual se pudieran escribir con símbolos y fórmulas todos los procesos de argumentación y de razonamiento; estos símbolo deberían obedecer ciertas reglas de combinación entre ellos que vendrían a garantizar la corrección de los argumentos formulados en este lenguaje. La segunda idea se refiere a las sucesiones de diferencias; en sus estudios sobre sucesiones numéricas $a_1, a_2, a_3, ...$ y sus sucesiones de diferencias primeras asociadas, $b_1 = a_1 - a_2$, $b_2 = a_2 - a_3$, $b_3 = a_3 - a_4$, … Leibniz se había dado cuenta de la relación

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n = a_1 - a_{n+1}$$

lo que permite sumar fácilmente las sucesiones de diferencias. Basado en este descubrimiento, Leibniz obtuvo algunos resultados de entre los cuales se encuentra el denominado *triángulo armónico*. Estos resultados hicieron que Leibniz se diera cuenta de que el formar las sucesiones de diferencias y las sucesiones de sumas eran operaciones inversas una de la otra. La curva en la Figura 3.8 define una sucesión de ordenadas equidistantes *y*. si su distancia es 1, la suma de estas ordenadas nos da una aproximación de la cuadratura de la curva, y la diferencia entre dos ordenadas sucesivas nos da aproximadamente la pendiente de la correspondiente tangente.

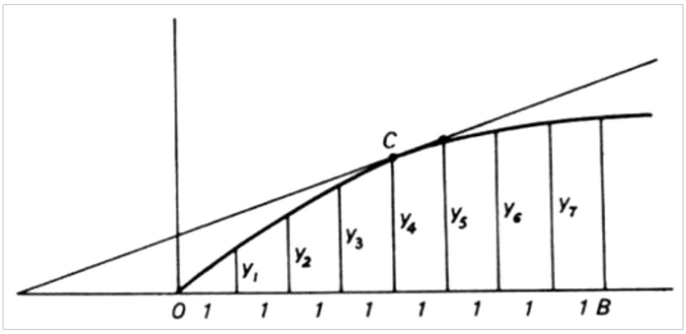


Figura 3.8. Sucesión de ordenadas equidistantes

Fijémonos de que cuanto más pequeña se elija la unidad 1, mejor es la aproximación. Así, Leibniz dedujo que si dicha unidad pudiera ser tomada *infinitamente pequeña*, las aproximaciones harían exactas, y por tanto, la cuadratura sería igual a la suma de las ordenadas y la pendiente de la tangente sería igual a la diferencia de dos ordenadas sucesivas. De esta forma, Leibniz dedujo, de la relación inversa entre sumas y diferencias de sucesiones, que la determinación de cuadraturas y tangentes son operaciones inversas una de la otra.

La tercera idea principal, fue el uso del *triángulo diferencial* en las transformaciones de cuadraturas. Leibniz observó, estudiando la obra de Pascal, la importancia del pequeño triángulo *cc'd* situado a lo largo de la curva en la Figura 3.9, pues se podía considerar semejante a los triángulos formados por la ordenada, tangente y subtangente, o por la ordenada, normal y subnormal.

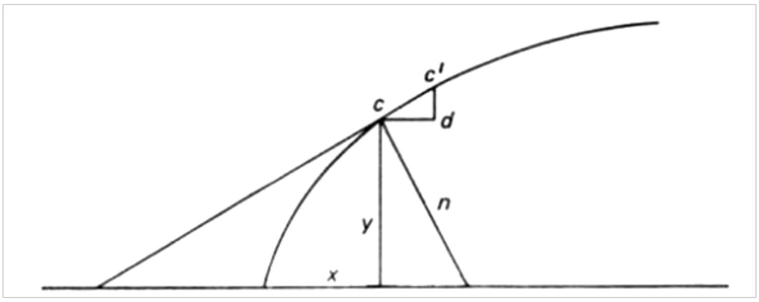


Figura 3.9. Triángulo diferencial de Leibniz

De esta forma, y con base en las tres ideas anteriores, Leibniz introduce los símbolos $\int$ y ∂ que, de hecho, los concibe como operadores que representan respectivamente la suma de rectángulos o suma de áreas y las diferencias entre dos valores sucesivos de x o y. Así, después de varios estudios, Leibniz concibe la *diferencial* de una variable y, es decir, dy, como la diferencia infinitamente pequeña entre dos valores sucesivos de y; análogamente define dx como la diferencia infinitamente pequeña entre dos valores sucesivos de x (ver

Figura 3.10). De aquí que una suma tal como $\int y\,dx$ (lo que más tarde los Bernoulli llamarían *integral*) es la suma de los rectángulos infinitamente pequeños de base *dx* y altura *y*; por lo tanto, la cuadratura de una curva es igual a $\int y\,dx$.

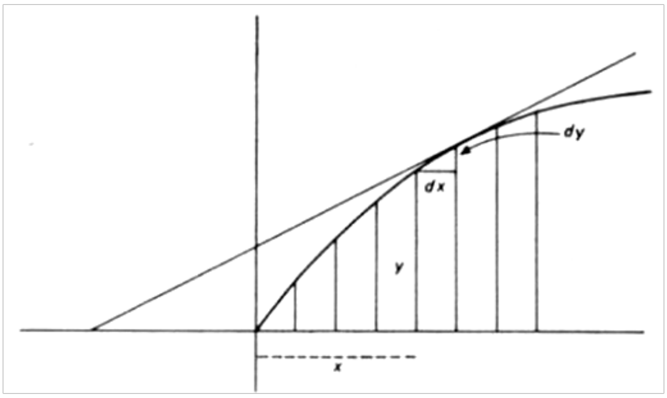


Figura 3.10. El uso de diferenciales de Leibniz

Posteriormente, Leibniz afirma que *la integración en cuanto a proceso de sumación es la inversa de la diferenciación.* Pronto se interesa en la relación que existe entre *dx* y *dy* y del significado de expresiones tales como $d(uv)$, $d(u/v)$, etc. Así, en un manuscrito fechado el 26 de junio de 1676, Leibniz afirma que la mejor manera de encontrar las tangentes es determinando el cociente $\frac{dy}{dx}$, dándose cuenta de que la determinación de la tangente a una curva depende de la razón de las diferencias de ordenadas y abscisas cuando se hacen infinitamente pequeñas.

La primera publicación de Leibniz sobre el cálculo de diferencias, aparece en *Acta Eruditorum* en 1684, bajo el título *"Nova methodus pro maximis et minimis, intemque tangetibus, qua nec irrationales quantitates moratur"* (Nuevo método para los máximos y mínimos, así como para las tangentes, el cual puede también aplicarse a las cantidades fraccionarias e irracionales). En esta obra, según Collette (1993), Leibniz introduce por primera vez la expresión *cálculo diferencial* y proporciona las fórmulas, que hasta ahora conocemos, para derivar productos, cocientes, potencias y raíces, todas éstas acompañadas de aplicaciones geométricas tales como la búsqueda de tangentes, máximos y mínimos, y de los puntos de inflexión.

3.2.4.3. El problema de la fundamentación

Tanto Newton como Leibniz trabajaron con cantidades *infinitamente pequeñas*, y ambos fueron conscientes de las dificultades subyacentes a su uso. Por un lado, Newton afirmaba que a su cálculo se le podía dar una fundamentación rigurosa por medio del concepto de *razón primera y última*, el cual lleva implícito el concepto de límite (Bos, 1984). Así, en su obra *Philosophiae naturalis principia mathematica*, se encuentra el siguiente lema, en la sección I del Libro I:

> *"Las cantidades, y las razones de cantidades, que en cualquier tiempo finito tienden continuamente a la igualdad, y antes de terminar ese tiempo se aproximan una a otra más que por ninguna diferencia dada, acaban haciéndose en última instancia iguales."* (Durán, 1996, p. 54).

Con este lema, Newton intentaba justificar el concepto de *incrementos evanescentes* con el que pretendió evitar el uso de las cantidades infinitesimales en el "desarrollo del concepto de derivada".

En este sentido, la principal crítica fue la del obispo George Berkeley, quien deja en evidencia la vaguedad que rodea a las cantidades infinitamente pequeñas, a los incrementos evanescentes y sus razones, a las diferenciales y a las fluxiones de orden superior:

> *"¿Qué son estas Fluxiones? ¿Las velocidades de incrementos evanescentes? ¿Y qué son estos mismos incrementos evanescentes? No son ni cantidades finitas, ni cantidades infinitamente pequeñas sin ser tampoco una simple nada. ¿No podríamos llamarlos los fantasmas de las cantidades desaparecidas?"* (Bos, 1984, p.119).

Berkeley también critica la inconsistencia lógica que supone trabajar con incrementos pequeños, los cuales primero se suponen distintos de cero para poder dividir por ellos y, finalmente se les considera iguales a cero para poder liberarse de ellos. Sin embargo, era consciente de que el cálculo conducía a conclusiones correctas con gran éxito, aunque este éxito lo explicaba como una *compensación de errores* que estaba implícito en la aplicación de las reglas del cálculo. Por ejemplo, si uno determina una tangente, en primer lugar se supone que el triángulo característico es semejante al triángulo formado por la ordenada la subtangente y la tangente, lo cual implica un error porque esos dos triángulos son sólo aproximadamente semejantes. A continuación se aplican las reglas del cálculo para hallar la razón $\frac{dy}{dx}$, lo cual introduce un nuevo error, ya que estas reglas han sido deducidas despreciando diferenciales de orden superior. Estos dos errores vienen a compensarse uno con otro, y así el matemático llega *"bien que no a la Ciencia, sí a la Verdad, porque no* *puede llamarse ciencia cuando se procede a ciegas y se llega a la verdad no sabiendo cómo ni por qué medios"* (Bos, 1984, p. 120).

De esta forma, el reconocimiento de la necesidad de justificar matemáticamente los métodos infinitesimales generadas por las críticas de Berkeley impulsó, en los años siguientes, el trabajo de fundamentación del cálculo el cual, después de un siglo, culminaría con la resolución del problema de los fundamentos en el cálculo diferencial moderno.

3.2.5. En busca del rigor en la fundamentación del cálculo diferencial

Al final del siglo XVII, el cálculo diferencial estaba establecido sobre los trabajos de Newton y Leibniz, aunque como hemos visto, sin una fundamentación matemática rigurosa. El concepto de *derivada* y su fundamentación, fue desarrollándose gradualmente durante los siglos XVIII y XIX, junto con las ideas de función, continuidad y límites, principalmente. En este sentido, Bos (1984) señala que los desarrollos realizados durante los siglos XVIII y XIX, que más tarde llevarían a la fundamentación del cálculo diferencial y a la definición que actualmente se tiene de la derivada, se pueden resumir en los siguientes: 1) la idea de que el cálculo tiene que ver con funciones, más que con variables; 2) la elección de la *derivada* como concepto fundamental del cálculo diferencial, en lugar de la *diferencial*; 3) la consideración de la derivada como función; 4) el concepto de *límite* y, en particular, el límite de una función cuando la variable independiente se comporta de una cierta manera señalada explícitamente, y de esta forma, en lugar de hablar simplemente del límite de la variable dependiente *p*, se hace la indicación explícita tal como $\lim_{h\to 0} p(h)$.

A continuación presentamos un breve recorrido por los aspectos más relevantes de la fundamentación del cálculo diferencial, los cuales dan lugar a la definición de la derivada tal y como la conocemos hoy en día.

Después de que Newton y Leibniz sentaron las bases del cálculo, los matemáticos de la época continuaron los desarrollos y sobre todo las aplicaciones de las nuevas ideas a una gran cantidad de problemas, principalmente de la física, tales como el de la cuerda vibrante, la catenaria o el de la braquistócrona. El problema de la cuerda vibrante, por ejemplo, fue abordado por grandes matemáticos entre los cuales podemos mencionar a D'Alembert, Daniel Bernoulli y Leonhard Euler, quienes sostuvieron una extensa discusión sobre la solución y el tipo de funciones que podrían ser admitidas dentro de ésta (Grabiner, 1983b). Esta problemática, el tipo de funciones que se podían utilizar en el cálculo y en particular en la solución del problema de la cuerda vibrante, era una de las dificultades importantes relativas a la fundamentación del cálculo, cuestión que fue ampliamente debatida al analizar la solución a la ecuación en derivadas parciales que describe el movimiento que realiza una cuerda al tensarla por los extremos conocida como "ecuación de ondas", la cual es planteada en notación moderna de la siguiente manera:

$$\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\delta^2 y}{\delta t^2}$$

donde *y* es el desplazamiento transversal en el instante *t* del punto de abscisa *x* de una cuerda uniforme sujeta por sus extremos a dos puntos del eje *x* distantes π entre sí. La solución era:

$$y = f(x + ct) + g(x - ct)$$

donde *f* y *g* quedaban determinadas por las condiciones iniciales. Euler sostenía que en dicha solución deberían admitirse funciones con "picos" para poder representar la posición inicial de la cuerda al tañerla, a lo que D'Alembert contestaba diciendo que en tales puntos no existiría la segunda diferencial y así no podría aplicarse en ellos la ecuación solución. Sin embargo Euler mantenía que *f* y *g*, en la solución, podían sustituirse por funciones "completamente arbitrarias" que no necesitaban estar definidas por expresiones algebraicas ni por leyes mecánicas. Fue entonces cuando Daniel Bernoulli, con su artículo de *1775a*, entró a la discusión argumentando sobre la base de la superposición de los componentes armónicos de la vibración de la cuerda, que dicha cuerda presentaba en cada instante una combinación de vibraciones sinusoidales, con lo cual su forma vendría dada por (Grattan-Guinness, 1984):

$$f(x) = \sum_{r=1}^{\infty} a_r \operatorname{sen} rx$$

Uno de los primeros matemáticos en dar un paso importante de cara a la fundamentación del cálculo diferencial fue Leonhard Euler, quien, como señala Grattan-Guinness (1984), había sido el responsable de importantes perfeccionamientos y desarrollos del cálculo de Leibniz, a pesar de que sus fundamentos todavía no estaban suficientemente claros. Por tal razón Euler es considerado el fundador del análisis, toda una rama de las matemáticas que en particular engloba los métodos infinitesimales del cálculo diferencial e integral. En este sentido, sus libros *Introductio in analysin infinitorum (1784), Institutiones calculi differentialis (1755)* e *Institutiones calculi integralis (1768-80),* son las piezas clave que dieron una estructuración adecuada a la nueva disciplina (Durán, 1996). Así, en su obra *Institutiones calculi differentialis* Euler lleva a cabo una estructuración del cálculo diferencial retomando la idea de diferencial en el sentido de diferencia, aunque introduciendo un cambio en el cálculo leibniziano que los aproxima a la interpretación de los *incrementos evanescentes* de Newton. Para Euler el cálculo es un método para determinar el cociente $\frac{dy}{dx}$ cuando los incrementos se desvanecen; esto lo expresa de la siguiente forma:

> *"…un método para determinar la proporción de los incrementos evanescentes, estos que las funciones toman cuando la variable de la función se modifica por uno de tales incrementos"* (Euler, 1775, en Durán, 1996, p. 168).

Es decir, en el análisis de Euler comienza a surgir el cociente de incrementos $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ el cual dará origen a la derivada de una función. Otro aspecto de suma importancia es que Euler comienza a ver a las funciones como una aplicación que a un número *x* asocia otro *f(x)*, lo cual conllevaba a considerar a la derivada como el concepto básico del cálculo diferencial, y no a los diferenciales *dx* y *dy* los cuales eran considerados los conceptos básicos cuando la función era pensada como una relación entre las variables *x* e *y*.

Otra herramienta útil e importante de cara a la fundamentación es la serie de Taylor, desarrollada en parte para ayudar a resolver ecuaciones diferenciales. Brook Taylor apoyándose en las propiedades de las diferencias finitas, escribió una ecuación expresando que es posible plantear *f(x+h)* en términos de *f(x)* y su cociente de diferencias de varios ordenes (Grabiner, 1983). Esta idea fue usada por Lagrange quien afirmaba que toda función puede ser desarrollada en una serie de Taylor de la forma $f(x+h) = a_0 + a_1 h + \frac{1}{2!} a_2 h^2 + \cdots$, y que sus cocientes diferenciales (a los que llamaba "funciones derivadas") venían definidos como los cocientes $a_0, a_1, a_2, \ldots$, en la función anterior (Grattan-Guinness, 1984).

Durán (1996) señala que el trabajo de Joseph Louis Lagrange fue el primer intento serio de fundamentar con rigor el cálculo infinitesimal (aunque sin éxito). Esto lo reflejaba en su libro más importante sobre análisis *Théorie des fonctions analytiques* publicado en 1779 y en el cual se encuentra la primera aparición del teorema del valor medio para funciones derivables, así como la primera expresión para el resto en la fórmula de Taylor que hoy conocemos como la *expresión de Lagrange del resto*. A Lagrange también se debe el término de *"función derivada"* y la notación f' para denotar la derivada de la función *f*.

Otro matemático que aportó avances en la justificación del cálculo diferencial fue Simon Lhuilier quien en su estudio de *1986a* define el límite al estilo de D'Alembert como el valor del que una variable puede llegar a diferir en menos que una cantidad arbitrariamente pequeña. Así mismo, Lhuilier da un tratamiento interesante al cálculo diferencial definiendo la derivada de la manera moderna: $\frac{dy}{dx}$ es el límite del cociente de las diferencias o cociente incremental, además $\frac{dy}{dx}$ debe ser leído, según él, cómo un símbolo único y no como una razón (Grattan-Guinness, 1984). Sin embargo, Lhuilier caería en una contradicción al denominar $\frac{dy}{dx}$ "razón diferencial", lo que supondría un desajuste entre la definición y la terminología.

No es hasta el primer cuarto del siglo XIX cuando se logra dar el impulso definitivo a la fundamentación rigurosa del concepto de derivada de la mano de dos grandes matemáticos Augustin Cauchy y Bernhard Bolzano. Esencialmente ambos aritmetizaron el concepto de límite de D'Alembert; así, en su libro *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique* (1821) Cauchy definió: "Cuando los sucesivos valores atribuidos una variable aproximan indefinidamente a un valor fijo tanto que al final difieren de él tanto como uno desea, esta última cantidad es denominada el límite de todas las otras" (Durán, 1996, p. 56). Usando este concepto dio una definición rigurosa del concepto de cantidad infinitesimal: "cuando los sucesivos valores de una variable disminuyen indefinidamente, de tal forma que llegan a ser menores que cualquier cantidad dada, esa variable es lo que denominamos un infinitésimo. El límite de esa variable es cero" (Ibid.).

Para definir la derivada en términos de esta definición de límite, Cauchy considera el límite de la razón de las diferencias $\frac{f(x+i)+f(x)}{i}$ en un intervalo continuo de *f(x)* (Grabiner, 1981). De esta forma, en su libro *Résumé des Leçons donnéss a l'Écolle Polytechnique sur le Calcul Infinitésimal*, Cauchy define la derivada de la siguiente manera: "Cuando la función $y = f(x)$ es continua entre dos límites dados de la variable x, y uno asigna un valor entre estos límites a la variable, un incremento infinitesimal de la variable produce un incremento infinitesimal en la función misma. Consecuentemente, si ponemos $\Delta x = i$ los dos términos del cociente de diferencias $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ serán infinitésimos. Pero considerando que estos términos tienden a cero simultáneamente, el cociente mismo puede converger a otro límite, positivo o negativo. Este límite, cuando exista, tiene un valor definido para cada valor particular de *x*; pero varía con *x*. Así, por ejemplo, si tomamos $f(x) = x^m$, siendo m un entero positivo, la razón de las diferencias infinitesimales será $\frac{(x+i)^m - x^m}{i} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} x^{m-2} i + \cdots + i^{m-1}$; y su límite será la cantidad mx^{m-1}, esto es, una nueva función de la variable *x*. Lo mismo ocurrirá generalmente; sólo que la forma de la nueva función que sirve de límite a la razón $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ dependerá de la forma de la función $y = f(x)$. Para indicar esta dependencia, damos a la nueva función el nombre de derivada y la designamos, usando un apóstrofe, por la notación y' o $f'(x)$" (Durán, 1996, p. 174). En 1817, Bolzano había definido la derivada de una función de una manera similar, como la cantidad $f'(x)$ hacia la que se aproxima el cociente $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ cuando Δx se aproxima a cero.

Cauchy el primer matemático en demostrar teoremas con base en una definición "rigurosa" de la derivada; uno de ellos es el teorema que afirma que si *f(x)* es una función continua entre $x = x_0$ y $x = X$, entonces

$$\min_{[x_0,\ X]} f'(x) \leq \frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} \leq \max_{[x_0,\ X]} f'(x)$$

del cual se deduce que si $f'(x)$ es continua entre $x = x_0$ y $x = x_0 + h$, entonces habrá un θ entre 0 y 1, tal que

$$\frac{[f(x_0 + h) - f(x_0)]}{h} = f'(x_0 + \theta h)$$

El teorema y su consecuencia son esenciales para la teoría rigurosa de Cauchy sobre la derivada y para la estructura lógica de su cálculo (Grabiner, 1981). Sin embargo, a pesar de que Cauchy, en palabras de Durán (1996), dio "un paso de gigante" en dirección a la fundamentación del cálculo diferencial, sus definiciones de límites y de infinitésimos no eran suficientes para respaldar con fundamento todo el trabajo desarrollado.

Finalmente fue el matemático alemán Karl Weierstrass quien culminó el proceso de fundamentación del cálculo, aportando la definición de límite tal y como hoy se enseña. Weierstrass elimina los elementos imprecisos que aparecían en la definición de Cauchy tales como *aproximan indefinidamente* o *difieren tanto como uno desea*, y los sustituye por la ahora clásica expresión algebraica del épsilon y el delta: *"el límite de una función f(x) vale L* *cuando x tiende a x_0 si para cualquier cantidad positiva* $\varepsilon > 0$ *existe otra cantidad positiva* $\delta > 0$ *de manera que para todo punto x verificando* $0 < |x - x_0| < \delta$ *y donde la función f esté definida se tiene que* $|f(x) - L| < \varepsilon$" (Durán, 1996, p. 57). Así mismo, puso fin al extenso debate sobre la definición de función continua definiéndola tal y como conocemos hoy en día: "$f(x)$ es continua en x_0 si para cualquier cantidad positiva $\varepsilon > 0$, existe otra cantidad positiva $\delta > 0$ de manera que, para todo punto del intervalo $|x - x_0| < \delta$ donde la función f esté definida, se verifica que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$" (Ibid., p. 59).

De esta forma, hacia el primer cuarto de siglo XIX, la derivada, que comenzó su "recorrido" en el siglo XVII, alcanzó una fundamentación lógica adecuada basada en el concepto de límite: $f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$. Transcurriría algún tiempo más para que, en el debate sobre el problema de la relación entre la continuidad y derivabilidad, quedara claro que no existe relación alguna.

3.2.6. Generalizaciones de la derivada

En los apartados anteriores, hemos realizado un recorrido por las etapas más importantes de la evolución histórica de la derivada de una función real de una sola variable. Sin embargo, es conveniente saber que se han realizado diversas generalizaciones sobre dicho objeto matemático, algunas más investigadas que otras en el campo de Didáctica de la Matemática. Por ejemplo, la *derivada parcial* que, en síntesis, es la derivada de una función de varias variables con respecto a una de esas variables, y que resulta de gran utilidad en ramas de las matemáticas tales como el cálculo de variaciones y la geometría diferencial. La *derivada parcial* describe la variación de una función real de dos o más variables en dirección de cada uno de los ejes coordenados. Existe una generalización llamada *derivada direccional*, que estudia la variación de una función en una dirección de un vector arbitrario, y se aplica tanto a funciones vectoriales reales como complejas: "Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, y sea $f: S \to \mathbb{R}^m$. Se desea estudiar cómo varía f cuando pasamos, a lo largo de un segmento rectilíneo, de un punto $c \in S$ a un punto próximo $c + u$, donde $u \neq 0$. Cada uno de los puntos del segmento se puede expresar por medio de $c + hu$, donde h es real. El vector u define la dirección del segmento rectilíneo. Suponemos que c es un punto interior de S. Entonces existe una bola n-dimensional $B(c\,;r)$ contenida en S, y, si h es suficientemente pequeño, el segmento rectilíneo que une c con $c + hu$ está contenido en $B(c\,;r)$ y por lo tanto en S. Entonces la *derivada direccional* de f en el punto c y en la dirección u, designada por medio del símbolo $f'(c\,;u)$, se define por la ecuación $f'(c\,;u) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+hu)-f(c)}{h}$, siempre que el límite exista” (Apostol, 2006, p. 417).

Menos conocida es la definición de derivada en un punto que presentó Carathéodory en su libro *Theory of Functions of a Complex Variable*: “Sea f una función real definida en un intervalo abierto U, se dice que f es diferenciable en un punto $a \in U$ si existe una función $\emptyset$ que es continua en $x = a$ y que satisface la relación $f(x) - f(a) = \emptyset(x)(x-a)$ para toda $x \in U$. De esta formulación se tienen dos consecuencias inmediatas: 1) Si f es diferenciable en a, entonces f es continua en a; y 2) Si f es diferenciable en a, existe al menos una función $\emptyset$ que satisface la definición; además, si $f'(a)$ existe, $f'(a) = \emptyset(a)$” (Kuhn, 1991, p.41). Aunque Carathéodory presenta su definición dentro del marco de la teoría de funciones de variable compleja, Kuhn (1991) muestra que esta definición aplicada a funciones de variable real, facilita en gran parte el manejo demostrativo de algunos teoremas del cálculo diferencial tales como la regla de la cadena y el teorema de la función inversa. Posteriormente, Acosta y Delgado (1994) extendieron la definición de Carathéodory a funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ como sigue: “Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $a \in \mathbb{R}^n$. Se dice que f es diferenciable en a si existe una función $\emptyset: \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}_{m\times n}$ que es continua en a y que satisface la relación $f(x) - f(a) = \emptyset(x)(x-a)$, donde la función $\emptyset$ es la función pendiente de f en a” (p. 333).

En el marco de los espacios normados, específicamente para los espacios de Banach, tiene lugar otra definición de la derivada conocida como *derivada de Fréchet* o *diferencial total*. Inicialmente, Fréchet dio la siguiente definición: “Sean X e Y espacios lineales normados. Se dice que una aplicación $F: U \to Y$, donde U es un subconjunto abierto de X, es diferenciable en $x_0 \in U$, si existe un operador lineal continuo $L(x_0): X \to Y$ tal que la siguiente representación se da para cada $h \in X$ con $x_0 + h \in U$: $F(x_0 + h) - F(x_0) = L(x_0)h + R(x_0\,,h)$, donde $\lim_{h\to 0} \frac{\|R(x_0;\, h)\|}{\|h\|} = 0$ ” (Pinzón y Paredes, 1999, p. 72). Posteriormente, Fréchet proporcionó una definición más precisa: “Sean $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $a \in \mathbb{R}^n$. Se dice que f es diferenciable en a si existe una transformación lineal $\lambda: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que $\lim_{x\to a} \frac{\|f(x)-f(a)-\lambda(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0$” (Acosta y Delgado, 1994, p. 333).

Otra definición importante de la derivada es la conocida con el nombre de *derivada de Gâteaux*, que fue introducida por Gâteaux en 1913 para funcionales. La *derivada de Gâteaux* es una generalización de la noción de *derivada direccional* y de la noción de *primera variación* manejada en el cálculo variacional: "Sea X y Y espacios normados reales, y U un subconjunto abierto de X. Sean $x_0 \in U$ y $h \in X$ un elemento fijo diferente de cero. Dado que U es abierto, existe un intervalo $I = (-\tau, \tau)$, para algún $\tau > 0$, tal que si $t \in I$ entonces $(x_0 + th) \in U$. Si la aplicación $\Phi(t) = F(x_0 + th)$ tiene una derivada usual en $t = 0$, entonces $\Phi'(0)$ es llamada la variación de Gâteaux de F en x_0 con incremento h, y es denotada por $VF(x_0; h) = \frac{d}{dt}F(x_0 + th) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{F(x_0 + th) - F(x_0)\}$ " (Pinzón y Paredes, 1999, p. 71). Para funciones de varias variables la derivada de Gâteaux comúnmente nombrada *G-diferencial,* se conoce como derivada direccional.

Acosta y Delgado (1994) lograron establecer la equivalencia entre las definiciones de derivada dadas por Fréchet y Carathéodory: "Toda función diferenciable en el sentido de Fréchet es diferenciable en el sentido de Carathéodory y viceversa" (p. 333). Además, es posible demostrar que una función diferenciable según Fréchet es diferenciable según Gâteaux, pero la afirmación inversa es falsa; y debido a la equivalencia entre la derivada de Carathéodory y la de Fréchet, toda función diferenciable según Carathéodory también es diferenciable según Gâteaux (Pinzón y Paredes, 1999).

En este aparado hemos querido presentar algunas de las principales generalizaciones a propósito de la derivada de una función real de una variable; otras maneras de definir la derivada pueden encontrarse en el trabajo de Pinzón y Paredes (1999).

3.3. TIPOS DE CONFIGURACIONES SOCIO-EPISTÉMICAS EN PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN EL USO DE LA DERIVADA

A continuación describiremos las configuraciones socio-epistémicas identificadas a lo largo del recorrido histórico de la derivada. Partiremos de las tres problemáticas principales que, históricamente, dieron origen a dicho objeto: 1) problemas sobre tangentes, 2) problemas sobre máximos y mínimos, y 3) problemas sobre velocidades. Así mismo, tendremos en cuenta el trabajo realizado por Ibarra y Gómez (2005) con la finalidad de comparar similitudes y diferencias entre nuestros puntos de vista para establecer cada una de las configuraciones.

3.3.1. Problema 1: La tangente en la matemática griega

Antes de describir esta primera configuración, analicemos el siguiente problema prototípico:

"Desde un punto dado trazar una recta tangente a un círculo".

Este problema es la proposición XVII que Euclides enuncia en su *libro III* de su obra *Elementos de Geometría*. La respuesta que, de acuerdo con Vera (1970, vol. 1), da Euclides es la siguiente: "(Con base en la Figura 3.1) sea *A* el punto y *BGD* el círculo; tómese el centro *E* de éste y trace el segmento *AE*; con centro en *E* y radio *EA* trace el círculo *AZH*; desde *D* trazar *DZ* perpendicular a *AE* y una *E* con *Z* y *A* con *B*. Por ser *E* centro de los círculos *BDG* y *AHZ*, las rectas *EA* y *EZ* son iguales y también *ED* y *EB*, luego las dos *AE* y *EB* con iguales a *ZE* y *ED*, y forman el ángulo común en *E*. Por tanto, *DZ* y *AB* son iguales e iguales los triángulos *DEZ* y *EBA* y, por consiguiente, el ángulo *EDZ* será igual al ángulo *EBA*, y cómo el ángulo *EDZ* es recto, el ángulo *EBA* también será recto, y por ser *EB* perpendicular desde el centro en el extremo del diámetro, la *AB* es tangente al círculo".

Primeramente, como podemos observar, el problema que plantea Euclides se trata de trazar una recta tangente a una curva específica, en este caso el círculo. Este tipo de problemas del trazado de tangentes, son propias de esta primera configuración, pues los matemáticos griegos no disponían de métodos generales para trazar rectas tangentes a cualquier curva, por lo que los problemas que abordaban eran múltiples casos particulares. En este sentido, estamos de acuerdo con Ibarra y Gómez (2005) con el hecho de que las *situaciones-problemas* que se presentan en esta primera configuración, son aquellas en las que se debe trazar la recta tangente a una curva específica (círculos, cónicas de Apolonio, espiral de Arquímedes, etc.) en un punto determinado aunque genérico. Otros ejemplos de situaciones-problemas propias de esta configuración, pueden verse en el apartado 3.2.1.

En cuanto a la solución del problema proporcionada por Euclides, vemos cómo en ella se utiliza un *lenguaje* propio de la geometría euclidiana y sus *argumentaciones*, tal y como lo señala Vera (1970, vol. 1), son puramente sintéticas. En dicha solución vemos que intervienen *conceptos* tales como círculo, segmento, radio, perpendicularidad, congruencia de triángulos y segmentos, igualdad (de ángulos) y el concepto de tangente. Así mismo, en la solución aparece la *propiedad* de perpendicularidad entre la recta tangente y el radio que toca al punto de tangencia, la cual Euclides enuncia de la siguiente forma: "Si una recta es tangente a un círculo y se traza el radio en el punto de contacto, este radio es perpendicular a la tangente" (Vera, 1970, vol.1). En la solución propuesta por Euclides podemos observar que los *procedimientos* geométricos que utiliza, están encaminados a construir la recta tangente buscada, basándose en ésta propiedad; esto se puede ver cuando argumenta: "…y por ser *EB* perpendicular desde el centro en el extremo del diámetro, la *AB* es tangente al círculo".

El ejemplo analizado nos permite ver, de manera global, las características de ésta primera configuración epistémica: "La tangente en la matemática griega". En general, puede decirse que esta configuración es más extensiva que intensiva, en cuanto a que las situaciones-problemas, procedimientos, argumentos, etc., se encuentran enfocados a casos particulares, pues como hemos señalado, las *situaciones-problemas* que se presentan en esta primera configuración, son aquellas en las que se debe trazar la recta tangente a una curva específica en un punto determinado.

Como se vio en el apartado 3.2.1, Euclides fue el matemático más influyente de esa época, razón por la cual el *lenguaje* y *argumentación* eran propios de la geometría sintética. Por esta misma razón, los *conceptos-definiciones* y *proposiciones-propiedades* involucrados en la resolución de problemas eran, en su mayoría, las que había propuesto Euclides en su obra *Los elementos,* o variaciones de éstos. Ejemplos de conceptos-definiciones que intervienen en esta configuración son: "a) Se dice que una recta es tangente al círculo cuando lo toca y prolongada no lo corta (Definición II del libro III de los Elementos de Euclides); b) Se dice que dos círculos son mutuamente tangentes cuando se tocan mutuamente y no se cortan (Definición IV del libro III de los Elementos de Euclides)" (Vera, 1970, vol. 1). Algunos ejemplos de proposiciones-propiedades en esta configuración son: "a) La recta perpendicular en el extremo de un diámetro cae fuera del circulo; entre esta recta y la periferia no se interpondrá ninguna otra y el ángulo del semicírculo es mayor que cualquier ángulo rectilíneo agudo y lo restante menor (Proposición XVI del libro III de los Elementos de Euclides); b) Si una recta es tangente a un círculo y se traza el radio en el punto de contacto, este radio es perpendicular a la tangente (Proposición XVIII del libro III de los Elementos de Euclides); c) La paralela desde el vértice de una sección cónica a una recta trazada ordenadamente es tangente a la sección y ninguna otra recta caerá entre la tangente y la sección (Proposición 32 del libro I de las Cónicas de Apolonio)" (Vera, 1970).

Con respecto a los *procedimientos* característicos en esta configuración, debemos señalar que los matemáticos griegos basaban sus demostraciones en las construcciones geométricas, por lo cual puede decirse que los procedimientos utilizados son una combinación de estas construcciones y las argumentaciones y lenguaje propios de la geometría sintética, basados en las definiciones y proposiciones.

Para finalizar debemos señalar que Apolonio también abordó problemas de máximos y mínimos, aunque en realidad, sus teoremas de máximos y mínimos, eran sobre tangentes y normales a las secciones cónicas, razón por la cual, se han considerado sus aportaciones en el análisis de esta primera configuración epistémica.

3.3.2. Problema 2: Sobre la variación en la Edad Media

Para la descripción de esta segunda configuración epistémica, partiremos del estudio histórico realizado en el apartado 3.2.2, en el cual vimos que, durante el siglo XIV, comenzaron los estudios sobre el cambio en general y el movimiento como caso particular. Las investigaciones medievales sobre el movimiento comenzaron principalmente en las universidades de Oxford (por los escolásticos del Merton College) y París (principalmente Oresme). En particular, la demostración que realiza Oresme de la denominada "Regla de Merton", conducen a la idea de que el espacio recorrido por un móvil es igual al área bajo la gráfica de su velocidad en función del tiempo. A continuación, analizaremos esta demostración de Oresme de la Regla de Merton y, a partir de dicho análisis, describiremos los objetos primarios que componen esta segunda configuración.

Expresada en términos de tiempo y distancia, la regla de Merton nos dice:

> "*Si un cuerpo se mueve con aceleración uniforme durante un intervalo de tiempo dado, la distancia total s es tal como aquella que se tendría durante el mismo intervalo de tiempo con una velocidad uniforme igual al promedio de su velocidad inicial* v_o *y su velocidad final* v_f *(es decir, su velocidad instantánea en el punto medio del intervalo de tiempo)*".

Para la demostración geométrica, Oresme considera el movimiento uniformemente acelerado durante un intervalo de tiempo $(0,\ t)$ correspondiente a la longitud *AB* (ver Figura 3.2), la latitud en cada punto *P* de *AB* es una ordenada *PQ* cuya longitud es la velocidad en el instante correspondiente, por lo que el lado *CD* es un grafo velocidad – tiempo. Oresme vio que la definición de aceleración uniforme implica que *CD* es un segmento de línea recta, y que la *figura* o *figura total*, es un trapezoide con base $AB=t$ y alturas $AD=v_o$ y $BC=v_f$. Supuso que el área *s* de ese trapezoide es igual a la distancia total recorrida y a partir de la fórmula para hallar el área del trapezoide se sigue inmediatamente que $s = \frac{1}{2}(v_o + v_f)t$ (Cantoral y Farfán, 2004).

En cuanto a la *situación-problema* planteada, es decir, el enunciado de la Regla de Merton, vemos que se trata de un problema que involucra el cálculo de la distancia recorrida por un cuerpo que se mueve con aceleración uniforme, lo cual va a ser característico de esta configuración ya que los matemáticos de aquella época se habían interesado en abordar problemas físicos (o del mundo real) relacionados con el cambio en general y el movimiento en particular, lo que los escolásticos de Merton llamaban "variaciones de la intensidad de una cualidad, desde un punto a otro de un cuerpo, o desde un punto a otro del tiempo". Otro ejemplo de una *situación-problema* característico de esta configuración es la denominada ley artificial: "Si a lo largo de la primera mitad de un cierto intervalo de tiempo, una forma se mantiene con cierta intensidad; a lo largo del siguiente cuarto de intervalo la forma se mantiene al doble de dicha intensidad; a lo largo del siguiente octavo de intervalo la forma se mantiene al triple de intensidad, y así ad infinitum, entonces la intensidad media durante todo el intervalo será la intensidad de la forma durante el segundo intervalo [el doble de la intensidad inicial]" (González, 1992, p. 47).

Estos ejemplos de *situaciones-problemas* (la regla de Merton y la ley artificial), son a su vez, ejemplos típicos de *proposiciones-propiedades* en esta configuración, puesto que se empleaban en la resolución de nuevas situaciones-problemas. Otros ejemplos de proposiciones-propiedades, son las que González señala como ideas innovadoras introducidas por Oresme: a) la medida de diversas variables físicas por medio de segmentos; b) algún tipo de relación funcional entre variables; c) una aproximación a la introducción de las coordenadas mediante la representación gráfica de relaciones funcionales; d) la constancia de la disminución de la variación en las proximidades de un extremo y, e) una especie de integración o sumación continua para calcular la distancia como el área bajo el grafo velocidad – tiempo.

Respecto a los *conceptos-definiciones*, observamos que desde el enunciado del problema, es decir, la regla de Merton, intervienen conceptos tales como: a) aceleración uniforme, definida por los escolásticos de Merton como aquella para la cual incrementos iguales de velocidad se adquieren en intervalos de tiempo iguales; b) movimiento uniforme, definido como aquel que se tiene cuando las distancias iguales eran recorridas en tiempos iguales; c) velocidad instantánea, que es la forma en que definieron al movimiento variable; d) longitudo (longitud), la cual sería nuestra abscisa, que considera es el tiempo; e) latituto (latitud), que sería nuestra ordenada, y considerada la intensidad o la amplitud del fenómeno, ya sea velocidad, calor u otros; f) representación gráfica de las intensidades de las cualidades, que es la representación de la forma de acuerdo con la variación de la intensidad, respecto del tiempo. Este último concepto, introducido por Oresme, se hace presente mediante el grafico de la Figura 3.2, con el cual describe la demostración de la regla de Merton. Los *conceptos-definiciones* que acabamos de mencionar, son algunos de los más representativos en esta configuración.

El *lenguaje* y *procedimientos* utilizados por Oresme en su demostración eran netamente geométricos, mediante la representación de la forma (como el gráfico de la Figura 3.2), lo cual queda constatado cuando el propio Oresme señala: "La dimensión de los fenómenos está sometida a múltiples variaciones y dicha multiplicidad es difícilmente discernible si su estudio no se remite al estudio de figuras geométricas. Todo lo que varía, se sepa medir o no, lo podemos imaginar como una cantidad continua representada por un segmento rectilíneo." (González, 1992, p. 42). Sin embargo, los procedimientos y el lenguaje utilizados en un inicio por los escolásticos del Merton College, fueron descriptivos, con *argumentaciones* verbales extensas y confusas. En general, los *lenguajes* y *procedimientos* característicos de esta segunda configuración fueron los descriptivos, geométricos (mediante la representación de la forma), o una combinación entre ambos.

Los *argumentos* que realiza Oresme en la demostración de la regla de Merton, fueron descriptivos mediante la representación de la forma, ya que, de acuerdo con Oresme, la noción de gráfico como elemento descriptivo de una cualidad, es importante, pues facilita la comprensión de la variación de un fenómeno (a lo que él llama la representación gráfica de *las intensidades de las cualidades*). Hay que señalar que durante este período, los resultados fueron hallados mediante *argumentaciones* verbales o geométricamente mediante la representación de la forma, más que mediante consideraciones aritméticas basadas en la noción intuitiva de límite, que fue ampliamente usada durante el siglo XVII.

En general, la configuración se puede considerar más extensiva que intensiva, puesto que aún no se contaban con métodos generales para resolver problemas sobre variación, y en particular, sobre movimiento.

3.3.3. Problema 3: Métodos algebraicos para hallar tangentes

Con las aportaciones de Viète al campo de álgebra y la creación de la Geometría Analítica, el desarrollo del Cálculo en general creció rápidamente. Los matemáticos del siglo XVII, con las ventajas de las nuevas y poderosas “herramientas”, comenzaron a desarrollar, como vimos en los apartados 3.2.3 y 3.2.4, distintos métodos para abordar problemas sobre tangentes, máximos y mínimos y velocidades, todos ellos con la finalidad de encontrar métodos generales aplicables a determinados campos de problemas.

Sin embargo, todos esos métodos fueron concebidos desde distintos enfoques conceptuales. Uno de ellos, que da pie a esta tercera configuración, son los métodos algebraicos desarrollados principalmente por Descartes, Hudde y Sluse, para el cálculo de tangentes, normales o subnormales. A continuación describiremos esta tercera configuración epistémica mediante el análisis de un problema.

El problema es el siguiente: Con base en la Figura 3.3,

“Supongamos dada la curva algebraica ACE, trazar la normal a la curva en C”

Para la solución, Descartes supone que la recta *CP* es la solución del problema. Sea *CM=x*, *AM=y*, *AP=v*, *CP=s*. Además de la curva *x=f(y)* o *ACE,* Descartes consideraba el círculo c_P con centro en *P* y que pasa por *C*; es decir, el círculo de ecuación $x^2 + (v - y)^2 = s^2$. La circunferencia de este círculo toca a la curva *CE* en *C* sin cortarla, mientras que la circunferencia c_Q de ecuación $x^2 + (v_Q - y)^2 = {s_Q}^2$, con centro en un punto *Q* distinto de *P* y que pasa por *C*, cortará a la curva no sólo en *C*, sino también en algún otro punto; sea este punto *E*. Esto significa que la ecuación $(f(y))^2 + (v_Q - y)^2 - {s_Q}^2 = 0$, obtenida sustituyendo *x=f(y)* en la ecuación de c_Q, tiene dos raíces distintas[25]; pero “cuanto más se aproximen uno al otro *C* y *E,* más pequeña será la diferencia de las dos raíces, y al final, cuando los puntos coincidan, las raíces serán exactamente iguales, es decir, cuando la circunferencia que pasa por *C* toque a la curva en el punto *C* sin cortarla” (Descartes, citado en Andersen, 1984, p. 30). Descartes llego a la conclusión de que *CP* será una normal a la curva *C* cuando *P* (es decir, *v*) esté determinado de tal manera que la ecuación $(f(y))^2 + (v - y)^2 - s^2 = 0$, tenga dos raíces iguales y_0.

[25] Descartes consideraba solamente curvas para las cuales $(f(y))^2$ es un polinomio en *y*, o y^2 un polinomio en *x*.

Como señalamos al principio, los tipos de *situaciones-problemas* que se abordan en esta configuración, son el trazar rectas normales, tangentes o subtangentes a una curva dada en un punto determinado, tal como el ejemplo propuesto.

En la solución de Descartes es fácil ver cómo el *lenguaje*, con respecto al utilizado en las configuraciones anteriores, cambia del netamente geométrico-descriptivo al de ecuaciones algebraicas y de la geometría analítica. Por ejemplo, en la descripción de la solución aparecen expresiones algebraicas para la curva *ACE*, ecuaciones de circunferencias y manipulaciones algebraicas de éstas para obtener la solución. En general, para resolver un problema geométrico, Descartes partía del estudio de éste para traducirlo a un lenguaje de ecuaciones algebraicas y después, una vez simplificada la ecuación lo más posible, resolvía dicha ecuación mediante la geometría. De esta forma, el *lenguaje* usado en esta configuración es el característico de los *procedimientos* algebraicos y de la geometría analítica.

Así mismo, los *argumentos* que presenta Descartes en la solución, son de tipo algebraico, basándose en las *propiedades-proposiciones* de la geometría analítica, o análisis geométricos, por ejemplo: a) "…esto significa que la ecuación $(f(y))^2 + (v_Q - y)^2 - {s_Q}^2 = 0$, obtenida sustituyendo *x=f(y)* en la ecuación de c_Q, tiene dos raíces distintas…"; b) "cuanto más se aproximen uno al otro *C* y *E*, más pequeña será la diferencia de las dos raíces, y al final, cuando los puntos coincidan, las raíces serán exactamente iguales…". De esta forma, los *argumentos* en esta configuración van a ser algebraicos (basándose en las *proposiciones* de la geometría analítica) y/o geométricos.

En cuanto a los *proposiciones*, podemos señalar un ejemplo claro en la solución de Descartes: "*CP* será una normal a la curva *C* cuando *P* (es decir, *v*) esté determinado de tal manera que la ecuación $(f(y))^2 + (v - y)^2 - s^2 = 0$, tenga dos raíces iguales y_0". En general, las *propiedades-proposiciones* característicos de esta configuración, son aquellas provenientes del algebra y del estudio de las curvas mediante la geometría analítica, por ejemplo: a) "Si una ecuación tiene una raíz doble y multiplicamos la ecuación por una progresión aritmética arbitraria, de forma que el primer término de la progresión multiplica al primer término de la ecuación y así sucesivamente, el producto obtenido es una ecuación que tiene la raíz dada (Regla de Hudde para la obtención de raíces dobles)" (González, 1992, p. 193); b) "…la subtangente en cuestión será el cociente obtenido, dividiendo los términos del polinomio *f(x, y)* que contengan la variable *y*, cada uno de ellos multiplicado por el exponente de la potencia de *y* que aparece, por los términos en que aparezca la variable *x*, multiplicado cada uno de ellos por el correspondiente exponente de x y divididos todos ellos por x (regla de Sluse para hallar tangentes)" (Boyer, 1999).

Como ejemplos de *conceptos* propios de esta configuración, podemos señalar las distintas formas de concebir la recta tangente a una curva: a) "…como la posición particular de una secante que gira en torno al pie de la tangente, hasta que dos de sus puntos de intersección con la curva llegan a coincidir"; b) "…aquella que está determinada por una recta que gira alrededor del punto de contacto dado, hasta que el otro punto en el que aquella corte a la curva, coincida con el primero" (otros ejemplos de los elementos que componen esta configuración, pueden verse en los apartados 3.2.3.1 y 3.2.3.4).

Descartes, como muchos matemáticos de la época, tenía la finalidad de encontrar un método general para trazar tangentes (o mejor dicho, normales) a una curva; esto se evidencia claramente cuando señala: "Habré dado aquí todo lo que es necesario para el estudio de las curvas, una vez que dé un método general para trazar una línea recta que forme ángulos rectos con una curva en un punto arbitrario de ella…" (Descartes; citado en Boyer, 1999, p. 435). Sin embargo, a pesar de que su método es aplicable a cualquier curva algebraica, éste se complica cuando la ecuación de la curva no es una ecuación algebraica sencilla, debido a los laboriosos cálculos que hay que hacer para determinar v comparando los coeficientes (Andersen, 1984). Aun así, los desarrollos que hemos enmarcado en esta configuración, muestran serios intentos para encontrar métodos cada vez más generales, para abordar los problemas sobre el trazado de tangentes.

3.3.4. Problema 4: Concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes

Como señalamos en la segunda configuración, las investigaciones medievales sobre el movimiento, en particular las de Oresme, conducen a la idea de que el espacio recorrido por un móvil es igual al área bajo la gráfica de su velocidad en función del tiempo. Galileo toma estas ideas y las demuestra con argumentos de indivisibles. Así mismo, Galileo establece la ley fundamental de la composición vectorial del movimiento y la aplica para determinar la trayectoria descrita por un proyectil. Además, si se representa el movimiento en un gráfico de desplazamiento-tiempo, la dirección de éste da la dirección de la tangente a la trayectoria, mientras la velocidad da la pendiente de la línea tangente (González, 1992).

Estas ideas posteriormente serían recogidas y desarrolladas por matemáticos como Roberval, Torricelli (ver apartado 3.2.3.3) y Newton, quien más tarde desarrollaría su cálculo de fluxiones, el cual hemos considerado en una configuración aparte, debido a las diferencias conceptuales de las cuales hablaremos más adelante.

Las *situaciones-problemas*, *lenguajes y procedimientos* en esta cuarta configuración epistémica, siguen siendo los mismos que en la configuración pasada; es decir, se siguen abordando problemas relacionados con el trazado de tangentes a distintas curvas. Del mismo modo los procedimientos y lenguajes son los de la geometría analítica y el álgebra.

Sin embargo, como es lógico de suponer, al haber cambios conceptuales en los métodos de ésta cuarta configuración, los elementos de ésta (definiciones, proposiciones y argumentos) también varían. Así, mediante *argumentaciones cinemáticas*, se logran establecer nuevos *conceptos* y *proposiciones* inherentes a esta configuración epistémica.

Ejemplos de *conceptos* utilizados en esta configuración son: a) concepto intuitivo de movimiento instantáneo; b) "Una curva es la trayectoria de un punto móvil"; c) "…en todas las demás líneas curvas, cualesquiera que sean, su tocante en cualquier punto es la línea de dirección del movimiento que tiene en ese mismo punto el móvil que la describe (concepción de tangente de Roberval)"; d) "…una tangente es la que resulta de la composición de dos movimientos de un punto móvil que traza la curva (concepción de tangente de Sluse)".

Algunas *proposiciones* prototípicas de esta configuración son: a) "Si el movimiento que describe la curva es una combinación de movimientos simples, la línea instantánea del movimiento o dirección de la tangente puede hallarse por composición de movimientos, mediante la ley del paralelogramo"; b) "Trazar la tangente a una curva descrita por el movimiento de un punto que resulta de la composición de dos movimientos consiste en determinar la resultante de las velocidades de los dos movimientos"; c) "…si $s = s(t)$ y $v = v(t)$ representan respectivamente el espacio y la velocidad en función del tiempo, se tiene que: 1) el área limitada por la curva $v = v(t)$ y el eje de las abscisas representa, para cada *t*, el espacio recorrido $s = s(t)$, y 2) la pendiente de la tangente a la curva $s = s(t)$ representa, para cada *t*, la ordenada de la curva $v = v(t)$ en la abscisa *t*".

Nuestra lectura final, respecto a la dualidad *extensiva-intensiva,* es que los métodos empleados, en esta configuración, para el trazado de tangentes nuevamente son extensivos en cuanto a que no son generalizables para todos los casos. Esto lo señala Andersen (1984) de la siguiente manera: "Al tomar la dirección instantánea del movimiento como conocida, tanto Roberval como Torricelli habían evitado el uso de infinitesimales en su método, el cual tenía la ventaja adicional de ser aplicable a curvas que no están referidas directamente a un sistema de coordenadas. Sin embargo, el método no era general en cuanto a que no todas las velocidades podían ser determinadas".

3.3.5. Problema 5: Las ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos

Esta quinta configuración epistémica ha surgido, principalmente, de las obras de Fermat, uno de los matemáticos más influyentes respecto al desarrollo del cálculo diferencial; de hecho, sus trabajos sobre máximos y mínimos y tangentes, hizo que diversos matemáticos del siglo XVIII, tales como Laplace y Lagrange, lo consideraran el verdadero inventor del cálculo diferencial.

Con base en las obras fundamentales de la antigüedad clásica griega (los *Elementos* de Euclides, las *Cónicas* de Apolonio, las obras de Arquímedes, la *Aritmética* de Diofanto, la *Colección matemática* de Pappus, etc.), así como en la teoría de ecuaciones de Viète (en particular en el método de la *Syncrisis* de su *Arte analítica*), Fermat desarrolla los primeros métodos generales, en la historia de las matemáticas, para la determinación de extremos (González, 2008), que posteriormente aplica a la determinación de las normales y tangentes.

Como en las secciones anteriores, partiremos del análisis de un problema para describir los elementos que componen esta quinta configuración. El problema es el siguiente (tomado de la sección 3.2.3.2):

> *"Dividir un segmento de longitud N en dos partes de manera que el producto sea el máximo posible"*

Para dar solución al problema, sea *A* la cantidad desconocida por la que tendremos que dividir el segmento de longitud *N* (ver Figura 3.4). De tal forma que el producto pedido estará dado por la expresión:

$$f(A) = A(N - A) = AN - A^2 \text{ ……………………..… } (1)$$

Ahora bien, dado que queremos que el producto sea el máximo posible, incrementemos a nuestra variable *A* una magnitud *E*, de tal forma que el producto estaría dado por:

$$f(A + E) = (A + E)(N - A - E) = AN - A^2 + NE - 2AE - E^2 \text{ ………. } (2)$$

"Adigualando" las expresiones (1) y (2) obtenemos:

$$AN - A^2 \approx AN - A^2 + NE - 2AE - E^2$$

$$NE \approx 2AE + E^2 \quad \text{..................................} \quad (3)$$

Dividiendo ambos miembros de la *"adigualdad" por E, obtenemos:*

$$N \approx 2A + E \quad \text{..} \quad (4)$$

Finalmente, haciendo *E=0*, en (4) nos queda:

$$2A = N$$

Lo que significa que el producto es máximo cuando $A = \frac{N}{2}$ (González, 2008).

Otro tipo de *situaciones-problemas* que fueron abordados en esta configuración, además de aquellos en los que se pretendían calcular extremos (como en el ejemplo que estamos analizando), fueron los problemas de aplicación práctica sobre máximos y mínimos. Ejemplo de esto es el problema abordado por Kepler sobre el cálculo de volúmenes de barriles de vino; Kepler estudió la forma de los barriles que con menor superficie (menor cantidad de madera utilizada para hacerlos) tuviera mayor volumen (pudieran albergar más cantidad de vino).

El *lenguaje* utilizado por Fermat en la solución del problema, es prácticamente el mismo que en las configuraciones anteriores: algebraico, gráfico y/o descriptivo. Este lenguaje es el que utilizaron la mayoría de los matemáticos del siglo XVII hasta antes de los desarrollos de Newton y Leibniz.

Una de las *propiedades* principales en esta configuración, radica en la idea de incrementar una magnitud considerable a la variable independiente o a la magnitud que podríamos interpretar como la variable independiente (González, 2008; Andersen, 1984); situación que representa el punto de partida para el uso de magnitudes infinitamente pequeñas, es decir, los infinitesimales. La propiedad que acabamos de mencionar se puede identificar en la solución que da Fermat al problema, que hemos planteado a manera de ejemplo, cuando señala: "…incrementemos a nuestra variable *A* una magnitud *E*…". Otra *propiedad* clave en el método de Fermat, es la "Adigualdad" que establece para "aproximar tanto como sea posible" la expresión que determina el producto a la expresión que determina el producto cuando se incrementa la cantidad desconocida (*A*), es decir, $AN - A^2 \approx AN - A^2 + NE -$

$2AE - E^2$. Esto significa que E es tan pequeña, que ambas cantidades son "casi iguales"; en términos actuales, que E se aproxima a cero. Un último ejemplo de una *propiedad-proposición* característica de esta configuración es la formulación general, dada por Hudde, de un patrón subyacente a las soluciones de problemas de máximos y mínimos por el método de Fermat, que en notación moderna, afirma que dado un polinomio de la forma $y = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, entonces, se tiene un máximo o un mínimo cuando $\sum_{k=0}^{n} k a_k x^{k-1} = 0$ (Grabiner, 1983).

El método de Fermat para el cálculo de extremos (ver apartado 3.2.3.2) es, en sí mismo, un claro ejemplo de los *procedimientos* utilizados, e incluso, el más importante en esta configuración.

En cuanto a las argumentaciones características de esta configuración, además de las algebraicas y las geométricas, se empiezan a elaborar, aunque de manera implícita, argumentaciones basadas en las cantidades infinitesimales. Esto puede verse, en la solución del ejemplo, cuando Fermat "adiguala" las cantidades, de trasfondo radica la idea de que *E* se aproxima a cero. Así mismo, cuando se divide ambos miembros de la "adigualdad" por *E*, nuevamente detrás está la idea de que *E* se aproxima a cero pero no llega a ser cero. En contradicción con esto último, cuando se hace *E=0*, la idea subyacente es que *E* es "tan pequeña" que se le puede desestimar. Lo anterior, de hecho, es una de las principales críticas a su método, ya que en el mismo proceso considera $E = 0$ y $E \neq 0$. Aún así, el proceso utilizado por Fermat es, en esencia, similar al cálculo de $lim_{E \to 0} \frac{f(A+E)-f(A)}{E}$, que se emplea en la actualidad para hallar la primera derivada.

Para finalizar, hay que señalar que en esta configuración aparecen, aunque de manera muy intuitiva, *conceptos* importantes tales como el límite y la derivada. Otra cuestión es que, al desarrollarse métodos generales para la determinación de máximos y mínimos (por ejemplo, el método de Fermat o la formulación de Hudde), esta configuración tiene características más *intensivas que las anteriores*.

3.3.6. Problema 6: Métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes

El método de los extremos, comentado anteriormente, fue aplicado por Fermat alrededor de 1632 a la determinación de las normales y tangentes o, más precisamente, de las subtangentes a una curva (Collette, 1993). En la segunda parte del *"Methodus"* Fermat emplea el método de los extremos para hallar la tangente de una parábola en un punto (ver sección 3.2.3.2). Por su parte, Barrow desarrolló un método para el cálculo de tangentes muy parecido al de Fermat, excepto por el "triángulo diferencial" también llamado "triángulo de Barrow", y que en lugar de realizar un incremento (E en el método de Fermat) Barrow introduce dos incrementos *e* y a, lo que de acuerdo con Boyer (1999) equivale en nuestro lenguaje actual a Δx y Δy respectivamente (ver sección 3.2.3.5).

En esta configuración epistémica hemos incluido las aportaciones que realizan, principalmente Barrow y Fermat, para abordar *situaciones-problemas* sobre el cálculo de tangentes o subtangentes. Consideremos el siguiente ejemplo:

> *"Hallar la subtangente a la curva dada por la expresión $y^2 = 3x$"*

Lo primero que hace Barrow para resolver el problema es sustituir *x* y *y* por *x*+*e* y *y*+a respectivamente, de donde obtiene:

$$y^2 + 2ya + a^2 = 3x + 3e$$

Aplicando la *regla 1*, es decir, despreciando los términos que contienen potencias de orden superior a 1 de *a* y *e*:

$$y^2 + 2ya = 3x + 3e$$

Aplicando la *regla 2*, es decir, sustrayendo de la expresión anterior $y^2 = 3x$:

$$2ya = 3e$$

Finalmente aplicando la *regla 3*:

$$\frac{PM}{PT} = \frac{m}{t} = \frac{a}{e} = \frac{3}{2y}$$

de donde la subtangente viene dada por $PT = t = \frac{2my}{3}$.

El método, o *procedimiento*, que sigue Barrow para hallar la subtangente consta de tres reglas (ver sección 3.2.3.5) en las cuales moviliza una serie de propiedades, definiciones y argumentos. Una de estas *proposiciones-propiedades*, en la solución de Barrow, se tiene al aplicar la *regla 3* (para el cálculo de la subtangente *t*), ya que encuentra la razón

$\frac{a}{e}$ considerando la semejanza entre los triángulos *MTP* y *MNR* (ver Figura 3.6). Otro ejemplo son los dos incrementos e y a, que considera Barrow para las variables independiente y dependiente respectivamente (en la Figura 3.6 *MR*=a y *NR*=e); los cuales al aplicar la regla 1, en la solución del ejemplo, considera "tan próximos a cero" y, al aplicar (intuitivamente) el límite, suprime las potencias de a y e de orden superior a uno.

Otras *proposiciones-propiedades* utilizadas en esta configuración, son: a) la relación de semejanza entre los triángulos, que contienen las subtangentes, *BCE* y *OIE* para establecer que $\frac{BC}{OI}=\frac{CE}{IE}$ (ver Figura 3.5), en la aplicación del método de los extremos de Fermat al cálculo de tangentes y subtangentes; b) "Sea una curva de ecuación $p(x,y)=0$, donde p es un polinomio en x e y; la subtangente t correspondiente a un punto (x,y) viene dada por $t=\frac{-x(\,p(x,y),\;a,\;d)_y}{(\,p(x,y),\;a,\;d)_x}$, donde los subíndices significan que en el numerador $p(x,y)$ debe ser considerado como un polinomio en y mientras que en el denominador como un polinomio en x" (regla de Hudde para determinar subtangentes, ver apartado 3.2.3.4).

En general, algunos de los principales *conceptos-definiciones* que se manejan en esta configuración son: a) la concepción de Barrow sobre la tangente, como posición límite de la secante cuando a y e se aproximan a cero, hecho del cual subyace suprimir las potencias de a y e de orden superior a uno en la primera regla de Barrow; b) la noción intuitiva de límite, tanto en el método de Barrow para hallar las subtangentes, como en el método de los extremos de Fermat descrito en la sección anterior; y c) la noción intuitiva de la derivada.

En cuanto a los *argumentos*, en esta configuración, se siguieron manteniendo los algebraicos, geométricos y consideraciones infinitesimales, como se puede apreciar claramente en la solución del ejemplo planteado, cuando (en la regla 1) se "suprime las potencias mayores de uno" de a y e por ser infinitamente pequeños. Así mismo, el *lenguaje* utilizado en esta configuración es de tipo geométrico, algebraico y/o descriptivo.

Los métodos para el cálculo de tangentes y subtangentes considerados en esta configuración (métodos de Fermat, Barrow y Hudde) son interesantes por ser algunos de los primeros métodos o reglas generales que se dieron.

3.3.7. Problema 7: El cálculo de fluxiones

Como señala González (1992), es indiscutible que Newton y Leibniz son los verdaderos artífices del *cálculo infinitesimal*. Sin embargo, existen diferencias conceptualmente importantes entre las ideas de Newton (ver apartado 3.2.4.1) y las de Leibniz (ver apartado 3.2.4.2), razón por la cual, a diferencia del trabajo de Ibarra y Gómez (2005), hemos considerado ambos planteamientos en configuraciones distintas.

Newton comienza con la consideración de elementos infinitesimales, a la manera de Fermat y Barrow, pero enseguida deriva hacia una concepción mecánica, basada en la idea intuitiva del movimiento continuo, manejando el *concepto* de *fluente*, como cantidad que varía respecto al tiempo, y de *fluxión* como su velocidad de cambio respecto al tiempo (González, 1992); de ahí que al cálculo desarrollado por Newton se le conozca como *cálculo fluxional*.

Comencemos pues, esta séptima configuración epistémica, con el siguiente ejemplo (Bos, 1984) que fue uno de los propuestos por Newton en su obra de 1671, y ejemplifica cómo aplicaba su método de las fluxiones:

"Dada la curva de ecuación $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, calcular las fluxiones"

Para resolver el problema, Newton sustituye en la ecuación dada x y y por $x + \dot{x}o$ y $y + \dot{y}o$ respectivamente, obteniendo:

$$(x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2o^2x + \dot{x}^3o^3) - (ax^2 + 2a\dot{x}ox + a\dot{x}^2o^2)$$
$$+ (axy + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}\dot{y}o^2) - (y^3 + 3\dot{y}oy^2 + 3\dot{y}^2o^2y + \dot{y}^3o^3) = 0$$

luego elimina $x^3 - ax^2 + axy - y^3$, que es igual a cero (de acuerdo con la ecuación dada originalmente), divide después por o y desprecia finalmente los términos en que todavía figura el factor o, quedando finalmente:

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0$$

Primeramente, observemos que Newton introduce nuevos *conceptos-definiciones* en sus desarrollos sobre el cálculo infinitesimal y, con ellos, nuevas expresiones terminológicos y notacionales (además del lenguaje algebraico, geométrico y descriptivo), entre los cuales podemos señalar: a)*"o"* es un intervalo de tiempo infinitamente pequeño b) "momento de *x*" que define como un incremento infinitesimal de *x* y que representa con *ox* (análogamente define el momento de *y*, *oy*); c) en palabras de Newton: "Llamaré *cantidades fluentes*, o simplemente *fluentes*, a estas cantidades que considero aumentadas gradualmente e indefinidamente; las representaré mediante las últimas letras del alfabeto *v*, *x*, *y*, *z*, para distinguirlas de las otras cantidades"; d) el concepto fluxión definido con sus palabras: "representaré con las mismas últimas letras coronadas con un punto $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, las velocidades con que las fluentes aumentan por el movimiento que las produce y que, por consiguiente, se pueden llamar fluxiones…"; e) "*momento de la fluente*" es la cantidad infinitamente pequeña que varía una fluente como *x* en un intervalo de tiempo infinitamente pequeño "o", es decir, $\dot{x}o$.

El método de las fluxiones de Newton es, a su vez, el *procedimiento* más importante de esta configuración; por ejemplo, en la siguiente descripción Newton sugiere (y a la vez *argumenta*) la sustitución de x e y por $x + \dot{x}o$ e $y + \dot{y}o$ respectivamente: "Ya que los momentos como $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ son las anexiones o aumentos infinitamente pequeños de las cantidades fluentes *x* e *y* durante los intervalos de tiempo infinitamente pequeños, se sigue que estas cantidades *x* e *y*, *después de un intervalo de tiempo infinitamente pequeño, se convierten en* $x + \dot{x}o$ *e* $y + \dot{y}o$…De ese modo, se puede sustituir en la misma ecuación $x + \dot{x}o$ e $y + \dot{y}o$ en lugar de *x* e *y*" (Collette, 1993, p.110). En este último ejemplo, al igual que en el problema propuesto al inicio, vemos como Newton *argumenta* los procedimientos (y en general sus definiciones y proposiciones) con base en consideraciones dinámicas y de infinitesimales, apoyándose siempre en el álgebra y el análisis geométrico.

Dentro de las *proposiciones-propiedades* dadas por Newton, podemos mencionar las siguientes: a) *Si* $ax^{m/n} = y$, *entonces el área será* $z = \frac{n}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}}$; b) Supongamos una curva cuya área está dada por la expresión $z = ax^m$, donde m es entero o fraccionario, entonces la curva está dada por la expresión $y = max^{m-1}$; c) dada una curva $y = max^{m-1}$, entonces el área comprendida bajo la curva es $z = ax^m$ (recíproco del inciso b); d) "Las cantidades, y las razones de cantidades, que en cualquier tiempo finito tienden continuamente a la igualdad, y antes de terminar ese tiempo se aproximan una a otra más que por ninguna diferencia dada, acaban haciéndose en última instancia iguales" (Durán, 1996, p. 54).

En cuanto a los tipos de *situaciones-problemas* de esta configuración, Newton abordó problemas sobre el cálculo de la velocidad del movimiento en un tiempo dado cualquiera, dada la longitud del espacio descrito y viceversa; así mismo Newton hacía uso de sus algoritmos para la determinación de máximos y mínimos, tangentes y curvaturas (Bos, 1984). En este sentido, al ser los algoritmos de Newton universales, en palabras de González (1992), es decir, aplicables a una variedad de problemas, esta configuración la reconocemos como altamente general o intensiva.

Así, vemos como en esta configuración las *fluxiones* o velocidades de los movimientos de las fluentes, es lo que en la actualidad conocemos como la *derivada*, y los momentos como $\dot{x}o$ y $\dot{y}o$ del *cálculo de fluxiones* de Newton, serían las diferencias infinitamente pequeñas o *diferenciales* dx y dy en el cálculo diferencial de Leibniz.

3.3.8. Problema 8: El cálculo de diferencias

A diferencia de Newton, el cálculo de Leibniz tiene un carácter más simbólico y analítico, siendo las *diferencias infinitesimales* y la suma de *infinitamente pequeños*, las bases de su cálculo diferencial e integral respectivamente (González, 1992). Como señala Collette (1993), su finalidad era elaborar un método eficaz mediante el cual, sin recurrir a diagramas, ciertas propiedades de las curvas puedan ser determinadas por medio de su *cálculo de las diferencias*. A continuación describiremos, con algunos ejemplos, los elementos primarios que componen esta octava configuración, basándonos en el estudio histórico del apartado 3.2.4.2.

Leibniz abordó *situaciones-problemas* sobre máximos y mínimos, tangentes y puntos de inflexión; esto se evidencia claramente en el título de su obra *"Nova methodus pro maximis et minimis, intemque tangetibus, qua nec irrationales quantitates moratur"* (Nuevo método para los máximos y mínimos, así como para las tangentes, el cual puede también aplicarse a las cantidades fraccionarias e irracionales), en la cual introduce por primera vez la expresión *cálculo diferencial* y proporciona las fórmulas, que hasta ahora conocemos, para derivar productos, cocientes, potencias y raíces, todas éstas acompañadas de aplicaciones geométricas tales como la búsqueda de tangentes, máximos y mínimos, y de los puntos de inflexión.

Uno de los objetivos de Leibniz, y que de acuerdo con Bos (1984) fue una de las tres ideas principales que permitieron el desarrollo de su cálculo infinitesimal, es la construcción de una *characteristica generalis*, es decir, un *lenguaje* simbólico general mediante el cual se pudieran escribir con símbolos y fórmulas todos los procesos de *argumentación* y de razonamiento. Con este fin, Leibniz logró introducir un nuevo lenguaje accesible, que aún se mantiene en nuestros días, el cual facilita la manipulación de los conceptos, procedimientos y argumentos, en el cálculo diferencial. Por ejemplo, Leibniz introduce los símbolos $\int$ y ∂, los cuales concibe como operadores que representan respectivamente la suma de rectángulos o suma de áreas y las diferencias entre dos valores sucesivos de x o y. Así mismo, denota con dy y dx a las diferenciales de las variables x e y respectivamente, es decir, diferencias infinitamente pequeñas de *x* e *y*.

Los lenguajes, nuevos términos y notaciones, introducidos por Leibniz, estaban asociados a una serie de nuevos *conceptos-definiciones* o *procedimientos* primordiales en su cálculo de diferencias. Por ejemplo, dy la utiliza para denotar el concepto de diferencial de una variable *y*, la cual define como la diferencia infinitamente pequeña entre dos valores sucesivos de *y* (análogamente define la diferencial de la variable *x*, dx). Así mismo, como ya señalamos anteriormente, introduce los símbolos $\int$ para representar el proceso de sumar rectángulos o áreas, y ∂ para representar las diferencias entre dos valores sucesivos de *x* o *y*. Las fórmulas proporcionadas por Leibniz, que hasta ahora conocemos, para derivar productos, cocientes, potencias y raíces, son ejemplos de *proposiciones* y *procedimientos* al mismo tiempo.

En cuanto a las *proposiciones-propiedades* utilizadas en esta configuración, dos de las principales, que de acuerdo con Bos (1984) fueron utilizadas por Leibniz, en el desarrollo de su cálculo de diferencias, son: la relación que dedujo a partir de sus estudios sobre sucesiones numéricas $a_1, a_2, a_3, \ldots$ y sus sucesiones de diferencias primeras asociadas, $b_1 = a_1 - a_2$, $b_2 = a_2 - a_3$,…; Leibniz se dio cuenta de la relación $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = a_1 - a_{n+1}$. La segunda es la relación de semejanza entre el triángulo *cc'd* situado a lo largo de la curva en la figura 2.9, y los triángulos formados por la ordenada, tangente y subtangente, o por la ordenada, normal y subnormal.

Otros ejemplos de *proposiciones-propiedades* son los siguientes: a) "…una suma tal como $\int y\, dx$ es la suma de los rectángulos infinitamente pequeños de base *dx* y altura *y*; por lo tanto, la cuadratura de una curva es igual a $\int y\, dx$"; b) "…la integración en cuanto a proceso de sumación es la inversa de la diferenciación"; c) "la mejor manera de encontrar las tangentes es determinando el cociente $\frac{dy}{dx}$, ya que la determinación de la tangente a una curva depende de la razón de las diferencias de ordenadas y abscisas cuando se hacen infinitamente pequeñas".

Finalmente, hay que señalar que para sus *argumentaciones*, Leibniz utilizó consideraciones algebraicas, geométricas e infinitesimales. Además, al desarrollar Leibniz un método general para el cálculo de la diferencial de una variable, esta configuración es altamente intensiva, a pesar de que quedaran pendientes cuestiones sobre la fundamentación (ver apartado 3.2.4.3).

Observemos también, la importante diferencia conceptual entre las ideas de Newton, discutidas en el apartado anterior, y las de Leibniz. Newton tiene una visión dinámica de las curvas, como generadas por un movimiento. En este sentido, para el cálculo de las fluxiones (o derivadas), hace uso de los infinitésimos pero no le interesan estos por sí mismos, sino el límite cuando estos van *desvaneciéndose*. En cambio Leibniz, concibe una curva como formada por un conjunto de segmentos rectos de longitud infinitesimal, de esta forma, se interesa por las propiedades de estas cantidades infinitesimales en sí. De ahí que desarrolle su método para la suma de estas cantidades (integración) y para la diferencia de ellas (derivación).

Como señala Durán (1996), el desarrollo de los conceptos de diferencial e integral con la apreciación explícita de que son conceptos inversos, el desarrollo de unas reglas para el cálculo de la diferencial y la aplicación de estos conceptos a la resolución de problemas de tangentes, cuadraturas, máximos y mínimos, problemas inversos de tangentes, etc., situaron el cálculo de las diferencias de Leibniz por encima del cálculo de fluxiones de Newton.

3.3.9. Problema 9: La derivada como límite

Al final del siglo XVII, el cálculo diferencial estaba establecido sobre los trabajos de Newton y Leibniz, aunque como hemos visto, sin una fundamentación matemática rigurosa. Los matemáticos que sucedieron a Newton y Leibniz, continuaron los desarrollos y sobre todo, las aplicaciones de las nuevas ideas a una gran cantidad de problemas principalmente de la física, por ejemplo, el de la cuerda vibrante, la catenaria o el de la braquistócrona. Además, los aportes realizados en esta etapa, posterior al establecimiento del cálculo Newtoniano y Leibniziano, se orientaron hacia la búsqueda de una fundamentación rigurosa de las nuevos métodos generales desarrollados por Newton y Leibniz. De esta forma, el concepto de *derivada* y su fundamentación, fue desarrollándose gradualmente durante los siglos XVIII y XIX, junto con las ideas de función, continuidad y límites, principalmente.

En este apartado, describiremos las características de la novena configuración epistémica, a partir del análisis del estudio histórico desarrollado en la sección 3.2.5, sobre el desarrollo de una fundamentación rigurosa de la derivada, hasta llegar a la definición que conocemos en la actualidad.

Como se ha señalado antes, entre las principales *situaciones-problemas* de esta configuración, se encuentra la aplicación de los nuevos métodos generales de Newton y Leibniz, en la resolución de problemas principalmente de la física, por ejemplo, el de la cuerda vibrante, así como para el cálculo de tangentes, máximos y mínimos, puntos de inflexión, velocidades; pero sobre todo, las *situaciones-problemas* iban encaminadas al desarrollo de conceptos, propiedades, etc., para dar una fundamentación rigurosa a los aportes de Newton y Leibniz, esto es, se trata de una configuración fuertemente formal.

En este sentido, en esta etapa se desarrollaron una serie de *conceptos-definiciones* primordiales no sólo para el desarrollo de la fundamentación de la derivada, sino para el Cálculo Infinitesimal en general. El concepto de función, por ejemplo, el cual Euler comienza a considerar como una aplicación que a un número x asocia otro $f(x)$. El concepto de límite, del cual se dieron diversas definiciones a lo largo de esta etapa, como por ejemplo: a) "el valor del que una variable puede llegar a diferir en menos que una cantidad arbitrariamente pequeña (Simon Lhuilier)"; b) "Cuando los sucesivos valores atribuidos a una variable aproximan indefinidamente a un valor fijo tanto que al final difieren de él tanto como uno desea, esta última cantidad es denominada el límite de todas las otras (Cauchy)"; c) "el límite de una función $f(x)$ vale L cuando x tiende a x_0 si para cualquier cantidad positiva $\varepsilon > 0$ existe otra cantidad positiva $\delta > 0$ de manera que para todo punto x verificando $0 < |x - x_0| < \delta$ y donde la función f esté definida se tiene que $|f(x) - L| < \varepsilon$ (Weierstrass)". Así mismo, la *derivada* es definida por Cauchy de la siguiente manera: "Cuando la función $y = f(x)$ es continua entre dos límites dados de la variable x, y uno asigna un valor entre estos límites a la variable, un incremento infinitesimal de la variable produce un incremento infinitesimal en la función misma. Consecuentemente, si ponemos $\Delta x = i$ los dos términos del cociente de diferencias $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ serán infinitésimos. Pero considerando que estos términos tienden a cero simultáneamente, el cociente mismo puede converger a otro límite, positivo o negativo. Este límite, cuando exista, tiene un valor definido para cada valor particular de x; pero varía con x. Así, por ejemplo, si tomamos $f(x) = x^m$, siendo m un entero positivo, la razón de las diferencias infinitesimales será $\frac{(x+i)^m - x^m}{i} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} x^{m-2} i + \cdots + i^{m-1}$; y su límite será la cantidad mx^{m-1}, esto es, una nueva función de la variable x. Lo mismo ocurrirá generalmente; sólo que la forma de la nueva función que sirve de límite a la razón $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ dependerá de la forma de la función $y = f(x)$. Para indicar esta dependencia, damos a la nueva función el nombre de derivada y la designamos, usando un apóstrofe, por la notación y' o $f'(x)$". Por su parte, Bolzano define la *derivada de una función* como "la cantidad $f'(x)$ hacia la que se aproxima el cociente $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ cuando Δx se aproxima a cero". Finalmente, en el primer cuarto del siglo XIX la *derivada de una función* se define como:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$$

Como *proposiciones-propiedades* características de esta configuración, se tienen, entre otros, varios teoremas tales como: a) El teorema del valor medio para funciones derivables, así como la primera expresión para el resto en la fórmula de Taylor que hoy conocemos como la expresión de Lagrange del resto; b) "si *f(x)* es una función continua entre $x = x_0$ y $x = X$, entonces $\min_{[x_0,\ X]} f'(x) \le \frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0} \le \max_{[x_0,\ X]} f'(x)$, del cual se deduce que si $f'(x)$ es continua entre $x = x_0$ y $x = x_0 + h$, entonces habrá un θ entre 0 y 1, tal que $\frac{[f(x_0+h)-f(x_0)]}{h} = f'(x_0 + \theta h)$ (Cauchy)"; c) "$f(x)$ es continua en x_0 si para cualquier cantidad positiva $\varepsilon > 0$, existe otra cantidad positiva $\delta > 0$ de manera que, para todo punto del intervalo $|x - x_0| < \delta$ donde la función f esté definida, se verifica que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (Weierstrass)"; d) la derivabilidad implica continuidad pero no viceversa.

En cuanto a los elementos lingüísticos propios de esta configuración, estamos de acuerdo con Ibarra y Gómez (2004), es formal, predominantemente algebraicos, en ocasiones apoyado en lenguajes geométricos. Durante esta etapa se introduce las notaciones que se conservan en la actualidad, por ejemplo y' o $f'(x)$ para denotar la derivada de una función, se representó con ε y δ a las cantidades infinitamente pequeñas que aparecen en la definición actual del límite; en general, el lenguaje simbólico característico del álgebra se puede ver en las definiciones de conceptos (y proposiciones) tales como límite, continuidad, derivada, entre otros. Así mismo, los *procedimientos* característicos de esta configuración son más aritméticos, es decir, predominan las manipulaciones algebraicas sustentadas en las propiedades y proposiciones establecidas; ejemplo de esto son las diversas demostraciones de teoremas sobre el cálculo diferencial.

Como señalan Ibarra y Gómez (2005), los *argumentos* de esta configuración no presentan las incoherencias de las argumentaciones con infinitésimos ya que se ha conseguido fundamentar el análisis infinitesimal sobre conceptos aritméticos; primordialmente el de límite que fue la noción clave para fundamentar el objeto derivada.

3.4. SIGNIFICADO HOLÍSTICO DE LA DERIVADA

Nuestro esfuerzo por la reconstrucción de un significado global para la derivada, ha resultado en la identificación de nueve sistemas de prácticas los cuales llevan asociados, cada uno a su vez, una configuración epistémica y constituyen un significado parcial de la derivada. A estas nueve configuraciones, respectivamente asociadas a los sistemas de prácticas, las hemos denominado: 1) *la tangente en la matemática griega* (CE_1); 2) *sobre la variación en la edad media* (CE_2); 3) *métodos algebraicos para hallar tangentes* (CE_3); 4) *concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes* (CE_4); 5) *las ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos* (CE_5); 6) *métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes* (CE_6); 7) *el cálculo de fluxiones* (CE_7); 8) *el cálculo de diferencias* (CE_8) y, 9) *la derivada como límite* (CE_9).

Es importante aclarar, que dentro del "enfoque ontosemiótico" del conocimiento matemático una de las maneras de entender el significado de un concepto es, desde la perspectiva pragmatista, en términos de los sistemas de prácticas en que dicho objeto interviene (significado sistémico). Tales sistemas de prácticas están ligados a tipos de situaciones-problemas, de donde se deriva la posibilidad de distinguir distintos significados cuando se abordan problemas diferentes.

De esta forma, el objeto derivada, a lo largo de su evolución histórica, ha adoptado nueve significados distintos (significados parciales), es decir, el objeto derivada se ha activado implícita o explícitamente en nueve subsistemas de prácticas cada uno de los cuales tiene una configuración asociada de objetos y procesos. Estas nueve configuraciones (descritas en los apartados anteriores), a pesar de ser distintas entre sí, algunas de ellas tienen similitudes, de manera que se pueden relacionar como se ilustra en el esquema de la Figura 3.11.

En la base del esquema en la Figura 3.11, se han considerado cronológicamente seis *sistemas de prácticas/significados parciales* que pueden verse como "primarios" en cuanto que, las configuraciones activadas en dichos sistemas (CE_1, CE_2, CE_3, CE_4, CE_5 y CE_6), tienen un carácter extensivo, es decir, se resuelven ciertos tipos de situaciones-problemas, con métodos y procedimientos particulares. Sin embargo, dentro de estas seis configuraciones "primarias", hay algunas que son similares entre sí. Tal es el caso de las configuraciones CE_1, CE_3 y CE_6 que, al activar significados parciales similares para la derivada, pueden considerarse similares, razón por la que se pueden agrupar dando origen a un sistema de prácticas más "genérico" en el cual se abordan situaciones-problemas sobre tangentes en general. A este sistema de prácticas con su configuración asociada, la hemos denominado "tangentes". Análogamente, las configuraciones CE_2 y CE_4 se pueden agrupar dando paso a un nuevo sistema más general, con su respectiva configuración asociada, la cual denominamos "variación, velocidades" ya que se abordan problemas de este tipo. La configuración CE_5, también la hemos denominado "máximos y mínimos".

Posteriormente Newton, apoyándose en la configuración subyacente al sistema de prácticas genérico "variación, velocidades", desarrolla un nuevo *sistema de prácticas* de la derivada como fluxión, en el cual se activa una configuración más general (CE_7), de tal forma que los nuevos procedimientos, lenguajes, conceptos, definiciones, etc., de dicha configuración, son aplicados luego para resolver situaciones-problemas característicos de los sistemas de prácticas "tangentes", "máximos y mínimos" y "variación, velocidades", aspecto que se señala con las flechas punteadas que salen de CE_7 a los tres sistemas de prácticas genéricos. Del mismo modo Leibniz, apoyándose en la configuración asociada al sistema de prácticas "tangentes", desarrolla un nuevo *sistema de prácticas* de la derivada como cociente de diferenciales en el que se activa una configuración más general (CE_8), la cual posteriormente aplica para la resolución de situaciones-problemas característicos de los sistemas de prácticas puestos en juego en las situaciones de cálculo de tangentes y de máximos y mínimos.

Finalmente, los matemáticos que sucedieron a Newton y Leibniz, tomando como base sus desarrollos (CE_7 y CE_8) generaron un nuevo *sistema de prácticas* de carácter formal de la derivada como límite del cociente de incrementos, el cual lleva asociado una configuración (CE_9) que constituye la formalización del objeto derivada. Las flechas punteadas que salen de CE_9 indican que los elementos de dicha configuración son aplicados para la solución de problemas propios de los sistemas de prácticas "tangentes", "variación, velocidades" y "máximos y mínimos".

De esta forma, vemos como el objeto derivada comienza a emerger de los *sistemas de prácticas* "primarios" los cuales básicamente pueden agruparse en tres sistemas de prácticas genéricos en los cuales se abordan problemáticas sobre: a) tangentes; b) máximos y mínimos; y c) variación. Las configuraciones asociadas a dichos sistemas de prácticas primarios, dan paso a nuevos sistemas de prácticas en los cuales se activan CE_7 y CE_8, las cuales alcanzan justificaciones formales en CE_9. El nivel de generalización de cada una de las configuraciones, también ha sido ilustrado en el esquema de la Figura 3.11.

La consideración conjunta de los elementos, y sus relaciones, ilustrados en el esquema de la Figura 3.11, es lo que conforma, primordialmente, el *significado epistémico global de la derivada*.

Las relaciones existentes entre las distintas configuraciones epistémicas identificadas e ilustradas en la Figura 3.11, podrían seguir extendiéndose, por ejemplo la configuración CE_7 que tiene vinculado el significado de la derivada como fluxión, junto con algunas ideas de provenientes de las configuraciones CE_8 y CE_9, dan lugar a un nuevo sistema de prácticas del cual emerge una nueva rama de las matemáticas: "El cálculo de variaciones". Sin embargo, esto no es objeto de estudio de nuestra investigación, ya que sólo pretendíamos reconstruir el significado holístico para la derivada de una variable real que sirva de referencia para sistematizar los conocimientos de los profesores de educación secundaria/bachillerato sobre la derivada, en lo que respecta a la faceta o dimensión epistémica. No obstante, el *significado global* de la derivada quedaría incompleto si no consideráramos las distintas generalizaciones que se han realizado sobre dicho objeto matemático (ver apartado 3.2.6).

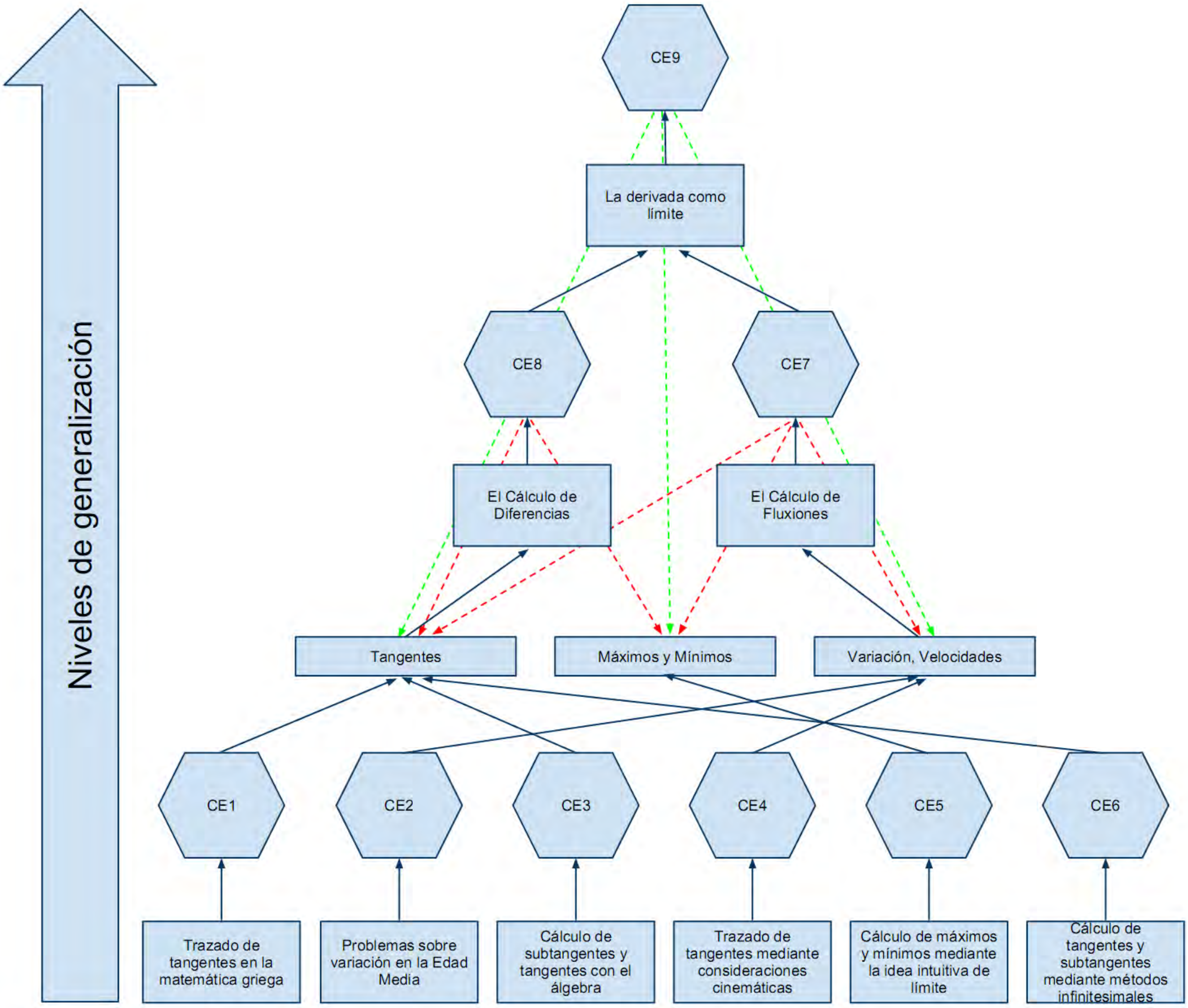


Figura 3.11. Significado epistémico global de la derivada

3.5. IMPLICACIONES DE LA HISTORIA DE LA DERIVADA EN LA ENSEÑANZA

Como hemos visto a lo largo de este capítulo, la derivada se ha ido desarrollando de manera paulatina desde los primeros trabajos sobre tangentes en la matemática griega hasta la definición formal que fue dada a partir de la definición rigurosa del límite. Como señala Grabiner (1983a), la derivada fue usada de manera implícita por Fermat, Barrow, entre otros matemáticos del siglo XVII; Newton y Leibniz comenzaron a elaborarla, Taylor, Euler y otros, la desarrollaron, Lagrange la nombró y caracterizó, y al final de un largo período Cauchy y Weierstrass la definieron de manera general.

La historia nos evidencia que el desarrollo y evolución de la derivada es, de hecho, completamente inverso a la forma en que en la actualidad es enseñada y presentada en algunos libros de texto en los cuales se comienza con la definición, luego se exploran y proporcionan algunos resultados y por último se realizan algunas aplicaciones. Esto es lo que Freudenthal denomina “inversión antididáctica”. Aunado a este hecho, nos encontramos que en la mayoría de las ocasiones, la enseñanza de los conceptos básicos del cálculo, tal como la derivada, se realiza con un fuerte aspecto rutinario, centrándose en los métodos para la diferenciación sin justificarlos (Doorman y Van Maanen, 2008).

Recientemente, muchos investigadores se han interesado en el aspecto histórico-epistémico de la derivada y sobre cómo este puede ayudar para desarrollar procesos de enseñanza eficaces que promuevan el aprendizaje y la reflexión de los estudiantes. Por ejemplo, el trabajo de Tall (2009) en el que presenta un marco teórico para el desarrollo cognitivo del pensamiento matemático a partir de las percepciones y acciones de los estudiantes para alcanzar la producción formal de las matemáticas, señala que dicho marco teórico muestra cómo los procesos fundamentales que siguieron nuestros predecesores para la invención del cálculo, se encuentran directamente relacionadas con las concepciones de los estudiantes. Su hipótesis es que el marco teórico que presenta, se basa en el crecimiento del pensamiento matemático, tanto en términos de la forma en que éste se desarrolla en los estudiantes desde la infancia hasta la madurez, y también, la forma en cómo dicho pensamiento se fue desarrollando o evolucionando a lo largo de la historia.

Otra investigación desarrollada en este sentido es la de Doorman y Van Maanen (2008) quienes realizan una revisión histórica sobre el desarrollo del cálculo, con el fin de dar una recomendación o propuesta de secuencia instruccional para el cálculo. Dicha recomendación la realizan argumentando que la historia les sugiere que, a los métodos formales de diferenciación e integración, precede una comprensión intuitiva del cálculo a partir del razonamiento con gráficas, sumas y diferencias, áreas y pendientes. Estos autores concluyen con un “llamado” a la reflexión histórica en la educación matemática, como un método para cambiar la práctica orientada a la rutina.

Estas problemáticas, que se viven en la enseñanza actual del cálculo diferencial, ya eran señaladas por Richard Dedekind quien expresaba: “Considero que, desde el punto de vista didáctico, el recurso a la intuición geométrica en una primera presentación del cálculo diferencial es sumamente útil, e incluso indispensable si no se quiere perder demasiado tiempo. Pero nadie puede negar que esta forma de introducir el cálculo diferencial pueda ser tildada de no científica" (Durán, 1996, p. 70). Además, como bien apunta Grabiner (1983b), en el siglo XVII el cálculo fue comprendido de manera intuitiva y, sin la fundamentación rigurosa que fue alcanzada en el siglo XIX, fue aplicado para resolver un gran número de problemas, como el de la cuerda vibrante o la ecuación para el movimiento del sistema solar; así mismo, fueron inventados y aplicados conceptos y áreas importantes de las matemáticas tales como la transformación de Laplace, el cálculo de variaciones y la función Gamma. Entonces, ¿por qué la enseñanza de los conceptos fundamentales del cálculo se empeña en realizarse en orden inverso a como éstos evolucionaron y se desarrollaron en la historia, dando más énfasis a las definiciones formales y métodos generales?

En este sentido, es conveniente apuntar que estas consideraciones empíricas fueron esenciales para el desarrollo de los métodos infinitesimales. Los matemáticos, liberados de las ataduras que el rigor impone en los procesos creativos, fueron capaces de desarrollar nuevas y poderosas herramientas de estudio. Así, estamos de acuerdo con Durán (1996) cuando señala: "De nuevo la historia nos muestra, con un ejemplo práctico, el lugar que el rigor debe ocupar en un proceso matemático: siempre después de la fase de invención" (p. 99).

3.6. CONSIDERACIONES FINALES

La gran diversidad de investigaciones en el campo de didáctica de las matemáticas, referentes a los aspectos cognitivos e instruccionales sobre la derivada, plantea un reto a los formadores de profesores que sintetizamos con la pregunta: ¿Cuál es el conocimiento didáctico-matemático que necesita el profesorado de secundaria/bachillerato con relación a la enseñanza de la noción de derivada? La complejidad y amplitud de esta cuestión nos ha llevado a focalizar la atención en un aspecto parcial, aunque relevante, como es la caracterización de los distintos significados del objeto derivada.

Nuestra propuesta de reconstrucción del significado global de la derivada resulta especialmente importante puesto que el diseño, implementación y evaluación de planes de formación matemática y de procesos instruccionales sobre un contenido matemático específico, requieren un estudio en profundidad sobre el significado de los objetos matemáticos que componen dicho contenido. Tal estudio debe aportar criterios para seleccionar los problemas y prácticas matemáticas a incluir en los planes y procesos de formación, según las necesidades sociales y profesionales del grupo de personas a quien se dirigen. Es decir, es a partir del significado holístico de un objeto, que se determina cuál o cuáles serán los significados pretendidos, implementados y evaluados, en una práctica educativa específica. De esta manera, es indudable que el *significado global de la derivada* es pieza clave del conocimiento didáctico-matemático del profesor.

CAPÍTULO 4

La Derivada en el Currículo de Bachillerato

4.1. INTRODUCCIÓN

El descubrimiento del Cálculo[26] es uno de los grandes logros intelectuales de la civilización, pues ha servido por más de tres siglos como una herramienta cuantitativa para la investigación de problemas científicos. El cálculo es fundamental para áreas de las matemáticas tales como la probabilidad, la topología, la teoría de grupos y aspectos del álgebra, la geometría y la teoría de números. Sin el Cálculo, la tecnología moderna y la física podrían ser difíciles de imaginar (Kleiner, 2001).

Sin embargo, tal como vimos en el Capítulo 1, la enseñanza del cálculo es conocida por ser una fuente de serios problemas, tanto para los estudiantes como para los profesores (Hitt, 2003), de cara a la comprensión de sus ideas fundamentales. La derivada es uno de los conceptos fundamentales para el estudio del cálculo, pero el tratamiento algebraico del concepto, trivializa y dificulta su comprensión. Artigue (1995), señala que aunque se puede enseñar a los estudiantes a efectuar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y a resolver algunos problemas estándares, se encuentran grandes dificultades para que logren alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que conforman el núcleo de este campo de las matemáticas.

Así mismo, Artigue (1998) señala que las investigaciones didácticas evidencian que es difícil para los estudiantes entrar en el campo conceptual del Análisis, cuando éste no se reduce a su parte algebrizada, sino que pretende el desarrollo de los modos de pensamiento y de las

[26] Usaremos la palabra *Cálculo* para referirnos al Cálculo Infinitesimal (diferencial e integral).

técnicas que hoy en día están fundamentadas en él. De esta forma, algunos estudiantes son capaces de resolver ejercicios con la aplicación de las reglas de derivación, no obstante, manifiestan dificultades cuando se les pide usar la derivada, y sus diversos significados, en situaciones no procedimentales.

Algunas investigaciones referentes al significado de la derivada, se han centrado en describir las características de los significados construidos por los estudiantes, mostrando la existencia de conflictos e inconsistencias respecto de los significados formales presentados en los libros de texto (Ferrini-Mundy y Graham, 1994; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2006). No obstante, diversas investigaciones (Inglada y Font, 2003; Badillo, Font y Azcárate, 2005) evidencian que el origen de los conflictos cognitivos de los estudiantes sobre el significado de la derivada, puede estar asociado a la presentación de la derivada en los libros de texto; por ejemplo, el conflicto causado por la introducción implícita de la función derivada en la definición de la derivada en un punto al usar la notación incremental $f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}_{(\text{en } x=a)}$ como primera notación para definir la derivada en un punto.

En este sentido, el objetivo de este cuarto capítulo es caracterizar el significado pretendido en el currículo de Bachillerato[27] a partir de las prácticas matemáticas propuestas tanto en el Plan de Estudios como en los libros de texto de dicho nivel. Teniendo en cuenta el significado global de la derivada reconstruido en el Capítulo 3 (Pino-Fan, Godino y Font, 2011), se realiza una comparación entre el significado global de la derivada y el significado pretendido en el currículo de matemáticas del nivel Bachillerato. Dicha comparación nos permite finalmente, emitir juicios de valoración de la idoneidad epistémica del significado curricular de la derivada en el nivel bachillerato, información que consideramos de utilidad para el profesor de matemáticas que debe interpretar y concretar tanto las directrices curriculares como los libros de texto para diseñar sus actuaciones en el aula.

[27] El estudio se realiza para el caso de los documentos curriculares de México dado que la muestra de estudiantes a los cuales se aplica el cuestionario son de dicho país.

4.2. CRITERIOS DE IDONEIDAD EPISTÉMICA PARA EL ESTUDIO DE LA DERIVADA: DISEÑANDO UNA METODOLOGÍA PARA EL ANÁLISIS DEL CURRÍCULUM DE MATEMÁTICAS

4.2.1. ¿Por qué el estudio de los Libros de Texto?

El análisis de dichos libros de texto se hace debido a la importancia que estos adquieren para los profesores en la implementación de clases. La dependencia que los profesores establecen con los libros de texto, ha sido indagada por Nathan y Koedinger (2000), quienes manifiestan, "Es razonable suponer que el uso de los libros de texto en la estructuración diaria de las lecciones de clase, tareas semanales y la secuencia curricular anual, lleva a los profesores a internalizar la imagen de las matemáticas que implícitamente transmiten" (p. 228).

Por su parte, el trabajo de Cooney (1985), reveló que los libros de texto son la influencia primaria para las concepciones curriculares de los profesores, así como para su estilo de presentación de la clase. Adicionalmente, Love y Pimm (1996) señalan, "El libro es todavía, en gran medida, la tecnología más extendida y usada en las clases de matemáticas. Debido a su ubicuidad el libro de texto ha moldeado nuestra noción de la matemática y como debe enseñarse" (p. 402).

Así, el análisis conjunto del Plan de Estudios y de los libros de texto, nos permite estudiar tanto el tratamiento que se le da a la derivada como los significados pretendidos en el currículo de matemáticas de bachillerato.

4.2.2. ¿Cómo contribuye la noción de idoneidad epistémica en el estudio de los significados de la derivada pretendidos en el currículo de matemáticas?

Tanto si queremos contrastar los significados curriculares con el significado global de la derivada, así como para el estudio de la adecuación de los primeros respecto del segundo, utilizamos la noción de idoneidad epistémica. Esta noción se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales pretendidos (o implementados) respecto de un significado de referencia, que en nuestro caso concreto, este significado de referencia es el significado holístico de la derivada reconstruido en el Capítulo 3.

Como vimos en el Capítulo 2, la noción de *idoneidad didáctica*, sus dimensiones, criterios, y descomposición operativa, han sido introducidos en el EOS (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006) como herramientas que permiten el paso de una didáctica descriptiva–explicativa a una didáctica normativa, esto es, una didáctica que se orienta hacia la intervención efectiva en el aula. La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como la articulación coherente y sistémica de las seis componentes siguientes (Godino, Batanero y Font, 2007): idoneidad epistémica, idoneidad cognitiva, idoneidad interaccional, idoneidad mediacional, idoneidad afectiva e idoneidad ecológica.

El proceso de diseño instruccional requiere que el maestro defina el tema, determine la audiencia, adapte la instrucción al desarrollo cognitivo de los estudiantes, proponga y desarrolle los objetivos, las estrategias de evaluación, de valoración y revisión del proceso. El proceso de instrucción debe ser idóneo, es decir debe cumplir diversas condiciones para que el mismo cumpla tanto con los objetivos curriculares como con el desarrollo de competencias matemáticas por los estudiantes. Es por tanto deseable que los significados de la derivada implementados o pretendidos tanto en los libros de texto como en el Plan de Estudio de cálculo diferencial de bachillerato, representen idóneamente los significados de referencia.

Sin embargo, una pregunta que surge de forma inmediata es, ¿cómo observamos o qué criterios nos permiten explorar y valorar si los significados de la derivada pretendidos en el currículo de bachillerato representan idóneamente a los significados de referencia? Para responder a esta pregunta se hace necesario el planteamiento de criterios específicos, que nos ayuden a operativizar la noción de idoneidad epistémica para el caso concreto del análisis del significado de la derivada pretendido en el currículo de matemáticas del nivel bachillerato.

4.2.3. Criterios de idoneidad epistémica para el análisis de los significados de la derivada pretendidos en el currículo de matemáticas de bachillerato

Apoyados en las nociones teóricas antes descritas y a partir de la reconstrucción del significado global de la derivada (Capítulo 3), y de las investigaciones que se han realizado en el campo de la didáctica de las matemáticas sobre aspectos de la enseñanza y aprendizaje de la derivada, es posible proponer criterios que permitan analizar y caracterizar los significados de la derivada pretendidos en el currículo de bachillerato. A partir de dicha caracterización es posible emitir juicios de valoración sobre la idoneidad epistémica de los significados de la derivada en el currículo de dicho nivel.

A continuación describimos los cuatro criterios que proponemos para el análisis de la idoneidad epistémica de los significados curriculares de la derivada. No obstante cabe señalar que estos criterios son generales y pueden ser utilizados para el análisis de la idoneidad epistémica de un tópico matemático cualquiera. Para cada uno de estos cuatro criterios "genéricos", proponemos subcriterios que están relacionados con el tema matemático en estudio.

4.2.3.1. Criterio I: Representatividad de los campos de problemas propuestos

Los objetos matemáticos en los contextos escolares, resuelven problemas intra y extra-matemáticos. En el proceso de resolución de los problemas matemáticos se ponen en juego objetos matemáticos que favorecen el aprendizaje de los estudiantes. Para Freudenthal: "[La matemática como una actividad humana] es una actividad de resolución de problemas, de ver los problemas, pero es también una actividad de organización de una disciplina…" (Freudenthal, 1971, pp. 413 – 414). La elección de tareas matemáticas que pongan en juego los objetos y significados matemáticos es crucial para promover el aprendizaje.

La representatividad de los campos de problemas está vinculada con la idoneidad epistémica, pues la primera hace referencia a la variedad de situaciones que favorecen la discusión de los conceptos matemáticos, mientras que la idoneidad epistémica refiere a los objetos y significados puestos en juego en la resolución de las situaciones problema.

Para el caso de la derivada, los campos de problemas (CP) que identificamos a partir del estudio histórico (Pino-Fan, Godino, Font, 2011) se pueden resumir en los siguientes:

a) Campo de Problemas 1 (CP1): Problemas que involucran el cálculo de tangentes
b) Campo de Problemas 2 (CP2): Problemas que involucran el cálculo de tasas instantáneas de cambio.
c) Campo de Problemas 3 (CP3): Problemas que involucran el cálculo de tasas instantáneas de variación.
d) Campo de Problemas 4 (CP4): Problemas que involucran la aplicación de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, análisis de gráficas de funciones, etc.

Cabe señalar que nosotros distinguimos entre "tasa instantánea de cambio", que refiere específicamente al "cociente" entre dos cantidades de magnitud; y "tasa instantánea de variación", que refiere al cociente entre dos números reales sin hacer referencia a cantidades de magnitud. La "tasa instantánea de variación" es comúnmente conocida en la literatura como límite del cociente de incrementos.

Un último campo de problemas surge a partir de cómo los libros abordan algunos "problemas" sobre cálculo de derivadas de funciones, en los que basta aplicar algunas reglas o proposiciones para su resolución. Artigue (1998) señala que las investigaciones didácticas informan que no es fácil para los estudiantes entrar en el campo conceptual del Análisis, cuando éste pretende el desarrollo de los modos de pensamiento y de las técnicas que hoy en día están fundamentadas en él. Esto último trasciende el componente algebraizado del cálculo. De esta forma, algunos estudiantes son capaces de resolver los ejercicios que se les proponen con la aplicación correcta de las reglas de derivación, no obstante, presentan dificultades cuando necesitan usar el "significado del objeto derivada". Así el quinto campo de problemas que consideraremos es:

e) Campo de Problemas 5 (CP5): Cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación.

4.2.3.2. Criterio II: Tipo de representaciones activadas en el planteamiento y solución de las tareas

Durante el proceso de análisis de la *idoneidad epistémica* es necesario considerar la *idoneidad mediacional* que refiere al grado de disponibilidad y adecuación de los modos de representación necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje. Para el caso de análisis de libros de texto y de los Planes de Estudio de cálculo diferencial, esta idoneidad mediacional se interpreta en términos de los modos de representación usados o pretendidos, respectivamente. De acuerdo con Font (1999), existen tres subprocesos que intervienen en el cálculo de la función derivada:

a) Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f(x)$;
b) El paso de una representación de $f(x)$ a una forma de representación de $f'(x)$; y
c) Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f'(x)$.

Así, consideraremos los diferentes tipos de representaciones activadas en estos tres subprocesos: descripción verbal, gráfica, fórmula (simbólica) y tabular; esto tanto para la función como para su derivada.

4.2.3.3. Criterio III: Conocimientos previos a la introducción de la derivada

Este criterio se refiere a la enumeración, presentación y relación entre los conocimientos previos a la presentación de la derivada, que se formulan tanto en los libros de texto como en el Plan de Estudios de cálculo diferencial. En este sentido, para el análisis de este tercer criterio, enumeramos los conocimientos centrales previos, tal como aparecen tanto en los libros texto como en los Planes de Estudio de cálculo diferencial. La valoración de la pertinencia se hace con base en el análisis epistémico-histórico del objeto en estudio, la derivada, y en el uso posterior que los autores de los textos dan a estos conocimientos previos presentados.

4.2.3.4. Criterio IV: Representatividad de los significados institucionales pretendidos (o implementados) respecto del significado global de referencia

Una de las tareas que son propias del maestro es el diseño instruccional, en la cual se involucran diversos aspectos tales como los epistémicos (contenidos), los cognitivos y los instruccionales. El conjunto de temas matemáticos que se proponen en el Plan de Estudios y en los textos, corresponden a una elección por parte de la institución: el currículo pretendido. Ese tipo de temas matemáticos y los significados conferidos a estos en los textos representan a los significados institucionales de referencia.

Se considera que para que la instrucción sea epistémicamente idónea, este conjunto de objetos y significados institucionales de referencia deben representar al conjunto de significados globales. El énfasis en determinados significados y objetos matemáticos, y el desconocimiento de otros puede resultar en un cubrimiento epistémico parcializado que puede afectar la idoneidad del proceso de instrucción.

Es importante señalar que, aunque el significado de un objeto matemático está en función del campo de problemas en el que se utiliza, en el ámbito institucional muchas veces se utiliza un objeto matemático en un sentido distinto al campo de problemas en el que se activa. Por ejemplo, algunos libros de texto introducen la derivada utilizando problemas sobre velocidades pero aplicando la derivada en su acepción de tasa instantánea de variación (límite del cociente de incrementos). En este sentido, los tres primeros criterios ayudarán a explorar el cuarto criterio atendiendo a este aspecto que acabamos de señalar.

Los cuatro criterios de idoneidad epistémica mencionados se operativizan en el siguiente apartado en el que, además de describir las configuraciones de objetos y procesos subyacentes a los sistemas de prácticas de los Planes de Estudio y los libros de texto, realizamos el análisis de la idoneidad epistémica de los significados curriculares sobre la derivada (Tablas 4.4 y 4.5).

4.3. SIGNIFICADO EPISTÉMICO DE LA DERIVADA EN EL CURRÍCULO DE BACHILLERATO

Entre las cuestiones que surgen cuando se ha logrado la construcción del *significado global de referencia* de la derivada, destacamos las siguientes:

- ¿Cuáles son los significados de la derivada que actualmente se pretende en el currículo de matemáticas de bachillerato?
- ¿Cuál es el significado de referencia de la derivada propuesto en los Planes de Estudio de cálculo diferencial de nivel bachillerato?
- ¿Cómo se organizan tales significados en los libros de texto?
- ¿Los significados pretendidos tanto en los libros como en los Planes de Estudio de cálculo diferencial, son representativos del significado global de la derivada?

Para responder a estas cuestiones, tomaremos como ejemplo el *currículo de matemáticas del sistema de bachillerato de México* y analizaremos los significados pretendidos en dicha propuesta curricular. Así mismo, revisamos una muestra de libros de texto de cálculo diferencial de dicho nivel educativo.

Así, el análisis conjunto de la dupla <Plan de Estudios de cálculo diferencial, libros de texto>, permite indagar cómo se aborda el objeto derivada en el currículo de matemáticas del bachillerato mexicano.

4.3.1. La derivada en el Plan de Estudios de bachillerato en México

Hasta hace poco, el bachillerato o la Educación Media Superior (EMS) en México, estaba conformada por alrededor de 25 subsistemas con estructuras y formas de organización diversas, que operaban de manera independiente, sin correspondencia con un panorama general articulado, con poca comunicación y complementación entre ellos. Sin embargo, en la actualidad, la Secretaría de Educación Pública (SEP)[28], atendiendo a esta desestructuración ha implementado una Reforma Integral de la Educación Media Superior cuya propuesta está centrada en tres principios básicos: 1) Reconocimiento universal de todas las modalidades y subsistemas del bachillerato; 2) Pertinencia y relevancia de los Planes de Estudio; y 3) Tránsito entre subsistemas y escuelas.

Sin embargo aún persisten subsistemas como los bachilleratos asociados a Universidades Autónomas o los bachilleratos estatales, que "sobreviven" intactos a dicha Reforma. A continuación analizamos el currículo tanto para el bachillerato propuesto por la Reforma Integral de la Educación Media Superior (SEP, 2010) como el currículo para bachillerato asociado a la Universidad Autónoma de Yucatán (UADY, s.f.). El análisis se hará sobre los significados pretendidos del objeto derivada en dichas propuestas curriculares.

En relación con el "cálculo diferencial", la Reforma Integral propone: 1) "analizar cualitativa y cuantitativamente la razón de cambio instantáneo y promedio, lo que permitirá dar soluciones a problemas del contexto real del estudiante al facilitarle la formulación de modelos matemáticos de problemas financieros, económicos, químicos, ecológicos, físicos y geométricos"; 2) "la resolución de problemas de optimización". Para esto, se distribuye en cuatro bloques los contenidos u objetos de aprendizaje de la asignatura cálculo diferencial (Tabla 4.1).

En el Bloque 1 se motiva el estudio del cálculo diferencial "…mediante el análisis de su evolución, sus modelos matemáticos y su relación con hechos reales", (SEP, 2010, p.11). Luego se introduce el concepto de límite (Bloque 2), para posteriormente definir la derivada como razón de cambio (Bloque 3). Finalmente en el Bloque 4 se estudian situaciones interdisciplinares que involucran el cálculo de máximos y mínimos.

Las situaciones o problemas son contextualizados (agricultura, economía, industria, administración, etc.) para introducir nuevos objetos de aprendizaje o aplicar los objetos de aprendizaje ya introducidos.

Entre los elementos lingüísticos destacan las diversas representaciones para los límites y funciones (tabular, gráfica y simbólica) y para la derivada (verbal, gráfico y simbólico). No

[28] La Secretaría de Educación Pública (SEP) es el organismo de gobierno encargado de regular las políticas que rigen el Sistema Educativo en México. La SEP a través de la Subsecretaría de Educación Media Superior creó la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS) con la cual se organiza y estructura el currículo del nivel medio superior.

hay evidencia de que uno de los propósitos de la propuesta curricular sea que los estudiantes adquieran habilidades (y conocimientos) para realizar: a) Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f(x)$; b) El paso de una representación de $f(x)$ a una forma de representación de $f'(x)$; y c) Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f'(x)$ (Font, 1999).

Tabla 4.1. Distribución de los objetos de aprendizaje de cálculo diferencial según la Reforma Integral

Bloque 1	“Argumentas el estudio del cálculo mediante el análisis de su evolución, sus modelos matemáticos y su relación con hechos reales”	
	Propósito	Este bloque pretende que los estudiantes se ubiquen y conozcan los antecedentes históricos de esta rama de las matemáticas y cómo su nacimiento ha contribuido a los avances de la humanidad
	Contenidos específicos	• Evolución del Cálculo • Modelos matemáticos: un acercamiento a máximos y mínimos
Bloque 2	“Resuelves problemas de límites en situaciones de carácter económico, administrativo, natural y social”	
	Propósito	Este bloque busca que los estudiantes resuelvan problemas sobre límites en diversas ciencias, mediante el análisis de tablas, gráficas y aplicación de las propiedades de los límites.
	Contenidos específicos	• Los límites: su interpretación en una tabla y en una gráfica, y su aplicación en funciones algebraicas. • El cálculo de límites en funciones algebraicas y trascendentes.
Bloque 3	“Calculas, interpretas y analizas razones de cambio en fenómenos naturales, sociales, económicos, administrativos, en la agricultura, en la ganadería y en la industria”	
	Propósito	En este bloque se estudia la razón de cambio promedio e instantánea, el cambio de posición de un objeto en el tiempo y la interpretación geométrica de la derivada.
	Contenidos específicos	• La variación de un fenómeno a través del tiempo. • La velocidad, la rapidez y la aceleración de un móvil en un periodo de tiempo.
Bloque 4	“Calculas e interpretas máximos y mínimos sobre los fenómenos que han cambiado en el tiempo de la producción, producción industrial o agropecuaria”	
	Propósito	En este bloque se trabaja la obtención de máximos y mínimos absolutos y relativos y cómo ellos influyen en el éxito o fracaso de las producciones empresariales, industriales, agrícolas y en el comportamiento de los fenómenos naturales.
	Contenidos específicos	• Producciones, máximos y mínimos. • Variaciones en las producciones, máximos y mínimos relativos.

Respecto a los conceptos/definiciones, la propuesta curricular resalta algunos, tales como los de función (algebraica y trascendente), límite, derivada (como razón de cambio), razón de cambio promedio e instantánea, velocidad, rapidez, aceleración y máximos y mínimos.

Entre las proposiciones se consideran las propiedades y reglas para el cálculo de límites; no se mencionan las propiedades y reglas para el cálculo de razones de cambio. Por último, el cálculo de: límites, razones de cambio, máximos y mínimos y la aplicación de estos cálculos a la resolución de problemas contextualizados, son algunos de los procedimientos que se proponen en la propuesta curricular de la Reforma Integral.

Por su parte, la propuesta curricular del bachillerato de la Universidad Autónoma de Yucatán (UADY), tiene como propósito: "Aplicar el concepto de la función derivada de funciones algebraicas y trascendentes, a través de estrategias que incentiven la reflexión y análisis, en la resolución de problemas de la vida cotidiana para desarrollar el razonamiento lógico y analítico de los alumnos" (UADY, s.f., p. 4). La distribución de los contenidos de dicha propuesta curricular, se presenta en la Tabla 4.2.

Es posible observar en la Tabla 4.2, que la propuesta curricular del bachillerato asociado a la Universidad Autónoma de Yucatán introduce el concepto de límite y sus propiedades (Unidad 1), posteriormente define la derivada como pendiente de la recta tangente y provee los teoremas y reglas de derivación (Unidad 2), finalmente la Unidad 3 se orienta a la aplicación de la derivada para el cálculo de extremos y razones de cambio, y para analizar las gráficas de funciones.

Así, los objetos matemáticos primarios que componen la configuración epistémica asociada a la propuesta curricular del bachillerato de la UADY son: *elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones y procedimientos*.

En cuanto a los elementos lingüísticos se aprecia la preponderancia del lenguaje simbólico (definición ε-δ de límite) y gráfico (interpretaciones geométricas para el límite y para la derivada, así como la graficación de funciones). Entre los conceptos centrales se encuentran: función (algebraica y trascendente), límite (indeterminados, unilaterales, al infinito, infinitos); continuidad, derivada (como pendiente de la recta tangente), regla de la cadena, derivadas de orden superior, etc.

Respecto a las propiedades o proposiciones, se consideran los teoremas sobre límites, las formulas de derivación, los criterios de la primera y segunda derivada para la determinación de extremos, el teorema del valor extremo, criterios para determinar concavidades y crecimiento o decrecimiento en las funciones.

Entre los procedimientos que se prevén se encuentran el cálculo de límites y su aplicación a la determinación de la continuidad de funciones, el cálculo de derivadas mediante el uso de las reglas de derivación, y el cálculo de tangentes, normales, razones de cambio y máximos y mínimos.

Tabla 4.2. Distribución de los objetos de aprendizaje de cálculo diferencial según la UADY

Unidad 1		"Límites y continuidad"
	Propósito	Manejar el concepto de límite de una función algebraica a través de su interpretación intuitiva y geométrica, para su cálculo y posterior aplicación en la continuidad y la derivada de una función.
	Contenidos específicos	• Concepto intuitivo de límite de una función • Definición formal de límite de una función (épsilon-delta) • Teoremas sobre límites de funciones • Límites aparentemente indeterminados • Límites unilaterales • Límites al infinito • Límites infinitos • Concepto de función continua • Continuidad de una función en un punto • Continuidad de una función en un intervalo
Unidad 2		"La función derivada"
	Propósito	Conocer el concepto derivada y ejecutar su cálculo a través de su interpretación geométrica y de las fórmulas básicas de derivación, para desarrollar el razonamiento lógico y analítico de los alumnos en la solución de los problemas.
	Contenidos específicos	• Motivación: Pendiente de la tangente a una curva en un punto • Obtención de las ecuaciones de las rectas tangente y normal a una curva en un punto • Definición de la derivada de una función • Fórmulas de derivación • Derivación de funciones algebraicas • Derivación de funciones compuestas, regla de la cadena • Derivación de funciones trascendentes • Derivación implícita • Derivadas de orden superior
Unidad 3		"Aplicaciones de la derivada"
	Propósito	Aplicar los conceptos de derivadas de funciones algebraicas y trascendentes, a través de estrategias que incentiven la reflexión y análisis, en la resolución de problemas de la vida cotidiana para desarrollar el razonamiento lógico y analítico.

	Contenidos específicos	• Tangentes y normales a la curva
		• Graficación de las funciones
		    ✓ Teorema del valor extremo
		    ✓ Funciones crecientes y decrecientes
		    ✓ Criterio de la primera derivada para valores extremos relativos
		    ✓ Concavidad y puntos de inflexión
		    ✓ Criterio de la segunda derivada para valores extremos relativos
		• Problemas de máximos y mínimos
		• Razón de cambio

Si bien la Tabla 4.2 menciona "problemas de la vida real", no queda claro si dichos problemas se proponen para: introducir objetos matemáticos nuevos, ejemplificar la inclusión de nuevos objetos matemáticos, la aplicación de objetos matemáticos previamente introducidos.

Es posible observar, de las Tablas 4.1 y 4.2, que ambas propuestas curriculares se asemejan en la organización de los temas de estudio; introducen primeramente el concepto de límite para posteriormente usarlo para definir al objeto derivada.

Sin embargo, ambas propuestas destacan significados distintos para el objeto derivada. Por ejemplo, la propuesta de la Reforma Integral (Tabla 4.1), acentúa la derivada interpretada como razón de cambio (Bloque 3) y propone prácticas matemáticas en las que la derivada se interpreta como un máximo o un mínimo (Bloques 1 y 4). En esta propuesta curricular la interpretación de la derivada como la pendiente de la recta tangente a una curva, parece tener un papel secundario, puesto que aunque se contempla el estudio de la interpretación geométrica de la derivada (Tabla 4.1, Bloque 3), no se hacen explícitos contenidos específicos que acentúen dicha interpretación de la derivada.

Por su parte, en la propuesta curricular de la UADY, se resalta la interpretación geométrica de la derivada (Tabla 4.2, Unidad II). Se define la función derivada, mediante el concepto de límite, se dan las reglas de derivación, se utiliza la derivada para encontrar máximos y mínimos, y se estudian las razones de cambio.

Para reconstruir el significado pretendido en el currículo mexicano de bachillerato consideramos la dupla <Plan de Estudios, libros de texto>, esto en virtud de la dependencia que los maestros establecen con los libros de texto en la implementación de clases (Cooney, 1985). En el siguiente apartado analizaremos una muestra de textos sugeridos como bibliografía en las propuestas curriculares antes referidas.

4.3.2. Análisis de la derivada en los libros de texto de bachillerato

Para nuestro estudio se analizaron una muestra de libros de texto (Tabla 4.3) sugeridos en las propuestas curriculares, del nivel bachillerato. Presentamos el análisis detallado de algunos de ellos. Para ello, nos centramos en el análisis de las prácticas matemáticas propuestas en dichos libros de texto, en los capítulos dedicados al estudio de la derivada.

Para efectuar el análisis se utiliza la noción de configuración epistémica (Font y Godino, 2006) la cual permite identificar y describir sistemáticamente los objetos matemáticos primarios (situaciones/problema, elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, propiedades/ proposiciones, procedimientos y argumentos) que se ponen en juego en la solución de las prácticas matemáticas propuestas. Así mismo, consideramos las distintas facetas duales propuestas por el EOS, las cuales han sido presentadas en el Capítulo 2, desde las que se pueden analizar los objetos primarios, y las relaciones entre ellos, que componen una configuración.

Tabla 4.3. Libros de texto sugeridos en la propuesta curricular de bachillerato

	Libros de bachillerato
1	**Martínez de G., Mayra et al. (2009). Cálculo diferencial e integral. México: Santillana**
2	Stewart, H., et al. (2010). Introducción al cálculo. México: Thompson
3	**Thomas, G. (2006). Cálculo. Una variable. México: Pearson Educación.**
4	**Purcell, E., Varberg, D., y Rigdon, S. (2007). Cálculo diferencial e integral. México: Pearson Educación.**
5	Simmons, G.F. (2002). Cálculo y Geometría analítica. Madrid: McGraw-Hill.
6	**Ayres, F., y Mendelson, E. (1991). Cálculo diferencial e integral. España: McGraw-Hill.**
7	**Quijano, M. y Navarrete, C. (2003). Cálculo diferencial. México: UADY.**
8	**Salazar, L., Bahena, H., y Vega, F. (2007). Cálculo Diferencial. México: Grupo Editorial Patria.**

4.3.2.1. Configuraciones epistémicas asociadas a las prácticas propuestas en los libros de texto de bachillerato.

Libro 1

Este libro contempla dos unidades didácticas para el estudio de la derivada. La primera se orienta a la presentación y definición del objeto, y la segunda se orienta a la aplicación del mismo. Se abordan cuatro tipos de *situaciones-problema*: 1) problemas introductorios contextualizados que ayudan a definir conceptos y propiedades; 2) problemas (resueltos) que refuerzan y ejemplifican el uso de los conceptos y propiedades introducidos; 3) problemas contextualizados y no contextualizados para la aplicación de los objetos matemáticos introducidos; y 4) demostraciones de algunos teoremas para derivar funciones.

Se introducen *conceptos* tales como los de velocidad, velocidad promedio, velocidad instantánea, la derivada en un punto como velocidad instantánea y como pendiente de la recta tangente en un punto, función derivada definida como el límite del cociente de incrementos y derivadas de orden superior. Los conceptos de función, límites y continuidad de una función, son considerados conocimientos previos.

Entre las *proposiciones* que se introducen, podemos señalar los teoremas para derivación de funciones, criterios para identificar la derivabilidad de funciones, criterios para el análisis de gráficas de funciones (crecimiento o decrecimiento, extremos, concavidades,…), regla de la cadena, teorema del valor medio para la derivada, teorema de Fermat y teorema de Rolle.

Tanto los *conceptos* como las *proposiciones* se entrelazan en los *procedimientos* los cuales consisten básicamente en el cálculo de velocidades promedio, tiempos y distancias a partir de la relación $v=d/t$ y su interpretación como pendiente de la rectas secantes; cálculo de la derivada de funciones en puntos específicos, cálculo de la derivada de funciones mediante las reglas para derivar, graficación de la función derivada, cálculo de la derivada de segundo orden, derivación de funciones compuestas, análisis de gráficas de funciones con base en los criterios de derivadas, cálculo de máximos y mínimos, cálculo de tangentes y normales, y demostración de teoremas para derivar funciones. Dichos procedimientos, a su vez, dan cuenta de *elementos lingüísticos*: lenguaje verbal (natural), simbólico y gráfico. Se nota la ausencia de lenguaje tabular.

Como *argumentos* podemos señalar las justificaciones dadas a la inclusión de conceptos o proposiciones, ejemplificación y explicaciones de técnicas a seguir y del uso de conceptos y proposiciones. Además en la resolución de las distintas situaciones-problemas se hace necesario argumentaciones deductivas y gráficos-visuales.

Una de las características importantes de este texto es el uso de situaciones-problema particulares para definir o presentar intensivos tales como conceptos, propiedades o reglas. En cuanto al significado institucional pretendido, predomina la acepción de la derivada como velocidad instantánea y como pendiente de la recta tangente. Sin embargo, dichas acepciones de la derivada se logran a partir de la definición de la derivada como tasa instantánea de variación (límite del cociente de incrementos).

Libro 3

Los *problemas* con los cuales se introduce el concepto de derivada están vinculados con la pendiente de la recta tangente, y la derivada como función. Se da preferencia a las representaciones verbales, gráficas y simbólicas. Los conceptos o definiciones introducidos son: derivada como límite de pendientes de las rectas secantes, derivada como función y derivada como razón de cambio.

Las proposiciones propuestas son de carácter procedimental, y refieren a las reglas de derivación de funciones expresadas algebraicamente. Se acompaña el cálculo de derivadas, en algunos ejemplos, con gráficas que exhiben características puntuales del concepto en estudio.

Los procedimientos son de carácter simbólico y gráfico, efectuados sobre funciones de valor y variable real y sobre sus gráficas. Un capitulo (3) se dedica por entero a las reglas de derivación. Se amplía el conjunto de procedimientos asociados a la derivada: cálculo de pendientes de rectas tangentes, velocidades, razones de cambio, derivadas de funciones expresadas analíticamente.

En el apartado de *aplicaciones* de la derivada se propone: encontrar máximos, mínimos, razones de cambio, velocidades, pendientes de rectas tangentes, dibujar gráficas de funciones. También se introduce el uso de la derivada para calcular límites mediante la regla de L´Hopital.

Libro 4

Los problemas vinculados con la derivada son la pendiente de la recta tangente y la velocidad instantánea. Los elementos lingüísticos usados son el verbal, el gráfico y el algebraico. Se introduce la derivada mediante la definición del límite del cociente de incrementos. Los conceptos hacen referencia a: velocidad promedio, velocidad instantánea y tasa de cambio. Los proposiciones incluyen el vínculo entre la derivada de una función y la continuidad. Para el cálculo de máximo y mínimos se dan algunas propiedades tales como el Teorema de existencia de valor máximo.

Los procedimientos son las reglas de derivación, derivadas de funciones trigonométricas, derivadas de la función compuesta, derivadas de orden superior, derivación implícita. Posteriormente incluye razones de cambio relacionadas y conectas con aplicaciones diversas. Finalmente se considera los diferenciales y las aproximaciones. Luego proponen procedimientos para trazar gráficas de funciones.

Libro 6

El libro de Ayres y Mendelson (1991), dedica cinco de sus capítulos al estudio de la derivada. El primero de ellos está dirigido a la definición de dicho objeto matemático, y los restantes a la aplicación de la derivada en la solución de distintas situaciones-problema (cálculo de tangentes, normales, máximos y mínimos, etc.). Los *problemas* que se abordan son de tres tipos: 1) problemas resueltos no contextualizados que ejemplifican el uso de conceptos y propiedades; 2) problemas no contextualizados para reforzar y aplicar los objetos matemáticos introducidos; y 3) demostraciones de algunos teoremas sobre derivadas.

Dichos problemas y sus soluciones planteadas y esperadas por este libro, dan cuenta de los *elementos lingüísticos,* predomina el uso del lenguaje simbólico y se introducen algunas conexiones con el lenguaje gráfico. Estos elementos lingüísticos también se reflejan en los *procedimientos* implementados y pretendidos para la solución de las situaciones-problemas. Dichos procedimientos consisten fundamentalmente en el cálculo de razones de cambio, incrementos, velocidades, pendientes, tangentes, normales, máximos, mínimos y puntos de concavidad; así como el uso de los teoremas y criterios sobre derivadas para el análisis de gráficas de funciones y el uso de la definición de derivada para demostrar teoremas.

Los *conceptos* introducidos son los de razón media de cambio, derivada como razón instantánea de cambio, derivación implícita y derivadas de orden superior. Se consideran previos los conceptos de función, límite y continuidad. En cuanto a las *proposiciones* encontramos los teoremas para derivación de funciones, criterios para determinar la derivabilidad de una función en un punto, criterios de la primera y segunda derivada para el cálculo de extremos y concavidades.

En lo referente a los *argumentos* empleados, podemos destacar las ejemplificaciones y explicaciones de técnicas a seguir y del uso de conceptos y proposiciones. Así mismo en la solución de los problemas se emplean o requieren argumentaciones de tipo deductivas.

Una característica de este libro de texto que lo diferencia de los otros sugeridos en el currículo de bachillerato, es que no utiliza situaciones-problema para introducir los nuevos conocimientos matemáticos; primeramente introduce los conceptos, definiciones, teoremas o reglas generales (intensivos) y posteriormente aplica dichos objetos matemáticos para la solución de situaciones-problema particulares (extensivos). Además, se observa que predomina el uso de ostensivos tales como las representaciones simbólicas y gráficas.

En cuanto al significado de la derivada que pretende este texto, se nota el predominio del uso de la derivada en su acepción como razón de cambio instantánea. No obstante, dicha acepción para la derivada se logra a partir del límite del cociente de incrementos. El significado de la derivada como pendiente de la recta tangente y como velocidad instantánea, es usado en algunos de los problemas resueltos y propuestos para su resolución.

Libro 7

El libro de Quijano y Navarrete (2003) consta de tres unidades. La primera dedicada al estudio de los límites y continuidades de funciones. La segunda unidad se dedica al estudio de la función derivada y la tercera a las aplicaciones de la derivada. A lo largo de dichas unidades se abordan cuatro tipos de *situaciones-problema*: 1) problemas contextualizados para introducir o definir conceptos y propiedades; 2) problemas (resueltos) no contextualizados que refuerzan y ejemplifican el uso de conceptos y propiedades introducidos; 3) problemas contextualizados y no contextualizados para la aplicación de los objetos matemáticos introducidos; y 4) demostraciones de algunos teoremas para derivar funciones. Así mismo, el libro hace uso de *elementos lingüísticos* tales como el lenguaje natural (verbal) con el cual se introducen los nuevos conceptos, reglas y propiedades. Se distingue predominio del lenguaje simbólico el cual se intenta vincular con los elementos gráficos para la presentación de algunas definiciones y proposiciones.

Por su parte, los *procedimientos* dan cuenta del uso predominante de los lenguajes simbólico y gráfico para el cálculo de: 1) derivadas mediante su definición como límite del cociente de incrementos y las reglas para derivar; 2) tangentes, normales, máximos y mínimos, puntos de inflexión; 3) uso de la derivada en el análisis de gráficas de funciones; y 4) uso de la definición de la derivada como límite del cociente de incrementos para demostrar algunos teoremas de derivación de funciones.

Respecto a los *conceptos*, se consideran como previos los de función, límites y continuidad. Como emergentes podemos mencionar los de velocidad promedio, velocidad instantánea, la derivada en un punto como razón instantánea de cambio, la función derivada definida como el límite del cociente de incrementos, derivadas de orden superior y derivación implícita.

Las *proposiciones* introducidas a lo largo de las tres unidades dedicadas al estudio de la derivada son los teoremas o reglas para la derivación de funciones, criterios para identificar la derivabilidad de funciones, criterios para el análisis de gráficas de funciones (crecimiento o decrecimiento, extremos, concavidades,…) y regla de la cadena. En cuanto a los *argumentos* destacan las justificaciones dadas a la inclusión de conceptos y proposiciones, la ejemplificación y explicaciones de las técnicas a seguir y del uso de conceptos y proposiciones. Además en la resolución de los problemas se requiere el uso de argumentaciones deductivas y gráfico-visuales.

En este libro, se observa un predominio del uso de la derivada en su acepción como razón instantánea de cambio. No obstante dicho significado se alcanza a partir de la definición de la derivada como tasa instantánea de variación (límite del cociente de incrementos). Otros significados, tal como la derivada en un punto como pendiente de la recta tangente, son considerados como aplicaciones, y su estudio se realiza en la unidad tres. En cuanto a la faceta ostensivo-no ostensivo, se observa que destacan los ostensivos simbólicos para representar funciones y sus derivadas, y para la manipulación de los teoremas o reglas empleados en el cálculo de derivadas. Los ostensivos gráficos no son numerosos y se emplean mayoritariamente en la unidad 3 correspondiente a las aplicaciones de la derivada. Finalmente el libro de Quijano y Navarrete (2003), propone introducir conceptos, definiciones, reglas generales y proposiciones (intensivos) a partir de ejemplos concretos o situaciones particulares (extensivos) que justifican su inclusión, lo cual no siempre se logra.

Libro 8

El libro de Salazar, Bahena y Vega (2007) se compone de cinco unidades, de las cuales las primeras dos se orientan al estudio de las funciones y sus propiedades, y los límites y continuidad de funciones respectivamente. Las tres unidades restantes se dedican al estudio de la derivada de una función, derivada de funciones trascendentes y análisis de funciones. En las tres unidades dedicadas al estudio de la derivada, se abordan cuatro tipos de *problemas*: 1) problemas (resueltos) contextualizados y no contextualizados que ejemplifican el uso de conceptos y propiedades; 2) ejercicios para reforzar, por repetición, el uso de conceptos y proposiciones; 3) problemas contextualizados y no contextualizados para reforzar los conocimientos introducidos; y 4) demostraciones de algunos teoremas para derivar funciones. Los problemas y sus soluciones planteadas o requeridas, dan cuenta de los *elementos lingüísticos* que usa este libro de texto que son: simbólico, gráfico y tabular. Estos elementos lingüísticos también se evidencian en los *procedimientos* contemplados, los cuales se centran primordialmente en la manipulación del lenguaje simbólico y, en menor grado, en las conexiones entre lo simbólico, lo tabular y lo gráfico.

Los *conceptos* introducidos son los de incrementos y decrementos, razón promedio de cambio, la primera derivada como función de velocidad, la segunda derivada como función de aceleración, la derivada en un punto como velocidad instantánea y como pendiente de la recta tangente, funciones crecientes, funciones decrecientes, máximos y mínimos y puntos críticos. Se consideran como conceptos previos los de función, dominio, rango, límites y continuidades.

En cuanto a las *proposiciones* podemos mencionar los teoremas para derivar funciones, criterios de la primera y segunda derivada para el cálculo de extremos, criterios para el análisis de gráficas de funciones (crecimiento o decrecimiento, concavidades, puntos críticos,…) y regla de la cadena. Cabe señalar que en el libro se utilizan y se esperan *argumentaciones* deductivas y gráfico-visuales, en las que se entretejan los objetos matemáticos introducidos (elementos lingüísticos, conceptos y proposiciones).

El Libro 8 otorga un papel central a la función derivada como razón de cambio, concretamente enfatiza la función derivada como función de velocidad. La secuenciación de las unidades del libro esta descrita por la relación definición-ejemplo-problemas, es decir, introduce conceptos, definiciones, proposiciones, reglas generales, etc., (intensivos) y posteriormente aplica dichos objetos matemáticos a la solución de situaciones particulares (extensivos). Una característica novedosa del libro es el uso de ostensivos “dinámicos”, los cuales se obtienen mediante calculadoras graficadoras o softwares como el winplot. Sin embargo hay que señalar que las potencialidades del libro se pierden debido a que enfatiza la “enseñanza” de los conocimientos matemáticos por repetición, puesto que plantea después de cada concepto o proposición introducido, un bloque de entre 12 y 20 ejercicios en los que se requieren aplicar dichos conceptos o proposiciones.

4.3.2.2. Idoneidad de los significados de la derivada pretendidos en los textos

Las Tablas 4.4 y 4.5 presentan, a manera de ejemplo, un resumen del análisis de la idoneidad de los significados pretendidos en los libros 1 y 7, mediante el empleo de los criterios que hemos planteado en el apartado 4.2.3 de este capítulo. Esto ilustra el tipo de metodología que aquí se propone para el análisis tanto del plan de estudios como de los libros de texto sobre cálculo diferencial. De manera análoga se pueden utilizar las tablas, que operativizan los criterios propuestos, para valorar la idoneidad sobre los significados que se pretenden en los otros libros que hemos analizado en el apartado anterior.

Tabla 4.4. Campos de problemas y representaciones activadas en dichos campos de los libros 1 y 7

Campo de Problemas (CP)	Previas	Previas	Representaciones para *f(x)* y *f'(x)* Emergentes: $f(x)$ Verbal	$f(x)$ Gráfica	$f(x)$ Simbólica	$f(x)$ Tabular	$f'(x)$ Verbal	$f'(x)$ Gráfica	$f'(x)$ Simbólica	$f'(x)$ Tabular
CP1: Sobre Tangentes	$f(x)$	Verbal								
		Gráfica	1,7				1			
		Simbólica	7						**1,7**	
		Tabular	7							
	$f'(x)$	Verbal								
		Gráfica								
		Simbólica								
		Tabular								
CP2: Razón instantánea de cambio	$f(x)$	Verbal								
		Gráfica								
		Simbólica							1	
		Tabular								
	$f'(x)$	Verbal								
		Gráfica								
		Simbólica								
		Tabular								
CP3: Tasa instantánea de variación (limite del cociente de incrementos).	$f(x)$	Verbal								
		Gráfica					1			
		Simbólica		1			1	1	1	
		Tabular								
	$f'(x)$	Verbal								
		Gráfica								
		Simbólica								
		Tabular								
CP4: Aplicaciones de la derivada (Máximos y Mínimos, análisis de gráficas de funciones, …)	$f(x)$	Verbal	7							
		Gráfica	7					1		
		Simbólica	7	1,7			1,7	1,7		
		Tabular	7							
	$f'(x)$	Verbal								
		Gráfica								
		Simbólica								
		Tabular								
CP5: Cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación	$f(x)$	Verbal								
		Gráfica								
		Simbólica	7	1,7	1,7			1,7	1,7	
		Tabular								
	$f'(x)$	Verbal								
		Gráfica								
		Simbólica								
		Tabular								

La Tabla 4.4 muestra el tipo de problemas contemplados en los libros de texto así como las representaciones que se activan tanto en su planteamiento como en su solución. Así, por ejemplo, la celda sombreada en gris que contiene el código **1,7**, indica que en los libros 1 y 7 se contemplan problemas sobre el cálculo de tangentes en los que se requiere que el estudiante obtenga, a partir de la expresión simbólica de la función, una expresión simbólica para la derivada de dicha función.

De esta forma, se aprecia como las entradas en la Tabla 4.4 están distribuidas en tan sólo algunas casillas. Si bien es cierto que los libros estudiados proponen varios sistemas de representación también lo es que el vínculo entre ellos, la función y su derivada están escasamente usados en ambos textos. Se reconoce la dificultad de diseñar actividades matemáticas que, en conjunto, utilicen todas las posibles relaciones exhibidas en la tabla; el énfasis en tan sólo algunas puede afectar la atribución de significados, olvidando algunos y reforzando otros. Reconocer tales énfasis es importante en tanto que:

- La institución escolar puede proponer un cubrimiento holístico de significados y de formas de representación.
- El maestro puede tomar conciencia de la distribución no homogénea de significados y diseñar actividades matemáticas que resalten algunos vínculos.
- Los estudiantes tendrán acceso a una oferta más amplia de significados, modos de representación y vínculos entre ellos que puede ayudar a configurar una visión un poco más holística del tema bajo estudio.

Por su parte, en la Tabla 4.5, se aprecia el énfasis en el significado parcial de la “derivada como límite” (Figura 3.11, Capítulo 3) en cinco campos de problemas: CP1, CP2, CP3, CP4 y CP5. Tal énfasis no es sorprendente en tanto que en la sección 3 se indicó cómo las configuraciones primarias han dado paso a la configuración CE9, que es mayoritariamente usada en los cursos de cálculo. El significado de la derivada manifestado en esta última configuración se fundamenta en el uso del límite del cociente de incrementos.

Tabla 4.5. Significados parciales de la derivada pretendidos en los libros 1 y 7

Significados parciales	Campos de problemas				
	CP1	**CP2**	**CP3**	**CP4**	**CP5**
CE1: Trazo de tangentes en la matemática Griega					
CE2: Problemas sobre variación en la edad media					
CE3: Cálculo de subtangentes y tangentes con el álgebra					
CE4: Trazo de tangentes mediante consideraciones cinemáticas					
CE5: Cálculo de máximos y mínimos mediante la idea intuitiva de límite					
CE6: Cálculo de tangentes y subtangentes mediante métodos infinitesimales					
CE7: Cálculo de fluxiones					
CE8: Cálculo de diferencias					
CE9: Derivada como límite	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7

4.3.3. Significado de la derivada pretendido en el currículo de bachillerato

El análisis de la dupla <Plan de Estudios, Libros de Texto>, de cálculo diferencial, ha permitido identificar el significado de la derivada pretendido actualmente en el currículo de bachillerato mexicano. Por un lado, la organización que se hace en los Planes de Estudio (Tablas 4.1 y 4.2) de los temas planificados para la enseñanza del cálculo diferencial, evidencia que independientemente del contexto o de los sistemas de prácticas con los que se introduce la derivada, el objeto límite juega en la actualidad un papel fundamental para su introducción y definición en el bachillerato. Como vimos en la sección 4.3.1, la propuesta de la Reforma Integral (Tabla 4.1), acentúa la interpretación de la derivada como razón de cambio (Bloque 3), mientras que la propuesta curricular de la UADY, resalta su interpretación geométrica (Tabla 4.2, Unidad II). Sin embargo, ambas propuestas recurren a la noción de límite, para definir local y globalmente la derivada.

Así mismo, tanto el Plan de Estudios de cálculo diferencial propuesto por la UADY como el propuesto por la Reforma Integral, sugieren una serie de textos (Tabla 4.3) que, en teoría, se adaptan a los propósitos educativos institucionales. Hemos analizado de manera profunda para este estudio, una muestra de 6 libros de texto de cálculo diferencial (3 por cada Plan de Estudios), de los cuales se ha presentado el resumen de análisis, mediante el uso de las tablas propuestas que refieren a los criterios aquí planteados, de dos de ellos (uno de cada Plan de Estudios). Como se pudo apreciar en el apartado 4.3.2.1, tanto los libros 1 y 7, como los otros cuatro aquí analizados (Tabla 4.3), consideran como conocimientos previos a la introducción de la derivada: funciones, continuidad y, fundamentalmente, la noción de límite.

En el análisis se pudo observar que las situaciones/problemas (Figura 4.4), conceptos/definiciones (Figuras 4.1 y 4.3), proposiciones (Figura 4.2), procedimientos y argumentos que se activan en los textos, independientemente del contexto de uso de la derivada, siempre aludían a un mismo significado: *la derivada como límite del cociente de incrementos* (Tabla 4.5). Esto se puede distinguir, por ejemplo, en la primera definición que plantea el libro 7 a partir de una situación sobre velocidades (Figura 4.1).

Conforme los valores de *t* se aproximan cada vez más a 3 los valores de $\bar{v}$ se aproximan cada vez más a 29.4 m/s, esto es:

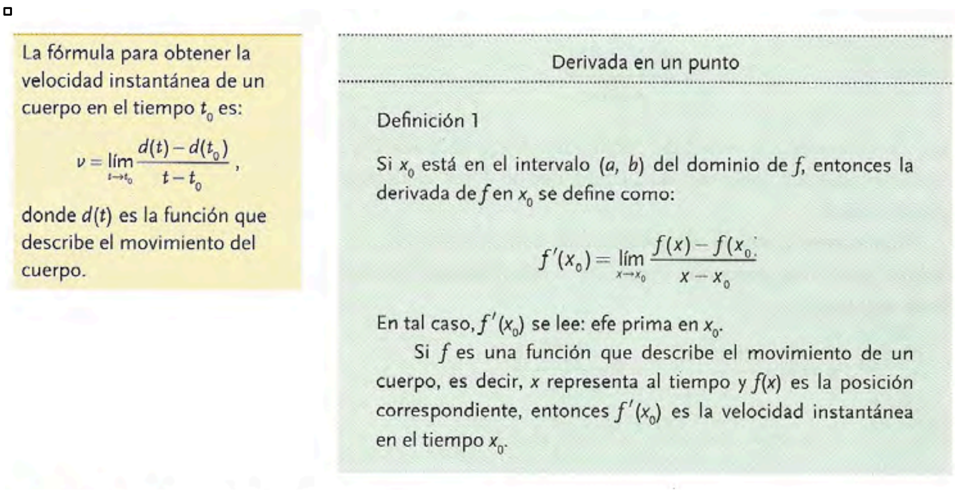
$$v = \lim_{t=a} \bar{v}$$

La velocidad instantánea v en $t=a$ de un objeto es el límite de la velocidad promedio $\bar{v}$ del objeto cuando t se aproxima o tiende a a.

Figura 4.1. Primera aproximación a la definición de la derivada en un punto en el contexto de la velocidad instantánea. Libro 7

INTERPRETACIÓN DE LA DERIVADA	Si la función $y = f(x)$ es derivable en x, su derivada $$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$ denota a la vez 1. La pendiente de la gráfica de f en x. 2. La razón instantánea de cambio de y con respecto a x.

Figura 4.2. Proposición posterior a la definición de la figura anterior. Libro 7


La fórmula para obtener la velocidad instantánea de un cuerpo en el tiempo t_0 es:

$$v = \lim_{t \to t_0} \frac{d(t) - d(t_0)}{t - t_0},$$

donde $d(t)$ es la función que describe el movimiento del cuerpo.

Derivada en un punto

Definición 1

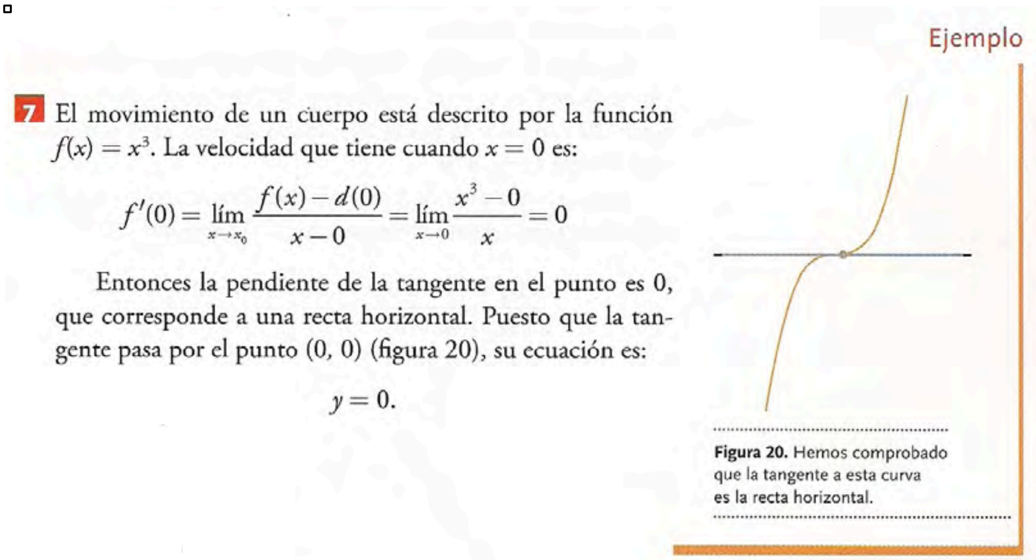
Si x_0 está en el intervalo (a, b) del dominio de f, entonces la derivada de f en x_0 se define como:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

En tal caso, $f'(x_0)$ se lee: efe prima en x_0.

Si f es una función que describe el movimiento de un cuerpo, es decir, x representa al tiempo y $f(x)$ es la posición correspondiente, entonces $f'(x_0)$ es la velocidad instantánea en el tiempo x_0.

Figura 4.3. Primera definición de la derivada. Libro 1



Ejemplo

7 El movimiento de un cuerpo está descrito por la función $f(x) = x^3$. La velocidad que tiene cuando $x = 0$ es:

$$f'(0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - d(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 0}{x} = 0$$

Entonces la pendiente de la tangente en el punto es 0, que corresponde a una recta horizontal. Puesto que la tangente pasa por el punto (0, 0) (figura 20), su ecuación es:

$$y = 0.$$

Figura 20. Hemos comprobado que la tangente a esta curva es la recta horizontal.

Figura 4.4. Ejemplo del cálculo de la "velocidad instantánea". Libro 1

El análisis realizado de los Planes de Estudio y los libros de texto de cálculo diferencial de nivel bachillerato, revela que en la actualidad el significado de la derivada pretendido en el currículo de bachillerato mexicano es: *la derivada como límite del cociente de incrementos.* El análisis nos ha permitido contrastar el significado de la derivada pretendido en el currículo de bachillerato (Figura 4.5) frente al significado holístico de la derivada (Figura 3.11).

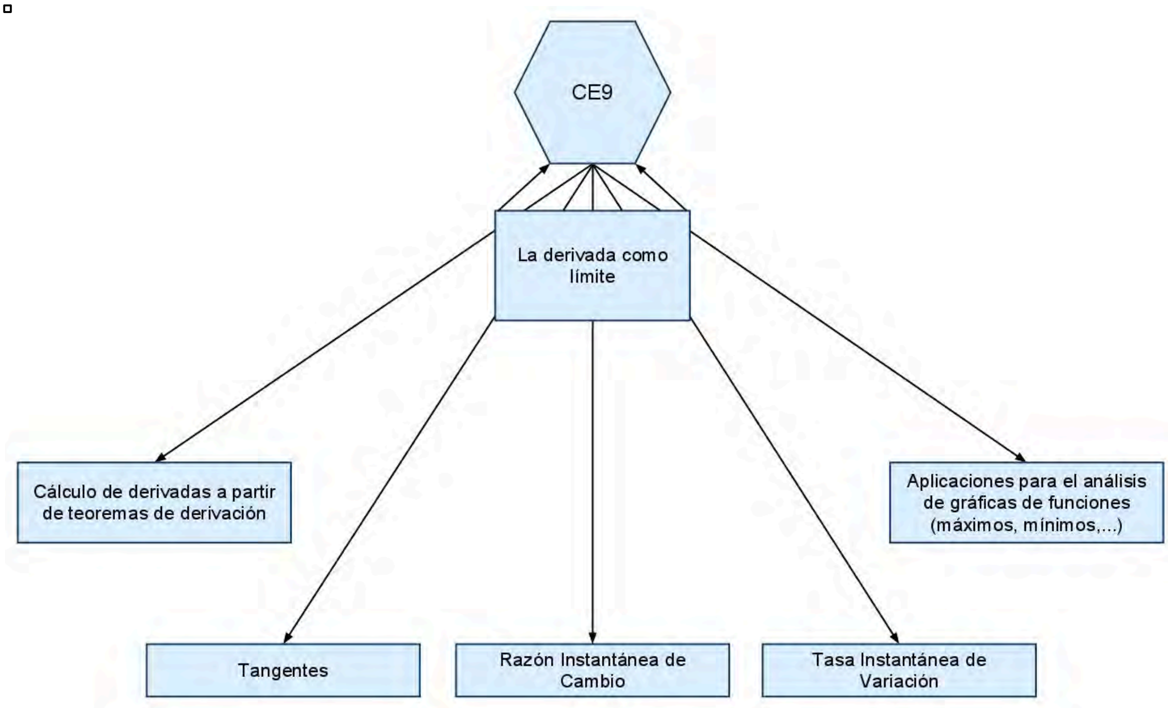


Figura 4.5. Significado de la derivada pretendido en el currículo actual de bachillerato y contextos de uso

Se evidencia que pese a las recomendaciones realizadas desde el campo de investigación en didáctica del cálculo, la configuración que se activa para la resolución de problemas sobre derivadas en el proceso de enseñanza de dicho objeto es la CE9 (Figura 4.1). Hay que señalar que, como se vio en la sección 3.11, del Capítulo 3 la configuración CE9 surge por la necesidad de fundamentar con rigor, o bien, de manera formal, el cálculo diferencial establecido sobre los trabajos de Newton y Leibniz. Tal formalización no representa una necesidad primordial para los estudiantes que se enfrentan por primera vez con las nociones del cálculo diferencial. Orton (1983) ya señalaba que una aproximación inicial a los conceptos del cálculo debería ser informal.

Los ejemplos, ejercicios y problemas propuestos en los textos, requieren mayoritariamente de la activación de representaciones simbólicas y gráficas. Usualmente se parte o bien de la expresión simbólica de la función $y = f(x)$ para dar la expresión simbólica y/o gráfica de la primera y segunda derivada, o bien, a partir de la representación gráfica y tabular de la función se piden representaciones simbólicas o descripciones verbales para la primera y segunda derivada (Tabla 4.4). La exploración de vínculos entre las tres funciones: función, primera derivada y segunda derivada en otros contextos (numérico y gráfico), y con otros ordenes de gestión de las representaciones (a partir de la primera derivada dar información sobre la función de la cual fue obtenida o sobre la segunda derivada, etc.) no son numerosos.

Orton (1983) señala que una aproximación inicial "informal" a los conceptos del cálculo, debe involucrar exploraciones numéricas y gráficas. Por su parte Font (1999) considera que las diferentes representaciones de los objetos matemáticos y las traducciones entre ellas son un elemento fundamental para la comprensión y, por tanto, para la enseñanza y aprendizaje de la derivada. Así, de acuerdo con Font, el cálculo de $f'(x)$ a partir de $f(x)$, se puede interpretar como un proceso en el que, a su vez, se han de considerar tres subprocesos: 1) Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f(x)$; 2) El paso de una representación de $f(x)$ a una forma de representación de $f'(x)$; y 3) Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f'(x)$. De esta manera, se aborda el cálculo de la función derivada como un proceso en el que intervienen tres subprocesos, en cada uno de los cuales se pueden utilizar diferentes representaciones (descripciones verbales, simbólicas, gráficas y tabulares). Lo anterior permite la ampliación del "abanico" de técnicas de cálculo de la función derivada, lo cual a su vez favorece trascender el simple cálculo de la derivada mediante límites o mediante el uso de reglas de derivación.

4.4. CONSIDERACIONES FINALES

El estudio de la idoneidad epistémica de los significados sobre la derivada que se pretenden en el currículo de bachillerato, es de sumo interés, puesto que una “adecuación pobre” del significado holístico de la derivada en la enseñanza (Pino-Fan, 2011, Pino-Fan, Godino y Font, 2011) podría obstaculizar tanto la correcta comprensión del objeto por parte de los estudiantes como por parte de los profesores en formación inicial. Sierpinska (1990) señala que, “Comprender el concepto será concebido como el acto de captar su significado. Este acto será probablemente un acto de generalización y síntesis de significados relacionados con elementos particulares de la ‘estructura’ del objeto (la estructura es la red de sentidos de las sentencias consideradas). Estos significados particulares tienen que ser captados en actos de comprensión” (p. 27).

Como señalan Godino y Batanero (1994), los significados logrados (aprendidos) por los estudiantes dependen fundamentalmente de los significados institucionales, concretamente, de los significados pretendidos asociados a los sistemas de prácticas planificados para un proceso particular de instrucción, así como de los significados efectivamente implementados en dicha instrucción y de los evaluados.

Además, el profesor, como parte de la institución escolar, debe recurrir, para la elección de los significados pretendidos, a los significados de referencia. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático. La determinación de dicho significado global [u holístico] requiere realizar un estudio histórico-epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos [sistemas de prácticas] de uso donde se pone en juego dicho objeto.

En este sentido diversos investigadores (Tall, 2009; Doorman y van Maanen, 2008) sugieren que la enseñanza de la derivada debería considerar otros métodos que conserven los vínculos con la historia del cálculo diferencial, lo que favorecería que los estudiantes desarrollen el pensamiento matemático, comprendan el significado holístico de un objeto matemático y, en particular, daría sentido a la simbología de Leibniz que prevalece en la actualidad.

En el presente capítulo hemos propuesto criterios o pautas para determinar la idoneidad de los significados de la derivada pretendidos en el currículo de bachillerato. Nuestra hipótesis es que si las instituciones educativas, apoyadas en los desarrollos de las investigaciones en el campo de la Matemática Educativa, logran diseñar un currículo idóneo respecto a los significados de los objetos matemáticos, los profesores de matemáticas podrían lograr procesos de instrucción idóneos.

Cabe señalar que, en nuestro trabajo de investigación, hemos asumido el currículo como la fusión de dos aspectos clave en la enseñanza, por un lado el *Plan de Estudios*, de cálculo diferencial en nuestro caso, y por otro los *libros de texto* que son esenciales para la planeación de los procesos de instrucción. El análisis que hemos realizado evidencia que el enfoque moderno del cálculo diferencial se basa fundamentalmente en el concepto de límite. Así, se hace necesario efectuar investigaciones curriculares que centren su atención en la adecuación de los significados pretendidos respecto del significado holístico de la derivada, y en general, de cualquier tema particular.

Así mismo, se hacen necesarias investigaciones que indaguen sobre, ¿cuál es la diferencia entre el significado pretendido en el currículo de bachillerato y el pretendido en el currículo de los futuros profesores de bachillerato? ¿cómo el significado pretendido en el currículo de los futuros profesores de bachillerato contribuye a que los futuros profesores gestionen de forma eficaz el significado de la derivada en sus estudiantes? Es de interés indagar los conocimientos didáctico-matemáticos de los futuros profesores sobre el objeto derivada, en particular aquellos conocimientos relacionados con las formas de vinculación o asociación que los futuros profesores establecen entre los diversos significados de dicho objeto matemático. Este ultimo será el objeto de estudio a lo largo de los capítulos que siguen a continuación.

CAPÍTULO 5

Construcción de un Instrumento para Evaluar la Faceta Epistémica del Conocimiento Didáctico-Matemático sobre la Derivada

5.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo presentamos el proceso que seguimos para la construcción de un instrumento que permite evaluar aspectos parciales, pero relevantes, del *conocimiento didáctico-matemático* (CDM) de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada. Primeramente se describe y discute el diseño y aplicación de la versión piloto del instrumento. Con base en los resultados obtenidos de la aplicación piloto y de la valoración emitida por expertos en didáctica del cálculo diferencial, se presenta y describe la versión definitiva del instrumento.

5.2. OBJETIVOS DEL INSTRUMENTO

Debido a la amplitud y la dificultad que conllevaría explorar cada una de las facetas y componentes del conocimiento didáctico-matemático (CDM) de los futuros profesores de bachillerato sobre el objeto derivada, nos propusimos realizar una primera aproximación a dicho conocimiento mediante la exploración de una de las facetas clave en el CDM: *la faceta epistémica*. Así, el instrumento que diseñamos y aplicamos se centra, fundamentalmente, en la evaluación de aspectos parciales de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático (CDM) de futuros profesores de bachillerato sobre el objeto derivada. Dicha faceta incluye, en congruencia con el modelo de Ball y colaboradores (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Ball y Schilling, 2008) tres tipos de conocimiento: *conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido* y *conocimiento ampliado del contenido.*

5.3. CONSTRUCCIÓN DE LA VERSIÓN PILOTO DEL INSTRUMENTO *CDM-DERIVADA*

Como parte del proceso de diseño del instrumento, creamos, primeramente, un banco de problemas mediante la recopilación de aquellos que han sido estudiados en las diversas investigaciones que se tienen en el campo de investigación en didáctica del cálculo. A partir del banco de tareas elaborado, elegimos aquellas que cumplieran, en congruencia con nuestro modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM) presentado en el Capítulo 3, con tres aspectos clave de la faceta epistémica: 1) globalidad de significados del objeto derivada; 2) diversidad de representaciones; y 3) tipo de componente de la faceta epistémica que se evalúa, es decir, conocimiento común, conocimiento especializado y conocimiento ampliado. En el siguiente apartado describimos de manera más detallada los tres criterios antes mencionados.

5.3.1. Criterios para la selección de las tareas

La primera versión del instrumento (versión piloto), que hemos denominado *Cuestionario sobre Conocimiento Didáctico-Matemático de la Derivada (Cuestionario CDM-Derivada)*, constó de ocho tareas y fue diseñado con base en el modelo para la evaluación y desarrollo del conocimiento didáctico-matemático propuesto por Godino (2009). Como vimos en el Capítulo 2, dicho modelo propone pautas para categorizar y analizar los conocimientos didáctico-matemáticos del profesor mediante la aplicación del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007).

En el proceso de construcción del cuestionario se consideraron tres criterios para la selección de las tareas que lo conforman. El primer criterio considera que las tareas deben proporcionar información sobre el grado de ajuste del significado personal de los futuros profesores respecto del significado global u holístico del objeto derivada (Pino-Fan, Godino y Font, 2011). Para lograrlo, se incluyeron ítems que activan distintos sentidos para el objeto derivada (pendiente de la recta tangente, razón instantánea de cambio y tasa instantánea de variación).

El segundo criterio fue que los ítems seleccionados respondan a los diferentes tipos de representaciones activadas en los tres subprocesos, que según Font (1999), intervienen en el cálculo de la función derivada:

1. Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f(x)$
2. El paso de una representación de $f(x)$ a una forma de representación de $f'(x)$
3. Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f'(x)$

En este sentido, las tareas incluidas en el cuestionario ponen en juego los diferentes tipos de representaciones que intervienen en estos tres subprocesos: descripción verbal, gráfica, fórmula (simbólica) y tabular; tanto para la función como para su derivada.

El tercer criterio, que se refiere al conocimiento didáctico-matemático de los futuros profesores, considera la inclusión de tres tipos de tareas: (1) aquellas que piden poner en juego el *conocimiento común* (resolver la tarea matemática propia de las matemáticas de bachillerato); (2) aquellas que requieren del *conocimiento especializado* (usar distintas representaciones, distintos significados parciales de un objeto matemático, resolver el problema mediante diversos procedimientos, dar diversas argumentaciones válidas, identificar los conocimientos puestos en juego durante la resolución de una tarea matemática, etc.); y (3) aquellas que requieren del *conocimiento ampliado* (generalizar tareas sobre conocimiento común o especializado y/o realizar conexiones con objetos matemáticos más avanzados en el currículo).

De esta forma, y dada la complejidad que tiene el planteamiento de una tarea que satisfaga o evalúe los tres criterios descritos anteriormente, las tareas fueron seleccionadas de tal manera que, a lo largo del instrumento *CDM-Derivada*, las tareas se complementaban para evaluar dichos criterios.

En el siguiente apartado se presentan cada una de las tareas que integran la versión piloto del *Cuestionario CDM-Derivada*, y el análisis de los aspectos que cada una de ellas evalúa.

5.3.2. Las tareas del *Cuestionario CDM-Derivada*: análisis del contenido

A continuación presentamos, para cada una de las tareas incluidas en la versión piloto del instrumento *CDM-Derivada*, el análisis detallado del contenido que evalúan. Para realizar dicho análisis presentamos para cada tarea, primeramente, una descripción "general" de los aspectos que evalúan, atendiendo a los tres criterios mencionados en el apartado 5.3.1. Luego presentamos de manera detallada el análisis del contenido evaluado por cada una de las tareas en dos niveles. El primer nivel refiere al *contenido "ontosemiótico-epistémico"*, el cual se obtiene mediante un análisis epistémico exhaustivo en el cual se hace uso de las herramientas teóricas que proporciona el Enfoque Ontosemiótico, presentadas en el Capítulo 2, concretamente, los tipos de objetos primarios (elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades, procedimientos y argumentos), sus significados y los procesos involucrados en las prácticas matemáticas. El segundo nivel refiere al "*contenido curricular*", que son los conocimientos que evalúan las tarea y que pueden ser medidos con los conocimientos sobre derivadas pretendidos en una institución escolar, es decir, aquellos conocimientos contemplados en un currículo de matemáticas donde se incluya la derivada de una variable real. Así, podría decirse que este contenido es más "superficial" o "menos profundo" respecto del contenido ontosemiótico-epistémico.

Para la realización del análisis del contenido (ontosemiótico-epistémico y curricular) proponemos algunas soluciones plausibles de cada una de las tareas.

5.3.2.1. Tarea Uno: Significados de la derivada

La tarea 1 (Figura 5.1), es una pregunta clásica que se ha realizado en diversas investigaciones (Badillo, 2003; Hähkiöniemi, 2006; Habre y Abboud, 2006; Bingolbali y Monaghan, 2008, Badillo, Azcárate y Font, 2011), para explorar los significados que conocen los estudiantes sobre la derivada. Al tratarse de una pregunta de carácter "global", se espera que los futuros profesores proporcionen "listados" de los posibles significados de la derivada. Por tal motivo, esta primera tarea del cuestionario explora el conocimiento común, de los futuros profesores, relacionado con los significados de la derivada.

Tarea 1 ¿Qué significado tiene para ti la derivada?

Figura 5.1. Tarea 1 del *Cuestionario CDM-Derivada*

5.3.2.1.1. Solución plausible de la tarea uno

Una posible solución a la tarea uno es la siguiente:

- La derivada de una función o función derivada tiene diversos significados entre los cuales podemos destacar:
  - ✓ Pendiente de la recta tangente a una función determinada.
  - ✓ La variación instantánea de una magnitud escalar respecto de otra (por ejemplo, la variación instantánea de la distancia respecto al tiempo da como resultado la velocidad).
  - ✓ El límite del cociente de incrementos.

5.3.2.1.2. Contenido ontosemiótico: análisis epistémico

Debido a la "generalidad" de la tarea (tanto la cuestión como el tipo de solución esperada), no realizamos para ésta el desglose operativo de las configuraciones de objetos y procesos del análisis epistémico. Basta con señalar que tanto los elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones y argumentos subyacentes a las posibles soluciones de la tarea son de carácter "verbal", descripciones verbales en las que el profesor en formación inicial no requiere hacer conexiones entre los distintos significados de la derivada, bastándole con "recordar" los usos y significado que ha dado a dicho objeto a lo largo de su formación matemática y didáctica para proporcionar su respuesta.

5.3.2.1.3. Contenido curricular

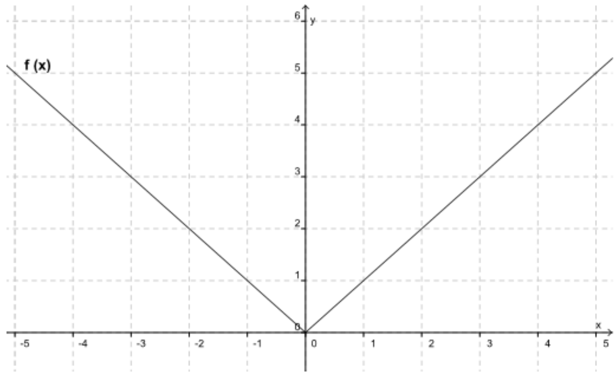
El contenido curricular que se evalúa en la tarea es el objeto derivada y sus diversas acepciones.

5.3.2.2. Tarea Dos: Análisis de la derivada de la función valor absoluto

La tarea 2 (Figura 5.2), que ha sido objeto de diversas investigaciones (Tsamir, Rasslan, y Dreyfus, 2006; Santi, 2011), indaga sobre los tres tipos de conocimiento que componen la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada: 1) conocimiento común (ítem a), en tanto que el futuro profesor debe solamente resolver el ítem sin necesidad de utilizar diversas representaciones o argumentaciones; 2) conocimiento especializado en sus dos niveles, por un lado los ítems b) y c) demandan al profesor, además de resolver los ítems, el uso de representaciones (gráficas, simbólicas y verbales) y argumentaciones válidas que justifiquen sus procedimientos, y por otro, el ítem e) exige al futuro profesor la identificación de conocimientos (configuraciones de objetos y sus significados) involucrados en la resolución de la tarea; y 3) conocimiento ampliado (ítem d), puesto que exige a los estudiantes para profesores generalizar la tarea inicial sobre la derivabilidad de la función valor absoluto en $x = 0$, a partir de justificaciones válidas para la proposición “la grafica de una función derivable no puede tener picos” mediante la definición de la derivada como tasa instantánea de variación (límite del cociente de incrementos). Las acepciones de la derivada como pendiente de la recta tangente y tasa instantánea de variación, están asociadas a esta tarea.

Tarea 2

Examina la función $f(x) = |x|$ y su gráfica.



a) ¿Para qué valores de *x* es derivable$f(x)$?
b) Si es posible, calcula $f'(2)$ y dibuja una representación gráfica de tu solución. Si no es posible, explica por qué.
c) Si es posible, calcula $f'(0)$ y dibuja una representación gráfica de tu solución. Si no es posible, explica por qué.
d) Con base en la definición de derivada, justifica por qué la gráfica de una función derivable no puede tener “picos” (esquinas, ángulos).
e) ¿Qué conocimientos se ponen en juego al resolver los apartados a), b), c) y d) de esta tarea?

Figura 5.2. Tarea 2 del *Cuestionario CDM-Derivada*

5.3.2.2.1. Soluciones plausibles de los apartados de la tarea dos

A continuación presentamos, para cada uno de los apartados de la tarea dos, una posible solución. Otras soluciones plausibles pueden encontrarse en el Anexo 1.

a) Para todos los números reales excepto para $x = 0$ dado que en este valor la gráfica de la función tiene forma de pico.

b) Teniendo en cuenta que (1) la derivada en un punto se puede definir como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función, (2) que en $x = 2$ la recta tangente a la gráfica de la función es la diagonal del primer cuadrante, (3) que la pendiente es el cociente entre la variación vertical y la horizontal, se divide la variación vertical entre dos puntos de esta diagonal entre la variación horizontal y se obtiene $f'(2) = 1$.

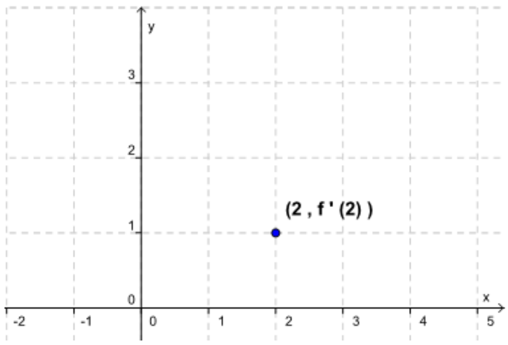


Figura 5.2.1. Representación cartesiana de $f'(2) = 1$

c) Por el punto $x = 0$ no se puede trazar la tangente. Considerando que, en el contexto de la geometría sintética, una tangente a una curva es una recta que tiene un solo punto de contacto con ella, se pueden trazar infinitas tangentes a la función. Si interpretando la derivada como la pendiente de la recta tangente a una curva, puesto que no existe una única tangente, debemos concluir que no existe derivada en $x = 0$.

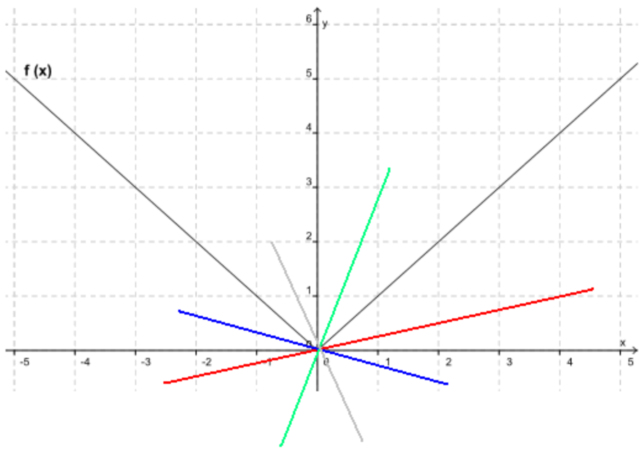


Figura 5.2.2. Solución "empírica" del apartado c) de la tarea dos

d) Consideremos la definición de la derivada: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Para que el límite anterior exista, los límites laterales $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ y $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, deben de existir y coincidir. Ahora bien, un pico representa un "salto brusco" en la pendiente de la recta tangente. Dicha pendiente se aproxima con el cociente $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para valores de h muy pequeños. Si el límite bilateral que define a $f'(x)$ existe, significa que el "salto" es inexistente. Dicho de otro modo, para que $f'(x)$ exista, la función $f(x)$ no puede tener "picos".

e) En la solución de la tarea dos, se pueden identificar el uso de los siguientes conocimientos:
   - ✓ Funciones y sus propiedades.
   - ✓ Continuidad de funciones.
   - ✓ Derivada en un punto.
   - ✓ Función derivada (como pendiente de la recta tangente y como límite del cociente de incrementos).
   - ✓ Derivabilidad de funciones.
   - ✓ Relación entre continuidad y derivabilidad.
   - ✓ Uso de diversas representaciones tanto para la función como para la función derivada.
   - ✓ Derivadas laterales.
   - ✓ Procedimientos y argumentos "intuitivos" y formales para la solución de cada uno de los apartados de la tarea.
   - ✓ …

5.3.2.2.2. Contenido ontosemiótico: análisis epistémico

A continuación presentamos el análisis epistémico mediante la descripción de los procesos, objetos primarios (elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) y sus significados inmersos tanto en el planteamiento como en la solución de la tarea. Cabe señalar que para la realización de este análisis se consideraron todas las posibles soluciones, de los apartados de esta tarea, contempladas en el Anexo 1.

− Proceso de Representación ↔ Significación −

Se identifican, mediante un proceso de descomposición del texto en unidades, diversos elementos lingüísticos y conceptos, previos y emergentes, tanto en el planteamiento como en la solución esperada de la tarea dos. A continuación se detallan los elementos lingüísticos y conceptos identificados, así como sus significados.

Elementos lingüísticos

Entre los elementos lingüísticos previos que identificamos se encuentran:

- La expresión $f(x) = |x|$, la cual refiere a la representación algebraica de la función “valor absoluto de x”.
- La representación gráfica (ver Figura 5.2) de la función “valor absoluto de x”. Ilustra de manera gráfica el punto para el cual la derivada no está definida.
- La expresión, “Examina la función…y su gráfica”. Sentencia que tiene por objetivo pedir al profesor en formación inicial que estudie de manera detallada la función “valor absoluto de *x*” y considere sus propiedades (continuidad, derivabilidad, etc.).
- La expresión, “Para qué valores de *x* es derivable $f(x)$” (apartado a). Sentencia que solicita se proporcione el domino de la función derivada de la función “valor absoluto de *x*”.
- La expresión $f'(2)$. Representación simbólica de la imagen o valor de la función derivada en el punto $x = 2$.
- La expresión, “Si es posible, calcula $f'(2)$ y dibuja una representación gráfica de tu solución” (apartado b). Sentencia que solicita un procedimiento de cálculo de la derivada de la función en $x = 2$, y la representación cartesiana del punto $\left(2, f'(2)\right)$.
- La expresión $f'(0)$. Representación simbólica de la imagen o valor de la función derivada en el punto $x = 0$.
- La expresión, “Si es posible, calcula $f'(0)\ldots$ si no es posible, explica por qué” (apartado c). Sentencia que solicita un procedimiento de cálculo de la derivada de la función en $x = 0$, así como la argumentación de que $f'(0)$ no existe.

Entre los elementos lingüísticos emergentes podemos destacar:

- Expresiones tales como “$\mathbb{R} - \{0\}$”, “$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$”, etc. Representaciones simbólicas o notacionales que refieren al dominio de la función derivada: “todos los reales excepto para $x = 0$”.

- La expresión $f'(2) = 1$. Representación simbólica o notacional que hace referencia a la proposición: La imagen de la función derivada en el punto $x = 2$ es uno (solución del apartado b).
- La gráfica cartesiana del punto $\left(2, f'(2)\right)$ (Figura 5.2.1), que refiere a la imagen o valor de la función derivada en el punto $x = 2$.

- La representación gráfica de la derivada de la función "valor absoluto de *x*" (ver gráfica en la solución del apartado c) de la tarea 2 en el Anexo 1). Ilustra de manera gráfica que la función derivada en $x = 0$ no está definida.

Conceptos

Entre los conceptos previos requeridos para la solución de la tarea se encuentran:

- Valor absoluto. El valor absoluto de un número real es el valor numérico de dicho número sin tener en cuenta el signo. Formalmente se define como $|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$ donde $x \in \mathbb{R}$.
- Función valor absoluto. Definida por el criterio o regla de correspondencia $f(x) = |x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$ donde $x \in \mathbb{R}$.
- Dominio (variable independiente). Valores de x para los cuales la función $f(x) = |x|$ y su correspondiente $f'(x)$ están definidas.
- Imagen (variable dependiente). Valor $y \in \mathbb{R}$ que se le asigna a cada una de las $x \in \mathbb{R}$ del dominio de la función por medio de una regla de correspondencia. En el caso de $f(x)$ la regla de correspondencia es $|x|$.
- Función derivada. Definida formalmente como $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.
- Derivada en un punto. Derivada en $x = 2$ y $x = 0$, entendida como un límite y como la pendiente de la recta tangente a la función en un punto.
- Continuidad. Una función f es continua en c sí y sólo sí se cumplen las 3 condiciones siguientes: i) $f(c)$ está definida, ii) $\lim_{x \to c} f(x)$ existe, y iii) $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Como conceptos emergentes podemos destacar:

- Función derivada de la función valor absoluto. Función definida por la regla de correspondencia $f'(x) = \begin{cases} 1 & si\ x > 0 \\ -1 & si\ x < 0 \end{cases}$
- Límite funcional. Valor L al que se aproxima $f(x)$ conforme x se aproxima a un cierto valor $a \in \mathbb{R}$.
- Derivadas laterales. Es el límite del cociente de incrementos cuando h se aproxima a cero con valores negativos (derivada lateral por la izquierda) o con valores positivos (derivada lateral por la derecha.

− *Proceso de Composición* −

A partir de los elementos lingüísticos representacionales y los conceptos/definiciones identificados en el proceso anterior, se reconoce el uso de proposiciones/propiedades, procedimientos y argumentos. A continuación se detallan, respectivamente, las propiedades, procedimientos y argumentos, identificados en las soluciones plausibles de la tarea.

Proposiciones

Las proposiciones previas que identificamos fueron las siguientes:

- PP1: Intuitivamente una función es continua en un valor c si para valores del dominio muy cercanos a c la función "sufre pequeñas variaciones". Se usa para reconocer que la función valor absoluto es continua, teniendo en cuenta su gráfica.
- PP2: La función es derivable en un punto del dominio x_0 si las derivadas laterales existen y son iguales. Esta proposición es usada para reconocer la derivabilidad o no derivabilidad de la función valor absoluto en $x = 0$ y $x = 2$.
- PP3: Una función derivable es continua pero una función continua no es necesariamente derivable. Proposición utilizada para reconocer la no derivabilidad de la función valor absoluto en $x = 0$.

Las proposiciones emergentes son:

- PP4: $f'(x) = \begin{cases} 1 & si\, x > 0 \\ -1 & si\, x < 0 \end{cases}$. Su correcta interpretación remitiría a la solución de los apartados a), b) y c) de la tarea.
- PP5: $f'(2) = 1$. Solución del apartado b) de la tarea.
- PP6: $f'(0)$ no existe. Solución del apartado c) de la tarea.

Procedimientos

Como procedimientos, podemos señalar los siguientes:

- P1: Procedimientos empíricos para la determinación de cada uno de los apartados de la tarea, por ejemplo, el trazado de varias rectas tangentes a la función en el punto $x = 0$ (Figura 5.2.2). Ayudan a resolver el problema de manera empírica a partir de la representación gráfica de la función “valor absoluto”.
- P2: Cálculo de la derivada en un punto mediante su definición formal por límites. Procedimiento formal que se justifica mediante el uso de la definición formal de la derivada y la definición de la función valor absoluto. Procedimiento con el que se da solución al apartado b) de la tarea.
- P3: Procedimientos que involucran, fundamentalmente, la proposición PP2. Comprobación formal de la existencia de la derivada en un punto mediante el cálculo de los límites laterales que definen las derivadas laterales. Con este procedimiento se da solución al apartado c) de la tarea.

Argumentos

- A1: “La derivada en el intervalo $(-\infty, 0)$ es -1 ya que es la pendiente de la recta $y = -x$”.
- A2: “La derivada en el intervalo $(0, \infty)$ es 1 ya que es la pendiente de la recta $y = x$”.
- A3: “La derivada en el punto $x = 0$ no está definida ya que la gráfica presenta un pico” (Figura 5.2).
- A4: “La función no es derivable en $x = 0$ ya que en dicho punto podemos trazar infinitas rectas tangentes a la función….” (Figura 5.2.2).

Los argumentos A1, A2, A3 y A4, refieren a justificaciones *gráficas-verbales* (visuales) a partir de la representación gráfica de la función “valor absoluto” y entendiendo la derivada como la pendiente de la recta tangente a la gráfica en un punto determinado.

- A5: Argumento formal, usando la definición formal de la derivada como el límite de cociente de incrementos, para calcular la derivada en el punto $x = 2$ que es la solución al apartado b).
- A6: “Dado que las derivadas laterales son diferentes, la función $f(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$”. Argumento formal mediante el cálculo de los límites laterales que definen las derivadas laterales. Solución del apartado c) de la tarea.

5.3.2.2.3. Contenido curricular

El contenido curricular que se evalúa con la tarea dos es el siguiente:

- Funciones continuas.
- Derivada en un punto.
- Función derivada (la derivada entendida como pendiente de la recta tangente y como el límite del cociente de incrementos).
- Funciones derivables.
- Relación entre continuidad y derivabilidad.

5.3.2.3. Tarea Tres: Cálculo de la función primitiva

La tarea 3 (Figura 5.3), tomada de Delos Santos (2006), explora el conocimiento ampliado de los futuros profesores, ya que requiere, para su resolución, el uso de objetos matemáticos más avanzados en el currículo de matemáticas del nivel bachillerato, tal como la integral de una función o el teorema fundamental del cálculo. Las representaciones que el estudiante debe manejar para la resolución de la tarea son la simbólica, gráfica y tabular. El conocimiento ampliado evaluado en esta tarea está asociado al significado de la derivada como pendiente de la recta tangente.

Tarea 3

Para una función dada $y = f(x)$, se cumplen los valores de la siguiente tabla:

x	$f'(x)$
0	0
1.0	2
1.5	3
2.0	4
2.5	5

a) Encuentra una expresión para $f(x)$

b) ¿Puedes encontrar una segunda expresión, distinta a la anterior, para $f(x)$? ¿Cuál sería? Justifica la respuesta.

Figura 5.3. Tarea 3 del *Cuestionario CDM-Derivada*

5.3.2.3.1. Soluciones plausibles de los apartados de la tarea tres

A continuación presentamos, para cada uno de los apartados de la tarea tres, una posible solución. Otras soluciones esperadas pueden encontrarse en el Anexo 1.

a) Basándonos en los datos de la tabla, es posible encontrar un patrón de la siguiente forma:

x	$f'(x)$
0	2 (0) = 0
1.0	2 (1) = 2
1.5	2 (1.5) = 3
2.0	2 (2) = 4
2.5	2 (2.5) = 5
:	:
x	2 (*x*) = 2*x*

Por tanto, dado que $f'(x) = 2x$ y sabiendo que para una función $f(x) = x^n$ la derivada está dada por $f'(x) = nx^{n-1}$, entonces una expresión para $f(x)$ sería $f(x) = x^2$.

b) Sí podemos encontrar otra expresión para $f(x)$, distinta a $f(x) = x^2$. Si $f'(x) = 2x$, entonces $f(x) = \int 2x\,dx = x^2 + C$. De esta forma, $f(x)$ puede ser cualquier función de la familia de funciones $f(x) = x^2 + C$, donde $C \in \mathbb{R}$.

5.3.2.3.2. Contenido ontosemiótico: análisis epistémico

A continuación presentamos el análisis epistémico mediante la descripción de los procesos, objetos primarios (elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades,

procedimientos y argumentos) y sus significados, inmersos tanto en el planteamiento como en la solución de la tarea. Cabe señalar que para la realización de este análisis se consideraron todas las posibles soluciones, de los apartados de esta tarea, contempladas en el Anexo 1.

− *Proceso de Representación ↔ Significación* −

Como parte de esta dualidad entre representación y significación hemos identificado diversos elementos lingüísticos y conceptos/definiciones, previos y emergentes, tanto en el planteamiento como en las soluciones esperadas de la tarea tres. A continuación se detallan los lenguajes y conceptos identificados, así como sus significados.

Elementos lingüísticos

Entre los elementos lingüísticos previos que hemos identificado se encuentran:

- La expresión $y = f(x)$. Denota una función indeterminada, en este caso, una función que cumple ciertas condiciones reguladas con la tabla.
- La tabla de valores (Figura 5.3). Función derivada de una función desconocida de la cual se conocen cinco imágenes para los valores de la variable *x* dados en la tabla. Proporciona parejas ordenadas del tipo $(x, f'(x))$.
- La expresión, "encuentra una expresión para $f(x)$". Refiere a la existencia de un procedimiento para hallar una función cuya derivada tenga los valores de la tabla.

Entre los elementos lingüísticos emergentes podemos destacar:

- La representación gráfica de los valores de la tabla (Figura 5.3.1), la cual representa la conversión de la tabla de valores dados de la función derivada, en su gráfica cartesiana correspondiente.

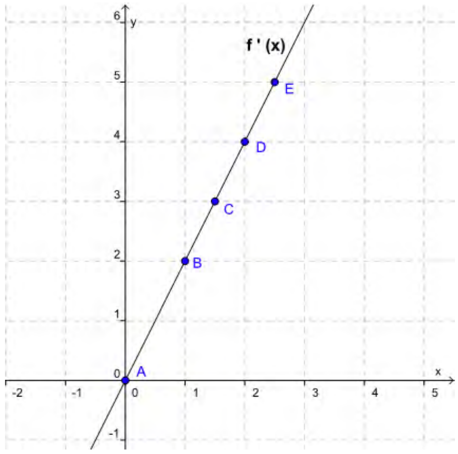


Figura 5.3.1. Representación gráfica de los valores conocidos de la función derivada

- Las expresiones "$y = 2x$" o "$f'(x) = 2x$". Ecuación de la recta que pasa por los 5 puntos alineados en el plano cartesiano y representación simbólica de la función derivada. Refieren a un procedimiento de interpolación lineal, basado en la visualización del gráfico cartesiano.
- La expresión, $f(x) = x^2$. Primitiva (antiderivada) de la función $y = 2x$.

Conceptos

Los conceptos previos, requeridos para la solución de la tarea, que identificamos son:

- Función de variable real desconocida. Función $f(x)$ que se determinará a partir de su función derivada definida parcialmente por cinco puntos.
- Pares ordenados. Originales e imágenes de la función derivada.
- Función derivada de una variable real. Definida parcialmente por cinco puntos cuyas coordenadas se expresan de manera tabular. Los cinco puntos dados se supone que evocan o representan a todo el grafo de la función derivada.

Los conceptos emergentes que identificamos fueron los siguientes:

- Recta. Contiene a los cinco puntos del gráfico cartesiano que representa a la derivada. Se supone una interpolación y extrapolación lineal.
- Pendiente. Variación que existe en el eje y (ordenadas) con respecto al eje x (abscisas) entre dos puntos cualesquiera de la recta que pasa por los 5 puntos de

la tabla. Permite hallar la ecuación de dicha recta mediante la ecuación punto-pendiente ($y = 2x$).

- Integral/Primitiva o antiderivada de una función. Función cuya derivada es $f'(x) = 2x$.
- Familia de funciones. Funciones que se encuentran dentro del conjunto de funciones que cumplen con la forma $f(x) = x^2 + c$, donde $c \in \mathbb{R}$.

− Proceso de Composición −

A partir de los elementos lingüísticos representacionales y los conceptos/definiciones identificados en el proceso anterior, se reconoce el uso de proposiciones/propiedades, procedimientos y argumentos. A continuación se detallan, respectivamente, las propiedades, procedimientos y argumentos, identificados en las soluciones plausibles de la tarea.

<u>*Proposiciones*</u>

Las proposiciones previas que identificamos son:

- PP1: "$y - y_1 = m(x - x_1)$, particularizada en $y = 2x$". Ecuación punto-pendiente, la cual permite encontrar la representación algebraica de la función derivada.
- PP2: Reglas de derivación. Concretamente "la derivada de una función constante es igual a cero", la cual permite determinar que la función buscada es cualquiera de la familia $f(x) = x^2 + c$ donde $c \in \mathbb{R}$.

Así mismo, identificamos las siguientes proposiciones emergentes:

- PP3: La primitiva de $y = 2x$ es $y = x^2$ (Teorema fundamental del cálculo). Se usa para hallar la función requerida una vez hallada su derivada.
- PP4: La función derivada de todas las funciones del tipo $f(x) = x^2 + c$ donde $c \in \mathbb{R}$, es $f'(x) = 2x$. Solución del apartado b) de la tarea.

<u>*Procedimientos*</u>

Identificamos el uso de los siguientes procedimientos en las soluciones plausibles de las tareas:

- P1: Interpolación lineal en el gráfico cartesiano de la función derivada dada para valores particulares (Figura 5.3.1). Esto se usa para hallar la expresión algebraica de la derivada.
- P2: Cálculo de la antiderivada de $y = 2x$. Esto se realiza o bien mediante las reglas de derivación (derivada de la función potencial) o bien mediante las reglas de integración. Este procedimiento origina la respuesta de ambos apartados de la tarea.
- P3: Ensayo y error, probando posibles reglas de correspondencia entre los valores de x y los de $f'(x)$, a partir de los valores dados en la tabla. Este procedimiento es de carácter numérica-técnica, el cual el único variante con respecto a P1, es la búsqueda de un patrón que permita establecer la regla de correspondencia que permite definir la función derivada.
- P4: Procedimientos "formales". Procedimientos de tipo gráfico-técnico o numérico-técnico, el cual varia con respecto a los procedimientos anteriores en que, una vez hallada la representación algebraica de la función derivada (ya sea de manera numérica o gráfica), se hace uso de contenidos más avanzados en el currículo de bachillerato tal como el concepto de integral y el teorema fundamental del cálculo en su forma intuitiva (PP3).

Argumentos

- A1: La expresión algebraica de la función derivada es $y = 2x$ porque visualmente se observa que los cinco puntos dados están alineados de manera rectilínea; se ve que pasa por el origen y su pendiente es 2. Este Argumento establece la validez de la expresión de la función derivada de manera empírica, asumiendo que los cinco puntos dados representan al grafo $\left(x, f'(x)\right)$ de la función derivada.
- A2: La función buscada es $y = x^2$ porque la derivada de esta función es $y = 2x$. Establece la validez de la solución dada para la función $f(x)$ teniendo en cuenta la regla para derivar la función potencial.

5.3.2.3.3. Contenido curricular

Los contenidos curriculares que se evalúan con la tarea tres, son siguientes:

- Funciones cuadráticas. Familia de funciones.
- Función derivada (representación tabular, gráfica y simbólica; en su acepción de pendiente de la recta tangente).
- Teoremas para derivar funciones (Reglas de derivación: para la función constante).
- Antiderivada o Integral.
- Teorema fundamental del cálculo (relación entre la derivada de una función y su antiderivada).

5.3.2.4. Tarea Cuatro: Derivada de la función constante

Por su parte, la tarea 4 (Figura 5.4), explorada en el trabajo de Viholainen (2008), indaga sobre el conocimiento especializado de los futuros profesores, en tanto que requiere para su resolución, del empleo de diversas representaciones (gráfica, descripción verbal, fórmula) y diversas justificaciones para la proposición “la derivada de una función constante siempre es igual a cero”, en las que se pueden movilizar distintas interpretaciones de la derivada: pendiente de la recta tangente, razón instantánea de cambio y tasa instantánea de variación).

Tarea 4

a) Explica, mediante el uso de representaciones gráficas, por qué la derivada de una función constante siempre es igual a cero.
b) Usando la definición formal de la derivada, prueba que la derivada de una función constante es cero.

Figura 5.4. Tarea 4 del *Cuestionario CDM-Derivada*

5.3.2.4.1. Soluciones plausibles de los apartados de la tarea cuatro

A continuación presentamos, para cada uno de los apartados de la tarea cuatro, una posible solución. Otras soluciones esperadas pueden encontrarse en el Anexo 1.

a) Sin pérdida de generalidad, sea $f(x) = C$ con $C \in \mathbb{R}$, una función constante. La siguiente figura muestra su representación gráfica

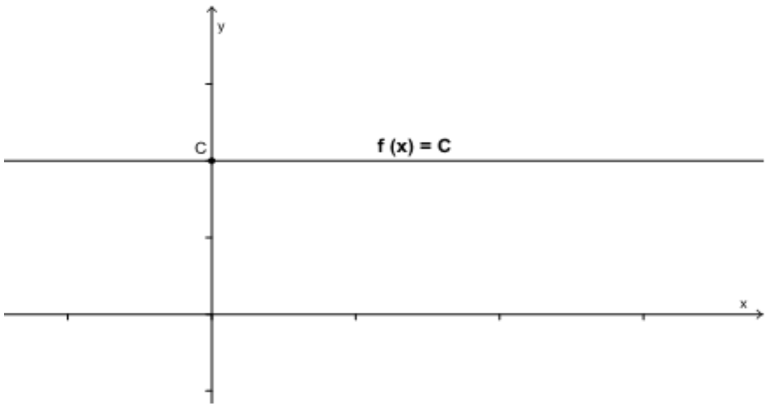


Figura 5.4.1. Representación gráfica de una función constante cualquiera

- ✓ La recta tangente es la que mejor se aproxima a la gráfica en un entorno del punto. En el caso de que la función tenga por gráfica una recta, la recta tangente coincide con la gráfica de la función. En ese caso la recta tangente en cualquier punto será $f(x) = C$ y dado que las funciones constantes siempre tienen como representación gráfica rectas horizontales (rectas paralelas al eje *x*), y ya que la pendiente de una recta se mide a partir de la inclinación que esta presenta con respecto al eje *x*, la pendiente de las rectas paralelas al eje *x* siempre es cero, por tanto $f'(x) = 0$.
- ✓ Si interpretamos la derivada como la razón de cambio de una variable *y* respecto de una variable *x*, y si la función que me describe dicha razón de cambio es constante, entonces esto significa que conforme la variable *x* varía, la variable *y* no varía. Por tanto la razón de cambio de *y* con respecto a *x* siempre es cero.

b) Sea $f(x) = C$ donde $C \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{C - C}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

5.3.2.4.2. Contenido ontosemiótico: análisis epistémico

A continuación presentamos el análisis epistémico mediante la descripción de los procesos, objetos primarios (elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades, procedimientos y argumentos) y sus significados, inmersos tanto en el planteamiento como en la solución de la tarea. Recordamos que para la realización de este análisis se consideraron todas las posibles soluciones, de los apartados de esta tarea, contempladas en el Anexo 1.

− *Proceso de Representación* ↔ *Significación* −

Como parte de esta dualidad entre representación y significación hemos identificado diversos elementos lingüísticos y conceptos/definiciones, previos y emergentes, tanto en el planteamiento como en las posibles soluciones de la tarea cuatro. A continuación se detallan los lenguajes y conceptos identificados, así como sus significados.

Elementos lingüísticos

Los elementos lingüísticos previos que identificamos son:

- La expresión, "Explica, mediante el uso de representaciones gráficas, por qué la derivada de una función constante siempre es igual a cero". Enuncia una propiedad de las derivadas de las funciones constantes y requiere elaborar una justificación gráfica-verbal de dicha propiedad.
- La expresión, "Usando la definición formal de la derivada, prueba que la derivada de una función constante es cero". Sentencia que pretende el uso de un procedimiento para demostrar de manera formal la propiedad enunciada.

Como elementos lingüísticos emergentes identificamos:

- La expresión, $f(x) = C$ con $C \in \mathbb{R}$. Refiere a una representación simbólica de una función constante arbitraria.
- La representación gráfica de la función constante arbitraria (Figura 5.4.1). La cual permite observar el comportamiento de la función derivada para su posterior descripción.
- Las descripciones verbales que dan solución al apartado a) de la tarea. Dichas descripciones refieren a argumentaciones verbales que justifican de forma grafica-verbal la proposición "la derivada de una función constante siempre es igual a cero".
- La simbología utilizada en la solución del apartado b) de la tarea. Esta simbología responde a un procedimiento de demostración formal (usando la definición de derivada como límite) de que la derivada de una función constante es 0.

Conceptos/Definiciones

Para esta tarea, específicamente, encontramos solamente conceptos previos requeridos para su resolución, entre los cuales se encuentran:

- Función constante. Función que toma el mismo valor para cualquier valor de la variable independiente.
- Derivada en un punto. Entendida como la pendiente (0) de las rectas tangentes a la función constante, que para este caso particular son paralelas al eje de abscisas.
- Recta tangente. En un contexto analítico, la representación gráfica de la tangente a una recta en cualquiera de sus puntos, coincide con la gráfica de dicha recta. Para este caso particular, para cualquier valor de *x* que tomemos, la gráfica de la recta tangente a la función constante dada, coincidirá con la gráfica de esta última función.
- Pendiente. Interpretada como la inclinación de la recta que representa gráficamente la función constante.
- Función derivada. Entendida como el límite del cociente de incrementos, como el conjunto de pendientes de las posibles rectas tangentes a la función constante, o como el conjunto de razones instantáneas de cambio.

− *Proceso de composición* −

A partir de los elementos lingüísticos y los conceptos/definiciones identificados en el proceso anterior, se reconoce el uso de proposiciones/propiedades, procedimientos y argumentos. A continuación se detallan, respectivamente, las propiedades, procedimientos y argumentos, identificados en las soluciones plausibles de la tarea.

Proposiciones/Propiedades

Identificamos la siguiente proposición previa:

- PP1: “la derivada de una función constante siempre es igual a cero”. Proposición que requiere de una explicación grafica-verbal [apartado a)] y una demostración formal mediante el uso de la derivada como el límite del cociente de incrementos [apartado b)].

Las proposiciones que emergen son:

- PP2: La recta tangente a una función lineal de una variable real en cualquiera de sus puntos, coincide con dicha función. Interpretando en un contexto de geometría analítica, la tangente a una recta es la "misma recta".
- PP3: Las rectas paralelas al eje x tienen pendiente cero. Si se interpreta la pendiente de una recta como la inclinación de la recta respecto a la horizontal.

Procedimientos

Los procedimientos que emergen para la solución de la tarea son:

- P1: El trazado de la representación gráfica de la función constante (Figura 5.4.1), la cual se usa posteriormente para analizar el comportamiento de la derivada de dicha función.
- P2: Cálculo, visual, de la pendiente de rectas paralelas al eje de las abscisas. Este procedimiento se usa en el apartado a) de la tarea para calcular la pendiente de las posibles rectas tangentes en puntos cualesquiera de la función constante. Este procedimiento puede referir a una justificación que sería solución del apartado a).
- P3: Cálculo de la derivada de la función constante aplicando la definición como límite del cociente de incrementos. Este procedimiento se utiliza para demostrar formalmente la proposición PP1, lo que a su vez es solución del apartado b) de la tarea.

Argumentos

Los argumentos que emergen para dar solución a la tarea son los siguientes:

- A1: Si interpretamos la derivada como pendiente de la recta tangente, entonces $f'(x) = 0$ ya que las funciones constantes siempre tienen como representación gráfica rectas horizontales (rectas paralelas al eje x). Puesto que, la pendiente de una recta es la inclinación que esta presenta con respecto al eje x, la pendiente de las rectas paralelas al eje x siempre es cero. Este argumento que da solución al apartado a) de la tarea, establece la validez de la proposición mediante argumentos intuitivos de tipo gráfico y mediante el uso de la derivada como pendiente de la recta tangente.

- A2: Si interpretamos la derivada como la razón de cambio de una variable *y* respecto de una variable *x*, y si la función que me describe dicha razón de cambio es constante, entonces esto significa que conforme la variable *x* varía, la variable *y* no varía. Por tanto la razón de cambio de *y* con respecto a *x* siempre es cero. Establece la validez de la proposición deduciendo a partir de la definición de derivada como razón de cambio.

5.3.2.4.3. Contenido curricular

El contenido curricular que subyace tanto al planteamiento como a la resolución de la tarea cuatro es:

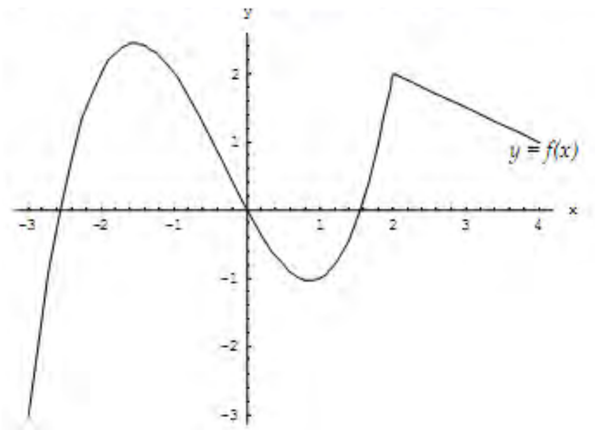
- Función constante (representación gráfica y simbólica).
- Derivada de funciones constantes (la derivada en su acepción de pendiente de la recta tangente, de razón de cambio y/o como límite del cociente de incrementos).
- Representaciones para la función derivada (simbólica, gráfica y verbal).

5.3.2.5. Tarea Cinco: Describiendo características globales de la derivada

La tarea 5 (Figura 5.5), ha sido objeto de estudio en los trabajos de Hähkiöniemi (2004, 2006). Esta tarea es de interés puesto que aporta información relevante sobre lo que se vincula a la derivada en un punto y la función derivada en un intervalo, y la coordinación entre ambas informaciones. El profesor en formación inicial debe identificar, describir y justificar, a partir de la gráfica de una función, características importantes de la derivada de dicha función. Las representaciones que debe usar el profesor para la resolución de la tarea son, principalmente, gráficas y verbales, pero también debe hacer uso de representaciones simbólicas o notacionales (para denotar intervalos, por ejemplo). Por esta razón la tarea 5 explora el conocimiento especializado del contenido en su nivel de aplicación. La acepción de la derivada como pendiente de la recta tangente y su relación y aplicación al cálculo de valores máximos y mínimos, está relacionada con la resolución de esta tarea.

Tarea 5

La figura muestra la gráfica de una función *f*. Escribe las observaciones que puedas hacer sobre la derivada de la función *f* en diferentes puntos de su dominio. Justifica tu respuesta.



Para realizar tu descripción puedes apoyarte de los siguientes aspectos, ¿Dónde es positiva la derivada? ¿Dónde es negativa la derivada? ¿Dónde es cero la derivada? ¿Está la derivada definida en todos los puntos del dominio de la función? ¿Dónde es constante la derivada? ¿Dónde alcanza la derivada su valor máximo y mínimo?

Figura 5.5. Tarea 5 del *Cuestionario CDM-Derivada*

5.3.2.5.1. Solución plausible de la tarea cinco

Una posible solución de la tarea es la siguiente:

- La derivada es positiva en los $(-\infty, -1{,}5)$ y $(0{,}8\,, 2)$ aproximadamente, es negativa en los intervalos $(-1{,}5\,, 0{,}8)$ y $(2, +\infty)$ aproximadamente, es cero en los puntos $x = -1{,}5$ y $x = 0{,}8$ puntos en los cuales la función alcanza un máximo y un mínimo respectivamente, no está definida para el punto $x = 2$ aproximadamente ya que en dicho punto la gráfica presenta un "pico", permanece constante a lo largo del intervalo $(2, +\infty)$. Alcanza su valor máximo en las proximidades de $x = -3$ (donde la recta tangente se va volviendo vertical con pendiente positiva) y su valor mínimo lo alcanza aproximadamente en el intervalo $(-1\,, 0{,}4)$, que es cuando la recta tangente es lo más próxima a ser vertical con pendiente negativa.

5.3.2.5.2. Contenido ontosemiótico: análisis epistémico

A continuación presentamos el análisis epistémico mediante la descripción de los procesos, objetos primarios (elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades,

procedimientos y argumentos) y sus significados, inmersos tanto en el planteamiento como en la solución de la tarea.

− *Proceso de Representación ↔ Significación* −

Como parte de esta dualidad entre representación y significación hemos identificado diversos elementos lingüísticos y conceptos/definiciones, previos y emergentes, tanto en el planteamiento como en la solución plausible de la tarea cinco. A continuación se detallan los lenguajes y conceptos identificados, así como sus significados.

Elementos lingüísticos

Identificamos los siguientes elementos lingüísticos previos:

- La expresión, "La figura muestra la gráfica de una función f". Concepto general de función. Refiere a una gráfica cartesiana de una función de variable real, definida en el intervalo [-3, 4].
- Gráfica de una función (Figura 5.5). Representación gráfica de una función $f(x)$ cuyo dominio es el intervalo [-3, 4] y recorrido [-3, 3], aproximadamente; el criterio de correspondencia viene dado por las coordenadas de los puntos de la gráfica. El gráfico muestra los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, puntos de inflexión y un "punto anguloso".
- Las expresiones "¿dónde la derivada es positiva? ¿dónde la derivada es negativa? ¿dónde es cero la derivada?...". Refieren a pautas o "preguntas guía" que ayudan a organizar la descripción de la función derivada y sus características (valores positivos y negativos, máximos y mínimos, …).

Los elementos lingüísticos emergentes que identificamos son:

- Las expresiones, "La derivada es positiva en los $(-\infty, -2.5)$ y $(0.8, 2)$ aproximadamente, La derivada es negativa en los intervalos $(-1{,}5\,, 0{,}8)$ y $(2, +\infty)$ aproximadamente …". Sentencias que refieren a proposiciones que son las respuestas a las preguntas guía, y en conjunto, respuesta a la tarea.

Conceptos/Definiciones

En la tarea cinco identificamos el uso de los siguientes conceptos previos:

- Función, Dominio, Rango y Criterio. Función de variable real, definida en el intervalo [-3,4] y cuyo criterio se da gráficamente, por lo que los valores de la función para cada valor de *x* se determinan de manera aproximada. No se puede determinar una expresión algebraica de la función.
- Función derivada. Como el conjunto de pendientes de las rectas tangentes a la función dada en los distintos puntos del dominio en que está definida.
- Continuidad, crecimiento, decrecimiento, extremos de la función. Dados de manera intuitiva mediante la forma de la gráfica de la función.

− *Proceso de Composición* −

A partir de los elementos lingüísticos representacionales y los conceptos/definiciones identificados en el proceso anterior, se reconoce el uso de proposiciones/propiedades, procedimientos y argumentos. A continuación se detallan, respectivamente, las propiedades, procedimientos y argumentos, identificados en las soluciones plausibles de la tarea.

Proposiciones/Propiedades

Identificamos el uso de las siguientes proposiciones previas:

- PP1: Derivabilidad. En esta tarea se utiliza esta propiedad de manera intuitiva (y gráficamente); una función es derivable en un punto si en dicho punto la función es continua y no presenta “saltos, ángulos o picos”.
- PP2: Relación entre continuidad y derivabilidad. Una función derivable en un punto es continua en dicho punto, pero una función continua en un punto no es necesariamente derivable en dicho punto.
- PP3: $f'(x) > 0 \ \forall x \in (a,b) \iff f$ es creciente en $[a,b]$.
- PP4: $f'(x) < 0 \ \forall x \in (a,b) \iff f$ es decreciente en $[a,b]$.
- PP5: $f'(x) = 0 \ \forall x \in (a,b) \iff f$ es constante en $[a,b]$.
- PP6: $f'(x) = 0$ en $x = a \in D_f$ si en $x = a$ f presenta un máximo o un mínimo.
- PP7: $f'(x) = m \ \forall x \in (a,b),\ m \in \mathbb{R} \iff f$ es una función lineal en $[a,b]$ de la forma $f(x) = mx + k$.

Las proposiciones PP3, PP4, PP5, PP6 y PP7, se usan para identificar características globales de la derivada (intervalos en los que la derivada es positiva, negativa, constante, cero, etc.).

Identificamos el uso de las siguientes proposiciones emergentes:

- PP8: La función derivada es positiva en los intervalos $(-\infty, -2.5)$ y $(0.8, 2)$ aproximadamente.
- PP9: La función derivada es negativa en los intervalos $(-2.5, 0.8)$ y $(2, +\infty)$ aproximadamente.
- PP10: La función derivada tiene un cero en los puntos $x = -2.5$ y $x = 0.8$ puntos en los cuales la función alcanza un máximo y un mínimo respectivamente.
- PP11: La función derivada no está definida para el punto $x = 2$ aproximadamente, ya que en dicho punto la gráfica presenta un "pico".
- PP12: La función derivada es constante a lo largo del intervalo $(2, +\infty)$ aproximadamente.

Las proposiciones PP8, PP9, PP10, PP11 y PP12, representan la solución de la tarea. Características globales de la función derivada.

Procedimientos

Los procedimientos emergentes identificados son:

- P1: Procedimientos empíricos o visuales a partir de la representación gráfica de la función (Figura 5.5). Por ejemplo, "empíricamente vemos que la gráfica de la función es creciente en el intervalo…tiene un máximo en…". Este procedimiento empírico o visual se usa para reconocer las características de la función dada y a partir de ellas, describir la derivada.

Argumentos

Los argumentos emergentes identificados son:

- A1: El intervalo en que es positiva la función derivada es…(PP8), “porque la función es creciente en dicho intervalo, …, apoyándonos en la proposición PP3”.
- A2: La derivada es negativa en el intervalo…(PP9), “porque la función es decreciente en dicho intervalo,…, apoyándonos en la proposición PP4”.
- A3: La derivada es cero en los puntos… (PP10), “porque la función alcanza un máximo y un mínimo, respectivamente, en dichos puntos; apoyándonos en la proposición PP6”.
- A4: La derivada es constante… (PP12), “porque la función es una línea recta en dicho intervalo; apoyándonos en la proposición PP7”.
- A5: La derivada no está definida en… (PP11), “porque en dicho punto la función presenta un ‘pico’; apoyándonos en PP1”.

Los Argumentos A1, A2, A3, A4 y A5, son las respuestas a cada una de las “preguntas guía” proporcionadas, lo que en conjunto dan respuesta a la tarea planteada.

5.3.2.5.3. Contenido curricular

El contenido curricular contemplado en la tarea cinco es el siguiente:

- Funciones y sus características.
- La derivada (cómo pendiente de la recta tangente).
- Aplicación de la derivada para el análisis de las características de funciones (crecientes y decrecientes, extremos, concavidades, …).

5.3.2.6. Tarea Seis: Cálculo de los ceros de la función derivada

La tarea 6 (Figura 5.6) tomada de Delos Santos (2006), a simple vista, podría aparentar ser uno de los ejercicios que comúnmente se encuentran en los libros cálculo diferencial de nivel bachillerato, en los que basta aplicar algunos teoremas o proposiciones sobre derivadas para su resolución. Por esta razón, tanto el ítem a) como el b), de forma individual, evalúan aspectos del conocimiento común de los futuros profesores relacionados con la derivada en su acepción como pendiente de la recta tangente y razón instantánea de cambio. Sin embargo, el objetivo central de la tarea es explorar, globalmente, la actividad matemática desarrollada por los futuros profesores, y si en dicha actividad los futuros profesores logran hacer conexiones o asociaciones entre los distintos significados de la derivada. En este sentido, la tarea 6 evalúa aspectos del conocimiento especializado, en tanto que indaga acerca de la asociación que los futuros profesores establecen entre los distintos significados de un objeto matemático concreto: la derivada.

Tarea 6

Dada la función $y = x^3 - \frac{x^2}{2} - 2x + 3$

a) Encuentra los puntos de la gráfica de la función para los que su tangente es horizontal.
b) ¿En qué puntos la razón instantánea de cambio de *y* con respecto a *x* es cero?

Figura 5.6. Tarea 6 del *Cuestionario CDM-Derivada*

5.3.2.6.1. Soluciones plausibles de los apartados de la tarea seis

A continuación presentamos, para cada uno de los apartados de la tarea tres, una posible solución:

a) Si $y = x^3 - \frac{x^2}{2} - 2x + 3$, entonces, $y' = 3x^2 - x - 2$. Ahora bien, la tangente a la curva y es horizontal cuando $y' = 0$. De esta forma:

$$y' = 0$$
$$3x^2 - x - 2 = 0$$
$$(3x + 2)(x - 1) = 0$$
$$x_1 = 1 \text{ y } x_2 = -\frac{2}{3}$$

Por lo tanto, la gráfica de la función $y = x^3 - \frac{x^2}{2} - 2x + 3$ tiene tangentes horizontales en $x_1 = 1$ y $x_2 = -\frac{2}{3}$.

b) La razón de cambio de *y* con respecto a *x* es cero en $x = 1$ o $x = -\frac{2}{3}$. Y en general, la razón de cambio de *y* con respecto a *x* es cero en aquellos puntos en los que la recta tangente a la gráfica de *y* sea paralela al eje de las abscisas.

5.3.2.6.2. Contenido ontosemiótico: análisis epistémico

A continuación presentamos el análisis epistémico mediante la descripción de los procesos, objetos primarios (elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades,

procedimientos y argumentos) y sus significados, inmersos tanto en el planteamiento como en la solución de la tarea.

− *Proceso de Representación* ↔ *Significación* −

Como parte de esta dualidad entre representación y significación hemos identificado diversos elementos lingüísticos y conceptos/definiciones, previos y emergentes, tanto en el planteamiento como en las soluciones esperadas de la tarea seis. A continuación se detallan los lenguajes y conceptos identificados, así como sus significados.

Elementos lingüísticos

Entre los elementos lingüísticos previos que hemos identificado se encuentran:

- La expresión, $y = x^3 - \frac{x^2}{2} - 2x + 3$. Refiere al concepto de función (cúbica), expresada algebraicamente (variable independiente, dependiente, dominio, rango).
- La expresión, “Encuentra los puntos de la gráfica de la función para los que su tangente es horizontal”. Hace referencia a procedimientos visuales y simbólicos (manipulación de elementos algebraicos) para el cálculo de tangentes a una curva (gráfica de la función) en un punto.
- La expresión, “¿En qué puntos la razón de cambio de y con respecto a x es cero?”. Concepto de razón de cambio en un punto (instantánea) de una función dada. Pregunta clave, mediante la cual se pueden relacionar al menos dos significados para la derivada.

Los elementos lingüísticos emergentes que identificamos son:

- La expresión, $y' = 3x^2 - x - 2$. Representación algebraica de la derivada de la función dada.
- Las expresiones, “$y' = 0$, entonces, $3x^2 - x - 2 = 0$”. Procedimiento de cálculo de los extremos a partir de la derivada, usando la proposición, “en los extremos de una función la derivada es cero”.
- Las expresiones, $x_1 = 1$ y $x_2 = -\frac{2}{3}$. Representan valores del dominio de la función, en los cuales la recta tangente a dicha función es horizontal.

Conceptos/Definiciones

Los conceptos previos que identificamos son:

- Función. Particularizada en función cúbica, expresada de forma algebraica, $y = x^3 - \frac{x^2}{2} - 2x + 3$.
- Puntos. Que hacen referencia a puntos en el plano cartesiano pertenecientes a la gráfica de la función dada, en los cuales las tangentes a la función son horizontales. También puede hacer referencia a las $x \in D_f$ en la cuales las tangentes a *f* sean horizontales.
- Tangente horizontal. Recta tangente a la función dada paralela al eje *x*, es decir, con pendiente igual a cero. Caso particular de la derivada en un punto.
- Razón de cambio. La razón de cambio de *y* con respecto a *x* es cero cuando la función presenta un máximo o un mínimo relativo. Es una forma de interpretar la derivada en un punto.
- Función derivada. Entendida como el conjunto de pendientes de todas las posibles rectas tangentes a la función dada a lo largo de su domino, y como el conjunto de razones instantáneas de cambio a lo largo de los puntos del dominio de la función.
- Máximos o mínimos relativos. Puntos de la gráfica de la función en los que la tangente a dicha función es horizontal, es decir, con pendiente igual a cero.

− *Proceso de composición* −

A partir de los elementos lingüísticos y los conceptos/definiciones identificados en el proceso anterior, se reconoce el uso de proposiciones/propiedades, procedimientos y argumentos. A continuación se detallan, respectivamente, las propiedades, procedimientos y argumentos, identificados en las soluciones plausibles de la tarea.

Proposiciones/Propiedades

Se identificaron las siguientes proposiciones previas:

- PP1: Reglas de derivación. Para encontrar la representación algebraica de la derivada de la función dada.

- PP2: Formula general. Para resolver ecuaciones cuadráticas, o bien, factorización de trinomios.
- PP3: $f'(x) = 0$ en $x = a \in D_f$ si en $x = a$ f presenta un máximo o un mínimo. Esta propiedad ayuda a justificar el cálculo de los ceros de la función derivada.

Las proposiciones emergentes identificadas son:

- PP4: La función tiene tangentes horizontales en aquellos puntos en los que presenta un máximo o mínimo relativo. Respuesta al apartado a) de la tarea.
- PP5: La razón de cambio de y con respecto a x es cero en $x = 1$ o $x = -\frac{2}{3}$. Y en general, la razón de cambio de y con respecto a x es cero cuando la función y alcanza un máximo o un mínimo, es decir, en aquellos puntos en los que la recta tangente a la gráfica de y sea paralela al eje de las abscisas, es decir, en aquellos puntos donde la función tiene tangentes horizontales. Respuesta al apartado b) de la tarea.

Procedimientos

Los procedimientos emergentes que identificamos en la solución de la tarea son:

- P1: Cálculo de la derivada de la función cúbica dada. Ayuda a encontrar una representación simbólica-algebraica que pueda ser manipulada.
- P2: Cálculo de los ceros de la derivada. Da respuesta al apartado a) de la tarea.

Argumentos

Identificamos los siguientes argumentos emergentes:

- A1: Justificaciones al procedimiento P1, a partir de la proposición PP1.
- A2: Justificaciones al procedimiento P2, mediante el uso de la proposición PP3.

5.3.2.6.3. Contenido curricular

La tarea seis contempla el siguiente contenido curricular:

- Derivada como pendiente de las rectas tangentes a una curva

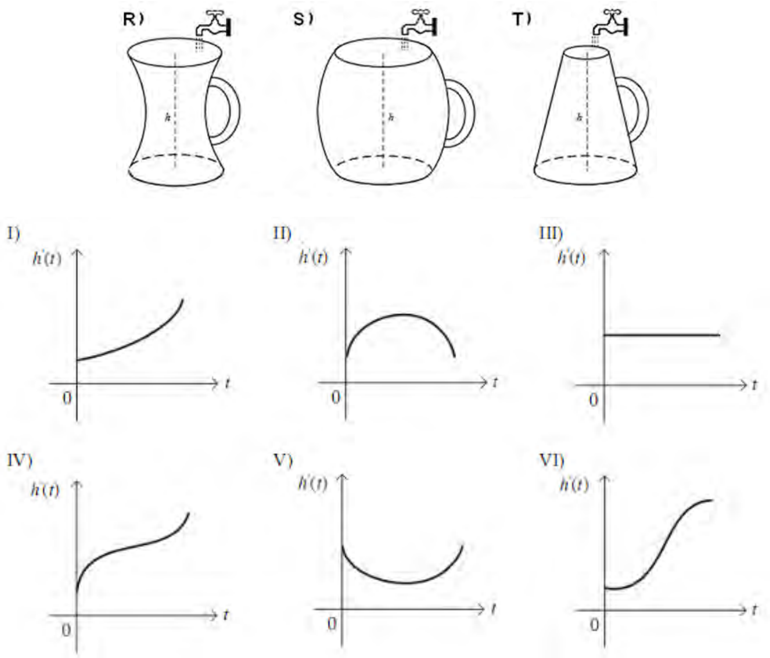
- Derivada como razón de cambio
- Cálculo de valores extremos mediante los ceros de la derivada
- Conversión entre representaciones gráfica y algebraica de una función

5.3.2.7. Tarea Siete: Tasas instantáneas de variación

La tarea 7 (Figura 5.7) fue tomada, y modificada, del trabajo de Çetin (2009). Tanto el ítem a) como el b) generan información sobre el conocimiento especializado relacionado con el significado de la derivada como razón instantánea de cambio. Por un lado, el ítem a) requiere que el estudiante interprete los elementos lingüísticos verbales, gráficos (gráficas de las derivadas) e icónicos (imágenes de las tazas), para tratar de establecer una correspondencia inyectiva entre los elementos gráficos e icónicos. Además, los estudiantes deben encontrar procedimientos que les permitan establecer la correspondencia de cada elemento y dar justificaciones válidas de sus soluciones. En la búsqueda de tales procedimientos los estudiantes requerirán hacer uso de objetos matemáticos tales como la derivada como razón instantánea de llenado de un recipiente (velocidad instantánea de llenado), crecimiento y decrecimiento de funciones, teorema fundamental del cálculo (relación entre la derivada y su antiderivada), y además deberá de ser capaz de transitar entre las distintas representaciones y cambiar al lenguaje natural para expresar sus resultados. Por su parte el ítem b), requiere que los futuros profesores sean capaces de identificar los conocimientos (elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, propiedades/proposiciones, procedimientos y argumentos) que se ponen en juego al resolver la tarea; esto con miras a la gestión eficaz de los conocimientos de sus futuros alumnos. Así, la tarea 6 es evaluadora de dos niveles de conocimiento especializado. Un primer nivel en el que los futuros profesores deben hacer uso de diversas representaciones, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos para resolver la tarea. El segundo nivel se refiere a la competencia de los profesores para identificar conocimientos (elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, propiedades/proposiciones, procedimientos y argumentos) puestos en juego en la resolución de una tarea sobre derivadas.

Tarea 7

El flujo de llenado de las tazas R, S y T de la figura es constante. La altura del agua *h* dentro de las tazas es una función del tiempo. A continuación se dan las gráficas de seis funciones *h'(t),* tres de las cuales corresponden a las derivadas de las funciones del llenado de las tazas.



a) Relaciona cada una de las tazas con la gráfica de la derivada que le corresponde. Explica tu razonamiento para cada relación.
b) ¿Qué conocimientos se ponen en juego al resolver este problema?

Figura 5.7. Tarea 7 del *Cuestionario CDM-Derivada*

5.3.2.7.1. Soluciones plausibles de los apartados de la tarea siete

A continuación presentamos, para cada uno de los apartados de la tarea siete, una posible solución:

a) Las relaciones son:

- ✓ R con II; la velocidad instantánea de llenado de R va incrementándose primero para después ir decreciendo, debido a que la taza se estrecha en la parte central, zona en la cual se llena más rápidamente.
- ✓ S con V; en la parte central la taza es más ancha, por lo que se llenará más lentamente. Entonces la velocidad instantánea de llenado (que es la derivada

de la función) es decreciente primero para después ir creciendo a medida que la taza se va estrechando.

- ✓ T con I. En el tronco de cono la velocidad instantánea de llenado se va incrementando progresivamente de manera uniforme, luego la gráfica debe ser una función uniformemente creciente, o sea la I (un trozo de parábola).

b) En la solución de la tarea se requiere poner en juego los siguientes conocimientos:

- ✓ Concepto de función, correspondencia entre el tiempo y la altura alcanzada por el agua.
- ✓ Uso de la derivada como razón instantánea de llenado de un recipiente (velocidad instantánea de llenado).
- ✓ Crecimiento y decrecimiento de funciones
- ✓ Representaciones gráficas de funciones derivadas y análisis de sus características.
- ✓ Teorema Fundamental del Cálculo (relación entre la derivada y su antiderivada).
- ✓ Cambio entre las distintas representaciones [gráfica, icónica (tazas)] y el lenguaje natural, para la justificación de las respuestas
- ✓ …

5.3.2.7.2. Contenido ontosemiótico: análisis epistémico

A continuación presentamos el análisis epistémico mediante la descripción de los procesos, objetos primarios (elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades, procedimientos y argumentos) y sus significados, inmersos tanto en el planteamiento como en la solución de la tarea siete.

− *Proceso de Representación* ↔ *Significación* −

Como parte de esta dualidad entre representación y significación hemos identificado diversos elementos lingüísticos y conceptos/definiciones, previos y emergentes, tanto en el planteamiento como en las soluciones esperadas de la tarea siete. A continuación se detallan los lenguajes y conceptos identificados, así como sus significados.

Elementos lingüísticos

Identificamos el uso de los siguientes elementos lingüísticos previos:

- La expresión, "El flujo de llenado de las tazas R, S y T de la figura es constante". Refiere al concepto de flujo de llenado (magnitud intensiva) (volumen por unidad de tiempo; velocidad de llenado). Propiedad del sistema físico; constancia de la velocidad de llenado.
- La expresión, "La altura del agua *h* dentro de las tazas es una función del tiempo". Hace referencia al concepto de función, correspondencia entre el tiempo y la altura alcanzada por el agua.
- La expresión, "Se dan las gráficas de seis funciones *h'(t)*, tres de las cuales corresponden a las derivadas de las funciones del llenado de las tazas". Concepto de derivada de las funciones *h(t)*.
- La expresión, "Relaciona cada una de las tazas con la gráfica de la derivada que le corresponde". Correspondencia inyectiva entre las tazas y las figuras; se requiere elaborar un procedimiento para establecer la correspondencia de cada elemento.
- La representación icónica de las tazas R, S, y T (Figura 5.7). Refieren a los conceptos de magnitud, volumen, altura de llenado, tiempo (sugerido por el grifo que echa agua con un flujo constante). Representan también icónicamente funciones *h(t)* que dependen de la forma de la taza.
- Las representaciones gráficas I, II, III, IV, V y VI (Figura 5.7). Representaciones gráficas de las funciones *h'(t),* tres de las cuales son funciones derivadas de las funciones representadas por las tazas.

Los elementos lingüísticos emergentes que identificamos son:

- Las relaciones y sus justificaciones (ver respuesta al ítem a), apartado 5.3.2.7.1). Refieren a proposiciones que dan solución al apartado a) de la tarea.

Conceptos/Definiciones

Los conceptos que identificamos son previos, y son los siguientes:

- Flujo de llenado. Cantidad de agua que vierte la llave en un tiempo dado.

- Función. Que describe la altura del agua en la taza en términos del tiempo.
- Función derivada. Velocidad del llenado de las tazas.

− *Proceso de composición* −

A partir de los elementos lingüísticos y los conceptos/definiciones identificados en el proceso anterior, se reconoce el uso de proposiciones/propiedades, procedimientos y argumentos. A continuación se detallan, respectivamente, las propiedades, procedimientos y argumentos, identificados en la solución plausible de la tarea.

Proposiciones/Propiedades

Identificamos la siguiente proposición previa:

- PP1: El flujo de llenado es constante. Condición inicial que permite relacionar la velocidad instantánea de llenado con la forma de las tazas.

Las proposiciones emergentes son:

- PP2: R se relaciona con dos II. Proposición que establece la relación entre la función (representada por la taza R) y su derivada.
- PP3: S se relaciona con V. Proposición que establece la relación entre la función (representada por la taza S) y su derivada.
- PP4: T se relaciona con I. Proposición que establece la relación entre la función (representada por la taza I) y su derivada.

Las proposiciones PP2, PP3 y PP4, representan la solución al apartado a) de la tarea siete.

Procedimientos

El procedimiento identificado que emerge al dar solución la tarea es:

- P1: Procedimiento verbal-visual. Procedimientos verbales centrados en la descripción de la velocidad instantánea de llenado de las tazas.

Argumentos

Al igual que el procedimiento empleado para la solución de la tarea, los argumentos también fueron verbales-visuales, centrados en la descripción de la velocidad instantánea de llenado de las tazas. He aquí, algunas justificaciones emergente identificadas:

- A1: “la velocidad instantánea de llenado de R va incrementándose primero para después ir decreciendo, debido a que la taza se estrecha en la parte central, zona en la cual se llena más rápidamente”. Justifica la relación establecida con la proposición PP2.
- A2: “en la parte central la taza es más ancha, por lo que se llenará más lentamente. Entonces la velocidad instantánea de llenado (que es la derivada de la función) es decreciente primero para después ir creciendo a medida que la taza se va estrechando”. Justifica la relación establecida con la proposición PP3.
- A3: “En el tronco de cono la velocidad instantánea de llenado se va incrementando progresivamente de manera uniforme, luego la gráfica debe ser una función uniformemente creciente, o sea la I (un trozo de parábola)”. Justifica la relación establecida con la proposición PP4.

5.3.2.7.3. Contenido curricular

La tarea siete evalúa el siguiente contenido curricular:

- Uso de la derivada como tasa de llenado de un recipiente (volumen por unidad de tiempo; velocidad de llenado).
- Crecimiento y decrecimiento de funciones.
- Representación gráfica de la función derivada y análisis de sus características
- Teorema fundamental del cálculo (relación entre la derivada y su antiderivada)
- Cambio entre las distintas representaciones de la función y su derivada, y el lenguaje natural.

5.3.2.8. Tarea Ocho: Velocidad instantánea

Finalmente, la tarea 8 (Figura 5.8) tomada de Çetin (2009), proporciona información sobre el conocimiento ampliado de los profesores en formación inicial, ya que se trata de una aproximación a la derivada de una función (descrita por los valores de la tabla) en el punto *t=0.4* a través de valores numéricos de dicha función. Además, la tarea 8 no es un problema escolar típico del nivel bachillerato, y requiere la comprensión del objeto derivada por parte de los futuros profesores, al menos en su acepción como razón instantánea de cambio, y concretamente, la derivada en un punto como velocidad instantánea. La solución de esta tarea se puede realizar mediante diferentes métodos, por ejemplo, la interpolación polinómica de Lagrange, lo cual sustenta la categorización de esta tarea como evaluadora del conocimiento ampliado.

Tarea 8

Una pelota se lanza al aire desde un puente de 11 metros de altura. $f(t)$ denota la distancia a la que se encuentra la pelota del suelo en un tiempo t. Algunos valores de $f(t)$ se recogen en la siguiente tabla:

t (sec.)	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$f(t)$(m.)	11	12.4	13.8	15.1	16.3	17.4	18.4

De acuerdo con la tabla, ¿cuál es la velocidad de la pelota cuando alcanza una altura en $t = 0.4$ segundos? Justifica la elección de tu respuesta.

a) 11.5 m/s b) 1.23 m/s c) 14.91 m/s d) 16.3 m/s e) Otro

Figura 5.8. Tarea 8 del *Cuestionario CDM-derivada*

5.3.2.8.1. Solución plausible de la tarea ocho

Una posible solución de la tarea es la siguiente:

- Veamos que se trata de una aproximación a la derivada de la función en el punto $t = 0.4$ a través de valores numéricos de la función. Tenemos que $h = 0.1$, utilizando dos puntos para aproximarnos a $f'(0.4)$, obtenemos:

$$f'(0.4) \cong \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \cong \frac{f(0.5) - f(0.3)}{0.2} \cong 11.5 \ {}^{m}/_{s}$$

Ahora, si tomamos 4 puntos para aproximarnos a $f'(0.4)$, obtenemos:

$$f'(0.4) \cong \frac{1}{12h}[f(a-2h) - 8f(a-h) + 8f(a+h) - f(a+2h)]$$

$$f'(0.4) \cong \frac{[f(0.2) - 8f(0.3) + 8f(0.5) - f(0.6)]}{1.2} \cong 11.5\, {}^{m}/_{s}$$

Por lo tanto la respuesta es el inciso a).

5.3.2.8.2. Contenido ontosemiótico: análisis epistémico

A continuación presentamos el análisis epistémico mediante la descripción de los procesos, objetos primarios (elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades, procedimientos y argumentos) y sus significados, inmersos tanto en el planteamiento como en la solución de la tarea ocho.

− Proceso de Representación ↔ Significación −

Como parte de esta dualidad entre representación y significación hemos identificado diversos elementos lingüísticos y conceptos/definiciones, previos y emergentes, tanto en el planteamiento como en las soluciones esperadas de la tarea ocho. A continuación se detallan los lenguajes y conceptos identificados, así como sus significados.

Elementos lingüísticos

Se identificaron los siguientes elementos lingüísticos previos:

- La expresión, *f(t)*. Función que describe la distancia a la que se encuentra la pelota del suelo en un tiempo *t* (después de su lanzamiento).
- Tabla de algunos valores conocidos de la función (Figura 5.8). Representación tabular o numérica de algunos valores de la función *f(t).*
- Los incisos a) 11.5 m/s , b) 1.23 m/s , c) 14.91 m/s , d) 16.3 m/s , e) otro. Posibles velocidades de la pelota cuando han transcurrido 0.4 segundos después de su lanzamiento.
- La expresión, “La pelota se lanza al aire desde un puente de 11 metros de altura”. Elemento lingüístico que evoca a una proposición sobre la condición inicial de la tarea.

Los elementos lingüísticos emergentes que identificamos son:

- La expresión $f'(0.4)$. Expresión simbólica para la velocidad de la pelota exactamente a los 0.4 segundos después de su lanzamiento.

- Las expresión $f'(0.4) \cong \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} \cong \frac{f(0.5)-f(0.3)}{0.2} \cong 11.5\ {}^{m}/_{s}$. Expresión simbólica para el cálculo de la aproximación de la velocidad de la pelota a los 0.4 segundos, a través de 2 puntos (uno a la izquierda y uno a la derecha de *t=0.4*) pertenecientes a la gráfica de la función.
- $f'(0.4) \cong \frac{1}{12h}[f(a-2h)-8f(a-h)+8f(a+h)-f(a+2h)]$. Expresión simbólica para el cálculo de la aproximación de la velocidad de la pelota a los 0.4 segundos, a través de 4 puntos (dos a la izquierda y dos a la derecha de *t=0.4*) pertenecientes a la gráfica de la función.

Conceptos/Definiciones

Identificamos los siguientes conceptos previos:

- Función. *f(t)* que denota la altura de la pelota después de un tiempo *t*. Valores numéricos de la función se presenta en la tabla (Figura 5.8).
- Velocidad promedio. Velocidad media de la pelota entre dos puntos distintos de su recorrido.
- Velocidad instantánea. Velocidad de la pelota cuando han pasado exactamente 0.4 segundos. Forma de interpretar la derivada en un punto.
- Pendiente. La pendiente de las rectas secantes (velocidad promedio) a la izquierda y a la derecha de *t=0.4*; y la pendiente de la recta tangente (velocidad instantánea) en *t=0.4*.
- Secantes. Su pendiente es interpretadas como la velocidad promedio, ayudan a aproximar la velocidad de la pelota en *t=0.4*.
- Tangentes. Su pendiente representa la velocidad instantánea de la pelota en *t=0.4*.
- Incremento. Tiempo transcurrido entre dos posiciones distintas de la pelota. En el problema el incremento *h=0.1* permite resolver el problema.

El concepto emergente que identificamos es:

- Derivada numérica. Aproximación al valor de $f'(0.4)$ a través de valores (puntos) de la función. “Promedio de velocidades promedio” con *t=0.4* centrado.

− Proceso de composición −

A partir de los elementos lingüísticos y los conceptos/definiciones identificados en el proceso anterior, se reconoce el uso de proposiciones/propiedades, procedimientos y argumentos. A continuación se detallan, respectivamente, las propiedades, procedimientos y argumentos, identificados en la solución plausible de la tarea ocho.

Proposiciones/Propiedades

Las proposiciones previas que se identificaron son:

- PP1: “La pelota se lanza al aire desde un puente de 11 metros de altura” $[f(0) = 11]$. Proposición que refiere a la condición inicial de la tarea de que la altura de la pelota en el instante antes de ser lanzada (*t=0*) es de 11 metros.
- PP2: La pendiente de la recta tangente a la función en un punto *P*, es aproximadamente igual a la pendiente de la recta secante que pasa por dos puntos de la función equidistantes de *P*.
- PP3: Conforme la distancia entre *P* y los puntos equidistantes es menor, la pendiente de la tangente y la pendiente de la secante son más próximas.

Las proposiciones PP2 y PP3, se materializan en el cálculo de $f'(0.4) \cong \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} \cong \frac{f(0.5)-f(0.3)}{0.2}$ y que da solución a la tarea.

La proposición emergente identificada es:

- PP4: $f'(0.4) \cong 11.5\ {}^{m}/_{s}$. Solución a la tarea.

Procedimientos

Los siguientes procedimientos emergentes fueron identificados:

- P1: Cálculo de la aproximación a la velocidad instantánea mediante el “promedio de velocidades promedio”. Permite dar solución a la tarea mediante el uso de los objetos matemáticos descritos.
- P2: Cálculo del polinomio interpolador. Permite dar solución a la tarea mediante conocimientos matemáticos más avanzados en el currículo de

matemáticas del nivel de bachillerato tales como el polinomio interpolador de Lagrange y los objetos matemáticos involucrados alrededor de dicha noción.

Argumentos

Identificamos los siguientes argumentos emergentes:

- A1: Intuitivos-deductivos mediante el uso de las proposiciones PP2 y PP3. Justifica el procedimiento P1.
- A2: Deductivos mediante el cálculo de una función que se comporte "aproximadamente igual" a lo largo de los puntos dados mediante Interpolación. Justifica el procedimiento P2.

5.3.2.8.3. Contenido curricular

La tarea ocho contempla el siguiente contenido curricular:

- Función y su interpretación tabular.
- Velocidad promedio (mediante el cálculo de pendientes de rectas secantes).
- Derivada como velocidad instantánea.
- Interpolación

Para finalizar este apartado 5.3, es importante aclarar que el análisis del contenido (epistémico y curricular) de las ocho tareas presentado, no es único ni pretende ser exhaustivo. Otras respuestas a las tareas, distintas a las que contemplamos, podrían ser sugeridas; por lo que estas nuevas respuestas, así como otros tipos de análisis, podrían centrar su atención, o identificar, otro tipo de procesos que involucren otros objetos matemáticos con sus significados correspondientes. Este hecho, como señala Castro (2011), atiende a uno de los supuestos primordiales del EOS que refiere al carácter relativo del conocimiento matemático. Sin embargo, pensamos que tanto las respuestas planteadas como los análisis de contenido realizados, se adecuan a lo que el *Cuestionario CDM-Derivada* pretende evaluar.

Carmines y Zeller (1979, p. 20; citado en Cohen, Manion y Morrison, 2011, p. 188) señalan que para demostrar la validez del contenido de un instrumento debe demostrarse que éste, de manera global e imparcial, recorre el dominio o temas que se pretenden cubrir. En este sentido, tanto el análisis de los contenidos de cada una de las tareas, así como la evaluación del *Cuestionario CDM-Derivada* por expertos en el campo de didáctica del cálculo (que describiremos más adelante), responden a este tipo de validez de nuestro instrumento.

5.4. APLICACIÓN PILOTO DEL INSTRUMENTO *CDM-DERIVADA*

A continuación presentamos los resultados que se obtuvieron con la aplicación de la versión piloto del *Cuestionario CDM-Derivada*. La aplicación de esta versión piloto del cuestionario tiene varias funciones, para nosotros el objetivo principal de su aplicación, en concordancia con lo que señalan Cohen, Manion y Morrison (2011), es incrementar y sustentar la fiabilidad, validez y factibilidad del cuestionario.

5.4.1. Método

Nuestra investigación se inscribe dentro de un enfoque metodológico de tipo mixto (Johnson y Onwuegbuzie, 2004; Creswell, 2009), puesto que se trata de un estudio de tipo exploratorio en el que se considera la observación de variables cuantitativas (grado de corrección de los ítems: respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas) y cualitativas (tipo de resolución o configuraciones cognitivas propuestas por los futuros profesores). Esta última variable cualitativa está estrechamente relacionada, como se verá más adelante, con el tipo de conocimiento didáctico-matemático (CDM) sobre la derivada de los futuros profesores de bachillerato.

Para el estudio cualitativo nos apoyamos en la técnica de análisis denominada *análisis semiótico* (Godino, 2002), misma que hemos descrito en el Capítulo 2, la cual permite describir de manera sistemática tanto la actividad matemática realizada por los futuros profesores al resolver problemas, como los objetos matemáticos primarios (*elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos*) que intervienen en las prácticas que permiten su resolución (Godino, Batanero y Font, 2007).

5.4.1.1. Sujetos

La prueba piloto se aplicó a una muestra de 53 estudiantes de los últimos cursos (sexto y octavo semestre) de la Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas que se imparte en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán (UADY) en México. Dicha licenciatura tiene una duración de cuatro años (8 semestres). Cabe señalar que la

Facultad de Matemáticas de la UADY es la encargada, a través del plan de estudios de dicha licenciatura, de formar profesores con salida al nivel bachillerato o universitario en el estado de Yucatán en México.

Los 53 estudiantes a los que se les aplicó el cuestionario piloto, habían cursado cálculo diferencial en el primer semestre de la licenciatura y, a lo largo de ella, tomaron otros cursos relacionados con el análisis matemático (cálculo integral, cálculo vectorial, ecuaciones diferenciales, etc.). También habían cursado materias relacionadas con las matemáticas y su didáctica.

Cabe señalar que de los 53 estudiantes que participaron en el estudio, 56,6% (30) eran mujeres y 43,4% (23) eran hombres. No obstante debemos mencionar que no enfatizamos las diferencias entre los resultados de hombres y mujeres ya que esto no es objeto de nuestro estudio.

5.4.1.2. Procedimiento

Para la resolución de las tareas de la versión piloto del *Cuestionario CDM-Derivada*, los profesores en formación inicial contaron con un tiempo de dos horas. El piloto se aplicó en dos días consecutivos en el mes de enero del 2011, el primero a los estudiantes de octavo semestre y el segundo a los estudiantes de sexto semestre, esto fue así debido a la incompatibilidad de los horarios de clases de ambos grupos y a la accesibilidad a los grupos que nos otorgó la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán. Este hecho no afectó los resultados, y como se verá más adelante en este capítulo, no hubo diferencias significativas entre los resultados (puntuaciones) de ambos grupos.

La aplicación de la prueba estuvo a cargo del investigador autor de esta tesis doctoral. Antes de comenzar la prueba se dio especificaciones a los estudiantes sobre la forma en que deberían responder la prueba[29], y se mencionó que iban a ser parte de un estudio de investigación para su motivación. Para cuidar la objetividad y calidad de las respuestas, se les indicó que aquellos que no quisieran escribir su nombre, podrían omitirlo y colocar en dicho apartado “Sujeto-Hombre” o “Sujeto-Mujer”. Sólo dos estudiantes (hombres) prefirieron responder de forma anónima.

[29] Las instrucciones también fueron dadas por escrito en la primera parte del cuestionario tal y como se muestra en el Anexo 1.

5.4.2. Análisis

Para el análisis de los datos obtenidos de la implementación del cuestionario, consideramos dos variables: *grado de corrección de la tarea* (respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas) y *tipo de configuración cognitiva* (tipología de resolución propuestas por los futuros profesores, especificando los objetos y procesos puestos en juego en las mismas).

Para el análisis de los datos obtenidos, respecto a esta última variable (tipo de configuración cognitiva), como se ha señalado, se utilizó la técnica de análisis denominada *análisis semiótico* (Godino, 2002; Malaspina y Font, 2010; Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2011), la cual permite describir de manera sistemática tanto la actividad matemática realizada por los futuros profesores al resolver problemas, como los objetos matemáticos primarios que intervienen en las prácticas que permiten la resolución de las tareas (Godino, Batanero y Font, 2007).

El tipo de conocimiento didáctico-matemático se encuentra estrechamente vinculado con la variable *tipo de configuración cognitiva* asociada a las respuestas de los estudiantes, puesto que la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático depende de la presencia o ausencia de los objetos matemáticos, sus significados y relaciones entre los mismos. Estas configuraciones cognitivas son de naturaleza didáctico-matemática debido a que las tareas presentadas tienen dicho carácter, y por tanto los sujetos deben movilizar conocimientos matemáticos y didácticos.

5.4.2.1. Variables y valores considerados en el análisis

Como ya hemos señalado, para el análisis de los datos recabados con la implementación piloto del *Cuestionario CDM-Derivada*, consideramos dos variables: La primera de corte cuantitativo que *refiere al grado de corrección de las tareas*. En este sentido se asignaron las puntuaciones 0, 1 o 2, según si las respuestas eran incorrectas, parcialmente correctas o correctas respectivamente. Las características de lo que fue considerado una respuesta correcta, parcialmente incorrecta o incorrecta, para cada uno de los ítems de las tareas, se presentan en el Anexo 2.

En cuanto a la variable cualitativa *tipo de configuración cognitiva*, podemos señalar que fue principalmente de corte descriptiva y dependió de los procesos, los objetos matemáticos y los significados que a éstos asignaban los futuros profesores en la resolución que daban de las tareas. No obstante, debido a las características de las tareas y a las respuestas que éstas admiten, fue posible establecer una agrupación de las respuestas de los estudiantes según el tipo de configuración cognitiva que movilizaban en la resolución de cada uno de los ítems de las tareas. A partir de dichas agrupaciones, se realiza un estudio cuantitativo (conteo, frecuencias y porcentajes) de los tipos de configuraciones cognitivas movilizadas en la resolución de una tarea. La codificación asignada a las configuraciones cognitivas activadas en la resolución de cada uno de los ítems de las tareas, también se presenta en el Anexo 2.

5.4.2.2. Análisis cuantitativo de los datos

Como se mencionó en el apartado 5.4.1.2, la prueba piloto se aplicó a dos grupos de estudiantes para profesores de bachillerato: 31 estudiantes del octavo semestre (último semestre de la licenciatura, Grupo 1) y 22 estudiantes del sexto semestre (Grupo 2). De acuerdo a las puntuaciones que establecimos para el grado de corrección de las tareas (ver apartado 5.4.2.1), un estudiante podría obtener una puntuación máxima de 28 puntos en el *Cuestionario CDM-Derivada.*

Para nuestro estudio consideramos la muestra de 53 estudiantes como única ya que, como veremos a continuación, no se encontraron diferencias significativas entre las puntuaciones obtenidas por ambos grupos. Para ello, utilizamos el paquete estadístico *Statgraphics centurion* para realizar un comparación entre dos muestras independientes. La Tabla 5.1 presenta algunos resultados de dicha comparación.

Tabla 5.1. Resumen estadístico para la puntuación total por grupos.

	Grupo 1	**Grupo 2**
Recuento	31	22
Promedio	13,16	12,64
Desviación Estándar	5,54	4,79
Coeficiente de Variación	42,08%	37,96%
Mínimo	0,0	2,0
Máximo	23,0	20,0
Rango	23,0	18,0
Sesgo Estandarizado	-1,16	-0,25
Curtosis Estandarizada	-0,18	-0,35

La Tabla 5.1 contiene el resumen estadístico para las dos muestras de datos. De particular interés son el *sesgo estandarizado* y la *curtosis estandarizada* que pueden usarse para comparar si las muestras provienen de distribuciones normales. Valores de estos estadísticos fuera del rango de -2 a +2 indican desviaciones significativas de la normalidad, lo que tendería a invalidar las pruebas que comparan las desviaciones estándar. En este caso, tanto los valores del sesgo estandarizado como los de la curtosis estandarizada (para ambos grupos), se encuentran dentro del rango esperado, por lo que no existen diferencias significativas entre los grupos 1 y 2. Esto se comprobó también, mediante una prueba-*t* para comparar medias que nos arrojó que no hay diferencia significativa entre las medias de las dos muestras de datos, con un nivel de confianza del 95,0%. La Figura 5.9 muestra la distribución de las puntuaciones y la puntuación media obtenida por ambos grupos.

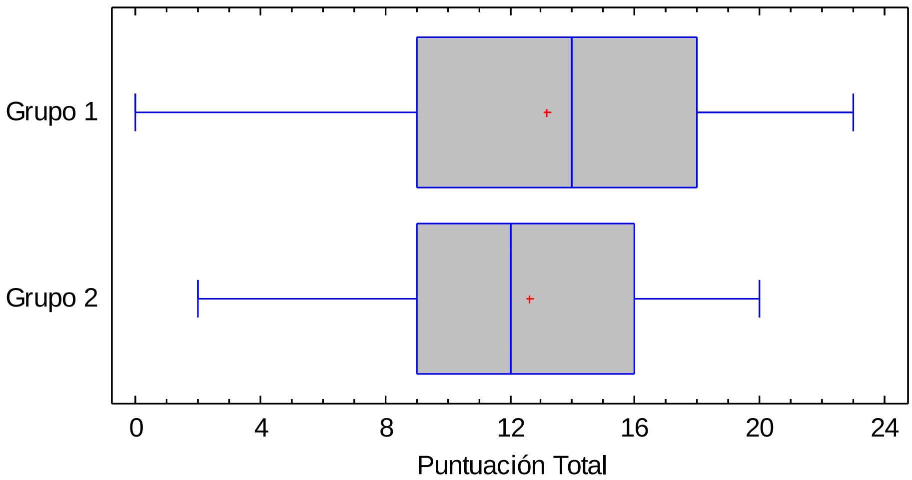


Figura 5.9. Distribución de las puntuaciones y puntuación media por grupo

5.4.2.2.1. Resultados globales pare el Cuestionario CDM-Derivada

A continuación se presentan los resultados globales obtenidos por la muestra de 53 futuros profesores en la prueba piloto del *Cuestionario CDM-Derivada*. Recordemos que la puntuación máxima posible era de 28 puntos.

La Tabla 5.2 muestra las frecuencias de las puntuaciones obtenidas por los estudiantes dividiendo el rango de puntuación total (28 puntos) en intervalos del mismo ancho, y contando el número de datos en cada intervalo. Las frecuencias muestran el número de datos en cada intervalo, mientras que las frecuencias relativas muestran las proporciones en cada intervalo.

Tabla 5.2. Frecuencias para la puntuación total

Clase	*Límite Inferior*	*Límite Superior*	*Punto Medio*	*Frecuencia*	*Frecuencia Relativa*	*Frecuencia Acumulada*	*Frecuencia Rel. Acum.*
	menor o igual	0,0		1	0,0189	1	0,0189
1	0,0	4,0	2,0	2	0,0377	3	0,0566
2	4,0	8,0	6,0	6	0,1132	9	0,1698
3	8,0	12,0	10,0	16	0,3019	25	0,4717
4	12,0	16,0	14,0	13	0,2453	38	0,7170
5	16,0	20,0	18,0	14	0,2642	52	0,9811
6	20,0	24,0	22,0	1	0,0189	53	1,0000
7	24,0	28,0	26,0	0	0,0000	53	1,0000
	mayor de	28,0		0	0,0000	53	1,0000
Media = 12,9434 Desviación Estándar = 5,20139							

Es posible apreciar en la Tabla 5.2 que 28 de los estudiantes (52,8%, clases 4, 5, 6 y 7) obtuvieron una puntuación superior a los 12 puntos de los 28 puntos posibles. De estos 28 estudiantes, 13 (24,5%) tuvieron puntuaciones dentro de la clase 4 que contiene a la puntuación media, 14 (26,4%) obtuvieron una puntuación entre 16 y 20 puntos (clase 5) y solamente uno (1,9%) obtuvo una puntuación entre 20 y 24 puntos (clase 6). Lo anterior evidencia que más de 50% de los estudiantes presentaron dificultades para resolver las tareas del cuestionario. La media obtenida por los 53 estudiantes y la distribución de sus puntuaciones pueden verse gráficamente en la Figura 5.10.

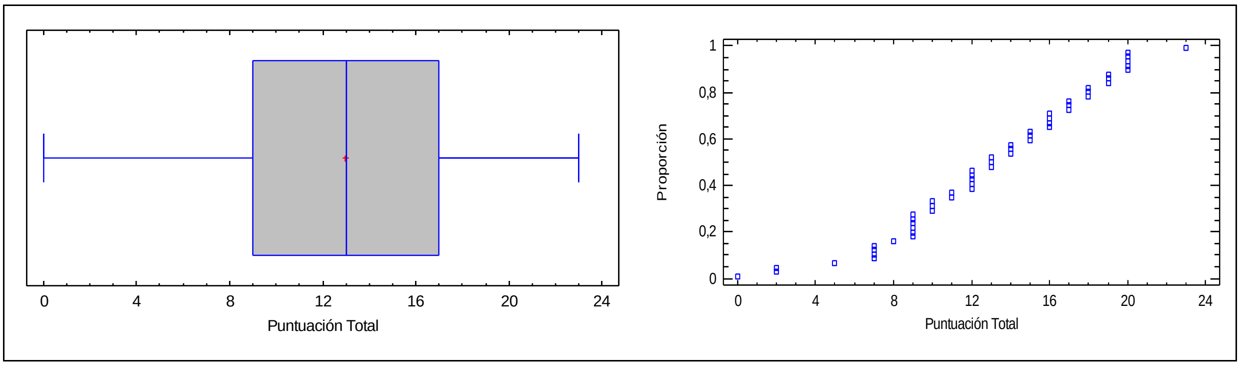


Figura 5.10. Curva empírica de distribución de frecuencias y gráfico de la caja de la variable puntuación total

A continuación se presentan los resultados obtenidos por los estudiantes en cada una de las tareas del cuestionario.

5.4.2.2.2. Resultados para la tarea 1: significados de la derivada

La Tabla 5.3 presenta los resultados cuantitativos obtenidos para la tarea 1 (Figura 5.1) respecto de las variables *grado de corrección* y *tipo de configuración cognitiva*.

Consideramos que una respuesta a esta pregunta es correcta si el estudiante menciona al menos un significado parcial de la derivada.

Tabla 5.3. Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección y tipo de solución de la tarea 1

Grado de Corrección	**Tarea 1**	
	Frecuencia	%
Correcta	46	86,8
Incorrecta	6	11,3
No contestan	1	1,9
Total	53	100

Significados de la derivada	**Tarea 1**	
	Frecuencia	%
Pendiente de la recta tangente	14	26,5
Razón instantánea de cambio	6	11,3
Tasa instantánea de variación	1	1,9
Dos significados	12	22,6
Tres significados	7	13,2
Otro	6	11,3
No dan solución	7	13,2
Total	53	100

Al tratarse de una pregunta “global” sobre los significados de la derivada que conocen los estudiantes, la Tabla 5.3 nos muestra que en general los futuros profesores no tuvieron problemas para responder la tarea, respondiendo correctamente el 86,8% de ellos. De los estudiantes que respondieron correctamente, vemos que 21 (39,7%) proporcionaron un único significado para la derivada: como pendiente de la recta tangente, razón instantánea de cambio o tasa instantánea de variación (límite del cociente de incrementos). El 22,6% dieron dos de los significados antes mencionados y el 13,2% proporcionaron los tres significados antes referidos. El 11,3% de los futuros profesores proporcionaron significados distintos, que aunque no eran significados válidos asociados a la derivada, tampoco eran erróneos.

En la Figura 5.11 se presentan dos ejemplos prototípicos de respuestas de estudiantes que hemos rotulado como “otros” significados. Otros significados dados para la derivada dentro de esta categoría son: es una función, es un procedimiento, mejor aproximación lineal, proceso inverso a la integral.

Respuesta 1

1.- tentativamente se puede decir que es la pendiente de la recta tangente, para mi es muy complicado verle un significado, mas bien lo veo como algo muy algoritmico que conlleva a resolver diversos problemas aplicativos.

Respuesta 2

1.- Es la mejor representación lineal

Figura 5.11. Otros significados para la derivada dados por dos estudiantes

5.4.2.2.3. Resultados para la tarea 2: análisis de la derivada de la función valor absoluto

La Tabla 5.4 muestra los resultados obtenidos en la tarea 2 (Figura 5.2) respecto de la variable grado de corrección. Puede apreciarse que los ítems b) y c) relacionados con el conocimiento común y aspectos del especializado, y d) relacionado con el conocimiento ampliado fueron más complicados para los futuros profesores.

Tabla 5.4. Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de la tarea 2

Grado de Corrección	Apartado a)		Apartado b)		Apartado c)		Apartado d)	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Correcta	40	75,5	22	41,5	19	35,9	2	3,8
Parciamente correcta	0	0	10	18,9	15	28,3	5	9,4
Incorrecta	10	18,8	15	28,3	13	24,5	18	34
No contestan	3	5,7	6	11,3	6	11,3	28	52,8
Total	53	100	53	100	53	100	53	100

Respecto al ítem b), puede observarse que el 58,5% de los estudiantes, considerando las respuestas parcialmente correctas, incorrectas y no contestan, tuvieron dificultades para resolverlo. Para el ítem c), considerando respuestas parcialmente correctas, incorrectas y no contestan, el 64% de los futuros profesores tuvieron dificultad para dar una respuesta satisfactoria. Lo anterior revela que más de la mitad de los futuros profesores exhiben carencias respecto al conocimiento común y especializado del contenido requerido para resolver la tarea. En cuanto al ítem d), 2 estudiantes (3,8%) lograron generalizar la tarea a cualquier función con “picos”, y 5 (9,4%) dieron aproximaciones a dicha generalización sin llegar a concretarla. Este resultado evidencia que más de la mitad de los profesores poseen un escaso conocimiento ampliado requerido para dar solución al apartado.

En cuanto al tipo de configuración cognitiva[30] que los estudiantes utilizaron para dar solución a la tarea 2, se identificaron tres tipos de resolución a la tarea, cada una de las cuales lleva asociada una configuración de objetos y procesos. A estos tres tipos de configuración cognitiva las hemos denominado: *gráfico-verbal, técnica y formal.* Los resultados se presentan en la Tabla 5.5. La descripción de estos tres tipos de configuraciones, y sus características, se presentan en el apartado 5.4.2.3.2 de este capítulo.

Tabla 5.5. Frecuencias y porcentajes para el tipo de configuración cognitiva de la tarea 2

Configuración cognitiva	**Apartado a)**		**Apartado b)**		**Apartado c)**	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Gráfico-Verbal	47	88,6	12	22,6	29	54,7
Técnica	2	3,8	33	62,3	13	24,5
Formal	1	1,9	1	1,9	3	5,7
No dan solución	3	5,7	7	13,2	8	15,1
Total	53	100	53	100	53	100

En la Tabla 5.5, se observa que un porcentaje elevado de los futuros profesores proporcionan una configuración gráfico-verbal para los apartados a) y c) (e.g., "…no es derivable en $x = 0$ ya que se pueden trazar infinitas tangentes a la función en ese punto"). Para el apartado b) la mayoría de los futuros profesores proporciona una configuración técnica (mediante el uso de reglas de derivación y la definición de valor absoluto). Cabe señalar que un estudiante (1,9%) proporcionó una resolución formal, a partir de la acepción de la derivada como tasa instantánea de variación, en los cuatro apartados de la tarea, y 2 estudiantes (3,8%) proporcionaron una configuración formal para el apartado c). Las configuraciones cognitivas asociadas a la resolución de los ítems d) y e) de la tarea se presentan en la sección 5.4.2.3.2.

5.4.2.2.4. Resultados para la tarea 3: cálculo de la función primitiva

La Tabla 5.6 presenta los resultados obtenidos en la tarea 3 respecto al grado de corrección. Como se aprecia en dicha tabla, los profesores en formación inicial no tuvieron problemas para resolver el ítem a) de la tarea, respondiendo correctamente el 84,9%, pero tuvieron dificultades para resolver el ítem b), en tanto que el 28,3% dieron una respuesta incorrecta y

[30] Un análisis más minucioso sobre el tipo de configuraciones cognitivas asociadas a las prácticas matemáticas desarrolladas por los estudiantes al resolver las tareas del cuestionario, se describe en el apartado 5.4.2.3 de este capítulo que refiere al análisis cualitativo de los datos.

el 39,6% no respondió. El tipo de configuraciones cognitivas que utilizaron los profesores para resolver la tarea 3 se presenta en la Tabla 5.7.

Tabla 5.6. Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de la tarea 3

Grado de Corrección	Apartado a)		Apartado b)	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Correcta	45	84,9	21	39,6
Parcialmente correcta	0	0	9	17
Incorrecta	7	13,2	15	28,3
No contestan	1	1,9	8	15,1
Total	53	100	53	100

Los quince profesores (28,3%) que respondieron incorrectamente el ítem b) utilizaron configuraciones de tipo “Funciones equivalentes” y “Unicidad errónea”. La primera configuración está asociada a respuestas que afirman explícitamente que no es posible encontrar una segunda expresión distinta, ya que las expresiones posibles son equivalentes (funciones equivalentes) a la dada en el ítem a). La segunda configuración cognitiva está asociada a respuestas en las que se evidencia una concepción errónea de la unicidad de la función derivada, puesto que se señala explícitamente que no es posible hallar una segunda expresión, distinta a la dada en el ítem a), ya que la derivada es única. La Figura 5.12 muestra las respuestas de dos futuros profesores que llevan asociadas estos dos tipos de configuraciones. Como en las tareas anteriores, el análisis y descripción con más profundidad de las características y elementos de las configuraciones asociadas a la resolución de la tarea se presentan en la sección 5.4.2.3.3 de este capítulo.

Tabla 5.7. Frecuencias y porcentajes para el tipo de configuración cognitiva de la tarea 3

Configuración cognitiva	Apartado a)		Configuración cognitiva	Apartado b)	
	Frecuencia	%		Frecuencia	%
Gráfico-Técnica	6	11,3	Avanzada	8	15,1
Numérica-Técnica	32	60,4	Técnica	21	39,6
Gráfico-Avanzada	5	9,4	Unicidad errónea	9	17
Numérico-Avanzada	8	15,1	Funciones equivalentes	6	11,3
No dan solución	2	3,8	No dan solución	9	17
Total	53	100	Total	53	100

Las configuraciones rotuladas como “Técnica” (Tabla 5.7) son aquellas en las que se usaron los teoremas para derivar, para dar respuesta y justificar las soluciones en los apartados a) y b). El término “Avanzada” se asigna a aquellas configuraciones en las que se usaron conceptos más avanzados como los de integral o el teorema fundamental del cálculo, para justificar las soluciones dadas a ambos apartados. Así vemos que en el ítem a) de la tarea, el 60,4% de los profesores en formación utilizaron una configuración gráfico-técnica, es decir, se calcula la función derivada a partir de la interpretación gráfica de los datos de la tabla dada en la tarea, y mediante el uso de las reglas de derivación, se halla la función $f(x)$. El 15,1% proporcionó una respuesta que lleva asociada una configuración de tipo numérica-avanzada, es decir, a partir de los datos de la tabla dada en la tarea, encuentran un patrón que les permite encontrar la regla de correspondencia que define la función derivada y, con el uso de conceptos tales como la integral, hallan la expresión para $f(x)$. Los resultados obtenidos en la tarea 3 apoyan la necesidad de mejorar el conocimiento avanzado de los futuros profesores, que les faculte para resolver tareas como la planteada.

Respuesta 1: Configuración "Unicidad errónea"

3.
a) $f(x) = x^2$
b) No es posible, ya que una función tiene una única derivada y dados los valores de x y f'(x) no es posible.

Respuesta 2: Configuración "Funciones equivalentes"

a) $f(x) = 2x$
b) Solo podría "encontrar" una equivalente que simplificando llegue al mismo valor.

Figura 5.12. Respuestas con configuraciones asociadas "Unicidad errónea" y "Funciones equivalentes"

5.4.2.2.5. Resultados para la tarea 4: derivada de la función constante

Para el caso de la tarea 4 (Figura 5.4), se consideraron como correctas aquellas respuestas en las que se emplearon representaciones gráficas y descripciones verbales para justificar la proposición "la derivada de una función constante siempre es cero". Se consideraron respuestas parcialmente correctas aquellas que proporcionaban gráficas válidas pero cuyas descripciones verbales no justificaban la proposición inicial. Se consideraron respuestas incorrectas aquellas en las que no se proporcionaban ni gráficas, ni descripciones verbales válidas, para justificar la proposición. La Tabla 5.8 presenta los resultados obtenidos para el grado de corrección de la tarea 4.

Tabla 5.8. Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de la tarea 4

Grado de Corrección	Apartado a)		Apartado b)	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Correcta	19	35,9	23	43,4
Parcialmente correcta	21	39,6	8	15,1
Incorrecta	8	15,1	15	28,3
No contestan	5	9,4	7	13,2
Total	53	100	53	100

Como puede observarse en la Tabla 5.8, sólo el 35,9% de los futuros profesores resolvió de forma correcta el apartado a) de la tarea 4. Esto sugiere que más de la mitad de los futuros profesores presentaron dificultades para resolver dicho ítem. El apartado b) lo responden correctamente el 43,4% de los profesores, lo que evidencia que más de la mitad de los futuros profesores tienen dificultades para demostrar mediante la definición formal de la derivada la proposición "la derivada de una función constante siempre es cero". Lo anterior muestra que más del 50% de los futuros profesores manifiestan carencias respecto al conocimiento matemático especializado requerido para la solución de la tarea.

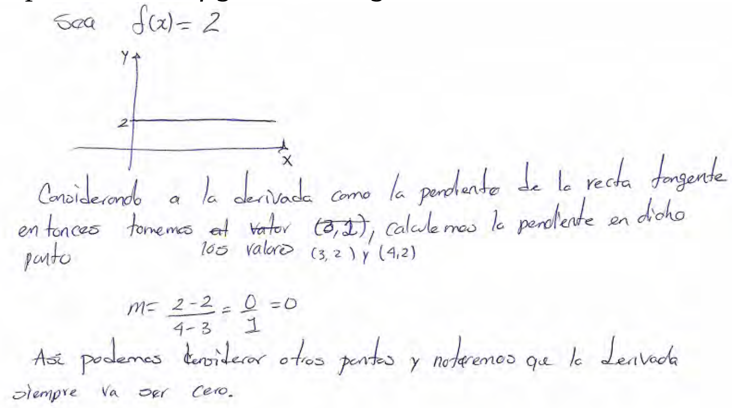
Respecto a la variable tipo de configuración cognitiva, la Tabla 5.9 presenta los resultados obtenidos para la tarea 4.

Tabla 5.9. Frecuencias y porcentajes para el tipo de configuración cognitiva del ítem a) de la tarea 4

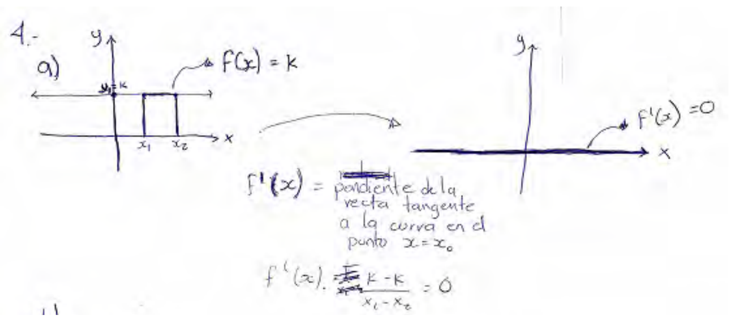
Configuración cognitiva	Tarea 4: ítem a)	
	Frecuencia	%
Analítica - extensiva	15	28,3
Analítica - intensiva	20	37,7
Trazado de tangentes	2	3,8
Uso de situaciones particulares de variación	1	1,9
Límite de las tasas medias de variación	5	9,4
No dan solución	10	18,9
Total	53	100

La Tabla 5.9, señala que, considerando las configuraciones analíticas-extensivas, analíticas-intensivas y trazado de tangentes, el 69,8% de los futuros profesores proporciona una solución en la que la derivada se interpreta como la pendiente de la recta tangente. El 11,3% interpreta la derivada como razón instantánea de cambio. El eje central de las configuraciones cognitivas asociadas a las resoluciones de la tarea 4, son las argumentaciones o justificaciones a la proposición "la derivada de una función constante siempre es igual a cero". Así, en la configuración cognitiva "analítica-extensiva" se dan argumentaciones mediante casos particulares del cálculo de las pendientes de algunas rectas horizontales. En la configuración "analítica-intensiva", las justificaciones se realizan mediante el cálculo de la pendiente de una función constante genérica. En la configuración "trazado de tangentes" las justificaciones se dan a partir del trazado de rectas tangentes a la función constante. En la configuración "uso de situaciones particulares de variación", se dan justificaciones basadas en situaciones concretas de variación, específicamente, de velocidad. Por último, en la configuración "límite de las tasas medias de variación", las argumentaciones se apoyan en la noción de tasa instantánea de variación, sin considerar casos concretos como la velocidad. La Figura 5.13 muestra ejemplos de respuestas que llevan asociadas los tres primeros tipos de configuraciones, en las que se considera la derivada como pendiente de la recta tangente.

Respuesta 1: configuración cognitiva "analítica-extensiva"



Respuesta 2: configuración cognitiva "analítica-intensiva"



Respuesta 3: configuración cognitiva "trazado de tangentes"

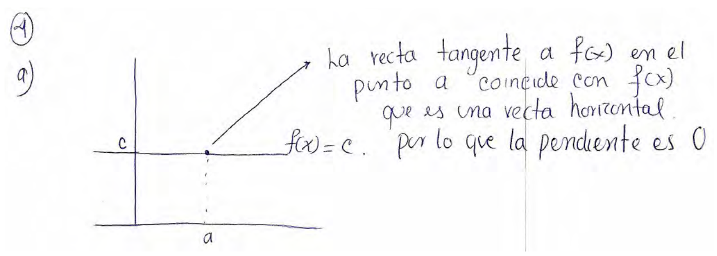
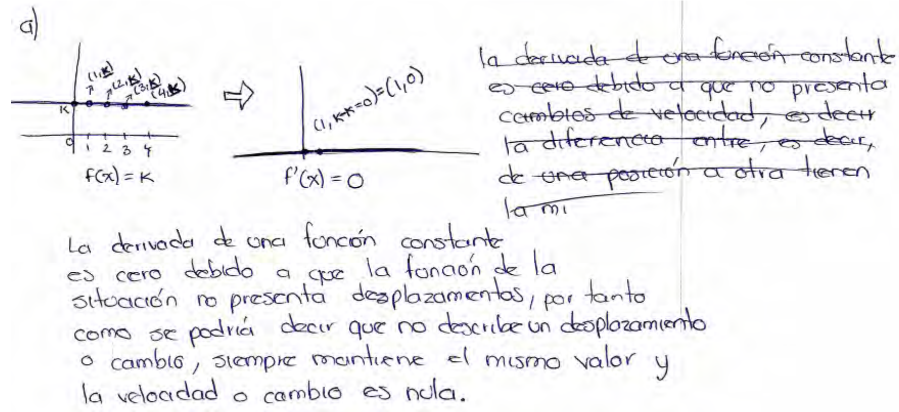


Figura 5.13. Configuraciones cognitivas con la derivada como pendiente de la recta tangente

La Figura 5.14 presenta respuestas en las que la derivada se utiliza como razón instantánea de cambio.

Respuesta 4: configuración cognitiva "uso de situaciones particulares de variación"



Respuesta 5: configuración cognitiva "límite de las tasas medias de variación"

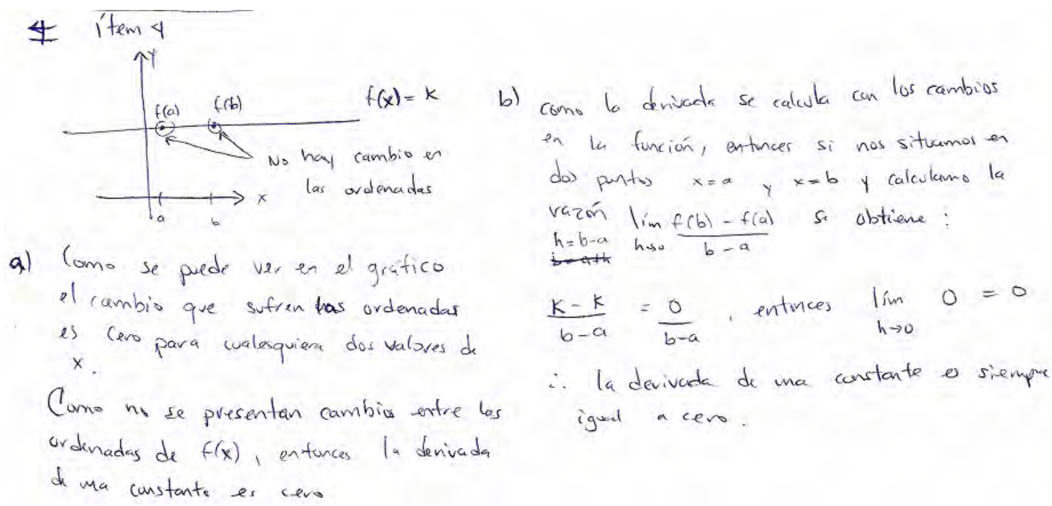


Figura 5.14. Configuraciones cognitivas con la derivada como razón instantánea de cambio

Dada la relación entre la tarea 4 y el tipo de conocimiento que evalúa, se deduce que los futuros profesores presentan carencias no sólo en el conocimiento especializado (uso de distintas representaciones, uso de distintos significados de la derivada, resolución del problema mediante diversos procedimientos, dar diversas argumentaciones válidas para explicar dichos procedimientos, etc.), sino también en el conocimiento común requerido para su solución. El estudio a profundidad de las configuraciones cognitivas descritas en la Tabla 5.9 e ilustradas en las Figuras 5.13 y 5.14, se realizará en la sección 5.4.2.3.4 de este capítulo.

5.4.2.2.6. Resultados para la tarea 5: describiendo características globales de la derivada

La Tabla 5.10 presenta los resultados obtenidos para el grado de corrección de la tarea 5.

Tabla 5.10. Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de la tarea 5

Grado de Corrección	Tarea 5	
	Frecuencia	%
Correcta	1	1,9
Parcialmente correcta	27	50,9
Incorrecta	23	43,4
No contestan	2	3,8
Total	53	100

Como puede apreciarse en la Tabla 5.10, esta tarea, por sus características, generó varias complicaciones a los futuros profesores para su solución, pues solamente un estudiante (1,9%) describió las características globales de la derivada, de la función dada gráficamente, respondiendo a las preguntas guía (ver Figura 5.5). El 50,9% de los estudiantes falló al responder alguna de las preguntas guía. Un alto número de estudiantes, 43,4%, respondieron de forma incorrecta a las preguntas guía. Más adelante, en la sección 5.4.2.3.5, analizaremos algunas respuestas de los estudiantes para indagar sobre el tipo de configuraciones que movilizaron y, que implícitamente, llevan asociadas concepciones erróneas de la derivada, aspecto que les impidió relacionar gráfica y verbalmente la función con su derivada. Debido a la relación existente entre la tarea y el tipo de conocimiento que evalúa, es claro que los futuros profesores no poseen un conocimiento especializado sólido que les permita resolver correctamente la tarea.

5.4.2.2.7. Resultados para la tarea 6: cálculo de los ceros de la función derivada

La Tabla 5.11 muestra los resultados obtenidos para la tarea 6 respecto de la variable grado de corrección. Dado que la tarea explora si los estudiantes realizan conexiones entre los distintos significados de la derivada que conocen, para el apartado b) de la tarea 6 se consideraron como correctas aquellas respuestas en las que se realizan asociaciones entre los distintos significados de la derivada y cuyas justificaciones eran válidas. Como incorrectas aquellas respuestas en las que no se realizan conexiones entre las acepciones de la derivada como: pendiente de la recta tangente y razón instantánea de cambio. Se consideraron parcialmente correctas aquellas respuestas en las que se realizan conexiones entre los distintos significados de la derivada pero cuyas justificaciones no son del todo válidas.

Como se puede observar en la Tabla 5.11, el 43,4% de los profesores en formación no tuvieron problemas para responder al ítem a) de la tarea. Sin embargo, sólo el 7,6% logró responder correctamente el apartado b). Los resultados obtenidos en esta tarea 6 y en las tareas anteriores, señalan una desconexión entre los significados de la derivada que conocen y los que usan en las prácticas matemáticas sobre la derivada. La Figura 5.15 muestra las respuestas de dos estudiantes en las que se hace evidente dicha desconexión. Retomaremos estos dos casos cuando analicemos, en la sección 5.4.2.3.6, las configuraciones cognitivas activadas por los estudiantes para resolver esta tarea.

Tabla 5.11. Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de la tarea 6

Grado de Corrección	**Apartado a)**		**Apartado b)**	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Correcta	23	43,4	4	7,6
Parcialmente correcta	7	13,2	20	37,7
Incorrecta	14	26,4	17	32,1
No contestan	9	17	12	22,6
Total	53	100	53	100

En la Figura 5.15 se aprecia cómo el estudiante 1 comienza a resolver el apartado a) de la tarea 6, de la misma forma en que procede, posteriormente, en el apartado b). Sin embargo, al percatarse de qué es lo que se le pide en el ítem b) de la tarea 6, escribe como respuesta al ítem a) “No tiene tangente horizontal”. Posteriormente responde correctamente el apartado b) hallando los puntos en los que la razón de cambio de *x* con respecto de *y* es cero. Más evidente es el caso del estudiante 2, quien resuelve correctamente el apartado a) de la tarea 6, y para el ítem b) responde: “Creo que es lo de arriba, en tal caso no pude contestar el inciso a”.

Como se muestra en los dos ejemplos (Figura 5.15), los futuros profesores tienen dificultades para establecer conexiones entre dos acepciones de la derivada. Como se observa en la Tabla 5.11, el 32,1% de los futuros profesores no lograron hacer una asociación entre los significados de la derivada como la siguiente: “la razón de cambio de *y* con respecto a *x* es cero en aquellos puntos en los que la recta tangente a la función es horizontal”.

Respuesta estudiante 1

6. $y = x^3 - \frac{x^2}{2} - 2x + 3$

a) $\cancel{y' = 3x^2 - x - 2}$ no tiene tangente horizontal

$\cancel{3x^2 - x - 2 = 0}$

b) $y' = 3x^2 - x - 2$

$3x^2 - x - 2 = 0$

$3x \quad +2$

$x \quad -1$

$(3x+2)(x-1) = 0$

$x = -\frac{2}{3}$ y $x = 1$ ← razón de cambio de y es cero

Respuesta estudiante 2

a) Sea $f(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} - 2x + 3$

$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - x - 2$

Sea $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - x - 2 = 0$

$(3x+2)(x-1) = 0$

$\Rightarrow 3x + 2 = 0$ ó $x - 1 = 0$

$x = -\frac{2}{3}$ $\qquad x = 1$

∴ Los puntos $x = 1$ y $x = -\frac{2}{3}$ tienen su tangente horizontal.

b) Creo que es lo de arriba, en tal caso, no pude contestar el inciso a.

Figura 5.15. Respuestas a la tarea 5 del *Cuestionario CDM-Derivada*

Como se muestra en los dos ejemplos (Figura 5.15), los futuros profesores tienen dificultades para establecer conexiones entre dos acepciones de la derivada. Como se observa en la Tabla 5.11, el 32,1% de los futuros profesores no lograron hacer una asociación entre los significados de la derivada como la siguiente: “la razón de cambio de *y* con respecto a *x* es cero en aquellos puntos en los que la recta tangente a la función es horizontal”.

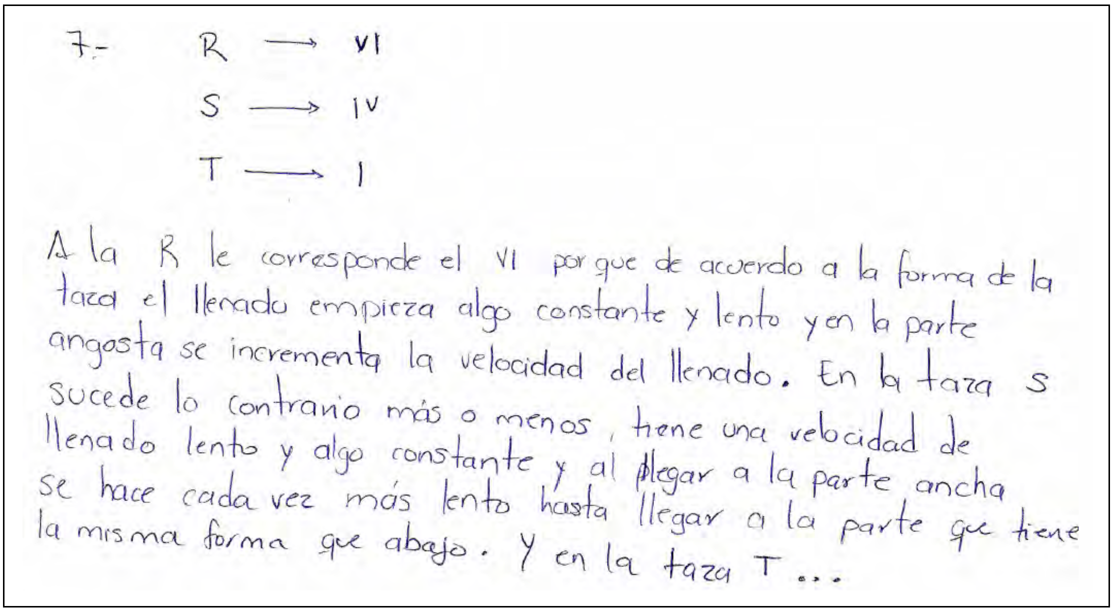
5.4.2.2.8. Resultados para la tarea 7: tasas instantáneas de variación

La Tabla 5.12 presenta los resultados para el grado de corrección de la tarea 7. Como se observa en dicha tabla, el 54,7% de los futuros profesores, tuvieron dificultades para resolver la tarea. Los 43 (81,1%) profesores en formación que respondieron la tarea, utilizaron la derivada en su acepción como velocidad instantánea. Sin embargo, sólo el 5,7% respondió correctamente al apartado a) de la tarea 7. La Figura 5.16 muestra un ejemplo prototípico de las respuestas parcialmente correctas que dieron los futuros profesores.

Tabla 5.12. Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de la tarea 7

Grado de corrección	Tarea 4: ítem a)	
	Frecuencia	%
Correcta	3	5,7
Parcialmente correcta	21	39,6
Incorrecta	19	35,8
No contestan	10	18,9
Total	53	100

Al igual que en el estudio de Çetin (2009), el 75,4% de los futuros profesores no estableció una relación entre las funciones $h(t)$, representadas por las tazas, y las gráficas de las funciones $h'(t)$. Una de las posibles causas es que los futuros profesores no están habituados a resolver problemas “no cotidianos”, lo que les obstaculizó el paso de la representación icónica de la función (el dibujo de las tazas) a la representación gráfica de la función derivada, sin pasar por la representación gráfica de la función.


7.- R → VI
S → IV
T → I

A la R le corresponde el VI por que de acuerdo a la forma de la taza el llenado empieza algo constante y lento y en la parte angosta se incrementa la velocidad del llenado. En la taza S sucede lo contrario más o menos, tiene una velocidad de llenado lento y algo constante y al llegar a la parte ancha se hace cada vez más lento hasta llegar a la parte que tiene la misma forma que abajo. Y en la taza T ...

Figura 5.16. Respuesta parcialmente correcta para el apartado a) de la tarea 7

Respecto al apartado b) de la tarea 7, todos los futuros profesores que lo respondieron proporcionar “listados” de algunos conceptos tales como: derivada, función, modelación, concavidad, crecimiento y decrecimiento de funciones, etc., lo que evidencia que su conocimiento especializado requerido para la identificación de conocimientos puestos en juego a propósito de una práctica matemática, debe ser potenciado.

5.4.2.2.9. Resultados para la tarea 8: velocidad instantánea

Para la Tarea 8 (Figura 5.8), se consideraron correctas aquellas respuestas en las que se obtuvo la velocidad pedida de la pelota a partir de procedimientos y justificaciones válidas. Las respuestas correctas están relacionadas con el tipo de configuración cognitiva "por aproximación bilateral" (ver Tabla 5.14). Las respuestas parcialmente correctas, relacionadas con la configuración "aproximación por la izquierda o derecha", fueron aquellas en las que se utilizaron procedimientos y justificaciones que no son del todo erróneos pero tampoco son suficientemente válidos para encontrar la velocidad pedida. Como incorrectas se consideraron aquellas respuestas en las que no se halla la velocidad de la pelota para $t = 0.4$, debido a que los procedimientos seguidos y las justificaciones dadas no eran válidos. Las respuestas incorrectas están relacionadas con los tipos de configuraciones *patrón numérico* y *uso de la relación física* $v = d/t$. La Tabla 5.13 muestra los resultados obtenidos para el grado de corrección de la tarea 8.

Tabla 5.13. Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de la tarea 8

Grado de corrección	**Tarea 8**	
	Frecuencia	%
Correcta	1	1,9
Parcialmente correcta	5	9,4
Incorrecta	23	43,4
No contestan	24	45,3
Total	53	100

A partir de la Tabla 5.13, se deduce que tan sólo un estudiante para profesor (1,9%) logra resolver correctamente la tarea, y cinco (9,4%) dan una respuesta parcialmente correcta. Esto sugiere que, al menos, el 88,7% de los futuros profesores presentan carencias respecto del conocimiento matemático ampliado requerido para resolver la tarea.

Finalmente, la Tabla 5.14 presenta los resultados obtenidos respecto a la variable tipo de configuración cognitiva para la tarea 8.

Tabla 5.14. Frecuencias y porcentajes para el tipo de configuración cognitiva para la tarea 8

Tipo de configuración cognitiva	**Tarea 8**	
	Frecuencia	%
Patrón numérico	3	5,7
Uso de la relación física $v = d/t$	13	24,5
Aproximación por la izquierda o derecha	4	7,5
Aproximación bilateral	2	3,8
No dan evidencia de su solución	31	58,5
Total	53	100

A partir de la Tabla 5.14 y del análisis realizado para cada tipo de configuración cognitiva[31] se puede concluir que 17 (32%) de los futuros profesores no distinguen la diferencia entre función derivada y derivada en un punto. Las configuraciones cognitivas asociadas a la actividad matemática desarrollada por estos 17 profesores están contempladas en las configuraciones: "mediante la relación física $v = d/t$" y "aproximación por la izquierda o derecha". Este hallazgo referente a la problemática para distinguir la diferencia entre la función derivada y la derivada en un punto ha sido reportado en otras investigaciones (Inglada y Font, 2003; Badillo, Azcárate y Font, 2005; Badillo, Azcárate y Font, 2011).

Esta desconexión aparente entre la interpretación de la derivada en un punto y la función derivada, como se verá a continuación en la sección 5.4.2.3 de este capítulo, induce al error de responder la pregunta, ¿Cuál es la velocidad de la pelota en el instante $t = 0.4s$? mediante el cálculo de la velocidad promedio. Parece probado que los futuros profesores no relacionan los distintos significados para la derivada. Los estudiantes parecen ignorar que la relación $v = d/t$ representa la velocidad promedio de la pelota correspondiente a dos tiempos distintos. Esta velocidad promedio se relaciona a su vez con la pendiente de alguna recta secante a la función desplazamiento, lo cual no se corresponde con una interpretación para la derivada.

5.4.2.3. Análisis cualitativo de los datos

Para el análisis cualitativo de las respuestas de los estudiantes (tipo de solución y configuración cognitiva asociada) utilizamos algunas herramientas del enfoque ontosemiótico antes descritas, en particular, aquellas que nos ayudan a analizar de manera sistemática las prácticas matemáticas desarrolladas por los futuros profesores para resolver los problemas propuestos, así como los objetos matemáticos primarios (elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) y procesos (particularización – generalización, materialización – idealización) inmersos en dichas prácticas (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2011). Además, este análisis nos permite generar información acerca del conocimiento especializado (uso de diferentes procedimientos, modalidades de expresión, conceptos y propiedades que se ponen en juego en la resolución de la tarea, así como diversas formas de argumentar o justificar los procedimientos y propiedades utilizados), y conocimiento ampliado (procesos de generalización-

[31] El lector puede encontrar un análisis detallado del tipo de configuraciones cognitivas asociadas a las respuestas de los futuros profesores a la tarea 8, en el apartado 5.4.2.3.8

particularización y conexiones con otros contenidos matemáticos más avanzados en el currículo).

A continuación presentamos el análisis de las configuraciones cognitivas asociadas a las resoluciones de cada una de las tareas que integran el *Cuestionario CDM-Derivada*, mediante la descripción de la actividad matemática desarrollada por los estudiantes, así como de los objetos matemáticos primarios y los procesos implícitos en dichas prácticas.

5.4.2.3.1. Configuraciones cognitivas asociadas a la resolución de la tarea 1

Debido a las características de esta primera tarea, no es posible hacer un análisis profundo sobre las configuraciones de objetos y procesos que movilizan los estudiantes en su resolución. La tarea uno nos permite tener una primera panorámica general de los significados de la derivada que “conocen” o mejor dicho, “recuerdan” los profesores en formación inicial. Como resultado a la pregunta, los futuros profesores, tal y como lo previmos en el análisis a priori del contenido de la tarea (ver sección 5.3.2.1), proporcionaron “listados” de posibles significados de la derivada entre los que se encontraron: “pendiente de la recta tangente en un punto determinado”, “razón instantánea de cambio”, “límite del cociente de incrementos (tasa instantánea de variación)”. Adicionalmente, algunos de los estudiantes proporcionaron significados para la derivada que, debido a su naturaleza, no eran del todo correctos pero tampoco eran del todo erróneos; por ejemplo: es una función, es un procedimiento, mejor aproximación lineal, proceso inverso a la integral, entre otros. En la Figura 5.11, se presentan ejemplos prototípicos de significados para la derivada que, de acuerdo a nuestra posición, no son del todo válidos.

La cuestión importante que surge a partir de las respuestas de los estudiantes a esta primera tarea es, ¿los profesores en formación inicial son capaces de utilizar los significados de la derivada, en la resolución de tareas que requieren del uso de dos o más acepciones de la derivada? En general, entre otros aspectos, las preguntas siguientes del *Cuestionario CDM-Derivada* responden a esta cuestión. No obstante, deseamos anticipar que las soluciones que los profesores en formación inicial dieron a la tarea 6, clarifican la respuesta a la cuestión anterior.

5.4.2.3.2. Configuraciones cognitivas asociadas a la resolución de la tarea 2

En las resoluciones que dieron los futuros profesores a la tarea dos, concretamente, las resoluciones a los ítems a), b) y c) de la tarea, se identificaron 3 tipos de configuraciones cognitivas las cuales hemos denominado: 1) gráfico – verbal; 2) técnica; y 3) formal. A continuación presentamos el análisis de cada una de estas configuraciones mediante un ejemplo prototípico.

Configuración cognitiva 1: gráfico – verbal

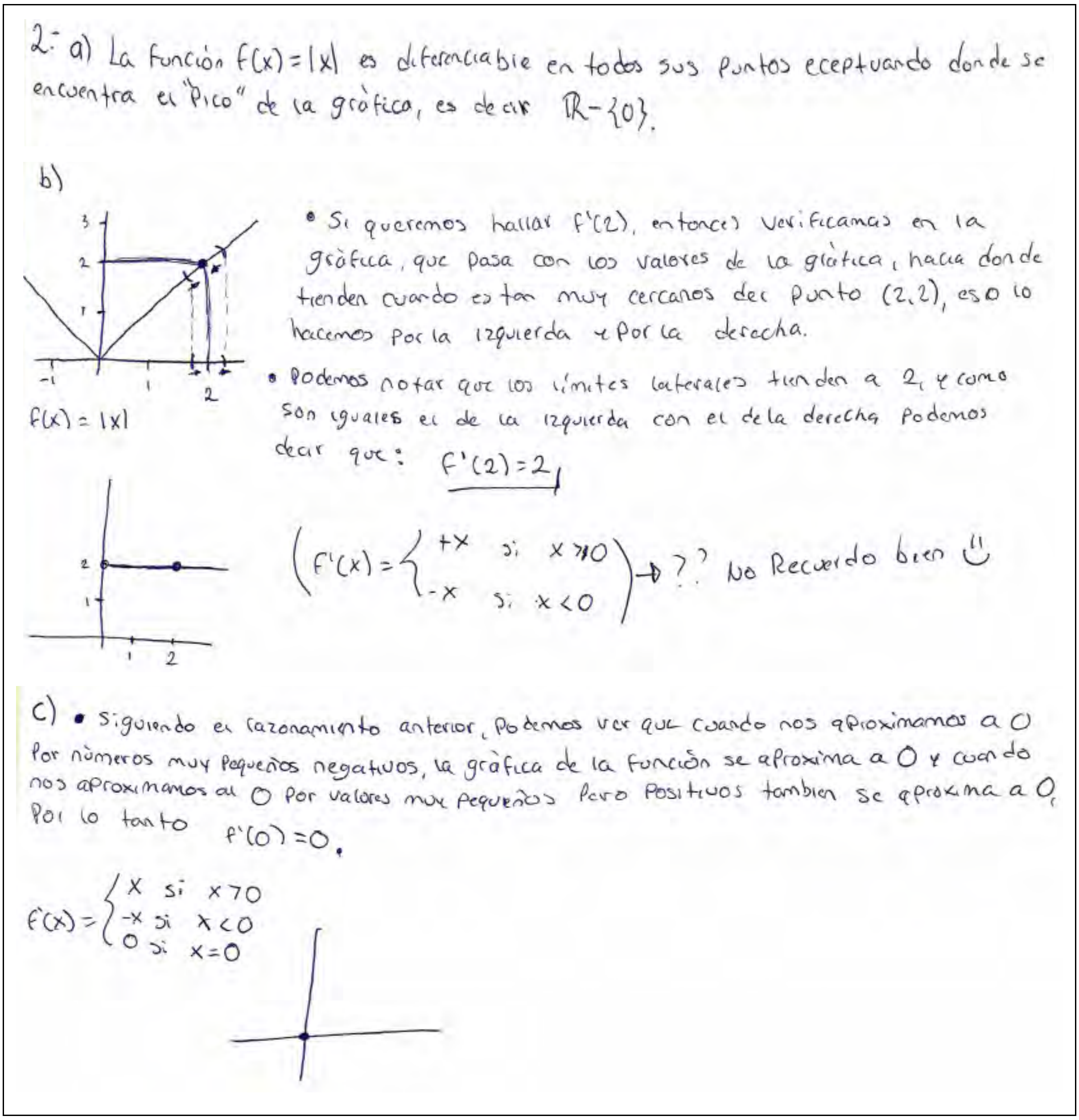
La característica esencial de este tipo de resolución es el carácter visual-descriptivo, a partir de la representación gráfica de la función $f(x) = |x|$. Se trata de respuestas en las que se activan procedimientos y argumentos descriptivos, a partir de la representación gráfica de la función $f(x) = |x|$ y la derivada como pendiente de la recta tangente a la función en un punto específico. La Figura 5.17 muestra la respuesta de un estudiante (estudiante A) que es un ejemplo característico de las soluciones que movilizan una configuración gráfico-verbal.

Práctica Matemática

Como puede observarse en la Figura 5.17, la actividad matemática desarrollada por el estudiante para profesor A, comienza con la justificación visual de una propiedad (la derivabilidad de la función valor absoluto). En general, su actividad se centra en el uso de descripciones verbales de su análisis visual a partir de la gráfica de la función $f(x) = |x|$.

Configuración Cognitiva

En la actividad matemática desarrollada por el estudiante A, es posible identificar el uso de diversos *elementos lingüísticos* tales como el uso predominante del lenguaje natural (descripciones verbales), algunos elementos simbólicos tales como "$\mathbb{R} - \{0\}$" o la derivada por partes $f'(x) = \begin{cases} x & si\ x > 0 \\ -x & si\ x < 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$ de la función valor absoluto [ítem c)]. Así mismo, el estudiante A, hace uso de elementos lingüísticos gráficos [de los ítems b) y c)] con los que "explica" su análisis. Estos elementos lingüísticos hacen referencia a una serie de conceptos, y proposiciones que se detallan a continuación.



2:- a) La función $f(x)=|x|$ es diferenciable en todos sus puntos eceptuando donde se encuentra el "Pico" de la gráfica, es decir $\mathbb{R}-\{0\}$.

b)

• Si queremos hallar $f'(2)$, entonces verificamos en la gráfica, que pasa con los valores de la gráfica, hacia donde tienden cuando estan muy cercanos del punto $(2,2)$, eso lo hacemos por la izquierda y por la derecha.

• Podemos notar que los límites laterales tienden a 2, y como son iguales el de la izquierda con el de la derecha podemos decir que: $f'(2)=2$

$f(x)=|x|$

$\left(f'(x)=\begin{cases}+x & si\ x>0\\ -x & si\ x<0\end{cases}\right) \to$?? No Recuerdo bien

c) • Siguiendo el razonamiento anterior, podemos ver que cuando nos aproximamos a 0 por números muy pequeños negativos, la gràfica de la función se aproxima a 0 y cuando nos aproximamos al 0 por valores muy pequeños pero positivos tambien se aproxima a 0, por lo tanto $f'(0)=0$.

$f'(x)=\begin{cases}x & si\ x>0\\ -x & si\ x<0\\ 0 & si\ x=0\end{cases}$

Figura 5.17. Solución a la tarea 2 por el estudiante A

Entre los *conceptos* podemos destacar los de función (valor absoluto), dominio (de la función derivada y representado por $\mathbb{R}-\{0\}$), aproximación (a un punto específico de la función valor absoluto, en este caso a $x=0$ y $x=2$, tomando valores cada vez más próximos a dichos valores del dominio), limites laterales (que definen el limite bilateral de la función), y la derivada de la función valor absoluto (erróneamente definida como $f'(x)=\begin{cases}x & si\ x>0\\ -x & si\ x<0\\ 0 & si\ x=0\end{cases}$). Los límites laterales, y en consecuencia los bilaterales, a los puntos del dominio de la función $x=0$ y $x=2$, aunque visualmente bien calculados (si lo que se quisiera fuera calcular los límites de la función valor absoluto en dichos puntos del dominio), fueron usados incorrectamente por el estudiante A, para el cálculo de la derivada de la función en los puntos $x = 2$ y $x = 0$.

Este uso incorrecto de los límites laterales para el cálculo de la derivada se debe a la confusión o no comprensión, del estudiante, de una *proposición* que refiere a la relación entre continuidad y derivabilidad: una función derivable es continua pero una función continua no es necesariamente derivable. Lo anterior se evidencia con el uso del *procedimiento* y el *argumento* para el cálculo de $f'(2)$, referidos por el siguiente elemento lingüístico: "Si queremos hallar $f'(2)$, entonces verificamos en la gráfica, qué pasa con los valores de la gráfica, hacia dónde tienden cuando están muy cercanos del punto $(2\,,2)$, eso lo hacemos por la izquierda y por la derecha. Podemos notar que los límites laterales tienden a 2, y como son iguales el de la izquierda como el de la derecha, podemos decir que $f'(2) = 2$". Tanto el procedimiento como la argumentación que el estudiante proporciona para el cálculo de $f'(2) = 2$, se evidencian también con la representación gráfica proporciona en el ítem b) de la tarea (Figura 5.17). El error se hace más evidente cuando señala el *procedimiento* y su *justificación* empleados para resolver el ítem c) de la tarea en el cual se le pide verificar la derivabilidad de la función valor absoluto en $x = 0$, para lo cual responde, "Siguiendo el razonamiento anterior, podemos ver que cuando nos aproximamos a 0 por números muy pequeños negativos, la gráfica de la función se aproxima a 0 y cuando nos aproximamos a cero por valores muy pequeños pero positivos también se aproxima a 0, por lo tanto $f'(0) = 0$".

Entre otras proposiciones activadas en la solución del estudiante, podemos destacar la derivabilidad de la función valor absoluto en cero, la cual justifica visualmente de la siguiente manera, "La función $f(x) = |x|$ es diferenciable en todos sus puntos exceptuando donde se encuentra el 'pico' de la gráfica…".

Así como el ejemplo que hemos analizado, las respuestas que hemos incluido dentro de este tipo de configuración cognitiva centran sus procedimientos y argumentos en el análisis visual de las propiedades de la gráfica de la función. Por ejemplo, otro tipo de respuestas que fue común es la que presentamos en la Figura 5.18, en las que se justifica la no derivabilidad de la función valor absoluto en $x = 0$ mediante el trazado de "infinitas" tangentes a la función en dicho punto. Este otro tipo de respuestas centraban su atención en la acepción de la derivada como pendiente de la rectan tangente en un punto determinado.

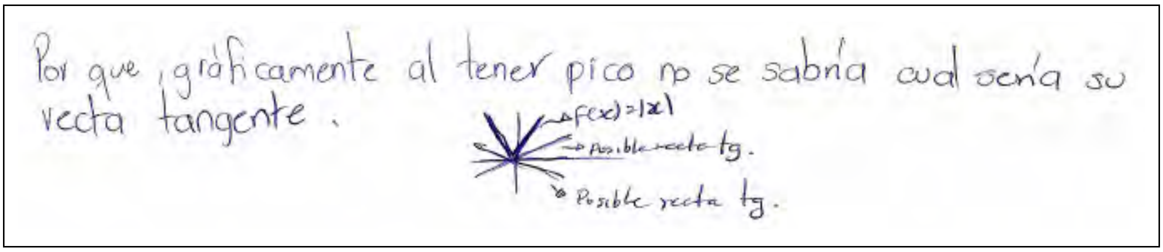


Figura 5.18. Respuesta de un estudiante al ítem c) de la tarea.

En general, el alcance y potencialidad, en cuanto a conocimientos didácticos y matemáticos, de las respuestas que activaron una configuración *gráfico-verbal* fue limitada, pues ninguno de los futuros profesores que dio una respuesta con las características que acabamos de describir, fue capaz de resolver el ítem d) de la tarea, es decir, generalizar la tarea con base en la definición formal de la derivada (como límite de las tasas medias de variación). Otro aspecto a resaltar es que las respuestas dentro de esta categoría, fueron casi en su totalidad erróneas [a excepción de las respuestas del ítem a) de la tarea que justificaban por medio del "pico" de la gráfica de la función]; esto debido posiblemente a que, al centrarse sólo al análisis empírico o visual de la función dada y por las concepciones erróneas tal y como la relación entre continuidad y derivabilidad, se forman obstáculos conceptuales importantes en los estudiantes que no les permiten percibir incongruencias tales como responder al ítem a) de la tarea que la función $f(x) = |x|$ es derivable para "todos los reales excepto el cero" y posteriormente responder al ítem c) de la tarea que $f'(0) = 0$, $f'(0) = 1$ o $f'(0) = -1$, estas do últimas según se defina la función valor absoluto y mediante el cálculo de la pendiente del segmento de recta (perteneciente a la función) ubicada en el primero o segundo cuadrante respectivamente.

Por todo lo anterior, es claro que los profesores en formación inicial que proporcionaron una respuesta de este tipo, poseen un limitado conocimiento común y casi nulo conocimiento especializado y ampliado requeridos para la resolución de la tarea.

<u>*Configuración cognitiva 2: técnica*</u>

La característica primordial de las respuestas que movilizan una configuración técnica, radica en el uso y manipulación predominante de los elementos simbólicos de los objetos matemáticos involucrados. Concretamente las respuestas se centran en el uso de la definición (simbólica) de la función valor absoluto y al uso de las reglas de derivación para "derivar por partes” dicha función. La Figura 5.19, presenta dos ejemplos característicos de este tipo de respuestas.

Práctica Matemática

Como se puede observar en la Figura 5.19, el estudiante para profesor B comienza definiendo “a trozos” la función valor absoluto. A partir de dicha definición calcula (mediante técnicas de derivación) $f'(2)$ y $f'(0)$ respectivamente. Este proceso se ve de forma clara en la respuesta del estudiante C. Quizá la única diferencia entre estas dos respuestas es que e estudiante C contempla algunos aspectos visuales para dar su respuesta.

Configuración Cognitiva

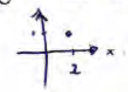
Como se puede observar en la Figura 5.19, los estudiantes para profesor B y C utilizan elementos lingüísticos verbales, simbólicos y gráficos en el desarrollo de su práctica. Entre ellos podemos destacar las expresiones $f(x) = \begin{cases} x & \forall x \geq 0 \\ -x & \forall x < 0 \end{cases}$ (estudiantes B y C), que refiere al concepto de la función valor absoluto; $f'(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \geq 0 \\ -1 & \forall x < 0 \end{cases}$ que refiere al concepto de derivada de la función valor absoluto según el estudiante C e implícita en la solución del estudiante B; $f'(x) = 1$, que según el estudiante B es la respuesta a los ítems b) y c) de la tarea; $f'(2) = 1$ y $f'(0) = 1$ que refieren al concepto de derivada en un punto (la derivada en los puntos 2 y 0 del dominio), y que de acuerdo con el estudiante C es la respuesta a los ítems b) y c) respectivamente. Entre los elementos lingüísticos verbales podemos destacar, “la función sería diferencial en todo el dominio”, que refiere a una proposición planteada por el estudiante B y para él representa la solución del ítem a) de la tarea; “la derivada sería…entonces representaría un punto”, que es la proposición planteada por el estudiante B y que resuelve, para él, los ítems b) y c) de la tarea. Esta última proposición da indicios de que el estudiante B al escribir “$f'(x) = 1$”, como respuestas en los ítems b) y c), en realidad quiere indicar que la derivada de la función valor absoluto para todas las $x \geq 0$ es uno. Esto se ve más claro en el procedimiento del estudiante C.

Una proposición que es clave en los procedimientos empleados en las prácticas que hemos englobado dentro de esta categoría, son las reglas de derivación, las cuales están implícitas en las respuestas de los estudiantes B y C, y que permitieron “hallar la derivada” de la función valor absoluto en los puntos 0 y 2.

Respuesta estudiante B

Si se ve como una función de tipo $f(x) = \begin{cases} x & \forall\, x \geq 0 \\ -x & \forall\, x < 0 \end{cases}$ la función seria diferenciabl en todo el Dominio, o sea, $(-\infty, \infty)$

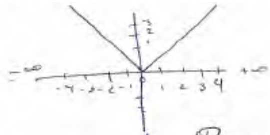
Tomando el tipo de función $f(x) = \begin{cases} x & \forall\, x \geq 0 \\ -x & \forall\, x < 0 \end{cases}$ la ~~dife~~ derivada sería.
$f(x) = 1$ entonces representaria un punto



c) Como el inciso anterior si se toma a la funcion $f(x) = \begin{cases} x & \forall x \geq 0 \\ -x & \forall x < 0 \end{cases}$ la derivada seria $f'(x) = 1$ y la representacion gráfico seria

Respuesta estudiante C

2: Sea $f(x) = |x|$ y su grafica.

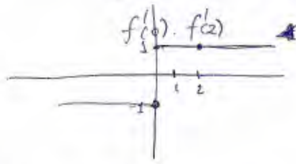


a) Es diferenciable para todos los varores de $\mathbb{R}$ excepto el 0. es decir $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) Si $f(x) = |x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0. \end{cases}$

$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \geq 0 \\ -1 & si\ x < 0. \end{cases} \Rightarrow$ Sea $x = 2 \Rightarrow f'(2) = 1$

$\Rightarrow$



Esta es la representación gráfica de $f'(2)$.

c) De igual forma: Sea $x = 0 \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & Si\ x \geq 0 \\ -1 & si\ x < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow f'(0) = 1$ Pero note que no es diferenciable en $x = 0$ pero si en $x = 2$, también por como la definí.

Figura 5.19. Solución a la tarea 2 por los estudiante B y C

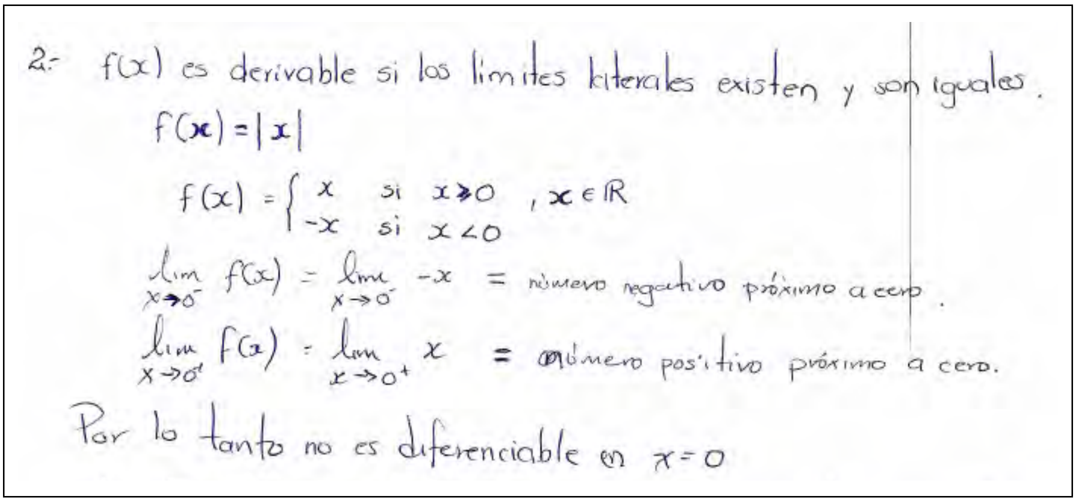
El error que fue común en los estudiantes que activaron una configuración como la que acabamos de describir, se evidencia en la seudo representación gráfica de $f'(0)$ planteada por el estudiante B.

Tal y como lo advertimos en el análisis cuantitativo de la tarea dos (sección 5.4.2.2.3), más del 50% de los estudiantes tuvieron dificultades para responder a los ítems b) y c) de la tarea. Lo anterior demuestra que los estudiantes requieren mejorar su conocimiento común y especializado requerido para resolver tareas como la planteada.

Finalmente dos aspectos relevantes que no podemos dejar de mencionar son, en primer lugar, que muchos de los estudiantes que activaron una configuración cognitiva técnica, respondieron al ítem a) mediante consideraciones visuales como “la función no es derivable en $x = 0$ porque tiene un pico en dicho punto”. Esto generó un conflicto cognitivo al momento de presentar su respuesta, a los ítems b) y c), mediante una configuración técnica, esto queda reflejado, por ejemplo, en la respuesta del estudiante C de la siguiente manera: “…$f'(0) = 1$. Pero noté que no es diferenciable en $x = 0$ pero sí en $x = 2$, también por como la definí [a la función valor absoluto]”. Conflicto similar presentan otros estudiantes cuando señalaron que $f'(0) = -1$ por definir la función valor absoluto como $f(x) = \begin{cases} x & \forall x > 0 \\ -x & \forall x \leq 0 \end{cases}$, o bien que $f'(0) = 0$ pues definieron la función valor absoluto como $f(x) = \begin{cases} x & \forall x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & \forall x < 0 \end{cases}$. El segundo aspecto es que ninguno de los estudiantes que respondieron a los ítems a), b) y c) de la tarea activando configuraciones como la que acabamos de describir, fue capaz de responder al ítem d) de la tarea.

Configuración cognitiva 3: formal

El eje central de este tipo de configuraciones es el uso de la derivada en su acepción “formal” de tasa instantánea de variación (límite del cociente de incrementos) y el uso de las derivadas laterales para el estudio de la derivabilidad de la función valor absoluto en $x = 0$. La Figura 5.20 presenta un ejemplo prototípico del tipo de soluciones que movilizan una configuración formal.


2.- f(x) es derivable si los límites laterales existen y son iguales.

$f(x) = |x|$

$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}, x \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -x$ = número negativo próximo a cero.

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x$ = número positivo próximo a cero.

Por lo tanto no es diferenciable en $x = 0$

Figura 5.20. Solución a la tarea 2 por el estudiante D

Práctica Matemática

La Figura 5.20 muestra, a manera de ejemplo, la actividad matemática desarrollada por un estudiante (D). Desde el principio se puede apreciar el carácter formal, aunque erróneo, de la solución de dicho estudiante mediante el empleo de límites laterales para "verificar la derivabilidad de la función valor absoluto en $x = 0$". El intento, aunque fallido, del estudiante D por verificar la derivabilidad en $x = 0$ de la función valor absoluto a partir de las derivadas laterales, es logrado por el estudiante E (Figura 5.21).

c) No es posible, ~~la pendiente (la derivada) de la función cuando nos aproximamos por la derecha y por la izquierda son ambas diferentes y solo en ese punto, hace cómo un cambio bruzco, que no se puede saber si la pendiente es -1 o 1.~~

~~#~~ $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ cuando ~~f(x+h~~ h va tomando valores muy cercanos a cero, f(x+h) va adquiriendo

Este límite existe cuando ~~la el límite~~ el límite h tiende a 0^+ y el límite cuando h tiende a 0^- son iguales.

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{x}+h-\cancel{x}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-\cancel{x}-h+\cancel{x}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0^-} -1 = -1$$

Podemos notar que son diferentes por lo tanto $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ no existe y por lo tanto la derivada no existe.

Figura 5.21. Solución al ítem c) de la tarea 2 por el estudiante E

Configuración Cognitiva

Como se puede apreciar en las respuestas de los estudiantes D y E (Figuras 5.20 y 5.21), los *elementos lingüísticos* utilizados en esta categoría de configuración cognitiva son casi en su totalidad simbólicos y verbales. Por ejemplo, la expresión lingüística, "$f(x)$ es derivable si los límites laterales existen y son iguales" (estudiante D) que hace referencia a una proposición/propiedad de la existencia del límite bilateral de la función en $x = 0$. La enunciada proposición podría ser correcta si el estudiante D no hubiera escrito seguidamente los elementos lingüísticos simbólicos siguientes "$\lim_{x \to 0^-} f(x) \ldots \lim_{x \to 0^+} f(x) \ldots$" que indican que los limites laterales que contempla no son los que definen las derivadas laterales como en el caso de los elementos lingüísticos siguientes considerados por el estudiante E que hacen referencia a una proposición importante en esta categoría de configuración cognitiva: "$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$…este límite existe [si] el límite cuando h tiende a 0^+ y el límite cuando h tiende a 0^- son iguales" (Figura 5.21). Esta proposición planteada por el estudiante E, alude al concepto principal de esta configuración: la derivada en su acepción de tasa instantánea de variación (límite del cociente de incrementos) y la demostración de su existencia mediante los límites laterales que definen las derivadas laterales.

El uso incorrecto de los límites laterales para el cálculo de la derivada, como en casos anteriores, pensamos se debe a la confusión o no comprensión, del estudiante D, de una *proposición* que refiere a la relación entre continuidad y derivabilidad: una función derivable es continua pero una función continua no es necesariamente derivable. Este hecho aunado a que, como se vio en la sección 5.4.2.2., sólo 3 de los 53 futuros profesores proporcionaron una respuesta que lleva asociada una configuración cognitiva "formal" de los cuales uno de ellos la activo de forma incorrecta (estudiante D), demuestra que en general, el conocimiento de los futuros profesores asociado al uso de la acepción de la derivada como tasa instantánea de variación es limitado, lo que contribuyó a que reflejaran un limitado conocimiento especializado y ampliado requerido para la resolución de la tarea.

Un aspecto que debe ser resaltado es que, a pesar de que muchos estudiantes activaron combinaciones de las configuraciones antes descritas en sus resoluciones [e.g., visual para la resolución del ítem a), técnica para el ítem b) y formal para el ítem c)], estas "combinaciones" no contribuyeron a la comprensión de la tarea, pues siempre existía el predominio de lo visual sobre lo simbólico (en el caso de la configuración cognitiva 1) o bien de lo simbólico sobre lo visual (configuración cognitiva 2) lo que originaba algunos conflictos cognitivos en los estudiantes tal como la respuesta del estudiante C (Figura 5.19). Dichos conflictos cognitivos fueron ocasionados por la desvinculación aparente de los diversos significados asociados a un mismo objeto matemático dependiendo de la configuración en que se moviliza.

Además se evidenció que los estudiantes no dominaban el uso (y comprensión) de la acepción formal de la derivada (como límite de las tasas medias de variación), pues a los ítems c) y d), en los que se requería su uso, muchos estudiantes respondieron como el estudiante que se presenta en el ejemplo de la Figura 5.22.

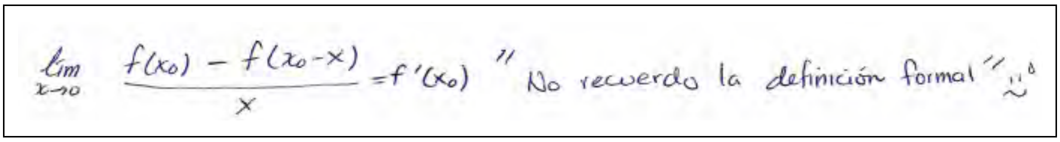
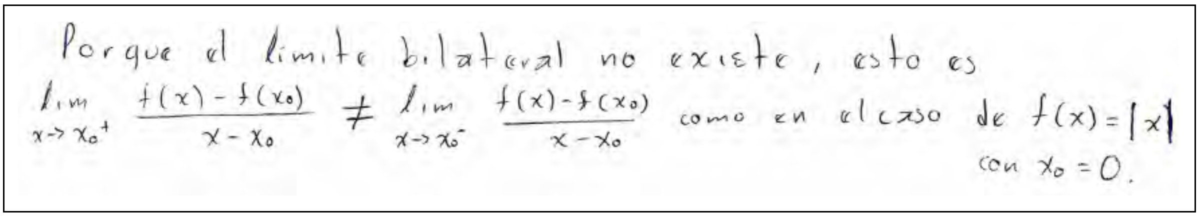

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - x)}{x} = f'(x_0)$ "No recuerdo la definición formal"

Figura 5.22. Respuesta de un estudiante al ítem d) de la tarea 2

Configuraciones cognitivas asociadas a la resolución del ítem d)

Podría decirse que el ítem d) de la tarea dos requería, para su resolución, que los estudiantes movilizaran una configuración formal en la que cobrara protagonismo una proposición basada en la derivada en su acepción de límite de las tasas medias de variación: "la gráfica de una función derivable no puede tener 'picos' ya que en aquellos puntos donde la función alcanza un pico, los límites laterales $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ y $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ que definen las derivadas laterales son distintos, por lo tanto el limite bilateral $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ que define la derivada en dichos puntos, no están definido". La Figura 5.23 muestra a manera de ejemplo la respuesta del estudiante F al ítem d) de la tarea.


Porque el límite bilateral no existe, esto es

$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ como en el caso de $f(x) = |x|$ con $x_0 = 0$.

Figura 5.23. Solución al ítem d) de la tarea 2 por un estudiante F

Como se puede apreciar en la Figura 5.23, el futuro profesor F emplea elementos lingüísticos simbólicos y verbales para expresar la proposición antes mencionada que justifica el por qué la gráfica de una función derivable no puede tener picos. Otros ejemplos de respuestas dadas al ítem d) de la tarea dos, en las que se moviliza una configuración formal se presenta en la Figura 5.24.

A pesar de que, por su naturaleza, el ítem d) requería la activación de una configuración formal para su resolución, algunos estudiantes activaron configuraciones visuales, como el ejemplo que se presenta en la Figura 5.25.

Estudiante C

Segun la definición de derivada es un límite. por ende para que el límite exista es necesario que exista tanto por la derecha que por la izquierda ~~es por eso~~ y que estos límites coincidan, es por eso, que en un pico o en ángulo al momento de calcular dicho límite ~~no existe~~ puede existir pero los límites laterales no coincidir. Como sucedio en $f(x) = |x|$, con $x = 0$. ya que ~~el~~ los límites derechos no coincide con el izquierdo. de no ser así no es diferenciable

Estudiante E

) Como ya lo había mencionado por que si tuviera picos el limite de la definicion formal de derivada no existiria, por que los límites laterales en el punto donde está el pico, no serian iguales.

Figura 5.24. Solución al ítem d) de la tarea 2 por los estudiantes C y E

No es posible que existan picos porque tomando en consideración que la derivada es la pendiente de la recta tangente, no es posible aproximar la pendiente. ya que pueden existir muchas rectas que cumplan ser tangentes.

Figura 5.25. Solución al ítem d) de la tarea 2 por un estudiante G

<u>Configuraciones cognitivas asociadas a la resolución del ítem e)</u>

Como señalamos en el apartado 5.3.2.2, el ítem e) de la tarea dos requería que los futuros profesores movilizaran su conocimiento especializado relacionado con la identificación de los conocimientos (i.e., configuraciones de objetos y sus significados) involucrados en la resolución de la tarea. Sin embargo, todas las respuestas al ítem e) fueron “listados” o bien de algunos conceptos involucrados, o bien de habilidades matemáticas necesarias para la resolución de la tarea. La Figura 5.26 presenta las respuestas al ítem e) proporcionadas por los estudiantes A, B y C respectivamente. Ese tipo de respuestas (como los presentados en la Figura 5.26, nos dan evidencia de que el conocimiento especializado, en su faceta de identificación de conocimientos, de los profesores en formación inicial, es limitado y debe ser potenciado.

Estudiante A

d) Ponemos en juego la noción de derivada, límites, un poco de análisis de gráficas. y saber que representa la solución gráficamente.

Estudiante B

→ Interpretación de la derivada.
→ Existencia de la derivada.

Estudiante C

d) Los conocimientos que se ponen en juego a mi punto de vista son los siguientes.
- límite. (teoría y teoremas que refieren a límite).
- teorema fundamental del cálculo.
- Continuidad.
- diferenciabilidad.
- Nimeros reales.
- funciones.

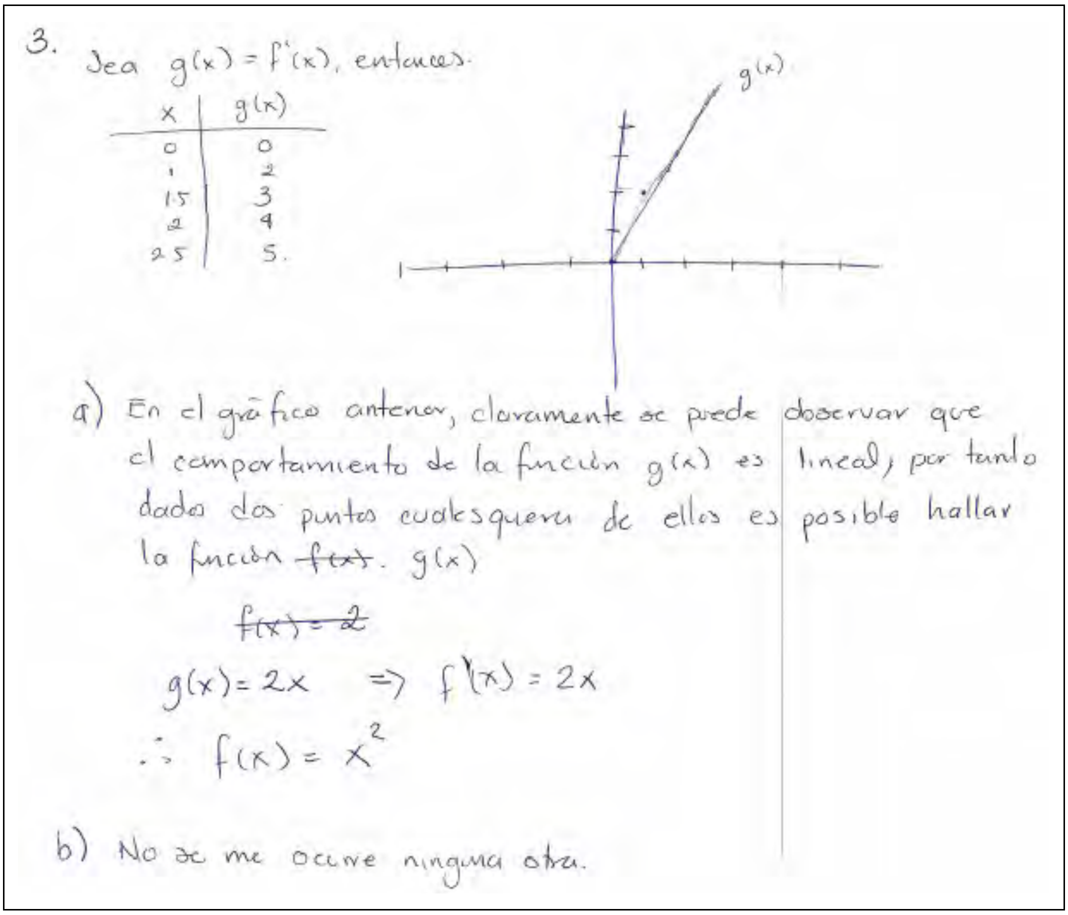
Figura 5.26. Soluciones al ítem e) de la tarea 2 por los estudiantes A, B y C

5.4.2.3.3. Configuraciones cognitivas asociadas a la resolución de la tarea 3

A partir de las resoluciones que dieron los futuros profesores a la tarea 3, fue posible identificar cuatro tipos de configuraciones cognitivas para el ítem a) de la tarea, y cuatro para el ítem b). A estas configuraciones las hemos nombrado: [ítem a)] 1) gráfico-técnica; 2) gráfico-avanzada; 3) numérica-técnica; 4) numérica-avanzada; [ítem b)] 5) avanzada; 6) técnica; 7) unicidad errónea; y 8) funciones equivalentes. A continuación analizamos cada configuración mediante un ejemplo prototípico.

Configuración cognitiva 1: gráfico-técnica

Las respuestas que activan este tipo de configuración, se caracterizan en que a partir del conjunto de datos dados en la tabla, se proporciona una representación gráfica de la cual se obtiene la expresión algebraica para la función derivada. Posteriormente, a partir de argumentaciones y procedimientos centrados en las “reglas” o “técnicas” de derivación, se encuentra una expresión para *f(x)*. La Figura 5.27 muestra a manera de ejemplo la respuesta del estudiante para profesor H, en la cual se activa este tipo de configuración.



3. Sea $g(x) = f'(x)$, entonces.

x	$g(x)$
0	0
1	2
1.5	3
2	4
2.5	5.

a) En el gráfico anterior, claramente se puede observar que el comportamiento de la función $g(x)$ es lineal, por tanto dados dos puntos cualesquiera de ellos es posible hallar la función ~~f(x)~~. $g(x)$

~~f(x) = 2~~

$g(x) = 2x \Rightarrow f'(x) = 2x$

$\therefore f(x) = x^2$

b) No se me ocurre ninguna otra.

Figura 5.27. Solución a la tarea 3 por el estudiante H

Configuración cognitiva

Como se puede observar en la Figura 5.27, en la solución del estudiante H destacan elementos lingüísticos de carácter gráfico (representación gráfica de los pares ordenados de la tabla) y verbales que dan cuenta del eje central de la práctica del profesor la cual consiste en “identificar” la linealidad de los pares ordenados dados en la tabla (pertenecientes a la gráfica de la derivada de una función) y, posteriormente, dados dos puntos de la recta formada por dichos puntos, halla la ecuación de la recta o representación simbólica de la función derivada. Este procedimiento se hace evidente cuando señala "…el comportamiento de la función $g(x)$ $[f'(x)]$ es lineal, por tanto, dados dos puntos cuales quiera de ellos es posible hallar la función $f(x)$". En la descripción, anterior, de su procedimiento, queda implícito el uso proposiciones/propiedades tales como "dados dos puntos cuales quiera de un recta, es posible hallar su ecuación" y "la ecuación punto-pendiente para hallar la ecuación de una recta dados dos de sus puntos", requeridas para su desarrollo.

En su práctica, el estudiante H, refleja que no contempla el uso de la integral para hallar la función a partir de su derivada, lo que se evidencia también en la respuesta que da al ítem b) de la tarea, "No se me ocurre ninguna otra". No obstante, la respuesta planteada al ítem a) es correcta, "$\therefore f(x) = x^2$". Los estudiantes que dieron respuestas en las que movilizaron una configuración gráfico-técnica para el ítem a) de la tarea, o bien no dieron evidencia de cómo obtuvieron la función de la cual se origina la función derivada, pero se asume que podrían haber recordado que la derivada de $f(x) = x^2$ es $f(x) = 2x$ (como el caso del estudiante H), o bien señalaron explícitamente que una expresión para la función que cumpliera con las condiciones de la tabla dada era $f(x) = x^2$, pues si derivaban dicha función mediante las reglas de derivación obtenían la función $f(x) = 2x$ la cual habían hallado a partir de los datos de la tabla. En cualquier caso, es evidente que los profesores en formación inicial que proporcionaron respuestas que llevan asociadas este tipo de configuración, poseen un limitado conocimiento avanzado requerido para la solución de tareas como la planteada, lo que podría general problemas graves al momento de gestionar los conocimientos de sus futuros estudiantes.

Configuración cognitiva 2: gráfico-avanzada

Llevan asociadas una configuración gráfico-avanzada aquellas respuestas en las que a partir del conjunto de datos dados en la tabla, se proporciona una representación gráfica de la cual se obtiene la expresión algebraica para la función derivada. Posteriormente, a partir de argumentaciones y procedimientos centrados en temas más avanzados en el currículo (como la integral), se encuentra una expresión para *f(x)*. La Figura 5.28 presenta la respuesta del estudiante I, la cual es un ejemplo prototípico de esta configuración.

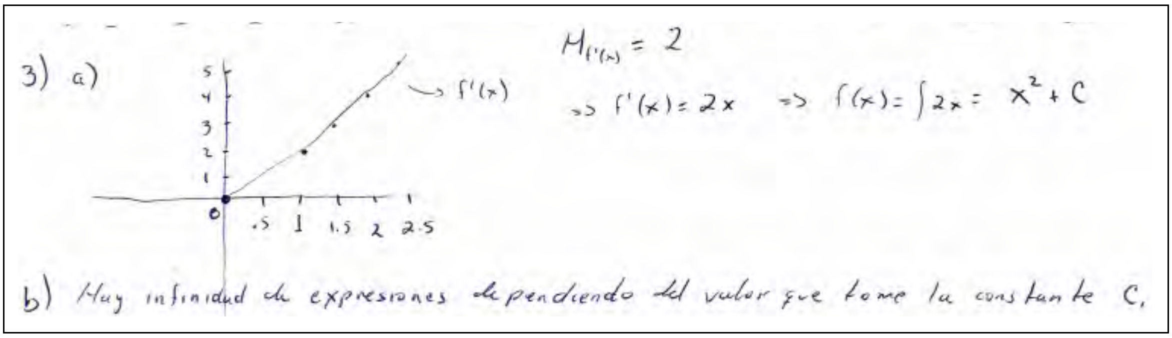
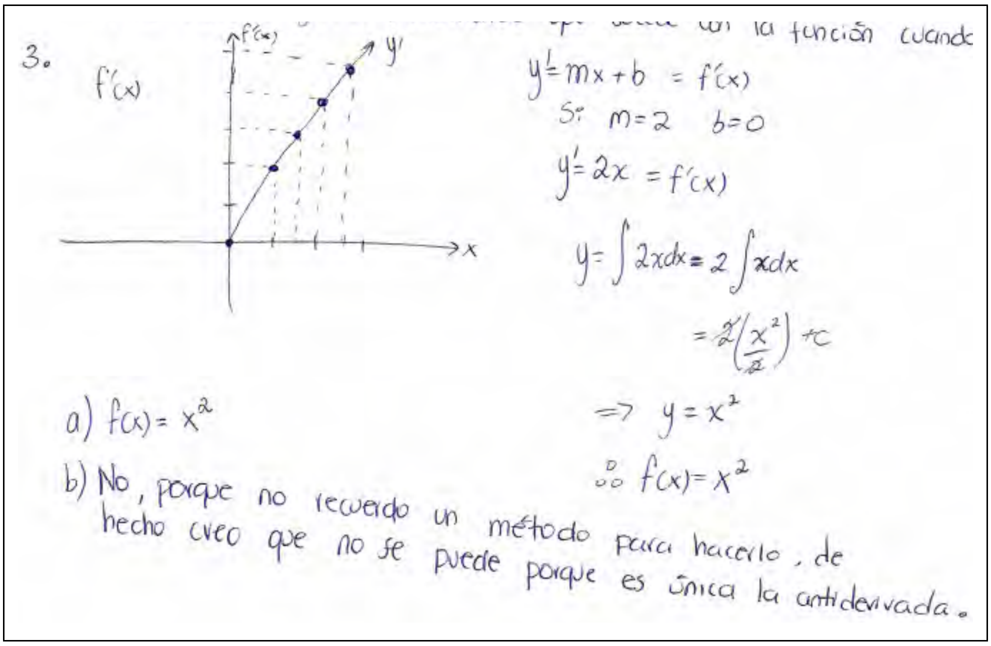


Figura 5.28. Solución a la tarea 3 por el estudiante I

Configuración cognitiva

En la Figura 5.28 se puede observar que los objetos matemáticos utilizados en la primera parte de la práctica del estudiante I, es muy similar a la del estudiante H, pues considerando que los puntos dados en la tabla se encuentran alineados y considerando el concepto derivada como la pendiente de la recta, halla una expresión simbólica para la derivada “$f'(x) = 2x$”. Posteriormente, a partir de dicha expresión simbólica para la derivada, El estudiante I emplea conceptos y proposiciones más avanzadas como la integral y el teorema fundamental del cálculo. El conocimiento avanzado para la resolución de la tarea que posee el futuro profesor I, se hace más evidente cuando responde al ítem b) de la tarea, “Hay infinidad de expresiones dependiendo del valor que tome la constante C”.

En general, los futuros profesores que emplearon una configuración de este tipo respondieron correctamente la tarea 3, por lo que demostraron tener un conocimiento avanzado suficiente para la resolución de dicha tarea. Sin embargo, el activar una configuración cognitiva en la que se utilicen elementos conceptos, proposiciones y procedimientos más avanzados en el currículum de matemáticas respecto del cálculo diferencial, no implica que la respuesta a la tarea sea correcta, tal y como se muestra en el ejemplo de la Figura 5.29, en la cual el estudiante J, pese a utilizar objetos matemáticos avanzados para la respuesta del ítem a) de la tarea, demuestra no tener una comprensión “completa” de dichos objetos matemáticos al responder al ítem b) de la tarea.


3. $f'(x)$

la función cuando

$y' = mx + b = f'(x)$

Si $m = 2$ $b = 0$

$y' = 2x = f'(x)$

$y = \int 2x\,dx = 2\int x\,dx$

$= \cancel{2}\left(\frac{x^2}{\cancel{2}}\right) + c$

$\Rightarrow y = x^2$

$\therefore f(x) = x^2$

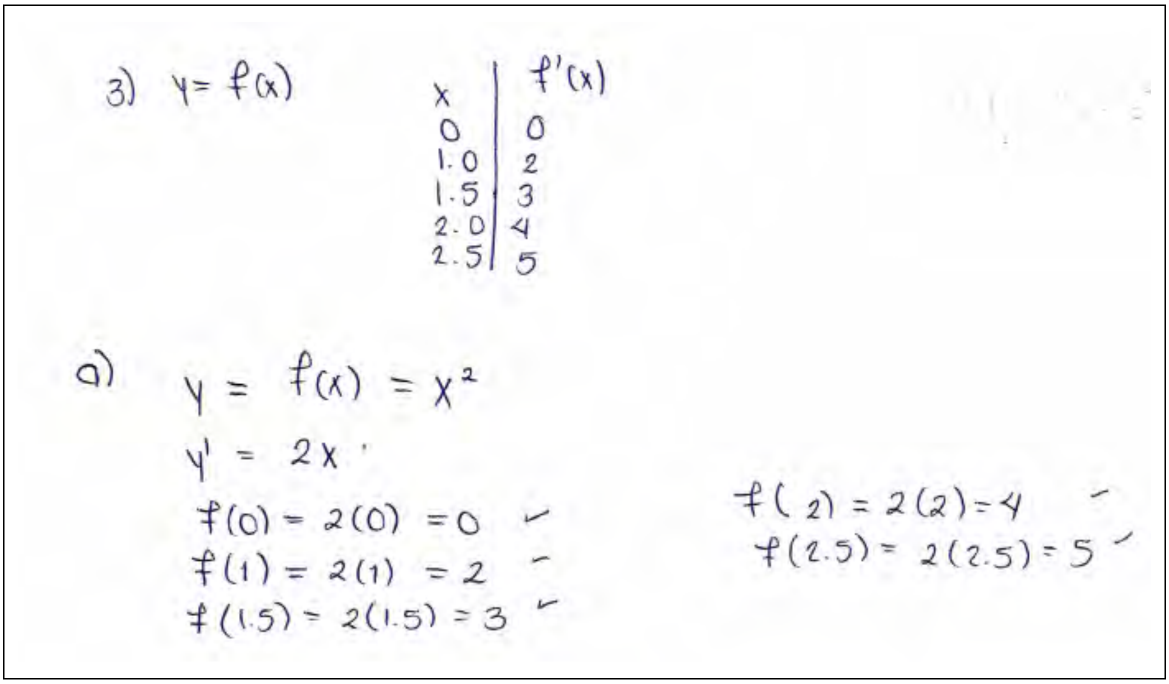
a) $f(x) = x^2$

b) No, porque no recuerdo un método para hacerlo, de hecho creo que no se puede porque es única la antiderivada.

Figura 5.29. Solución a la tarea 3 por el estudiante J

<u>*Configuración cognitiva 3: numérica-técnica*</u>

La Figura 5.29 presenta un ejemplo prototípico de las respuestas que activan este tipo de configuración cognitiva.


3) $y = f(x)$

x	$f'(x)$
0	0
1.0	2
1.5	3
2.0	4
2.5	5

a) $y = f(x) = x^2$

$y' = 2x$

$f(0) = 2(0) = 0$

$f(1) = 2(1) = 2$

$f(1.5) = 2(1.5) = 3$

$f(2) = 2(2) = 4$

$f(2.5) = 2(2.5) = 5$

Figura 5.30. Solución al ítem a) de la tarea 3 por el estudiante K

Como se puede apreciar en la Figura 5.30, las respuestas en las que se activa una configuración cognitiva *numérica-técnica*, son aquellas en las que a partir del conjunto de datos de la tabla se determina el patrón que permite establecer la regla de correspondencia que permite definir la función derivada. Posteriormente, a partir de argumentaciones y procedimientos centrados en las “reglas” de derivación, se encuentra una expresión para *f(x)*.

Configuración cognitiva 4: numérica-avanzada

La Figura 5.31 presenta un ejemplo característico de las respuestas que movilizan una configuración cognitiva de este tipo.

3 - Sea $y = f(x)$,

x	$f'(x)$
0	0
1	2
1.5	3
2	4
2.5	5

, Como se puede apreciar es de la siguiente forma.

Sea $f'(x) = h(x) = Kx$.

a)

Cuando $h(x) = 0 = K(0) \Rightarrow K = 0 \lor K = r,\ r \in \mathbb{R}, r \neq 0$.

Cuando $h(x) = 2 = K(1) \Rightarrow \cancel{K=2}\ K = 2$

Cuando $h(x) = 3 = K(1.5) \Rightarrow K = 2$.

Cuando $h(x) = 4 = K(2) \Rightarrow K = 2$

Cuando $h(x) = 5 = K(2.5) \Rightarrow K = 2$.

Cuando $h(x) =$

Como es igual 2 en los cuatro casos entonces

Cuando $h(x) = 0 = 2(0) \Rightarrow K = 2$. igual que los anteriores. en consecuencia se cumple para $h(x) = 0$ también.

$\Rightarrow$ Esto implica que $f'(x) = h(x) = 2x$

$$\therefore\ f'(x) = 2x$$

y lo que queremos entrar es $f(x) = \int f'(x)$

$\rightarrow$ Haciendo uso del C.I. entonces

$$f(x) = \int f'(x) = \int 2x = 2\int x = 2\left[\frac{x}{2}\right]^2 + C$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 + C$$

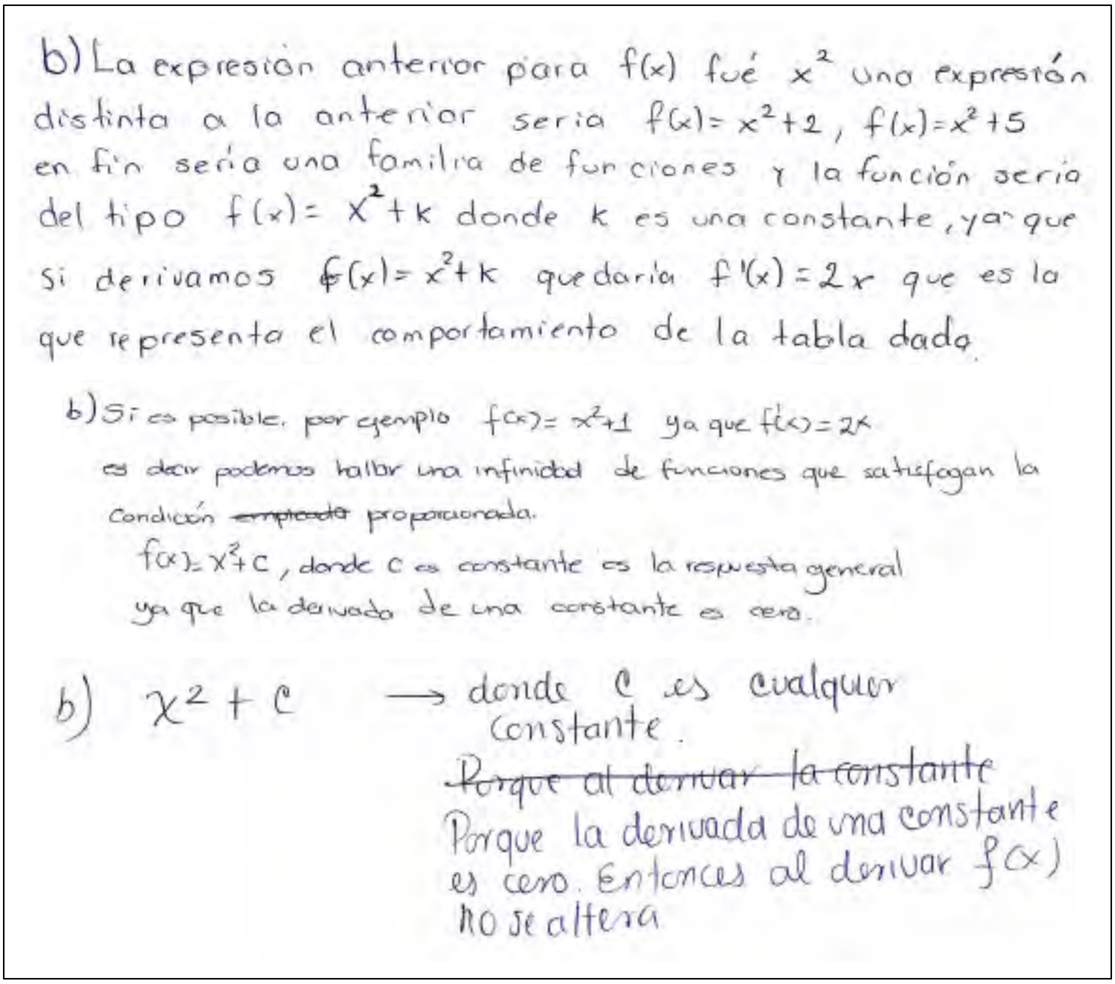
Donde C puede tomar los valores de los Números reales.

Figura 5.31. Solución al ítem a) de la tarea 3 por el estudiante L

Como se puede apreciar en la Figura 5.31, el estudiante L determina, a partir del conjunto de datos de la tabla, el patrón que permite establecer la regla de correspondencia que permite definir la función derivada de manera simbólica como $f'(x) = 2x$. Posteriormente, a partir de argumentaciones y procedimientos centrados en conceptos y proposiciones más avanzados en el currículo (tales como la integral e, implícitamente, el teorema fundamental del cálculo), se encuentra una expresión para *f(x)*.

Configuración cognitiva 5: técnica

En general, las configuraciones rotuladas como "Técnica" son aquellas en las que se usaron los teoremas para derivar, para dar respuesta y justificar las soluciones en los apartados a) y b). La Figura 5.32 presenta un ejemplo prototípico de este tipo de respuestas.


b) La expresión anterior para f(x) fué x^2 una expresión distinta a la anterior sería $f(x)= x^2+2$, $f(x)=x^2+5$ en fin sería una familia de funciones y la función sería del tipo $f(x)= x^2+k$ donde k es una constante, ya que si derivamos $f(x)= x^2+k$ quedaría $f'(x)=2x$ que es la que representa el comportamiento de la tabla dado.

b) Sí es posible. por ejemplo $f(x)= x^2+1$ ya que $f'(x)=2x$
es decir podemos hallar una infinidad de funciones que satisfagan la condición ~~empleada~~ proporcionada.
$f(x)= x^2+c$, donde c es constante es la respuesta general
ya que la derivada de una constante es cero.

b) $x^2 + c$ → donde c es cualquier constante.
~~Porque al derivar la constante~~
Porque la derivada de una constante es cero. Entonces al derivar f(x) no se altera

Figura 5.32. Soluciones de tres estudiantes al ítem b) de la tarea 3

Como se puede apreciar en la Figura 5.32, los argumentos proporcionados por los estudiantes para la proposición, "sí es posible encontrar otra expresión distinta a la anterior que satisfaga las condiciones de la tabla”, se centran en el uso de las reglas para derivar, concretamente, en la proposición “la derivada de una función constante es cero”. Lo elementos lingüísticos empleados en estas respuestas fueron principalmente verbales y uno que otro elemento simbólico para denotar la familia de funciones “$f(x) = x^2 + c$” o algún otro elemento de este conjunto de funciones.

Es claro que los profesores en formación inicial que activaron este tipo de configuración cognitiva, no tuvieron en cuenta conceptos tales como el de integral o proposiciones que permitían justificar sus procedimientos tal como el Teorema Fundamental del Cálculo, aunque de una forma u otra esté implícito en sus procedimientos (Figura 5.32). Este hecho da evidencia de que los futuros profesores poseen un limitado conocimiento avanzado requerido para la solución de tareas como la planteada.

<u>Configuración cognitiva 6: avanzada</u>

La Figura 5.33 presenta un ejemplo prototípico de este tipo de respuestas.

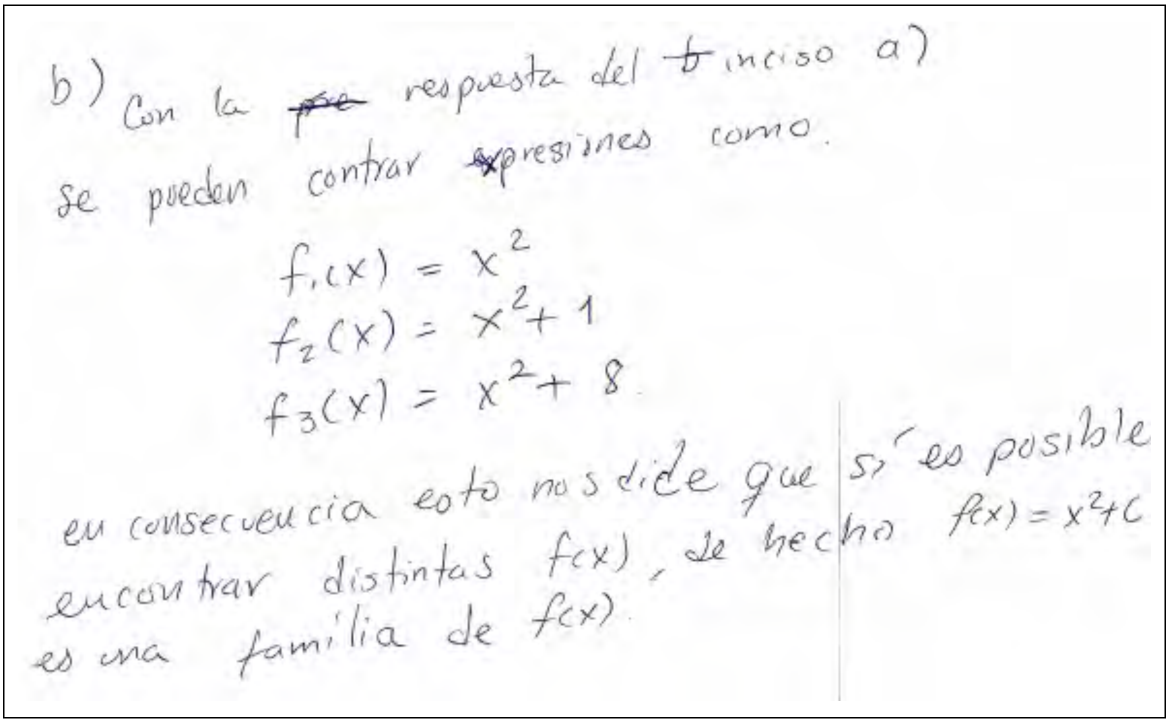


Figura 5.33. Solución al ítem b) de la tarea 3 por el estudiante L

En general, el término “Avanzada” se asignó a aquellas configuraciones en las que, como en la respuesta del estudiante L (Figura 5.33) o la del estudiante I (Figura 5.28), se usaron conceptos más avanzados como los de integral o proposiciones como el teorema fundamental del cálculo, para justificar las soluciones dadas a ambos apartados. Respuestas correctas de ambos ítems de la tarea en las que se movilizara esta configuración, sustenta que los estudiantes para profesor que las proporcionaban poseen el conocimiento avanzado requerido para la solución de la tarea.

Configuración cognitiva 7: interpretación errónea sobre la unicidad de la derivada

Este tipo de configuración cognitiva está asociada a respuestas en las que se evidencia una concepción errónea de la unicidad de la función derivada, puesto que se señala explícitamente que no es posible hallar una segunda expresión, distinta a la dada en el ítem a), ya que "la derivada es única". Ejemplos de este tipo de respuestas los podemos encontrar en la respuesta al ítem b) del estudiante J (Figura 5.29) o la respuesta del estudiante para profesor M que presentamos en la Figura 5.34.

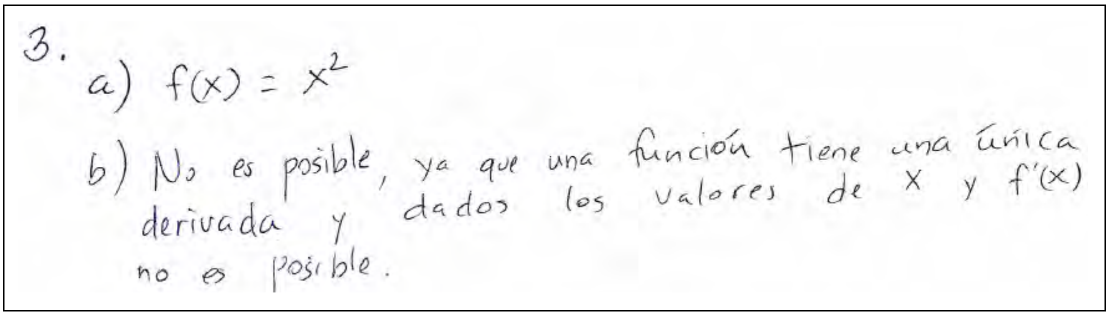


Figura 5.34. Solución a la tarea 3 por el estudiante M

Configuración cognitiva 8: Funciones equivalentes

Este tipo de configuración cognitiva está asociada a respuestas que afirman explícitamente que "no es posible encontrar una segunda expresión distinta, ya que las expresiones posibles son equivalentes (funciones equivalentes) a la dada en el ítem a)". Ejemplos de respuestas en las que se activan este tipo de configuración son la respuesta al ítem b) proporcionada por el futuro profesor K [cuya respuesta al ítem a) se presentó en la Figura 5.30] y la respuesta proporcionada por el estudiante para profesor N, ambas se presentan en la Figura 5.35.

En el caso del estudiante K observamos que para hallar "otra expresión" distinta a la encontrada en el ítem a), realiza "manipulaciones algebraicas" con la función $f(x) = x^2$, multiplicando por una constante, en particular, por la constante $\frac{2}{2}$. Este proceso particular lo generaliza de la siguiente manera "…por lo tanto se cumple [que la derivada sea $f'(x) = 2x$]

para cualquier constante que agregues siempre y cuando multipliques y dividas la función por la misma constante”. El elemento lingüístico que acabamos de citar, también da cuenta del procedimiento seguido por el estudiante K.

Respuesta estudiante K

b) $y = f(x) = \frac{2x^2}{2}$

Por que al agregarle la constante 2/2 ~~siempre~~ y al calcular la derivada siempre se va a cumplir lo anterior ya que multiplicamos y dividimos la función por la misma constante, por lo tanto se cumple para cualquier constante que agregues siempre y cuando multipliques y dividas la función por la misma constante.

Respuesta estudiante N

3: $y = f(x)$

a) $f(x) = 2x$

b) Solo podría "encontrar" una equivalente que simplificando llegue al mismo valor.

Figura 5.35. Soluciones de los estudiantes K y N

En general las respuestas que llevan asociadas las configuraciones 7 y 8, para el ítem b) de la tarea, eran respuestas incorrectas y evidencian que los futuros profesores de bachillerato requieren potenciar sus conocimientos avanzados para resolver tareas como la planteada.

Finalmente los resultados, cuantitativos y cualitativos, obtenidos en la tarea 3 apoyan la necesidad de mejorar el conocimiento avanzado de los futuros profesores, que les faculte para resolver tareas como la planteada.

5.4.2.3.4. Configuraciones cognitivas asociadas a la resolución de la tarea 4

En las resoluciones que dieron los futuros profesores a la tarea 4, se identificaron cinco tipos de configuraciones que hemos denominado: 1) analítica - extensiva; 2) analítica - intensiva; 3) trazado de tangentes; 4) uso de situaciones particulares de variación; y 5) límite de las tasas medias de variación. Para cada una de estas configuraciones cognitivas, analizamos un ejemplo prototípico.

Configuración cognitiva 1: analítica-extensiva

El eje central de este tipo de resolución son las argumentaciones o justificaciones a la proposición aludida por el elemento lingüístico “la derivada de una función constante siempre es igual a cero”, mediante casos particulares del cálculo de las pendientes de algunas rectas horizontales. La Figura 5.36 muestra la solución dada por un estudiante (estudiante Ñ) a la tarea 4.

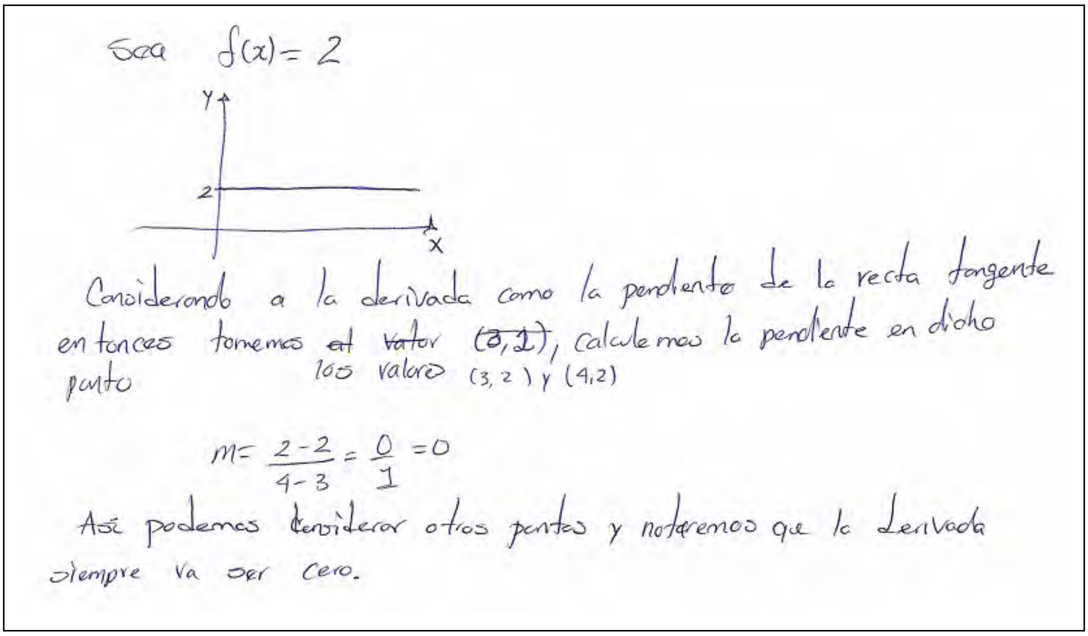


Figura 5.36. Solución a la tarea 4 por el estudiante Ñ

Práctica Matemática

Como puede observarse en la Figura 3, la actividad matemática desarrollada por el estudiante Ñ, comienza con la representación (simbólica y gráfica) de la función constante $f(x) = 2$. Luego, considerando la derivada como la pendiente de la recta tangente a la función que plantea, calcula la pendiente de la “recta tangente” a la función $f(x) = 2$ dados los puntos (3, 2), (4, 2), aplicando que $m = \frac{2-2}{4-3}$. El estudiante A finaliza su actividad considerando que lo anterior justifica la proposición “la derivada de una función constante siempre es igual a cero”.

Configuración cognitiva

En la actividad matemática desarrollada por el estudiante Ñ, es posible identificar diversos *elementos lingüísticos* (gráficos, simbólicos y verbales) que dan cuenta de conceptos/definiciones y proposiciones que el estudiante utiliza en sus procedimientos y en sus argumentos. Ejemplo de elementos lingüísticos son: la representación gráfica y simbólica para la función constante $f(x) = 2$, el elemento lingüístico verbal “Considero a la derivada como la pendiente de la recta tangente”, la representación simbólica para el cálculo de la pendiente, entre otros.

Entre los conceptos/definiciones centrales se encuentra el de función constante, particularizada en $f(x) = 2$, y derivada, entendida como pendiente de la recta tangente, referida por el estudiante mediante el elemento lingüístico “considero a la derivada como pendiente de la recta tangente”.

En cuanto a las proposiciones/propiedades destacan la relación analítica $y - y_1 = m(x - x_1)$, particularizada en $m = \frac{2-2}{4-3}$ y las proposiciones implícitas “la pendiente de una secante a una línea recta coincide con la pendiente de la recta”, “$m = 0$”, y “la derivada de la función $f(x) = 2$ es cero”.

Los conceptos y proposiciones centrales referidos anteriormente, son utilizados en un procedimiento analítico en el cual se calcula la pendiente de la recta tangente, dados dos puntos ((3, 2) y (4, 2)) de la recta $f(x) = 2$. Este procedimiento lo hace reiterativo cuando señala “así podemos considerar otros puntos…”, y considera que lo anterior justifica la proposición “la derivada de una función constante siempre es igual a cero”, cuando continúa “…y notaremos que la derivada siempre va a ser cero”. Sin embargo, el estudiante Ñ no logra justificar la proposición general inicial y resuelve la tarea para el caso particular $f(x) = 2$.

En la solución que presenta el estudiante Ñ, se observa un proceso de particularización del problema, ya que traslada la tarea inicial de justificar la proposición “la derivada de una función constante siempre es igual a cero” a justificar la proposición “la derivada de la función $f(x) = 2$ siempre es igual a cero". Adicionalmente se encuentra que el estudiante Ñ no resolvió el apartado b) de la Tarea 4 lo cual evidencia escaso conocimiento común y la ausencia de conocimiento especializado para su solución.

Configuración cognitiva 2: analítica-intensiva

La Figura 5.37 muestra la solución dada por el estudiante O a la Tarea 4, la cual hemos inscrito dentro del tipo analítica-intensiva. A diferencia del tipo de la solución anterior, las soluciones analíticas-intensivas tienen la característica de que las argumentaciones o justificaciones de la proposición a la que hace referencia el elemento lingüístico "la derivada de una función constante siempre es igual a cero", se realiza mediante el cálculo de la pendiente de una *función constante genérica* .

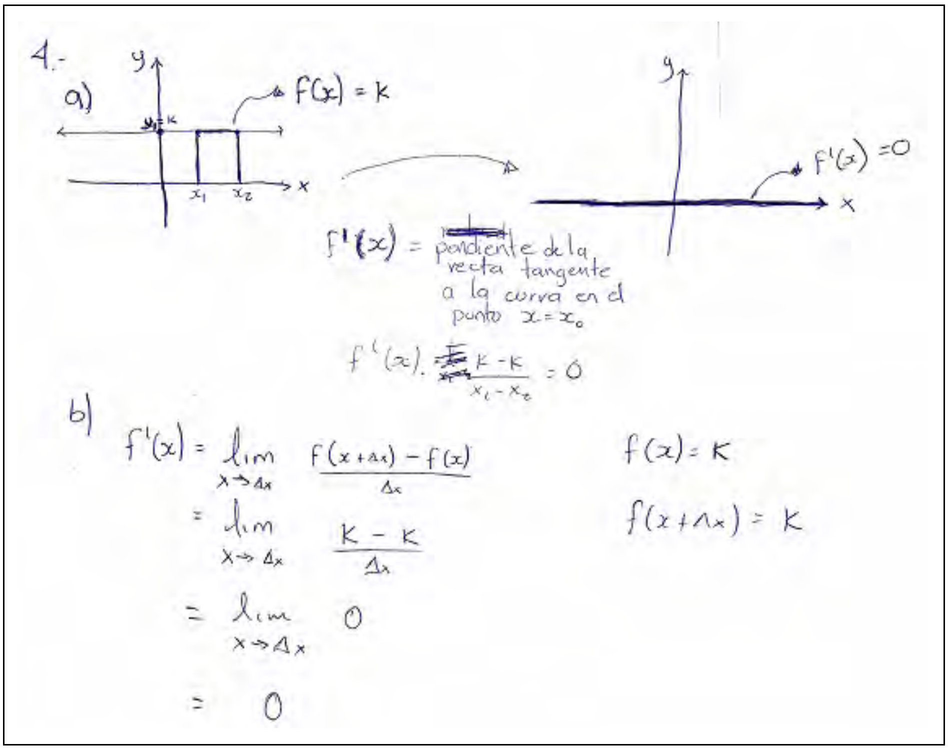


Figura 5.37. Solución a la tarea 4 por el estudiante O

En la Figura 5.37 observamos que el estudiante, primeramente, proporciona la gráfica de una función constante cualquiera y considera dos puntos cualesquiera de ella $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$. Seguidamente calcula la pendiente, dados dos puntos, de la recta horizontal que representa la función constante, pues considera que la derivada de la función constante es la pendiente de la recta tangente. El estudiante concluye proporcionando la representación gráfica de la función derivada.

En la solución que presenta el estudiante O, pueden identificarse conceptos centrales tales como la función constante genérica, referida por el elemento lingüístico gráfico y simbólico "$f(x) = k$", y la función derivada referida por los elementos lingüísticos "$f'(x) =$ pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $x = x_0$" y la gráfica de la recta que coincide con el eje x. Los puntos x_1 y x_2, señalados en la primera gráfica, junto con la propiedad $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ utilizada como "$f'(x) = \frac{k-k}{x_1-x_2}$", muestran evidencia del procedimiento analítico seguido, el cual consistió en el cálculo de la pendiente de una recta horizontal cualquiera dados dos puntos cualesquiera pertenecientes a la misma. No queda explícito que el alumno sea consciente de la proposición implícita "la pendiente de la secante a una recta coincide con la pendiente de la tangente a dicha recta, y ambas coinciden con la pendiente de dicha recta", lo cual justificaría la solución dada.

Además, se observa que el estudiante no justifica el uso de los elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones y procedimientos utilizados en su solución, o bien, considera que el conjunto de todos estos son la justificación. De cualquier forma, el estudiante O de hecho opera con una función cualquiera pero le falta explicitar que su razonamiento es válido para cualquier función constante.

En cuanto al apartado b) de la tarea, vemos que dicho estudiante no tuvo dificultad en probar la proposición inicial mediante la derivada como límite del cociente de incrementos. La actividad matemática desarrollada por el estudiante O en la Tarea 4, sugiere que dicho estudiante posee un grado satisfactorio de conocimiento común, en tanto que fue capaz de resolver la tarea; así mismo, evidencia cierto grado de conocimiento especializado ya que planteó dos procedimientos y justificaciones distintos para la proposición planteada.

Configuración cognitiva 3: trazado de rectas tangentes

La Figura 5.38 muestra un ejemplo característico de este tipo de solución. La característica central en este tipo de solución son las justificaciones dadas a la proposición referida por el elemento lingüístico "la derivada de una función constante siempre es igual a cero", a partir del trazado de rectas tangentes a la función constante, lo cual se evidencia con la solución dada por el estudiante P.

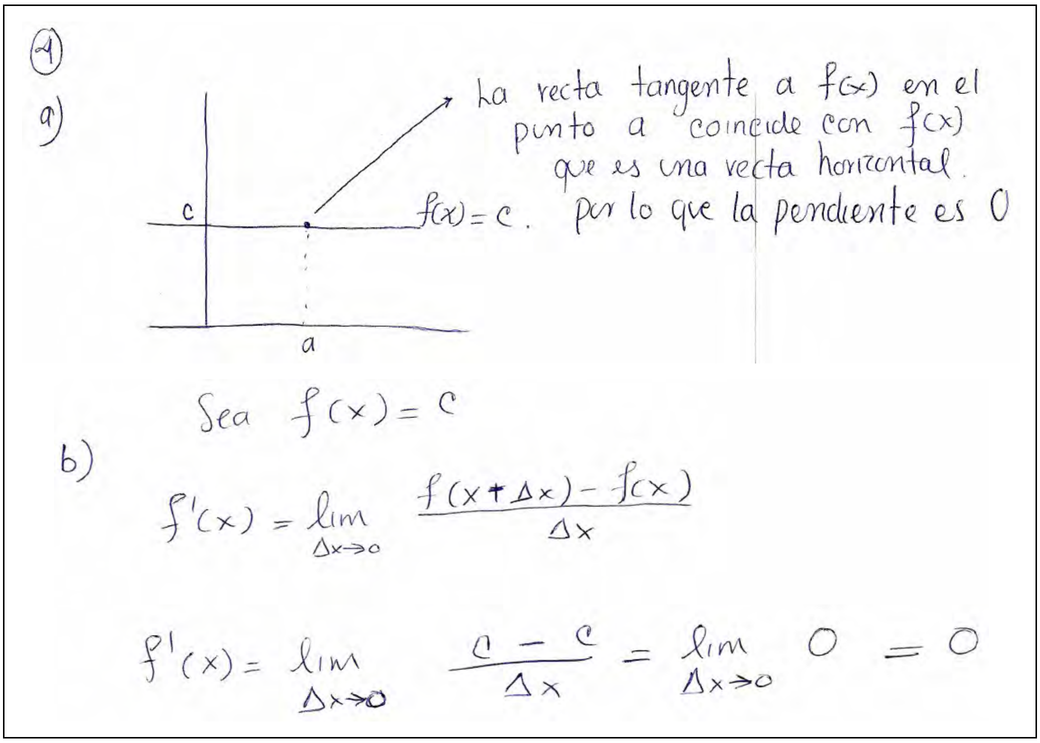


Figura 5.38. Solución de la tarea 4 por el estudiante C

Como se puede observar en la Figura 5.38, la solución del estudiante P, a diferencia de los dos tipos anteriores de solución, podría considerarse como más "visual". Se identifican elementos lingüísticos gráficos y verbales (apartado a) que hacen referencia a conceptos centrales tales como función constante "$f(x) = c$" y derivada entendida como pendiente de la recta tangente.

Así mismo, el estudiante utiliza elementos lingüísticos que refieren a proposiciones tales como: "[la gráfica de] la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto a coincide con la [gráfica de] la función $f(x)$", y "la pendiente de una recta horizontal es cero". Estas proposiciones dan cuenta del procedimiento y su justificación empleados por el estudiante para la resolución de la tarea. Así el procedimiento consiste en el "trazo" de rectas tangentes a la función constante en puntos cualesquiera pertenecientes a dicha función, y la justificación es: dado que la representación gráfica de las rectas tangentes coinciden con la representación gráfica de la función, y tomando en cuenta que la pendiente de una recta horizontal es cero, entonces "la pendiente de la recta tangente a la función constante es cero".

El apartado b) de la tarea lo resuelve mediante la manipulación algebraica de elementos simbólicos que hacen referencia a la definición de la derivada presentada frecuentemente en los libros de texto.

Con base en lo anterior concluimos que el estudiante P posee cierto grado de conocimiento común que le permitió resolver la tarea. Sin embargo proponer una solución "visual" (apartado a) y no realizar conexiones con otros objetos matemáticos para justificar más formalmente la proposición inicial, evidencia que su conocimiento especializado requerido para dar solución a la tarea debe ser mejorado.

Configuración cognitiva 4: situaciones particulares de variación

A diferencia de los tres tipos de configuraciones anteriores, en esta existe un cambio sustancial: la consideración de la derivada como velocidad. De esta forma, la característica central es la justificación de la proposición mediante situaciones concretas de variación, específicamente, de velocidad. La Figura 5.39 muestra la solución presentada por un estudiante y que es prototípica de las soluciones mediante situaciones particulares de variación.

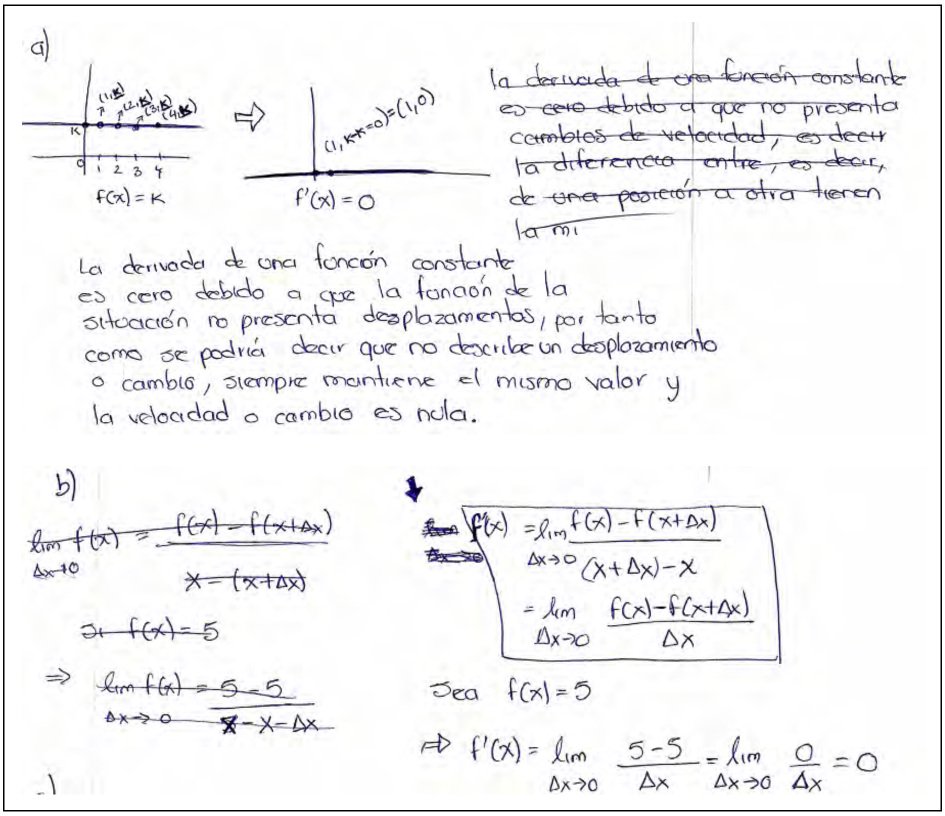


Figura 5.39. Solución de la tarea 4 por el estudiante Q

A partir de los elementos lingüísticos (gráficos, verbales y simbólicos) de la solución del estudiante Q, podemos observar que considera conceptos tales como función constante arbitraria "$f(x) = k$", distancia o desplazamiento, tiempo y derivada la cual es interpretada como la función velocidad. Aunque se percibe una aparente desconexión entre el concepto de función constante y el de desplazamiento cuando señala "la derivada de una función constante es cero debido a que la función de la situación no presenta desplazamientos…", utiliza la función constante como función de desplazamiento de algún objeto al que nunca hace referencia. Sin embargo, el estudiante Q parece no estar consciente de esta relación.

Se puede decir que el procedimiento seguido por el estudiante Q es "empírico-descriptivo" y en él, se encuentra implícita una proposición fundamental para la solución de la tarea "si un objeto no se desplaza a lo largo del tiempo, entonces la velocidad del objeto es nula". Con base en dicha proposición y en los objetos matemáticos antes mencionados, el estudiante argumenta "…por tanto como se podría decir que no describe un desplazamiento o cambio [la función constante], siempre mantiene el mismo valor y la velocidad o cambio es nula", lo cual para él justifica la proposición inicial y por tanto da solución al apartado a) de la tarea.

En el apartado b) observamos que el estudiante Q evidencia dificultades para utilizar la definición formal de la derivada como límite de las tasas medias de variación (límite del cociente de incrementos), propone la expresión $\lim_{\Delta x \to 0} f(x) = \frac{f(x)-f(x+\Delta x)}{x-(x+\Delta x)}$, que corresponde a una definición equivalente de la derivada tomando el incremento Δx en un intervalo donde la función es decreciente; sin embargo, no parece claro que el estudiante sea consciente de esta propiedad. Posteriormente propone la siguiente expresión $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)-f(x+\Delta x)}{(x+\Delta x)-x}$. Finalmente realiza un proceso de particularización de la tarea propuesta, toma una función constante particular, y prueba que la derivada de la función $f(x) = 5$ es cero.

Es plausible inferir que el estudiante Q tiene dificultades para manifestar tanto el conocimiento especializado como el conocimiento común requerido para la solución de la tarea.

Configuración cognitiva 5: límite de tasas medias de variación

La Figura 5.40 muestra la solución dada por el estudiante R a la tarea 4 y que es característica de este quinto tipo de configuración.

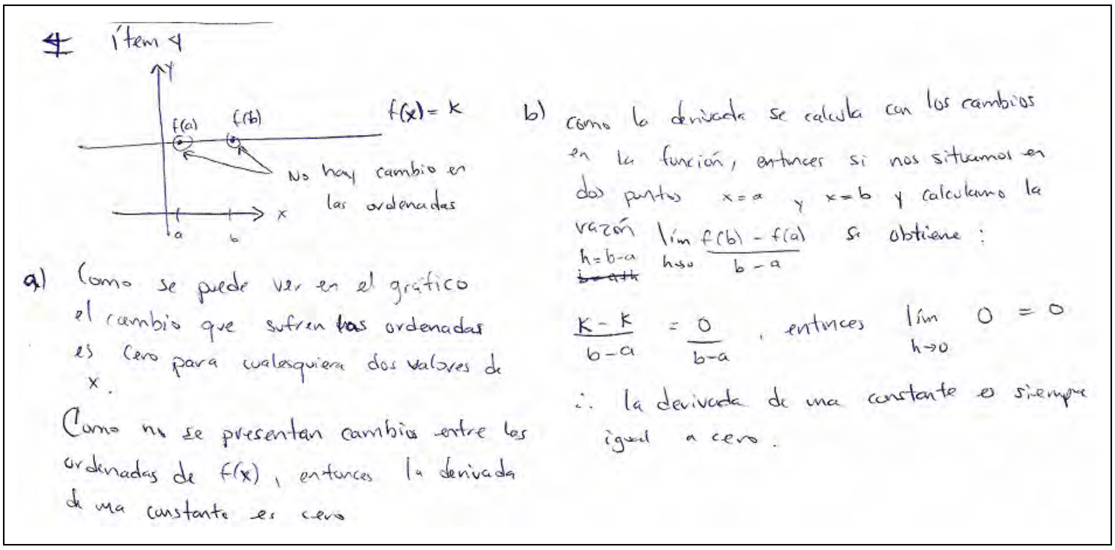


Figura 5.40. Solución de la tarea 4 por el estudiante R

Una de las características que diferencia este tipo de solución respecto del anterior es el uso de argumentaciones apoyadas en la noción de tasa instantánea de variación, sin considerar casos concretos como la velocidad. Así, en la Figura 5.40 puede observarse cómo el estudiante R usa un elemento lingüístico gráfico el cual hace referencia a los conceptos de función constante arbitraria "$f(x) = k$", valores del dominio (a y b del eje x), imagen ($f(a)$ y $f(b)$) y la noción de cambio (la cual interpreta por medio de la relación $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$). La derivada la interpreta como razón instantánea de cambio cuando señala "como la derivada se calcula con los cambios en la función, entonces si nos situamos en dos puntos $x = a$ y $x = b$ y calculamos la razón $\lim_{b \to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ se obtiene… (solución apartado b)".

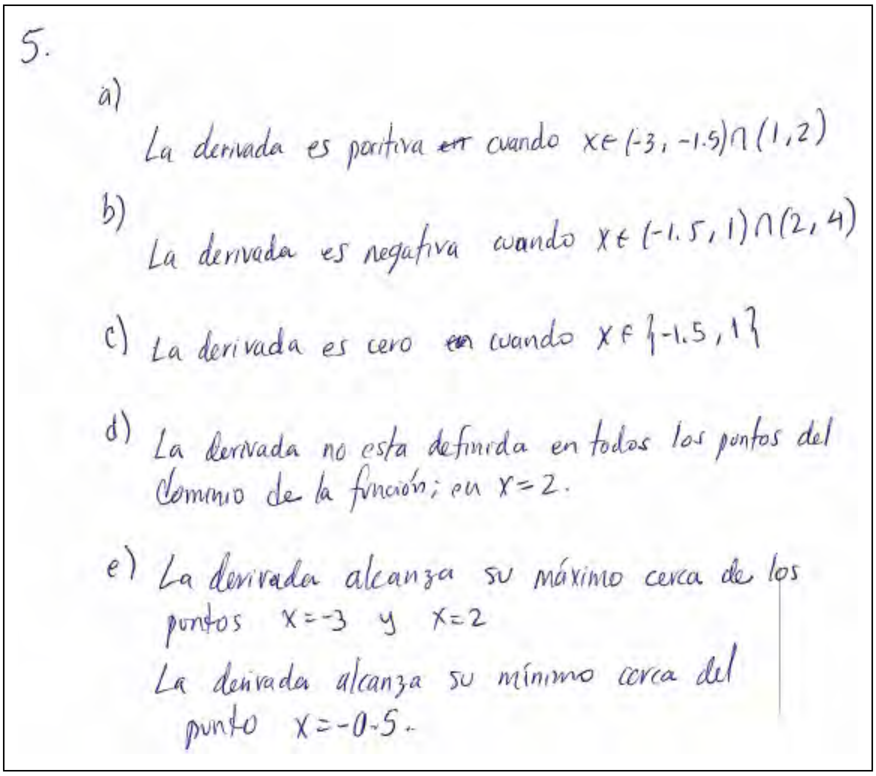
Luego el estudiante da evidencia del procedimiento usado al describir la siguiente proposición "como se puede ver en el gráfico el cambio que sufren las ordenadas [$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$] es cero para cualquiera dos valores de *x*". El estudiante observa el cambio que sufren dos ordenadas (imágenes) respecto al cambio de sus abscisas, para posteriormente tomar el "paso al límite" (solución dos) que denota la razón instantánea de cambio. El estudiante R argumenta: "como no se presentan cambios entre las ordenadas de $f(x)$, entonces la derivada de una constante es cero". Lo anterior se puede expresar mediante la proposición implícita "dado que el cambio es nulo entonces la razón instantánea de cambio también es nula (si $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ entonces $\lim_{b \to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$)".

La solución dada por el profesor en formación inicial, muestra evidencia del dominio de objetos matemáticos primarios centrales (elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos y justificaciones) alrededor de la noción de la derivada como razón instantánea de cambio. De esta forma, es claro que el futuro profesor posee un buen dominio del conocimiento común, y muestra evidencia de cierto grado de conocimiento especializado, ambos requeridos para la solución de la tarea.

5.4.2.3.5. Configuraciones cognitivas asociadas a la resolución de la tarea 5

Para el caso concreto de la tarea 5, no se encontraron evidencias concluyentes del tipo de configuraciones cognitivas asociadas a las respuestas de los estudiantes, a pesar de que, como quedó evidenciado en nuestro análisis a priori del contenido que evalúa esta tarea, los resultados eran de gran importancia para entender las concepciones globales que tienen los profesores en formación inicial sobre la derivada, y sobre como realiza asociaciones y conexiones entre los distintos objetos matemáticos involucrados y sus significados.

Dos ejemplos característicos del tipo de respuestas que dieron los estudiantes a esta tarea se presentan en las Figuras 5.41 y 5.42.



5.

a) La derivada es positiva ~~en~~ cuando $x \in (-3, -1.5) \cap (1, 2)$

b) La derivada es negativa cuando $x \in (-1.5, 1) \cap (2, 4)$

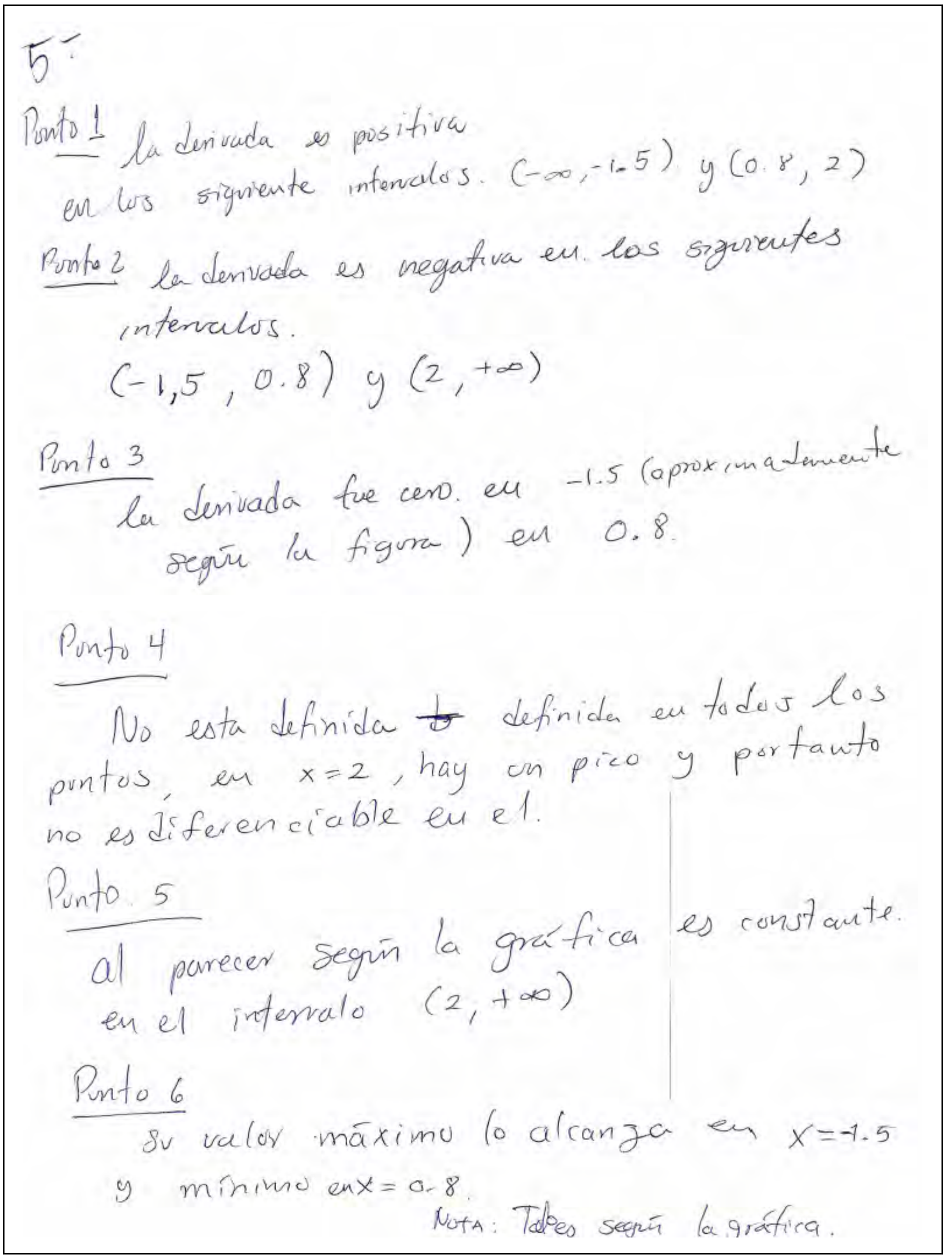
c) La derivada es cero ~~en~~ cuando $x \in \{-1.5, 1\}$

d) La derivada no esta definida en todos los puntos del dominio de la función; en $x = 2$.

e) La derivada alcanza su máximo cerca de los puntos $x = -3$ y $x = 2$

La derivada alcanza su mínimo cerca del punto $x = -0.5$.

Figura 5.41. Solución a la tarea 5 por el estudiante S



5.-

Punto 1 la derivada es positiva en los siguiente intervalos. $(-\infty, -1.5)$ y $(0.8, 2)$

Punto 2 la derivada es negativa en los siguientes intervalos.
$(-1,5 , 0.8)$ y $(2, +\infty)$

Punto 3
la derivada fue cero en -1.5 (aproximadamente según la figura) en 0.8.

Punto 4
No esta definida ~~b~~ definida en todos los puntos, en $x=2$, hay un pico y portanto no es diferenciable en el.

Punto 5
al parecer según la gráfica es constante en el intervalo $(2, +\infty)$

Punto 6
Su valor máximo lo alcanza en $x=-1.5$ y mínimo en $x = 0.8$.
Nota: Todos según la gráfica.

Figura 5.42. Solución a la tarea 5 por el estudiante T

Como es posible apreciar en los ejemplos presentados en las Figuras 5.41 y 5.42, las soluciones que proporcionaron los futuros profesores, se centraron en las respuestas puntuales de cada una de las “preguntas guía” que se proporcionaron después de la gráfica de la función $f(x)$ (Figura 5.5, sección 5.3.2.5). Dichas respuestas fueron realizadas mediante elementos lingüísticos netamente verbales, a partir de la representación gráfica de una función cuya expresión simbólica es desconocida. La respuesta del estudiante S, pese al error de notación de los conjuntos (intersección “∩” en lugar de unión “∪”), puede considerarse como una respuesta parcialmente correcta puesto que, aunque las proposiciones que dan respuestas a las preguntas guía son correctas, no argumenta dichas proposiciones.

Por su parte, la respuesta del estudiante T refleja uno de los principales errores encontrados en las soluciones de los futuros profesores, pues a la pregunta ¿dónde la derivada es positiva y donde negativa? El estudiante T responde "su valor máximo lo alcanza en $x = -1.5$ y mínimo en $x = 0.8$", lo que corresponde a los valores donde la gráfica de la función dada alcanza un máximo y un mínimo relativos. Otro error frecuente fue la concepción de los profesores en formación reflejada en la siguiente proposición "la función es derivable en todos sus puntos", la cual inferimos que es consecuencia de la desconexión en los estudiantes de las propiedades de continuidad y derivabilidad.

Lo que podemos concluir de los resultados obtenidos y, en particular, de los errores frecuentes en las respuestas de los profesores en formación inicial, es que los futuros profesores presentan ciertas carencias respecto a su conocimiento especializado requerido para la resolución de esta tarea, concretamente aquellos conocimientos que involucran la "descodificación" de las características globales y locales de la derivada a partir de la representación gráfica de una función arbitraria.

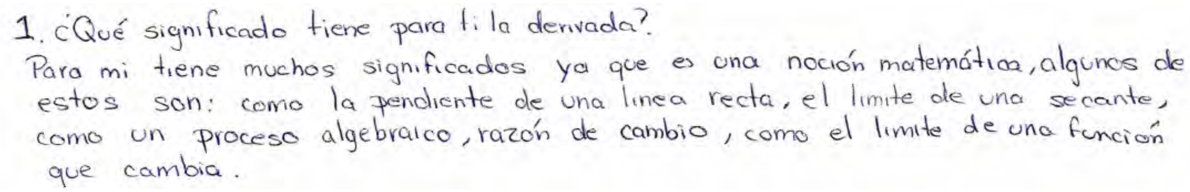
Pensamos que esta tarea es importante y que para la prueba definitiva podría ampliarse la información sobre el conocimiento de los estudiantes mediante otros medios que nos permitan recabar más información sobre las configuraciones cognitivas de los estudiantes para profesor, tales como entrevistas semi-estructuradas.

5.4.2.3.6. Configuraciones cognitivas asociadas a la resolución de la tarea 6

A partir del análisis de las respuestas que los profesores en formación inicial dieron a los ítems que componen la tarea 6, encontramos dos tipos de configuraciones cognitivas que diferenciamos de acuerdo a si relacionan y hacen conexiones entre los significados de los objetos matemáticos involucrados en la solución de los ítems a) y b), o no. Como se vio en la sección 5.4.2.2.7, los resultados obtenidos en esta tarea 6 y en las tareas anteriores, señalan una desconexión entre los significados de la derivada que conocen y los que usan en las prácticas matemáticas sobre la derivada. La Figura 5.43 muestra el caso de María quien a pesar de proporcionar, para la tarea 1, diversos significados para la derivada, entre los que se encuentran "…como la pendiente de una línea recta…" y "…razón de cambio…", en la tarea 5 no logra establecer un vínculo entre dichos significados.

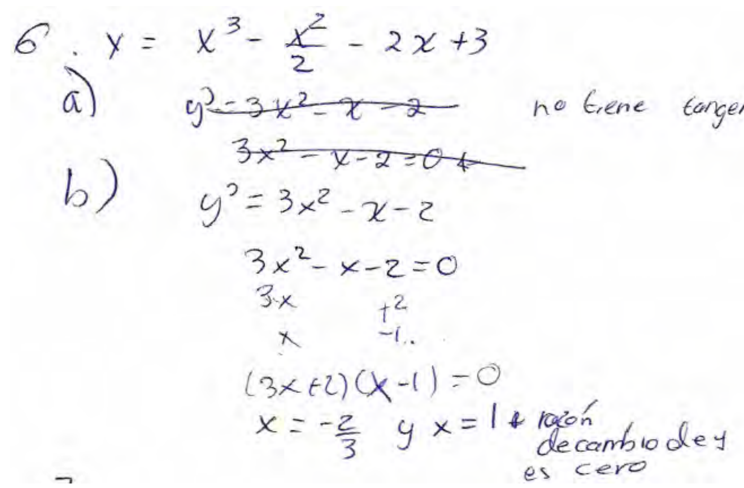
En la Figura 5.43 se aprecia cómo María comienza a resolver el apartado a) de la tarea 6, de la misma forma en que procede, posteriormente, en el apartado b), mediante el cálculo de la derivada de la función cúbica y entonces, el cálculo de los ceros de la función derivada. Sin embargo, al percatarse de qué es lo que se le pide en el ítem b) de la tarea, escribe como respuesta al ítem a) "No tiene tangente horizontal". Posteriormente responde correctamente el apartado b) hallando los puntos en los que la razón de cambio de *x* con respecto de *y* es cero.

Respuesta a la tarea 1



1. ¿Qué significado tiene para ti la derivada?
Para mi tiene muchos significados ya que es una noción matemática, algunos de estos son: como la pendiente de una linea recta, el limite de una secante, como un proceso algebraico, razón de cambio, como el limite de una función que cambia.

Respuesta a la tarea 6



6. $y = x^3 - \frac{x^2}{2} - 2x + 3$

a) $\cancel{y' = 3x^2 - x - 2}$ no tiene tangente horizontal

$\cancel{3x^2 - x - 2 = 0}$

b) $y' = 3x^2 - x - 2$

$3x^2 - x - 2 = 0$

$3x \quad +2$

$x \quad -1$

$(3x+2)(x-1) = 0$

$x = -\frac{2}{3}$ y $x = 1$ razón de cambio de y es cero

Figura 5.43. Respuestas de María a las tareas 1 y 6 del cuestionario CDM-Derivada

Más evidente es el caso de Jesús (Figura 5.44), quien en la tarea 1 proporciona significados para la derivada tales como "…pendiente de la recta tangente a una curva…" y "…razón de cambio de una función…". Sin embargo, resuelve correctamente el apartado a) de la tarea 6, y para el ítem b) de la tarea responde: "Creo que es lo de arriba, en tal caso no pude contestar el inciso a".

Los elementos lingüísticos predominantes en las configuraciones cognitivas asociadas a las respuestas de la tarea 6, fueron los simbólicos, que referían a las reglas para derivar la función cúbica dada y al procedimiento de encontrar los ceros de la función derivada.

Como se muestra en los dos ejemplos (Figura 5.43 y 5.44), los futuros profesores tienen dificultades para establecer conexiones entre dos acepciones de la derivada. Un elevado porcentaje de los futuros profesores, no lograron hacer una asociación entre los significados de la derivada como la siguiente: “la razón de cambio de *y* con respecto a *x* es cero en aquellos puntos en los que la recta tangente a la función es horizontal” (proposición vinculada a la segunda configuración cognitiva).

Respuesta a la tarea 1

1.- Como casualmente se conoce como la ~~derivad~~ pendiente de la recta tangente a una curva, también como los momentos o más bien la razón de cambio de una función. Hablando gráficamente, considero que ~~es~~ son los cambios, en cuanto a signos, aumentos o disminuciones, que sufren las imagenes de una función.

Respuesta a la tarea 6

a) Sea $f(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} - 2x + 3$

$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - x - 2$

Sea $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - x - 2 = 0$

$(3x+2)(x-1) = 0$

$\Rightarrow 3x+2 = 0$ ó $x - 1 = 0$

$x = \frac{-2}{3}$ $\qquad x = 1$

∴ Los puntos $x = 1$ y $x = -\frac{2}{3}$ tienen su tangente horizontal.

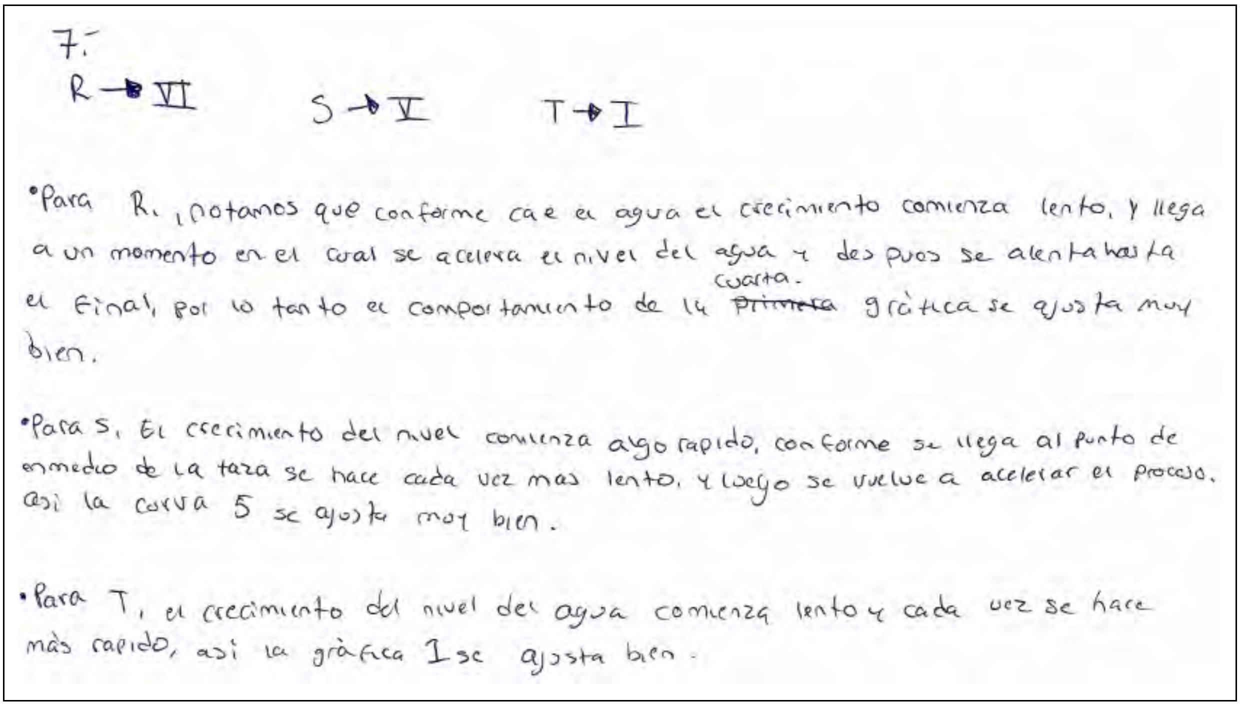
b) Creo que ~~es~~ lo de arriba, en tal caso, no pude contestat el inciso a.

Figura 5.44. Respuestas de Jesús a las tareas 1 y 6 del cuestionario CDM-Derivada

5.4.2.3.7. Configuraciones cognitivas asociadas a la resolución de la tarea 7

La Figura 5.45, presenta un ejemplo prototípico del tipo de respuestas que proporcionaron los profesores en formación inicial. En general, las justificaciones de los estudiantes, que proporcionaron alguna, se centraron en la descripción intuitiva de la rapidez de llenado, a partir de las figuras de las tazas. Sentencias como "…el crecimiento comienza lento…", "…el crecimiento del nivel comienza algo rápido" (Figura 5.45), fueron comunes de encontrar.

Otros estudiantes se limitaron a realizar las relaciones sin justificar el razonamiento asociado al establecimiento de dichas relaciones. Además como se mostró en el apartado 5.4.2.2.8, más del 50% de los profesores en formación inicial, no estableció una relación entre las funciones $h(t)$, representadas por las tazas, y las gráficas de las funciones $h'(t)$.


7.-

R → VI S → V T → I

•Para R, notamos que conforme cae el agua el crecimiento comienza lento, y llega a un momento en el cual se acelera el nivel del agua y después se alenta hasta el final, por lo tanto el comportamiento de la ~~primera~~ cuarta gráfica se ajusta muy bien.

•Para S, El crecimiento del nivel comienza algo rapido, conforme se llega al punto de enmedio de la taza se hace cada vez mas lento, y luego se vuelve a acelerar el proceso. asi la curva 5 se ajusta muy bien.

•Para T, el crecimiento del nivel del agua comienza lento y cada vez se hace más rapido, así la gráfica I se ajusta bien.

Figura 5.45. Solución a la tarea 7 por el estudiante U

Tal como planteamos para la tarea 5, esta tarea 7 es importante y, en la aplicación del instrumento definitivo CDM-Derivada, podría ampliarse la información sobre el conocimiento de los estudiantes mediante otros medios que nos permitan profundizar más en las configuraciones cognitivas de los profesores en formación inicial.

5.4.2.3.8. Configuraciones cognitivas asociadas a la resolución de la tarea 8

Mediante las soluciones que los futuros profesores de bachillerato dieron a la tarea 8, se pudieron identificar 4 tipos distintos de configuraciones que hemos denominado: 1) patrón numérico; 2) uso de la relación física *V=d/t*; 3) aproximación por la izquierda o derecha, y 4) aproximación bilateral. Es importante señalar que, inicialmente, esperábamos [a excepción de la opción a), Figura 2], respuestas parecidas a las reportadas en el trabajo de Çetin (2009), en donde los estudiantes resolvieron la tarea mediante los siguientes procedimientos:

- Sumando las distancias entre un tiempo y otro y dividiendo el resultado por seis, es decir, $\frac{1}{6}[(f(0.1)-f(0))+(f(0.2)-f(0.1))+\cdots+(f(0.6)-f(0.5))]$, lo que da como resultado la opción b.
- Sumando las imágenes de cada uno de los tiempos dados y dividiendo el resultado por siete, es decir, $\frac{1}{7}[f(0)+f(0.1)+\cdots+f(0.6)]$, lo que da como resultado la opción c.
- Eligiendo la imagen de $t=0.4$, $f(0.4)$, como la velocidad puntual de la pelota, lo que resulta en la opción d.

Sin embargo, los cuatro tipos de configuraciones que identificamos, tienen características distintas. A continuación, analizamos cada uno de dichos tipos de configuraciones mediante un ejemplo característico para cada uno de ellos.

Configuración cognitiva 1: patrón numérico

La característica de este tipo de solución, aunque los estudiantes que la siguieron no llegaron a concretarla, es que a partir de los datos numéricos presentados en la tabla (puntos pertenecientes a una función), se intenta determinar el patrón o regla de correspondencia que define la función. La Figura 5.46 presenta una de las respuestas (estudiante V) que ilustra este tipo de solución.

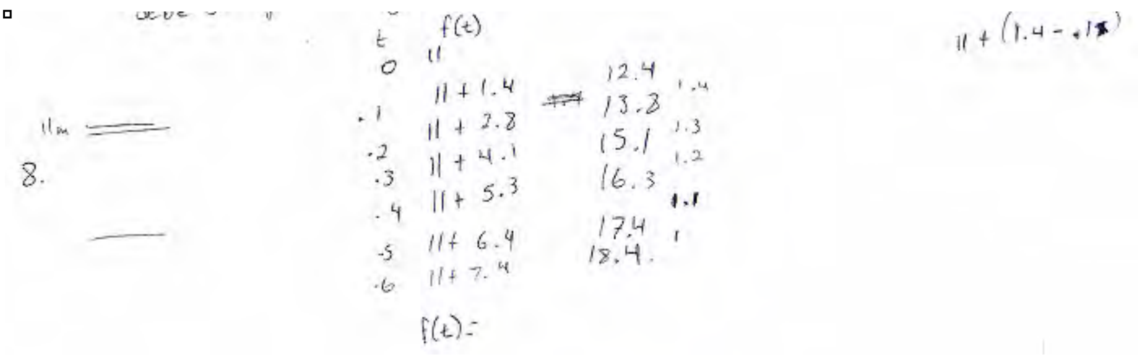


Figura 5.46. Solución de la tarea 8 por el estudiante V

Puede observarse que el estudiante V utiliza elementos lingüísticos que hacen referencia a números o cantidades que representan tanto al tiempo transcurrido “$t = 0, 0.1, \dots ,0.6$” como a la altura de la pelota para un tiempo t determinado “$f(t) = 11, 11 + 1.4, \dots ,11 + 7.4$”. Luego haciendo uso de la proposición “una pelota se lanza al aire desde un puente de 11 metros de altura [$f(t) = 11$ para $t = 0$]”, realiza una descomposición de las alturas $f(t)$ “$12.4 = 11 + 1.4$, $13.8 = 11 + 2.8$,…,$18.4 = 11 + 7.4$”. Luego procede por ensayo y error para encontrar un patrón que le ayude a determinar la expresión para $f(t)$, lo cual se evidencia con la expresión “$11 + (1.4 - .1)$”. El estudiante V no logra concretar su solución.

Al parecer dicho estudiante no se percata de que el camino que ha tomado para resolver la tarea es quizá el más complicado de todos los posibles. Tratar de encontrar una expresión simbólica para $f(t)$ a partir de los siete puntos dados, es una tarea complicada. Sin embargo es posible encontrar una función que se comporte aproximadamente igual a lo largo de esos siete puntos; no obstante, esta tarea es difícil puesto que se refiere a una función polinómica de, al menos, grado seis.

Una posible solución por esta vía podría realizarse haciendo uso de la interpolación polinómica de Lagrange, la cual señala que dado un conjunto de $k + 1$ puntos “$(x_0, y_0), \dots, (x_k, y_k)$”, donde todos los x_j se asumen distintos, es posible hallar una función, que pase por ellos, mediante la combinación lineal:

$$L(x) = \sum_{j=0}^{k} y_j \, \ell_j(x)$$

donde y_j son escalares y $\ell_j(x)$ viene dada por:

$$\ell_j(x) = \prod_{i=0}^{k} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

Así, el polinomio interpolador para nuestra tarea sería:

$$L(t) = \frac{25000t^6 - 52500t^5 + 43750t^4 - 18375t^3 + 3160t^2 + 2349t + 1980}{180}$$

La función de velocidad de la pelota para un tiempo $t \in [0,0.6]$

$$L'(t) = \frac{150000t^5 - 262500t^4 + 175000t^3 - 55125t^2 + 6320t + 2349}{180}$$

Y finalmente, la velocidad de la pelota en $t = 0.4$ es

$$L'(0.4) = \frac{691}{60} \approx 11.5166 \ {}^{m}/_{s}$$

Configuración cognitiva 2: uso de la relación física v=d/t

La Figura 5.47 muestra la solución que da el estudiante W a la tarea 8 y que es característica de este tipo de configuración.

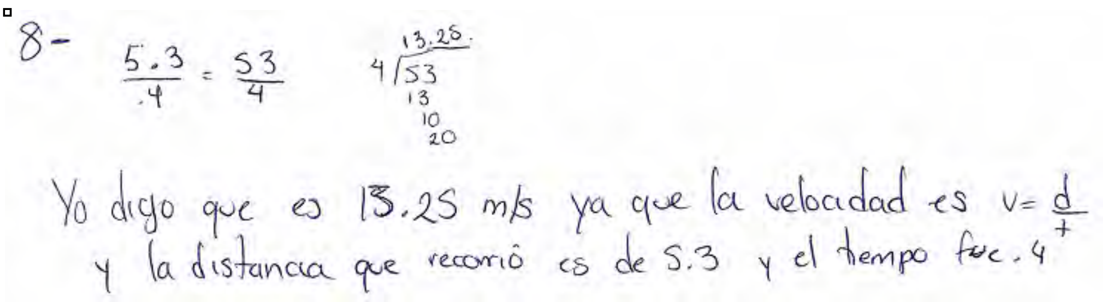


Figura 5.47. Solución de la tarea 8 por el estudiante W

Como se puede observar en la Figura 5.47, la característica central de este tipo de solución es el empleo de la proposición “velocidad es igual a distancia entre tiempo ($v = {}^{d}/_{t}$)” y la desconsideración que se realiza del objeto derivada como velocidad instantánea.

Así, el estudiante evidencia elementos lingüísticos simbólicos y verbales que evocan a la consideración de conceptos tales como velocidad (promedio), distancia, tiempo; y proposiciones tales como "$v = {}^{d}/_{t}$" y "Yo digo que es 13.25 ${}^{m}/_{s}$…".

El procedimiento usado fue el cálculo de la velocidad promedio de la pelota entre $t = 0$ y $t = 0.4$, mediante la relación $v = {}^{d}/_{t}$. Así, el estudiante W halla el tiempo transcurrido entre $t = 0$ y $t = 0.4$ "el tiempo fue de 0.4 [$0.4s - 0s$]" y la distancia que recorre la pelota en ese lapso "la distancia que recorrió es de 5.3 [$16.3m - 11m$]". Luego calcula la velocidad promedio "$\frac{5.3}{0.4} = \frac{53}{4}$" y da su respuesta mediante la expresión "$13.25\ m/s$", la cual justifica "ya que la velocidad es $v = {}^{d}/_{t}$ y la distancia que recorrió [la pelota] es de 5.3 y el tiempo fue de 0.4".

El estudiante W parece no percatarse de que la tarea requiere la interpretación de la derivada en un punto como velocidad instantánea. Tampoco tiene en cuenta la relación entre velocidad promedio ($v = {}^{d}/_{t}$) y la pendiente de una recta secante que corta a la función en $t = 0$ y $t = 0.4$, relación que le habría ayudado a percibir que su respuesta era incorrecta. Con lo anterior, parece demostrado que el estudiante no muestra evidencia del conocimiento matemático ampliado requerido para resolver la tarea.

Configuración cognitiva 3: aproximación por la izquierda o derecha

Este tipo de configuración tiene muchas similitudes con el tipo anterior. Entre las distinciones más notables se encuentra el hecho de que los estudiantes no consideran (al menos explícitamente) la relación $v = {}^{d}/_{t}$, y la otra es que para calcular la velocidad promedio se tomaron valores más próximos a $t = 0.4\ s$ (por ejemplo $t = 0.3\ s$). La Figura 5.48 muestra la solución que da el estudiante H y que es prototípica de este tipo de configuración.

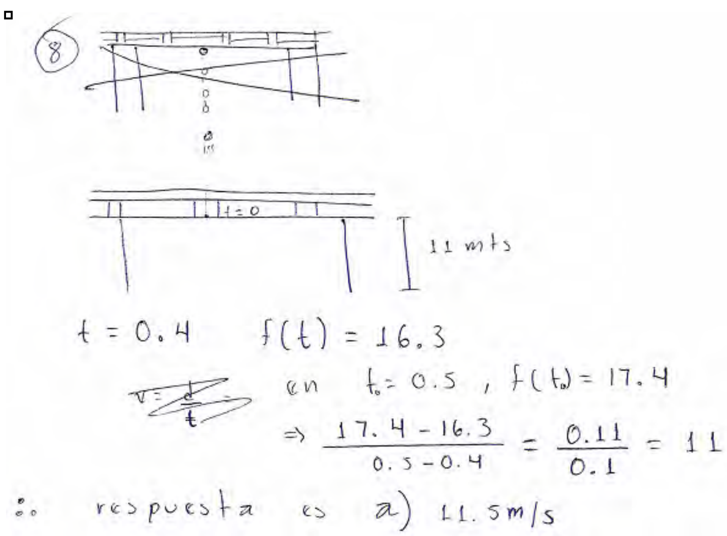


Figura 5.48. Solución de la tarea 8 del estudiante X

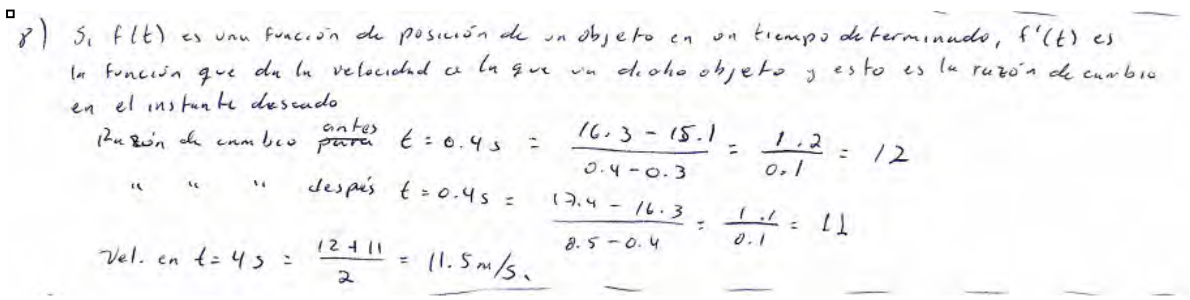
En la solución que se presenta en la Figura 5.48, se observan elementos lingüísticos icónicos (dibujo del puente) y simbólicos que dan evidencia tanto de conceptos tales como distancia, tiempo y velocidad promedio; como de proposiciones tales como "la pelota se lanza al aire desde un puente de 11 metros de altura [$f(t) = 11$ para $t = 0$]" y "velocidad es igual a distancia entre tiempo ($v = {}^{d}/_{t}$)". A partir de estos objetos matemáticos, el estudiante X desarrolla un procedimiento centrado en el cálculo de la velocidad promedio de la pelota entre los tiempos $t = 0.4$ y $t = 0.5$ y considerando un incremento $h = 0.1$ (más pequeño que en el tipo de solución anterior) "$\frac{17.4-16.3}{0.5-0.4} = \frac{0.11}{0.1} = 11$".

Afirmamos que su solución es una aproximación por la derecha a la velocidad de la pelota en el instante $t = 0.4$, ya que considera un tiempo posterior ($t = 0.5$) para el cálculo de la velocidad promedio. En este caso, el procedimiento en sí es usado por el estudiante como argumentación para su respuesta. La afirmación "por tanto la respuesta es a) 11.5 m/s", la propone debido a que es la opción más parecida al resultado que ha obtenido con sus cálculos.

Al igual que en el caso anterior, no se tiene evidencia suficiente de que el estudiante X se haya percatado de que en realidad ha calculado la velocidad promedio de la pelota (entre $t = 0.4$ y $t = 0.5$) y no su velocidad instantánea en el instante $t = 0.4$.

Configuración cognitiva 4: aproximación bilateral

La característica más importante en esta configuración es la aproximación bilateral que se realiza a la derivada de la función en el punto $t = 0.4$, a través de valores numéricos de la función. Lo anterior también se conoce como derivada numérica. La Figura 5.49 muestra la solución dada por el estudiante Y, que ilustra este tipo de configuración cognitiva.


8) Si $f(t)$ es una función de posición de un objeto en un tiempo determinado, $f'(t)$ es la función que da la velocidad a la que va dicho objeto y esto es la razón de cambio en el instante deseado

Razón de cambio antes para $t = 0.4s = \frac{16.3 - 15.1}{0.4 - 0.3} = \frac{1.2}{0.1} = 12$

" " " después $t = 0.4s = \frac{17.4 - 16.3}{0.5 - 0.4} = \frac{1.1}{0.1} = 11$

Vel. en $t = 4s = \frac{12+11}{2} = 11.5 m/s.$

Figura 5.49. Solución a la tarea 8 por el estudiante Y

El estudiante Y comienza la solución de la tarea con el siguiente elemento lingüístico “Si $f(t)$ es una función de posición de un objeto en un tiempo determinado, $f'(t)$ es la función que da la velocidad a la que va dicho objeto y esto es la razón de cambio en el instante deseado”. De esta primera expresión dada por el estudiante, se puede inferir el dominio de conceptos centrales tales como función (posición de un objeto respecto del tiempo), derivada (como función velocidad), y la derivada en un punto interpretada como razón de cambio instantánea. También aparecen proposiciones tales como “$f(t)$ es una función de posición de un objeto en un tiempo determinado” y “$f'(t)$ es la función que da la velocidad a la que va dicho objeto” y una última que da cuenta de la comprensión que tiene el estudiante de la tarea “…y esto es la razón de cambio en el instante deseado”. Esta última proposición sugiere que pretende hallar la razón de cambio en el instante $t = 0.4$. Esto último se hace más evidente a partir del elemento lingüístico que revela el procedimiento que sigue.

Primero considera una “razón de cambio antes de $t = 0.4\ s$” que se refiere al cálculo de la razón de cambio o velocidad promedio de la pelota entre los tiempos $t = 0.3$ y $t = 0.4$ “$\frac{16.3-15.1}{0.4-0.3} = \frac{1.2}{0.1} = 12$” (aproximación a la razón de cambio en el instante $t = 0.4$ por valores de la izquierda y con incremento $h = 0.1$). Luego considera una aproximación “después de $t = 0.4\ s$”, que hace referencia al cálculo de la razón de cambio o velocidad promedio de la pelota entre los tiempos $t = 0.4$ y $t = 0.5$ “$\frac{17.4-16.3}{0.5-0.4} = \frac{1.1}{0.1} = 11$” (aproximación a la razón de cambio en el instante $t = 0.4$ por valores de la derecha y con incremento $h = 0.1$). A partir de estas velocidades promedio el estudiante Y calcula la razón de cambio instantánea para $t = 0.4$ "velocidad en $t = 0.4\ s = \frac{12+11}{2} = 11.5\ {}^{m}/_{s}$" (aproximación bilateral a la velocidad de la pelota en el instante $t = 0.4\ s$, mediante el "promedio" de las velocidades promedio, con $t = 0.4$ en el centro del intervalo considerado).

Finalmente, es preciso indicar que tanto las tareas como los análisis que aquí se realizan corresponden al contexto y a los objetivos de esta investigación. Con relación al análisis epistémico realizado, éste se podría ampliar dando cuenta de aspectos relacionados con el dominio de la función, con la validez de la afirmación "la derivada de una función constante siempre es igual a cero", referida a funciones de valor y variable real, y a la topología usual del campo numérico de los números reales. Lo mismo se puede afirmar de la segunda tarea, en tanto que se podrían considerar aspectos tales como: la derivabilidad de la función representada numéricamente por la tabla, la posibilidad que la componente horizontal de la velocidad no sea cero, resistencia del aire, etc. Ahora bien, no parece necesaria esta ampliación dada la población a la cual se ha aplicado el cuestionario.

5.5. REVISIÓN Y SELECCIÓN DE LAS TAREAS A PARTIR DEL JUICIO DE EXPERTOS

Con la finalidad de afianzar la fiabilidad y la validez del *Cuestionario CDM-Derivada*, realizamos un estudio en el cual se sometió a revisión mediante el *juicio de expertos* la versión piloto previamente elaborada. Este estudio se llevó a cabo, concretamente, para indagar el grado de relevancia con el que los ítems evalúan cada uno de los siguientes aspectos: distintos significados del objeto derivada, las representaciones activadas tanto en los enunciados como en las posibles soluciones y el tipo de conocimiento didáctico-matemático en lo referente a la faceta epistémica. Así mismo, se estudió la ausencia de algún contenido relevante, y la redacción y comprensión de los enunciados, lo que contribuyó a la mejora de las características y a la adecuación del nivel de dificultad de nuestro instrumento.

Para el estudio se contactó a doce expertos en el área de didáctica del cálculo y se les envío, vía correo electrónico, una encuesta (Anexo 3) en la cual podían plasmar su juicio sobre el

Cuestionario CDM-Derivada. Para facilitar la labor de los expertos, en la contestación de la encuesta, también se les hizo llegar a manera de anexo el *Cuestionario CDM-Derivada* con soluciones esperadas (Anexo 1). De los doce expertos a los que les enviamos la encuesta, ocho la respondieron e hicieron llegar sugerencias y observaciones adicionales tanto al cuestionario como a las respuestas esperadas (Anexo 1).

Antes de analizar los resultados del estudio mediante el juicio de expertos, debemos señalar que, a partir de los resultados obtenidos de la aplicación piloto del cuestionario, se tomó la decisión de suprimir tres tareas del cuestionario original (tareas 9, 10 y 11; Figuras 5.50, 5.51 y 5.52), ya que éstas no fueron respondidas por ninguno de los profesores en formación inicial a los que se le aplicó la prueba piloto. Podríamos inferir hipótesis para tratar de responder a este suceso, por ejemplo la falta de tiempo, la complejidad de las tareas y de los ítems que las componen, o la falta de conocimiento especializado y, en particular, avanzado que faculta a los profesores resolver tareas con esas características. Sin embargo, debido a la falta de datos, no es posible responder o confirmar alguna de nuestras hipótesis. Debido a que las tres tareas evaluaban aspectos del conocimiento especializado y avanzado con mayor nivel de dificultad, y dado que estos tipos de conocimiento se evalúan en las otras tareas, decidimos suprimirlas tanto de la versión piloto como de la versión definitiva. Por esta razón es que sólo hemos analizado ocho tareas, cuantitativa y cualitativamente, en los apartados 5.4.2.2 y 5.4.2.3 respectivamente.

9. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y $x_0 \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - 3h)}{3h} = f'(x_0)$$

   a) Justifica gráficamente la proposición anterior.
   b) Prueba la proposición mediante el uso de la definición de derivada.

Figura 5.50. Tarea 9 suprimida de la versión piloto del Cuestionario CDM-Derivada

10. Haciendo uso de la definición de derivada, demuestra que:
   a) Si $g(x) = f(x + c)$ entonces $g'(x) = f'(x + c)$
   b) Si $h(x) = f(x) + c$ entonces $h'(x) = f'(x)$
   c) Interpreta ambas afirmaciones gráficamente.

Figura 5.51. Tarea 10 suprimida de la versión piloto del Cuestionario CDM-Derivada

11. Se desea construir un tanque de acero con la forma de un cilindro circular recto y semiesferas en los extremos para almacenar gas propano. El costo por metro cuadrado de los extremos semiesféricos es el doble que el de la parte cilíndrica. ¿Qué dimensiones minimizan el costo si la capacidad deseada es de 10π m^3? Recuerda que el volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$ y su área es $4\pi r^2$.

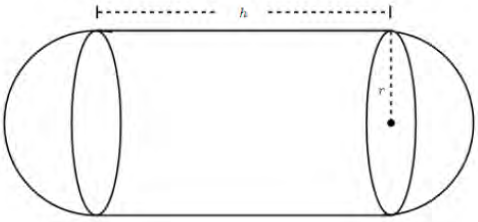


Figura 5.52. Tarea 11 suprimida de la versión piloto del Cuestionario CDM-Derivada

5.5.1. La valoración de los expertos

Los 8 expertos que respondieron a la encuesta (Anexo 3) pertenecían a las siguientes universidades o centros de investigación: uno de la Universidad de Sonora, México (experto E1); dos del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados CINVESTAV, México (expertos E2 y E3); dos de la Universidad de Jaén, España (expertos E4 y E5); uno de la Universidad de Sevilla, España (experto E6); uno de la Universitat de Barcelona, España (experto E7); y uno de la Universitat Autònoma de Barcelona, España (experto E8).

En general, la valoración que recibió el *Cuestionario CDM-Derivada* por parte de los expertos fue positiva, pues se obtuvieron para las 8 tareas puntuaciones de 4 o 5 (escala de 0 a 5) respecto al grado de relevancia de los criterios mencionados en el apartado anterior. Tres de los investigadores lo señalan de la siguiente manera:

> *"Creo que es un cuestionario muy completo. Habrá que tener en cuenta que no sólo se miden los conocimientos sino la forma en que se han adquirido. Me refiero a un aprendizaje muy mecánico o rutinario o un aprendizaje significativo donde la derivada en un punto tiene varias representaciones"* (experto E7).

> *"…me gustaría resaltar que las tareas que se proponen son ricas y variadas y sí permiten medir el conocimiento didáctico-matemático de la derivada de futuros profesores de bachillerato. Igualmente, me gustaría resaltar la importancia de los criterios definidos para la selección de las tareas: distintos significados del objeto derivada; el uso de diferentes representaciones activadas en el enunciado y la solución de cada uno de los ítems y las tres componentes del conocimiento*

> *didáctico-matemático de los futuros profesores (común del contenido, conocimiento especializado y ampliado)" (experto E8).*

> *"Considero que las tareas incluidas hacen un buen recorrido por los distintos significados de la derivada y considerando las distintas representaciones. Además, son simples, en tanto que no requieren cálculos pesados lo que enturbiaría el contenido que se pretende investigar" (experto E4).*

Así mismo se proporcionaron diversas observaciones para cada una de las tareas que componen el cuestionario, entre las que podemos destacar por su especial relevancia en la inclusión de las tareas que compondrán la versión definitiva del cuestionario, se encuentran las siguientes:

> *"Puede haber alumnos que vengan de temas de economía y empresa y ahí la derivada está asociada a conceptos como el de marginalidad donde la derivada aparece como la función de utilidad marginal... Falta alguna cuestión que relacione la derivada con la economía, ya que si no el cuestionario está muy volcado a una única aplicación de otras ciencias (la Física)"* (E5).

> *"…es que es necesario incluir actividades que se relacionan con la modelación. Entre ellas están los problemas de optimización y los de razón instantánea de cambio. Asimismo me parece que debería incluirse algún problema en el que las expresiones verbales jueguen un papel más importante. Por ejemplo algún enunciado que diga cosas como el siguiente: "La energía cinética de un objeto es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad y se ha encontrado experimentalmente que la constante de proporcionalidad es un medio de su masa. ¿Cuál es la rapidez de cambio de la energía cinética con respecto a la velocidad cuando v = 2 m/seg?"* (E1).

Las observaciones anteriores de los expertos E5 y E1, respectivamente, nos dieron pautas para incluir las tareas que se presentan en la Figura 5.53. El análisis epistémico de dichas tareas se presenta en el siguiente capítulo cuando realicemos la descripción de la versión final del cuestionario.

9. En una empresa el coste total de producir q unidades viene dado por la función $C(q) = \frac{1}{3}q^3 - 12q^2 + 150q + 2304$.
   a) Halla las funciones que determinan el coste total medio y el coste marginal.
   b) Determina el coste marginal y el coste total medio cuando la producción es de 3 y de 6 unidades.

10. La energía cinética de un objeto es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad y se ha encontrado experimentalmente que la constante de proporcionalidad es un medio de su masa. ¿Cuál es la rapidez de cambio de la energía cinética con respecto a la velocidad cuando $v = 0\ {}^{mts}/_{seg}$? Justifica tu respuesta.

11. ¿Es posible encontrar dos números cuya suma sea 120 y el producto del primero por el cuadrado del segundo sea máximo? Si es así, ¿cuáles serían dichos números? Explica tu razonamiento.

Figura 5.53. Tareas incluidas en la versión final del *Cuestionario CDM-Derivada*

Uno de los expertos, E8, propone incluir 5 tareas para profundizar más en la variedad de representaciones. No obstante, estamos de acuerdo con el experto E7 cuando señala:

> *"Más que añadir otras tareas me parece que sería conveniente completar con entrevistas que permitieran profundizar en las respuestas. Tareas, claro que se pueden añadir, pero no es realista proponer un cuestionario demasiado largo".*

De esta forma, para la aplicación definitiva del cuestionario, se han pensado en entrevistas semiestructuradas para algunas tareas en las cuales no se obtuvo información suficiente sobre las configuraciones cognitivas de los profesores en formación inicial y por lo tanto, sobre su conocimiento didáctico-matemático inicial.

Otras observaciones fueron realizadas por cada uno de los expertos, que participaron en la evaluación de nuestro instrumento, de manera general, estas referían a aspectos de redacción de algunas de las tareas. Dichas sugerencia las hemos considerado para la versión final de nuestro instrumento.

5.6. DISCUSIÓN Y CONSIDERACIONES FINALES

En general, el cuestionario *CDM-Derivada* aplicado a futuros profesores de bachillerato, tuvo una dificultad media tal y como se ilustra en la Tabla 5.15. Como se observó en las secciones dedicadas al análisis cuantitativo y cualitativo de las respuestas de los profesores en formación inicial, los ítems del cuestionario que les resultaron más difíciles de resolver fueron el 2-d y la tarea 7. La tarea uno y los ítems 2-a, 3-a y 4-a, fueron los que tuvieron más respuestas correctas.

Tabla 5.15. Índice de dificultad de los ítems del cuestionario *CDM-Derivada*

	Ítem	Índice de dificultad	%
1	I-1	0,8679	86,79
2	I-2a	0,7547	75,47
3	I-2b	0,6038	60,38
4	I-2c	0,6415	64,15
5	I-2d	0,1321	13,21
6	I-3a	0,8491	84,91
7	I-3b	0,5660	56,60
8	I-4a	0,7547	75,47
9	I-4b	0,5849	58,49
10	I-5	0,5283	52,83
11	I-6a	0,5660	56,60
12	I-6b	0,4528	45,28
13	I-7	0,4528	45,28
14	I-8	0,1132	11,32
Media: 0,56			

El análisis de contenido (ontosemiótico y curricular) realizado para cada una de las tareas muestran que los objetos matemáticos, sus significados y los procesos identificados en las soluciones plausibles de las tareas, se adaptan a los objetos matemáticos, sus significados y los procesos involucrados en las configuraciones cognitivas asociadas a las respuestas de los profesores en formación inicial. Así, la técnica de análisis denominada análisis semiótico (Godino, 2002; Malaspina y Font, 2010; Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2011) y el análisis de contenido realizado previo a la aplicación piloto del cuestionario nos permitió observar y describir de manera sistemática tanto la actividad matemática realizada por los futuros profesores al resolver problemas, como los objetos matemáticos primarios (elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) que intervienen en las prácticas que permiten la resolución de las tareas (Godino, Batanero y Font, 2007).

Hay que señalar que el tipo de conocimiento didáctico-matemático se encuentra estrechamente vinculado con la variable tipo de configuración cognitiva asociada a las respuestas de los estudiantes, puesto que la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático depende de la presencia o ausencia de los objetos matemáticos, sus significados y relaciones entre los mismos. Estas configuraciones cognitivas son de naturaleza didáctico-matemática debido a que las tareas presentadas tienen dicho carácter, y por tanto los sujetos deben movilizar conocimientos matemáticos y didácticos.

De esta forma, los resultados obtenidos a partir de los análisis cuantitativo y cualitativo de las resoluciones que los futuros profesores dieron a las tareas incluidas en el cuestionario, señalan que éstos exhiben ciertas dificultades para resolver tareas relacionadas con el conocimiento especializado y ampliado sobre la derivada, e inclusive con los ítems sobre conocimiento común del contenido tales como el *2a*. Resultados más profundos referentes al conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada de los profesores en formación inicial, se presentarán en el Capítulo 6 cuando se describa la aplicación definitiva de nuestro instrumento y el análisis de los resultados obtenidos de dicha aplicación.

Por otro lado, añadido a lo anterior, el estudio mediante juicio de expertos ha dado evidencia de que las tareas del *Cuestionario CDM-Derivada*, en efecto miden o evalúan lo que previmos en los análisis de contenido que realizamos para cada una de ellas. Así, con la consideración de las sugerencias y observaciones de cada uno de los expertos participantes en el estudio, queda sustentado el hecho de que, el instrumento diseñado y descrito a lo largo de este capítulo, sí evalúa aspectos relevantes de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de los profesores en formación inicial obre la derivada.

Finalmente, las tareas suprimidas de la versión piloto del cuestionario, podrían explorarse en otros trabajos de investigación, en los cuales se consideren factores como más tiempo, si es que se aplica el instrumento en su totalidad, para tratar de responder a alguna de las hipótesis sobre su no resolución en nuestro estudio exploratorio.

CAPÍTULO 6

Evaluación de la Faceta Epistémica del Conocimiento Didáctico-Matemático sobre la Derivada de Futuros Profesores de Bachillerato

6.1. INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo, presentamos los resultados de la aplicación de la "versión final" del *Cuestionario CDM-Derivada*, la cual hemos obtenido a partir de los estudios realizados en el capítulo anterior: 1) aplicación piloto; y 2) el estudio mediante el juicio de expertos. En la primera parte se presenta el análisis epistémico de las nuevas tareas incluidas en la versión definitiva del cuestionario. Posteriormente, realizamos el análisis cuantitativo y cualitativo de los datos obtenidos de la aplicación de nuestro instrumento a una nueva muestra de futuros profesores de matemáticas de Bachillerato. Dicho análisis lo reforzamos mediante la presentación de los resultados de las entrevistas llevadas a cabo, con la finalidad de complementar información sobre la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada de los mencionados profesores en formación.

6.2. DESCRIPCIÓN DEL CUESTIONARIO DEFINITIVO

Cómo señalamos en el capítulo anterior, a partir de los resultados obtenidos tanto de la aplicación piloto del cuestionario como del estudio de juicio de expertos, se incluyeron tres tareas en la "versión definitiva" del cuestionario, con la finalidad de explorar el conocimiento de los profesores sobre la derivada en otros contextos de uso, tales como la economía. A continuación presentamos el análisis de contenido que evalúan cada una de ellas.

Para ello, procedemos tal y como lo hicimos en el apartado 5.3.2 del capítulo 5, mediante el uso de las herramientas teóricas que nos proporciona el enfoque ontosemiótico (EOS), concretamente, de la noción de *configuración de objetos y procesos* involucrados tanto en el planteamiento como en las soluciones plausibles de cada una de las tres tareas.

6.2.1. Tarea 9: Derivada como coste marginal

La Tarea 9 (Figura 6.1), fue incluida debido a la observación que, de alguna manera, realizaron tres de los expertos sobre la referencia del cuestionario a contenidos, casi en su totalidad, físicos y matemáticos. De esta manera, el objetivo primordial de la tarea 9, es explorar el uso que dan, los futuros profesores, a la derivada en la economía; esto es, su conocimiento de la derivada en el contexto económico y financiero. En este sentido, esta tarea es evaluadora del conocimiento especializado de los futuros profesores, ya que para su resolución, requiere del uso de la derivada como *coste marginal*.

Cabe señalar, que tanto en economía y como en finanzas, *el coste marginal* es entendido como el incremento que sufre el coste cuando se incrementa la producción en una unidad; es decir, el incremento del coste total que supone la producción adicional de una unidad de un determinado bien. Así, el coste marginal mide la tasa de variación del coste total dividida por la variación de la producción. Matemáticamente esto se puede escribir como sigue: Si CT es la función que representa el coste total de producir Q unidades de un bien, entonces el costo marginal CM_a está dado por $CM_a = \frac{dCT}{dQ}$.

Tarea 9

En una empresa el coste total de producir q unidades viene dado por la función $C(q) = \frac{1}{3}q^3 - 12q^2 + 150q + 2304$.

a) Halla las funciones que determinan el coste total medio y el coste marginal.
b) Determina el coste marginal y el coste total medio cuando la producción es de 3 y de 6 unidades.

Figura 6.1. Tarea 9 del *Cuestionario FE-CDM-Derivada*

6.2.1.1. Solución plausible de la tarea 9

Para cada uno de los apartados de esta tarea 9, presentamos a continuación una posible solución:

a) Dado que tenemos la función de coste total, el *coste marginal* lo obtenemos derivando dicha función, para lo cual obtenemos: $CM_a(q) = C'(q) = q^2 - 24q + 150$. Ahora bien, para calcular el *coste total medio* debemos saber que éste representa el coste por unidad de producción y que se obtiene como resultado del cociente *coste total de producción* dividido por el *numero total de unidades producidas*, esto es, $\frac{C(q)}{q}$. Así, el *coste total medio* CM_e vienen dado por la función: $CM_e(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{1}{3}q^2 - 12q + 150 + \frac{2304}{q}$.

   Así, las funciones que determinan el coste total medio y el coste marginal, respectivamente, son:

$$CM_e(q) = \frac{1}{3}q^2 - 12q + 150 + \frac{2304}{q} \text{ ……………………..(1)}$$

$$CM_a(q) = q^2 - 24q + 150 \text{ ……………..……………(2)}$$

b) Para calcular el coste total medio y el coste marginal cuando se producen 3 y 6 unidades respectivamente, debemos asignar $q = 3$ y $q = 6$ en las funciones (1) y (2) respectivamente.

   De esta forma sustituyendo $q = 3$ y $q = 6$ en (1), obtenemos:

$$CM_e(3) = \frac{1}{3}3^2 - 12(3) + 150 + \frac{2304}{3}$$

$$CM_e(3) = 885$$

$$CM_e(6) = \frac{1}{3}6^2 - 12(6) + 150 + \frac{2304}{6}$$

$$CM_e(6) = 474$$

   Así, hemos obtenido que el costo total medio que se tiene al producir 3 unidades es de 885 *u* y el que se tiene al producir 6 unidades es de 474 *u*.

   Ahora bien, si asignamos $q = 3$ y $q = 6$ en (2), obtendremos el costo marginal que se tiene al producir 3 y 6 unidades, respectivamente:

$$CM_a(3) = 3^2 - 24(3) + 150$$

$$CM_a(3) = 87$$

$$CM_a(6) = 6^2 - 24(6) + 150$$

$$CM_a(6) = 42$$

Por lo tanto se tiene que el costo marginal que resulta de producir 3 y 6 unidades es de 87 *u* y 42 *u* respectivamente.

6.2.1.2. Contenido ontosemiótico: análisis epistémico

A continuación presentamos el análisis epistémico mediante la descripción de los procesos, objetos primarios (elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) y sus significados, inmersos tanto en el planteamiento como en la solución plausible de la tarea.

− *Proceso de Representación* ↔ *Significación* −

Como parte de esta dualidad entre representación y significación hemos identificado diversos elementos lingüísticos y conceptos, previos y emergentes, tanto en el planteamiento como en la solución propuesta de la tarea nueve. A continuación se detallan los lenguajes y conceptos identificados, así como los significados que les son conferidos en el contexto específico de la tarea.

Elementos lingüísticos

Los elementos lingüísticos previos que identificamos son:

- $C(q) = \frac{1}{3}q^3 - 12q^2 + 150q + 2304$. Expresión simbólica que refiere a la función de coste total.
- *“q”*. Letra que refiere a una variable misma que representa la cantidad de unidades de lo que se produce.
- La expresión “Halla las funciones que determinan…” [ítem a)]. Sentencia que alude a un proceso de algoritmización del cual emergerá un procedimiento para el cálculo de las funciones de coste total medio y coste marginal.
- La expresión “Determina el coste marginal…” [ítem b)]. Sentencia que remite a un proceso de algoritmización del cual emergerá un procedimiento para el cálculo del coste marginal y el coste total medio para valores concretos de *q*.

Como elementos lingüísticos emergentes identificamos:

- $CM_a(q) = q^2 - 24q + 150$. Expresión simbólica que refiere a la función de costo marginal.
- $CM_e(q) = \frac{1}{3}q^2 - 12q + 150 + \frac{2304}{q}$. Expresión simbólica que denota la función de coste total medio.
- $CM_e(3) = 885$ y $CM_e(6) = 474$. Expresiones simbólicas que son solución parcial al ítem b) y que representan el coste total medio cuando se producen 3 y 6 unidades respectivamente.
- $CM_a(3) = 87$ y $CM_a(6) = 42$. Expresiones simbólicas que son solución parcial al ítem b) y que representan el coste marginal cuando se producen 3 y 6 unidades respectivamente.

Conceptos

Para esta tarea, específicamente, encontramos solamente conceptos previos requeridos para su resolución, entre los cuales se encuentran:

- Función de coste total. Función que da el costo que se tiene al producir una cierta cantidad de un producto.
- Función de coste total medio. Función que describe el coste total por unidad de producción.
- Función de coste marginal. Función que describe el incremento que sufre el coste cuando se incrementa la producción en una unidad; es decir, el incremento del coste total que supone la producción adicional de una unidad de un determinado bien.
- Función derivada. Entendida como la función de coste marginal.
- Derivada en un punto. Entendida como el costo marginal cuando se producen 3 y 6 unidades exactamente.

− *Proceso de composición* −

A partir de los elementos lingüísticos y los conceptos identificados en el proceso anterior, se reconoce el uso de proposiciones y procedimientos mismos que se articulan mediante un proceso de argumentación del cual emergen, valga la redundancia, los argumentos utilizados para las soluciones. A continuación se detallan, respectivamente, las propiedades, procedimientos y argumentos, identificados en las soluciones plausibles de la tarea.

Proposiciones

Identificamos la siguiente proposición previa:

- PP1: "En una empresa el coste total de producir q unidades viene dado por la función $C(q) = \frac{1}{3}q^3 - 12q^2 + 150q + 2304$". Proposición que establece en una función de coste total, la relación entre los costos fijos y costos variables que se tienen con la producción de q unidades de cierto producto.

Las proposiciones emergentes identificadas son:

- PP2: "El coste marginal lo obtenemos derivando la función de coste total". Proposición que prescribe el procedimiento a seguir para obtener la función de coste marginal.
- PP3: Reglas de derivación. Para derivar la función de coste total.
- PP4: "el coste total medio se obtiene como resultado del coste total de producción dividido por el número total de unidades producidas". Proposición que refiere al procedimiento a seguir para la obtención de la función que describe el coste total medio.
- PP5: "La función de coste marginal y coste total medio es $CM_a(q) = q^2 - 24q + 150$ y $CM_e(q) = \frac{1}{3}q^2 - 12q + 150 + \frac{2304}{q}$ respectivamente". Solución al ítem a) de la tarea.
- PP6: "El coste marginal y coste total medio cuando se producen 3 y 6 unidades es 87 y 42, y 885 y 472, respectivamente". Solución del ítem b) de la tarea.

Procedimientos

Los procedimientos que emergen para la solución de la tarea son:

- El cociente $\frac{C(q)}{q}$. Cociente para determinar el coste total medio $CM_e(q)$.

- La derivada. Uso de PP3 sobre la función de coste total *C(q)*, para la obtención de la función de coste marginal $CM_a(q)$.
- Evaluación de valores concretos de q, $q = 3$ y $q = 6$, en las funciones de coste total medio y coste marginal. Para la obtención de PP6 que es respuesta al ítem b). Dichos valores concretos pertenecen al dominio de ambas funciones.

Proceso de argumentación

Este elemento de la configuración de objetos matemáticos primarios y procesos, que es un emergente del proceso de composición, puede ser visto en sí mismo como un objeto matemático primario, el objeto "argumentos", por medio del cual, los sujetos dan sentido y relacionan a los otros objetos matemáticos primarios de manera tal, que su organización configura una solución al problema. Es decir, dentro del EOS entendemos que es mediante un proceso de argumentación que emergen los argumentos como objetos. Los argumentos más relevantes que identificamos son:

- El coste marginal está dado por la función mencionada en PP5 y se obtiene derivando, pues en economía el coste marginal es entendido como el incremento que sufre el coste cuando se incrementa la producción en una unidad. Así, el coste marginal es el significado que en economía se le confiere a la derivada.
- El coste total medio, referido en PP5, viene dado por el cociente $\frac{C(q)}{q}$, pues por definición, el coste total medio es el coste total por unidad de producción.

6.2.1.3. Contenido curricular

Los contenidos curriculares que se evalúan con la tarea 9 son los siguientes:

- Funciones y su aplicación a temas de la economía.
- Uso de las reglas de derivación.
- Derivada en un punto.
- Aplicación de la derivada y sus propiedades a temas de la economía.

6.2.2. Tarea 10: Modelación

De acuerdo con las observaciones de algunos de los expertos que participaron en el estudio de juicio de expertos, la versión piloto del cuestionario exploraba muy poco aspectos referentes a la modelación, y se le daba muy poco peso al papel que juegan las representaciones verbales. En palabras de uno de los expertos, "*…es que es necesario incluir actividades que se relacionan con la modelación. Entre ellas están los problemas de optimización y los de razón instantánea de cambio… me parece que debería incluirse algún problema en el que las expresiones verbales jueguen un papel más importante*" (E1). En este sentido, la tarea 10 (Figura 6.2) tiene por objetivo explorar aspectos del conocimiento especializado de los futuros profesores, relacionados con el uso de representaciones verbales y simbólicas (principalmente), justificaciones y la modelación la cual, como señalan Godino, Batanero y Font (2007), es un "mega proceso" puesto que implica procesos más elementales como los de representación, argumentación, idealización, generalización, etc. El significado de la derivada asociado al conocimiento de los futuros profesores que se pretende explorar es el de razón instantánea de cambio.

Tarea 10

La energía cinética de un objeto es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad y se ha encontrado experimentalmente que la constante de proporcionalidad es un medio de su masa. ¿Cuál es la rapidez de cambio de la energía cinética con respecto a la velocidad cuando $v = 0 \ {}^{mts}/_{seg}$? Justifica tu respuesta.

Figura 6.2. Tarea 10 del *Cuestionario CDM-Derivada*

6.2.2.1. Solución plausible de la tarea 10

Para solucionar la tarea, primero hay que encontrar una expresión para la función que modela la energía cinética según las condiciones dadas en el planteamiento de la tarea. Así, sea E_c la energía cinética del objeto, k la constante de proporcionalidad, v la velocidad del objeto y m la masa del objeto.

La primera condición de la tarea es que "la energía cinética de un objeto es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad". Así, obtenemos que

$$E_c(v) = kv^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

La segunda condición de la tarea es que "la constante de proporcionalidad es un medio de su masa". De esta forma se obtiene que:

$$k = \frac{m}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Sustituyendo (2) en (1), obtenemos que la energía cinética del cuerpo en cuestión, vienen dada por la función:

$$E_c(v) = \frac{1}{2}mv^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Ahora bien, para calcular la rapidez de cambio de la energía cinética con respecto a la velocidad cuando la velocidad es cero, debemos derivar (3) ya que la rapidez de cambio en $v = 0$ está asociada a la derivada en un punto. Así, obtenemos:

$$E_c{}'(v) = mv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

Evaluando $v = 0$ en (4) obtenemos:

$$E_c'(0) = m(0) = 0$$

Por lo tanto, la rapidez de cambio de la energía cinética de un cuerpo, cuando su velocidad es $v = 0\ {}^{mts}/_{seg}$, es cero. Lo que resulta evidente si tenemos en cuenta que la energía cinética es la energía que poseen los cuerpos por el hecho de estar en movimiento, por lo que si no hay velocidad, no hay movimiento y esto implica que no haya energía cinética.

6.2.2.2. Contenido ontosemiótico: análisis epistémico

A continuación presentamos el análisis epistémico mediante la descripción de los procesos, objetos primarios y sus significados, inmersos tanto en el planteamiento como en la solución plausible de la tarea 10.

– Proceso de Modelización –

La tarea 10, por su naturaleza, requiere para su solución de un “mega-proceso”: la modelación. Este mega-proceso requiere, a su vez, de la activación de los procesos que hasta el momento hemos utilizado para el análisis epistémico de las tareas anteriores: descomposición, representación–significación, composición, argumentación. La activación idónea de un proceso de modelización, requerirá por parte los futuros profesores de la activación idónea de los procesos que emergen de él. A continuación presentamos el análisis de los procesos y los objetos matemáticos primarios involucrados en la solución de la tarea 10 la cual requiere de la activación de un proceso de modelización para su correcta solución.

− Proceso de Representación ↔ Significación −

Como parte del “mega-proceso” modelización, se encuentra el proceso de descomposición, que ayuda a comprender y vislumbrar globalmente, a partir del sistema de representaciones activadas en la práctica de un individuo (proceso de representación-significación), los elementos de la configuración de objetos y los significados que a éstos se les confiere en el contexto particular de la práctica que se lleva a acabo. Mediante este procesos nos fue posible identificar diversos elementos lingüísticos y conceptos previos y emergentes, tanto en el planteamiento como en la solución propuesta de la tarea diez. A continuación se detallan los lenguajes y conceptos identificados, así como los significados que les son conferidos en el contexto específico de esta tarea.

Elementos lingüísticos

Los elementos lingüísticos previos que identificamos son, casi en su totalidad, de carácter verbal. Entre ellos podemos destacar los siguientes:

- La sentencia “La energía cinética de un objeto es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad”. Representación verbal, misma que requiere de un modelo matemático para la solución de la tarea, la cual refiere a una propiedad de la energía cinética.
- La expresión “…se ha encontrado experimentalmente que la constante de proporcionalidad [de la energía cinética] es un medio de su masa”. Representación verbal que refiere a una propiedad de la constante de proporcionalidad, misma que es condición inicial para el planteamiento del modelo.
- La expresión “Rapidez de cambio de la energía cinética”. Que refiere a la “medida” en que cambia la energía de cinética de un objeto conforme varía su velocidad. Esta expresión refiere también a conceptos tales como los de rapidez de cambio, que en el contexto particular de la tarea puede ser entendida como la derivada, y energía cinética.

Como elementos lingüísticos emergentes identificamos:

- La expresión simbólica $E_c(v) = kv^2$. Refiere a la primera condición de la tarea y es otra forma de representar o el cambio de registro de representación del elemento lingüístico "la energía cinética de un objeto es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad". E_c representa la energía cinética en términos de v (velocidad) y k es la constante de proporcionalidad.

- La expresión simbólica $k = \frac{m}{2}$. Representación simbólica de la segunda condición de la tarea, misma que refiere a una propiedad de la constante de proporcionalidad: "…la constante de proporcionalidad es un medio de su masa". k es la constante de proporcionalidad, m representa la masa del objeto en cuestión.
- La expresión simbólica $E_c(v) = \frac{1}{2}mv^2$. Representación simbólica de la función que describe, en la tarea, la energía cinética del objeto en cuestión. Es el modelo matemático buscado.
- La expresión $E_c'(v) = mv$. Derivada de la función que describe la energía cinética del objeto. En el problema se le confiere el significado de *función de rapidez de cambio* de la energía cinética respecto de la velocidad.
- La expresión simbólica $E_c'(0) = m(0) = 0$. Respuesta a la tarea y expresa la rapidez instantánea de cambio cuando la velocidad es cero.

Conceptos

Para esta tarea encontramos solamente conceptos previos requeridos para su resolución, entre los cuales se encuentran:

- CD1: Energía cinética. En física es aquella energía que posee un cuerpo por su movimiento, depende de la masa puntual (m) del cuerpo y de los componentes del movimiento descritos por la velocidad (v) de la masa puntual.
- CD2: Rapidez de cambio. En el contexto de la tarea, es la razón con la que cambia la energía cinética conforme varía la velocidad.
- CD3: Derivada. Entendida en la tarea como la función de rapidez de cambio de la energía cinética del objeto en cuestión.
- CD4: Derivada en un punto. Entendida como la rapidez instantánea de cambio de la energía cinética del objeto cuando su velocidad de cero.

− *Proceso de composición* −

A partir de los elementos lingüísticos y los conceptos identificados en el proceso anterior, se reconoce el uso de proposiciones y procedimientos mismos que se articulan mediante un proceso de argumentación del cual emergen, valga la redundancia, los argumentos utilizados para las soluciones. A continuación se detallan, respectivamente, las propiedades, procedimientos y argumentos, identificados.

Proposiciones

Identificamos la siguiente proposición previa:

- PP1: "La energía cinética de un objeto es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad". Propiedad que, en el contexto del problema, requiere de un cambio en el registro de representación del verbal al simbólico. $E_c(v) = kv^2$.
- PP2: "la constante de proporcionalidad es un medio de su masa". Proposición que requiere de un cambio en el registro de representación, del verbal al simbólico $k = \frac{m}{2}$.

Las proposiciones emergentes identificadas son:

- PP3: $E_c(v) = \frac{1}{2}mv^2$. Modelo matemático que representa la función que describe la energía cinética de un objeto. Se obtiene a partir del cambio del registro de representación de PP1 y PP2.
- PP4: Reglas de derivación. Para calcular la función que describe al conjunto de rapidez instantánea de cambio de la energía cinética.
- PP5: $E_c'(v) = mv$. Expresión simbólica que representa la función de *rapidez de cambio,* o al conjunto de los valores que toma la rapidez instantánea de cambio.
- PP6: $E_c'(0) = 0$. Proposición que supone la respuesta a la tarea y que representa la rapidez de cambio de la energía cinética cuando la velocidad es cero metros por segundo.

Procedimientos

Los procedimientos que emergen para la solución de la tarea son:

- P1: El paso de un registro de representación verbal al un registro de representación simbólica para la obtención, mediante la consideración de las condiciones de la tarea (proposiciones PP1 y PP2), el modelo matemático para la energía cinética de un objeto (PP3).
- P2: La derivada de funciones. Uso de la derivada en su acepción de rapidez instantánea de cambio y las reglas de derivación (PP4) para encontrar la "función de rapidez instantánea de cambio" (PP5).
- P3: Evaluación de valores concretos de v, $v = 0$, en las funciones de "rapidez instantánea de cambio" para la obtención de PP6, que es la respuesta parcial de la tarea.
- P4: Interpretación de los resultados matemáticos, para dar una respuesta a la pregunta planteada en el contexto de la tarea (interpretación de PP6). Esto supondría la respuesta a la tarea.

Proceso de argumentación

Los argumentos más relevantes que identificamos son:

- A1: Argumentos más "técnicos", en los que sin modelar, se "recuerde la fórmula" dada en los cursos de física de la energía cinética $E_c = \frac{1}{2}mv^2$, donde E_c es la energía cinética del objeto, m y v la masa y la velocidad del mismo respectivamente.
- A2: Encontrar el modelo matemático que describe la energía cinética de un objeto a partir de las proposiciones PP1 y PP2 y el paso de un tipo de representación verbal a un tipo de representación simbólica. Esto para la obtención de PP3.
- A3: En cualquiera de los caso anteriores, A1 o A2, para la solución de la tarea es necesario que una vez planteado el modelo, se confiera el significado de rapidez instantánea de cambio a la derivada (CD3 y CD4) para que mediante la aplicación consecutiva de P2 y P3, se obtenga PP6.

6.2.2.3. Contenido curricular

Los contenidos curriculares que se evalúan con la tarea 10 son los siguientes:

- Aplicación de la derivada a problemas de modelación.
- Reglas para la derivación de funciones.
- Derivada en un punto.

6.2.3. Tarea 11: Optimización

Al igual que en la tarea anterior, la tarea 11 (Figura 6.3) es evaluadora del conocimiento especializado de los futuros profesores, ya que para su resolución los profesores deben hacer uso de la modelación, la cual como vimos anteriormente, es un "mega proceso" que involucra procesos más simples como los de representación, argumentación, generalización, etc. El uso de las representaciones verbales adquieren un rol principal para la resolución del problema, teniendo que pasar del lenguaje verbal al simbólico. El problema es una variante del problema clásico de optimización de Fermat.

Tarea 11 ¿Es posible encontrar dos números cuya suma sea 120 y el producto del primero por el cuadrado del segundo sea máximo? Si es así, ¿cuáles serían dichos números? Explica tu razonamiento.

Figura 6.3. Tarea 11 del *Cuestionario CDM-Derivada*

6.2.3.1. Solución plausible de la tarea 11

Procediendo como en la resolución de la tarea anterior, una posible solución sería encontrar una expresión que modele las dos condiciones que se tienen. La primera condición es que debemos "encontrar dos números cuya suma sea 120", para lo cual tenemos que, si *x* y *y* son dichos números, entonces tenemos que:

$$x + y = 120 \quad \text{……..……………………………}(1)$$

La segunda condición del problema es que "el producto del primero por el cuadrado del segundo sea máximo". Para ello podemos crear la función producto (P) de dos números de tal forma que se cumpla la condición como sigue:

$$P(x, y) = xy^2 \quad \text{…………………………………...}(2)$$

Pero de (1) tenemos que:

$$y = 120 - x \quad \text{……………………………………..}(3)$$

Sustituyendo (3) en (2) obtenemos la función del producto que cumple con las dos condiciones de la tarea:

$$P(x) = x(120 - x)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Dado que queremos encontrar los números que hagan máximo el producto, hallamos la función derivada a partir de (4), y calculamos sus ceros:

$$P'(x) = 3x^2 - 480x + 120^2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$P'(x) = 0$$

$$3x^2 - 480x + 120^2 = 0$$

$$(x - 40)(x - 120) = 0$$

$$\therefore \quad x_1 = 40 \quad \wedge \quad x_2 = 120$$

Ahora bien, como queremos que el producto sea máximo, debemos encontrar cuál de los valores x_1 o x_2 es un máximo relativo. Para ello, utilizamos el criterio de la segunda derivada. Así, tomando (5) obtenemos:

$$P''(x) = 6x - 480 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Evaluando x_1 y x_2 en (6) tenemos que:

$P''(x_1) = 6(40) - 480 = -240$, entonces dado que $P''(x_1) < 0$, la función $P(x)$ tiene un máximo relativo en $x = 40$.

$P''(x_2) = 6(120) - 480 = 240$, entonces dado que $P''(x_2) > 0$, la función $P(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = 120$.

Ahora, dado que $x = 40$ es el máximo, entonces sustituimos este valor de x en (1) y obtenemos:

$$(40) + y = 120$$

$$y = 80$$

Por lo tanto, los números que cumplen con las condiciones y que dan solución a la tarea son 40 y 80.

6.2.3.2. Contenido ontosemiótico: análisis epistémico

A continuación presentamos el análisis epistémico mediante la descripción de los procesos, objetos primarios y sus significados, inmersos tanto en el planteamiento como en la solución plausible de la tarea 11.

– Proceso de Modelización –

Al igual que en la tarea 10, la tarea 11, por su naturaleza, requiere para su solución del “mega-proceso modelación”. A continuación presentamos el análisis de los procesos y los objetos matemáticos primarios involucrados en la solución de la tarea 11, mismos que se encuentran inmersos en el proceso de modelación.

− Proceso de Representación ↔ Significación −

Como parte de esta dualidad entre representación y significación hemos identificado diversos elementos lingüísticos y conceptos, previos y emergentes, tanto en el planteamiento como en la solución propuesta de la tarea once. A continuación se detallan los lenguajes y conceptos identificados, así como los significados que les son conferidos en el contexto específico de la tarea.

Elementos lingüísticos

Los elementos lingüísticos previos que identificamos son, casi en su totalidad, de carácter verbal. Entre ellos podemos destacar los siguientes:

- EL1: “Encontrar dos números cuya suma sea 120”. Representación verbal de una de una propiedad o condición que debe de cumplir el modelo matemático que se requiere hallar para la solución de la tarea.
- EL2: “el producto del primero por el cuadrado del segundo [de los dos números que se quieren hallar] debe ser máximo”. Representación verbal de la segunda condición o propiedad que debe cumplir el modelo matemático requerido para la solución de la tarea.

Como elementos lingüísticos emergentes identificamos:

- EL3: “$x + y = 120$”. Expresión simbólica que modela a EL1.
- EL4: “$P(x, y) = xy^2$”. Expresión simbólica que modela a EL2.
- EL5: “$P(x) = x(120 - x^2)$”. Modelo matemático que cumple con las condiciones EL1 y EL2. Hace referencia al uso del concepto y propiedades de la función compuesta.
- EL6: “$P'(x) = 3x^2 - 480x + 120^2$”. Derivada de la función que cumple con las dos condiciones del problema. Esta derivada se realiza refiriendo a una propiedad sobre los máximos relativos de una función.
- EL7: “$P'(x) = 0$”. Expresión simbólica que refiere a una propiedad para la determinación de puntos críticos de una función.
- EL8: “$x_1 = 40 \wedge x_2 = 120$”. Puntos críticos hallados a partir de EL7.
- EL9: “$P''(x) = 6x - 480$”. Segunda derivada de la función compuesta representada con EL5. Esta derivada se realiza para referir a una propiedad para la determinación de los máximos y mínimos relativos de una función: el criterio de la segunda derivada.

Conceptos

Para esta tarea encontramos solamente conceptos previos requeridos para su resolución, entre los más relevantes se encuentran:

- CD1: Función. Particularizadas en la tarea como la función producto de dos números y la función suma de dos números. Las condiciones que deben cumplir estas dos funciones se representan con EL2 y EL4, y EL1 y EL3 respectivamente.
- CD2: Función compuesta. Función formada por la composición o aplicación sucesiva de dos funciones, y que en nuestro caso concreto de la tarea 11 se particulariza en la composición de la función producto y la función suma, representadas con EL4 y EL3 respectivamente, dando pie a la función compuesta representada con EL5.
- CD3: Puntos críticos. Puntos del dominio de la función en los que la derivada es cero. Estos puntos se representaron con EL8.

- CD4: La derivada. En el contexto de la tarea, es usada exclusivamente para la determinación de los puntos críticos de la función compuesta modelada.
- CD5: Segunda derivada. En la tarea se activa exclusivamente para determinar si los puntos críticos refieren a un máximo o un mínimo relativo.

− *Proceso de composición* −

A partir de los elementos lingüísticos y los conceptos identificados en el proceso anterior, se reconoce el uso de proposiciones y procedimientos mismos que se articulan mediante un proceso de argumentación del cual emergen, los argumentos utilizados para las soluciones. A continuación se detallan, respectivamente, las propiedades, procedimientos y argumentos, identificados.

Proposiciones

Identificamos la siguiente proposición previa:

- PP1: los dos números que se quieren encontrar deben sumar 120 (EL1). Primera condición inicial de la tarea cuya modelación o representación simbólica da pie a lo que llamamos *función suma* $S(x) = 120 - x$ (EL3).
- PP2: los dos números que se quieren hallar deben cumplir que el producto del primero por el cuadrado del segundo, sea máximo (EL2). Segunda condición inicial de la tarea o propiedad cuya modelación da paso a la función que llamamos *función producto* $P(x, y) = xy^2$ (EL4), de la cual debemos obtener que el producto sea máximo.

Las proposiciones emergentes identificadas son:

- PP3: $P(x, y) \circ S(x) = P\big(x, S(x)\big) = P(x) = x(120 - x)^2$. La función compuesta cumple con las dos condiciones dadas en la tarea.
- PP4: “La derivada ayuda a localizar los puntos críticos de la función”. Aquellos valores del dominio de la función en los que la derivada es cero, pueden haber máximos o mínimos relativos.
- PP5: “criterio de la primera derivada”. Para determinar si en los puntos críticos hallados o bien hay un máximo o un mínimo relativo.

- PP6: "criterio de la segunda derivada". Para determinar si en los puntos críticos existe un máximo o un mínimo relativos.

Procedimientos

Los procedimientos que emergen para la solución de la tarea son:

- P1: Encontrar en modelo matemático, mediante el paso del registro de representación verbal de la función al registro simbólico, y utilizando PP3 (composición de funciones) para la obtención de la función que cumple con las dos condiciones dadas en la tarea.
- P2: Obtención de los puntos críticos de la función obtenida en P1, esto mediante la aplicación de las reglas de derivación para obtener la derivada de la función modelada y la aplicación de PP4.
- P3: Aplicación de PP5 o PP6 para determinar si en los puntos críticos obtenidos con P2, la función tiene un máximo o un mínimo.

Proceso de argumentación

Los argumentos más relevantes que identificamos son:

- A1: Para este caso los argumentos se centran en la enunciación de las propiedades PP4 y PP5 o PP6, para la determinación de puntos críticos y decidir si en ellos la función alcanza un máximo o un mínimo. Esto es así, pues si tomamos la derivada en un punto en su acepción de pendiente de la recta tangente a la función, en los máximos y mínimos de la función habrán tangentes horizontales, y dichas tangentes tendrán pendiente cero.

6.2.3.3. Contenido curricular

Los contenidos curriculares que se evalúan con esta tarea once son:

- Aplicación de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos relativos.

6.3. APLICACIÓN DEL CUESTIONARIO DEFINITIVO

En esta sección presentamos el análisis de los resultados obtenidos de la aplicación de la "segunda versión" o versión definitiva del *Cuestionario CDM-Derivada,* mismo que fue diseñado para la exploración de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de los futuros profesores. Para esta sección, a diferencia del Capitulo anterior, la exposición de los análisis que hemos realizado, la hemos organizado por tarea, presentando paralelamente los análisis cualitativos y cuantitativos.

6.3.1. Método

Como lo señalamos anteriormente, nuestra investigación se enmarca dentro de las metodologías de tipo mixto (Johnson y Onwuegbuzie, 2004; Creswell, 2009), puesto que se trata de un estudio de tipo exploratorio en el que se considera la observación de variables cuantitativas (grado de corrección de los ítems: respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas) y cualitativas (configuraciones cognitivas de los futuros profesores).

Para el estudio cualitativo nos apoyamos en la técnica de análisis denominada *análisis semiótico* (Godino, 2002), y en general, en las "herramientas teóricas" que nos proporciona el EOS, las cuales hemos descrito en el Capítulo 2.

6.3.1.1. Sujetos

El cuestionario definitivo se aplicó a una muestra de 49 estudiantes de los últimos cursos (sexto y octavo semestre) de la Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas que se imparte en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán (UADY) en México. Dicha licenciatura tiene una duración de cuatro años (8 semestres). Cabe señalar que la Facultad de Matemáticas de la UADY es la encargada, a través del plan de estudios de dicha licenciatura, de formar profesores con salida al nivel bachillerato o universitario en el estado de Yucatán en México.

Los 49 estudiantes a los que se les aplicó el cuestionario final, habían cursado cálculo diferencial en el primer semestre de la licenciatura y, a lo largo de ella, tomaron otros cursos relacionados con el análisis matemático (cálculo integral, cálculo vectorial, ecuaciones diferenciales, etc.). También habían cursado materias relacionadas con las matemáticas y su didáctica.

Cabe señalar que de los 49 estudiantes que participaron en el estudio, 55,1 % (27) eran mujeres y 44,9 % (22) eran hombres. No obstante debemos mencionar que no enfatizamos las diferencias entre los resultados de hombres y mujeres ya que esto no es objeto de nuestro estudio. Otro aspecto importante a señalar es que estos 49 estudiantes constituían la población completa de los estudiantes, con las características objetivo de nuestro estudio, en la Universidad de Yucatán.

6.3.1.2. Procedimiento

Para la resolución del *Cuestionario CDM-Derivada,* los profesores en formación inicial contaron con un tiempo de dos horas. El cuestionario se aplicó al total de 49 estudiantes, divididos en dos grupos, uno de sexto semestre (29 estudiantes) y otro de octavo semestre (20 estudiantes), el mismo día a mediados de mes de febrero del 2012 (un año después de la aplicación de la versión piloto del instrumento). Como se verá más adelante en este capítulo, no hubieron diferencias significativas entre los resultados (puntuaciones) de ambos grupos, aspecto por el cual, hemos considerado para nuestro estudio, a los 49 como una sola muestra.

La aplicación de la prueba estuvo a cargo, en el grupo de sexto semestre, por el investigador autor de esta tesis doctoral, y en el grupo de octavo semestre, por el coordinador de la Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas, previas instrucciones del investigador. Antes de comenzar la prueba se dio especificaciones a los estudiantes sobre la forma en que deberían responder la prueba, y se mencionó que iban a ser parte de un estudio de investigación para su motivación. Para cuidar la objetividad y calidad de las respuestas, se les indicó que aquellos que no quisieran escribir su nombre, podrían omitirlo y colocar en dicho apartado “Sujeto-Hombre” o “Sujeto-Mujer”. Sólo cuatro estudiantes, dos hombres y dos mujeres, considerando ambos grupos, prefirieron responder de forma anónima al cuestionario.

6.3.1.3. Las entrevistas

Con la intención de profundizar en la exploración del conocimiento de los futuros profesores, referentes a la faceta epistémica del CDM, y tomando en cuenta los resultados obtenidos tanto en la aplicación piloto del mismo como del estudio mediante el juicio de expertos, para esta segunda aplicación (versión definitiva del cuestionario) se previeron, diseñaron y realizaron entrevistas semiestructuradas para complementar la información obtenida con las tareas del cuestionario.

La selección de los estudiantes que participaron en la entrevista fue intencional. Para la selección de los participantes, luego de la aplicación del cuestionario, se analizaron los resultados obtenidos considerando el grado de corrección de las respuestas y, de manera menos rigurosa, el tipo de configuración cognitiva. Así, se eligieron estudiantes 15 estudiantes que:

- Obtuvieron una puntuación baja en la globalidad del cuestionario.
- Para algunas de las tareas "críticas" (tareas con las cuales no se obtuvo mucha información acerca de los conocimientos, como por ejemplo la tarea 5 del cuestionario), no habían respondido, pero también se consideró una muestra de aquellos estudiantes cuyas respuestas estaban en alguno de los tres grupos de la variable grado de corrección, es decir, respuestas incorrectas, respuestas parcialmente correctas y respuestas correctas.
- Estudiantes cuyas configuraciones cognitivas movilizadas en alguna de las tareas, estaban "lejos" de las configuraciones (o conocimientos) esperadas.

Las entrevistas tuvieron una duración de 40 minutos por cada estudiante, y se programaron en dos días consecutivos una semana después de la aplicación del cuestionario. Se tomaron grabaciones de audio, y notas de los estudiantes entrevistados. También se tomó nota de las reacciones de los estudiantes, así como de los "gestos y ademanes" que estos utilizaban, por ejemplo, para denotar el signo de la pendiente de una recta. Entre cada entrevista se dejó un lapso de 20 minutos durante los cuales el investigador, autor de esta tesis doctoral, tomaba notas de sucesos relevantes acontecidos durante la entrevista y para organizar y preparar la siguiente sesión. En total se programaron 21 entrevistas, pero sólo se llevaron a cabo 15, pues seis de los estudiantes no se presentaron a la hora programada. No obstante, debemos señalar que para esta investigación hemos transcrito y analizado con profundidad, aquellas que de acuerdo a nuestro criterio, tenían información "más rica" para los fines de nuestra investigación.

6.3.2. Análisis de los resultados

A continuación presentamos el estudio de los resultados obtenidos con la aplicación del cuestionario definitivo, considerando, como en el capítulo anterior, las dos variables definidas para nuestra investigación: *grado de corrección de las respuestas* (correctas, parcialmente correctas e incorrectas, ver Anexo 4) y *tipo de configuración cognitiva*. Para esta segunda variable, tipo de configuración cognitiva, analizaremos si las configuraciones cognitivas implicadas en las prácticas matemáticas de los estudiantes que participaron en el estudio piloto son las mismas o difieren de las configuraciones cognitivas implicadas en las prácticas de los estudiantes que participaron en el “estudio definitivo”. Esto nos dará pautas para la consistencia de nuestro instrumento.

Un aspecto que es importante señalar es que contemplamos a los 49 futuros profesores (Grupo 1: 29 de sexto semestre; y Grupo 2: 20 de octavo semestre), mismos que describimos en el apartado 6.3.1.1, como una sola muestra en este segundo estudio, dado que no habían diferencias significativas entre las puntuaciones medias obtenidas por ambos grupos. La tabla 6.1 presenta el resumen estadístico para las dos muestras de datos, el cual puede utilizarse para evaluar si las diferencias entre los estadísticos de las dos muestras son estadísticamente significativas.

Tabla 6.1. Resumen estadístico de las muestras Grupo 1 y Grupo 2

	Grupo 1 (Sexto semestre)	Grupo 2 (Octavo semestre)
Recuento	29	20
Promedio	13,1	14,9
Varianza	26,2	29,6
Desviación Estándar	5,1	5,4
Coeficiente de Variación	39,2 %	36,5 %
Mínimo	5,0	3,0
Máximo	23,0	21,0
Rango	18,0	18,0
Sesgo Estandarizado	-0,15	-1,20
Curtosis Estandarizada	-1,13	-0,54

La Tabla 6.1 muestra, entre otros estadísticos, el sesgo estandarizado y la curtosis estandarizada que pueden usarse para comparar si las muestras provienen de distribuciones normales, valores de estos estadísticos fuera del rango de -2 a +2 indican desviaciones significativas de la normalidad, aspecto que tendería a invalidar las pruebas que comparan las desviaciones estándar. En este caso, tanto los dos valores de sesgo estandarizado como los dos valores de la curtosis estandarizada, se encuentran dentro del rango esperado. Así mismo se realizó una prueba *t* para la comparación de las medias de las dos muestras, obteniendo que, con un nivel de confianza del 95%, no habían diferencias significativas entre las medias de los grupos. La Figura 6.4 muestra la distribución de las puntuaciones obtenidas por los estudiantes que integraban cada uno de los grupos y la puntuación media por grupo. Hay que resaltar que de acuerdo a la variable *grado de corrección*, la puntuación máxima posible a obtener por un estudiante para profesor era de 36 puntos.

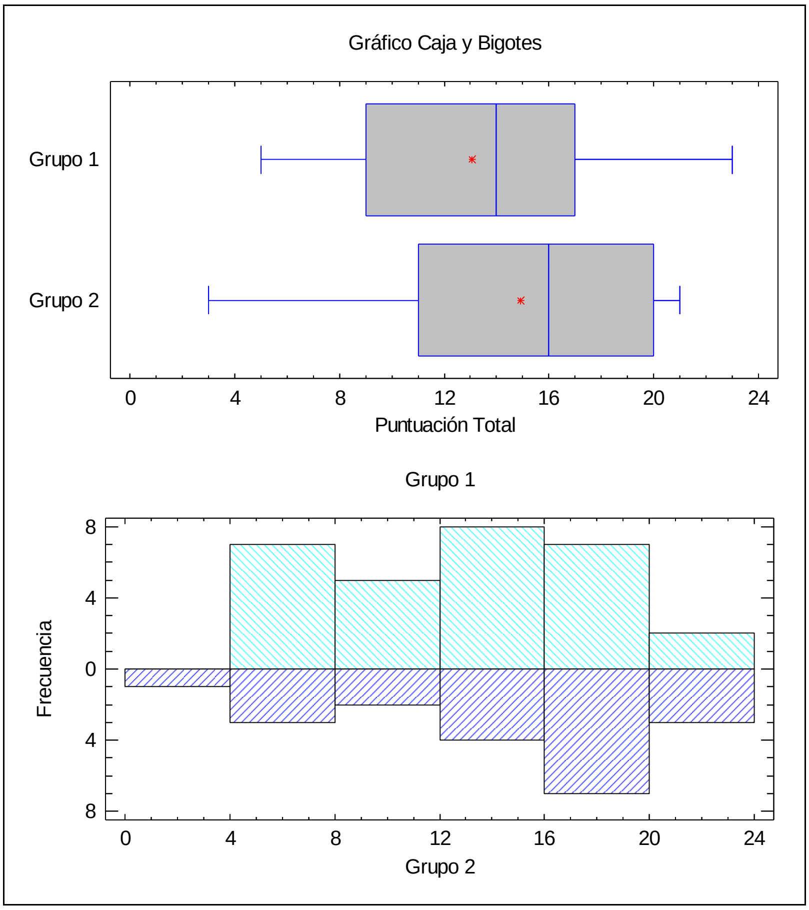


Figura 6.4. Comparación de las puntuaciones obtenidas por los grupos 1 y 2 que conforman la muestra

En las secciones que siguen a continuación, se presentan los resultados obtenidos de los análisis realizados para cada una de las tareas que componen la versión final del cuestionario.

6.3.2.1. Tarea 1: Significados de la derivada

Aunque la redacción de la pregunta de la Tarea 1, en la versión final del cuestionario, sufrió ligeras modificaciones, la esencia de lo que se quería evaluar con dicha tarea se mantuvo (ver apartado 5.3.2.1 en el Capítulo 5). En el cuestionario piloto la pregunta fue: “¿Qué significado tiene para ti la derivada?”. Sin embargo después de los resultados obtenidos tanto en la aplicación piloto del mismo como del estudio del juicio de expertos, se concluyó que la redacción debería ser cambiada ya que la naturaleza misma de la pregunta, podría restringir la plausible variedad de respuestas que podría plantear un mismo estudiantes. Así, en la versión final la pregunta se replanteó de la siguiente forma: "¿Cuáles son los significados que tiene para ti la derivada?"

Para el análisis cuantitativo de las respuestas, se consideró la variable *grado de corrección*, mediante la cual se asignaron los valores de 2, 0 y NR, según si las respuestas de los futuros profesores fueron correctas, incorrectas o no responden, respectivamente.

Antes de continuar es menester mencionar que la descripción con detalle sobre lo que se considera por respuesta correcta, parcialmente correcta o incorrecta, para ésta y para cada una de las tareas de nuestro cuestionario, se puede encontrar en el Anexo 4, "Variables y valores para el análisis del cuestionario definitivo".

La Tabla 6.2 recoge los resultados en frecuencias y porcentajes tanto para la variable cuantitativa grado de corrección de las respuestas como para la variable cualitativa, tipo de configuración cognitiva. En este caso, para la tarea uno, la variable tipo de configuración cognitiva estaba relacionada con los significados de la derivada que evidenciaban los futuros profesores en sus respuestas.

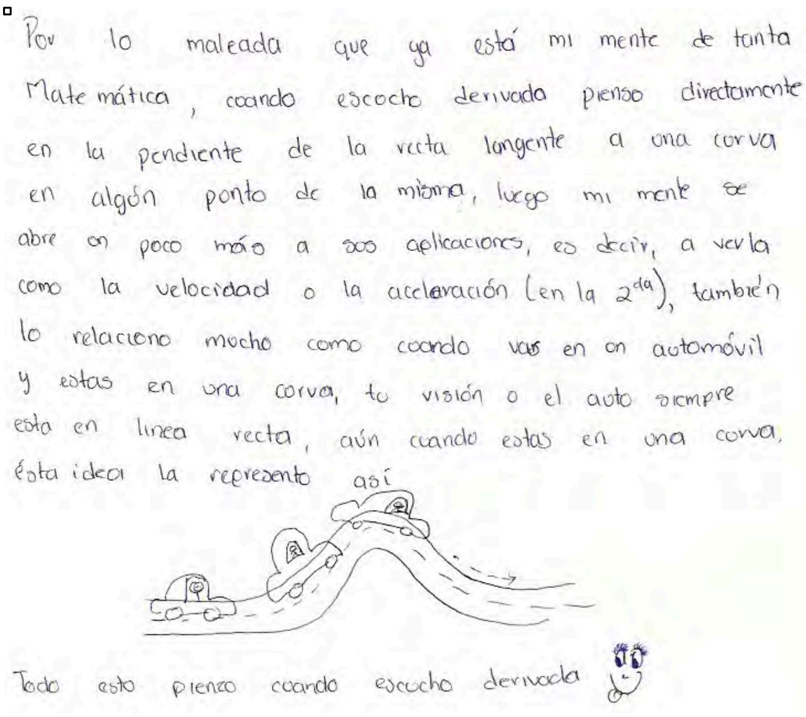
Tabla 6.2. Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección y tipo de solución de la tarea 1

Grado de Corrección	**Tarea 1**	
	Frecuencia	%
Correcta	44	89,8
Incorrecta	4	8,2
No responden	1	2
Total	49	100

Significados de la derivada	**Tarea 1**	
	Frecuencia	%
Pendiente de la recta tangente	7	14,3
Razón instantánea de cambio	10	20,4
Tasa instantánea de variación	3	6,1
Dos significados	23	47
Tres significados	3	6,1
Significado incorrecto	2	4,1
No dan solución	1	2
Total	49	100

Como se puede observar en la Tabla 6.2, los futuros profesores no tuvieron dificultades para responder a la tarea, respondiendo de forma incorrecta solamente cuatro estudiantes, y uno no responde. En cuanto a la variable tipo de configuración cognitiva, vemos que los significados de la derivada más mencionados fueron pendiente de la recta tangente a la función en un punto (14,3%) y razón instantánea de cambio (20,4%). La acepción de la derivada como tasa instantánea de variación, o límite del cociente de incrementos como se le suele llamar normalmente en la literatura, sólo fue señalada por tres (6,1%) estudiantes. Además vemos que 23 futuros profesores señalaron en su respuesta dos significados parciales de la derivada; de esos 23, 21(42,9%) señalaron los significados de "pendiente de la recta tangente" y "razón instantánea de cambio"; y dos (4,1%), señalaron "razón de cambio" y "límite del cociente de incrementos (tasa instantánea de variación)". Los tres futuros profesores que incluyeron tres significados parciales para la derivada en su respuesta, refirieron a los tres significados que hemos mencionado anteriormente. Los dos estudiantes que están en la categoría de "significado incorrecto", proporcionaron significados, que si bien es cierto no son del todo incorrectos, no refieren a significados parciales de la derivada, por ejemplo: "la derivada es una función" , "una operación", "la inversa de la integral" y "velocidades".

Las Figuras 6.5, 6.6 y 6.7, muestran ejemplos de las respuestas que dieron los estudiantes a la tarea 1.



Por lo maleada que ya está mi mente de tanta Matemática, cuando escucho derivada pienso directamente en la pendiente de la recta tangente a una curva en algún punto de la misma, luego mi mente se abre un poco más a sus aplicaciones, es decir, a verla como la velocidad o la aceleración (en la 2da), también lo relaciono mucho como cuando vas en un automóvil y estas en una curva, tu visión o el auto siempre esta en linea recta, aún cuando estas en una curva, ésta idea la represento así

Todo esto pienso cuando escucho derivada

Figura 6.5. Respuesta del estudiante E1 a la tarea 1

Significados de la derivada:
- gráficamente tiene el significado de tangente a una curva (función derivable en un punto).
- Un límite
- Una fórmula.
- Razón de cambio o velocidad instantánea en un punto.

Figura 6.6. Respuesta del estudiante E2 a la tarea 1

Aunque en muchas de las respuestas sólo se proporcionaron “listados” de significados plausibles, tal y como en el caso del ejemplo de la Figura 6.6, esto era lo que se esperaba obtener para que a lo largo del cuestionario observáramos si los significados que proporcionaban los futuros profesores en realidad los “conocían”, o solamente los enunciaron porque los “recordaban”, a grandes rasgos, de sus cursos pasados. Aquí es importante redundar en lo que entendemos por conocimiento, el cual para nosotros es el constructo que incluye comprensión, competencia y disposición (Pino-Fan, Godino y Font, 2010; Pino-Fan, Godino y Font, 2011). Así, diremos que un futuro profesor “conoce” tal o cual significado de la derivada si es capaz de movilizarlo en las distintas prácticas (tareas del cuestionario) en las cuales dicho significado requiera ser activado para su solución. Respuestas como la presentada en la Figura 6.7, nos evidenciaron desde la tarea 1, posibles desconexiones entre los diversos significados parciales de la derivada, además de algunos errores conceptuales que dificultan la comprensión de un significado concreto.

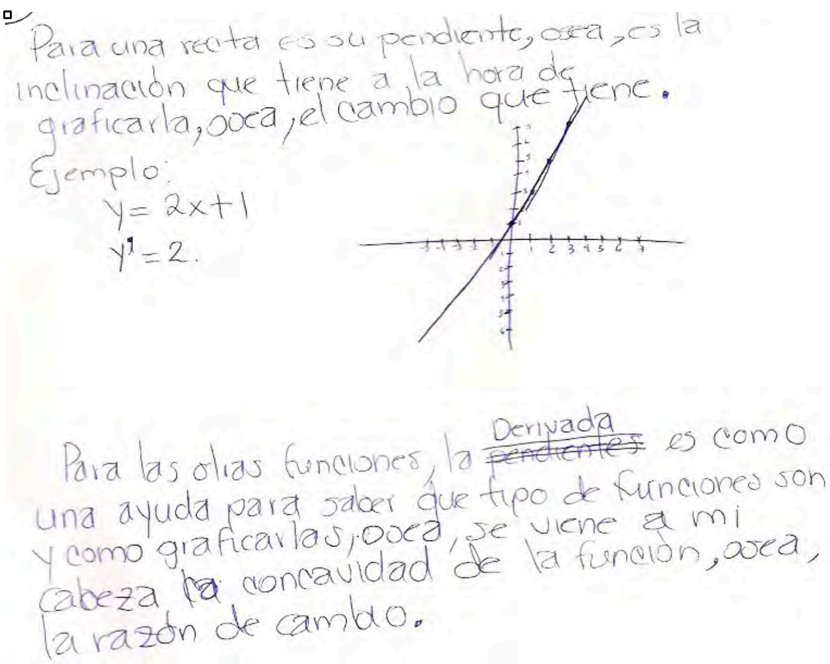


Figura 6.7. Respuesta del estudiante E3 a la tarea 1

6.3.2.2. Tarea 2: Análisis de la derivada de la función valor absoluto

Para el análisis de los resultados de la tarea 2, consideramos para la variable cuantitativa *grado de corrección* los valores de 2, 1 y 0, según si las respuestas fueron correctas, parcialmente correctas e incorrectas respectivamente (ver Anexo 4). La Tabla 6.3 refleja los resultados obtenidos para cada uno de los apartados de esta tarea.

Tabla 6.3. Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de la tarea 2

Grado de Corrección	**Apartado a)**		**Apartado b)**		**Apartado c)**		**Apartado d)**	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Correcta	40	81,7	27	55,1	25	51	4	8,2
Parciamente correcta	0	0	6	12,2	9	18,4	3	6,1
Incorrecta	6	12,2	10	20,5	7	14,3	25	51
No responden	3	6,1	6	12,2	8	16,3	17	34,7
Total	49	100	49	100	49	100	49	100

Tal y como lo describimos en el apartado 5.3.2.2 del Capítulo 5, con la tarea dos se pretendía explorar el conocimiento común [inciso a)], el conocimiento especializado en sus dos niveles [incisos b) y c), e inciso e) respectivamente], y el conocimiento ampliado [inciso d)]. Como se puede observar en la Tabla 6.3, en general evidenciaron un buen dominio del conocimiento común requerido para la resolución de la tarea, respondiendo de forma correcta al inciso a) de la misma el 81,7%. No ocurrió así con el conocimiento especializado, pues la suma de los porcentajes de respuestas incorrectas y “no responden” para los incisos b) y c), fue elevado, 32,7% y 30,6% respectivamente. En cuanto al ítem d), observamos que el 85,7% (respuestas “incorrectas” y “no responden”) de los estudiantes, tuvieron dificultades para responderlo, lo que sugiere un escaso predominio del conocimiento ampliado requerido para su solución. Estas carencias en cuanto al conocimiento especializado y ampliado en los futuros profesores, se hicieron más notorias cuando realizamos los análisis cualitativos mediante la variable *tipo de configuración cognitiva.* La Tabla 6.4 muestra los resultados para la variable *tipo de configuración cognitiva* movilizada por los estudiantes en sus soluciones a la tarea.

Tabla 6.4. Frecuencias y porcentajes para el tipo de configuración cognitiva movilizada en la tarea 2

Configuración cognitiva	**Apartado a)**		**Apartado b)**		**Apartado c)**	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Gráfico-Verbal	42	85,7	13	26,5	29	59,2
Técnica	4	8,2	30	61,2	6	12,2
Formal	0	0	0	0	4	8,2
No dan solución	3	6,1	6	12,3	10	20,4
Total	49	100	49	100	49	100

Uno de los objetivos perseguidos con la segunda aplicación del cuestionario, era verificar si las configuraciones cognitivas evidenciadas en las prácticas de los futuros profesores, categorizadas y descritas mediante nuestra metodología de análisis, eran coincidentes, con las obtenidas en el estudio piloto del cuestionario. Esto, entre otras cosas, nos dio pautas para inferir que el cuestionario *CDM-Derivada,* mide lo que realmente pretendíamos medir. Así, en la Tabla 6.4 observamos que la única diferencia en los resultados obtenidos en la segunda aplicación del cuestionario, es que en ésta, las configuraciones cognitivas de tipo formal (ver apartado 5.4.2.2.3), no se presentan en las soluciones de los apartados a) y b) de la Tarea 2. Observamos también que, nuevamente, el tipo de configuración cognitiva predominante en la solución de los apartados a) y c) fue el "gráfico-verbal" con 85,7% y 59,2% respectivamente, y para el apartado b) fue la configuración cognitiva "técnica". La descripción de las características de cada tipo de configuración cognitiva se presentó en el apartado 5.4.2.3.2.

Para el inciso d) de la tarea, aunque se pretendía que los estudiantes movilizaran configuraciones de tipo formal, en las que se activara la derivada en sus acepción de tasa instantánea de variación, identificamos, como en el capítulo 5, tres tipos de configuraciones que denominamos: 1) "no generaliza"; 2) "verbal" y 3) "formal". La primera de estás, usada por el 30,6% de los estudiantes, refiere a aquellas respuestas en las que no se logra demostrar la proposición debido a los conocimientos (aplicación a casos particulares mediante procesos de particularización, memorización y aplicación de reglas, correctas o incorrectas, que hacen alusión a propiedades) que evidencian los futuros profesores. La Figura 6.8 muestra un ejemplo prototípico de este primer tipo de configuración.

d) Por que la derivada es un número que representa la pendiente de la recta tangente a la curva. Cuando una función es derivable en un punto ~~implica~~ implica que posee una recta tangente. Y sabemos que para que una función tenga derivada en todos los puntos de ~~su~~ su dominio se debe ver como una curva que no tiene picos, es decir no tiene ningún cambio brusco de dirección, donde exista un cambio brusco de dirección no veríamos a la curva como una recta, por eso una función que es derivable tiene por gráfica una curva suave.

Figura 6.8. Respuesta del estudiante E4 al apartado d) de la tarea 2

El segundo tipo de configuración ("verbal"), usado por el 24,5% de los estudiantes, refiere a aquellas respuestas en las que se utiliza como elemento principal objetos lingüísticos verbales para describir la "justificación de la prueba". La Figura 6.9 muestra un ejemplo de respuesta de las que subyace este segundo tipo de configuración. El tercer tipo de configuración ("formal"), utilizada por el 8,2% de los futuros profesores, refiere a aquellas respuestas en las que se utiliza un lenguaje simbólico de tipo notacional para realizar los procedimientos y demostrar la prueba mediante la activación del significado de la derivada como tasa instantánea de variación. El 36,7% de los futuros profesores no responden al apartado d) de la tarea. Esto nos indica que, excepto aquellos estudiantes que se encuentran en la categoría de configuración cognitiva "formal", los profesores en formación tienen un escaso conocimiento ampliado que les faculte para la resolución de tareas como las del apartado d).

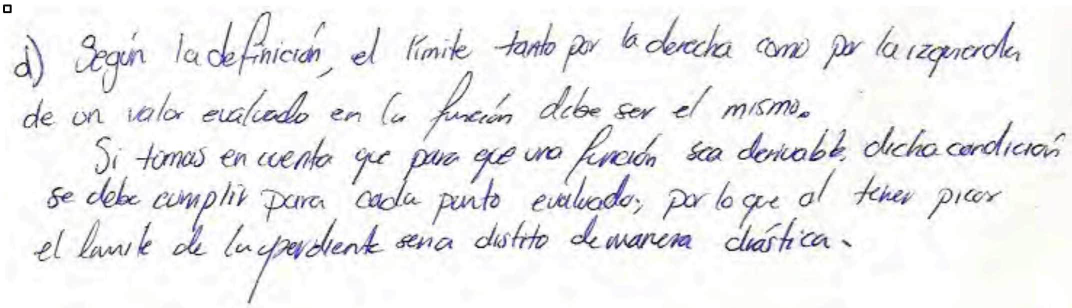

d) Según la definición, el límite tanto por la derecha como por la izquierda de un valor evaluado en la función debe ser el mismo.
Si tomas en cuenta que para que una función sea derivable dicha condición se debe cumplir para cada punto evaluado, por lo que al tener picos el límite de la pendiente sería distinto de manera drástica.

Figura 6.9. Respuesta del estudiante E5 al apartado d) de la tarea 2

En lo que respecta al ítem e) de la tarea, un elevado porcentaje de los futuros profesores, 69,4%, no fue capaz de identificar conocimientos involucrados en las solución de los aparatados a), b), c) y d) de la tarea. El resto se limitó a proporcionar listas de algunos conceptos y/o propiedades, tal como muestra el ejemplo de la Figura 6.10. Esto da evidencia de que los futuros profesores poseen un escaso conocimiento especializado, en su segundo nivel, referente a la identificación de configuraciones epistémicas plausibles.

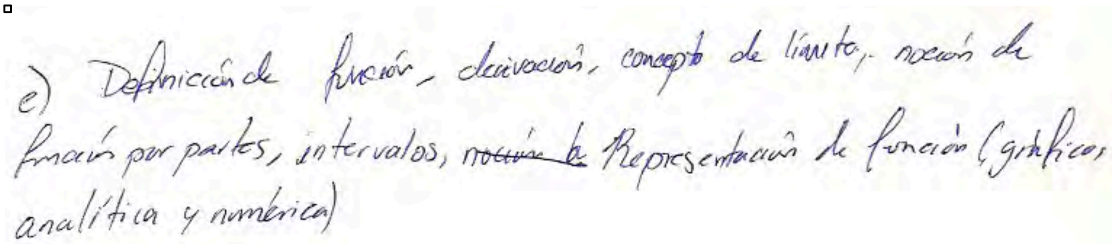

e) Definición de función, derivación, concepto de límite, noción de función por partes, intervalos, ~~noción de~~ Representación de función (gráfica, analítica y numérica)

Figura 6.10. Respuesta del estudiante E5 al apartado e) de la tarea 2

6.3.2.3. Tarea 3: Cálculo de la función primitiva

La Tarea 3, sufrió ligeras correcciones respecto de la versión piloto del cuestionario. El lector podrá apreciar sin dificultad dichos cambios al comparar los Anexos 1 y 5, que refieren a la versión piloto y definitiva del cuestionario, respectivamente. La modificación más relevante fue la inclusión de un nuevo ítem, el ítem c), "¿Qué conocimientos se ponen en juego al resolver los apartados a) y b) de esta tarea?". Este ítem buscaba indagar en el conocimiento especializado, en el segundo nivel, de los futuros profesores, dado que demanda de su competencia para identificar objetos matemáticos primarios (elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) y sus significados, involucrados en sus soluciones o, en un caso "ideal", de otras soluciones plausibles de la tarea. La Tabla 6.5 muestra los resultados en frecuencias y porcentajes para la variable grado de corrección.

Tabla 6.5. Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de los ítems a) y b) de la tarea 3

Grado de Corrección	Apartado a)		Apartado b)	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Correcta	31	63,3	14	28,6
Parcialmente correcta	2	4,1	7	14,3
Incorrecta	12	24,5	17	34,7
No responden	4	8,1	11	22,4
Total	49	100	49	100

Como puede apreciarse, los futuros profesores evidenciaron un escaso conocimiento ampliado del contenido, pues aunque el ítem a) fue respondido correctamente por un alto porcentaje, 63,3%, el ítem b) tuvo una baja frecuencia de respuestas correctas (28,6%). Los resultaros revelan que aunque muchos de los estudiantes respondían satisfactoriamente en ítem a), no tenían los conocimientos suficientes que les facultaba para responder el ítem b) de la tarea. Una posible hipótesis es que, tal como lo señalamos cuando presentamos los resultados referentes a la tarea 3 en el capítulo 5, los profesores recordaban [para el ítem a)] que la derivada de x^2 era precisamente $2x$, quizá por la familiaridad con esta función en particular. Esta hipótesis parecía comprobarse, cuando en sus respuestas, el 77,5% de los profesores, utilizó una configuración cognitiva de tipo "técnica" (numérica-técnica y gráfico-técnica) en la solución del ítem a), recurriendo a la proposición "dado que la derivada de x^2 es $2x$, entonces la función buscada es x^2", la cual refiere implícitamente e intuitivamente, al teorema fundamental del cálculo.

En cuanto a la variable *tipo de configuración cognitiva*, al analizar las respuestas que los estudiantes dieron en la segunda aplicación del cuestionario, obtuvimos que la tipología de configuraciones cognitivas encontradas y descritas en la versión piloto del mismo, se mantuvo. La Tabla 6.6 muestra los resultados, en frecuencias y porcentajes, para la tipología de configuraciones cognitivas subyacentes a las soluciones de los apartados a) y b) de la tarea 3. La descripción a profundidad de las características de cada tipo de configuración, puede encontrarse en los apartados 5.4.2.2.4 y 5.4.2.3.3.

Tabla 6.6. Frecuencias y porcentajes para el tipo de configuración cognitiva movilizada en la tarea 3

Configuración cognitiva	Apartado a)		Configuración cognitiva	Apartado b)	
	Frecuencia	%		Frecuencia	%
Gráfico-Técnica	20	40,8	Avanzada	4	8,2
Numérica-Técnica	18	36,7	Técnica	15	30,6
Gráfico-Avanzada	2	4,1	Unicidad errónea	4	8,2
Numérico-Avanzada	3	6,1	Funciones equivalentes	11	22,4
No dan solución	6	12,3	No dan solución	15	30,6
Total	49	100	Total	49	100

Como puede apreciarse en la tabla, y como lo hemos venido señalando, el usar para el ítem a) una configuración de tipo “técnica”, era indicio de un escaso conocimiento ampliado, ya que en muchos de los casos, el utilizar esa tipo de configuración, sesgaba, de manera errónea, los conocimientos empleados para la solución del ítem b), utilizando así para el ítem b) configuraciones de tipo “unicidad errónea de la derivada” y “funciones equivalentes”, las cuales estaban asociadas a respuestas incorrectas. Otra configuración predominante en el ítem b) fue la configuración “técnica”, utilizándola el 30,6% de los estudiantes. Mediante el uso de este tipo de configuración (técnica), sólo en algunos cuantos casos, se llegó a respuestas correctas, ya que la gran mayoría de los estudiantes que la utilizaron, dieron respuestas parciales; en todos los casos (respuestas correctas o incorrectas) se recurrió nuevamente a una regla de derivación (la cual refiere a una proposición) “la derivada de una función constante es cero”.

Finalmente, debemos señalar que en lo que respecta al ítem c) de la tarea, tal como ocurrió en el apartado e) de la tarea 2, los futuros profesores proporcionaron “listados cortos” de algunos conceptos y propiedades involucradas en sus soluciones, por ejemplo, las reglas de derivación que mencionamos más arriba.

6.3.2.4. Tarea 4: Derivada de la función constante

La tarea 4, es una de las dos tareas que no sufrieron cambio alguno, ni en los aspectos de redacción del enunciado. Tanto los resultados de la versión piloto como las opiniones de los expertos, sugerían que la tarea 4 era una buena evaluadora de aspectos del conocimiento especializado, tal y como se previó en el apartado 5.3.2.4. La Tabla 6.7 presenta los resultados en frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de las respuestas. Es preciso recordar al lector que puede encontrar una descripción detallada de las variables y sus valores, consideradas para la realización de nuestros análisis, en el Anexo 4.

Tabla 6.7. Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de la tarea 4

Grado de Corrección	Apartado a)		Apartado b)	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Correcta	18	36,7	15	30,6
Parcialmente correcta	18	36,7	7	14,3
Incorrecta	6	12,3	11	22,5
No responden	7	14,3	16	32,6
Total	49	100	49	100

Es posible observar en la Tabla 6.7 resultados interesantes tales como el que sólo 36,7% de los profesores fueron capaces de resolver correctamente el ítem a) de la tarea, evidenciando un dominio suficiente del conocimiento especializado requerido para su solución. El resto de los estudiantes, 63,3%, o bien no resolvieron el ítem, o mostraron varios conflictos, al momento de resolverlo, los cuales la mayoría de las veces eran causados por la particularización de la proposición a funciones constantes concretas o por la desconexión aparente entre temas de geometría analítica (para el cálculo de pendientes de rectas) y el o los significados parciales de la derivada. En lo que respecta al ítem b), nuevamente los futuros profesores tuvieron muchos problemas para probar la proposición “la derivada de una función constante es cero”, mediante la movilización de una configuración de tipo formal en la que se activar el significado de la derivada como tasa instantánea de variación. Así, sólo el 30,6% (15), resolvieron el ítem b) de forma correcta, mientras que el resto, mostraron muchos conflictos y errores que iban desde errores en la manipulación “simbólica-aritmética”, hasta “no recordar la fórmula” (tal como lo señalo una estudiante refiriéndose a la definición formal de la derivada mediante límites). Los resultados obtenidos con el ítem b) daba muestra del escaso conocimiento ampliado que requieren los profesores para la resolución de tareas como la planteada.

En cuanto a las configuraciones cognitivas movilizadas en la soluciones del ítem a), la Tabla 6.8 presenta los resultados en frecuencias y porcentajes. Estas configuraciones cognitivas, se han descrito en los apartados 5.4.2.2.5 y 5.4.2.3.4.

Tabla 6.8. Frecuencias y porcentajes para el tipo de configuración cognitiva del ítem a) de la tarea 4

Configuración cognitiva	**Tarea 4: ítem a)**	
	Frecuencia	%
Analítica - extensiva	12	24,5
Analítica - intensiva	7	14,3
Trazado de tangentes	9	18,4
Uso de situaciones particulares de variación	2	4
Límite de las tasas medias de variación	9	18,4
No dan solución	10	20,4
Total	49	100

6.3.2.5. Tarea 5: Describiendo características globales de la derivada

La Tabla 6.9, presenta los resultados en frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de la Tarea 5. Se consideró, para el análisis de esta tarea, respuestas correctas a aquellas en las que se respondieron todas las preguntas "guía"; parcialmente correctas aquellas en las que se respondió correctamente al menos dos de las preguntas guía; e incorrectas aquellas respuestas en las se dio respuesta correcta a una o menos preguntas guía.

Tabla 6.9. Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de la tarea 5

Grado de Corrección	**Tarea 5**	
	Frecuencia	%
Correcta	2	4,1
Parcialmente correcta	36	73,5
Incorrecta	8	16,3
No contestan	3	6,1
Total	49	100

Como se puede apreciar en la tabla anterior, sólo el 4,1% de los futuros profesores fue capaz de proporcionar, por medio de las preguntas guía, descripciones generales del comportamiento de la función derivada de la función dada en la tarea. El 73,5% respondió correctamente al menos dos de las preguntas guía. Dentro de este grupo mayoritario de futuros profesores, los aspectos de la derivada en los que tuvieron más dificultades para describir fueron a los que referían preguntas tales como ¿dónde alcanza la derivada su valor máximo? ¿dónde alcanza la derivada su valor mínimo? ¿dónde es constante la derivada? ¿está la derivada definida para todos los puntos del dominio de la función dada? El no Justificar estas preguntas, era muestra de que los futuros profesores poseían un escaso conocimiento especializado; pero el no responderlas daba evidencia de el insuficiente conocimiento común requerido para solucionar tareas como la planteada.

Nuevamente, al igual que en el estudio piloto (apartados 5.4.2.2.6 y 5.4.2.3.5), las respuestas que dieron los futuros profesores a la tarea 5 no arrojaron evidencia contundente que permitiera caracterizar tipologías de configuraciones cognitivas, pues éstos se limitaron a responder, sin una justificación ostensiva, la preguntas guía presentadas en la tarea. Por esta razón y dadas las sugerencias que realizaron los expertos (apartado 5.5), diseñamos una serie de entrevistas semiestructuradas, mediante las cuales se profundizó en el conocimiento de los futuros profesores activado en la resolución de esta tarea. A continuación se presenta la transcripción de la entrevista realizada a una de las estudiantes de octavo semestre, Lupita, la cual consideramos es un buen ejemplo del tipo de conocimientos reflejados por el grueso de los estudiantes en esta tarea. En la siguiente transcripción la etiqueta "**Inv.**" equivale a **Investigador** y la etiqueta **"L20"**, por ejemplo, refiere a la línea 20 del texto transcrito.

Inv. [L1–L7]: *…se te dio la gráfica de una función arbitraria y te preguntamos ¿qué podrías decir sobre la derivada de esta función? Tú aquí me respondiste a las preguntas guía que se te dieron, pero por ejemplo, tu mencionas que la derivada es positiva en el intervalo (0, -3.6) y (1.6, 4) pero no dices por qué. ¿Por qué la derivada es positiva? Me podrías explicar?...Si un compañero tuyo te dijera, oye Lupita ¿me explicas por qué es positiva la derivada en esos intervalos que dices?*

Lupita [L8–L20]: *En ese estaba pensando un poco, en los criterios de primera derivada, esos criterios los utilizas para encontrar la gráfica de la función. Entonces ya que tienes la función, tu sabes que es positiva o negativa, en este caso la función aquí es positiva, o sea es mayor que cero, siempre es positiva. Yo igual pensé cuando la gráfica es… bueno era cóncava, creo que estaba utilizando el criterio de la segunda [derivada], la de concavidad, como era cóncava hacía abajo y estaba en ese tanto positiva [señalando el segmento de función comprendido en el intervalo aproximado (-2.8,0)] pues yo la pensé positiva [la derivada] y dije, bueno, la función va a ser positiva. Pero creo que allí tuve un error, no sé, porque según el criterio de la primera derivada te dice que es creciente o decreciente en ese caso, pero en este caso no sé.*

Inv. [L21]: *Y en la gráfica ¿dónde es creciente la …* [función]

Lupita [L22–L26]: *En ese caso estaría en "menos dos punto y algo", hasta, bueno, si la pensamos en la parte positiva, desde "menos dos punto algo" [refiriendo al punto de corte de la función con el lado negativo del eje X] hasta menos dos punto cinco, porque igual acá ya decrece* [señalando la sección de la función que tiene por dominio (-1.5 a 0)].

Inv. [L27–L28]: *…Entonces la derivada, tu mencionas aquí que es positiva en los puntos desde cero ¿hasta dónde?*

Lupita [L29–L30]: *Bueno yo la estaba pensando en esa parte y luego esta parte... [señalando los segmentos de la función que están arriba del eje X]*

Inv. [L31–L33]: *¡Ah! Ok, desde cero hasta menos tres punto y algo. ¿Toda esa parte es positiva?[señalando el segmento de función cuyo dominio está en la parte negativa del eje X]*

Lupita [L34–L35]: *Yo estaba pensando en esta parte [señalando el segmento de función que tiene por dominio (-2.5, 0) aproximadamente].*

Inv. [L36–L37]: *Ok, ¿tú dices que es positiva [la derivada] por qué está arriba del eje X?*

Lupita [L38–L40]: *Bueno yo creo que sí. No sé si fue que confundí algo sobre crecientes o me faltó decir…, y lo mismo para la negativa, siempre la pensé de esa forma, es que no recuerdo…*

Inv. [L41–L44]: *O sea tú pensaste que la justificación de esta respuesta [¿dónde es negativa la derivada?] sería, en ese caso, que es la parte que está debajo del eje X, la parte negativa de este intervalo, en este caso de menos dos punto y algo..*

Lupita [L45]: *En este caso puse hasta menos infinito, porque no sabía…*

Inv. [L46–L50]: *desde menos infinito hasta menos dos punto y algo. Y la parte, qué otro intervalo tienes aquí? qué es lo que tienes aquí? O sea las partes que están debajo del eje X [mientras la alumna señala los segmentos que están debajo del eje X]. Y para la otra respuesta, que me dices de la otra [¿dónde es cero la derivada?].*

Lupita [L51–L57]: *Lo que pasa es que siempre, como ya hay un cambio, la gráfica de la función pues allí considerábamos cuando había un cambio ya era un punto de inflexión, en ese caso porque igual había un punto crítico en el caso del criterio de la primera derivada, como hay un cambio pues allí se observa que serían donde la pendiente de la derivada se hace cero, por eso esos puntos, igual lo consideré como un cambio, pero no estaba segura, en este si para este caso.*

Inv. [L58]: *¿Por eso escribiste el cero? [en el máximo y mínimo relativos]*

Lupita [L59]: *Si*

Inv. [L60–L61]: *¿Y de la otra pregunta? [¿Está la derivada definida en todos los puntos del dominio de la función?]*

Lupita [L62–L65]: *En esa lo consideré como que no, porque se supone que cuando tienes derivada no debe de haber lo que habían llamado en el primero picos, entonces en ese caso…[señalando el "pico" de la función]*

Inv. [L66–L67]: *¿Entonces allí no está definida? [refiriéndose al punto donde hay un "pico"]*

Lupita [L68]: *Pienso que no.*

Inv. [L69]: *¿Sólo para ese punto?*

Lupita [L70]: *Según yo sí.*

Inv. [L71]: *Muy bien y la otra, ¿cuál era la otra pregunta?*

Lupita [L72]: *¿En donde es constante la derivada?*

Inv. [L73]: *¿Y tú respondiste?*

Lupita [L74–L83]: *En los distintos intervalos la función no tiene un comportamiento constante, o sea se pueden observar cambios en la gráfica de… pero creo que ahí ya respondí en cuanto a la función. Entonces aquí no podía observar cambios [refiriéndose al segmento de recta en la función], entonces ahí en ese…, según no puedo observar cambio porque…, bueno en este caso no sé por qué siempre este lado me causó ruido porque la veo como que si fuera una lineal. Entonces la derivada podría ser una cuadrática o algo así. Creo que allí siempre, no sería…, o sea habría un comportamiento…, no sería constante, habría siempre un cambio en la gráfica.*

Inv. [L84–L85]: *Entonces ¿en ese trocito de recta, tú dices que la derivada podría ser una función cuadrática? Ok.*

Lupita [L86]: *Sí, tal vez.*

Inv. [L87]: *Y ¿que me dices de la otra pregunta, es la última, no?*

Lupita [L88-L94]: *¿Dónde alcanza la derivada su valor máximo ó mínimo? Pues ese siempre pensando en creciente y decreciente, pues como son los únicos que se observan, pues por eso puse que solamente en esos puntos, en 1.6 y en 0.8 que eran las únicas. Como no se qué sucede en ésta [refiriéndose a x=2] y si considero está igual siempre…, lo que pasa es que ésta no la consideré por lo mismo de que según yo, no estaba definida por el pico.*

Inv. [L95–L98]: *Ok, perfecto. Una pregunta nada más, en esta pregunta, la última pregunta ¿dónde alcanza la derivada sus valores máximos y mínimos?, ¿me estás señalando que coinciden con los valores máximos y mínimos de la función?*

Lupita [L99]: *Si, así lo tomé.*

Como se puede apreciar (L5 a L7) la entrevista sobre la tarea 5 comienza con la pregunta ¿por qué la derivada es positiva?, la cual es planteada por el investigador para que, en este caso, Lupita justifique su respuesta: “la derivada es positiva en los intervalos en los intervalos (-3.6, 0) y (1.6, 4)”. Lupita, en su discurso, parece no estar segura de la proposición central de su justificación, puesto que señala, en principio, que utiliza la propiedad conocida como “el criterio de la primera derivada” (L8-L9) y, posteriormente, señala que utiliza el “criterio de la segunda derivada” (L13-L14). En cualquier caso, a primera instancia, lo que Lupita parecía querer expresar, es que la proposición “$f'(x) > 0 \ \forall x \in (a, b) \ \Rightarrow f$ es creciente en $[a, b]$”, era la justificación de su respuesta (L16-L17), pero no estaba segura si el recíproco de tal proposición también era verdadero, lo cual plantea en la forma “creo que cometí un error…” (L17-L20). El investigador se percata de que Lupita, además, parece no tener claro en qué puntos la función es creciente (por los señalamientos que hacía con el lápiz representando una recta tangente a la curva con pendiente negativa, cuando hablaba de una derivada positiva y “trozos” donde la función era creciente), por lo que se decide explorar en ese sentido (L21). De esta forma es que va surgiendo uno de los errores conceptuales más importantes de Lupita, mismo que le impediría resolver satisfactoriamente la tarea. Lupita consideraba que la función era creciente, y por ende la derivada era positiva, en aquellos intervalos del dominio en los que la función “quedaba por encima” del eje X (L22-L35), es decir, en aquellos intervalos en los que las imágenes de la función eran positivas, exceptuando $x=2$ en donde aseguraba que por haber un pico entonces la derivada no estaba definida (L60-L70). Este error conceptual quedaba evidenciado en las líneas 36 a la 39, cuando responde afirmativamente a la pregunta del entrevistador. En las líneas 39 a la 49, la alumna señala que, de manera análoga, la función era decreciente, y por ende la derivada negativa, en aquellos intervalos del dominio donde la función “queda por debajo del eje X.

Otro error importante que fue generalizado y compartido por el 89,8% de los futuros profesores, es el que se evidencia en la líneas 88 a la 99. Y es que, como Lupita, la mayoría de los futuros profesores señalaron que los valores máximos y mínimos de la función derivada, coincidían con los valores máximos y mínimos de la función. Este tipo de error en la respuesta a la pregunta, ¿dónde alcanza la derivada sus valores máximos y mínimos?, evidenciaba un conflicto cognitivo aún más grave, pues el 89,8% de los futuros profesores, cuando se les preguntó, ¿dónde es cero la derivada?, respondieron, al igual que Lupita (L51-L59), que la derivada era cero en los máximos y mínimos relativos de la función, es decir, en $x = -1.5$ y $x = 0.8$, aproximadamente. Podríamos realizar diversas conjeturas sobre la desconexión en las respuestas que dieron las dos preguntas (¿dónde alcanza la derivada sus valores máximo y mínimo? y ¿dónde es cero la derivada?), respuestas que hasta cierto punto se contradicen “lógicamente”. Sin embargo, la exploración más profunda sobre la naturaleza de estos errores quedó fuera de nuestro alcance por el tiempo que nos proporcionaron para entrevistar individualmente a cada estudiante.

Todo lo anterior, junto con otros conflictos que evidenciaron los estudiantes para resolver la tarea 5 del cuestionario, por ejemplo la diferencia entre punto de inflexión, punto crítico, etc., nos dan pautas para decir que los profesores en formación tienen un escaso conocimiento que les faculte para que, a partir de la gráfica de una función cualquiera, y haciendo conexiones entre las distintas representaciones, proposiciones, conceptos, significados parciales de la derivada, etc., puedan hacer descripciones generales del comportamiento de la función derivada, conocimientos que estarían relacionados con el conocimiento especializado de dicho contenido.

6.3.2.6. Tarea 6: Cálculo de los ceros de la función derivada

La tarea 6, justo con la 4, es la segunda tarea de nuestro cuestionario que no recibió modificación alguna. Es una de las tareas que, arrojó resultados muy sugerentes, respecto a las conexiones que realizan o no, los futuros profesores entre los distintos significados parciales de la derivada. Dos en concreto para esta tarea, la derivada en un punto entendida como la pendiente de la recta tangente a una función dada, y la derivada como razón instantánea de cambio. Así tal y como lo señalamos en el apartado 5.3.2.6, esta sexta tarea de nuestro cuestionario explora aspectos relevantes referentes al conocimientos especializado.

La Tabla 6.10 muestra los resultados en frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de cada uno de los dos apartados de esta tarea.

Tabla 6.10. Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de la tarea 6

Grado de Corrección	Apartado a)		Apartado b)	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Correcta	22	44,9	19	38,8
Parcialmente correcta	4	8,1	4	8,2
Incorrecta	14	28,6	8	16,3
No responden	9	18,4	18	36,7
Total	49	100	49	100

Como se explicó en el Capítulo 5, cada uno de los ítems de la tarea 6, a) y b), de manera individual exploran el conocimiento común de los futuros profesores. Aún así, observamos en la Tabla 6.10 que casi el 50% de los futuros profesores ("Incorrecta" y "no responden") tuvieron dificultades para responder el ítem a); mientras que el 53% ("Incorrecta" y "no responden"), presentaron dificultades para responder al ítem b). Al igual que en los casos de María y de Jesús presentados en el apartado 5.4.2.3.6, los resultados obtenidos con la tarea 6 en la segunda aplicación del cuestionario, mostraron evidencia de ese tipo desconexiones en los futuros profesores, desconexiones entre los significados que ellos "recordaban" haber estudiado de sus cursos anteriores o cursos inmediatos (respuestas a la tarea 1), y la movilización de dichos significados en las distintas tareas del cuestionario. Concretamente, en la tarea 6 se evidencia la desconexión entre dos significados parciales de la derivada. A continuación se presenta un segmento, el referente a la tarea 6, de la entrevista realizada a un estudiante llamado Alberto. En la entrevista se puede ver claramente cómo Alberto no realiza las asociaciones entre los dos significados parciales de la derivada que esperábamos, y que han sido estudiados en los aparatados 5.4.2.2.7 y 5.4.2.3.6.

Inv. [L1–L6]: *…en la pregunta número 6 te damos una función cúbica y en el inciso a) te pedíamos que nos dijeras en qué puntos la gráfica de esta función [señalando la expresión simbólica de la función en el cuestionario] que te dimos tiene tangentes horizontales. En este sentido veo que aquí hiciste unos cálculos de los cuales me gustaría que hablaras un poco...*

Alberto [L7–L9]: *Bueno... aquí, lo primero que hice es derivar para buscar los mínimos o máximos. Porque tengo entendido que cuando hay un mínimo o un máximo de cierta gráfica su tangentes es horizontal.*

Inv. [L10]: *Ok, ¿y hallaste los…[puntos]*

Alberto: [L11]: *Ajá!*

Inv. [L12]: *Ok. ¿Y para el b)? Eso es para el a) ¿y para el b)?*

Alberto [L13–L14]: *Para el b) mmm… No me acordaba muy bien. La razón de cambio… no sé que hice. No, no recuerdo muy bien.*

Inv. [L15–L16]: *OK. ¿Entonces en ésta no te acuerdas cómo determinar la razón de cambio?*

Alberto [L17–L20]: *No, al principio pensé que era lo mismo que la primera, pero luego recordé que no… mmm no recuerdo como determinar la razón de cambio… De hecho en todas las tareas que siguen, en las últimas especifiqué que no me acordaba…*

Como se puede apreciar al inicio de la entrevista (L1 a L11), Alberto parece no tener problemas para resolver el inciso a) de la tarea, al igual que muchos otros de sus compañeros. Sin embargo, en él hay una desconexión evidente entre el significado de la derivada que moviliza para resolver el ítem a) y el significado que requiere movilizar para resolver el ítem b), cuando señala “no recuerdo como determinar la razón de cambio” (L17 a L20).

Otro tipo de respuestas que evidenciaban la misma desconexión entre los significados parciales de la derivada ya mencionados, son las de aquellos estudiantes que, como Cintia, respondieron correctamente el ítem b) de la tarea pero no el ítem a).

Inv. [L1–L6]: *…me gustaría que me hables a cerca de tu respuesta a la tarea seis. Te dan una función cúbica [señalando la función en el cuestionario] y veo que acá [en el cuestionario] respondiste el inciso b) en el cual se te pedía ¿en qué puntos la razón de cambio de y con respecto a x es cero? ¿Me podrías comentar un poco sobre lo que hiciste para calcular el inciso b)?*

Cintia [L7–L11]: *En qué puntos la razón de cambio de y con respecto a x es cero… mmm bueno, la razón de cambio está relacionada con la derivada, entonces pues derivé la función cúbica. Como me están pidiendo en qué valores es cero, entonces igualé y' a cero y busqué las raíces donde… los valores de x que hacen que y' sea igual a cero.*

Inv. [L12]: *Ok, ¿y que hay sobre el inciso a)?*

Cintia: [L13–L16]: *Encuentra los puntos de la grafica de la función para los que su tangente es horizontal…Ah! Sí, allí luego me di cuenta jeje… cuando… cuando… es que cuando era cero… bueno yo pensaba graficar.*

Inv. [L17–L18]: *Tiene tangentes horizontales, para empezar, la función. ¿tiene, no tiene, me puedes mostrar si tiene o no tiene y por qué?*

Cintia [L19]: *No tiene. Creo que no tiene.*

Inv. [L20–L21]: *¿Qué necesitarías para estar segura de si tiene o no tiene tangentes horizontales? ¿necesitas más información?*

Cintia [L22–L25]: *No…cuando tiene tangentes horizontales es cuando la derivada es igual a cero… luego cuando tiene pendiente cero… ah! Es lo mismo!... por eso no la hice porque me confundí así estaba toda revuelta…*

Inv. [L26]: *Si tuvieras la gráfica ¿podrías responder la pregunta?*

Cintia [L27–L28]: *Sí, sería más fácil. Pues ya me surgió dudas. No estoy segura de que no tenga.*

Como se puede apreciar en la transcripción anterior, Cintia no tuvo problema alguno para resolver satisfactoriamente el ítem b) de la tarea (L1–L11), no obstante, muestra dificultades para resolver el ítem a), resolución que, por supuesto, no asocia a la resolución del ítem b). De esta forma, a lo largo de la entrevista, Cintia hace proposiciones tales como "No tiene tangente horizontales" (L19), "No estoy segura de que tenga [tangentes horizontales]" (L21–L28) y "si sería más fácil [responder a la pregunta si tuviera la gráfica de la función cúbica propuesta]" (L27). De cualquier forma, al final de la entrevista, se había creado un conflicto cognitivo en Cintia, conflicto que la llevó a replantear su respuesta "no tiene tangentes horizontales" a "no estoy segura de que no tenga". Sin embargo, aún con este conflicto, Cintia aún veía las preguntas de los ítems a) y b) como dos cosas aisladas, pues como se evidenció en la líneas 26 y 27, para ella, responder al ítem a) sería más fácil si contara con la gráfica de la función, aún teniendo resuelta la parte b) de dicha tarea.

6.3.2.7. Tarea 7: Tasas instantáneas de variación

La Tabla 6.11 muestra los resultados en frecuencias y porcentajes para el grado de corrección del ítem a) de la tarea 7. Tal y como lo comentamos en el apartado 5.4.2.2.8, esta tarea 7 fue una de las que más complicadas resultaron de responder para los futuros profesores. En esta segunda aplicación del cuestionario, nuevamente un alto porcentaje de estudiantes, 79,6%, no fueron capaces de establecer relaciones correctas entre las tasas dadas, que representaban la función de altura del agua, y las gráficas de su función derivada correspondiente. Sólo tres de los profesores en formación resolvieron correctamente la tarea.

Tabla 6.11. Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección del ítem a) de la tarea 7

Grado de corrección	**Tarea 4: ítem a)**	
	Frecuencia	%
Correcta	3	6,1
Parcialmente correcta	26	53,1
Incorrecta	13	26,5
No responden	7	14,3
Total	49	100

En cuanto a las configuraciones cognitivas que pudimos identificar de las soluciones que dieron los estudiantes a esta tarea en la "versión final" del cuestionario, estas se centraron en, tal y como describimos en la sección 5.4.2.3.7, en justificaciones basadas en elementos lingüísticos verbales, mismos que referían a sentencias tales como "…el crecimiento comienza lento…", "…el crecimiento del nivel comienza algo rápido", etc. En general, los datos obtenidos con la aplicación del cuestionario, no arrojaron evidencias contundentes para caracterizar y describir tipologías de configuraciones cognitivas, ya que tanto las respuestas incorrectas como las correctas, pasando por las parcialmente correctas, fueron como la ejemplificada en la figura 5.45, y misma que hemos descrito arriba.

Sin embargo, al realizar las entrevistas a algunos de los estudiantes se puso de manifiesto otro tipo de configuración, que podríamos denominar "*Gráfica – Gráfica*". El siguiente fragmento de la entrevista realizada a una estudiante, Cecilia, ejemplifica este nuevo tipo de configuración que se hace evidente en las entrevistas.

Inv. [L1–L10]: *Vamos a pasar a otra pregunta que va en el mismo sentido. La pregunta si te acuerdas era de unas tazas que se estaban llenando a flujo constante mediante un grifo o una llave, y la pregunta era ¿cómo relacionas o relacionar, la actividad era relacionar cada una de las tazas que representan la función de llenado h(t) con sus derivadas? Se te daban seis opciones y aquí veo que hiciste algunas relaciones, por ejemplo vamos a hablar de la primera relación que tú tienes aquí, la taza R está relacionada con la gráfica uno, ¿me puedes hablar más o menos de la relación, de cómo fue que la obtuviste?*

Cecilia [L11–L18]: *En este caso yo las relacioné con unas gráficas que elaboré de cómo se llenan las tazas [ver Figura 6.11]. Las gráficas representan el llenado, como es más ancha en la parte de abajo empieza a llenar más despacio, ya después cuando es más angosta, cuando es más altito empieza a llenarse más rápido, tiene como una parte exponencial pues se llena más rápido, y llegando ya a lo último de la taza está más anchita, entonces otra vez empieza a disminuir la velocidad de llenado.*

Inv. [L19–L21]: *Y después de esta grafica que dibujaste [señalando la gráfica de llenado R] que es la de llenado, qué fue lo que hiciste para relacionarlo… ¿primero miraste la gráfica?¿qué hiciste después?*

Cecilia [L22–L27]: *Traté de relacionarla con su derivada a partir de la gráfica que ya dibujé… consideré algunas de las derivadas que hay aquí que podría ser la derivada de esa gráfica,… relacionándola…, si considero que esta gráfica [la grafica de llenado R] podría ser de un exponente cúbico, tratar de buscar una de exponente cuadrado, una cuadrática. Buscar una derivada con un exponente menos.*

Inv. [L28–L32]: *Entonces por ejemplo, esta gráfica es una cúbica? [señalando la gráfica de llenado R]. Entonces, la gráfica uno de la derivada ¿qué representaría en el contexto del problema o cómo se interpreta? Porque esta me dijiste que era la gráfica de llenado, pero esta no sé qué seria, ¿cómo se interpreta? ¿Tienen alguna interpretación?*

Cecilia [L33–L35]: *Como la velocidad…, el tiempo de llenado con respecto a determinadas alturas. Serviría para ver el cambio que hay en determinados tiempos y determinadas alturas.*

Como ha quedado constatado, con el ejemplo de Cecilia, la característica principal de la configuración cognitiva que hemos denominado "*Gráfica – Gráfica*", es que a partir de las representaciones icónicas (imagen de las tazas) de la función "altura de llenado" se obtienen representaciones gráficas de la función altura de llenado [*h(t)*] de cada una de las tasas. Una vez obtenidas las gráficas *h(t),* a partir de diversas proposiciones tales como "Si la función R es una función cúbica, entonces la derivada es una función cuadrática,…la función derivada es con un exponente menos" (L25–L27), se pasa a las gráficas respectivas *h'(t).* Sin embargo, el uso de proposiciones como la que acabamos de mencionar, llevó a los futuros profesores a establecer relaciones incorrectas. Por ejemplo, Cecilia logra determinar que la función altura del agua respecto del tiempo *h(t)* de la taza R, era una función cúbica (Líneas 25–26, Figura 6.11), empero, al no considerar aspectos como el de la simetría respecto del punto de inflexión de la función cúbica *h(t),* no concibe que la función derivada, si bien debe ser de un grado menor (una función cuadrática), ésta debe de ser simétrica, lo que llevaría a considerar como posibles respuestas las gráficas II y V. Posteriormente, mediante consideraciones sobre la rapidez de cambio de la función *h(t)* o la velocidad de llenado si se observa directamente de la taza R, podría discriminar y concluir que la gráfica de la derivada asociada a la taza R es la gráfica II.

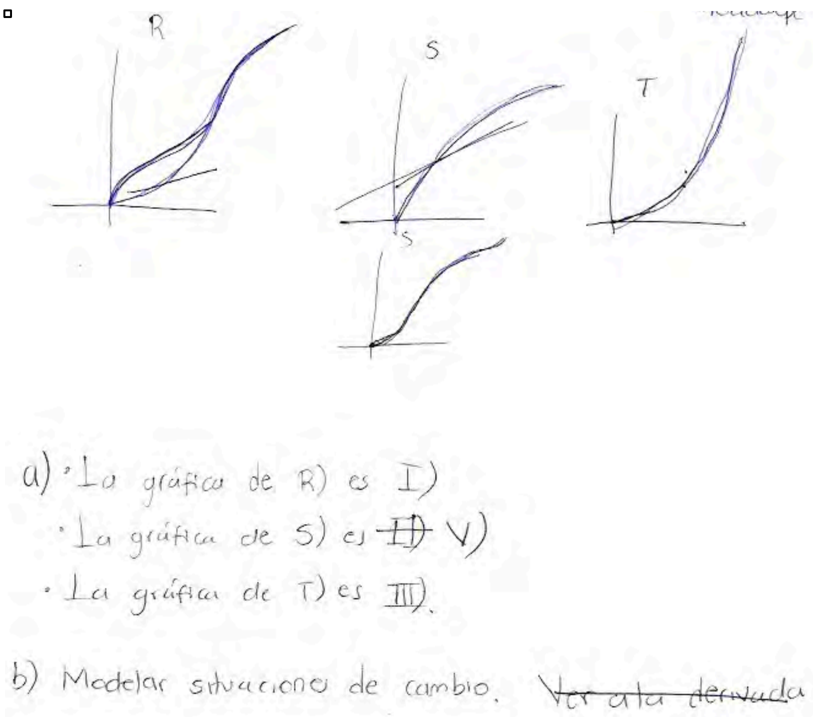


Figura 6.11. Solución de Cecilia a la Tarea 7

Debemos destacar que, esta configuración cognitiva (gráfica vs gráfica) fue utilizada por todos los estudiantes entrevistados. Cecilia fue la única estudiante, de los 49 que participaron en este segundo estudio y que fue entrevistada, que escribió las gráficas *h(t)* del cuestionario, gráficas que en un principio no teníamos la certeza de que fueran las gráficas de llenado obtenidas de R, S y T, ni de cómo es que relaciona dichas gráficas con las gráficas de sus respectivas derivadas. Por esta razón, decimos que esta configuración cognitiva se hace perceptible durante las entrevistas realizadas.

En lo que respecta al ítem b) de la tarea, los futuros profesores proporcionaron “listas pobres” de algunos conceptos y macro procesos como el modelación, tal y como en el ejemplo de la Figura 6.11. Este hecho daba cuenta del escaso conocimiento de tipo especializado con el que contaban los profesores para la identificación de conocimientos plausibles puestos en juego, a propósito de una tarea como la planteada.

6.3.2.8. Tarea 8: Velocidad instantánea

A diferencia de los resultados obtenidos en la versión piloto, en esta segunda aplicación, o aplicación del "cuestionario definitivo", los futuros profesores que respondieron a la tarea 8 no proporcionaron respuestas parcialmente correctas como las reportadas en el apartado 5.4.2.2.9, tal y como muestra la Tabla 6.12.

Tabla 6.12. Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de la tarea 8

Grado de corrección	**Tarea 8**	
	Frecuencia	%
Correcta	2	4,1
Parcialmente correcta	0	0
Incorrecta	32	65,3
No responden	15	30,6
Total	49	100

En la Tabla 6.12 también es posible observar que la mayoría de los profesores en formación, 65,3%, dieron respuestas incorrectas para la tarea, mientras que sólo dos de ellos, 4,1%, proporcionaron respuestas correctas en las que activaron la configuración cognitiva "aproximación bilateral". El 30,6% de los estudiantes no responde la tarea y uno (incluido en la categoría de respuestas incorrectas) no da evidencia de su solución. La Tabla 6.13 presenta los resultados para el tipo de configuración cognitiva activada por los estudiantes para dar sus soluciones.

Tabla 6.13. Frecuencias y porcentajes para el tipo de configuración cognitiva de la tarea 8

Tipo de configuración cognitiva	**Tarea 8**	
	Frecuencia	%
Patrón numérico	0	0
Uso de la relación física $v = d/t$	31	63,3
Aproximación por la izquierda o derecha	0	0
Aproximación bilateral	2	4,1
No dan evidencia de su solución	16	32,6
Total	49	100

La tabla 6.13 permite observar que hay dos tipologías de configuraciones cognitivas, "patrón numérico" y "aproximación por la izquierda o derecha", que emergen de las prácticas que desarrollan los futuros profesores que participaron en la versión piloto, pero no es las prácticas desarrolladas por los profesores en formación que participaron de este segundo estudio. Estas dos tipologías de configuraciones son las que, en principio, habíamos relacionado en la versión piloto del cuestionario con respuestas de tipo parcialmente correctas. Del mismo modo, tal y como lo describimos en el apartado 5.4.2.2.9, los profesores en formación que en sus respuestas activaron la configuración cognitiva "*uso de la relación física* $v = d/t$", mostraron dificultades para distinguir la diferencia entre la función derivada y la derivada en un punto, así como la conexión entre distintos significados parciales de la derivada. Estos hallazgos se profundizan y describen en el apartado 5.4.2.3.8 del Capítulo 5, junto con la caracterización y descripción de las configuraciones cognitivas activadas en las respuestas que dieron los futuros profesores a la tarea 8.

6.3.2.9. Las tareas 9, 10 y 11

Las tareas 9, 10 y 11 que han sido incluidas en la "versión final" del cuestionario considerando los resultados del estudio del juicio de los expertos, trataban de explorar otros aspectos del conocimiento de los profesores sobre la derivada, que no habían sido explorados hasta el momento con las tareas anteriores. Por ejemplo, el uso que hacen los futuros profesores de la derivada en otros contextos como la economía y la asociación o conexiones entres los significados parciales que se activan en los distintos contextos (Tarea 9, apartado 6.2.3), los conocimientos que les faculta para modelar situaciones a partir de proposiciones verbales y así transitar entre distintos registros de representación (Tareas 10 y 11, apartados 6.2.4 y 6.2.5). No obstante, los resultados obtenidos con la aplicación de estas tres tareas, no fueron nada alentadores, o visto desde otro punto de vista, fueron muy sugerentes.

Ninguno de los 49 profesores que participaron de este segundo estudio, respondieron alguna de las tres últimas preguntas. Unos cuantos, cuatro, realizaron algunos "intentos" y cálculos escuetos, que si bien es cierto, formaría parte de sus conocimientos, éstos por sí mismos no permitían inferir ni mucho menos describir nada, por lo que juzgamos innecesario traerlos a colación.

A partir del resultado obtenido con estas tres tareas, nos planteamos diversas hipótesis acerca de lo que podría haber pasado, por ejemplo: 1) el factor tiempo, era probable que las dos horas que duró la aplicación del cuestionario fuera insuficiente para los futuros profesores; y 2) falta de conocimientos, asociados a la modelación de diversas situaciones y para usar la derivada en diversos contextos como el de economía. Sin embargo, los resultados obtenidos con las respuestas, o bien, no obtenidos, no contribuían a la constatación de alguna de las hipótesis y, en principio, sólo podíamos alegar lo sucedido con la primera de ellas, señalada arriba: la falta de tiempo. Por esta razón a todos los estudiantes entrevistados, 15, se les cuestionó sobre las razones por las cuales no respondieron a dichas tareas. Los resultados de dichas entrevistas sustentaban algunas de nuestras hipótesis y daban luz acerca de otras razones, que no habíamos considerado, por las cuales no respondieron a dichas tareas.

A continuación se presenta un segmento de la entrevista realizada a un estudiante, Alberto, segmento durante el cual se le cuestiona sobre las tareas 9, 10 y 11.

Inv. [L1–L2]:	*Ahora vamos a hablar un poco acerca de las tareas que no respondiste. Comencemos por la nueve…*
Alberto [L3]:	*En las últimas especifiqué que no me acordaba.*
Inv. [L4]:	*¿Sabes que es un costo marginal?*
Alberto [L5–L8]:	*No. No sabía que hacer. Se me olvidaron muchas cosas. En análisis numérico siempre nos decía el maestro “si no sabes que hacer, deriva”… es una frase más. Me imaginé que tenía que derivar, de hecho derivé, pero luego lo borré porque no sabía nada.*
Inv. [L9–L11]:	*Entonces no sabes cuál es la relación entre la derivada y la función que te damos; pero si te digo que derives ésta [la función dada], ¿si la puedes derivar?*
Alberto [L12–L13]:	*Sí [el alumno derivó la función dada correctamente en un folio en blanco].*
Inv. [L14–L16]:	*Bueno, bueno, pasemos entonces a la tarea 10…*
Alberto [L17–L18]:	*No me acuerdo como se hace, es lo mismo… es terrible… la energía cinética…*
Inv. [L19–L24]:	*Olvidémonos un poco de la pregunta y leamos el enunciado. Podrías responderme o no responderme, ¿podrías dar un modelo de una función que modele la actividad que se te propone? Es decir, acá te dicen: la energía cinética de un objeto es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad. Hasta allí. ¿Podrías representar un modelo?*
Alberto [L25–L27]:	*No sé cómo representar energía cinética ni velocidad. Velocidad es igual a distancia entre tiempo. Entonces no sé cómo sería la energía cinética… se me viene a la mente como proporcional.*
Inv. [L28]:	*Directamente proporcional… ¿eso que te indica?*
Alberto [L29–L32]:	*Me suena a algo de A entre B es igual a C, algo así me suena, pero… Pues me imagino que tal vez la energía cinética será algo de la forma A entre B. Entonces podría ser proporcional a la distancia entre tiempo.*
Inv. [L33–L36]:	*Dime una cosa: ¿Qué pasaría si yo te doy el modelo? Si yo te doy una función en donde ya se contemple la primera parte de la tarea: La energía cinética… hasta es proporcional a un medio de su masa. ¿Podrías responder la pregunta, si tuviéramos ya la función?...*
Alberto [L37]:	*Sí.*

Inv. [L38–L39]: *Supón que doy esto [el modelo matemático que representa la energía cinética]. ¿Podrías resolver ya la pregunta con ese modelo?*

Alberto [L40–L41]: *Me imagino que tengo que derivar esto [el modelo o función] con respecto a la velocidad…*

Inv. [L42]: *¿Sabes que es rapidez de cambio?*

Alberto [L43]: *No exactamente*

Inv. [L44–L46]: *Vamos a variar un poco la pregunta, ¿qué pasa si te digo razón de cambio?... La misma pregunta, cuál es la razón de cambio de la energía cinética…*

Alberto [L47–L49]: *Yo asocio la razón de cambio con… no recuerdo qué era la razón de cambio… podría intentar hacer algunos cálculos pero no estoy seguro de que sean correctos.*

Inv. [L50]: *Bueno, ¿y que hay de la tarea 11?*

Alberto [L51–L55]: *Me sonó a álgebra. Imaginé dos números. No sé si interpreté bien. Imaginé dos números tal que al evaluar el primero por el segundo en su derivada sea un máximo entonces como que tendría que sacar la segunda derivada, eso se me ocurre…. La verdad no tengo idea de cómo resolverlo…*

Es posible apreciar en el dialogo anterior que Alberto, al igual que varios de sus compañeros entrevistados, no ha respondido a las tareas 9, 10 y 11, más por falta de conocimientos que por falta de tiempo. Alberto, como otros de los estudiantes entrevistados, hace evidente su desconocimiento sobre la relación que hay entre la derivada y la función de costo marginal (L4 a L8), por lo que en el contexto de la tarea 9, la economía, no le confiere un significado a la derivada. Del mismo modo, para la tarea 10, Alberto no es capaz de establecer una relación entre la derivada, rapidez de cambio y razón de cambio (L42, L43, L47 y L48). Además, otro impedimento que se encontró para resolver la tarea, que fue un aspecto generalizado en todos los estudiantes entrevistados, es que al parecer Alberto no tiene conocimiento especializado requerido para modelar situaciones como la planteada y así, pasar de un registro de representación a otra (L25-L37). Análogamente ocurrió con la tarea 11, en la cual el principal impedimento que se encontraron los profesores en formación fue el no saber modelar la situación planteada.

Una pregunta que nos ha surgido con las entrevistas, aunque sería aventurado responder por la falta de información, es ¿las carencias manifestadas por los futuros profesores respecto del conocimiento que les faculta para responder tareas como las últimas tres planteadas en nuestro cuestionario, serán a causa de la formación que reciben? Alberto señala lo siguiente: “No sabía que hacer. Se me olvidaron muchas cosas. En análisis numérico siempre nos decía el maestro 'si no sabes que hacer, deriva' " (L5-L7). Sería interesante explorar cuál es la naturaleza de sus cursos de formación, sobre temas de análisis matemático y de didáctica del cálculo, estudio que queda fuera del alcance de nuestra investigación.

6.4. CONSIDERACIONES FINALES

Como señalamos en el apartado 6.3.2, la segunda aplicación del cuestionario que diseñamos para explorar la faceta epistémica del CDM sobre la derivada, se realizó a dos grupos de futuros profesores, mismos que, al no encontrar diferencias "significativas" entre los resultados de ambos grupos, consideramos como una sola muestra de 49 profesores en formación. De esta forma, vemos que, en general, la segunda versión del cuestionario resultó más complicada de resolver para la segunda muestra de futuros profesores, alcanzando una media de 13,8 puntos de los 36 puntos posibles, puntuación que está por demás decir que se encuentra por debajo de la media esperada, considerando que los futuros profesores a los que se les aplicó el cuestionario les faltaban unos pocos meses para insertarse como profesores de distintas escuelas de bachillerato en México. Las Figuras 6.12 y 6.13 ilustran la media y la distribución de las puntuaciones obtenidas con la aplicación de la segunda versión del cuestionario *CDM-Derivada*.

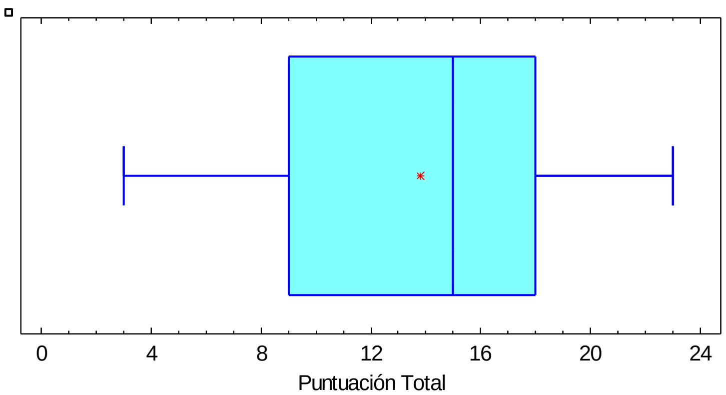


Figura 6.12. Gráfico de cajas de la puntuación total obtenida en la segunda versión del cuestionario

Como estudiamos a lo largo de este Capítulo 6, el análisis cuantitativo y, sobre todo, el cualitativo de los resultados, nos develas aspectos que van más allá de que el cuestionario haya resultado fácil o difícil para los futuros profesores, o de aspectos relacionados con "los profesores no tienen conocimiento". Tanto el análisis de las configuraciones cognitivas activadas y manifestadas en las resoluciones que los futuros profesores ofrecieron a las distintas tareas que integran el cuestionario, como las entrevistas que se realizaron a algunos de ellos para profundizar en el estudio de dichas configuraciones cognitivas, han arrojado resultados valiosos relacionados con la naturaleza de los conocimientos didáctico-matemáticos de los futuros profesores, tales como los conflictos y errores que presentan cuando requieren usar diversas representaciones de un objeto matemático, la desconexión entre los distintos significados parciales de la derivada o la problemática en cuanto a la adquisición de conocimientos que les confiera competencias para poder resolver tareas de modelación tales como las tareas 10 y 11 del cuestionario.

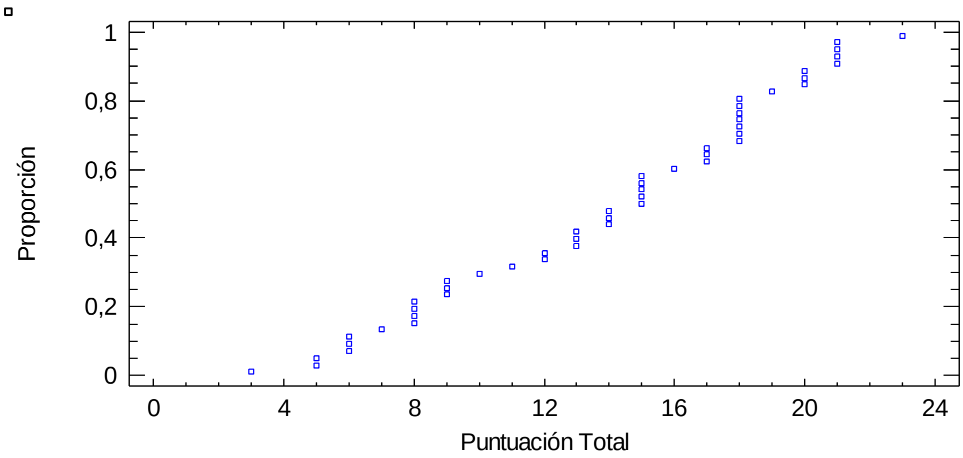


Figura 6.13. Distribución de las puntuaciones obtenidas en la segunda versión del cuestionario

Dichos resultados, como veremos en el próximo y último capítulo, nos proporcionan pautas para poder establecer medidas de acción formativa que sirvan para orientar, desarrollar y potenciar, los conocimientos que los futuros profesores de bachillerato deberían tener sobre la derivada, para gestionar adecuadamente los aprendizajes de sus futuros estudiantes.

Finalmente queremos cerrar este capítulo señalando que, aunque el índice de dificultad (Tabla 6.14) arroja que las tareas 9, 10 y 11, resultaron extremadamente difíciles para los futuros profesores, y por lo tanto no discriminan ni aportan información, aparente, acerca de los conocimientos requeridos para su solución, las entrevistas que realizamos para profundizar en las razones que llevaron a los profesores en formación a la no resolución de dichas tareas, desmienten nuestra hipótesis de que el “factor tiempo” fue el principal problema, desvelando las verdaderas causas, mismas que han sido comentadas en el apartado 6.3.2.9. La pregunta es, ¿cuál es el origen o naturaleza de las dificultades que presentaros los futuros profesores en la resolución de las tareas? ¿cómo podemos ayudar a los futuros profesores a superar dichas dificultades y desarrollar así conocimientos necesarios para la resolución de tareas como las incluidas en el cuestionario?

Tabla 6.14. Índice de dificultad de los ítems del cuestionario *FE-CDM-Derivada*

	Ítem	Índice de dificultad		Ítem	Índice de dificultad
1	I-1	0.8979	10	I-5	0.0408
2	I-2a	0.8163	11	I-6a	0.4489
3	I-2b	0.5510	12	I-6b	0.3877
4	I-2c	0.5102	13	I-7a	0.0612
5	I-2d	0.0816	14	I-8	0.0408
6	I-3a	0.6326	15	I-9a	0
7	I-3b	0.2857	16	I-9b	0
8	I-4a	0.3673	17	I-10	0
9	I-4b	0.3061	18	I-11	0
Media: 0,302					

Los resultados obtenidos con las tareas del cuestionario y en general el desglose y análisis con detalle de las configuraciones cognitivas, nos ayudan a comprender las debilidades en el conocimiento de los futuros profesores sobre la derivada, dándonos orientación sobre el camino que debemos seguir para el diseño de acciones formativas que contribuyan al desarrollo y potenciación del mismo; aspecto que, entre otras cosas, queda fuera del alcance de este estudio, pero que sin duda es de interés continuar en dicha dirección.

CAPÍTULO 7

Conclusiones e Implicaciones

7.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo presentaremos un resumen de los resultados más relevantes que se han obtenido durante el desarrollo de cada uno de los capítulos que conforman esta investigación. Dichos resultados son producto de unas preguntas de investigación, planteadas en el Capítulo 2, y de unos objetivos específicos que nos propusimos para la consecución de respuestas a dichas preguntas. De esta manera, a continuación vinculamos los resultados con los objetivos específicos de nuestra investigación para responder en qué medida se han respondido las preguntas de investigación planteadas.

Así mismo, somos conscientes de que, a pesar de que con nuestra investigación hemos tratado de contribuir de manera relevante al extenso campo de formación inicial de profesores y del conocimiento del profesor de matemáticas, el cual ha tomado creciente interés desde hace aproximadamente 30 años, aún quedan muchas cuestiones por responder y sobre las cuales, desde nuestro punto de vista, las investigaciones centradas en aspectos del conocimiento y la formación inicial de profesores, podrían continuar en pro de la mejora de la calidad de los procesos de formación del profesorado. En este sentido, presentamos cuestiones abiertas de investigación y con ellas, posibles vías de continuidad de nuestro trabajo.

7.2. UN BREVE RESUMEN DE NUESTRO PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Como lo señalamos al inicio del Capítulo 1 y en parte del Capítulo 2, desde hace casi ya tres décadas, una de las problemáticas que ha preocupado a la comunidad de investigación e instituciones educativas encargada de la formación inicial (y permanente) de los profesores de matemáticas es cuál es el conocimiento que requieren dichos profesores para que su enseñanza sea una enseñanza de calidad respecto de los aprendizajes de sus futuros estudiantes. Al respecto diversos intentos se han realizado con la intención de caracterizar el complejo de dichos conocimiento, y como ejemplo, están todos los modelos del conocimiento del profesor, presentados en el apartado 1.2 del Capítulo 1, en los que se intenta caracterizar los componentes que "integran", o más bien, deberían integrar dicho conocimiento.

Desde nuestro punto de vista, uno de los modelos que, en la actualidad, ha tomado mucha "fuerza y relevancia" en las investigaciones que versan sobre los conocimientos de los profesores (en formación y en acción), es el modelo conocido como el MKT (Mathematical Knowledge for Teaching) propuesto por la profesora D. Ball y colaboradores. Sin embargo, a pesar de los avances que supone dicho modelo en la determinación de los componentes del "conocimiento matemático necesario para la enseñanza", aún quedan cuestiones que deben ser respondidas como por ejemplo, ¿De qué forma o bajo que criterios se puede evaluar o medir los distintos componentes del MKT? ¿Cómo se puede ayudar a los profesores a adquirir o desarrollar los distintos componentes del MKT? y ¿Cómo se relacionan entre sí, los distintos componentes del MKT? Consciente de la problemática subyacente a estas interrogantes, Godino (2009), propone un modelo que proporciona "pautas para evaluar" el conocimiento didáctico-matemático (CDM) de los futuros profesores, descomponiendo de manera más "fina" los componentes del conocimiento de los profesores de matemáticas. Sin embargo, tal y como señala el mismo autor, no queda claro el uso de los criterios, los cuales por cierto no son exhaustivos, ni la relación entre las diversas facetas que en su modelo propone.

En esta dirección es en la que nos propusimos avanzar. Nuestra pretensión desde el inicio era responder, aunque fuera de manera parcial, a las cuestiones planteadas en el párrafo anterior, tomando como base los desarrollos de Godino (2009) y de Ball y colaboradores (Ball, 2000; Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Ball y Schilling, 2008, etc.). Así, después del estudio profundo de la problemática y la justificación de la pertinencia de nuestra propuesta, nos planteamos la siguiente **pregunta general de investigación** (ver apartado 2.3.1):

> ***¿Cuál es el conocimiento referente a la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático que necesitan los futuros profesores de bachillerato para la enseñanza idónea de la noción derivada?***

Esta pregunta de investigación dio pie al planteamiento del siguiente **objetivo general de investigación**:

> ***Evaluar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada de profesores en formación inicial de bachillerato en México, y así determinar si al final de su proceso de instrucción han generado un conocimiento de la faceta epistémica del CDM suficiente para la enseñanza idónea de la derivada.***

Con la finalidad de lograr este objetivo general y, en consecuencia, la respuesta a la pregunta general de nuestra investigación, en el apartado 2.3.1, planteamos objetivos específicos cuya consecución contribuiría a dicho fin. En las secciones que siguen a continuación, presentamos los resultados y discutimos en qué medida se lograron cada uno de esos objetivos específicos.

7.3. SOBRE EL LOGRO DE LOS OBJETIVOS ESPECÍFICOS Y SU REPERCUSIÓN EN LAS RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

7.3.1. Sobre la pregunta de investigación *PI-2*

Como señalamos en los apartados 1.5 y 2.3, si nuestra intención era evaluar una de las facetas del conocimiento didáctico-matemático sobre el objeto matemático derivada, que tienen los futuros profesores de bachillerato, es primordial saber qué es la derivada, cuál es su naturaleza. Al respecto nuestra segunda pregunta de investigación (*PI-2*) fue:

¿Cuál es el significado holístico de la derivada?

Para responder a esta pregunta nos planteamos cinco objetivos específicos. A continuación describimos cada uno de ellos.

7.3.1.1. Sobre el objetivo específico OE-1

El primer objetivo específico que nos propusimos para entender la naturaleza del objeto derivada y poder entender qué es, fue:

> *Caracterizar los pares <Prácticas , Configuración de objetos y procesos activados en dichas prácticas> mediante un estudio histórico-epistemológico*

sobre la derivada, para identificar los distintos significados parciales de dicho objeto matemático.

Para lograr este objetivo, y como primera fase de nuestro estudio (F1), en el Capítulo 3 (apartado 3.2) realizamos un estudio histórico-epistemológico del objeto derivada, recogiendo información sobre las problemáticas relevantes que fueron contribuyendo tanto para el surgimiento de dicho objeto matemático, como para su fundamentación. Dicho estudio se llevó a cabo considerando que la determinación del significado global, u holístico, de un objeto matemático, requiere realizar un estudio histórico-epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto.

Una vez identificadas las prácticas que dieron paso al origen y evolución de la derivada, mediante la noción de *configuración epistémica* que nos proporciona el EOS, en el apartado 3.3, describimos sistemáticamente dichas prácticas en términos de las configuraciones de objetos matemáticos primarios que se activaron mediante los desarrollos de las mismas. De esta forma para cada práctica nos dimos a la tarea de identificar los elementos lingüísticos utilizados, los conceptos, propiedades y procedimientos a los que refieren dichos elementos lingüísticos, y los argumentos mediante los cuales se vinculan los objetos matemáticos primarios anteriores.

Como respuesta a este primer objetivo específico, se identificaron nueve sistemas de prácticas cada uno de los cuales, siguiendo los supuestos teóricos del enfoque ontosemiótico, "representan" un significado parcial para el objeto derivada y por tanto cada uno de esos sistemas de prácticas llevan "implícita" la activación de una configuración epistémica de objetos matemáticos primarios. La descripción sistemática, que da cuenta del logro de este primer objetivo, de las nueve configuraciones epistémicas y que dan lugar a nueve significados parciales del objeto derivada, puede encontrarse en el apartado 3.3 del Capítulo 3.

7.3.1.2. Sobre el objetivo específico OE-2

Cuando nos planteamos la reconstrucción del significado global u holístico de la derivada, a priori, sabíamos que era necesaria la identificación de los significados parciales de dicha noción, pues dentro del EOS se entiende que el significado global, también denominado significado holístico u holo-significado, comprende o está compuesto de los diferentes significados parciales de un objeto matemático (Pino-Fan, Godino y Font, 2011). Así, nuestro segundo objetivo específico (OE-2) fue:

> *Reconstruir un significado global de referencia de la derivada mediante la consideración de los significados parciales obtenidos de la caracterización de los pares <Prácticas , Configuración de objetos y procesos activados en dichas prácticas>*

El logro de este objetivo se evidencia con el esquema de la Figura 3.11 ubicada en el apartado 3.4 del Capítulo 3. Dicho esquema muestra la complejidad del significado global de la derivada, mostrando las relaciones entre los distintos significados parciales y el nivel de generalización referente a las configuraciones epistémicas asociadas a cada significado parcial. Nuestra propuesta de significado global de referencia queda recogido con el esquema que presentamos en la Figura 3.11. El cumplimiento de este objetivo era importante para los fines generales de esta investigación y, en general, pensamos que también es un aporte significativo a la comunidad de formación inicial o permanente de profesores sobre la noción de derivada, toda vez que tanto los significados pretendidos por una institución educativa concreta, como los significados pretendidos por un profesor, como representante de una institución, serán una “parte” de este significado holístico de referencia.

7.3.1.3. Sobre los objetivo específicos OE-3 y OE4

Otro aspecto importante que se hacía necesario estudiar, si nuestra intención era explorar los conocimientos didáctico-matemáticos, referentes a la faceta epistémica, sobre la derivada de los futuros profesores, era describir los significados de la derivada pretendidos en el currículo de bachillerato en el contexto Mexicano. En este sentido planteamos los objetivos específicos *OE-3* y *OE-4* que son, respectivamente:

> *Caracterizar el significado de la derivada pretendido en los planes de estudio oficiales de bachillerato en México.*

> *Caracterizar el significado de la derivada pretendido en los libros de texto oficiales de bachillerato en México*

Como respuesta a estos dos objetivos específicos podemos señalar que el análisis de la dupla <*Plan de Estudios*, *Libros de Texto*>, de cálculo diferencial presentados en los apartados

4.3.1 y 4.3.2 respectivamente, ha permitido caracterizar el significado epistémico-didáctico de la derivada pretendido actualmente en el currículo de bachillerato mexicano. Esta caracterización se realizó mediante descripción sistemática de las configuraciones de objetos y procesos activadas en las distintas prácticas sobre derivadas que proponían tanto los libros de texto analizados como los planes de estudio. El resultado del análisis realizado, tanto de los Planes de Estudio como de los libros de texto de cálculo diferencial de nivel bachillerato, revela que en la actualidad el significado de la derivada pretendido en el currículo de bachillerato mexicano es *la derivada como límite del cociente de incrementos*, aplicado en distintos contextos o tipos de problemas. Este resultado, que es evidencia del logro de los dos objetivos específicos planteados, se muestra esquemáticamente en la Figura 4.5 del Capítulo 4.

7.3.1.4. Sobre el objetivo específico OE-5

La caracterización del significado de la derivada pretendido en el currículo de bachillerato es importante dado que dicho significado, de carácter epistémico-didáctico, en la actualidad, es el "significado de referencia" que está al alcance tanto de los futuros profesores como de los profesores en acción. No obstante, ¿este significado de la derivada pretendido en el currículo de bachillerato en el contexto mexicano, es representativo del significado holístico? Para responder a esta pregunta nos planteamos el objetivo *OE-5*:

> *Valorar la representatividad del significado pretendido en el currículo de bachillerato tomando como referente el significado holístico*

Para lograr este objetivo, y atendiendo a la fase 3 de nuestro estudio (ver apartado 2.4.1), llevamos a cabo un estudio de la *idoneidad epistémica* (ver apartado 4.2.2) el cual nos proporcionó herramientas teóricas y metodológicas que nos permitieron valorar la representatividad de los significados pretendidos en el currículo de bachillerato, mediante la dupla <Plan de Estudio , Libros de texto>, respecto del significado global de la derivada. El logro del objetivo *OE-5*, y que da cuenta de una de nuestras contribuciones teóricas y metodológicas, comienzan cuando nos vimos en la necesidad de responder a la pregunta ¿cómo observamos o qué criterios nos permiten explorar y valorar si los significados de la derivada pretendidos en el currículo de bachillerato representan idóneamente al significado holístico de referencia? Para responder a esta pregunta se hizo necesario el planteamiento de criterios específicos, que nos ayudaron a operativizar la noción de idoneidad epistémica para el caso concreto del análisis del significado de la derivada pretendido en el currículo de matemáticas del nivel bachillerato. Esos criterios para el análisis de la idoneidad epistémica de los significados de la derivada pretendidos en el currículo de bachillerato, se mencionan y describen en el apartado 4.2.3, y se operativizan mediante tablas presentadas en el apartado 4.3.2.2 cuando ponemos en uso los cuatro criterios planteados para el análisis de los significados pretendidos en los libros de texto.

Como resultado del estudio de la idoneidad epistémica de los significados de la derivada pretendidos en el currículo de bachillerato en México, el análisis evidencia que el enfoque moderno del cálculo diferencial se basa fundamentalmente en el concepto de límite (Figura 4.5), por lo que se hace necesario efectuar investigaciones curriculares que centren su atención en la adecuación de los significados pretendidos respecto del significado holístico de la derivada.

7.3.1.5. Reflexiones finales

En este apartado hemos discutido en qué medida se ha logrado responder a la pregunta PI-2: *¿Cuál es el significado holístico de la derivada?* Para dar respuesta a dicha pregunta se propusieron cinco objetivos específicos los cuales fueron logrados en las Fases 1, 2 y 3 de nuestra investigación (ver apartado 2.4.1). En respuesta a la pregunta podemos decir que se logró reconstruir tanto el significado holístico de la derivada, como el significado de la derivada pretendido en el currículo de bachillerato en México. Estos significados representan los significados de referencia que los futuros profesores deberían conocer con la finalidad de planificar los significados que pretenden enseñar en sus clases sobre derivadas. Empero, ¿qué es lo que efectivamente conocen los profesores en formación inicial sobre estos significados? Esta pregunta da pie a nuestra siguiente pregunta de investigación, la cual abordaremos a continuación.

7.3.2. Sobre la pregunta de investigación *PI-3*

Una vez identificados y caracterizados los significados de referencia de la derivada, un aspecto relevante era determinar qué es lo que conocen los futuros profesores sobre dichos significados. Así, nuestra tercera pregunta de investigación fue:

> ***¿Cuál es el conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada, referente a la faceta epistémica, que efectivamente tienen los futuros profesores de secundaria/bachillerato?***

Para responder a esta pegunta nos propusimos un objetivo específico, *OE-6*, el cual al mismo tiempo consta de dos sub-objetivos para su consecución (*OE-6.1* y *OE-6-2*). El Objetivo *OE-6 es:*

> *Evaluar una parte del CDM sobre la derivada, concretamente el referido a lo que denominamos faceta epistémica, de acuerdo con la caracterización que se ha realizado con los objetivos anteriores*

A continuación discutiremos sobre el logro de los sub-objetivos específicos, *OE-6.1* y *OE-6-2,* los cuales dan cuenta de la medida en que se consiguió el objetivo *OE-6* y, por ende, la respuesta a nuestra pregunta *PI-3*.

7.3.2.1. Sobre el sub-objetivo específico OE-6.1

> *Diseñar un cuestionario que sea representativo de la complejidad del significado holístico de la derivada que permita caracterizar la faceta epistémica del CDM, sobre dicha noción, de los futuros profesores de bachillerato en México*

Los desarrollos plasmados a lo largo de todo el Capítulo 5, y que refiere a la realización de las tres primeras tareas de la cuarta fase de nuestra investigación, dan cuenta del logro de este objetivo. El diseño del cuestionario se desarrolló en tres tiempos o etapas (o mediante la realización de tres tareas que previmos en el apartado 2.4.1). En primer lugar, con base en el significado global de la derivada reconstruido, y de aspectos relevantes (destacados en el capítulo 5), propusimos una serie de criterios los cuales nos permitieron la selección intencional de las tareas que compondrían la versión "piloto" del cuestionario. El primer criterio hace referencia al tipo de conocimiento, referente a la faceta epistémica, que evalúa la tarea y cada uno de los ítems: conocimiento común, conocimiento especializado del contenido, conocimiento ampliado. El segundo y tercer criterio, ayudan a determinar y caracterizar el tipo de conocimiento evaluado, se refieren al uso de diversas representaciones (traducciones y conversiones) tanto para la función como para la derivada, y al uso y conexión de los diversos significados parciales. Estos dos últimos criterios se operativizan con el uso, que los futuros profesores podrían hacer, de diversas configuraciones cognitivas o, inclusive, el uso de diferentes elementos de configuraciones cognitivas (representaciones, argumentos, significados parciales de la derivada, etc.). Durante esta primera etapa se plantearon soluciones plausibles a cada uno de los ítems del cuestionario y se realizó un análisis exhaustivo de los conocimientos que esperábamos que los futuros profesores pusieran en juego, lo que garantizaba de algún modo la validez de contenido de nuestro cuestionario. Este análisis a priori puede leerse con detalle en el apartado 5.3.2.

La segunda etapa o momento, fue la aplicación del cuestionario diseñado, y que denominamos *Cuestionario CDM-Derivada*, a una muestra de 53 futuros profesores de bachillerato de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán. Este primer estudio, o aplicación piloto del cuestionario, nos proporcionó evidencias sobre los conocimientos sobre derivadas, referentes a la faceta epistémica del CDM, que los futuros tenían efectivamente casi al término de su formación (ver apartado 5.4). En relación a los conocimientos de los futuros profesores hablaremos un poco más adelante. Además de dicha evidencia, referente a los conocimientos que "poseen" los futuros profesores, los resultados de la aplicación nos dio pautas para realizar algunas modificaciones en la "versión piloto".

La tercera etapa o momento, fue el estudio mediante la triangulación de expertos, el cual se puede leer con detalle en el apartado 5.5, estudio mediante el cual, y aunado a los resultados de la tarea anterior, consideramos algunas modificaciones de la versión piloto y, atendiendo a sugerencias de los investigadores, añadimos algunas tareas que se describen en los apartados 5.5 y 6.2. Con el desarrollo de esta etapa, estudio mediante el juicio de expertos, se garantizó y consolidó la validez de contenido de nuestro cuestionario.

Todos los estudios y desarrollos discutidos anteriormente, garantizan el cumplimiento del sub-objetivo específico *OE-6.1*.

7.3.2.2. Sobre el sub-objetivo específico OE-6.2

> *Implementar el cuestionario diseñado con OE-6.1 para evaluar la faceta epistémica del CDM de los futuros profesores de bachillerato en México*

De manera estricta, podemos decir que la evaluación, y por ende el logro de este objetivo, de la faceta epistémica del CDM sobre la derivada, mediante el cuestionario que diseñamos, se realizó en dos momentos. Un primer momento tuvo logar con la aplicación del instrumento piloto. Esta primera aplicación del cuestionario (primer estudio) tuvo un carácter mucho mayor al que suelen tener las “exploraciones piloto” o “pilotajes” de los instrumentos diseñados, al contemplar el análisis pormenorizado de las configuraciones cognitivas que los futuros profesores activaron en la solución de las tareas. Esta análisis minucioso permitió la categorización o tipificación de dichas configuraciones cognitivas, lo que queda reflejado en el apartado 5.4.

En un segundo momento, que denominamos a lo largo del Capítulo 6 “segundo estudio” o “aplicación definitiva”, se aplicó el cuestionario a una muestra de 49 futuros profesores de bachillerato. Este segundo estudio fue reforzado con entrevistas clínicas que permitieron profundizar en la exploración y descripción de las configuraciones cognitivas utilizadas por los futuros profesores al resolver las tareas del cuestionario. Además este segundo estudio afianzó la fiabilidad de nuestros resultados y, en general, de nuestra investigación.

7.3.2.3. Reflexiones finales

Con el logro de los sub-objetivos *OE-6-1* y *OE-6-2*, podemos asegurar que el objetivo *OE-6* con el cual se pretendía evaluar la faceta epistémica del CDM en los futuros profesores, ha sido conseguido. Como resultado de la aplicación del cuestionario, y en respuesta a la pregunta *PI-3*, se puso de manifiesto a lo largo de los apartados 5.4 y 6.3, que tal y como lo señalan Berry y Nyman (2003), en muchas ocasiones la comprensión de las ideas básicas del cálculo los futuros profesores es similar a la de los estudiantes, incluyendo aquellas concepciones erróneas y la limitada comprensión de los objetos matemáticos.

Esta “limitada comprensión” adquirió énfasis cuando los futuros profesores se enfrentaron a tareas tales como la Tarea 4 y, en general, de aquellos ítems que requerían la movilización del significado formal de la derivada para probar o justificar proposiciones. Del mismo modo, esta limitada comprensión se evidencia mediante la desconexión de los significados parciales de la derivada en los futuros profesores, desconexión de la que dan cuenta las dificultades que presentaron para resolver el ítem b) de la tarea seis cuando habían resuelto correctamente el ítem a), y viceversa (ver apartados 5.4.2.2.7, 5.4.2.3.6 y 6.3.2.6). Además esta falta de asociación entre los significados parciales y comprensión del objeto derivada, se refleja a lo largo del cuestionario cuando en la tarea 1 proporcionan “listados” de lo que significa para ellos la derivada, pero no activan dichos significados parciales (anotados en la respuesta de la tarea 1) cuando la tarea o ítem lo requiere.

En general, los resultados obtenidos a partir de los análisis, cuantitativos y cualitativos, de las soluciones que los profesores en formación dieron a las tareas incluidas en el cuestionario, señalan que exhiben ciertas dificultades para resolver tareas relacionadas con el conocimiento común, especializado y ampliado sobre la derivada. Por ejemplo, los resultados obtenidos con la tarea 4 desvelan que los estudiantes tienen un mejor desempeño cuando se usa la derivada en su acepción como pendiente de la recta tangente. Los problemas que tuvieron para demostrar, mediante la definición formal de la derivada la proposición “la derivada de una función constante siempre es cero”, sugiere que dichos estudiantes no dominan la práctica de la demostración cuando ésta conlleva el uso de la derivada como límite de tasas medias de variación.

Los resultados obtenidos en las tareas 6 y 7, por su parte, ponen de manifiesto las dificultades que tienen los futuros profesores cuando tienen que usar la derivada como razón instantánea de cambio en el caso de una situación de cierta complejidad. Las Tarea 1 y 5, por ejemplo, dan cuenta tanto de las insuficiencias en el conocimiento especializado y ampliado manifestado por los futuros profesores, como de la desconexión entre los distintos significados de la derivada. Los resultados obtenidos en las tarea 3, 7 y 8, por ejemplo, apoyan la necesidad de mejorar el conocimiento ampliado de los futuros profesores, que les faculte para resolver tareas con características similares. Así mismo, ítems como el e) de la tarea 2, c) de la tarea 3 y el b) de la tarea 7, sugieren que los futuros profesores no han adquirido o desarrollado suficientemente uno de los niveles del conocimientos especializado, aquel que les faculte para identificar conocimientos involucrados en soluciones plausibles.

El cuestionario sobre la faceta epistémica el conocimiento didáctico-matemático de la Derivada (*Cuestionario CDM-derivada*) ha permitido evidenciar aspectos relevantes del conocimiento didáctico-matemático de los futuros profesores que ponen en juego en la resolución de tareas sobre derivadas con diversas características. Se ha evidenciado cómo el conocimiento común del contenido no es suficiente para abordar tareas propias de la enseñanza, para las que se requiere no solo cierto nivel de conocimiento especializado (en sus dos niveles), sino también de conocimiento ampliado. Estas insuficiencias manifestadas en el conocimiento especializado y ampliado de los futuros profesores, podrían obstaculizar una apropiada gestión del conocimiento matemático de sus futuros alumnos sobre la derivada. Algunos investigadores han reportado que el conocimiento didáctico-matemático de los profesores tiene efecto en los logros de los estudiantes (Ball, 1990; Wilson, Shulman y Richert, 1987).

7.3.3. Sobre la pregunta de investigación *PI-4*

Una de las cuestiones que es esencial responder con una investigación, es cómo ésta contribuye al área específica de la Educación Matemática dentro de la que se lleva a cabo dicha investigación, en nuestro caso concreto la formación y conocimientos de los profesores en formación inicial. En esta dirección, la cuarta pregunta de investigación (*PI-4*) que nos planteamos es la siguiente:

> *¿Es posible contribuir teórica y metodológicamente, con nuestra investigación, al campo de formación de profesores mediante el planteamiento de una metodología didáctica que permita a los formadores de profesores potenciar, y a los futuros profesores adquirir, el conocimiento didáctico-matemático, referente a la faceta epistémica, necesario para la enseñanza idónea del objeto derivada?*

Para responder a esta pregunta nos propusimos el objetivo específico *OE-7* el cual, a su vez, lleva asociado un sub-objetivo *OE-7.1* para su logro. Estos objetivos son respectivamente:

> *A partir de la caracterización de la faceta epistémica del CDM para la derivada utilizando las herramientas teóricas y metodológicas que nos proporciona el EOS, relacionar el modelo CDM con otros constructos propuestos desde las investigaciones sobre el conocimiento del profesor para la enseñanza y aprendizaje de la derivada.*

> *Estudiar las diversas aportaciones realizadas por las investigaciones sobre el conocimiento del profesor y, concretamente, aquellas que utilizan como marco teórico el EOS y el MKT, y con base en los resultados obtenidos de los objetivos anteriores, hacer una propuesta de vinculación entre los herramientas teóricas y constructos del EOS con los del MKT.*

7.3.3.1. Sobre el logro del sub-objetivo OE-7.1 y el objetivo OE-7

Con base en la revisión de la literatura de investigación que tratan de propuestas de modelos para caracterizar los componentes del conocimiento que los profesores requieren para la enseñanza de las matemáticas, determinamos que dos de los modelos que contribuirían al logro del objetivo general de nuestra investigación son los modelos conocidos como "Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)" (ver apartado 1.2) y "Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM)" (ver apartado 2.2.7.1). El primero (MKT), tiene su interés en el avance respecto de la caracterización de los conocimientos que los profesores deberían tener para la enseñanza de tópicos específicos de matemáticas. Por esta razón el modelo MKT, en los últimos años ha sido tomado como marco de referencia para aquellas investigaciones que se proponen caracterizar y describir los conocimientos de los profesores. No obstante, tal y como lo puntualizamos en los apartados 1.2 y 2.2.7, en el MKT presenta una aparente desvinculación entre los componentes tanto del *conocimiento del contenido* (conocimiento común, especializado y en el horizonte matemático) y como del *conocimiento pedagógico del contenido* (conocimientos del contenido y los estudiantes, del contenido y la enseñanza y del currículo). Además, hasta la actualidad, dicho modelo no cuenta con criterios para evaluar y desarrollar cada uno de los componentes por lo que no hay un consenso, en las investigaciones que emplean este marco, sobre cómo medir el MKT y sus componentes.

Al respecto el modelo CDM trata de seguir avanzando en la caracterización de los conocimientos de los profesores de matemáticas mediante el planteamiento teórico de pautas y "algunos criterios" para medir el conocimiento didáctico-matemático del profesorado. Estos criterios o pautas se proponen tomando en consideración los aportes teóricos y metodológicos del marco teórico conocido como *enfoque ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática*. Al final de su estudio, Godino (2009) introduce con el modelo CDM, a partir de unas tablas (ver apartado 2.2.7.1), una reestructuración del MKT pero ésta queda algo implícita. Además no se ve claramente la relación e interacción entre cada una de las facetas o dimensiones incluidas en el modelo CDM. Aunado a lo anterior, se encuentra el hecho de que la sugerencia de pautas para la creación de ítems para evaluar y analizar cada una de las facetas del CDM son "genéricas" y éstas deberían atender a la relatividad de un tema matemático determinado.

A lo largo de esta investigación hemos podido ir un paso más allá respecto del modelo inicial del CDM. Primeramente, atendiendo esta relatividad de un tópico matemático en particular, en nuestro caso tomamos como ejemplo la noción derivada. Además, al centrarnos en la exploración y descripción de la faceta epistémica del CDM, los aspectos teóricos que teníamos como base aunados a los aspectos empíricos que arrojaron nuestros análisis, nos hicieron replantearnos el conocimiento especializado. Para Ball, Thames y Phelps (2008) el conocimiento especializado del contenido es "conocimiento y habilidades matemáticas únicas para la enseñanza" (p. 400). Este conocimiento incluye "cómo representar con precisión ideas matemáticas, proporcionar explicaciones matemáticas de reglas y procedimientos comunes y examinar y comprender los métodos poco usuales para la resolución de problemas" (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 377-378). Nosotros estamos de acuerdo con este enfoque (o definición) del conocimiento especializado del contenido. Sin embargo, la pregunta que surge es: qué criterios específicos nos permiten analizar y potenciar dicho conocimiento especializado.

Este replanteamiento del conocimiento especializado en nuestro modelo de CDM, radica en la consideración de dos niveles del conocimiento especializado que proponemos. Un primer nivel en el que los futuros profesores deben hacer uso de diversas representaciones, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, así como usar diversos significados de un objeto matemático, para resolver tareas, en nuestro caso, sobre derivadas. El segundo nivel se refiere a la competencia de los profesores para identificar conocimientos (elementos lingüísticos, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos) puestos en juego en la resolución de una tarea sobre derivadas. Cabe señalar que con estas características, es obvio que el conocimiento especializado implique conocimiento común y parte del conocimiento ampliado. Por ejemplo, la Tarea 2 del cuestionario diseñado, es evaluadora tanto del conocimiento común –ítem a), en tanto que el futuro profesor debe resolver este ítem sin necesidad de dar justificaciones o utilizar diversas representaciones, etc.– y el conocimiento ampliado –ítem d), que implica la generalización de la tarea inicial sobre la derivabilidad de la función valor absoluto en $x=0$, a partir de justificaciones válidas para la proposición "la gráfica de una función derivable no puede tener picos" mediante la definición de derivada como límite del cociente de incrementos–, como de ambos niveles del conocimiento especializado. Por un lado los ítems b) y c) refieren al primer nivel del conocimiento especializado, en tanto que los futuros profesores deben resolverlos haciendo uso de distintas representaciones (gráficas, simbólicas y verbales), y argumentaciones válidas que justifiquen sus procedimientos. Por otro lado, el ítem e) explora el segundo nivel del conocimiento especializado, en tanto que el profesor debe resolver los ítems anteriores e identificar el entramado de conocimientos que se ponen en juego en sus resoluciones.

Debemos señalar que, dadas sus características, estos dos niveles que se proponemos del conocimiento especializado están íntimamente vinculados, dentro del modelo CDM, con las otras facetas del conocimiento de los profesores. Por un lado, el nivel uno, *de aplicación*, se relaciona con las facetas interaccional y mediacional (Knowledge of content and teaching), puesto que un buen dominio de este nivel del conocimiento especializado sobre un tópico específico, como lo es el de derivada, proporciona al profesor los medios para un desempeño idóneo de su práctica de enseñanza futura. Por su parte el nivel dos, *de identificación*, esta vinculado con las facetas cognitiva y afectiva (knowledge of content and students), puesto que faculta al profesor para detectar de manera previa, durante y posterior a la implementación de una actividad de enseñanza, conocimientos matemáticos involucrados, significados de los objetos matemáticos, así como conflictos y errores que se pueden presentar a sus futuros alumnos, gestionando así, los aprendizajes de sus futuros alumnos de una manera más eficaz. Así, nuestro modelo del *Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM)* propone una reestructuración de los componentes del modelo Mathematical Knowledge for Teaching (MKT), y una vinculación e interacción entre las dimensiones del CDM, tal y como se indica en la Figura 7.1.

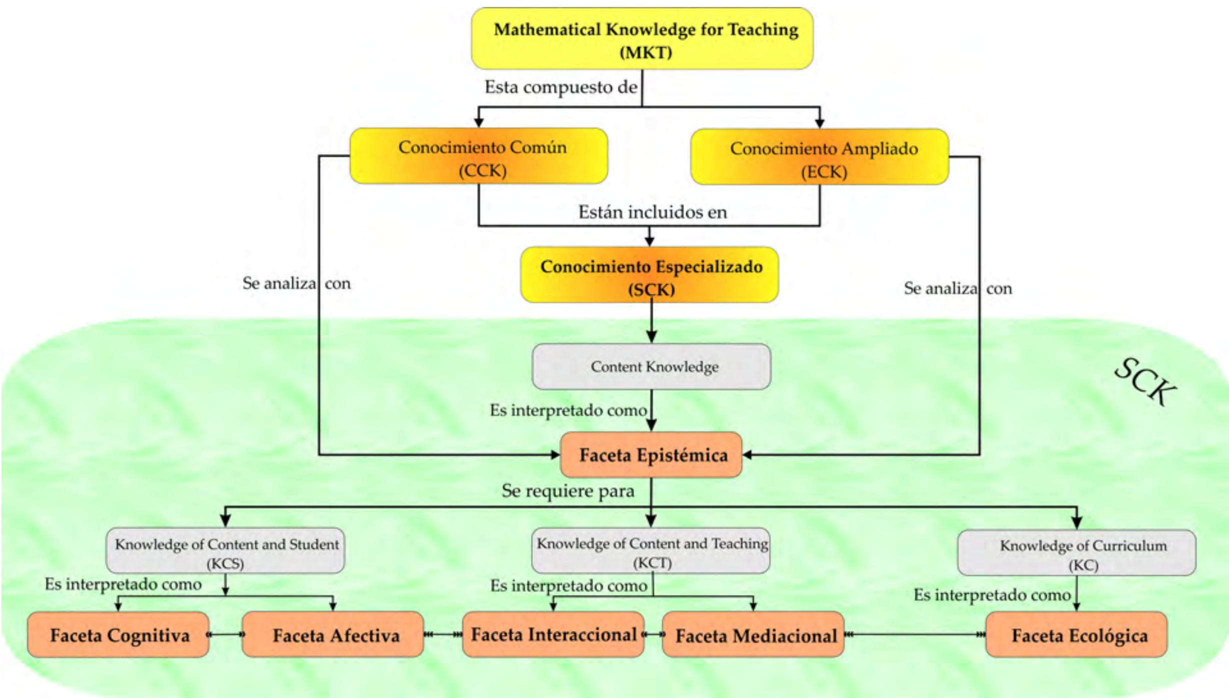


Figura 7.1. Relación entre las categorías del conocimiento del MKT y el CDM

Además, el EOS proporciona herramientas que permiten un desglose operativo de cada una de las facetas del CDM (Godino y Pino-Fan, 2013). En nuestro caso particular, la noción de configuración de objetos y procesos matemáticos permitió describir con detalle los conocimientos institucionales que se espera poner en juego en la solución experta de una tarea (configuración epistémica) y también los conocimientos personales que los futuros profesores efectivamente usan (configuración cognitiva). Así, el análisis de las prácticas matemáticas, objetos y procesos de significación, se muestra como una herramienta potente para la identificación y caracterización de los conocimientos especializado y ampliado, en tanto que proporciona pautas y criterios para analizar dichos tipos de conocimientos manifestados por los futuros profesores.

7.3.3.2. Respuesta a la pregunta PI-4

Respondiendo a la pregunta *PI-4*, podemos decir que nuestro trabajo de investigación sí contribuye teórica y metodológicamente al campo de investigaciones sobre formación de profesores, mediante el planteamiento de pautas y criterios específicos que permitieron la exploración y análisis de la faceta epistémica del CDM sobre la derivada de futuros profesores. Por una parte, nuestra variable *tipo de configuración cognitiva*, asociada a las respuestas de los futuros profesores, es de suma importancia si queremos "comprender" la naturaleza de los conocimientos didáctico-matemáticos que éstos efectivamente "poseen". De manera específica, en el trabajo que hemos desarrollado, la noción de configuración cognitiva nos ayuda a profundizar en aspectos relevantes del conocimiento de los futuros profesores sobre la derivada.

Una de las características fundamentales de los ítems sobre el conocimiento especializado, incluidos en el cuestionario, es la reflexión, de los futuros profesores, sobre los objetos matemáticos, sus significados y las relaciones complejas entre ellos, que se ponen en juego con motivo de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Las relaciones entre objetos y significados se concreta y se operativiza mediante la noción de configuración de objetos y procesos (Godino, et al., 2007). Dicha noción favorece no sólo la identificación sistemática de diferentes procedimientos de resolución, modalidades de expresión, conceptos y propiedades que se ponen en juego en su formulación, sino también la identificación de argumentaciones o justificaciones de los procedimientos y las propiedades. Además, el análisis del tipo de tarea propuesta y de las variables didácticas que intervienen en la misma, orientan la reflexión sobre posibles generalizaciones, o particularizaciones, y las conexiones con otros contenidos matemáticos (Godino, 2009).

De esta manera, en este trabajo hemos puesto de manifiesto que la herramienta "*configuración de objetos matemáticos primarios y procesos*" facilita el análisis y la categorización de algunas características de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de los profesores en formación. El objetivo de un plan de formación de profesores será que las configuraciones cognitivas (como las identificadas en el apartado 5.4.2.3), se adapten progresivamente a las configuraciones epistémicas identificadas a priori (como las del apartado 5.3.2), tal y como se ilustra en el esquema de la Figura 7.2.

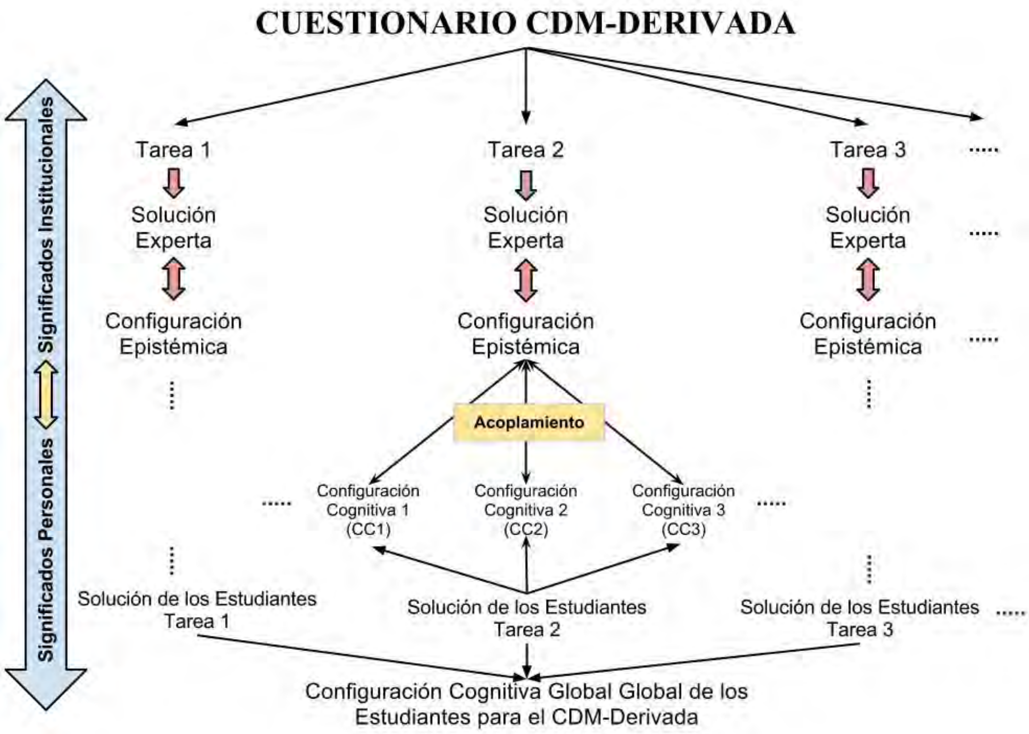


Figura 7.2. Estructura del análisis epistémico y cognitivo del cuestionario

El modelo ontológico y epistemológico propuesto por el EOS revela la complejidad inherente a los significados (conocimientos) institucionales y personales que se ponen en juego en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La evaluación en toda su integridad de los conocimientos didáctico-matemáticos que el profesor de matemáticas debe comprender y dominar para una enseñanza efectiva requerirá el uso de una variedad de instrumentos. En nuestra investigación hemos centrado la atención en aspectos claves de la faceta epistémica del CDM para un objeto matemático específico como es la derivada. Dicho modelo, CDM, descrito en este trabajo con sus herramientas teóricas y metodológicas, puede aplicarse a la enseñanza de diversos temas matemáticos. Sin embargo, cada tema matemático conlleva especificidades vinculadas a la faceta epistémica que deberán ser analizadas previamente para ser usadas como referencia institucional.

Finalmente, las insuficiencias en el conocimiento de los futuros profesores, detectadas con el cuestionario, justifican la pertinencia de diseñar acciones formativas específicas para desarrollar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de los futuros profesores. El desarrollo de estos ciclos formativos debe tener en cuenta la complejidad del significado global de la derivada (Pino-Fan, Godino y Font, 2011). Además debe tenerse en cuenta, en el diseño de dichas acciones formativas, no sólo el uso, *nivel de aplicación*, del conocimiento especializado (uso de diversos elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos), sino también el desarrollo de competencias para la identificación de objetos y procesos matemáticos, sus significados y vínculos entre ellos (*nivel identificación* del conocimiento especializado).

7.4. RESUMEN DE LAS APORTACIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

A continuación presentamos un resumen de las principales aportaciones de nuestra investigación. Debemos señalar que no profundizaremos en ellas dado que han sido ampliamente comentadas a lo largo del desarrollo de este trabajo de investigación.

- *Reconstrucción del significado holístico de la derivada.* Para poder explorar el conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada, primeramente debíamos tener una “visión amplia” sobre lo que es a derivada o sobre cuál o cuáles son sus significados. Así en el Capítulo 3, realizamos un estudio histórico-epistemológico, que nos permitió, a partir de la identificación de las configuraciones epistémicas activadas los sistemas de prácticas que dieron paso al surgimiento de la derivada, los significados parciales que constituyen el significado global u holístico. Esta reconstrucción es de interés puesto que los significados de la derivada pretendidos por una institución, o profesor como representante de la institución, deben ser representativos de este significado global. Además, las configuraciones epistémicas primarias (ver apartado 3.4) podrían orientar el diseño de acciones formativas que permitan a los futuros profesores, y a los profesores en acción, “construir ” o “lograr comprensión” sobre el objeto derivada hasta llegar a su formalización.
- *Criterios para el análisis de la idoneidad epistémica de los significados de la derivada pretendidos en los libros de texto y en los planes de estudio.* En el Capítulo 4, con la finalidad de identificar y caracterizar los significados de la derivada pretendidos en el currículo de matemáticas de bachillerato (pensando el currículo como la dupla <Libros de Texto , Planes de Estudio>), nos vimos en la necesidad de diseñar una metodología para el análisis de los libros de texto y planes de estudio

sobre derivada, para estudiar si los significados pretendidos en éstos son representativos del significado holístico. Estos criterios se operativizan, y ejemplifica su uso, mediante las tablas planteadas en el apartado 4.3.2.2, donde se utilizan para el análisis de libros de texto de bachillerato mexicano.

- *Diseño de una metodología para la exploración del conocimiento, referente a la faceta epistémica del CDM, de profesores en formación inicial.* En el Capítulo 5 desarrollamos toda una metodología, tomando en cuenta tanto consideraciones teóricas y metodológicas de nuestro marco de referencia, como los aportes que se han realizado desde el campo de investigaciones sobre didáctica del *Cálculo*, para el diseño de un cuestionario que permitió la exploración de los conocimientos sobre derivadas de los profesores. Esta metodología se completa en el Capítulo 6, después de la modificación del cuestionario, su segunda aplicación y las entrevistas realizadas. Este aporte puede resumirse con la Figura 7.2.
- *Criterios para analizar y describir la faceta epistémica del CDM de los futuros profesores.* Tanto la elaboración del cuestionario como las respuestas de los profesores en formación mostraron el complejo entramado de prácticas, objetos y procesos matemáticos puestos en juego en la resolución de las tareas relacionadas con la derivada. La toma de conciencia de esta complejidad es necesaria en la formación de profesores para que estos puedan desarrollar y evaluar la competencia matemática en sus futuros alumnos. La investigación también ha permitido explorar la pertinencia del vínculo entre las *configuraciones cognitivas* y el conocimiento didáctico-matemático requerido para la enseñanza, concretamente, el referente a la faceta epistémica (conocimiento común, especializado y ampliado). El uso e identificación de objetos matemáticos primarios (elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos), sus significados y los procesos involucrados en la solución de tareas matemáticas, son la base de los procesos de enseñanza y aprendizaje, y por tanto, actividades para promover la identificación de dichos procesos de significación son importantes en la formación de futuros profesores.
- *Aportes teóricos y metodológicos al modelo CDM.* Con nuestros análisis y resultados hemos aportado al modelo CDM planteado por Godino (2009). Estos aportes se resumen con el esquema de la Figura 7.1. El planteamiento de dos niveles del conocimiento especializado, mismo que da sentido a la reestructuración que se

plantea con la Figura 7.1, es uno de los aspectos relevantes a considerar en el diseño de acciones formativas que fomenten los conocimientos sobre derivadas de los futuros profesores.

A pesar de las contribuciones que resultan de nuestra investigación, somos conscientes que en lo que respecta a la exploración y desarrollo del conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza idónea de la derivada, de los futuros profesores, tan sólo hemos dado el primer paso. Aún quedan bastantes cuestiones abiertas que pueden dar pie a investigaciones que podrían ser la continuidad de nuestro estudio. A continuación presentamos algunas cuestiones abiertas que podrían estudiarse con la finalidad de seguir avanzando en el sentido de nuestro estudio y, por ende, en el desarrollo de metodologías didácticas que permitan la exploración y desarrollo del CDM de los futuros profesores sobre la derivada y, en general, de cualquier tema matemático, siempre y cuando se consideren las adecuaciones necesarias relativas al tópico matemático en cuestión.

- *Exploración de otros aspectos de la faceta epistémica del CDM.* En este trabajo hemos abordado aspectos clave de la faceta epistémica del CDM sobre la derivada. Sin embargo, tal y como lo planteamos con el modelo del CDM propuesto, se debería seguir avanzando en aspectos tales como: 1) (haciendo las adecuaciones necesarias sobre las tareas de nuestro cuestionario), ¿cómo abordan los futuros profesores la resolución de las tareas con el uso de la tecnología?; y 2) indagar acerca de los conflictos que los profesores son capaces de prever, respecto de cómo resolvería un determinado problema un futuro estudiante.
- *Indagar sobre la formación que reciben los futuros profesores.* Nuestro estudio refleja una serie de carencias en cuanto a los conocimientos que evidencian los futuros profesores. En varias de esas “carencias” nos preguntamos, ¿se deberán, quizá, al tipo de instrucción recibida? Para saber cómo actuar, sería conveniente estudiar este aspecto mediante la observación de clases impartidas a estos profesores en formación.
- *Diseño de procesos de instrucción para potenciar el conocimiento especializado del contenido.* Como se evidenció con nuestro estudio, los profesores carecen de un buen dominio de conocimiento especializado en los dos niveles que proponemos. Deberían diseñarse ciclos formativos que ayuden a desarrollar ambos niveles del conocimiento especializado (aplicación e identificación), mediante el desarrollo de competencias

que les permitan usar e identificar configuraciones de objetos y procesos de significación que se podrían activar a propósito de un determinado problema.

- *Procesos de instrucción para desarrollar y vincular los distintos significados parciales de la derivada.* El desarrollo de estos ciclos formativos debe tener en cuenta la complejidad del significado global de la derivada (Pino-Fan, Godino y Font, 2011) recogidos en el Capítulo 3.
- *Exploración y descripción de otras dimensiones del CDM.* En nuestro caso concreto nos hemos decidido por el estudio de aspectos relevantes de la faceta epistémica del CDM, toda vez que los conocimientos vinculados a dicha faceta se hacen esenciales para el dominio y desarrollo de otras facetas del CDM. Así, se hace necesario diseñar metodologías para el análisis de las otras facetas del CDM con la finalidad de plantear criterios que, a posteriori, ayuden a diseñar procesos de formación que permitan potenciar los conocimientos vinculados a dichas facetas.

7.5. NUESTRA CONTRIBUCIÓN A LA COMUNIDAD DE INVESTIGACIÓN

Para finalizar este trabajo de investigación, hemos querido recoger en este último apartado, las aportaciones que hemos realizado al campo de investigación de Educación Matemática, concretamente a la comunidad de investigación sobre formación de profesores y conocimiento del profesor, a partir de los desarrollos y resultados obtenidos a lo largo de nuestra investigación. A continuación se hace mención a cada uno de los aportes por orden cronológico descendente:

Pino-Fan, L., Godino, J.D., Font, V., y Castro, W. (2013). Prospective teacher's specialized content knowledge on derivative. *Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 8)*. Antalya, Turkey. (En prensa).

Godino, J.D., y **Pino-Fan, L.** (2013). The mathematical knowledge for teaching. A view from onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction. *Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 8)*. Antalya, Turkey. (En prensa).

Pino-Fan, L., Font, V., y Godino, J.D. (2013). Exploring the epistemic facet of the didactic-mathematical knowledge required to teach the derivative. *37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Kiel, Germany: PME. (En revisión).

Pino-Fan, L., Godino, J.D., Font, V., y Castro, W. (2013). Explorando el conocimiento sobre la derivada de profesores en formación inicial. *Enseñanza de las Ciencias.* (En revisión).

Pino-Fan, L., Godino, J.D., Font, V., y Castro, W. (2013). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge for teaching the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education.* (En revisión).

Pino-Fan, L., Godino, J.D., Castro, W., y Font, V. (2013). Un modelo de análisis del conocimiento didáctico-matemático: El caso de la formación inicial de profesores sobre la derivada. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (ALME)*. (En revisión).

Pino-Fan, L., Castro, W., y Godino, J.D. (2013). Idoneidad epistémica del significado curricular sobre la derivada en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* (En revisión).

Pino-Fan, L., Godino, J.D., Font, V., y Castro, W. (2013). Assessment of didactic-mathematical knowledge on derivative of prospective high school teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education.* (En revisión).

Pino-Fan, L., Godino, J.D., Castro, W., y Font, V. (2012). Conocimiento didáctico-matemático de profesores en formación: explorando el conocimiento especializado sobre la derivada. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 427 - 434). Jaén: SEIEM.

Pino-Fan, L., Godino, J.D., Font, V., y Castro, W. (2012). Key epistemic features of mathematical knowledge for teaching the derivative. En Tso, T.Y. (Ed). *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 297-304). Taipei, Taiwan: PME.

Pino-Fan, L., Godino, J.D. y Font, V. (2012). Clarificando criterios para evaluar el conocimiento especializado de futuros profesores sobre la derivada. En Marín Rodríguez, M., y Climent Rodríguez, N. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 181-192). Ciudad Real: SEIEM

Pino-Fan, L. (2011). *Conocimiento didáctico-matemático de los profesores sobre la derivada: clarificando los significados de la derivada desde la perspectiva de la enseñanza y el aprendizaje*. Alemania: Editorial Académica Española.

Pino-Fan, L., Godino, J.D., y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*. 13 (1), 141-178.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2010). *Conocimiento didáctico-matemático sobre la enseñanza y aprendizaje de la derivada*. Trabajo presentado en la XIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa, Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Monterrey, Nuevo León, México. 206-213.

REFERENCIAS

Acosta, E., y Delgado, C. (1994). Fréchet vs. Carathéodory. *The American Mathematical Monthly, 101(4)*, 332-338.

Andersen, K. (1984). Las técnicas del cálculo, 1630-1660. En I. Grattan-Guinness (Ed.), *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica* [From the calculus to set theory, 1630-1910. An introductory history] (M. Martínez Trad.). (pp. 22-68). Madrid, España: Alianza Editorial.

Apostol, T. M. (2006). *Análisis matemático* [Mathematical Analysis] (J. Pla Trad.). (Segunda ed.). Barcelona, España: Editorial Reverté.

Artigue, M. (1990). Epistémologie et Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(2/3), 243-285.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In M. Artigue, R. Douady & P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática.* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1*(1), 40-55.

Artigue, M., Batanero, C., y Kent, P. (2007). Mathematics thinking and learning at post-secondary level. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* (pp. 1011-1049). Charlotte, N.C: NCTM and IAP.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., y Schwingendorf, K. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *Journal of Mathematical Behavior, 16*(4), 399-431.

Aspinwall, L., Shaw, K. L., y Presmeg, N. C. (1997). Uncontrollable mental imagery: Graphical connections between a function and its derivative. *Educational Studies in Mathematics, 33*(3), 301-317.

Ayres, F., y Mendelson, E. (1991). *Cálculo diferencial e integral*. España: McGraw-Hill.

Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas de Colombia*. Tesis doctoral no publicada, Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, España.

Badillo, E., Azcárate, C., y Font, V. (2005). Conflictos semióticos relacionados con el uso de la notación incremental y diferencial en libros de física y de matemáticas del bachillerato. *Enseñanzas de las Ciencias.* Número extra. VII Congreso, 1-6.

Badillo, E., Azcárate, C., y Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos *f'(a)* y *f'(x)* en profesores de matemáticas [Analysing the extent to which mathematics teachers understand the objects *f'(a)* and *f'(x)*]. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(2), 191-206.

Ball, D.L (1990). The mathematical understanding that prospective teachers bring to teacher education. *Elementary School Journal,* 90(4), 449-466.

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education, 51*, 241-247.

Ball, D. L., y Bass, H. (2009). With an eye on the mathematical horizont: Knowing mathematics for teaching to learnes' mathematical futures. Paper presented at the *43Rd Jahrestagung Für Didaktik Der Mathematik Held in Oldenburg,* Germany.

Ball, D. L., Hill, H. C., y Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator, 29*, 14-22.

Ball, D. L., Lubienski, S. T., y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Berry, J. S., y Nyman, M. A. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *Journal of Mathematical Behavior, 22*, 481-497.

Bingolbali, E., y Monaghan, J. (2008). Concept image revisited. *Educational Studies in Mathematics,* 68 (1), 19-35.

Bingolbali, E., Monaghan, J., y Roper, T. (2007). Engineering students' conceptions of the derivative and some implications for their mathematical education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38*(6), 763-777

Bishop, A., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., y Leung, F. (Eds.). (2003). *Second International handbook of mathematics education.* Dordrecht: Kluwer A. P.

Boyer, C. B. (1999). *Historia de la matemática* [A history of mathematics] (M. Martínez Trad.). Madrid: Alianza Editorial.

Borgen, K. L., y Manu, S. S. (2002). What do sudents really understand? *Journal of Mathematical Behavior, 21*, 151-165.

Bos, H. J. M. (1984). Newton, Leibniz y la tradición leibniziana. En I. Grattan-Guinness (Ed.), *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica* [From the calculus to set theory, 1630-1910. An introductory history] (M. Martínez Trad.). (pp. 69-124). Madrid: Alianza Universidad.

Cantoral, R., y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon, 42*, 353-369.

Cantoral, R., y Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo*. Australia: Thompson.

Castro, W. (2011). *Evaluación y desarrollo de competencias de análisis didáctico de tareas sobre razonamiento algebraico elemental en futuros profesores.* Tesis doctoral no publicada, Universidad de Granada, España.

Çetin, N. (2009). The ability of students to comprehend the function-derivative relationship with regard to problems from their real life. *PRIMUS, 19*(3), 232-244.

Cohen, L., y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla.

Cohen, L., Manion, L., y Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. London and New York: Routledge.

Collette, J. (1993). *Historia de las matemáticas II* (3ª ed. en castellano). Madrid: Siglo XXI.

Cooney, T. J. (1985). A beginning teacher's view of problem solving. *Journal of Research in Mathematics Education*, 16, pp. 324-336.

Creswell, J. W. (2009). Research design: qualitative, quantitative and mixed methods approaches. Thousand Oaks, CA: Sage.

D'Amore, B. (2004). Cambios de convicciones en futuros profesores de matemáticas de la escuela secundaria superior. *Epsilon, 58,* 25-43.

D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(Especial), 177-195.

Delos Santos, A. (2006). *An investigation of students' understanding and representation of derivative in a graphic calculator-mediated teaching and learning environment*. Doctoral thesis: University of Auckland, New Zealand.

Doorman, M., y van Maanen, J. (2008). A historical perspective on teaching and learning calculus. *Australian Senior Mathematics Journal, 22*(2), 4-11.

Durán, A. (1996). *Historia con personajes de los conceptos del cálculo*. Madrid: Alianza Editorial.

English, L. D., Bartolini-Busi, M., Jones, G. A., Lesh, R., y Tirosh, D. (2002). *Handbook of International research in mathematics education*. London: Lawrence Erlbaum Ass.

Faerna, A. M. (2006). Significado y valor. La crítica pragmatista al emotivismo. *Quaderns de filosofía i ciència, 36,* 27-39.

Fennema, E., y Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. En A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 147-164). New York, NY, England: Macmillan.

Ferrini-Mundy, J., y Graham, K. (1994). Research in calculus learning: understanding limits, derivates and integrals. En E. Dubinsky, y J. Kaput (Eds.), *Research Issues in*

Undergraduate Mathematics Learning, MAA Notes 33, (pp. 31-45). Washington DC: Mathematical Association of America.

Flores, P. (1998). *Creencias y concepciones de los futuros profesores de matemáticas de enseñanza secundaria sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Investigación durante las prácticas de enseñanza* (Tesis doctoral, defendida 1995). Granada: Comares.

Font, V. (1999). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a la derivada* [Procedures for obtaining symbolic expressions from graphs: Applications in relation to the derivative]. Tesis doctoral no publicada, Universitat de Barcelona, España.

Font, V. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada. En A. Maz, B. Gómez & M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.* (pp. 109-128). Córdoba: SEIEM

Font, V. (2008). Rappresentazioni attivate nel calcolo della derivata. *Atti del Convegno di Didáctica della Matematica 2008,* Alta Scuola Pedagogica: Locarno, Suiza. 13-24.

Font, V. (2009). Formas de argumentación en el cálculo de la función derivada de la función $f(x)=x^2$ sin usar la definición por límites. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 18*, 15-28.

Font, V., y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa, 8*(1), 67-98.

Font, V., Godino, J. D., y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 97-124.

Franke, M. L., Kazemi, E., y Battey, D. (2007). Understanding teaching and classroom practice in mathematics. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* (pp. 225-256). Charlotte, N.C: NCTM and IAP.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics, 3* (3/4), pp. 413-435.

García, L., Azcárate, C., y Moreno, M. (2005). Conocimiento del contenido didáctico del profesor de matemáticas de universidad y su relación con otros contenidos disciplinares. *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Grupo de investigación: Didáctica del Análisis*. Córdoba: SEIEM.

García, L., Azcárate, C., y Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(1), 85-116.

Gavilán, J. (2005). *El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspectiva cognitiva.* Tesis doctoral no publicada, Universidad de Sevilla, España.

Gil, F., y Rico, L. (2003). Concepciones y creencias del profesorado de secundaria sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias, 21*(1), 27-47.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22*(2/3), pp. 237-284.

Godino, J.D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas [Categories for analysing the knowledge of mathematics teachers]. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20,* 13-31.

Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), pp. 325-355.

Godino, J. D., y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. En A. Sierpinska, y J. Kilpatrick (Ed.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127-135.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V., y Wilhelmi, M. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma, 27*(2), pp. 221-252.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M., y Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics, 77(2),* 247-265.

Godino, J. D., y Pino-Fan, L. (2013). The mathematical knowledge for teaching: a view from the onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction. *Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 8)*. Antalya, Turkey. Descargado el 14 de febrero de 2013 de http://www.cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/wg17_papers.html

González, P. (1992). *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII: Una investigación histórica sobre las técnicas y métodos que condujeron al descubrimiento del cálculo infinitesimal*. Madrid: Alianza Editorial.

González, P. (2008). *Fermat y los orígenes del cálculo diferencial*. Madrid: Nivola.

Grabiner, J. (1981). *The origins of cauchy's rigorous calculus*. Cambridge, Massachusetts and London, England: The MIT Press.

Grabiner, J. (1983a). The changing concept of change: The derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics Magazine, 56*(4), 195-206.

Grabiner, J. (1983b). Who gave you the epsilon? Cauchy and the origins of rigorous calculus. *The American Mathematical Monthly, 90*(3), 185-194.

Grattan-Guinness, I. (1984). La aparición del análisis matemático y los progresos en su fundamentación desde 1780 a 1800. En I. Grattan-Guinness (Ed.), *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630 - 1910. Una introducción histórica* [From the calculus to set theory, 1630 - 1910. An introductory history] (M. Martínez Trad.). (pp. 125-193). Madrid: Alianza Editorial.

Grossman, P. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York and London: Teachers College Press.

Habre, S., y Abboud, M. (2006). Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *Journal of Mathematical Behavior,* 25, 52-72.

Hähkiöniemi, M. (2006). The role of representations in learning the derivative. Tesis doctoral no publicada, University of Jyväskylä, Finland.

Hähkiöniemi, M. (2004). Perceptual and symbolic representations as a starting point of the acquisition of the derivative. En M. J. Hoines, y A. B. Fuglestad (Eds.), *Procceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 73-80).* Bergen, Norway: PME.

Hill, H. C., Ball, D. L., y Schlling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39,* 372-400.

Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M., y Ball, D. L. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge: What knowledge matters. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* (pp. 111-156). Charlotte, N.C: NCTM and IAP.

Hill, H. C., Schilling, S., y Ball, D. L. (2004). Developing measueres of teachers' mathematics knowledge for teaching. *The Elementary School Journal, 105*(1), 11-30.

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. *Décimo Primer Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior,* Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Morelia, México. Descargado el 8 de mayo de 2010 de http://www.matedu.cinvestav.mx/librosfernandohitt/Doc-6.doc.

Ibarra, E., y Gómez, J. (2005). Estudio histórico - epistémico de la derivada. *Primer Congreso Internacional Sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas,* Universidad de Jaén. 357-385.

Inglada, N., y Font, V. (2003). Significados institucionales y personales de la derivada. Conflictos semióticos relacionados con la notación incremental. *XIX Jornadas del SI-IDM.* Córdoba, 1-18.

Johnson, R.B., y Onwuegbuzie, A. (2004). Mixed methods research: a research paradigm whose time has come. *Educational Research, 33*(7), 14-26.

Johnson, R.B., Onwuegbuzie, A., y Turner, L. (2007). Toward a definition of mixed methods research. *Journal of Mixed Methods Research, 1*(2), 112-133.

Konic, P. (2011). *Evaluación de conocimientos de futuros profesores para la enseñanza de los números decimales.* Tesis doctoral no publicada, Universidad de Granada, España.

Kleiner, I. (2001). History of the infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 137-174.

Kuhn, S. (1991). The derivative a la Carathéodory. *The American Mathematical Monthly, 98(1)*, 40-44.

Llinares, S. (1996). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función. En J. Ponte (Coord.), *Desenvolvimiento profesional dos profesores de Matemática. ¿Qué formaçao?* (pp. 47-82). Lisboa: Sociedad Portuguesa de Ciencias de Educação.

Llinares, S. (1998). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación. *UNO, 17*, 51-63.

Llinares, S. (2000). Comprendiendo la práctica del profesor de matemáticas. En J. P. Da Ponte y L. Serrazina (Eds.) *Educação Matemática em Portugal, Espanha e Italia.* (pp. 109-132). Lisboa, Portugal: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciencias de Educação.

Llinares, S., y Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 429-459). Rotterdam: Sense Publishers.

Love, E., y Pimm, D. (1996). 'This is so': A text on texts. En A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, y C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 371–409). Dordrecht: Kluwer.

Malaspina, U., y Font, V. (2010). The role of intuition in the solving of optimization problems. *Educational Studies in Mathematics,75*(1), 107-130.

Martínez, M. (2003). *Concepciones sobre la enseñanza de la resta: un estudio en el ámbito de la formación permanente del profesorado.* Tesis doctoral no publicada, Universitat Autònoma de Barcelona, España.

Martínez de G., Mayra et al. (2009). *Cálculo diferencial e integral*. México: Santillana

Montiel, G. (2005a). Interacciones en un escenario en línea: el papel de la socioepistemología en la resignificación del concepto de derivada. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8*(2), 219-325.

Montiel, G. (2005b). Una categorización del contrato didáctico en un escenario virtual. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. (pp. 667-672). México: Clame.

Moreno, M. (2001). *El profesor universitario de matemáticas. Estudio de las concepciones y creencias acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. Estudio de caso.* Tesis doctoral no publicada, Universitat Autònoma de Barcelona, España.

Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: Evolución, estado actual y retos futuros. En A. Maz, B. Gómez & M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.* (pp. 81-96). Córdoba: SEIEM.

Moreno, M., y Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias, 24*(1), 85-98.

Nathan, M. J., y Koedinger, K. R. (2000). An investigation of teacher beliefs of students' algebra development. *Cognition and Instruction, 18*(2), pp. 209-237.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics, 14*, pp. 235-250.

Patton, M. Q. (1980). *Qualitative Evaluation Methods.* Beverly Hills, CA: Sage.

Philipp, R. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. En F.K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257-315). Charlotte, NC: Information Age Pub.

Pino-Fan, L. (2010). *Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada*. Tesis de Maestría, Universidad de Granada, España.

Pino-Fan, L. (2011). *Conocimiento didáctico-matemático de los profesores sobre la derivada: clarificando los significados de la derivada desde la perspectiva de la enseñanza y el aprendizaje*. Alemania: Editorial Académica Española.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2010). *Conocimiento didáctico-matemático sobre la enseñanza y aprendizaje de la derivada*. Trabajo presentado en la XIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa, Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Monterrey, Nuevo León, México. 206-213.

Pino-Fan, L., Godino, J.D., y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada [The epistemic facet of mathematical and didactic knowledge about the derivative]. *Educação Matemática Pesquisa, 13*(1), 141-178.

Pino-Fan, L., Godino, J.D., Font, V., y Castro, W.F. (2012). Key epistemic features of mathematical knowledge for teaching the derivative. En Tso, T.Y. (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 297-304). Taipei, Taiwan: PME.

Pinzón, S., y Paredes, M. (1999). La derivada de Carathéodory en $\mathbb{R}^2$. *Revista INTEGRACIÓN, 17(2),* 65-98.

Ponte, J. P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. En J. P. Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (Vol. 1, pp. 195-210). Lisboa, Portugal: PME.

Ponte, J.P., y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. En A. Gutiérrez, y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 461-494). Rotterdam: Sense Publishers.

Purcell, E., Varberg, D., y Rigdon, S. (2007). *Cálculo diferencial e integral*. México: Pearson Educación.

Quijano, M. y Navarrete, C. (2003). *Cálculo diferencial*. México: UADY.

Radford, L. (2000). *Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis.* Springer Netherlands.

Ramos, A. B. (2006). *Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambios institucionales. El caso de la contextualización de las funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales*. Tesis doctoral no publicada, Universitat de Barcelona, España.

Rowland, T., Huckstep, P., y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), 255-281.

Rowland, T., y Ruthven, K. (Eds.) (2011). *Mathematical Knowledge in Teaching, Mathematics Education Library 50*. London: Springer.

Rubio, N. (2012). Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos. Tesis doctoral no publicada, Universitat de Barcelona, España.

Salazar, L., Bahena, H., y Vega, F. (2007). *Cálculo Diferencial*. México: Grupo Editorial Patria.

Sánchez, G., García, M., y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(2), 267-296.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., y Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias,* 24, 85 – 98.

Santi, G. (2011). Objectification and semiotic function. *Educational Studies in Mathematics, 77*(2-3), 285-311.

Schoenfeld, A., y Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of profiency in teaching mathematics. En D. Tirosh, & T. L. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 321-354) Rotterdam: Sense Publishers.

Schön, D. (1983). *The reflective practitioner.* New York: Basic Books.

Schön, D. (1987). *Educating the reflective practitioner. Toward a new desing for teaching and learning in the professions.* San Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Secretaría de Educación Pública (SEP), Subsecretaría de Educación Media Superior, Dirección General de Bachillerato (2010). *Programa de Estudio de Cálculo Diferencial*. Recuperado el 7 de junio de 2011, de http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion_academica/programasdeestudio.html

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics, 10*(3), 24-36.

Silverman, J., y Thompson, P. W. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Teacher Education, 11*, 499-511.

Sofronas, K., DeFranco, T., Vinsonhaler, C., Gorgievski, N., Schroeder, L., y Hamelin, C. (2011). What does it mean for a student to understand the first-year calculus? Perspectives of 24 experts. *The Journal of Mathematical Behavior, 30*, 131-148.

Sowder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 157-223). Charlotte, N.C: NCTM and IAP.

Sullivan, P. & Wood, Terry (Eds.) (2008). The international handbook of mathematics teacher education. Volume 1: *Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development*. Rotterdam: Sense Publishers.

Tall, D. (2009). Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus. *Mathematics Education, 41*, pp. 481-492.

Thomas, G. (2006). *Cálculo. Una variable*. México: Pearson Educación.

Thompson, A. (1992). Teacher's belief and conceptions: a synthesis of the research. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 127-146). New York: Macmillan.

Tsamir, P., Rasslan, S., y Dreyfus, T. (2006). Prospective teachers' reactions to Right-or-Wrong tasks: The case of derivatives of absolute value functions. *Journal of Mathematical Behavior*, 25, 240-251.

Turner, F., y Rowland, T. (2011). The knowledge quartet as an organising framework for developing and deepening teachers' mathematics knowledge. En T. Rowland, y K. Ruthven (Eds.), *Mathematical knowledge in teaching* (pp. 195-212). London and New York: Springer.

Universidad Autónoma de Yucatán (UADY), Dirección General de Desarrollo Académico Subdirección de Bachillerato (s.f.). *Programa de Curso y Unidad de Cálculo I.* Recuperado el 7 de junio de 2011, de http://www.prepa1.uady.mx/planedu.php

Vera, F. (1970). *Científicos griegos, 1, Pitágoras, Hipócrates, Demócrito, platón, Aristóteles, Teofrasto, Eudemo de rodas, Euclides, aristarco*. Madrid: Aguilar.

Vera, F. (1970). *Científicos griegos, 2, Arquímedes, Apolonio de Pergamo, Eratóstenes, Nicandro*. Madrid: Aguilar.

Viholainen, A. (2008). Finnish mathematics teacher student's informal and formal arguing skills in the case of derivative. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 13(2), 71-92.

Wilson, S.M., Shulman, L.S., y Richter, A (1987). 150 ways of knowing: Representations of knowledge in teaching. En L. Calderhead (Ed.), *Exploring teachers' thinking* (pp.104-1249). Sussex, England: Holt, Rinehart & Wilson.

Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. En E. Dubinsky, A. Schoenfeld y J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education. IV* (pp. 103-127). Washington, DC: American Mathematical Society & Mathematical Association of America.

Zandieh, M., y Knapp, J. (2006). Exploring the role of metonymy in mathematical understanding and reasoning: The concept of derivative as an example. *Journal of Mathematical Behavior, 25*, 1-17.