EVALUACIÓN Y DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO ELEMENTAL EN MAESTROS EN FORMACIÓN

Lilia P. Aké Tec

Tesis doctoral

Dirigida por: Juan D. Godino

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

2013

RESUMEN

Diversas investigaciones y propuestas curriculares recomiendan la introducción de contenidos algebraicos desde los primeros niveles educativos, con el fin de enriquecer la actividad matemática escolar y facilitar la transición con la matemática de secundaria. Ello plantea diversos problemas de investigación entre los que destacan la clarificación de la naturaleza del álgebra escolar y la formación de los profesores para que asuman una nueva manera de entender el álgebra y capacitarles para su enseñanza. En esta tesis doctoral se abordan ambos problemas, usando el marco teórico del "Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática".

La tipología de objetos que intervienen en las prácticas matemáticas, y los procesos ligados a dichos objetos que propone el mencionado marco teórico, ayudan a distinguir distintos niveles de algebrización de la actividad matemática y a elaborar una manera de concebir el álgebra escolar. La conceptualización del álgebra escolar que proponemos en esta tesis doctoral articula y desarrolla las propuestas de otros autores y se aplica a la formación de profesores de educación primaria.

En una primera fase realizamos la construcción de un cuestionario para evaluar aspectos parciales de los conocimientos sobre el razonamiento algebraico de una muestra de 40 profesores de primaria en formación. Este estudio de evaluación ha revelado los significados personales de los futuros maestros y sus necesidades formativas para hacer frente a la inclusión de formas de razonamiento algebraico en los primeros niveles educativos. Las dificultades encontradas sugieren que los maestros no están familiarizados con los procesos de desarrollo de ideas algebraicas, teniendo en cuenta las propiedades y relaciones que subyacen en las actividades matemáticas elementales. En una segunda fase procedemos al diseño, implementación y evaluación de un proceso formativo sobre razonamiento algebraico en un curso sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para estudiantes de magisterio. A lo largo de este proceso formativo se desarrolla y evalúan las competencias de los futuros maestros, tanto en la resolución de tareas de índole algebraica, como en la identificación de objetos algebraicos y asignación de niveles de algebrización a actividades matemáticas escolares.

ASSESSING AND DEVELOPING ELEMENTARY ALGEBRAIC REASONING IN PROSPECTIVE PRIMARY SCHOOL TEACHERS

ABSTRACT

Different investigations and curricular approaches propose the introduction of algebraic thinking since the early levels of education, with the aim of enhancing the school mathematical activity and facilitating the introduction of algebra in high school mathematics. This goal poses some problems to mathematics education research, in particular, clarifying the nature of school algebra, and rethinking the training of teachers, so that they assume a new understanding of algebra and qualify them for its effective implementation at school. These problems are addressed in this doctoral dissertation using the “Onto-semiotic approach of mathematical knowledge and instruction” as theoretical framework. The types of objects and related processes involved in mathematical practices that are introduced in this theoretical framework help to distinguish different algebraization levels of mathematical activity and to develop a new way of thinking about elementary school algebra. The conceptualization of school algebra proposed in this dissertation articulates and develops the proposals of other authors and is applied to the training of prospective primary school teachers.

In a first stage we build a questionnaire to assess aspects of the algebraic reasoning understanding in a sample of 40 prospective primary school teachers. This evaluation study is used to describe the personal meanings of student teachers and their training needs, in order to address the inclusion of algebraic thinking in the early levels of education. The difficulties found suggest that student teachers are not familiar with a process of developing algebraic ideas, that takes into account the properties and relations that underlie elementary mathematics activities. In a second stage we design, implement and evaluate an elementary algebraic reasoning training process in a teaching and learning mathematics course for student teachers. Throughout this educational process, the knowledge and skills of participants in solving algebraic tasks, identifying algebraic objects and recognizing algebraization levels of school mathematics activities are developed and evaluated.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN GENERAL

En esta tesis doctoral abordamos problemas característicos de la investigación en didáctica de la matemática, entendida como disciplina tecno-científica (Godino, 2010), sobre un contenido matemático básico e instrumental como es el álgebra escolar, aplicando la perspectiva holística que proporciona el Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2012). La investigación se ha realizado en el seno de la línea de Teoría de la Educación Matemática de la que la autora de la tesis forma parte desde 2009, con la participación de otros miembros de dicha línea y continuando las nuevas cuestiones de investigación abiertas por la tesis de Castro (2011).

Diversas perspectivas teóricas e investigaciones apoyan la introducción de contenidos algebraicos en el currículo de la escuela elemental. Sin embargo, esta misma diversidad, tal y como lo señalan Kaput y Blanton (2000), es una de las razones por la que tales innovaciones hayan tenido dificultades para su implantación. Se reconoce que no se tiene una posición suficientemente explícita sobre la naturaleza del razonamiento algebraico en la escuela elemental, ni una concepción de lo que se podría considerar como álgebra en los primeros grados. Esta situación nos ha llevado a plantearnos como primera pregunta de investigación,

> *¿Cuáles son los rasgos característicos del razonamiento algebraico elemental que permiten discriminar diversos niveles de algebrización, en particular distinguir las prácticas de índole algebraica de las que no lo son?*

En consecuencia, y como es propio de las aproximaciones epistemológicas en didáctica de las matemáticas, y en particular en el EOS, el primer problema que abordamos es la clarificación del significado del álgebra, reconociendo de entrada una pluralidad de significados del objeto según los marcos institucionales y contextos de uso. En nuestro caso fijamos la atención en el uso del álgebra en educación primaria, lo que en la literatura anglosajona se describe como "álgebra temprana" (early algebra), y que nosotros designamos como Razonamiento Algebraico Elemental (RAE). Tras el estudio sistemático de la bibliografía correspondiente hemos considerado necesario tomar una posición sobre la naturaleza del RAE, usando las herramientas teóricas que proporciona el EOS, indagación que se ha concretado en dos artículos, *Naturaleza del razonamiento algebraico elemental* (Godino, Castro, Aké y Wilhelmi, 2012) y *Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros* (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, en prensa).

Esta faceta teórica de nuestra investigación nos ha permitido proponer una manera de conceptualizar el razonamiento algebraico, basada en la distinción de niveles de algebrización de la matemática escolar, que puede orientar la formación de maestros para el desarrollo del sentido algebraico desde los primeros niveles educativos. Dicho sentido algebraico es entendido como la capacidad de un sujeto para,

- Usar de manera sistemática símbolos para expresar cantidades indeterminadas y generalizaciones, especialmente mediante notaciones simbólico-literales.
- Reconocer y aplicar propiedades estructurales de los sistemas matemáticos, particularmente propiedades de las operaciones y relaciones.
- Reconocer patrones, regularidades y funciones.
- Modelizar situaciones matemáticas o del mundo real con expresiones simbólico-literales y operar de manera sintáctica (siguiendo reglas) con ellas, para obtener una respuesta interpretable en la situación dada.

Una vez clarificada la naturaleza del RAE, su introducción efectiva en la escuela primaria, como proponen diversos autores (Blanton y Kaput, 2011; Kieran 2007) y propuestas curriculares (NCTM, 2000), requiere como condición crítica la formación de los profesores. Con relación a esta problemática nos hemos planteado otra cuestión de carácter evaluativo que formulamos en los siguientes términos:

> *¿Qué conocimientos, incluyendo comprensión y competencia, tienen los maestros en formación inicial sobre el RAE?*

Esta cuestión se interpreta en el marco del EOS como un estudio de evaluación de significados personales de estudiantes de magisterio sobre un objeto matemático, en nuestro caso el álgebra elemental.

Una vez detectadas las necesidades formativas de los futuros maestros sobre el RAE abordamos el problema de elaborar diseños instruccionales que promuevan la evolución de los significados personales de los estudiantes en la dirección previamente identificada, esto es, nos preguntamos,

> *¿Qué tipo de acciones formativas sería necesario (y posible) implementar en un programa de formación inicial de maestros de primaria para desarrollar en ellos el sentido algebraico?*

Sobre este problema hemos planteado el diseño, implementación y evaluación de una experiencia formativa de un grupo de futuros profesores de educación primaria que contempla, en el marco de un curso sobre "enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de educación primaria", la evolución de los significados personales de los estudiantes sobre el RAE.

La memoria de tesis doctoral la hemos organizado en 6 capítulos cuyo contenido describimos brevemente a continuación.

En el capítulo 1 describimos la problemática sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar, con énfasis en los niveles de educación primaria y en la formación de profesores, teniendo en cuenta los antecedentes de investigaciones realizadas y propuestas curriculares. Se analizan los enfoques teóricos sobre la naturaleza del álgebra elemental y se identifican cuestiones abiertas.

En el capítulo 2 formulamos las tres preguntas específicas de investigación que se abordan en la tesis: (1) Profundización en la manera de conceptualizar el Razonamiento Algebraico Elemental (RAE); (2) Caracterización de significados personales de estudiantes de magisterio sobre RAE; (3) Evaluación de un diseño y experimentación de una propuesta formativa de un grupo de futuros maestros sobre RAE. Estos estudios se realizan aplicando el marco teórico del Enfoque Ontosemiótico (EOS) por lo que en este capítulo también se describen las herramientas teóricas de dicho marco utilizadas en la tesis.

La tipología de objetos que intervienen en las prácticas matemáticas, y los procesos ligados a los mismos que propone el EOS, ayuda a distinguir distintos niveles de algebrización de la actividad matemática y a elaborar una manera de concebir la naturaleza del álgebra escolar. Esta conceptualización del algebra articula las propuestas de otros autores y puede ser útil para la formación de profesores, al permitir discriminar las prácticas algebraicas de las que no lo son. Esta es una aportación teórica de la tesis que se describe en el capítulo 3 y ha sido fruto del trabajo conjunto realizado en el seno de la línea de Teoría de la Educación Matemática de la Universidad de Granada (Godino, Castro, Aké y Wilhelmi, 2012; Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, en prensa).

En el capítulo 4 describimos los resultados de un estudio exploratorio centrado en evaluación de conocimientos sobre razonamiento algebraico elemental en futuros maestros. Se procedió a la elaboración de un cuestionario que incluye 8 tareas cuya resolución pone en juego distintos objetos y procesos algebraicos, el cual fue aplicado a una muestra de 40 estudiantes de la licenciatura en educación básica en México.

Las carencias de los profesores de primaria en formación sobre el reconocimiento de los objetos y procesos algebraicos puestas de manifiesto en el estudio desarrollado en el capítulo 4 nos condujo a diseñar, implementar y evaluar una experiencia formativa orientada al desarrollo del RAE en una muestra de estudiantes de magisterio de la Universidad de Granada. Este estudio se describe en el capítulo 5.

El capítulo 6 incluye una síntesis de la investigación resaltando las conclusiones sobre los objetivos e hipótesis formuladas, las aportaciones y limitaciones del estudio e identificación de algunas cuestiones de investigación abiertas.

CAPÍTULO 1

ÁREA PROBLEMÁTICA. ANTECEDENTES

1. INTRODUCCIÓN

La mayoría de las personas perciben por qué necesitan saber aritmética: los números naturales, fracciones, decimales y porcentajes están por todas partes. Se necesitan para hacer cualquier trabajo que involucre dinero, tratar con precisión las mediciones, comprender la probabilidad, seguir los resultados de las encuestas electorales, deportes o loterías, y una amplia gama de otras cosas. Sin embargo, el álgebra parece diferente, es probable que no veamos las fórmulas algebraicas en alguna parte diferente al de la escuela, lo que no hace visible su necesidad (Usiskin, 1995). No obstante, la NCTM (2000) señala que:

> Actualmente el trabajo en muchas áreas se apoya en los métodos e ideas del álgebra. Por ejemplo, las redes de distribución y comunicación, las leyes de la física, los modelos de población y los resultados estadísticos pueden expresarse en lenguaje simbólico. La competencia algebraica es importante en la vida adulta. Todos los estudiantes debería aprender algebra (p. 39).

Además, sin un conocimiento del álgebra se pierde el control sobre determinadas partes de la vida, se tienen más probabilidades de tomar decisiones imprudentes y no se es capaz de entender muchas ideas discutidas en química, física, ciencias de la tierra, economía, negocios, etc. (Usiskin, 1995).

Aunque la necesidad de conocer el álgebra no es tan obvia, si lo es la problemática que gira entorno a su enseñanza y aprendizaje, pues son muchos los conceptos erróneos que los estudiantes tienen, no sólo con la comprensión del concepto de variable, sino también con la solución de ecuaciones algebraicas y problemas en la traducción de las palabras a símbolos algebraicos (Kieran, 1992). Esto es especialmente preocupante, dado que el álgebra sigue desempeñando un papel fundamental en el currículo de la escuela, donde se da énfasis a la aplicación de procedimientos algebraicos para resolver problemas, la representación de las relaciones entre las cantidades, y al estudio de estructuras algebraicas (Warren, 2003). Este "problema del algebra" (Kaput y Blanton, 2001) radica en que es vista como una herramienta para la manipulación de símbolos y para resolver problemas (Kieran, 2007) y desprovista de significado, motivo por el cual su enseñanza ha sido fuertemente criticada por el poco éxito que obtienen los aprendices en el estudio de esta materia (Molina, 2009).

Debido a su importancia y al difícil acceso conceptual que tienen la mayoría de los estudiantes sobre el álgebra, es por lo que diversas investigaciones en educación matemática se han centrado en la introducción de aspectos de razonamiento algebraico en la educación primaria (Davis, 1985; Vergnaud, 1988; Kaput, 2000). Esta introducción implica cambiar la manera de concebir el álgebra como tal, para poder incluirla en la escuela elemental con la finalidad de estimular el desarrollo del razonamiento algebraico en los niños.

A lo largo de este capítulo describiremos la problemática que gira entorno a la enseñanza y aprendizaje del álgebra. También se recogen: (1) las diferentes perspectivas desarrolladas sobre la introducción del álgebra en la escuela primaria, como una vía para facilitar su aprendizaje en los niveles posteriores; (2) las propuestas de los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000); (3) los diversos enfoques del álgebra; (4) y las implicaciones de la introducción del álgebra para la formación de profesores. Finalmente se indican algunas cuestiones abiertas sobre la temática.

2. PROBLEMÁTICA DEL ÁLGEBRA ESCOLAR

Los estudios históricos sobre la evolución de la enseñanza de álgebra en el siglo XXI muestran que el álgebra estudiada en la escuela secundaria no ha cambiado mucho con los años (Ameron, 2002). El desarrollo histórico sugiere que actualmente el álgebra se concibe como la rama de las matemáticas que trata sobre la simbolización de relaciones numéricas generales, de estructuras matemáticas así como de las operaciones sobre esas estructuras (Kieran, 1992). De hecho desde los días del al- Khwarizmi, y a través de la época de Vieta y Euler, el álgebra ha consistido primordialmente en procedimientos y notaciones. Este punto de vista del álgebra, como una herramienta para la manipulación de símbolos y para resolver problemas, se ve reflejado en los programas de álgebra escolares (Kieran, 2007).

La enseñanza tradicional del álgebra es ante todo muy rígida y abstracta y por lo general se presenta a los estudiantes como un tópico predeterminado con reglas sintácticas estrictas, presentadas a los estudiantes en un lenguaje simbólico con el cual ellos no logran identificarse. Los estudiantes deben dominar las habilidades de manipulación simbólica, antes de aprender acerca de la finalidad y el uso del álgebra. En otras palabras, el contexto matemático es tomado como el punto de partida, mientras que las aplicaciones de álgebra permanecen en un segundo lugar (Ameron, 2002). Es por esta razón que su enseñanza, tal como se lleva a cabo en la realidad actualmente, es ampliamente criticada (Kaput, 1998; Butto y Rojano, 2004). La crítica se sustenta en la falta de conexión que existe entre el álgebra y las demás áreas de las matemáticas, y la total ausencia de significado en el aprendizaje algebraico, que desemboca en el hecho de que un gran número de estudiantes fracasen en esta área (Kieran, 1992).

Diversas investigaciones (Wagner y Kieran, 1989, Bednarz, Kieran y Lee, 1996; Filloy, Puig y Rojano, 2008) han reportado las dificultades de los niños en el tránsito desde la aritmética hasta el álgebra en la escuela secundaria, dificultades que se centran en la necesidad de manipular letras y dotar a esta actividad de significado, lo que supone un cambio notable en las convenciones usadas en la aritmética (Kieran, 1992). Los estudiantes, en la mayoría de los casos, interpretan la expresión $x + 3$ sólo como el procedimiento de añadir 3 a x, mientras que en álgebra esta expresión, además de representar el procedimiento de añadir 3 a x también es un objeto visto como $x + 3$ en su "totalidad". Tienen dificultades con la resolución de problemas algebraicos, dada su experiencia con los problemas aritméticos, los cuales pueden ser resueltos directamente, si es necesario con respuestas intermedias, mientras que en los problemas algebraicos, por otro lado, necesitan ser traducidos y escritos en representaciones formales primero, para poder ser resueltos (Ameron, 2002). Dificultades como éstas quedan recogidas en diversas investigaciones (Kieran, 1992, 2004; Sfard, 1987) que manifiestan que los estudiantes tienen: a) una limitada interpretación del signo igual, b) errores sobre el significado de las letras, c) rechazo a aceptar una expresión como $3a + 7$ como respuesta a un problema, d) dificultad al resolver ecuaciones con variables en ambos lados del signo igual, y e) el hecho de que para cubrir su falta de comprensión, los estudiantes tienden a recurrir a la memorización de reglas y procedimientos y, eventualmente, llegan a creer que esta actividad es la esencia del álgebra.

Debido a la gran insatisfacción con la actual y tradicional enseñanza del álgebra, el reconocimiento de la importancia de los hábitos mentales que están involucrados en actividades algebraicas, y la preocupación por hacer del álgebra accesible a todos los estudiantes, han conducido a buscar una forma más efectiva de enseñarla (Molina, 2007).

3. INTRODUCCIÓN DEL "ÁLGBERA" EN LA ESCUELA ELEMENTAL

En razón a la dificultad del álgebra, y a que las competencias algebraicas de carácter simbólico son el resultado de un proceso de maduración más general que se desarrolla a lo largo del tiempo (Santrock, 2001), se justifica que su enseñanza se inicie desde la escuela primaria (Carpenter, Franke y Levi, 2003).

Como respuesta a este hecho en las últimas dos décadas se han realizado, a nivel internacional, numerosas investigaciones que analizan y promueven la integración del álgebra en el currículo de la educación primaria, con la finalidad de que los estudiantes profundicen en el entendimiento de las matemáticas elementales para fomentar en ellos habilidades de generalización, expresión y justificación sistemática de generalizaciones matemáticas (Kaput y Blanton, 2001).

Esta propuesta curricular, que plantea la introducción de modos de razonamiento algebraicos en la matemática escolar desde los primeros cursos de la escuela elemental, es lo que diversos investigadores denominan como **"**Early Algebra**"**, (Carpenter y Levi, 2000) y lo que Kaput (2000) denomina como "algebrafying curriculum". La finalidad de "algebrizar" el currículo de la escuela primaria es promover al álgebra como facilitadora de una mejor comprensión de las matemáticas en lugar de ser inhibidora. En el caso de los Principios y Estándares 2000 (NCTM, 2000) se concretó en la recomendación de incluir el contenido de álgebra desde los primeros grados.

Diversos investigadores han apoyado esta inclusión temprana del algebra en la escuela primaria, por ejemplo, Butto y Rojano (2004) mantienen la postura de que la introducción temprana al razonamiento algebraico es viable, partiendo de la suposición de que el desarrollo de dicho pensamiento es un proceso largo. Otros autores como

Carraher, Schliemann y Schwartz (2006) también reconocen que el álgebra tiene un lugar en los primeros grados. En la misma línea investigadores como Schliemann, Carraher, Brizuela y Earnest (2003) sustentan la introducción de conceptos y notaciones algebraicos en la escuela elemental basándose en lo siguiente: (a) Las deficiencias y dificultades cognitivas con el álgebra pueden ser resultados de las limitaciones del currículum de matemáticas de primaria al que los niños tienen acceso, (b) la comprensión matemática es una construcción individual que se transforma y amplía a través de la interacción social, la experiencia en múltiples contextos significativos, y el acceso a sistemas simbólicos matemáticos, y (c) los niños necesitan ser familiarizados con los sistemas simbólicos. Con este objetivo, los estudiantes se benefician de las oportunidades para comenzar con sus propias representaciones intuitivas y poco a poco adopten las representaciones convencionales como herramientas para representar y para entender las relaciones matemáticas.

Lins y Kaput (2004) señalan que existen dos maneras de entender este enfoque: La primera se refiere al primer tiempo en que los estudiantes se relacionan con el álgebra en la escuela[1] (el primer encuentro es probable que ocurra cuando los estudiantes cumplen los 12 o 13 años de edad, en algunos casos incluso más). La segunda manera de entender este enfoque, que sólo lentamente y, más recientemente, ha ido ganando terreno en la comunidad de enseñanza de las matemáticas, toman "Early Algebra" para referirse a la introducción del razonamiento algebraico a una edad mucho más temprana. Lins y Kaput, argumentan que la aceptación de la segunda visión se relaciona con el hecho de que es, sólo recientemente, que la comunidad de educación matemática comenzó a darse cuenta en serio que los niños más pequeños podrían hacer mucho más de lo que se cree actualmente respecto al razonamiento algebraico. De este modo la suposición más común de los partidarios del "Early Algebra" es: "algebrizar la matemática elemental es capacitar a los estudiantes mediante el fomento de un mayor grado de generalidad en su pensamiento y una mayor capacidad de comunicar dicha generalidad" (Lins y Kaput, 2004, p.58)

Esta segunda aproximación es la que se ha venido desarrollando recientemente en diversas investigaciones en educación matemática para introducir aspectos del razonamiento algebraico en educación primaria, investigaciones en la que también "se

[1] Este primer contacto con el álgebra es lo que se denomina pre-álgebra la cual se distingue respecto del "Early Algebra" como se analizará en un apartado más adelante.

manifiestan las dificultades mostradas por los estudiantes adolescentes sobre el álgebra, las cuales en gran medida, se deben a las limitaciones de cómo se introduce la aritmética y de manera más general la matemática elemental en primaria" (Carraher y Schliemann, 2007, 675).

Se pretende, así, que el álgebra sea introducida en los primeros años escolares por su gran potencial para enriquecer y añadir coherencia y profundidad a las matemáticas escolares, eliminando la tardía y abrupta introducción del álgebra (Kaput, 1998; Carpenter, Franke y Levi, 2003).

En la siguiente sección presentamos una síntesis de diversos temas tratados en las investigaciones sobre la introducción del álgebra en la escuela primaria y secundaria. En primer lugar abordamos la cuestión de las relaciones entre la aritmética y el álgebra, seguido de las investigaciones sobre la generalización mediante el estudio de patrones y funciones. Un interés especial tienen los trabajos sobre pensamiento relacional, por ser tema relevante con relación al "Early Algebra", así como la noción de variable e incógnita.

3.1. DE LA GENERALIZACIÓN DE LA ARITMÉTICA AL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO

La mayoría de los estudiantes perciben a la aritmética simplemente como una serie de cálculos y no piensan mucho sobre las propiedades de los números, por lo que consecuentemente, al estudiar álgebra no entienden que los procedimientos que usan para resolver ecuaciones y simplificar expresiones están basados en las propiedades de los números (Carpenter, Frankie y Levi, 2003). Esto implica que la aritmética tiene un carácter intrínsecamente algebraico, que se trata de casos generales cuya estructura puede ser captada de manera sucinta en la notación algebraica. En este sentido, los conceptos y la notación algebraicas deben ser considerados como parte integral de la matemática elemental, argumentando así que el sentido algebraico de las operaciones aritméticas no es opcional sino un ingrediente esencial (Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006), pues los principios que rigen la resolución de ecuaciones en álgebra coinciden con las propiedades estructurales de los conjuntos de números (NCTM, 2000).

Muchas de las dificultades vividas por los estudiantes en álgebra se derivan de un inadecuado conocimiento base de la aritmética. A la mayoría de estos aprendices no se les da la oportunidad de establecer conexiones explícitas entre la aritmética y el álgebra, de modo que las experiencias de los estudiantes con la aritmética constituyen obstáculos para el aprendizaje del álgebra debido a las diferencias en la sintaxis, el uso de letras como una forma abreviada de representación, las manipulaciones simbólicas, las incógnitas, y la igualdad. Este hecho da como resultado que el éxito de los estudiantes con el álgebra es muy dependiente de su experiencia con la aritmética (Warren, 2003).

Muchos estudios se han llevado cabo para investigar la transición de la aritmética al álgebra desde diferentes perspectivas; el álgebra es vista como aritmética generalizada (Kramarski, 2008), como la evolución de rupturas (Filloy y Rojano, 1989), como la reificación (Sfard y Linchevski, 1994), considerando el sentido de las operaciones (Slavit, 1998), tomando en cuenta la interpretación de los símbolos (Kieran, 1992) y el tratamiento de las operaciones y las funciones (Carraher, Schliemann y Brizuela, 2000; Kaput y Blanton, 2000). Otros autores hablan del pensamiento relacional al referirse a las igualdades numéricas como totalidades (Carpenter, Franke y Levi, 2003; Molina 2007). Para Warren (2003), en cambio, son dos los aspectos cruciales a tener en cuenta en la transición de la aritmética al álgebra. En primer lugar, el uso de letras para representar números y, en segundo lugar, la conciencia explícita de los métodos matemáticos que se están simbolizando mediante el uso de números y letras (Kieran, 1992). Esto implica un cambio de las soluciones puramente numéricas a la consideración del método y el proceso.

La transición de la aritmética al álgebra, es un paso importante para llegar a ideas más complejas dentro de las matemáticas escolarizadas. Sin embargo, presenta obstáculos que la mayoría de los adolescentes encuentran muy difíciles de superar (Butto y Rojano, 2004), pues tradicionalmente, éstos son introducidos en el álgebra de la escuela, mediante la representación de las cantidades y los números con símbolos literales, y la operación con estos símbolos literales. Este enfoque basado en procesos normalmente implica el estudio de ecuaciones con incógnitas y que representan generalizaciones aritméticas con variables, difícilmente percibidas por los estudiantes (Warren, 2003). La principal crítica sobre la enseñanza del álgebra es que se introduce al niño en un simbolismo desprovisto de significado y de sentido, siendo que los niños vienen de trabajar con la aritmética, donde gran parte del contenido matemático que se les enseña, toma como base el dominio numérico, dejando de lado ideas importantes que se interconectan con otros dominios matemáticos, como el geométrico. Además, todos los símbolos poseen significados y los contextos de los problemas determinan mucho la manera de resolverlos (Butto y Rojano, 2004), hechos que no ocurren con el álgebra. Esta separación artificial de la aritmética y el álgebra priva a los estudiantes de sistemas de gran alcance para el pensamiento acerca de las matemáticas en los primeros grados, y hace más difícil para ellos aprender álgebra en los grados superiores (Carpenter y Levi, 2000). Muchos enfoques pedagógicos se recomiendan para colmar esta dificultad, éstos implican la generalización de patrones encontrados en situaciones diversas como patrones de números, patrones visuales, y las tablas de valores; otros versan sobre desarrollar una comprensión de la variable con materiales concretos y, utilizar hojas de cálculo y los ordenadores para introducir el concepto de variable (Warren, 2003).

La comprensión requiere de mucho tiempo para desarrollarse, y el pensamiento algebraico se concibe como el desarrollo durante un período prolongado de tiempo a partir de los grados elementales (Carpenter y Levi, 2000). La introducción de conceptos y notaciones algebraicas en la escuela elemental, sobre la idea de que la aritmética es una parte del álgebra, se fundamenta en el hecho de que los sistemas de numeración y las operaciones aritméticas se pueden ver como funciones (Schliemann, Carraher, Brizuela y Earnest 2003) y sobre la idea de que la aritmética puede ser considerada como algebraica porque proporcionan elementos para construir y expresar generalizaciones (Carraher, Martinez, y Schliemann 2008). Otros argumentan que el álgebra es una aritmética generalizada de los números y cantidades en que el concepto de función asume un papel importante (Tall, 1992). Lo anterior conlleva a considerar que la aritmética es un foco importante del currículo de primaria porque puede utilizarse para el desarrollo del pensamiento algebraico reconsiderando la forma en que se enseña y se aprende (Carpenter, Frankie y Levi, 2003; Carreher, Schliemann y Brizuela, 2000). Se precisa tener en cuenta que existe una concepción más amplia sobre la naturaleza del álgebra en la que el énfasis no está en el aprendizaje de las reglas para la manipulación de símbolos, sino que el objetivo es desarrollar el pensamiento algebraico, no el uso experto de los procedimientos del álgebra (Carpenter y Levi, 2000).

Es preciso que los estudiantes entiendan que el álgebra es más que manipular símbolos y que también necesitan comprender los conceptos, las estructuras y principios que rigen dicha manipulación y cómo pueden usar ésta para registrar ideas y ampliar su comprensión de las situaciones (NCTM, 2000). Si los estudiantes entienden la aritmética en un nivel en que se puede explicar y justificar las propiedades que se están utilizando, dado que realizan cálculos, entonces han aprendido algunos fundamentos críticos de álgebra (Carpenter, Frankie y Levi 2003); asimismo, deberán tener en cuenta las relaciones numéricas de una situación, expresarlas explícitamente en un lenguaje sencillo y cotidiano, y, finalmente, aprender a representar con letras (Warren, 2003). Sin embargo, por desgracia, la forma en que la mayoría de los estudiantes aprenden aritmética no proporciona una base para el aprendizaje del álgebra (Carpenter, Frankie y Levi 2003). Las dificultades de los estudiantes se acentúan y se prolongan por la separación muy marcada entre la aritmética y el álgebra, separación que no puede ser enfrentada adecuadamente por los programas diseñados para la escuela elemental. Los contenidos existentes necesitan ser transformado sutilmente con el fin de poner de manifiesto su carácter algebraico. En cierta medida, esta transformación requiere simbolismo algebraico (Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006); sin embargo, también se piensa que el uso de las letras[2] no es una condición necesaria para el modo algebraico de pensar, sino que su uso en la escuela elemental como parte de la experiencia con la aritmética podría facilitar la comprensión del significado y la importancia de las letras más tarde en el álgebra formal, proporcionando, así, una amplia oportunidad para el desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros grados (Linchevsky, 1995).

Por otro lado, también se considera que un punto clave para el éxito de la transición de la aritmética hacia el álgebra, además de darle un significado algebraico a las actividades matemáticas, es precisamente el conocimiento de la estructura matemática, que implica un conocimiento sobre los objetos matemáticos, de la relación entre ellos y de sus las propiedades. En particular, la estructura matemática se ocupa de: a) las relaciones entre las cantidades (por ejemplo, las cantidades equivalentes, una cantidad menor o mayor que otra), b) propiedades de las operaciones (por ejemplo, la asociativa y conmutativa), c) las relaciones entre las operaciones (por ejemplo, la división y multiplicación), y d) las relaciones a través de las cantidades (por ejemplo, la transitividad de la igualdad y la desigualdad). En el enfoque tradicional del álgebra, se asume implícitamente que los estudiantes ya están familiarizados con estos conceptos

[2] En el apartado 3.4 se profundizará sobre el uso de la simbología literal, al hablar de incógnita, variable y parámetro.

en su trabajo previo con la aritmética y también que desde repetidas experiencias en el aula con la aritmética, los estudiantes lleguen a un entendimiento de la estructura de la misma por generalización inductiva, dándole un sentido a las operaciones que realizan (Warren, 2003).

Slavitt (1998) define diez aspectos que ayudan a los estudiantes a dar sentido a las operaciones y proporciona una visión sobre los inicios del pensamiento algebraico. Los diez aspectos se dividen en tres grandes grupos, a saber, los aspectos de propiedad, aspectos de la aplicación y los aspectos relacionales. Los aspectos de propiedad se refieren a las propiedades que posee cada operación y suponen (a) la capacidad de descomponer la operación en sus componentes base, (b) conocimiento de los hechos y las operaciones (por ejemplo, $7 + 8 = 15$, desde el $7 + 8 = 7 + 3 + 5 = 10 + 5 = 15$), (c) la comprensión de las propiedades del grupo relacionado con la operación, y (d) la comprensión de los diversos sistemas de símbolos que representan la operación. Los aspectos de aplicación traen consigo la capacidad para aplicar las operaciones en una variedad de contextos, utilizar incógnitas y unidades arbitrarias. Y finalmente los aspectos relacionales implican una comprensión de las relaciones entre las operaciones, y entre las distintas representaciones de la operación a través de los sistemas numéricos diferentes (por ejemplo, números enteros y racionales). Estos aspectos también implican una capacidad de moverse hacia atrás y hacia delante entre estas concepciones, implicando así que la preparación para el álgebra requiere algo más que abstraer las propiedades de la aritmética.

En este sentido es importante enseñar a los estudiantes a ver los procesos y operaciones de manera holística, y subrayando las relaciones entre los números en lugar de centrarse principalmente en la respuesta. Al discutir el valor y la eficacia de los enfoques informales con los estudiantes les puede ayudar a hacer la transición hacia los métodos algebraicos más formales (MacGregor y Stacey, 1997).

Resulta así que la aritmética es un medio a través del cual puede potenciarse el razonamiento algebraico, y comenzar a darle sentido a las operaciones, acto que requiere sin duda alguna un cambio en la forma actual de su enseñanza.

3.2. PENSAMIENTO FUNCIONAL: PATRONES COMO ACTIVIDAD DE GENERALIZACIÓN

Todas las cuestiones relativas a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas parecen hacer referencia, directa o indirectamente, a las creencias relativas a la cuestión ontológica, "¿Qué es la matemática?". Entre las respuestas a esta cuestión resaltan: es la ciencia de patrones y el orden, la ciencia de la visión relacional, y con más fuerza, la sistematización de las relaciones. Estas tres definiciones comparten el aspecto de que algún tipo de generalización es una característica importante de las matemáticas (Presmeg, 1999).

La generalización está en el centro del razonamiento algebraico (Schliemann, Carraher, Brizuela y Earnest, 2003). Si se hace algo una vez, probablemente no es necesario el álgebra. Pero si se está haciendo un proceso una y otra vez, el álgebra proporciona un lenguaje muy simple para describir lo que se está haciendo (Usiski, 1995). La generalización como objeto y medio de pensamiento y comunicación (Dörfler, 1991; Zaskis y Liljedahl, 2002) involucra la articulación y representación de ideas unificadas que hacen explícitas relaciones matemáticas importantes (Carpenter y Levi, 2000), que es posible desarrollar en los niños, pues éstos están naturalmente predispuestos a realizar generalizaciones (Becker y Rivera, 2005).

Diversos autores matemáticos y educadores matemáticos han abordado el tema de la generalización dándole diferentes significados. Por ejemplo Dörfler (1991) distingue entre generalización empírica y la generalización teórica. La generalización empírica se basa en reconocer características comunes o cualidades comunes de los objetos. La generalización teórica, en contraste, es intensional y extensional (general / particular) y comienza con la identificación de los invariantes esenciales en los sistemas de acción (materiales o mentales), así como en las condiciones de realización o los resultados de dichas acciones. Las cualidades son abstraídas de las relaciones entre objetos, en lugar de los propios objetos.

Por su parte, Harel y Tall (1991) utilizan el término generalización en el sentido de la aplicación de un argumento dado en un contexto más amplio. Distinguen entre tres tipos diferentes de generalización: 1) Expansiva, donde se amplía la gama de aplicabilidad de un esquema existente, sin reconstruir el esquema, 2) reconstructiva, donde el esquema existente se reconstruye con el fin de ampliar la gama de aplicación, y 3) disyuntiva, en donde se construye un nuevo esquema al pasar a un nuevo contexto. Desde el punto de vista de Carraher, Martínez y Shliemann (2008) una generalización matemática es la afirmación de que alguna propiedad es válida para un gran conjunto de objetos matemáticos o condiciones, por lo que la ampliación de un conjunto ordenado de objetos muestra un cierto grado de generalización, pero esta no llega a una generalización si no es explícitamente expresada en el lenguaje o las formas convencionales de matemáticas.

Entre los diversos temas relacionados con la generalización se encuentran, específicamente, los patrones y las funciones. El reconocimiento de patrones juega un papel importante pues ha sido el foco de la investigación realizada durante los últimos años. La idea básica implicada en esta noción es que toda situación repetida con regularidad da lugar a un patrón, que por lo general suele formarse a partir de un núcleo generador que se repite o bien crece de forma regular (Castro, 1994). Muchos investigadores han hecho algunos intentos de investigar las etapas o niveles en el desarrollo de la capacidad para la identificación de los patrones, principalmente centrado en la capacidad de los estudiantes a generalizar (García y Martinón, 1998). Los patrones son reconocidos en la investigación por su importancia en la introducción al álgebra y distingue entre diferentes tipos de los mismos: patrones numéricos, pictóricos y patrones geométricos, patrones en los procedimientos de cálculo, los modelos lineales y cuadráticos, etc., (Zaskis y Liljedahl, 2002).

"Los patrones son el corazón y el alma de las matemáticas" (Zaskis y Liljedahl, 2002, p.1), su identificación y uso en la solución de problemas para comprender nuevos conceptos y procesos es la esencia del pensamiento matemático. El estudio de patrones y relaciones promueve la comprensión de los números y sustenta la capacidad de realizar cálculos con soltura, pero las experiencias son también necesarias para identificar, describir, continuar y crear patrones de números, de las formas y de las colecciones de objetos.

Herbert y Brown (1997) hacen referencia a patrones en números y formas en el contexto de la resolución de problemas, usados como herramienta para desarrollar el razonamiento algebraico. Su proceso de investigación consta de tres fases: (l) Patrón de búsqueda, (2) el reconocimiento de patrones, y (3) la generalización. La búsqueda de patrones es la extracción de información, el reconocimiento de patrones es el análisis matemático, y la generalización es la aplicación de la interpretación, es lo que se aprendió.

Por su parte, Threlfall (1999) se centró en patrones de una dimensión y su repetición, es decir, patrones con un ciclo de repetición de elementos reconocibles, denominado unidad de repetición. Reconoce las ideas de la regularidad y la secuencia, y aboga por el uso de patrones que se repiten como un vehículo para trabajar con símbolos y caminar hacia el álgebra conceptual y la generalización.

Stacey (1989) enfocó su investigación a los patrones lineales, centrándose en la predicción del siguiente elemento en un conjunto ordenado que representa gráficamente como la ampliación de árboles (ver figura 2.1). Para este autor crear y reconocer patrones es una estrategia relevante al momento de resolver problemas matemáticos.

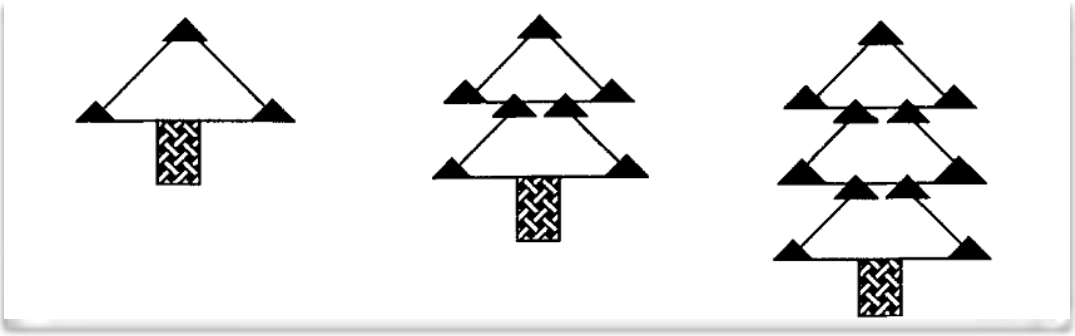


Figura 2.1 Patrones

Por otro lado, Castro (1994) orientó su trabajo al empleo de patrones numéricos que representa a través de patrones puntuales, con la finalidad de integrar el sistema de representación de los números naturales, denominado configuración puntual[3], con el sistema decimal de numeración y con el desarrollo aritmético de estos números, trabajando con secuencias numéricas lineales y cuadráticas, analizando el patrón que las define (ver figura 2.2).

[3] Se denomina así a la representación gráfica de una colección finita de puntos, que corresponde a un propósito.

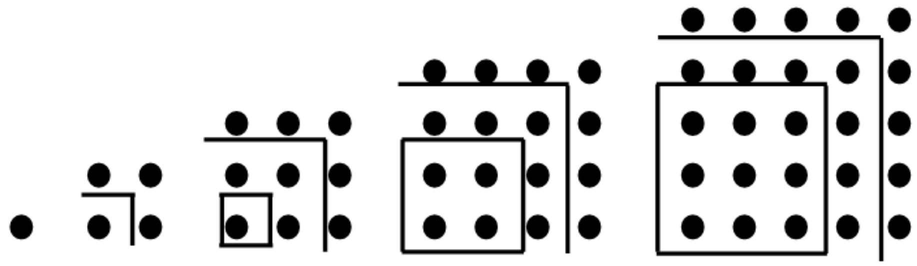


Figura 2.2 Los números cuadrados: 1, 4, 9, 16,...

Por su parte Cañadas (2007) orienta su trabajo hacia la descripción y caracterización del razonamiento inductivo, centrándose en la identificación de elementos y relaciones entre las progresiones aritméticas de números naturales de orden 1 y 2 (lo que Stacey (1989) llama de forma equivalente sucesiones de números naturales lineales y cuadráticas), reconociendo así, que la identificación de patrones es uno de los pasos importantes en el desarrollo del razonamiento inductivo, al mismo tiempo que resulta fundamental para el desarrollo de la habilidad para generalizar.

Otros autores como Carreher, Schliemann y Brizuela (2000) optan por las funciones como medios para la generalización, proponiendo tratar a las operaciones aritméticas como funciones. Puntualizan que al tratar las operaciones aritméticas como funciones los estudiantes usan y consideran los patrones en conjuntos de números. Los autores ilustran cómo los problemas que suelen visualizarse como del dominio de la aritmética pueden tomar un carácter algebraico desde el principio, aplicando actividades (en el caso de su investigación a niños de entre 8 y 9 años) como la que se presenta a continuación en la que se advierte la relación funcional entre las columnas ($Y = 2x + 1$):

Problema:
María tenía una tabla con los precios de las cajas de galletas. Pero llovía y algunos números fueron borrados. Vamos a ayudar a María a llenar su tabla.

Caja de galletas	Precio
	$ 3.00
2	$ 6.00
3	
	$12.00
5	
6	
	$ 21.00

8	
9	
10	$ 30.00

Lannin (2003) examina las diversas estrategias que los estudiantes utilizan en su intento de generalizar situaciones numéricas y articular las justificaciones correspondientes. Identifica seis estrategias de generalización que se describen a continuación: (a) *Contar*: realizar el dibujo de una imagen o la construcción de un modelo para representar la situación y contar el atributo deseado, (b) *Recursividad*: construir sobre la base de un término o términos de la secuencia, para construir el próximo término, (c) *Total-objeto*: El uso de una parte como una unidad para construir una unidad más grande, utilizando así los múltiplos de la unidad. Esta estrategia puede o no, requerir un ajuste por exceso o subestimación, (d) *Contextual*: es la construcción de una norma sobre la base de una relación que se determina a partir de la situación-problema, (e) *Adivinar y comprobar*: utilizar una regla sin tener en cuenta por qué ésta es válida, (f) *Tasa de ajuste*: El uso de la constante de velocidad del cambio como un factor multiplicador. Un ajuste se hace entonces sumando o restando una constante para alcanzar un determinado valor de la variable dependiente.

A manera de síntesis se puede establecer que la generalización a través de patrones y el uso de funciones son una herramienta útil para introducir aspectos algebraicos en la escuela elemental, y un punto de partida para familiarizar a los niños de este nivel con la notación algebraica. En última instancia, el poder del pensamiento algebraico promulgado a través de la generalización proporciona, una oportunidad a los niños para hacer explícita la estructura matemática. Es esta sensibilidad a la profundidad en el pensamiento matemático la que puede ayudar a la transición de los estudiantes hacia las matemáticas más complejas y abstractas que se encuentran en etapas más avanzadas (Blanton y Kaput, 2003).

3.3. PENSAMIENTO RELACIONAL: SIGNIFICADOS DEL SIGNO IGUAL

En relación con el pensamiento relacional, la investigación sobre "álgebra temprana" se ha interesado particularmente por indagar la comprensión de los estudiantes de los significados operacional y relacional del signo igual, esto es, la distinción entre el uso del signo igual para indicar el resultado de operaciones, o la equivalencia de dos expresiones (Carpenter, Levi, Franke, y Zeringue, 2005; Stephens, 2006)

A menudo se ha subrayado que el aprendizaje del álgebra es influenciado por la ambigüedad de los significados de los signos (Prediger, 2010). En este sentido el desequilibrio del signo igual en la transición de la aritmética al álgebra es muy conocido (Hewitt, 2003). Más de 20 años de investigación en psicología del desarrollo y enseñanza de las matemáticas ha indicado que muchos estudiantes de escuela primaria (con edades de 7 a 11) tienen una inadecuada comprensión del signo igual (Kieran, 1981; Carpenter , Franke, y Levi, 2003).

El signo igual es muy común en las matemáticas, y su entendimiento y uso correcto es esencial para la comprensión de muchos temas en matemáticas, como lo serían las ecuaciones algebraicas (McNeil et al, 2006). Muchos investigadores han concluido que uno de los requisitos para el éxito en el álgebra es una comprensión mucho más rica del signo igual que la que es proporcionada por la aritmética tradicional (Freiman y Lee, 2004). Debido a su presencia en todos los niveles es que se destaca su importante papel en las matemáticas en general, y en álgebra en particular; además su relevancia en el desarrollo del pensamiento algebraico hacen del estudio de sus significados un foco relevante de estudio (Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg y Stephens, 2005).

Existen muchas investigaciones que reportan diversos significados para el signo igual. Por ejemplo, Molina, Castro y Castro (2009) hacen hincapié en once diferentes significados:

1) *Propuesta de una actividad:* Se refiere a la utilización del signo igual en las expresiones incompletas que contengan una cadena de números y / o símbolos que están a la izquierda del signo igual, por ejemplo: $(x-3)(x+3) =$.

2) *Operador* (también conocida como significado operacional del signo igual): Se refiere a la utilización del signo igual para indicar la respuesta a un cálculo o la simplificación de una expresión. Se interpreta como un símbolo de operador; sólo se puede leer de izquierda a derecha, por ejemplo: $4 \times 5 = 20,\ x(x-2) + 3x^2 = 4x^2 - 2x$.

3) *Expresión de una acción*: Un sentido bidireccional que amplía el significado del operador mediante el reconocimiento de la propiedad simétrica de la igualdad. Ejemplo de esto sería $2x = x(x-2) - x^2 + 4x,\ 24 = 12 + 12$.

4) *"Divisor":* El significado dado por los estudiantes a este símbolo es cuando se utiliza para separar los pasos de un ejercicio, por ejemplo, $f(x) = x^2 = f^2(x) = x^4$. Los pasos vinculados, no podrán estar relacionados.

5) *Expresión de la equivalencia*: Se produce cuando el signo igual se utiliza para relacionar dos representaciones de un mismo objeto matemático. Se distinguen tres tipos de equivalencias: Equivalencia numérica $\left(4 + 5 = 3 + 6,\ 2\sqrt{3} = \sqrt{12}\right)$, equivalencia simbólica $(a + b = b + a)$, y equivalencia por definición o notación $(\frac{3}{4} = \frac{6}{8},\ 100cm = 1m)$.

6) *Expresión de una condición de equivalencia* (ecuación): Este significado pertenece al contexto del álgebra. Se refiere a la utilización del signo igual para expresar una equivalencia que es verdad para algunos valores, o incluso para ninguna de las variables que figuran en él. Por ejemplo, $x^2 + 4x = 5x - 6$.

7) *Expresión de una relación funcional o dependencia:* Se refiere a la utilización del signo igual para expresar una relación de dependencia entre las variables o parámetros. Por ejemplo, $l = 2\pi r,\ y = 3x + 2$.

8) *Indicador de una conexión o correspondencia*: El significado precisa el uso del signo igual entre los objetos no matemáticos o entre las expresiones matemáticas y no matemática, esto es ♥♥♥ =3.

9) *Indicador de una estimación*: Este significado corresponde a la utilización de este símbolo para relacionar una expresión a una estimación de su valor numérico, por ejemplo $\frac{1}{3} = 0.33$.

10) *Definición de un objeto matemático*: El signo igual se utiliza para definir un objeto matemático o atribuir un nombre, por ejemplo, $a^0 = 1$ donde *a* es un número natural.

11) *La asignación de valor numérico*: El signo igual se utiliza para asignar un valor numérico a un símbolo. Por ejemplo, si $x = 4$, cuál es el valor numérico de $x^2 - 5$.

Por otro lado, Wilhelmi, Godino y Lacasta (2007) afirman que no existe una única definición de igualdad, pues ésta depende del dominio matemático de referencia. Así, para la igualdad de números reales, hablan como un primer punto de, *igualdad de equivalencia*, esto es, dos números reales a y b son iguales, si representan la misma clase de equivalencia: $a = b \Leftrightarrow \{a\} \equiv \{b\}$. También definen la *igualdad de orden*, especificando que dos números reales a y b son iguales, si la relación de orden en $\mathbb{R}$, cumple para ellos la propiedad antisimétrica: $a = b \Leftrightarrow [a \leq b \wedge b \leq a]$. Por otro lado, establecen que dos números reales a y b son iguales si la distancia entre ambos es nula, definiendo así, la *igualdad métrica* como: $a = b \Leftrightarrow d(a;b) = |a - b| = 0$. Mencionan que se puede interpretar la igualdad métrica valor absoluto como una topología sobre $\mathbb{R}$, en tal caso $(\mathbb{R};d)$ es espacio topológico; y que en este contexto, afirmar que, la distancia entre dos puntos a y b es cero, equivale a determinar que el conjunto $\{a;b\}$ es conexo, con lo anterior establecen la definición *igualdad conectiva*. Definen la *igualdad algebraica*, estableciendo que dos números reales a y b son iguales, si siempre que a es solución de un ecuación E, b también lo es, esto es, $a = b \Leftrightarrow [\delta(E(a)) = 1 \Leftrightarrow \delta(E(b)) = 1]$ donde se ha denotado a $\delta(\,)$, como la función característica que asocia 1 a una sentencia verdadera y 0 a una falsa. Los autores también señalan que la igualdad entre dos números reales se puede definir también apoyándose en la teoría de funciones, definiendo así la *igualdad funcional* como: Sea $F_i(D)$ el conjunto de funciones reales de variable real inyectiva y con dominio D, entonces dos números reales a y b son iguales, si sus respectivas imágenes a través de una función inyectiva son iguales; esto es: $a = b \Leftrightarrow \exists f \in F_i(D), \{a,b\} \subseteq D, f\ no\ lineal, tal\ que\ f(a) = f(b)$. Los autores también identifican una definición de *igualdad como paso al límite*, esto es, dos números reales a y b son iguales, si a está dentro de todo entorno abierto centrado en b $(B(b;\varepsilon))$, es decir, $a = b \Leftrightarrow a \in B(b;\varepsilon), \forall\varepsilon > 0 \Leftrightarrow b \in B(a;\varepsilon), \forall\varepsilon > 0$. Por último, la definición de *igualdad numérica* presupone la aceptación de un marco de error, que depende de la naturaleza del problema o es atribuido al instrumento de cálculo. Así, la igualdad numérica queda definida como: Sea T una tolerancia de error admitido, dos números reales a y b son iguales, si a está dentro de un entorno abierto centrado en b y radio menor o igual a T $(B(b;t), t < T$, o que es lo mismo que $a = b \Leftrightarrow a \in B(b;t), t < T \Leftrightarrow b \in B(a;t), t < T$.

Wilhelmi, Godino y Lacasta señalan que la ruptura con las definiciones anteriores es radical desde el punto de vista formal; su inclusión obedece a razones pragmáticas (restricciones de medida y cálculo) y epistemológicas (nociones de aproximación suficiente y vecindad).

Alibali, Knuth, Hattikudur, McNeil y Stephens (2007) proponen una codificación de las categorías con ejemplos representantes para la definición del signo igual, basándose en un estudio realizado con 81 estudiantes de escuela intermedia, sistema de código que también fue utilizado por Knuth, Stephens, McNeil y Alibali (2006) y McNeil y Alibali (2005) y que a continuación se presenta:

Tabla 1.1. Categorización del signo igual

Categoría	Ejemplo
Relacional	Una respuesta se codificó como relacional, si un estudiante expresó la idea general de que el signo igual significa, el mismo: "Esto significa que ambos lados de la ecuación son iguales"; "los números en ambos lados están equilibrados".
Operacional	Una respuesta se codificó como operativo si un estudiante expresó la idea general de que el signo igual significa sumar los números o la respuesta: "Después del símbolo se muestra la respuesta".
Sin especificar la igualdad	Determinada respuesta se codificó como la igualdad sin especificar si un estudiante proporcionó una definición usando las palabras igual o iguales, pero no ofrecieron suficiente información adicional para sugerir un conocimiento más específico: "Esto significa algo que es igual a otra cosa"; "Es igual a".
Otro	En esta categoría se incluyeron las definiciones, que no están orientadas hacia un sentido matemático del símbolo igual: "Esto podría significar una cara sonriente, =)"; "una madre tiene que tratar a sus hijos igual".

Otras investigaciones enfatizan la importancia de distinguir solamente entre dos significados de la igualdad, el operacional y el relacional (Kieran, 1981; Filloy, Rojano, Solares 2003). Cuando se concibe al signo igual como un operador se espera que genere una respuesta, como la que se da cuando se realiza una suma. Por el contrario, cuando se concibe el signo igual como un signo relacional, se consideraría como una relación estática entre dos expresiones que son iguales en valor (Jones y Pratt, 2005). Estas dos concepciones explicarían el fracaso que tienen los estudiantes durante el periodo de transición de la aritmética al álgebra, ya que en álgebra, los estudiantes deben ver el signo igual como un símbolo de relación (es decir, "lo mismo que") en lugar de como un símbolo de operación (es decir, "hacer algo"). En el punto de vista relacional del signo igual se vuelve particularmente importante que los estudiantes aprenden a encontrar y resolver ecuaciones algebraicas con operaciones en ambos lados del símbolo (por ejemplo, $3x - 5 = 2x + 1$), para comprender que las transformaciones realizadas en el proceso de resolver una ecuación es preservar la relación de equivalencia (es decir, las ecuaciones son equivalentes) una idea que muchos estudiantes encuentran difícil de entender (Knuth et al, 2005). Así, la mayoría de las dificultades de los estudiantes al resolver ecuaciones algebraicas, tales como interpretar expresiones simbólicas, trasladar de un lenguaje verbal a una representación simbólico y en general, la poca profundidad que se tiene en el conocimiento de los aspectos estructurales del álgebra se derivan de una falta de comprensión de conceptos algebraicos básicos, dos de los cuales son, precisamente la equivalencia y el pensamiento relacional (Stephens, 2006; Knuth et al, 2005).

Junto con el significado relacional del signo igual, surge el término pensamiento relacional como otro componente central del razonamiento algebraico. Sthepens (2006) menciona que el término pensamiento relacional es usado para considerar más de un entendimiento relacional del signo igual. Por su parte Carpenter, Franke y Levi (2003) describen el uso del pensamiento relacional cuando los estudiantes usan el sentido del número y la operación para reflexionar sobre expresiones matemáticas como objetos en lugar de como procedimientos aritméticos que se llevan a cabo. Así, un estudiante quien posee un pensamiento relacional es capaz de reconocer la equivalencia de expresiones como $3(x+4)$ y $3x+12$ atendiendo a sus estructuras, es decir, entender la propiedad distributiva a nivel de objeto sin necesidad de cálculos individuales o verificación de que las expresiones son iguales para valores particulares de x (Sthepens, 2006).

En la escuela primaria el estudio de la aritmética a menudo privilegia el significado operacional del signo igual por centrarse exclusivamente en igualdades consideradas asimétricamente $24 \div 6 - 3 = 1$. Como consecuencia, el uso posterior del signo igual como relación en igualdades simétricas, en el álgebra de la escuela secundaria, plantea dificultades. Por ejemplo, al considerar expresiones como $24 \times 7 = 20 \times 7 + 4 \times 7$ o resolver ecuaciones algebraicas, como $x^2 = -x + 6$ (Predinger, 2010). De estas dificultades es de donde se sustenta que el desarrollo de un significado relacional y simétrico del signo igual debiera incluirse en los planes de estudio de la escuela primaria, pues los niños de este nivel tienden a ver el signo de igualdad como un símbolo operador privado de propiedades relacionales (Jones y Pratt, 2006; Alibali et al, 2007), provocando que para poder dar un significado, los niños necesitan literalmente ver un resultado único antes de las operaciones sobre los números, es decir, una expresión como $4+5=3+6$ se debe escribir como $4+5=9$ (Kieran, 1981). La comprensión operativa del signo igual puede ser suficiente para resolver ecuaciones estándar como 3 + 4 = __, pero puede dar lugar a dificultades cuando se abordan problemas más sofisticados (Hattinkudur y Alibali, 2010).

Al parecer las dificultades con el signo igual se deben al conocimiento construido a partir de la experiencia temprana con la aritmética; de este modo la capacidad de los estudiantes para adquirir el concepto relacional del signo igual puede depender del contexto de aprendizaje en este nivel. Si este es el caso, parece razonable sugerir que los contextos en que los profesores (y planes de estudio) presentan y abordan el signo igual juegan un papel importante en el desarrollo de la comprensión de éste (McNeil, et al, 2006). Así, "en lugar de esperar hasta el álgebra formal para desarrollar esta visión relacional, la evidencia sugiere que los estudiantes, que cuenten con experiencias adecuadas, pueden desarrollar esta comprensión a una edad mucho más temprana*"* (Sthepens, 2006, p. 5). La clave de este desarrollo es la exposición del signo igual en forma "no operativa" en contextos como $8 = 8$, la discusión de verdadero/falso en expresiones como $16 + 15 - 9 = 31 - 9$ y sentencias numéricas abiertas tal como $4 + 3 + 5 = \_ + 5$, usadas en el mismo sentido que Alibali (1999), para así poder desarrollar en los estudiantes un entendimiento del signo igual como símbolo relacional (Sthepens, 2006). Al respecto se han realizado varios estudios cuyo objetivo es el fomentar una visión más amplia de este signo, que no fuera solo la que expresa un resultado. Por ejemplo, Hattinkudur, Alibali (2010) realizaron un estudio con alumnos de la escuela primaria, cuyo propósito fue determinar si una lección que incluía desigualdades fomentaba una mayor comprensión del signo igual, que una lección que se centraba solo en el uso de este signo. Los resultados indicaron que la lección que incluía desigualdades promovió una mejor comprensión en los estudiantes de primaria que la lección que incluía el signo igual solamente.

Kieran (1981), por su parte, propuso a estudiantes de 12 a 14 años construir igualdades aritméticas con una operación en cada lado, por ejemplo:

$$2 \times 6 = 4 \times 3$$

$$2 \times 6 = 10 + 2$$

$$7 \times 2 + 3 - 2 = 5 \times 2 - 1 + 6$$

Kieran nombró a estas expresiones "identidades aritméticas" con el fin de reservar el término "ecuación" para su uso en el sentido algebraico.

A manera de síntesis se puede mencionar que durante el período de transición de la aritmética al álgebra, existen notables confusiones. Se señala que el tipo de errores cometidos por los estudiantes sólo codifican los procedimientos, dando lugar así a igualdades falsas, tales como, $1063 + 217 = 1280 - 425 = 1063$ (Kieran, 1981) en donde los estudiantes no entienden que el signo igual es una expresión de una relación, por lo que las transformaciones realizadas no tienen sentido. De este modo mientras la exposición del signo igual como equivalencia no se haga presente en la escuela elemental y la aritmética siga centrándose en el significado operacional, los estudiantes seguirán presentando dificultades durante la escuela secundaria en la que se precisa utilizar los significados relacionales.

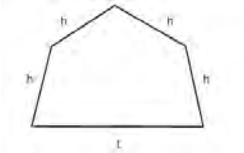
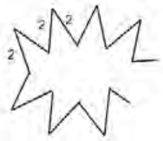
El éxito durante esta transición radicará en la capacidad de los estudiantes de cambiar entre los diferentes significados de acuerdo a las necesidades del contexto, aceptando el signo igual como un signo de equivalencia. Esta perspectiva es muy importante y podría explicar las muchas dificultades que encuentran los estudiantes (Predinger, 2010).

3.4. EL USO DE LAS LETRAS

Algunos autores relacionan el álgebra con el tratamiento de objetos de naturaleza indeterminada, tales como incógnitas, variables y parámetros. "Lo que esto significa es que, en álgebra, se calcula con cantidades indeterminadas (esto es, se suma, resta, divide, etc., incógnitas y parámetros como si se conocieran, como si fueran números específicos)" (Radford, 2010, p. 2). Así, el uso de las letras en el álgebra escolar de secundaria parece ser ineludible, la simbología literal es un recurso potente que facilita la resolución de problemas. Sin embargo, a las letras suele darse diferentes usos. Por ejemplo, Kücheman (1978) especifica que las letras pueden ser interpretadas como letra evaluada, ignorada, como objeto, como incógnita o valor desconocido específico, como número generalizado y como variable. Para entender apropiadamente cada uso, a continuación se especifica la descripción correspondiente a cada caso:

Tabla 1.2. El uso de las letras

Uso de las letras	Ejemplo	Descripción
Letra evaluada	$a + 5 = 8$ $a = ?$	Aquí a puede ser evaluada inmediatamente; no hay pasos intermedios en el que participen valores desconocidos (incógnitas).
Letra ignorada	$a + b \ = 43$	La segunda ecuación difiere de la primera por

	$a + 5 + 2 =?$	el término+*2*; $a + b$ puede ser ignorada.
Letra como objeto		Las letras *h* y *t* son nombres o etiquetas para los lados.
Letra como incógnita específica		Aquí hay *n* lados, todos de longitud *2*. La letra n representa un número desconocido que no puede ser evaluado.
Letra como número generalizado	$c + d = 10$ $c < d$ $c =?$	En este caso *c* representa un conjunto de números más que un sólo valor.
Letra como variable	¿Cuál es más grande *2n* o n+*2*?	Una relación necesita ser encontrada entre *2n* y *n+2* donde *n* varía.

Knuth et al, (2005) coinciden en algunos puntos sobre la clasificación del uso de las letras de la tabla anterior, basándose en un estudio realizado con estudiantes de la escuela intermedia (grados 6-8) a través del cual identificaron y clasificaron las respuestas de los estudiantes sobre la interpretación del símbolo literal en cinco categorías: *literales que toman varios valores*, como *número específico*, como *objeto*, *otros*, o *falta de respuesta / no lo sé*. Una respuesta se codificó como varios valores si el estudiante expresó la idea general de que el símbolo literal podría representar más de un valor, como número específico si el estudiante indicó que el símbolo literal representa un número en particular, y como objeto, si el estudiante sugirió que el símbolo literal representa una etiqueta de un objeto físico (como indicando que *n* representa *a* periódicos). De igual forma Asquith, Stephens, Knuth y Alibali (2007) son coincidentes con la clasificación anterior, a diferencia de que trabajaron con profesores de la escuela intermedia y agregaron la interpretación del símbolo literal como *concatenación*, que expresa la idea de que el símbolo representa el dígito en el lugar de las unidades (de forma *2n* es "veinte algo") y *dígitos como incógnitas*, que expresa la idea de que el símbolo representa un número desconocido que es un solo dígito (ya sea 1-9 o 0-9).

Philipp (1992), habla de cantidades que representan constantes y cantidades que representan muchos valores, es decir, variables. Por ejemplo, en la ecuación del círculo $x^2 + y^2 = a^2$, x y y son variables y a es una constante. El autor señala que el uso de símbolos literales puede interpretarse como sigue:

Tabla 1.3 Diferentes usos de los símbolos literales, tomada de Philipp (1992, p. 560)

Uso	Ejemplo
Etiqueta	$f, y\ en\ 3f = 1y$ (3 pies y 1 yarda)
Constante	π, e, c
Incógnita	$x\ en\ 5x - 9 = 91$
Generalización de números	$a, b\ en\ a + b = b + a$
Cantidades variables	$x, y\ en\ y = 9x + 2$
Parámetros	$m, b\ en\ y = mx + b$
Símbolos abstractos	$e, x\ en\ e \cdot x = x$

Por su parte Usiski (1989) se centra en el difícil acceso de compresión, por parte de los estudiantes, a la noción de variable sobre todo cuando ésta tiene un carácter multifacético, que ejemplifica con lo siguiente:

1) $A = LW$
2) $40 = 5x$
3) $\sin x = cosx \cdot \tan x$
4) $y = n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)$
5) $y = kx$

Cada una de las expresiones anteriores es interpretada de diferentes formas: a la expresión (1) usualmente es llamada fórmula, (2) es una ecuación, la expresión (3) es una identidad, la (4) es una propiedad, y finalmente la expresión (5) es una función de proporcionalidad directa. Lo anterior propicia a la reflexión sobre los diferentes usos que se la da a la idea de variable, por ejemplo en (1), A, L y W son cantidades para expresar área, largo y ancho y tienen un carácter conocido. En la expresión (2), x representa una incógnita. En (3), x es el argumento de una función. En la expresión (4), a diferencia de las otras, se generaliza un modelo de la aritmética, y n identifica una instancia del patrón. En (5), x de nuevo representa el argumento de una función, y un valor, y k una constante (o parámetro dependiendo de cómo se use); solamente en esta expresión existe la sensación de variabilidad.

Usiski menciona que los estudiantes piensan en las variables como letras en vez de números, en este sentido se precisa mencionar que las variables no siempre toman valores numéricos. En geometría, las variables a menudo representan puntos, como se puede ver en el uso de las variables A, B y C "si $\overline{AB} = \overline{BC}$, entonces $\triangle ABC$ es isósceles". En lógica, las variables p y q a menudo son consideradas como proposiciones; en análisis, la variable f representa una función; en álgebra lineal, la variable A puede ser considerada para representar una matriz y la variable v puede ser usada para un vector; y en álgebra superior, la variable puede representar una operación. Para esta autora expresiones como $3 + \_\_ = 7$; $3+ ? = 7$ y $3 + \Delta = 7$ son consideradas expresiones algebraicas y especifica que las variables no siempre tienen que expresarse con símbolos literales.

Comprender el significado de la variable resulta complejo, de hecho diversas investigaciones sobre el pensamiento de los estudiantes acerca de la noción de variable, han mostrado que las concepciones de muchos de ellos son insuficientes e inadecuadas, sobre todo en relación con el uso de símbolos en el álgebra. Los estudiantes ven a las variables como abreviaturas o etiquetas en lugar de como letras que representan cantidades (Asquith et al., 2007). Esto hace que los estudiantes de pre-álgebra tengan necesidad de contar con un concepto bien desarrollado del significado de la variable, cuya comprensión debe estar enraizada en las experiencias con los patrones y las generalizaciones. Las variables son difíciles, incluso para los profesores de matemáticas. El término puede tener muchos significados diferentes en el estudio del álgebra, por lo que el concepto es difícil para los estudiantes. Deben ser tratados como instrumentos para expresar relaciones y la investigación sugiere que puede ser útil para los estudiantes expresar verbalmente una generalización antes de intentar representarla mediante símbolos (Philipp, 1992).

El poco entendimiento que se tiene sobre el uso que se le da a los símbolos literales incrementa las dificultades que tienen los estudiantes respecto a la manipulación de ecuaciones. Con lo anterior, resulta preciso proporcionar a los estudiantes herramientas que permitan darle un sentido a los símbolos, característica del álgebra formal. Los símbolos no siempre estuvieron presentes, desde la época de los antiguos egipcios y babilonios, problemas matemáticos, incluso los problemas de contexto referentes a situaciones cotidianas, fueron escritos por completo en palabras al igual que sus procedimientos de solución. Debido a la impresión y el uso repetido de ciertos términos y palabras, los matemáticos comenzaron a utilizar abreviaturas para formar relaciones matemáticas. Al principio, cada grupo local de matemáticos tenían su propio sistema de simbolización, pero poco a poco los símbolos, así como los procedimientos se estandarizaron. Al respecto Arcavi (1994, 2007) resume los componentes más importantes para dar un sentido a los símbolos:

1) Familiaridad con los símbolos. Incluye la comprensión de los símbolos y un sentido estético de su poder – cuándo y cómo los símbolos pueden y deben ser usados con el objeto de exhibir relaciones, generalidades y demostraciones que de otra manera permanecerían ocultas e invisibles.

2) Capacidad para manipular y también "leer a través" de expresiones simbólicas, como dos aspectos complementarios en la resolución de problemas algebraicos. Permite por un lado, separarse de los significados y al mismo tiempo adoptar una visión global de las expresiones simbólicas, que son condiciones necesarias para que las manipulaciones sean relativamente rápidas y eficientes. Por otro lado, permite captar niveles de conexión y razonabilidad en los resultados.

3) Conciencia de que uno puede diseñar exitosamente relaciones simbólicas que expresen cierta información (verbal o gráfica) dada o deseada.

4) La capacidad de seleccionar una posible representación simbólica (es decir, elegir la variable a la cual asignar un símbolo), y en ciertos casos, reconocer nuestra propia insatisfacción con esa selección, prestarle atención e ingeniarse para buscar una mejor. Por ejemplo, en el proceso de resolución de un problema, hacer una pausa para considerar si sería más conveniente representar tres números consecutivos como $n, n+1, n+2$, ó $n-1, n, n+1$ o quizás como $n-2, n-1, n$.

5) Conciencia de la necesidad de revisar los significados de los símbolos durante la aplicación de un procedimiento, durante la resolución de un problema o durante la inspección de un resultado, y comparar esos significados con las intuiciones (o premoniciones) acerca de los resultados esperados y con la situación misma del problema. Considérese, por ejemplo, los problemas para ejercitar la acción y el lenguaje de las generalizaciones numéricas, como lo sería el siguiente ejemplo que en este caso requiere expresar la cantidad de sillas necesarias para acomodarlas alrededor de n mesas, de la siguiente manera:

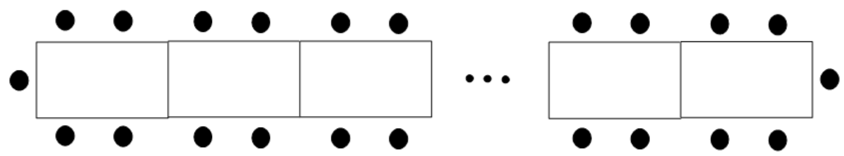


Figura 2.3 Generalización numérica

6) Conciencia de que los símbolos pueden desempeñar roles distintos en diferentes contextos y desarrollar un sentido intuitivo de esas diferencias. Considérese los distintos roles que pueden desempeñar las variables y los parámetros, y los distintos "tiempos de sustitución". Por ejemplo, en el caso de la expresión general de funciones lineales $y = ax + b$, tanto x, y (las variables) como b, a (los parámetros) representan números, pero los objetos matemáticos que uno obtiene al efectuar la sustitución, son muy diferentes. En términos del plano cartesiano, sustituir valores para x, y fija un punto del conjunto de todos los puntos, mientras que sustituir valores para b, a fija una línea (o una función lineal) del conjunto de todas las líneas posibles. Así, $y = b$ puede interpretarse de dos maneras diferentes: si fue el resultado de haber sustituido $x = 0$ (en $y = ax + b$), o si fue el resultado de haber sustituido $a = 0$ (en $y = ax + b$). En el primer caso, encontramos la ordenada (general) de un punto cuya abscisa es 0. En el segundo caso, encontramos la ecuación de una recta (general) cuya pendiente es 0.

El uso de las letras es una característica del álgebra y es preciso hacer hincapié en su significado, ya sea como incógnita, variable, parámetro, etc., pues son parte de un lenguaje que es fuente de múltiples dificultades por parte de los estudiantes al momento de operar con ellas.

Además de estos los diferentes temas tratados en las investigaciones sobre contenidos que son posibles de desarrollar en la escuela elemental para desarrollar el razonamiento algebraico, también es posible encontrar propuestas curriculares que pretenden el mismo objetivo y las cuales se describen en el siguiente apartado.

4. PROPUESTAS CURRICULARES PARA LA INTRODUCCIÓN DEL "ÁLGEBRA" EN PRIMARIA

Además de las propuestas realizadas a través de las diversas investigaciones sobre la introducción del álgebra en primaria, también se destacan las propuestas curriculares. En este sentido diversas directrices curriculares proponen introducir ideas y modos de pensar propias del álgebra desde los primeros niveles de educación primaria. Este es el caso de los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) donde se propone el Álgebra como uno de los cinco bloques de contenido, junto con Números y Operaciones, Geometría, Medida, Análisis de datos y Probabilidad para trabajar con los niños desde los primeros grados.
El NCTM propone incluir un bloque temático sobre álgebra en los diseños curriculares para la educación infantil y primaria. Para dicho bloque se establecen 4 estándares de contenido algebraico, a saber: Comprender patrones, relaciones y funciones; representar y analizar situaciones matemáticas y estructuras usando símbolos algebraicos; usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas y analizar el cambio en diversos contextos.

Como se indica en Aké, Godino y Gonzato (2013), éstos estándares han sido desarrollados de manera más explícita para los distintos niveles o grados en el documento *Curriculum Focal Points* (NCTM, 2006), donde se amplían y ejemplifican las directrices de los Principios y Estándares 2000. Los focos curriculares son temas y nociones matemáticas importantes que permiten estructurar y organizar un diseño curricular y unas secuencias de instrucción a lo largo de esos niveles. Son tres los criterios empleados para considerar un tema concreto como un foco curricular (p. 5):

1) Ha de ser matemáticamente importante desde el punto de vista de los estudios posteriores en matemáticas y también por su uso en aplicaciones dentro y fuera de la escuela.

2) Se debe ajustar a lo que ya se conoce sobre el aprendizaje de las matemáticas.

3) Ha de conectarse de manera lógica con las matemáticas en los niveles anteriores y posteriores.

Los puntos focales del NCTM (2006) han sido desarrollados por otro documento curricular más reciente en el que se proponen expectativas de aprendizaje más explícitas para cada uno de los grados escolares y cada dominio del contenido, en particular, el algebraico. Se trata del documento, *Common Core State Standards for Mathematics* (CCSSM, 2011).

Indicamos a continuación, para cada uno de los grados escolares de primaria, los contenidos algebraicos que se proponen en el CCSSM (2011), siguiendo el resumen publicado en Aké, Godino y Gonzato (2013).

4.1. EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE PARA LOS GRADOS 1 Y 2

El documento Common Core State Standard for Mathematics propone las siguientes directrices (p. 15):

Representar y resolver problemas de sumar y restar.

1. Resolver problemas verbales que requieren una suma de tres números cuya suma sea menor o igual que 20. Por ejemplo, usando objetos, dibujos, y ecuaciones con símbolos para el número desconocido para representar el problema.

Comprender y aplicar propiedades de las operaciones y las relaciones entre la suma y la resta.

1. Aplicar las propiedades de las operaciones como estrategias para sumar y restar (sin usar términos formales). Ejemplos: Si se conoce que $8+3=11$, entonces también se conoce que $3+8=11$ (Propiedad conmutativa de la adición). Para sumar $2+6+4$, los dos segundos números se puede sumar para tener una decena, de manera que $2+6+4=2+10=12$ (Propiedad asociativa de la adición).

2. Comprender la sustracción como un problema de sumando desconocido. Por ejemplo, restar $10-8$ encontrando el número que sumado a 8 da 10

Trabajar con ecuaciones que involucran la suma y la resta.

1. Comprender el significado del signo igual, y determinar si son verdaderas o falsas las ecuaciones que involucran la adición y sustracción. Por ejemplo, ¿cuáles de las

siguientes ecuaciones son verdaderas y cuáles falsas? $6 = 6$; $7 = 8 - 1$; $5 + 2 = 2 + 5$; $4 + 1 = 5 + 2$.

2. Determinar el número desconocido en una ecuación de suma o resta que relaciona tres números. Por ejemplo, determinar el número desconocido que hace verdadera la ecuación en cada una de las siguientes ecuaciones, $8 +$ � $= 11$; $5 =$ � $- 3$.

Para el grado 2 el CCSS propone similares directrices sobre álgebra que para el grado 1, en este caso involucrando las operaciones de sumar y restar números menores que 100.

4.2. EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE PARA EL GRADO 3

El documento CCSS incluye las siguientes directrices para desarrollar el pensamiento algebraico en el tercer grado:

Representar y resolver problemas que impliquen la multiplicación y la división

1. Determinar el número desconocido en una ecuación en la que interviene una multiplicación o una división relacionando tres números. Ejemplo: Determina el número que falta para hacer que la ecuación sea verdadera en cada una de las siguientes expresiones: $8 \times \blacktriangle = 48$; $5 =$ � $\div 3$.

Comprender las propiedades de la multiplicación y la relación entre multiplicación y división.

1. Aplicar las propiedades de las operaciones como estrategias para multiplicar o dividir. Ejemplos: Si se conoce que $6 \times 4 = 24$, entonces también se conoce que $4 \times 6 = 24$ (Propiedad conmutativa de la multiplicación). Sabiendo que $8 \times 5 = 40$ y que $8 \times 2 = 16$, se puede hallar 8×7 como $8 \times (5 + 2) = (8 \times 5) + (8 \times 2) = 40 + 16 = 56$ (Propiedad distributiva).

2. Comprender la división como un problema de factor desconocido. Por ejemplo, resolver $32 \div 8$ encontrando el número que multiplicado por 8 da como resultado 32.

Resolver problemas que implican las cuatro operaciones, e identificar y explicar patrones aritméticos.

1. Resolver problemas verbales de dos etapas usando las cuatro operaciones. Representar estos problemas usando ecuaciones con letras que están en lugar de la cantidad desconocida. Evaluar que las respuestas son razonables usando cálculo mental y estrategias de estimación, incluyendo el redondeo.

2. Identificar patrones aritméticos (incluyendo patrones en las tablas de sumar o de multiplicar), y explicarlos usando las propiedades de las operaciones. Por ejemplo, observar que 4 veces un número es siempre par, y explicar por qué 4 veces un número se puede descomponer en dos sumandos iguales.

4.3. EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE PARA EL GRADO 4

El documento CCSS incluye las siguientes directrices para desarrollar el pensamiento algebraico en el cuarto grado:

Usar las cuatro operaciones con números naturales para resolver problemas

1. Resolver problemas verbales de varias etapas planteados con números naturales y que tienen respuesta natural usando las cuatro operaciones, incluyendo problemas en los que el resto debe ser interpretado. Representar estos problemas usando ecuaciones con una letra para indicar la cantidad desconocida. Evaluar el carácter razonable de las respuestas usando cálculo mental y estrategias de estimación, incluyendo el redondeo.

Generar y analizar patrones.

1. Generar un patrón numérico o geométrico que sigue una regla dada. Identificar las características aparentes del patrón que no estaban explícitas en la propia regla. Por ejemplo, dada la regla "Sumar 3" y que empieza en el 1, generar términos de la secuencia resultante y observar que los términos aparecen alternando entre números pares e impares. Explicar informalmente porqué los números continuarán alternando de ese modo.

4.4. EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE PARA EL GRADO 5

En el grado 5 el CCSS se incluye la siguiente directriz en relación al desarrollo del razonamiento algebraico:

Analizar patrones y relaciones.

1. Generar dos patrones numéricos usando dos reglas dadas. Identificar relaciones aparentes entre los términos correspondientes. Formar pares ordenados constituidos por los términos que se corresponde en los dos patrones, y graficar pares ordenados sobre el plano de coordenadas. Por ejemplo, dada la regla "Sumar 3" empezando en el número 0, y dada la regla "Sumar 6" a partir del 0, generar términos de las secuencias resultantes, y observar que los términos de una secuencia son el doble de los términos correspondientes en la otra secuencia. Explicar informalmente porqué esto es así.

4.5. EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE PARA EL GRADO 6

El documento *Common Core State Standards for Mathematics* (2011) es más explícito en cuanto a los tipos de conocimientos y competencias algebraicas a desarrollar en los estudiantes de 6º grado. Concretamente proponen las siguientes directrices:

Aplicar y extender conocimientos previos de aritmética a expresiones algebraicas.

1. Escribir, leer, y evaluar expresiones en las que se usan letras en lugar de números.

    - Escribir expresiones que registren operaciones con números y con letras en lugar de sólo números. Por ejemplo, expresar el cálculo "Restar *y* de 5" como $5 - y$.

    - Identificar partes de una expresión usando términos matemáticos (suma, término, producto, factor, cociente, coeficiente); ver una o más partes de una expresión como una única entidad. Por ejemplo, describir la expresión $2(8 + 7)$ como un producto de dos factores; ver $(8 + 7)$ tanto como una única entidad como una suma de dos términos.

    - Evaluar expresiones para valores específicos de sus variables. Incluir expresiones que surjan de fórmulas usadas en problemas reales. Realizar operaciones aritméticas, incluyendo aquellas que implican exponentes naturales, en el orden convencional cuando no hay paréntesis para especificar un orden particular (orden de operaciones). Por ejemplo, usar las fórmulas

$V = s^3$ y $A = 6s^2$ para encontrar el volumen y área superficial de un cubo con lados de longitud $s = {}^1/_2$.

2. Aplicar las propiedades de las operaciones para generar expresiones equivalentes. Por ejemplo, aplicar la propiedad distributiva a la expresión $3(2 + x)$ para producir la expresión equivalente $6 + 3x$; aplicar la factorización a la expresión $24x + 18y$ para producir la expresión equivalente $6(4x + 3y)$; aplicar las propiedades de las operaciones a $y + y + y$ para producir la expresión equivalente $3y$.

3. Identificar cuando dos expresiones son equivalentes (esto es, cuando las dos expresiones designan al mismo número independientemente de qué valor se sustituye en ella). Por ejemplo, las expresiones $y + y + y$ y $3y$ son equivalentes porque designan el mismo número cualquiera que sea el valor que tome y.

Razonar sobre y resolver ecuaciones e inecuaciones con una variable.

1. Comprender la resolución de una ecuación o inecuación como un proceso de responder una cuestión: ¿qué valores de un conjunto especificado, si existe, hace la ecuación o inecuación verdadera? Usar la sustitución para determinar si un número dado en un conjunto específico hace a una ecuación o inecuación verdadera.

2. Usar variables para representar números y escribir expresiones cuando se resuelve un problema matemático o del mundo real; comprender que una variable puede representar un número desconocido, o, dependiendo del propósito que se tenga, cualquier número de un conjunto específico.

3. Resolver problemas matemáticos o del mundo real escribiendo y resolviendo ecuaciones de la forma $x + p = q$, para casos en que p, q y x son números racionales no negativos.

4. Escribir una inecuación de la forma $x > c$, o $x < c$ para representar una restricción o condición en un problema matemático o del mundo real. Reconocer que las desigualdades de la forma $x > c$, o $x < c$ tienen un número infinito de soluciones; representar soluciones de tales inecuaciones sobre diagramas numéricos lineales.

Representar y analizar relaciones cuantitativas entre variables dependientes e independientes

1. Usar variables para representar dos cantidades en un problema del mundo real que cambian en relación a otra; escribir una ecuación para expresar una cantidad, pensada como variable dependiente, en términos de la otra cantidad, pensada como variable independiente. Analizar la relación entre las variables dependiente e independiente usando gráficas y tablas, y relacionar estas a la ecuación. Por ejemplo, en un problema que implica movimiento con velocidad constante, listar y graficar pares ordenados de distancias y tiempos, y escribir una ecuación como $d = 65t$ para representar la relación entre distancia y tiempo.

5. PROPUESTAS TEÓRICAS SOBRE CARACTERIZACIONES DEL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO

Dada la complejidad que implica la introducción del razonamiento algebraico parece no ser suficiente con identificar temáticas sobre las cuales trabajar con los niños para promover su desarrollo, ni seguir propuestas curriculares. Se precisa un marco de referencia sobre la naturaleza del álgebra que permita identificar qué es lo que se puede considerar como algebraico en los niveles elementales. En el siguiente apartado se recogen las diferentes caracterizaciones del álgebra y el razonamiento algebraico que se han propuesto en diferentes investigaciones para dar luz a lo que se le llamaría "álgebra en la escuela elemental". Posteriormente, dada su incidencia en las diversas propuestas, situamos a la generalización y al uso de un lenguaje específico para expresar dicha generalidad como elementos clave de la actividad algebraica, y que por tanto, merecen especial énfasis.

5.1. DIFERENTES ENFÓQUES DEL ÁLGEBRA

En un primer plano, parece importante distinguir entre lo aritmético, pre-algebraico y algebraico y diferenciarlos del "Early-Algebra". Entre lo aritmético y lo algebraico parecen claras las diferencias respecto a la interpretación de letras, símbolos, expresiones y el concepto de equivalencia. Por ejemplo, en aritmética las letras son usualmente abreviaturas o unidades de medida, mientras que las letras algebraicas son utilizadas como variables o números desconocidos. Respecto al pre-algebra, se interpreta como una zona transicional que involucra un pensamiento algebraico y una simbolización informal en un entorno aritmético (Ameron, 2002). Parece prudente, de este modo, centrarse en una distinción de lo pre-algebraico y el "Early Algebra", pues ambos enfoques están relacionados con la enseñanza de la matemática previa a la formalización del álgebra. Sin embargo, su finalidad es diferente: mientras que el pre-álgebra permite mitigar las dificultades que muestran los estudiantes al iniciar el estudio del álgebra como lo serían las atribuidas a las diferencias entre la aritmética y el álgebra, el enfoque "Early Algebra" considera el desarrollo del pensamiento algebraico en la edad temprana de los niños y toma una postura diferente respecto a las dificultades del álgebra, sustentando que éstas son debidas a la manera en que las matemáticas elementales son introducidas (Carraher y Schliemann, 2007).

Entonces, ¿qué es el "Early Algebra", si no es el álgebra que a la mayoría de nosotros se nos enseñó? El "Early Algebra" se trata de un enfoque novedoso, o una familia de enfoques para la interpretación y aplicación de los temas ya existentes de la matemática elemental. Se diferencia del álgebra que comúnmente encontramos en la escuela secundaria, pues se basa en gran medida en los contextos de los problemas que sirven de base, sólo poco a poco se introduce la notación formal, estando estrechamente entrelazada con temas del currículo de la matemática elemental (Carraher, Schliemann y Schwartz, 2007). Esto es posible debido a que el álgebra reside implícitamente dentro del currículo de la matemática elemental en problemas de palabras; en tópicos como la adición, sustracción, multiplicación, división, razón, proporción, número racional, medición; y en los sistemas de representación como gráficas, tablas, notación aritmética y escrita, exploración de estructuras (Carraher y Schliemann, 2007). De este modo, resulta que el "Early Algebra" no es lo mismo que la enseñanza del álgebra: en este enfoque los profesores ayudan a sus alumnos, a reflexionar profundamente sobre temas ordinarios de la matemática elemental, expresan la generalización y el uso de representaciones simbólicas que se convierten en objetos de análisis y deducción. Por tanto, el aprendizaje desde este enfoque implica un cambio conceptual, en el que a partir de casos particulares se pasa a los conjuntos de casos y sus relaciones (Carraher, Schliemann, y Schwartz, 2007). Se refiere al pensamiento algebraico que nace de una serie de actividades sobre los números, geometría y medición realizadas en la escuela elemental. Existe una necesidad de expresar las relaciones que se revelan, y que cualquier planteamiento formal sólo debe introducirse cuando los estudiantes están preparados. De esta manera, se coloca una base para el uso de los símbolos que expresan generalidades de manera concisa y se trasmite un significado independiente de las actividades con las que se establecieron.

Es preciso mencionar que no existe un punto de vista unificado sobre este enfoque; algunos autores consideran que se debe promover el desarrollo de los aspectos algebraicos que ya posee el pensamiento de los niños como lo son el razonamiento numérico y aritmético. Otros autores consideran por el contrario que los cambios en la forma de pensar de los niños deben ser promovidos de mejor modo mediante el uso de herramientas, tales como notaciones y diagramas, que les permitan operar en un nivel más elevado de generalidad (Lins y Kaput, 2004). Esta discrepancia ha llevado a algunos autores a proponer diversas caracterizaciones sobre la actividad algebraica que pudiera clarificar el enfoque "Early Algebra" y la naturaleza del álgebra en general. A continuación describimos cada una de estas propuestas:

Bednarz, Kieran y Lee (1996) distinguen cinco concepciones diferentes referentes al álgebra: (a) El álgebra como expresión de la generalización de patrones numéricos y geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas, (b) el álgebra como una herramienta para la resolución de problemas, (c) como la modelización de fenómenos físicos, usando variedad de representaciones, y (d) el álgebra como el estudio de las funciones.

Otra propuesta para caracterizar el álgebra es la realizada por Usiskin (1989). Esta autora distingue cuatro concepciones del algebra que relaciona fuertemente con el uso de las variables. La primera concepción hace hincapié en el álgebra como generalización de la aritmética y se piensa en variables como generalización de patrones para obtener propiedades. Por ejemplo:

$$3 \cdot 5 = 15$$
$$2 \cdot 5 = 10$$
$$1 \cdot 5 = 5$$
$$0 \cdot 5 = 0$$

Esto puede ser extendido a los números negativos como:

$$-1 \cdot 5 = -5$$
$$-2 \cdot 5 = -10$$

Esta idea se puede generalizar para obtener propiedades como:

$$-x \cdot y = -xy$$

El álgebra como un estudio de procedimientos para la solución de determinados problemas, es la segunda concepción que distingue esta autora; bajo este punto de vista las variables pueden ser incógnitas o constantes. La tercera concepción distingue al álgebra como un estudio de relaciones entre cantidades; con esta concepción se inicia el estudio de las fórmulas, aquí las variables varían y se piensa en ellas como parámetros o como argumentos. Es importante mencionar que sólo en esta concepción existen las nociones de variable dependiente e independiente. El álgebra como el estudio de estructuras, es la cuarta concepción, y se refiere al estudio del álgebra en niveles superiores, involucra estructuras tales como grupos, anillos, dominios y espacios vectoriales. Por ejemplo:

Considérese lo siguiente:

$$factoriza\ \ 3x^2 + 4ax - 132a^2$$

Como se puede apreciar la concepción de la variable representada aquí no se ha tratado previamente. No hay ninguna función o relación, la variable no es un argumento. No hay ecuación que deba resolverse, por lo que la variable no está actuando como una incógnita (o valor desconocido). No existe un patrón que generalizar.

La respuesta $(3x + 22a)(x + 6a)$ podría ser comprobada por la sustitución de valores para x y a en el polinomio dado y en la respuesta de los factores obtenidos, pero esto casi nunca se hace, por lo que el estudiante no percibe con profundidad el procedimiento realizado.

Por su parte, Kaput (1998, 2000) señala que el álgebra debe presentar, (a) la generalización de patrones y relaciones (particularmente la generalización de la aritmética y del razonamiento cualitativo), (b) el estudio de funciones y relaciones, (c) el estudio de estructuras y sistemas abstraídos de cálculos y relaciones, (d) un conjunto de lenguajes de modelización y control de fenómenos, y (e) la manipulación sintácticamente guiada de formalismos.

El National Council of Teachers of Mathematics también manifiesta su preocupación por el aprendizaje del álgebra y sostiene que la competencia algebraica es importante en la vida adulta, tanto para el trabajo como para la educación postsecundaria y por esa razón todos los estudiantes deberían aprender algebra. El NCTM (2000) distinguen como componentes del *estándar* de álgebra los siguientes aspectos:

1) Comprender patrones, relaciones y funciones.

2) Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos.

3) Usar modelo matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas.

4) Analizar el cambio en contextos diversos.

Por su parte, Burkhardt (2001) propuso una taxonomía para lo que significa hacer álgebra; para este autor la actividad algebraica comprende: invertir relaciones funcionales, construir demostraciones simbólicas generales, formular comandos algebraicos de programación, también menciona la importancia de extender patrones numéricos y geométricos; formular reglas verbales para expresar las generalizaciones de los patrones; sustituir números en formulas y calcular los resultados y, formular reglas verbales para relaciones funcionales o para brindar explicaciones para resultados generales.

Otra caracterización que se suma a las anteriores, es la que propone Drijvers (2008) quien distingue cinco enfoques de algebra: (a) El álgebra como un medio para resolver problemas, problemas que, se caracterizan por encontrar qué valor de la incógnita satisface las condiciones del problema; (b) el segundo enfoque versa sobre el estudio de las funciones, este enfoque funcional se ve principalmente como un medio para formular e investigar las relaciones entre las variables. Se trata de la covariación y la dinámica: ¿cómo es que un cambio en el valor de una variable afecta a la otra? (c) El álgebra como generalización, patrones y estructuras, es el tercer enfoque propuesto, se centra en la generalización de relaciones, y la investigación de los patrones y estructuras; aquí las variables son números generalizados. (e) El cuarto enfoque es el álgebra como lenguaje, en este enfoque se considera el álgebra como un medio para expresar ideas matemáticas y en el que la sintaxis, los símbolos y notaciones son necesarios. Este enfoque percibe el álgebra como un sistema de representaciones, como un sistema semiótico en el que las variables no son más que símbolos que no se refieren a un significado específico en un contexto determinado; y por último un quinto enfoque (f) el álgebra desde una perspectiva histórica, aquí se sustenta que el desarrollo histórico del álgebra es una fuente de inspiración para el desarrollo de una trayectoria de aprendizaje.

Kieran (2007), apoyándose en propuestas de diversos autores, elabora un modelo que sintetiza las actividades del álgebra escolar en tres tipos: generacional, transformacional, y global o de meta-nivel. Las actividades de tipo *generacional* implican la formación de expresiones y ecuaciones, las cuales considera como los objetos del álgebra. Incluye en esta categoría como ejemplos típicos, a) ecuaciones que contienen una incógnita que representan situaciones problema, b) expresiones de generalidad que surgen de patrones geométricos o secuencias numéricas, c) expresiones de reglas que gobiernan relaciones numéricas.

Las actividades de tipo *transformacional* (o actividades basadas en reglas), incluyen, por ejemplo, agrupar términos semejantes, factorizar, desarrollar, sustituir una expresión por otra, sumar y multiplicar expresiones polinómicas, resolver ecuaciones e inecuaciones, simplificar expresiones, sustituir valores numéricos en expresiones, trabajar con ecuaciones y expresiones equivalentes, etc. Aunque la mayor parte de estas actividades se interesan por los cambios en la forma simbólica de una expresión o ecuación que mantienen la equivalencia, esto no implica que se trate de actividades rutinarias ya que su justificación implica la aplicación de axiomas y propiedades de las estructuras correspondientes.

La tercera categoría de actividades propuesta por Kieran y denominada *global* /o de nivel meta, sugiere el uso de procesos matemáticos más generales. Son actividades para las que el álgebra se usa como una herramienta, pero que no son exclusivas del álgebra. En concreto se incluye en esta categoría, resolución de problemas, modelización, estudio de patrones generalizables, justificar y probar, formular predicciones y conjeturas, estudiar el cambio en situaciones funcionales, buscar relaciones o estructura, etc. –"actividades que se pueden ciertamente realizar sin usar expresiones simbólico-literales algebraicas"- (p. 714).

Todas las investigaciones anteriores respecto a los aspectos que caracterizan al álgebra llevan consigo el fin de ponerlos en práctica para desarrollar el razonamiento algebraico en los estudiantes. Respecto a esto, Kieran (2007) menciona que:

> El razonamiento algebraico puede interpretarse como una aproximación cuantitativa a las situaciones que hace hincapié en los aspectos generales de relaciones con herramientas que no son necesariamente literal-simbólico,

> pero que en última instancia, puede ser utilizado como apoyo cognitivo de creación y para sostener el discurso más tradicional de la escuela sobre el álgebra (p. 275).

Por su parte Carraher y Schliemann (2007) mencionan que el razonamiento algebraico se refiere a un proceso psicológico que involucra resolución de problemas que pueden ser expresados matemáticamente de manera fácil usando notación algebraica.

Kieran (2004) menciona que el razonamiento algebraico en los grados elementales involucra el desarrollo de formas de pensamiento en actividades para las que el álgebra simbólico-literal puede ser utilizada como herramienta, pero que no son exclusivos ya que se puede estar involucrado en el álgebra sin usar ningún símbolo literal en absoluto. Por ejemplo, al analizar las relaciones entre cantidades, al notar la estructura, el estudio del cambio, generalización, resolución de problemas, el modelado, justificación, prueba y predicción. Involucra una actividad de generalización de los estudiantes sobre datos y relaciones matemáticas, estableciendo generalizaciones a través de la conjetura y la argumentación, y expresándolos mediante formas cada vez más formales (Kaput y Blaton, 2002).

Esta discrepancia entre opiniones llevan a Carraher y Schliemann (2007) a afirmar que la mayoría de los autores han trabajado sobre dimensiones específicas de interés y que relativamente pocos han tratado de caracterizar el campo del algebra y el razonamiento algebraico de manera exhaustiva. Esta observación lleva a los autores citados a considerar que posiblemente el análisis del razonamiento algebraico está todavía en su infancia y su caracterización también. Sin embargo, parece ser que de lo que no se duda es que la generalización resulta fundamental para que una tarea pueda tener un carácter algebraico; como lo afirman Kaput y Lins (2004) al establecer que las características claves del razonamiento algebraico son:

1. Involucra actos de generalización deliberada y expresiones de generalidad.
2. Involucra un razonamiento basado en las formas de generalizaciones sintácticamente-estructuradas, incluyendo acciones sintácticas y semánticamente guiadas.

En este sentido, como lo manifiestan Carpenter y Levi (2000), al considerar como núcleo fundamental del pensamiento algebraico a las generalizaciones y el uso de símbolos para representar ideas matemáticas, se puede pensar en estos dos componentes, íntimamente relacionados, como la base del razonamiento algebraico (Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006). En los apartados siguientes hacemos alusión a esta idea.

5.2. EL ÁLGEBRA COMO UN PROCESO DE GENERALIZACIÓN

Dörfler (1991) equipara abstracción con generalización y esta última la vincula con el uso de variables, rasgo característico del álgebra. Distingue entre generalizaciones empíricas y teóricas. Las generalizaciones empíricas se basan en el reconocimiento de características o cualidades comunes a los objetos o situaciones, mientras que las teóricas se derivan de la identificación de invariantes esenciales en sistemas de acción (materiales o mentales), así como en las condiciones de realización o los resultados de dichas acciones. “Las generalizaciones teóricas no tienen sus raíces exclusivamente en las propias cosas sino en la creación, transformación y actividad operativa, en las acciones de los seres humanos” (p. 84). El papel esencial que tienen los símbolos en los procesos de generalización, como variables referenciales de los elementos que intervienen en la acción y las relaciones entre ellos, lleva a Dörfler a concluir que “generalizar significa construir variables” (p.84). En este sentido, Kieran (1989, p, 165), afirma que “para una caracterización significativa del pensamiento algebraico no es suficiente ver lo general en lo particular, se debe ser capaz de expresarlo algebraicamente”. Esa expresión es una condición previa para la “manipulación” de las representaciones simbólicas que produce otras equivalentes más útiles para la resolución de los problemas. Así, tanto en las situaciones que requieren generalización como para el manejo de las incógnitas, se precisa utilizar una forma analítica de expresión característica y eficaz, usualmente alfanumérica.

Sin embargo, una tendencia reciente entre los investigadores propone separar el simbolismo algebraico del pensamiento algebraico. “Esta consideración separada es impulsada por dos factores: (1) el reconocimiento de la posibilidad de manipulación simbólica sin sentido, y (2) la tendencia en la escuela elemental de introducir el ‘álgebra temprana’, esto es, focalizar la atención en la estructura más bien que en el cálculo” (Zazkis y Liljedahl, 2002, p. 398). En la perspectiva del “álgebra temprana”, el reconocimiento de lo general desempeña un papel esencial como condición previa de la expresión. Kaput y Blanton (2001) ven la generalización y la expresión sistemática progresiva de la generalidad como subyacente a todo el trabajo que hacemos en álgebra.

El simbolismo algebraico es el lenguaje que da voz al pensamiento algebraico, "el lenguaje que expresa la generalidad" (Mason, 1996). Pero, la naturaleza de dicho lenguaje puede ser diversa. Hay un desfase entre la habilidad de los estudiantes para reconocer y expresar verbalmente un cierto grado de generalidad y la habilidad para emplear la notación algebraica con facilidad. English y Warren (1998) consideran que la parte más difícil es expresar algebraicamente las generalizaciones.

Por su parte Radford (2003), al estudiar los tipos de generalización de patrones numérico-geométricos por estudiantes de secundaria, identifica la puesta en funcionamiento por dichos estudiantes de dos tipos de generalización pre-algebraica: la generalización factual, y la generalización contextual. En el primer tipo se trata de una generalización de acciones en la forma de un esquema operacional, esquema que permanece ligado al nivel concreto de uso de los símbolos numéricos, a términos deícticos y gestos, como medios semióticos de objetivación; lo general o lo indeterminado quedan sin nombrar. Las generalizaciones contextuales suponen un nivel más avanzado, sin alcanzar el nivel de las generalizaciones simbólicas algebraicas; en este caso se generalizan no solo las acciones numéricas sino también los objetos y las acciones. "Van más allá del dominio de las figuras específicas y tratan con objetos genéricos (como la figura) que no pueden ser percibidos por nuestros sentidos" (p. 65). Con ser esencial para el álgebra, la generalización no se estudia exclusivamente de manera algebraica, ni todas las actividades algebraicas involucran generalización.

5.3. EL ÁLGEBRA COMO LENGUAJE

Las investigaciones recientes en educación matemática marcan una tendencia a considerar a la matemática como un lenguaje, los sistemas simbólicos y los objetos simbolizados hacen de ésta, un lenguaje propio, sustentado en el lenguaje natural (Fernández, 1997). Por lo tanto, el álgebra precisa ser un lenguaje que tiene la función de facilitar la expresión de los conceptos matemáticos. Las reflexiones que incluimos a continuación sobre la visión del álgebra como lenguaje son un resumen e interpretación personal de las ideas contenidas al respecto en el texto de Filloy, Puig y Rojano (2008).

Dicho libro constituye un verdadero tratado sobre el álgebra, desde un punto de vista educativo, basado en sus propias investigaciones realizadas, desde los años 80.

Como se describe en el mencionado texto, entre los autores que se han interesado en estudiar el lenguaje matemático desde el punto de vista educativo nos encontramos a Pimm (1987) que en su libro "Speaking Mathematically" aborda dicho análisis con herramientas de la lingüística teórica. Su estudio también aborda el tema del papel del lenguaje natural en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con un énfasis especial en cómo los significados asignados a las palabras en el lenguaje coloquial son transferidos de manera espontánea por los niños, a las matemáticas, lo que conlleva a un conflicto al momento de aprender el lenguaje algébrico, pues mientras el lenguaje natural puede comunicar significados a pesar de los abusos sintácticos que muchas veces se cometen, el lenguaje algebraico es preciso, obedece a reglas exactas, y no tiene significado salvo por la interpretación rigorosa de sus símbolos. Cuando trata el tema del formalismo del lenguaje, Pimm aborda necesariamente el tema del simbolismo algebraico ya que es una referencia esencial cuando se habla de un sistema de símbolos matemáticos, de su sintaxis y gramática.

Por otro lado, Duval (1995; 2006) ha desarrollado un marco teórico extenso y consistente sobre el papel de los registros de representación semiótica en el aprendizaje matemático, incluyendo, por tanto, los registros de índole algebraica, junto con los restantes (lengua natural, lenguaje geométrico, etc.). La variedad de sistemas semióticos de representación en matemáticas (gráficos, fórmulas, tablas, figuras geométricas, etc.) y las conversiones entre ellos son un tema central en los trabajos de Duval. Este autor sostiene que uno de los mayores problemas en la semiosis (producción, interpretación y transformación de signos) tiene lugar en los casos de no congruencia en los procesos de conversión entre las representaciones. La coordinación de registros por los alumnos es considerada como condición necesaria para la aprehensión conceptual en matemáticas. Dentro de su marco teórico Duval trata con las diferencias y relaciones entre la lengua natural y los lenguajes formales, en particular la geometría y la lógica como casos ilustrativos de las traducciones entre la lengua natural y el lenguaje formal. Este estudio también se podría aplicar al caso del álgebra, en particular las cuestiones relacionadas con los problemas de "puesta en ecuación", donde se debe traducir el texto de un problema escrito en lengua natural al lenguaje algebraico. El autor alude al simbolismo algebraico cuando trata la conversión de expresiones algebraicas y gráficos cartesianos, aunque sin hacer un estudio específico del lenguaje algebraico.

Brown (2001) es otro autor que analiza el carácter instrumental del lenguaje en el desarrollo de la comprensión matemática. Utiliza ejemplos tomados de la investigación en educación matemática para estudiar cómo el lenguaje influye en la actividad desarrollada en el marco normativo de una situación dada. Una de las implicaciones de este análisis es que el aprendizaje se puede ver como una reconciliación entre modos convencionales y potenciales de describir una tal situación, desde el punto de vista de los alumnos y los profesores. Por este motivo utiliza, entre otros recursos metodológicos la noción de narrativa, introducida por el filósofo francés Ricoer, y la aplica al estudio de los fenómenos de transición entre la aritmética y el álgebra, usando resultados de otras investigaciones. De esta manera, los resultados de estudios previos sobre dicha transición logran una nueva dimensión, la visión de los individuos que tienen la experiencia de la transición y que usan sus propios medios de expresión para narrar su apreciación de los límites entre la aritmética y el álgebra.

Los trabajos de Pimm, Duval y Brown analizan las relaciones entre el lenguaje (oral, escrito,...) y el aprendizaje de las matemáticas desde diferentes perspectivas teóricas (teoría lingüística, semiótica, sociología crítica y hermenéutica). Una postura diferente a la adoptada por Radford, Filloy y colaboradores.

Radford (2003; 2006) adopta de Vygotsky la idea de que la cognición humana está ligada al uso de signos, por lo que deja de ser central lo que los signos representan y en su lugar lo importante es lo que nos permiten hacer (visión pragmática-antropológica sobre el significado). Además, estos signos forman parte de sistemas de signos y trascienden las cogniciones del individuo al formar parte de una cultura. Desde esta perspectiva Radford analiza tanto la emergencia del pensamiento algebraico en los alumnos que están iniciando el estudio del álgebra y la emergencia del simbolismo algebraico en la historia.

El libro de Filloy, Puig y Rojano (2008) "Educational Algebra", forma parte de los intentos por teorizar sobre las relaciones entre las matemáticas, el lenguaje y la educación, con una atención especializada en el lenguaje del álgebra. Asumen principalmente una perspectiva semiótica pragmática e histórica y favorecen de este modo una visión del significado como uso, más que formal y referencial; el foco de atención del análisis es la actividad de los individuos con el lenguaje del álgebra y la adquisición progresiva de competencia algebraica. Autores como Radford, Filloy y cols defienden que uno de los rasgos característicos del álgebra es el empleo de una escritura específica: el uso de letras, frecuentemente combinadas con números para designar "sus objetos", viene a ser algo propio del álgebra. Pero otro rasgo propio del álgebra, quizás más importante que la designación o referencia a entidades extensivas indeterminadas, o a objetos intensivos con mayor o menor grado de generalidad, es la de establecer relaciones, operaciones, cambios o transformaciones que se realizan con tales entidades algebraicas. Para ese trabajo, la "economía expresiva" del uso de las inscripciones alfanuméricas es fundamental, resultando por tanto que tal simbolismo viene a ser un instrumento del trabajo algebraico, y no tanto, un medio de representación. Con el simbolismo algebraico básicamente "se hacen" cosas, más que se representan cosas.

5.3.1. Sistemas matemáticos de signos

Filloy, Puig y Rojano (2008) utilizan la noción de "sistema matemático de signos"[4] (mathematical sign system, MSS) para dar cuenta, entre otras cosas, de las relaciones simbióticas entre las diferentes formas de expresión en el trabajo matemático, en particular, las relaciones entre el lenguaje algebraico y el lenguaje natural. Adoptan una perspectiva semiótica - pragmatista (Peirce, 1978) en la manera triádica de concebir los signos en lugar de una perspectiva diádica (Saussure, 1915) más usada en los estudios lingüísticos. La aproximación sistémica a los signos matemáticos está motivada por la constatación de que el significado de cualquier notación, expresión o texto matemático depende del resto de los objetos o elementos que le acompañan.

En la perspectiva semiótica pragmatista la noción de signo no queda restringida a los elementos lingüísticos, palabras, o inscripciones, sino que abarca los tres elementos que participan del signo peirceano: el representamen, el objeto y el interpretante. Como afirman Filloy y cols (2008) es usual, cuando se describe el lenguaje en que se escriben los textos matemáticos, distinguir entre los signos entendidos como matemáticos en sentido estricto y los que corresponden al lenguaje ordinario. Sin embargo, desde el punto de vista de los procesos de significación, esta distinción no es crucial, ya que es necesario tener en cuenta el sistema como un todo, y lo que se debe

[4] El Sistema Matemático de Signos (SMS) usualmente es conocido como sistema de representación simbólico.

describir como matemático es el sistema y no los signos; de aquí que prefieran hablar de sistema matemático de signos, ya que el sistema es el responsable del significado de los textos. Es la naturaleza del sistema lo que es matemático y no los signos individuales. Si aplicamos esta idea al caso del álgebra tendríamos la consecuencia de que la consideración de un texto como de naturaleza algebraica no se debería hacer con base meramente a la presencia de cierto tipo de inscripciones aisladas, expresiones alfanuméricas, sino al sistema de objetos referidos por dichas expresiones, sus interpretaciones y el sistema de prácticas de las cuales participan.

5.3.1.1. Las expresiones algebraicas como iconos

Según la relación que los signos tengan con el objeto, Peirce (1978) realiza la siguiente clasificación:

Iconos: Tienen una relación de semejanza, en tanto se parecen al objeto que representan. La relación con aquello a lo que se refieren es directa, por ejemplo: pinturas, retratos, dibujos figurativos, mapas, etc. La representación muestra la estructura u organización del objeto.

Índices: La relación con los objetos que representan es de contigüidad (relación de causa-efecto) con respecto a la realidad. Por ejemplo, un rayo (es índice de tormenta), una huella (es índice de alguien que pasó por ahí), etc.

Símbolos: Frente a los iconos y los indices (o síntomas), según Peirce los símbolos son signos inmotivados, en los que la relación entre el significante y el significado es totalmente convencional. Ejemplo: palabras, logotipos, escudos de armas, señales de tránsito.

Los diferentes tipos de signos pueden combinarse, en el caso particular de la fotografía, por ejemplo se trataría de un icono (en tanto hay una relación de semejanza con el objeto) pero también es índice puesto que la fotografía se ve afectada por el objeto que representa (la fotografía se produce a través de registrar diferencias lumínicas de aquello que representa).

Filloy, Puig y Rojano (2008) explican con claridad el carácter de iconos de las expresiones algebraicas, en el marco de la semiótica Peirceana. Las expresiones algebraicas son iconos porque como signos tienen las propiedades de los objetos que las componen. Una característica que distingue a los iconos es que mediante la observación directa del mismo se pueden descubrir otras verdades relativas al objeto distintas de las que son suficientes para determinar su construcción. Esta capacidad de revelar verdades no esperadas es precisamente en lo que radica la utilidad de las fórmulas algebraicas, por lo que su carácter icónico es el que prevalece. Así, por ejemplo, la expresión $y = x^2 - 2x + 1$, es una parábola; la mera expresión informa de las propiedades esenciales de dicho objeto matemático.

Sin embargo, las letras de las expresiones algebraicas, tomadas de manera aislada, no son iconos, sino índices: cada letra es un índice de una cantidad. No son símbolos. Si la expresión algebraica es el resultado de la traducción de un enunciado verbal de un problema aritmético-algebraico, cada letra específica representa una cantidad específica como resultado de la convención establecida por la persona que hace la traducción. Por el contrario, los signos +, =, /, etc., son símbolos en el sentido de Peirce. En las expresiones algebraicas encontramos, por tanto, ejemplo de la imbricación de los tres tipos de signos en la escritura matemática: las letras funcionan como índices, los signos de las operaciones, igualdad, desigualdad, etc. son símbolos, mientras la expresiones como un todo funcionan como un icono.

Una perspectiva diferente para analizar al lenguaje algebraico es la adoptada por Drouhard y Teppo (2004) cuyo marco interpretativo no se ciñe solo a una perspectiva lingüística o semiótica. Identifican 3 componentes del lenguaje algebraico: el lenguaje natural (palabras), las escrituras simbólicas algebraicas ($2x - 3 = 7$) y representaciones compuestas algebraicas (un sistema de signos integrado por escritos simbólicos y dibujos).

Los autores describen los componentes del lenguaje, en específico, del lenguaje algebraico usando niveles de análisis, tales como la sintaxis (la transformación de los símbolos), la semántica (el nivel de significado) y la pragmática (relación entre los signos y sus usuarios). Por tanto, el *lenguaje natural* como componente del algebra es, claramente, un lenguaje. Lo que no es tan obvio es que la *escritura simbólica*, es también un lenguaje que puede ser descrito usando niveles de análisis lingüísticos. Por el contrario, el *sistema de representaciones compuestas* no se ajusta con una caracterización particular de un lenguaje (no todos los sistemas de signos son un lenguaje). A pesar de que es sólo un sistema de signos, las representaciones compuestas son realmente entidades complejas que pueden ser descritas y analizadas utilizando la semántica y no la lingüística. De este modo, los signos (si no son parte de un lenguaje) deben ser estudiados con un marco semiótico (y no lingüístico), mientras que los signos lingüísticos como la x (que son parte de un lenguaje) deberían ser estudiadas por primera vez con un marco lingüístico. De estas ideas se desprende que los autores defiendan que la clasificación de Peirce de los signos no es útil para los símbolos lingüísticos (y por lo tanto es inadecuado para comprender dificultades que los estudiantes presentan con el uso de las letras algebraicas).

Independientemente de la perspectiva asumida, el álgebra resulta ser un lenguaje fuente de conflictos y fracasos en las matemáticas, pero necesario para la transmisión del significado matemático, trasmisión que exigen a los estudiantes expresar el significado matemático verbalmente, a través del lenguaje natural, y visualmente mediante los símbolos, gráficos, y representaciones propios de las matemáticas (Férnandez, 1997). Sin embargo estos conflictos pueden aminorarse dado que la mayor parte de las expresiones y manipulaciones algebraicas pueden ser explicadas a partir de las expresiones y manipulaciones aritméticas, parece factible, entonces, pensar que a través de la correcta enseñanza de la aritmética se desarrolle el razonamiento algebraico (Usiski, 1995).

Al hablar de la "correcta enseñanza" de la aritmética se precisa hacer alusión al profesor como promotor del razonamiento algebraico. En el siguiente apartado explicitamos algunas investigaciones sobre la formación de profesores en didáctica del álgebra.

6. FORMACIÓN DE PROFESORES: EL CONOCIMIENTO DEL MAESTRO DE PRIMARIA SOBRE EL ÁLGEBRA

A pesar de que la comunidad de investigadores saben muy poco acerca de cómo los profesores de álgebra enseñan álgebra, esto no quiere decir que no ha habido una considerable investigación sobre nuevos enfoques de la enseñanza del álgebra (Kieran, 1992). De hecho, existen investigaciones que abordan la práctica y la formación de profesores en esta área de las matemáticas. Por un lado, la investigación que se ha llevado a cabo en el contexto de la formación en servicio de los profesores de álgebra se ha centrado en dos áreas en particular, la integración de los nuevos planes de estudio, métodos de enseñanza, y el ambiente tecnológico en el salón de clases de álgebra, así como también, la naturaleza del conocimiento de los contenidos de álgebra y las creencias de los profesores. Por otro lado, la investigación sobre el futuro profesor de álgebra, aunque sigue siendo un área relativamente poco desarrollada desde la investigación, ha ido creciendo de forma constante. La complejidad del proceso de educar a los estudiantes para ser profesores de matemáticas se refleja en los programas que no intentan simplemente comunicar métodos de instrucción, sino también hacer hincapié en la participación de los futuros docentes en un proceso que conduce a construir el conocimiento. Sin embargo, la investigación que informa acerca de la naturaleza de esta complejidad en la formación es todavía bastante rara, especialmente con respecto a la enseñanza de álgebra. En este sentido la perspectiva más utilizada para enmarcar los estudios sobre el profesor de álgebra se base en la propuesta de Shulman (1986) sobre el conocimiento del profesor (Kieran 2007). La propuesta de Shulman y las diversas investigaciones enmarcadas en la misma línea como son las de Ball, (2000); Hill, Ball y Schilling (2008), Godino (2009) implican avances en la categorización y caracterización de los conocimientos del profesor. De hecho, desde principios de los noventas, las investigaciones en educación matemática han intentado caracterizar los componentes del conocimiento del profesor, principalmente el conocimiento pedagógico del contenido, en varias áreas de las matemáticas, incluyendo el álgebra. Sin embargo la mayoría de las investigaciones se han centrado en temas sobre la relación de los futuros profesores y el conocimiento del contenido de la materia, creencias y actitudes (Kieran, 2007).

Ahora bien, situándonos en el contexto de la escuela elemental, las investigaciones relativas a la formación de maestros también es escasa; de hecho, la formación matemática y didáctica de los futuros maestros de primaria constituye un campo de investigación que reclama atención por parte de la comunidad de investigadores en Didáctica de las Matemática y de las administraciones educativas si se quiere incluir el "algebra" en la escuela primaria de forma exitosa. La principal razón es que el desarrollo del razonamiento algebraico y de las competencias matemáticas de los alumnos dependerá de manera esencial de la formación de sus respectivos maestros.

Dado que diversas investigaciones informan que los niños ciertamente pueden resolver tareas que tradicionalmente se han considerado propias del álgebra (Carpenter, Frankle y Levi, 2003); entonces, lo que se requiere es que los profesores de todos los niveles de educación primaria sean capaces de promover el pensamiento algebraico con el objetivo de facilitar el aprendizaje del álgebra y fomentar un aprendizaje con comprensión, introduciendo el carácter algebraico en la matemática elemental (Carraher y Schliemann, 2007). Este hecho implica realizar grandes cambios en relación a la manera de concebir la enseñanza y el aprendizaje del álgebra y su inclusión en la escuela primaria. Estos cambios no son fáciles de llevar a cabo, sobre todo cuando los nuevos enfoques implican la participación de nuevas herramientas conceptuales y considerando también que los profesores de la educación primaria no están capacitados para enseñar “álgebra” (Kaput y Blanton, 2001) aunque ciertamente no se trata de impartir un “curso de álgebra” a los alumnos de educación infantil y primaria, sino de desarrollar el razonamiento algebraico a lo largo del período que se inicia en la educación infantil hasta el bachillerato (grados K-12). En el “álgebra escolar” se incluyen no sólo las funciones y la capacidad de analizar situaciones con la ayuda de símbolos (planteamiento de ecuaciones en la resolución de problemas), sino también el estudio de los patrones numéricos y geométricos, la determinación de reglas generales y el reconocimiento de estructuras isomorfas (Godino y Font, 2003). Los maestros tienen que ser conscientes de que la introducción del razonamiento algebraico en la escuela primaria, trae consigo reconocer el carácter algebraico en las actividades matemáticas de la escuela elemental, así como el diseño de actividades que expresen un proceso de generalización y que también puedan resolverse tanto de una forma aritmética como de manera algebraica. El razonamiento algebraico es un proceso que demanda generalizar ideas matemáticas, establecer las generalizaciones a través del discurso de la argumentación, y expresarlas cada vez con términos más formales; hecho que requiere una atención a la estructura y las relaciones entre los objetos matemáticos (Blanton y Kaput, 2003).

Es así como se hace necesario brindar a los maestros de educación primaria, herramientas que les permita el desarrollo de ideas algebraicas en los niños de la escuela elemental. De este modo la formación inicial de los maestros de la escuela primaria es esencial para la promoción del razonamiento algebraico en los niños, dado que tal formación permitirá seleccionar tareas y preparar y gestionar el trabajo de los niños proporcionando una dinámica de aula que promueva generalizaciones, estrategias y conexiones entre ideas matemáticas. Como afirma Branco y Ponte, (2012) los futuros docentes deben tener un conocimiento del álgebra y lo que implica su enseñanza en la escuela primaria para que sean capaces de movilizar más tarde en su práctica, la creación de situaciones de enseñanza para desarrollar el pensamiento algebraico de sus alumnos.

Los maestros necesitan estar capacitados para crear oportunidades de razonamiento algebraico: "algebrizar" problemas aritméticos existentes transformándolos de problemas aritméticos de una respuesta numérica a las oportunidades para desarrollar el razonamiento algebraico en los niños a través del trabajo con patrones, conjeturando, generalizando, y justificando los hechos y relaciones matemáticas. Es necesaria la construcción en el maestro de "ojos y oídos algebraicos" para que puedan identificar las oportunidades para la generalización y la expresión sistemática de la generalidad (Kaput y Blanton, 2001), y poner de manifiesto el carácter algebraico de la matemática elemental (Carraher y Schliemann, 2007).

Blanton y Kaput (2003) en su investigación con maestros de primaria en servicio a través del proyecto "Generalizando para extender la aritmética al razonamiento algebraico", identificaron una serie de características, que perciben como parte de un perfil emergente del tipo de práctica que apoya a los estudiantes para el desarrollo del razonamiento algebraico, a saber:

1) *Integración espontánea de conversaciones algebraicas en el aula*. Los autores la definen como una conversación que los estudiantes deben de manifestar cuando participan en algún tipo de generalización o formalización o en el momento de razonar sobre las generalizaciones, de una manera espontánea y sin fisuras. Además de ser capaz de transformar una tarea aritmética rutinaria en una que requiere razonamiento algebraico.

2) *Una espiral de temas algebraicos importantes sobre períodos de tiempo*. Implica ver a las tareas no de forma aislada y como actividades de una sola vez sino como las tareas cuya ejecución puede ser ejercida sobre una diversidad de experiencias en el aula. Por ejemplo, los estudiantes pueden iniciar identificando simples relaciones aditivas y avanzar hasta describir relaciones más complejas que involucraban tanto a las sumas como a las multiplicaciones.

3) *Actividad de diseño*. Exige del docente la capacidad de encontrar, crear o "algebrizar" tareas matemáticas. La autonomía en el desarrollo de tareas es un componente crítico en el crecimiento auto-sostenido del docente.

4) *Herramientas para el razonamiento algebraico*. Estas herramientas apoyan el razonamiento algebraico y están definidas como aquellos objetos, estructuras o procesos que facilitan el razonamiento matemático de los estudiantes y, en particular, el razonamiento algebraico. Incluyen objetos como tablas para organizar los datos, diagramas y gráficos de líneas para la construcción de argumentos. Se incluye también procesos matemáticos, como la grabación, recogida, representación y organización de datos, que se hayan producido en contextos que no implican de manera explícita razonamiento algebraico (por ejemplo, contextos estadísticos).

También son relevantes los trabajos que se han realizado en la Universidad de Granada por Castro y Godino (Castro y Godino, 2008; Castro y Godino, 2009) sobre evaluación y desarrollo de competencias de análisis didáctico de profesores en formación sobre tareas de índole algebraica. Utilizando herramientas del Enfoque Ontosemiótico se han realizado investigaciones para evaluar las competencias iniciales de razonamiento algebraico elemental de futuros profesores de educación primaria, así como experiencias orientadas a promover el desarrollo de dichas competencias. Asimismo, el libro de texto Godino y Font (2003) para la formación matemática y didáctica de futuros profesores en el área del razonamiento algebraico es una aportación relevante, teniendo en cuenta la escasez de esta clase de bibliografía en el panorama internacional y la importancia que tiene la formación de profesores para la mejora del razonamiento algebraico en la escuela.

Según la propuesta “Early Algebra”, los docentes han de suscitar la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas y crear un ambiente escolar en el que se valore que los alumnos exploren, modelicen, hagan predicciones, discutan, argumenten, comprueben ideas y también practiquen habilidades de cálculo (Blanton y Kaput, 2004, 2005). Stephens (2008) considera que sería conveniente que los maestros pensaran el álgebra como una “forma de pensamiento” y no como una lista de procedimientos a seguir, por lo que es necesario que los maestros de la escuela elemental reconceptualicen la aritmética para poder desarrollar en el aula actividades algebraicas adecuadas para fomentar el razonamiento algebraico en los niños de la escuela primaria (Warren 2009).

Así, con la reforma del álgebra que pretende el desarrollo del razonamiento algebraico en la escuela elemental, los maestros de primaria están en la ruta crítica para esta reforma longitudinal, pues todavía tienen poca experiencia con las ricas y conectadas actividades para generalizar y formalizar (Kaput y Blanton, 2001). Aunque este cambio impone grandes exigencias a los alumnos y a los profesores, como catálisis de crecimiento conceptual, vale la pena el esfuerzo (Carraher, Schliemann, y Schwartz, 2006).

7. ALGUNOS PROBLEMAS ABIERTOS

A pesar de los avances en las investigaciones respectos a la problemática del álgebra escolar, su caracterización y la propuesta de promover el razonamiento algebraico en los grados elementales (Carraher y Schliemann, 2007; Kieran, 2007; Greenes y Rubenstein, 2008; Kaput, Carraher y Blanton, 2008; Cai y Knut, 2011) aún se requiere avanzar en diferentes aspectos. Como señalan Lins y Kaput (2004) se requiere profundizar:

1. En el análisis del desarrollo del razonamiento algebraico en la escuela elemental y en la identificación de los contenidos algebraicos que pueden y deben ser presentados, promovidos y enfatizados en el aula de Educación Primaria.
2. En cómo determinados contenidos algebraicos pueden ser integrados en la enseñanza y aprendizaje de otras sub-áreas de las matemáticas.
3. En el análisis de las herramientas (diagramas, notaciones, gráficos) que pueden conducir a desarrollar modos algebraicos de pensar, y estudiar la implicación de la aplicación de la propuesta “Early Algebra” para la enseñanza de las matemáticas en niveles superiores
4. En la determinación de cómo las características de las tareas pueden ser transformadas para introducir el razonamiento algebraico.
5. En cómo los profesores pueden transformar su instrucción para promover el desarrollo del razonamiento algebraico (Blanton y Kaput, 2011).

CAPÍTULO 2

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN, MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA

1. INTRODUCCION

En este capítulo describimos, en primer lugar, el origen y motivación de nuestra investigación, formulando seguidamente las preguntas, objetivos generales y específicos, así como las hipótesis generales o expectativas de respuesta que esperamos aportar a las preguntas formuladas.

Posteriormente, describimos las herramientas teóricas sobre las cuales apoyamos nuestro trabajo. Finalmente, describimos la metodología general y las etapas que componen nuestra investigación, explicitando el método implementado en cada una de ellas.

2. ORIGEN Y MOTIVACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

La revisión de la literatura informa que existe una amplia diversidad de propuestas que abordan la naturaleza del álgebra. Sin embargo, es precisamente esta diversidad de perspectivas para caracterizar la actividad algebraica, a lo que Kaput y Blanton (2000) se refieren cuando señalan que el poco éxito obtenido para algebrizar el currículo de primaria, se debe al simple hecho de que no hay un consenso sobre la manera de conceptualizar el *Early Algebra* que permita apoyar la introducción del razonamiento algebraico en los grados elementales. Para estos autores la "historia del *Early Algebr*a" debe incluir un reporte suficientemente explícito de la naturaleza del razonamiento algebraico, descripciones de las formas maduras que puede tener y de lo que su enseñanza representa, así como de las prácticas de aula que promueven su desarrollo. También podría incluirse las descripciones de las trayectorias de desarrollo plausible de las diferentes formas de razonamiento algebraico, ejemplos de los tipos de materiales de instrucción que hacen que los alumnos pueden aprender, los cuales se puedan incorporar en las aulas.

En los argumentos anteriores se fundamenta la necesidad de contar con un enfoque sobre la naturaleza del razonamiento algebraico que permita entender su aproximación en los niveles elementales. Dicha aproximación debiera permitir esclarecer aspectos que aún quedan difusos. Por ejemplo, consideremos la siguiente situación:

Un profesor propone a sus estudiantes el siguiente problema:

> **Problema 1:** Un estudiante recibió de sus padres una cierta cantidad de dinero para comer durante 40 días. Sin embargo, encontró sitios en donde pudo ahorrar 4 euros al día en la comida. De esta forma, el presupuesto inicial le duró 60 días. ¿Cuánto dinero recibió?

Un estudiante A resolvió el problema de la siguiente manera:

> Sea D el dinero recibido de los padres. Representamos por x el gasto diario previsto por los padres para comer 40 días: $x = D / 40$. Por otro lado, sea y el gasto diario real, que permitió comer 60 días: $y = D / 60$.
> $40x = 60y$; además $y = x - 4$; $40\,x = 60\,(x - 4)$; $20\,x = 240$; $x = 12$; Cantidad recibida: $12 \times 40 = 480$; 480€

Otro estudiante B lo resolvió de esta otra manera:

> El ahorro de 4€/día durante 40 días previstos supone un ahorro total de 160€. Con esta cantidad pudo comer durante 20 días más. El coste diario real fue de 160€/20 días = 8€/ día. Como los días reales fueron 60, el presupuesto total será 60 días × 8€/día = 480€.

En este ejemplo parece que habría consenso en aceptar que la solución del estudiante B se puede calificar de aritmética, mientras que la del estudiante A de algebraica. En la primera resolución se usa "letras" para representar las cantidades desconocidas, y opera con ellas de acuerdo con ciertas reglas para obtener la solución. En cambio, el estudiante B opera directamente con números naturales particulares a los cuales les aplica operaciones aritméticas (suma, multiplicación y división).

Sin embargo, el consenso en la consideración de una actividad como algebraica o aritmética no siempre es tan extendido. Veamos ahora este otro ejemplo:

> **Problema 2:** Tres amigos, Pedro, Antonio y Pablo, no se ponen de acuerdo sobre su edad. Pedro es más viejo que Pablo; Pablo es más joven que Antonio; Antonio, a su vez, es más viejo que Pedro. ¿Quién tiene más edad?, ¿quién menos?

El estudiante B razonó de la siguiente manera:

> Como Antonio es más mayor que Pedro y Pedro es mayor que Pablo entonces Antonio es también mayor que Pablo, luego Antonio es el mayor. Como Pablo es más joven que Pedro y Pedro es más joven que Antonio entonces Pablo es el más joven.

Los planteamientos anteriores, y la revisión de la literatura realizada previamente, suscitaron nuestro interés en las siguientes cuestiones:

- ¿Sólo podemos considerar como solución aritmética aquella actividad matemática que involucra números concretos y operaciones?
- ¿Sólo podemos considerar como solución algebraica aquella actividad matemática que involucra el uso de incógnitas, ecuaciones, símbolos literales y operaciones con dichos símbolos, como la realizada por el estudiante A?
- El problema 2 y la solución dada por el estudiante B, ¿tienen una componente esencialmente aritmética o tiene algún componente algebraico?

Estas cuestiones no son triviales si tenemos en cuenta la abundante literatura existente donde se aborda esta problemática (Carraher y Schliemann, 2007; Kieran, 2007; Cai y Knuth, 2011); tampoco son intrascendentes desde el punto de vista educativo, ya que involucran diversas maneras de concebir la propia actividad matemática, así como su enseñanza y aprendizaje en la escuela.

En concreto, en el contexto de las investigaciones relativas a la inclusión del álgebra en la escuela primaria, estamos de acuerdo con la necesidad de articular un enfoque coherente e integrado, que comience con el desarrollo del razonamiento algebraico en los primeros grados de la escuela elemental (Kaput y Blanton, 2001). Consecuentemente con esta necesidad de clarificar la naturaleza del razonamiento algebraico en los grados elementales, también se hace menester el incidir en la formación de profesores. Dado que es precisamente el maestro de primaria el principal agente del cambio respecto a la algebrización del currículo y para la promoción del razonamiento algebraico en los niños de la escuela primaria, es que se precisa contemplar los cambios que se requieren en la formación inicial (y continua), para que sean capaces de poner de manifiesto el carácter algebraico de la matemática escolar (Carraher y Schliemann, 2007). Sobre todo porque los resultados de las investigaciones advierten que los maestros no están preparados para reconocer el razonamiento algebraico expresado por los niños, ni para promover su desarrollo. El profesor necesita ser capaz de identificar y nutrir las raíces del razonamiento algebraico en formas que parecen muy diferentes a lo que se considera álgebra (Kaput, 2000), así como crear oportunidades para ubicar al razonamiento algebraico como parte de la instrucción regular en sus clases (Blanton y Kaput, 2003).

3. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este trabajo pretendemos articular un enfoque global sobre el álgebra que permita: (1) Reconocer en las actividades matemáticas escolares, rasgos o componentes algebraicos susceptibles de ser desarrollados progresivamente a lo largo de los diferentes niveles de la escuela elemental; (2) Identificar el tipo de conocimiento que se requiere desarrollar en el maestro de educación primaria para que sea tenido en cuenta en su formación inicial a fin de capacitarles para la promoción del pensamiento algebraico elemental en la escuela. Dadas las carencias formativas en matemáticas y didáctica de la matemática de los maestros de educación primaria y la necesidad de ofrecer oportunidades para reconocer y promover el razonamiento algebraico es por lo que se contempla la integración de este enfoque como parte de los conocimientos de los maestros.

Nuestro problema de investigación (figura 2.1) se sitúa en la formación de maestros sobre el álgebra bajo la nueva perspectiva de incluir el razonamiento algebraico en los niveles elementales. Nuestro centro de interés es una formación profesional que contemple una nueva visión del álgebra que le proporcione al maestro herramientas para introducir el razonamiento algebraico en la escuela elemental. No se trata de que los maestros aprendan álgebra, porque no se trata de impartir álgebra a los niños de la escuela primaria. Como señala Molina (2007) el objetivo es que los profesores promuevan el desarrollo del razonamiento algebraico ayudando a los niños a prestar atención a las propiedades, relaciones y patrones involucrados en todo tipo de actividades matemáticas, aunque no parezcan algebraicas a primera vista.

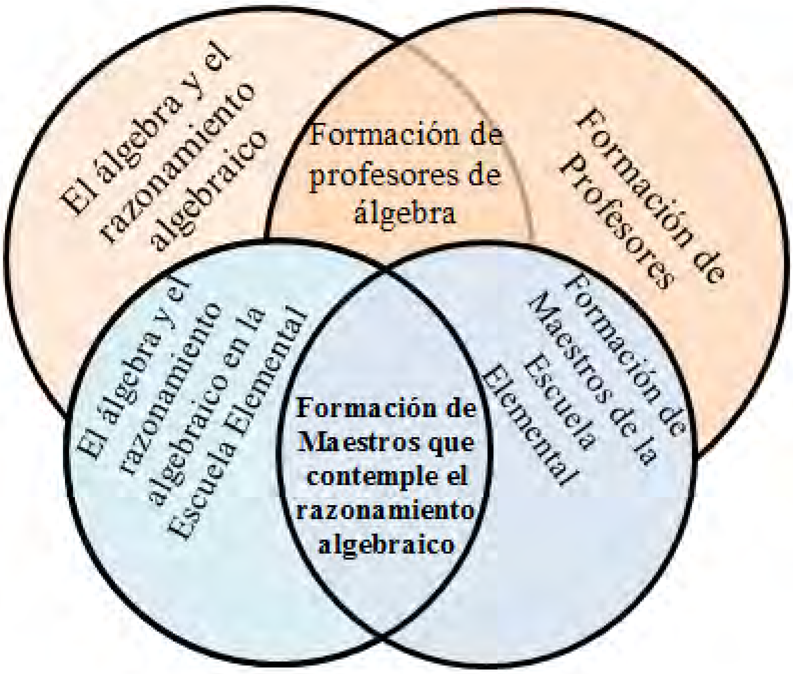


Figura 2.1. Ubicación del problema de investigación

3.1. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

La introducción del razonamiento algebraico en la escuela tiene implicaciones epistémicas y didácticas. Epistémicamente la inclusión del álgebra en la escuela elemental supone un cambio del foco de atención desde los aspectos simbólicos y procedimentales hacia aspectos estructurales del razonamiento algebraico. Didácticamente, este nuevo enfoque basado en los aspectos estructurales, necesita no sólo una descripción y fundamentación específica, sino la determinación de medios para abordar los problemas de aprendizaje y de enseñanza relacionados con las nuevas tareas y competencias algebraicas, así como acciones concretas para la formación de profesores en este campo. En definitiva, se establece un programa de investigación específico guiado por las siguientes preguntas de investigación:

PI-1. ¿Cuáles son los rasgos característicos del razonamiento algebraico elemental que permiten discriminar diversos niveles de algebrización, en particular distinguir las prácticas de índole algebraica de las que no lo son?

PI-2. ¿Qué conocimientos, incluyendo comprensión y competencia, tienen los maestros en formación inicial sobre el razonamiento algebraico elemental (RAE)?

PI-3. ¿Qué tipo de acciones formativas sería necesario (y posible) implementar en un programa de formación inicial de maestros de primaria para desarrollar en ellos el RAE?

3.2. OBJETIVOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

Una vez enunciadas las preguntas de investigación las traducimos en los siguientes objetivos generales de investigación:

OG-1. Caracterizar el álgebra y el razonamiento algebraico desde una perspectiva global que permita la identificación de sus principales rasgos con el fin de clarificar su naturaleza en los grados elementales (Relacionado con la pregunta 1).

OG-2.Indagar sobre los conocimientos que poseen futuros maestros de educación primaria al resolver tareas de índole algebraica (Relacionado con la pregunta 2).

OG-3. Realizar un estudio de caso de un proceso formativo con maestros en formación inicial orientado a promover el desarrollo del razonamiento algebraico elemental (Relacionada con las preguntas 3).

3.3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Con la finalidad de alcanzar los objetivos generales, definimos los siguientes objetivos específicos:

Para el objetivo general 1:

OE-1.1. Analizar las diversas propuestas de caracterización del álgebra escolar reflejadas en las investigaciones.

OE-1.2. Elaborar un modelo de caracterización del álgebra que articule, bajo la interpretación del Enfoque Ontosemiótico, las diversas perspectivas del álgebra escolar.

Para el objetivo general 2:

OE-2.1. Elaborar un instrumento, que contemple el modelo de caracterización del álgebra propuesto y las facetas del conocimiento del profesor, y aplicarlo a una muestra de maestros en formación para indagar sobre aspectos relevantes de los conocimientos que tienen sobre el razonamiento algebraico elemental.

OE-2.3 Analizar y describir las producciones de los futuros maestros para determinar si existen regularidades en las soluciones propuestas que permitan caracterizar sus significados personales sobre el razonamiento algebraico elemental e identificar carencias formativas sobre el mismo.

Para el objetivo general 3:

OE-3.1. Diseñar e implementar una experiencia formativa en un grupo de futuros maestros orientada a desarrollar la competencia de los mismos para reconocer los objetos algebraicos y asignar niveles de algebrización a la actividad matemática escolar.

OE-3.2. Valorar la idoneidad didáctica de la experiencia formativa e identificar mejoras potenciales de dicha experiencia.

3.4. HIPÓTESIS GENERALES

Una vez planteados los objetivos de nuestra investigación, se formulan las hipótesis generales, entendidas como expectativas de respuesta a las preguntas planteadas, que esperamos obtener con la realización de este trabajo de investigación.

HG1: Se puede caracterizar el álgebra de la escuela primaria, distinguiendo distintos niveles de algebrización en el razonamiento algebraico elemental, teniendo en cuenta los procesos de generalización matemática, la articulación de diversas representaciones lingüísticas, el cálculo analítico basado en las propiedades estructurales y los procesos de modelización matemática.

HG2: Los maestros en formación entienden el álgebra escolar como manipulación de expresiones simbólicas literales, tienen importantes dificultades para modelizar y resolver de manera algebraica problemas de enunciado verbal, y para expresar los procesos de generalización de manera algebraica.

HG3: El desarrollo del razonamiento algebraico elemental en los maestros en formación inicial se puede alcanzar mediante prácticas discursivas que muestren a los estudiantes los rasgos característicos del razonamiento algebraico y actividades prácticas basadas en el reconocimiento de niveles de algebrización en la resolución de problemas propios de educación primaria.

4. ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA

En lo que sigue presentamos el marco teórico en que basamos nuestro trabajo, conocido como Enfoque ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemática (EOS), que ha sido desarrollado por Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994, 1998; Godino, 2002,2012; Godino, Batanero y Font, 2007;). Se trata de un marco teórico integrativo para la didáctica de las matemáticas que aborda el problema de la articulación de teorías desde supuestos semióticos, ontológicos y antropológicos.

Actualmente el conjunto de nociones teóricas que componen al EOS se clasifican en cinco grupos cada uno de los cuales permite un nivel de análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas específicos de matemáticas (Godino, 2012):

- *Sistema de prácticas* (operativas, discursivas y normativas), que asume una concepción pragmatista—antropológica de las matemáticas, tanto desde el punto de vista institucional (sociocultural) como personal (psicológico). La actividad de resolución de problemas se adopta como elemento central de la construcción del conocimiento matemático.
- *Configuraciones de objetos y procesos matemáticos*, emergentes e intervinientes en las prácticas matemáticas. Se asume una noción interaccionista de objeto y pragmatista del significado (contenido de funciones semióticas) articulando de manera coherente la concepción antropológica (Wittgestein) con posiciones realistas (no platónicas) de las matemáticas. Los diversos medios de expresión (lenguajes) desempeñan el doble papel de instrumentos de trabajo matemático y representación de los restantes objetos matemáticos.
- *Configuración didáctica*, como sistema articulado de roles docentes y discentes, a propósito de una configuración de objetos y procesos matemáticos ligados a una situación-problema, constituye la principal herramienta para el análisis de la

instrucción matemática. Las configuraciones didácticas y su secuencia en trayectorias didácticas tienen en cuenta las facetas epistémica (conocimientos institucionales), cognitiva (conocimientos personales), afectiva, mediacional (recursos tecnológicos) y temporales), interaccional y ecológica que caracterizan los procesos de estudio matemático.

- *Dimensión normativa*, sistema de reglas, hábitos, normas que registran y soportan las prácticas matemáticas y didácticas; generaliza la noción de contrato didáctico y normas socio-matemáticas. El reconocimiento del efecto de las normas y meta-normas que intervienen en las diversas facetas que caracterizan los procesos de estudio matemático es el principal factor explicativo de los fenómenos didácticos.
- *Idoneidad didáctica*, como criterio general de adecuación y pertinencia de las acciones de los agentes educativos, de los conocimientos puestos en juego y de los recursos usados en un proceso de estudio matemático. El sistema de indicadores empíricos identificados en cada una de las facetas constituye una guía para el análisis y reflexión sistemática que aporta criterios para la mejora progresiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Comenzaremos definiendo algunos términos utilizados en este trabajo y que poseen una determinada interpretación desde el EOS.

Práctica matemática: Es toda actuación o expresión (verbal, gráfica, gestual, etc.) realizada por alguien para resolver un problema matemático, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994).

Objeto matemático: Es cualquier entidad o cosa referida en el discurso matemático. El objeto matemático designa a todo lo que es indicado, señalado o nombrado cuando se construye, comunica o aprende matemáticas. (Godino, Batanero, Font, 2007).

Institución: Una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas; el compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales que suelen tener rasgos particulares, y son generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma, sus reglas y modos de funcionamiento (Godino y Batanero, 2007)

Conocimiento, competencia, *comprensión*: Los posicionamientos pragmatistas del EOS llevan a entender, de entrada, la comprensión básicamente como competencia y no tanto como proceso mental: se considera que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas.

Ahora bien, el hecho de considerar que las funciones semióticas tienen un papel esencial en el proceso relacional entre entidades, o grupos de ellas, que se realiza en las prácticas matemáticas (dentro de un determinado juego de lenguaje), permite entender en el EOS la comprensión también en términos de trama de funciones semióticas. En efecto, podemos interpretar la comprensión de un objeto O por parte de un sujeto X (sea individuo o institución) en términos de las funciones semióticas que X puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las que se pone en juego O como funtivo (expresión o contenido). Cada función semiótica implica un acto de semiósis por un agente interpretante y constituye un conocimiento. Hablar de conocimiento equivale a hablar del contenido de una (o muchas) función semiótica, resultando una variedad de tipos de conocimientos en correspondencia con la diversidad de funciones semióticas que se pueden establecer entre las diversas entidades introducidas en el modelo.

En los siguientes apartados describiremos las herramientas del EOS utilizadas en este trabajo.

4.1. SIGNIFICADOS PERSONALES E INSTITUCIONALES DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS COMO EMERGENTES DE LAS PRÁCTICAS MATEMÁTICAS

En el estudio de las matemáticas, más que una práctica particular ante un problema concreto, interesa considerar los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) puestas de manifiesto por las personas en su actuación ante tipos de situaciones problemáticas. Los objetos matemáticos emergen de los sistemas de prácticas matemáticas ya sean personales (significado personal) o compartidas en el seno de una institución (significado institucional) para resolver un tipo de situaciones (Godino, Batanero, 1994).

En el EOS se identifica una tipología de significados personales e institucionales (Godino, Batanero y Font, 2007):

Los significados personales propuestos son:

- *Global:* Corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto relativas a un objeto matemático.
- *Declarado:* Da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.
- *Logrado:* Corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. En el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio interesará tener en cuenta los significados iniciales o previos de los estudiantes y los emergentes.

Los significados institucionales propuestos son:

- *Referencial:* Sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007) del objeto matemático. La determinación referencial del significado global exige de un estudio histórico y epistemológico sobre el origen y evolución del objeto considerado, así como de la consideración de la diversidad de contextos de uso en donde se manifiesta dicho objeto.
- *Pretendido:* Sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.
- *Implementado:* Sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente en un proceso de estudio específico.
- *Evaluado:* El subsistema de prácticas utilizado por el docente para evaluar los aprendizajes.

4.2. CONFIGURACIÓN DE OBJETOS Y PROCESOS MATEMÁTICOS

El EOS propone una tipología de objetos primarios emergentes de las prácticas matemáticas (Godino, Batanero y Font, 2007):

- *Situaciones-problema*: problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, ejercicios; son las tareas que inducen la actividad matemática.

- *Elementos lingüísticos*: Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas. En un texto vienen dados en forma escrita o gráfica pero en el trabajo matemático pueden usarse otros registros (oral, gestual).
- *Conceptos*: entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición (número, punto, recta, media, función).
- *Propiedades*: atributos de los objetos matemáticos, que suelen darse como enunciados o proposiciones.
- *Procedimientos*: técnicas de cálculo operaciones y algoritmos.
- *Argumentos*: justificaciones, demostraciones o pruebas de las proposiciones usadas.

Los seis tipos de entidades primarias se relacionan entre sí, formando configuraciones que se definen como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos. Las configuraciones pueden ser epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales), que se construyen a partir del planteamiento y resolución de una situación problema.

Estos seis tipos de objetos primarios se complementan y enriquecen con la consideración de cinco facetas o dimensiones duales. Según las circunstancias contextuales y del juego del lenguaje en que participan, las entidades matemáticas pueden ser consideradas desde las siguientes facetas o dimensiones duales: personal e institucional, ostensiva y no ostensiva, ejemplar y tipo, elemental y sistémica, expresión y contenido. A continuación se explica el uso que se da a esos términos:

- *Personal-institucional*: Si los sistemas de prácticas son compartidas en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran “objetos institucionales”, mientras que si estos sistemas son específicos de una persona se consideran como “objetos personales”
- *Ostensiva-no ostensiva*: Se entiende por ostensivo cualquier objeto que es público y que, por tanto, se puede mostrar a otro. Los objetos institucionales y personales tienen una naturaleza no ostensiva (no perceptibles por sí mismos). Ahora bien, cualquiera de estos objetos se usa en las prácticas públicas por medio de sus ostensivos asociados (notaciones, símbolos, gráficos, ...).
- *Ejemplar-tipo* (extensivo-intensivo): Un objeto que interviene en un juego de lenguaje como un caso particular y una clase más general. La dualidad extensivo-

intensivo se utiliza para explicar una de las características básicas de la actividad matemática: el uso de elementos genéricos. Esta dualidad permite centrar la atención en la dialéctica entre lo particular y lo general, que sin duda es una cuestión clave en la construcción y aplicación del conocimiento matemático.

- *Unitario-Sistémico*: En algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (que se suponen son conocidas previamente), mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio.
- *Expresión-contenido*: La actividad matemática y los procesos de construcción y uso de los objetos matemáticos se caracterizan por ser esencialmente relacionales. Los distintos objetos no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestas en relación unos con otros. La relación se establece por medio de funciones semióticas, entendidas como una relación entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia

La emergencia de los objetos primarios (problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos) tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos de: comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización, ...) y argumentación. Por otra parte, las dimensiones duales dan lugar a los siguientes procesos cognitivos/ epistémicos:

- Institucionalización-personalización
- Generalización-particularización
- Análisis/descomposición-síntesis/reificación
- Materialización /concreción-idealización/ abstracción
- Expresión/representación-significación

4.3. IDONEIDAD DIDÁCTICA

En Godino, (2011) se señala que la noción de idoneidad es el criterio global de pertinencia de un proceso de instrucción cuyo principal indicador empírico puede ser el grado de adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos, y que es relativa a las circunstancias locales en que tiene lugar el proceso de instrucción. Así la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como la articulación coherente y sistémica de seis componentes, a saber:

- *Idoneidad epistémica*: se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.
- *Idoneidad cognitiva*: expresa el grado en que los significados pretendidos/implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados.
- *Idoneidad interaccional*: un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se pueden detectar a priori), y por otra parte permitan resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.
- *Idoneidad mediacional*: es el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- *Idoneidad afectiva*: Es el grado de implicación (interés, motivación,…) del alumnado en el proceso de instrucción. La idoneidad afectiva está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y su historia escolar previa.
- *Idoneidad ecológica*: Es el grado en el que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

4.4. CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO

En Godino (2009) se propone un sistema de categorías de análisis de los conocimientos matemáticos y didácticos del profesor que integra, organiza y extiende los modelos teóricos hasta ahora expuestos sobre el conocimiento del profesor. Según este autor "*los modelos previos del 'conocimiento matemático para la enseñanza' elaborados desde las investigaciones en educación matemática incluyen categorías muy generales*" (p. 19) por lo que plantea un modelo del conocimiento didáctico-matemático del profesor global que contempla las diversas facetas implicadas en la enseñanza-aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. A continuación se expone de manera suscita, a través de una tabla, la interpretación de este autor respecto al conocimiento del profesor y sobre la cual nos apoyamos.

Tabla 2.1. Conocimiento Didáctico-matemático del profesor

<table>
<tr><th></th><th></th><th></th><th></th></tr>
<tr><td>Faceta epistémica</td><td colspan="2">CONOCIMIENTO DEL CONTENIDO</td><td>Conocimiento común: Faculta al profesor para resolver la tarea matemática.

Conocimiento especializado: Faculta al profesor para elaborar la configuración de objetos y procesos (tipos de problemas, lenguajes/representaciones, procedimientos, conceptos/propiedades y argumentos) puesta en juego en las soluciones plausibles de la tarea.

Conocimiento avanzado: Faculta al profesor para identificar posibles generalizaciones de la tarea y conexiones con otros temas más avanzados.</td></tr>
<tr><td>Faceta cognitiva y afectiva</td><td rowspan="2">CONOCIMIENTO PEDAGÓGICO DEL CONTENIDO</td><td>Conocimiento del contenido en relación con los estudiantes</td><td>Faculta al profesor para:
• Describir los tipos de configuraciones cognitivas que los alumnos desarrollan al resolver una tarea
• Describir los conflictos de aprendizaje, errores y dificultades.
• Identificar los significados personales de los alumnos para la evaluación de los aprendizajes
• Describir e implementar estrategias que se puedan implementar para promover que los alumnos se involucren en la solución de las tareas (control y manejo de las actitudes, emociones, valores …).</td></tr>
<tr><td>Faceta instruccional (interaccional y mediacional)</td><td>Conocimiento del contenido en relación con la enseñanza</td><td>Faculta al profesor para:
Describir la configuración didáctica usando la tarea matemática dada, identificando:
• Los roles del profesor y de los estudiantes
• Modos de interacción profesor-alumno, alumno-alumno
• Recursos materiales
• Tiempo asignado</td></tr>
</table>

Faceta ecológica	*Conocimiento del currículo y conexiones intra e interdisciplinares*	Faculta al profesor para: • Identificar los elementos del currículo que son abordados mediante la realización de las tarea (orientaciones curriculares) • Explicar las conexiones que se pueden establecer con otros temas del programa de estudio mediante la realización de la tarea o de variantes de la misma (conexiones intra-disciplinares) • Explicar las conexiones que se pueden establecer con otras materias del programa de estudio mediante la realización de la tarea o de variantes de la misma (conexiones interdisciplinares)

4.5. LA INVESTIGACIÓN BASADA EN EL DISEÑO DESDE EL EOS

Consideramos la interpretación que Godino, Batanero, Contreras, Estepa, Lacasta y Wilhelmi (2013) realizan sobre la investigación basada en el diseño como una ampliación de la ingeniería didáctica. Para estos autores, la investigación basada en el diseño es una familia de metodologías o enfoques de investigación, que se originan dependiendo de la teoría-base que se utilice para fundamentar el diseño, implementación y la interpretación de los resultados. Así, dependiendo de la teoría que se utilice, se tendrá una investigación basada en el diseño diferente. Por lo tanto, la ingeniería didáctica se considera como un caso particular de dichas investigaciones.

En este trabajo nos ceñimos al paradigma de la ingeniería didáctica, entendida desde la investigación basada en el diseño y utilizando como teoría base el EOS. Nuestras interpretaciones quedan recogidas en la tabla 2.2.

Tabla 2.2. Acciones a realizar en un proceso de instrucción

FASE	SUBTRAYECTORIA	Acciones
Estudio preliminar		Análisis del contenido matemático que se pretende enseñar para caracterizar los distintos significados. A partir del análisis se articula un significado global de referencia del contenido matemático

Diseño de la experimentación (Trayectoria didáctica planificada)	Epistémica y ecológica	Se precisa definir: • Cuál es el contenido matemático a desarrollar y la secuencia de actividades y tareas a implementar. • Cómo se adapta el contenido matemático a desarrollar al contenido establecido en el currículo • Cuáles son las conexiones intra e interdisciplinares del contenido matemático a desarrollar
	Cognitiva y afectiva	Implica: • Definir las características generales de los sujetos, su perfil general académico. • Identificar los conocimientos previos de los sujetos respecto al contenido matemático a desarrollar • Definir las expectativas de aprendizaje previstas para los maestros en formación • Identificar las creencia, actitudes, errores y dificultades de los maestros en formación tengan respecto al contenido matemático a desarrollar
	Instruccional	Se precisa definir • La temporalización para abordar la secuencia de actividades • Los recursos materiales a utilizar • Papel del profesor • Papel del alumno • Enfoque de evaluación para los alumnos • El procedimiento a seguir en el aula, es decir, cómo se realizarán las intervenciones y cómo abordará la secuencia de actividades.
Implementación (Trayectoria didáctica efectivamente implementada)	Epistémica y ecológica	Descripción de la secuencia de tareas y actividades efectivamente implementadas
	Cognitiva y afectiva	Identificación de conflictos Descripción de las configuraciones cognitivas de los estudiantes que indica la progresión temporal de los aprendizajes
	Instruccional	Descripción de las interacciones Descripción del uso progresivo de los recursos materiales

Análisis retrospectivo (Idoneidad didáctica)	Idoneidad epistémica y ecológica Idoneidad Cognitiva y afectiva Idoneidad instruccional	Adecuaciones de la trayectoria didáctica planificada respecto a la trayectoria didáctica efectivamente implementada, considerando la articulación de las subtrayectorias Identificación de posibles cambios

5. ENFOQUE METODOLÓGICO GENERAL DE LA INVESTIGACIÓN

Dados los objetivos pretendidos en este trabajo, consideramos que el método de investigación se inscribe en un enfoque metodológico de tipo mixto (Johnson y Onwuegbuzie, 2004; Creswell, 2009). El enfoque mixto es un proceso que recolecta, analiza y vincula datos cuantitativos y cualitativos en un mismo estudio o una serie de investigaciones para responder distintas preguntas de investigación del planteamiento de un problema (Hernández-Sampieri, Fernández y Baptista, 2003).

En nuestro estudio están presenten elementos de ambos enfoques, tanto cualitativo como cuantitativo, que quedan al descubierto a los largo de las 3 etapas que se han trazado como directrices de acuerdo a los objetivos de investigación planteados y que se aprecian en la figura 2.2.

En la primera etapa, se recogen las diversas investigaciones relativas a la introducción del razonamiento algebraico y sobre su introducción en la escuela elemental. A través de la literatura y de su articulación con el marco del EOS se propone, en el capítulo 3, un modelo de caracterización del álgebra que permite su interpretación en los grados elementales.

Posteriormente, en una segunda etapa, se enmarca un estudio de tipo descriptivo y exploratorio que se realizó durante el curso académico 2010-2011 en la Escuela Normal para Maestros en la ciudad de Mérida, Yucatán, en el que se utilizó un cuestionario de respuesta abierta como instrumento para la recogida de datos. El objetivo de esta etapa y como se detallará en el capítulo 4 es indagar sobre los conocimientos que tienen los futuros maestros sobre el razonamiento algebraico elemental que nos permita dar cuenta de las carencias formativas.

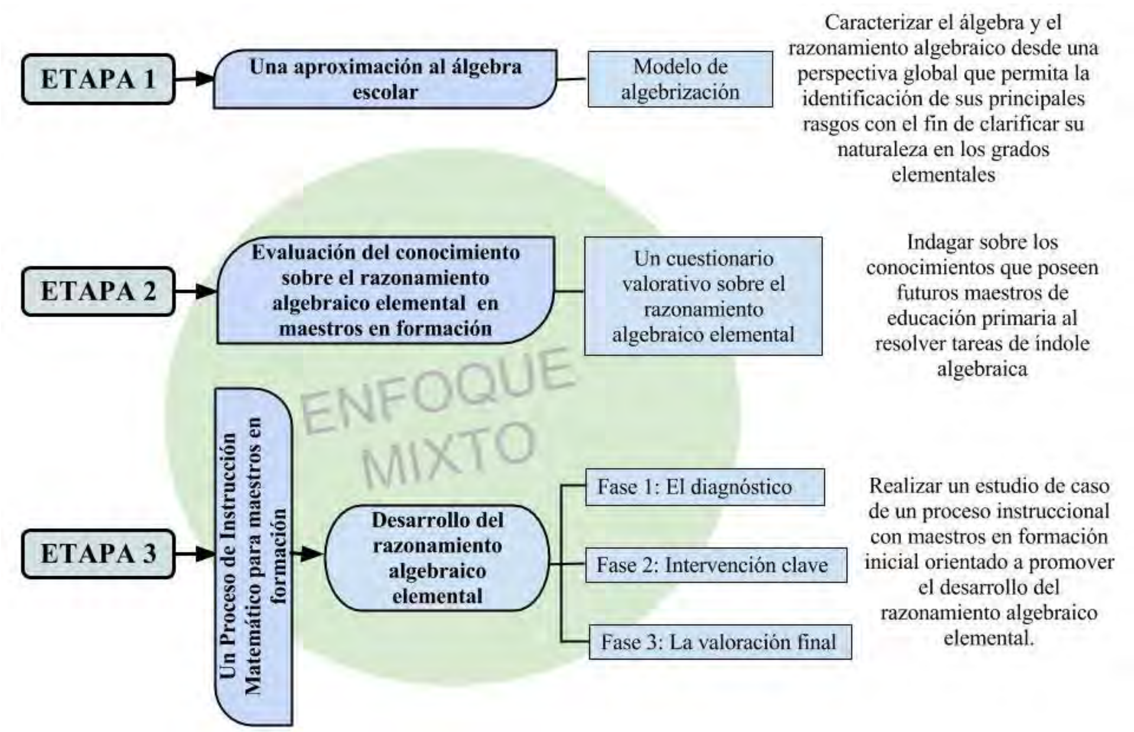


Figura 2.2. Etapas de la investigación

Finalmente, en la tercera etapa, se desarrolla otro estudio principalmente descriptivo y exploratorio que se llevó a cabo durante el curso académico 2011-2012 en la Facultad de Ciencias de la Educación de Granada, España. Este estudio consiste en el diseño, implementación y valoración de un proceso formativo. El objetivo de esta etapa y como se describirá en el capítulo 5, es promover el desarrollo del razonamiento algebraico elemental en los maestros en formación, así como las competencias para su identificación en las tareas matemáticas escolares. Esto a razón de la poca investigación sistemática en relación con el efecto que la presencia curricular del álgebra temprana tiene sobre los programas de formación inicial de maestros, sobre el desarrollo profesional del profesor y sobre el conocimiento pedagógico del álgebra temprana.

CAPÍTULO 3

CARACTERIZACIÓN DE LA NATURALEZA DEL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO ELEMENTAL

1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo, se desarrolla como primera etapa de esta investigación, la caracterización del álgebra y el razonamiento algebraico desde una perspectiva global. Se trata de una propuesta teórica que puede contribuir al desarrollo progresivo del razonamiento algebraico de los estudiantes en la zona de transición aritmético-algebraico.

A lo largo de este capítulo se explica cómo se articulan las diferentes perspectivas sobre el razonamiento algebraico expuestas en el capítulo 1 con el enfoque ontosemiótico, el cual permite una caracterización y una interpretación de la naturaleza del álgebra en los grados elementales, en términos de niveles de algebrización. Las ideas sobre nuestro modo de conceptualizar el razonamiento algebraico han sido desarrolladas en el seno del grupo de investigación Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística de la Universidad de Granada y publicadas en los artículos: Naturaleza del razonamiento algebraico elemental (Godino, Castro, Aké y Wilhelmi, 2012) y Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, en prensa).

2. NATURALEZA DEL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO DESDE LA PERSPECTIVA DEL EOS: ELEMENTOS PARA UNA CARACTERIZACIÓN

Como previamente se ha enfatizado, en la revisión de la literatura, son diversas las investigaciones que critican la existencia de diferentes puntos de vista sobre el razonamiento algebraico en la escuela primaria, que no solo conllevan a una difícil distinción entre el razonamiento algebraico y pensamiento matemático o simplemente pensamiento (Kaput, Carraher, Blanton, 2008) sino también impiden tener una visión clara de su naturaleza. De hecho, las diversas perspectivas que apoyan la acción de "algebrizar" el currículo de la escuela elemental (Usiskin, 1989; Bednarz, Kieran y Lee, 1996; Burskhard, 2001; Kieran, 2007), son una de las razones por la que esta reforma del álgebra, no ha progresado. Carraher y Schliemann (2007) afirman que son relativamente pocas las investigaciones que han tratado de caracterizar el campo de manera exhaustiva y señalan que "cuando se ha intentado, la estructura categórica ocasionalmente exhibe inconsistencias y solapamientos. Por ejemplo, el desglose del álgebra en generalización, resolución de problemas, modelización, y funciones, mezcla procesos de razonamiento no disjuntos (generalización y resolución de problemas) con tópicos de matemáticas (funciones) y otro (modelización) (Bednarz, 1996) que puede ser entendido, bien como tema matemático o un conjunto de procesos de razonamiento" (p.676). Tampoco parece que hay consenso en que uno de los rasgos característicos del razonamiento algebraico es su manera de abordar los procesos de generalización matemática, esto es, el estudio de situaciones en las que se pasa de considerar casos particulares de situaciones, conceptos, procedimientos, etc., (objetos determinados) a las clases o tipos de tales objetos. Esta observación lleva a los autores citados a considerar que posiblemente el análisis del pensamiento algebraico está todavía en su infancia.

Avanzar en la clarificación de la naturaleza del razonamiento algebraico es un tema complejo pero necesario desde el punto de vista educativo. Como afirma Radford (2000, p. 238), "necesitamos profundizar en nuestra propia comprensión de la naturaleza del pensamiento algebraico y la manera en que se relaciona con la generalización". De las descripciones del pensamiento algebraico y de la actividad algebraica realizadas en las diversas investigaciones se puede concluir que la consideración de una actividad como algebraica tiene contornos difusos. En algunos casos puede haber un claro consenso, como en las actividades generacionales y transformacionales, es decir, formación y manipulación de expresiones simbólico-literales, pero no así en otras actividades, como modelización, resolución de problemas, o con actividades típicas del "early algebra", como las equivalencias de expresiones aritméticas. Parece pertinente considerar que en el proceso de transición desde la aritmética hasta el álgebra existe una "zona transicional" en la que se admite que las tareas matemáticas pueden exhibir objetos y procesos algebraicos con una presencia gradual pero creciente.

De este modo la elaboración de un modelo comprensivo, puede ayudar a articular coherentemente el currículo matemático escolar con los distintos niveles escolares, y facilitar el diseño de actividades instruccionales que favorezcan el surgimiento y consolidación progresivos del razonamiento algebraico. En este sentido, la perspectiva pragmatista, antropológica y semiótica del EOS (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007) aporta herramientas teóricas para analizar la actividad matemática en general y, en particular, para el tipo de actividad que caracteriza el álgebra. El EOS permite caracterizar el álgebra en términos de los tipos de objetos y procesos que intervienen en la práctica matemática. La actividad algebraica tiene lugar cuando una persona aborda la solución de cierto tipo de problemas o tareas, realizando determinadas prácticas operativas y discursivas. En dichas prácticas intervienen elementos de naturaleza diversa, en particular, medios de expresión, reglas conceptuales, procedimentales, proposiciones y justificaciones. En consecuencia, la caracterización de una práctica, y el pensamiento que la acompaña, como de índole algebraica habrá que hacerla en términos de la presencia de los tipos de objetos y de procesos que intervienen en la misma. La presencia de los objetos y procesos reconocidos como algebraicos es gradual, sistemática y progresiva; se encuentran vinculados a las prácticas e interrelacionados formando configuraciones.

En este sentido, nosotros planteamos una concepción del razonamiento algebraico que surge por una parte de las investigaciones realizadas entorno a la inclusión del algebra en la escuela primaria y la algebrización del currículo. Por otro lado también consideramos desde la perspectiva del EOS las herramientas de análisis que nos permiten distinguir qué objetos matemáticos tienen una naturaleza algebraica y en qué medida pueden ser introducidos en la escuela elemental.

Desde el principio de este informe, hemos estado utilizado la expresión “razonamiento algebraico elemental” (RAE) como interpretación de “early algebra”. No obstante, las características que proponemos para el RAE, en términos de tipos de tareas, objetos y procesos algebraicos implicados, permiten incluir en esta noción el álgebra de secundaria, reforzando de esta manera una visión integrada del álgebra escolar. Consideramos las expresiones “razonamiento algebraico”, “sentido algebraico” y “pensamiento algebraico” como perspectivas equivalentes del mismo objeto “álgebra escolar” desde un enfoque transdisciplinar, como se indica en la figura 3.1.

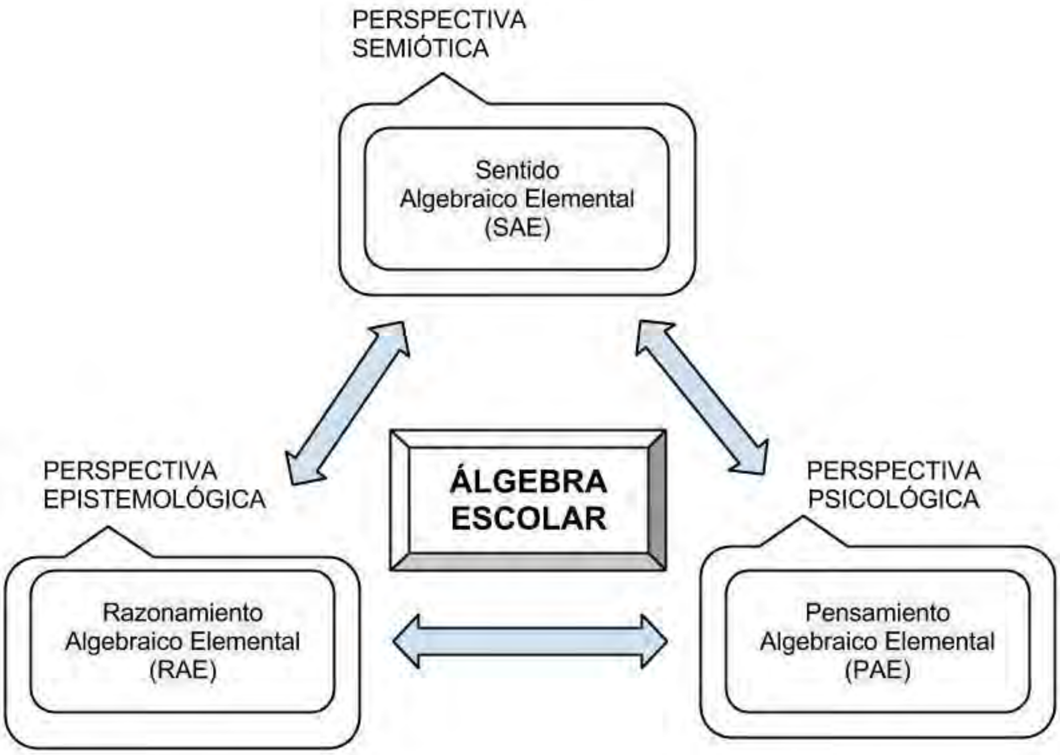


Figura 3.1. Enfoque transdisciplinar del álgebra escolar

2.1. ASPECTOS CONSIDERADOS DE LA LITERATURA QUE CONTRIBUYEN A NUESTRA POSTURA DEL RAE

Consideramos, junto con diversos autores (Mason, 1996; Mason y Pimm, 1984; Carraher, Martínez y Schliemann, 2008; Cooper y Warren, 2008), que la generalización es un rasgo característico del razonamiento algebraico, así como los medios para expresar, tanto las situaciones de generalización, como las de indeterminación (uso de incógnitas y ecuaciones para modelizar situaciones) a través de un lenguaje específico. Para algunos autores como Radford (2011) es posible expresar la generalidad a través de un lenguaje gestual, hasta llegar a la consolidación de un lenguaje propiamente algebraico. Así nuestra concepción de razonamiento algebraico asume tres supuestos básicos sobre la naturaleza de lo algebraico que también han sido explicitados por autores como Radford (2003), Kaput (2008), Filloy, Puig y Rojano (2008). Estos supuestos se refieren al papel esencial de la generalización, el uso del lenguaje alfanumérico (o simbólico-literal) y el cálculo analítico, esto es, el cálculo sujeto a la aplicación de unas reglas sintácticas.

También consideramos que los trabajos sobre el pensamiento relacional (Carpenter et al, 2003; Molina, Castro y Castro, 2009), las funciones y los patrones (Zaskis y Liljedahl, 2002, Castro, 1994) y las estructuras (Chaiklin y Lesgold, 1984; Usiski, 1989) marcan la pauta para establecer tipologías de tareas a través de las cuales es posible el desarrollo del razonamiento algebraico. Los objetos algebraicos inmersos en el pensamiento relacional, funcional y estructural van adquiriendo un significado diferente conforme haya una "evolución" en los procesos de generalización y simbolización. De modo que el conocimiento de propiedades estructurales, en un nivel elemental, comprende el conocimiento de y entre los objetos, de propiedades como la asociativa, conmutativa, etc. (Kieran, 1989; Morris, 1999; Warren, 2001). En los grados más avanzados se reconoce como parte de un conocimiento de la estructura, la equivalencia de las ecuaciones subsecuentes que se obtienen al resolver una ecuación (Palarea, 1998) reconociendo "formas" matemáticas existentes entre los elementos (Hoch y Dreyfus, 2004). El tratamiento de la equivalencia, en los niveles elementales, puede realizarse a través de "ecuaciones numéricas" enmarcadas dentro el pensamiento relacional (Stephens, 2006; Molina, 2007).

2.2. ASPECTOS DEL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO QUE CONSOLIDAD NUESTRA POSTURA SOBRE EL RAE

Desde nuestra postura consideramos que la condición de ser o no algebraica para una práctica matemática es una cuestión de grado. Se recuerda que una práctica matemática es toda actuación o expresión (verbal, gráfica, gestual, etc.) realizada por alguien para resolver un problema matemático, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994); de modo que una práctica matemática puede ser "más algebraica o menos algebraica" en función que incluya algunas características y en función del nivel educativo en el cual se discuta. De este hecho también se desprende que es posible argumentar que los problemas algebraicos no existen y que sólo podemos hablar de métodos o soluciones algebraicas, en el mismo sentido que Ameron (2002) menciona que no es la naturaleza de la tarea, sino el método de solución el que importa.

Así defendemos que el razonamiento algebraico elemental puede ser desarrollado a través de actividades/tareas matemáticas cuyas soluciones conlleven prácticas matemáticas con diferentes niveles de algebrización. Los niveles de algebrización están definidos en función de objetos, significados y procesos que se requieren y surgen en la solución de una actividad/tarea matemática en la escuela primaria, estableciendo para la actividad una configuración algebraica.

En los siguientes apartados explicamos cómo la herramienta de análisis "configuraciones matemáticas de objetos y procesos" aporta pautas para esclarecer la naturaleza de la práctica algebraica.

2.2.1. Objetos algebraicos prototípicos

En el EOS se propone una tipología de objetos que intervienen y emergen de las prácticas matemáticas. La Figura 3.1 resume los seis tipos de objetos primarios y vamos a utilizarlos como pauta para indagar los tipos de "objetos algebraicos".

Figura 3.2. Tipos de objetos implicados en la práctica algebraica

La consideración de una práctica matemática como de índole algebraica puede hacerse con base en la presencia de cierto tipo de objetos, usualmente considerados en la literatura como algebraicos. Estos pueden ser conceptos, procedimientos, propiedades, argumentos, expresados preferentemente con un lenguaje alfanumérico. En una primera aproximación vamos a considerar como tipos de objetos algebraicos primarios los siguientes:

1) *Relaciones binarias* —de equivalencia o de orden— y sus respectivas propiedades (reflexiva, transitiva y simétrica o antisimétrica). Estas relaciones son usadas para definir nuevos conceptos matemáticos.

Ejemplo: Dos fracciones se dicen que son equivalentes cuando aplicadas a una misma cantidad se obtiene la misma cantidad fraccionaria. De otra forma, cuando el producto cruzado de numeradores y denominadores son iguales; formalmente,

$$a, b, c, d \in \quad ; b, d \neq 0\text{: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad ad = bc\text{. Por ejemplo: } \frac{2}{3} = \frac{4}{6}.$$

El conjunto de todas las fracciones equivalentes entre sí, $\left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \ldots\right\}$, da lugar a la consideración de un nuevo objeto más general que cada una de dichas fracciones, que es un número racional particular, usualmente representado por la fracción irreducible $\frac{2}{3}$. Este número racional es un objeto intensivo (una generalidad o abstracción) que se puede definir de una manera más formal indicando la propiedad que caracteriza la formación de todas las fracciones equivalentes a $\frac{2}{3}$: es el conjunto de todas las fracciones en las que el numerador es de la forma 2k, y el denominador de la forma 3k, siendo k cualquier número entero diferente de 0.

$$\left[\frac{2}{3}\right] = \left\{\frac{n}{m} \mid n = 2k; m = 3k; k \in \quad 0 \right\}$$

2) *Operaciones y sus propiedades*, realizadas sobre los elementos de conjuntos de objetos diversos (números, transformaciones geométricas, etc.). El denominado cálculo algebraico se caracteriza por la aplicación de propiedades tales como: asociativa, conmutativa, distributiva, existencia de elemento neutro y de un inverso. Asimismo, pueden intervenir también otros conceptos como ecuación, inecuación e incógnita, y procedimientos tales como: eliminación, trasposición de términos, factorización, desarrollo de términos, entre otros.

Ejemplos:

- Aplicar la propiedad distributiva a la expresión $3(2 + x)$ para producir la expresión equivalente $6 + 3x$; o bien a la expresión $24x + 18y$ para producir la expresión equivalente $6(4x + 3y)$.
- Usar variables para representar números y expresiones en la resolución de un problema del mundo real; comprender que una variable puede representar un número desconocido, o cualquier número en un conjunto específico.

3) *Funciones*. Es necesario considerar los distintos tipos de funciones y álgebra asociada a ellos, es decir, las operaciones y sus propiedades. Asimismo, es preciso distinguir los diferentes objetos involucrados: funciones; variables, fórmulas, parámetros, etc., y contemplar las distintas representaciones de una función: tabular, gráfica, como fórmula, analítica.

Ejemplo: ¿En la figura 3.3, cuántos cuadrados tendrá el dibujo de la sexta posición 6ª? ¿Y el dibujo situado en la posición n–ésima?

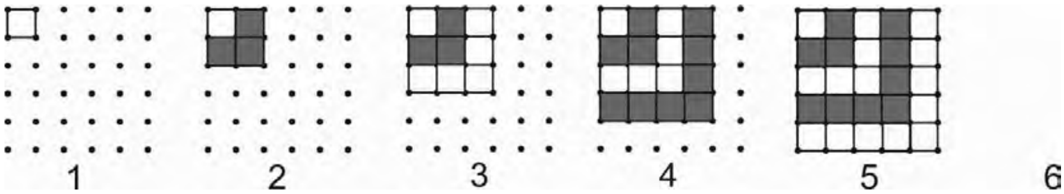


Figura 3.3. Secuencia de cuadrados

En este ejemplo, el número de cuadrados que se van formando para cada posición de la figura viene dado por la función cuadrática, $y = n^2$. Intervienen los conceptos algebraicos de función, variable independiente *(n)*, variable dependiente *(y)*, criterio o regla de correspondencia, n^2.

4) *Estructuras, sus tipos y propiedades* (semigrupo, monoide, semimódulo, grupo, módulo, anillo, cuerpo, espacio vectorial, etc.) características del álgebra superior o abstracta.

El estudio de estas estructuras algebraicas corresponde a niveles educativos superiores, aunque es posible encontrar en libros de primaria contenidos que corresponden a un primer contacto con las propiedades algebraicas que caracterizan al semianillo $(\mathbb{N}, +, \times)$ de los números naturales.

Estos tipos de objetos algebraicos básicos se pueden expresar con diversos lenguajes, preferentemente de tipo alfanumérico si nos atenemos al sentido "clásico" del álgebra que describe Kieran (1989). Pero en el contexto escolar también se usan otros medios de expresión, en particular el lenguaje ordinario, gráfico, tabular, incluso gestual (Radford, 2003; Arzarello, 2006). Un tipo de actividad algebraica primaria será la traducción o transformación entre distintos lenguajes (registros de representación), particularmente la conversión (Duval, 2008) entre el registro de la lengua natural al registro alfanumérico.

2.2.2. Procesos algebraicos prototípicos

En el marco del EOS las prácticas matemáticas y los objetos que intervienen en las mismas se pueden contemplar desde distintos puntos de vista, según el contexto o el juego del lenguaje en que tienen lugar dichas prácticas. La figura 3.4 resume dichos puntos de vista, representados como pares de dualidades para indicar las relaciones dialécticas que se establecen entre las mismas. De estás dualidades se potencian el uso de tres de ellas, dado su relación íntima con la actividad algebraica, que a continuación se explican:

Figura 3.4 Relatividad contextual de la práctica algebraica

En el caso de la práctica o actividad algebraica los procesos de *particularización – generalización* tienen una importancia especial, dado el papel de la generalización como uno de los rasgos característicos del razonamiento algebraico (Mason y Pimm, 1984; Carraher, Martínez y Schliemann, 2008; Cooper y Warren, 2008). El EOS considera a la generalización en términos de la identificación de objetos intensivos y objetos extensivos que intervienen en las prácticas, los cuales proporcionan un análisis más profundo. Un objeto se dice que es extensivo si interviene en una práctica matemática como un ejemplar particular, mientras que se dice que es un intensivo si interviene como un tipo, clase o generalidad (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2011). Estos atributos de los objetos matemáticos, emergentes de los procesos duales de particularización y generalización, son relativos al juego de lenguaje en que participan, y no entidades absolutas. Por ejemplo, en el estudio de las funciones, $y = 2x + 1$, sería una función particular perteneciente a la clase o tipo de funciones lineales, $y = mx + n$; esta última expresión será un objeto intensivo. No obstante, en el estudio de las funciones polinómicas, la función lineal, $y = mx + n$, será un caso particular (un extensivo) de dicha clase de funciones (un intensivo). Por otro lado, la misma función lineal particular, $y = 2x + 1$, está constituida a partir de otros extensivos, los números 2, 1, la operación de sumar números reales, así como de otros intensivos, como es el conjunto R de números reales sobre el que toma valores la variable independiente x y la dependiente y de dicha función. Asimismo, al pedir a los alumnos que continúen la serie de números, 1, 3, 5, 7, 9, …, y encuentren la "ley general" que siguen, esperamos que nos digan algo así como $2x + 1$. Los números particulares 1, 3, 5, … son objetos extensivos, mientras que la regla general, y la serie completa de números impares, resultado del proceso de generalización, es un objeto de naturaleza intensional. Esta manera de abordar el estudio de la generalización muestra claramente el carácter relativo y contextual, así como la existencia de distintos niveles o grados de generalización. De la misma manera que los elementos de un conjunto pueden ser otros conjuntos, los objetos intensivos pueden dar lugar a nuevos objetos intensivos de mayor generalidad.

La dualidad *unitario – sistémico* permite describir los procesos mediante los cuales una entidad compuesta o sistémica (un intensivo) pasa a ser vista como una entidad unitaria (proceso de reificación, entificación, objetivación). Una vez que un intensivo es visto como una entidad unitaria podrá participar en otros procesos de generalización y dar lugar a intensivos de orden superior.

Asimismo, la dualidad *ostensivo – no ostensivo* aporta una nueva comprensión de los procesos de generalización, a los objetos intensivos resultantes, y a los "artefactos" que necesariamente deben intervenir para que tenga lugar la generalización. Con la ostensión nos referimos a los medios semióticos de objetivación (Radford, 2003), a los recursos perceptivos de expresión (simbólicos, o de cualquier otro tipo). Usualmente los objetos matemáticos (conceptos, proposiciones, etc) se consideran objetos ideales o mentales, o sea, objetos no ostensivos. Sin embargo, su "producción" y comunicación tiene que hacerse con la intervención de objetos perceptibles (objetos ostensivos) como lo sería a través del uso de palabras (Goldin y Kaput, 1996), de representaciones gráficas o figurativas, imágenes, iconos, sistemas alfanuméricos (Font, 2000) y algebraicos (ecuaciones, etc.), de figuras geométricas y representaciones sinónimas (Castro y Castro, 1997). Las generalidades o abstracciones, sean conceptos, procedimientos, propiedades, son en sí mismas no ostensivas, pero su toma de conciencia y manipulación por el sujeto requiere el uso de símbolos ostensivos. En este sentido la *simbolización*, parte esencial del razonamiento algebraico permite que los objetos matemáticos sean más asequibles a la reflexión (NCTM, 2000). En el estudio de la función $y = 2x + 1$, el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ está representado (aquí de manera tácita) por las letras x e y, las cuales se consideran como *variables* que "toman" valores en $\mathbb{R}$. Dado que $\mathbb{R}$ es un conjunto estructurado con unas operaciones que cumplen determinadas propiedades, la expresión simbólica, $2x + 1$ interpretable en el cuerpo algebraico $\mathbb{R}$, ha producido un objeto de un nuevo orden de generalidad que es la función lineal.

Así desde nuestra perspectiva del álgebra la presencia de objetos intensivos en una práctica matemática nos sirve para reconocer indicios de un cierto nivel de generalización. Consideramos que la emergencia de los objetos intensivos atraviesa por distintos momentos o etapas cada una de las cuales le aporta distintos niveles o capas de generalidad (Radford, 2011). Un número, 3, una figura geométrica, el triángulo, se presenta como entidad unitaria, ideal, abstracta, general; pero al mismo tiempo su construcción, idealización, abstracción, reificación, pasa por distintos momentos y contextos, cada uno de los cuales le impregna de significados parciales.

La presencia de objetos intensivos (generalidades, conceptualizaciones, abstracciones), en alguno de sus niveles o capas de generalidad, será un rasgo característico de actividad algebraica elemental. Entendida el álgebra de esta manera, supone ampliar su presencia en las matemáticas escolares, ya que en las primeras actividades matemáticas, como pueden ser las de conteo de colecciones de objetos realizados por niños de preescolar hay procesos de generalización - conceptualización.

2.2.3. Configuraciones algebraicas

Los objetos y procesos algebraicos descritos aportan criterios para distinguir distintos tipos de configuraciones algebraicas. Habrá tareas matemáticas que pongan en juego de manera específica relaciones binarias, operaciones, funciones, estructuras. También habrá tareas cuyo foco de atención será la transformación entre distintos modos de expresión, particularmente entre los lenguajes natural, icónico, gestual, etc., a lenguaje simbólico – literal, así como prácticas matemáticas orientadas al objetivo de generar nuevos objetos intensivos (prácticas generativas), o simplemente a la aplicación de objetos intensivos (prácticas de aplicación). A continuación describimos diferentes tipos de configuraciones algebraicas:

2.2.3.1. Configuración intensional

A un niño se le propone la siguiente tarea:

"Pinta de color rojo los triángulos, de verde los círculos (redondos), de azul los cuadrados, de amarillo los rectángulos y de negro los rombos".

Si el estudiante la resuelve correctamente podemos afirmar que ha generalizado o abstraído aspectos figurativos de los conceptos generales de triángulo, círculo, cuadrado, rectángulo y rombo, y los está aplicando al caso particular de los dibujos que se le presentan.

Asimismo, el niño que responde a la pregunta, ¿Cuántas canicas tienes?, mostrando cinco dedos, pronunciando la palabra "cinco", o escribiendo el símbolo 5, ha realizado un proceso de generalización o abstracción, por lo que podríamos decir que ha alcanzado un cierto nivel de "razonamiento algebraico". Ciertamente que aún puede que no sea capaz de relacionar y operar con tales objetos intensivos usando el recurso de los símbolos numéricos, pero no se puede negar que ha desarrollado una cierta capacidad de generalización. En un primer grado de algebrización se debe reconocer, por tanto, la presencia de objetos intensivos (configuración intensional).

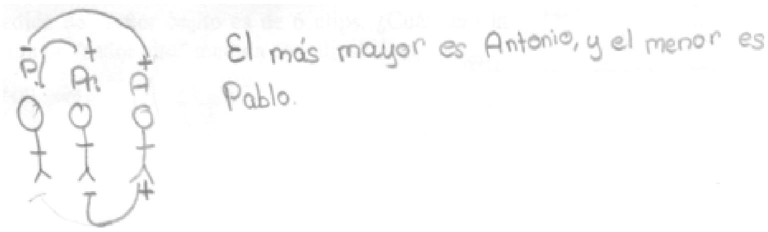
No es necesario representar con símbolos literales los objetos intensivos para que dichos objetos intervengan en una práctica matemática. El uso de símbolos literales será necesario, o al menos, de gran utilidad para representar intensivos de mayor nivel de generalidad. Por ejemplo, el número 428 es una forma eficiente de representar cuatro centenas, dos decenas y ocho unidades, esto es, $4\times100 + 2\times10 + 8$. Si esta expresión se presenta a los estudiantes como un ejemplo de la expresión más general, $a\times10^2 + b\times10 + c$, estamos introduciéndoles en un primer nivel de razonamiento algebraico. A su vez la expresión polinómica, $a\times10^2 + b\times10 + c$, se puede presentar como un caso particular de la expresión polinómica general de cualquier número en base 10, o en otra base diferente. También se puede generalizar al caso en que las potencias de la base sean negativas, esto es, para representar números decimales.

2.2.3.2. Configuración relacional

Veamos el siguiente problema resuelto de dos maneras diferentes. En ambos casos se moviliza una configuración de tipo relacional, pero la primera solución se puede calificar como "más algebraica":

Problema 1: Tres amigos, Pedro, Antonio y Pablo, no se ponen de acuerdo sobre su edad. Pedro es más viejo que Pablo; Pablo es más joven que Antonio; Antonio, a su vez, es más viejo que Pedro. ¿Quién tiene más edad?, ¿Y menos?

Solución. La Figura 3.5 muestra la solución dada por un niño:



Transcripción:

El más mayor es Antonio, y el menor es Pablo.

Figura 3.5 Solución del problema de las edades

En esta resolución podemos reconocer rasgos de razonamiento algebraico de tipo relacional, según la definición dada. Las edades de Pedro, Antonio y Pablo son desconocidas; sus valores pueden variar dentro de un rango. El conjunto de valores posibles de cada una de las edades es un objeto intensivo. Entre las edades hay relaciones de desigualdad; la comparación de las edades requiere poner en juego la propiedad transitiva de la relación de orden en el conjunto numérico de los naturales aplicada a conjuntos de valores. Se aprecia el uso de recursos gráficos - un arco - para vincular las edades que se comparan, y el uso de los símbolos "más" y "menos" para indicar "mayor" y "menor" respectivamente.

Solución 2: Pedro es más viejo que Pablo, por ejemplo, Pedro tiene 15 años y Pablo 12. Antonio es más viejo que Pedro, por ejemplo, 16 años. O sea, Pablo es el más joven y Antonio el más viejo.

Esta solución se basa en valores particulares dados a las edades; son objetos extensivos. No obstante, esta solución también requiere movilizar una propiedad algebraica, la transitividad de la relación de orden en ℕ, aquí particularizada en la comparación de los tres números, 12, 15 y 16. El modo de razonamiento de la solución 1 se puede considerar más algebraico que el de la solución 2 al poner en juego más cantidad de objetos intensivos y el esbozo de una notación simbólica.

Problema 2: ¿Qué número hay que poner en lugar de [ ] en la expresión, 67 + 83 = [ ] +82?

Solución. Un alumno puede resolver la tarea sumando y restando 1 al primer miembro de la igualdad, 67+1+83-1, obtiene 68 + 82; a continuación resta 82 a ambos miembros y obtiene [ ] = 68.

De este modo aplica propiedades generales de la relación de equivalencia y la propiedad asociativa de la adición. Este modo de pensar y de resolver tareas con expresiones numéricas se conoce en la bibliografía sobre "Early Algebra" como características del pensamiento relacional[1]. Esto no tiene lugar si un alumno realiza la suma del primer término y después resta 82; obtiene el resultado 68, pero en este caso pone en juego hechos numéricos particulares. Se trata de una configuración mayoritariamente relacional expresada con lenguaje ordinario y numérico.

Problema 3: Encuentra los valores que hacen cada una de las siguientes sentencias numéricas verdaderas: $44 + 29 = 45 + a$; $65 + 38 = 62 + b$; $99 + 87 = 98 + 86 + c$.

Este ejemplo pone en juego también una configuración mayoritariamente relacional pero introduciendo el uso de notación simbólica literal.

2.2.3.3. Configuración operacional

Problema 4: Un estudiante recibió de sus padres una cierta cantidad de dinero para comer durante 40 días. Sin embargo, encontró sitios en donde pudo ahorrar 4 euros al día en la comida. De esta forma, el presupuesto inicial le duró 60 días. ¿Cuánto dinero recibió?

Solución. Una estudiante, Beatriz, resolvió el problema de la siguiente manera:

[1] Se trata de un uso excesivamente restrictivo de la expresión "pensamiento relacional" al tratarse sólo de tareas que involucran el uso de números y operaciones aritméticas. La idea de comprensión relacional de Skemp puede estar en la base del uso de esta caracterización de las actividades algebraicas elementales, la cual se aplica al aprendizaje de cualquier contenido matemático.

Sea X el dinero recibido de los padres. Representamos por x el gasto diario previsto por los padres para comer 40 días. $x = \frac{X}{40}$.

Sea y el gasto diario real, que permitió comer 60 días: $y = \frac{x}{60}$

$40x = 60y$; además $y = x - 4$;

$40x = 60(x - 4)$; $20x = 240$; $x = 12$; cantidad recibida: $12.40 = 480$; 480€

El problema anterior es un ejemplo de tarea que pone en juego una configuración de tipo operacional. Se utilizan letras para representar las incógnitas, las relaciones se establecen mediante una ecuación, se opera con las incógnitas aplicando las definiciones y propiedades de las operaciones aritméticas.

Se puede calificar de configuración operacional, aplicativa (se aplican los conceptos de incógnita y ecuación, el conjunto de valores posibles de las incógnitas), implicando la transformación del enunciado dado en lenguaje natural a lenguaje alfanumérico.

2.2.3.4. Configuración funcional

El concepto central es el de función, vinculado a un patrón que se expresa gráficamente pero que puede ser expresado usando otros objetos ostensivos. En la solución al problema siguiente se pueden reconocer los conceptos de variación, variable independiente, variable dependiente.

Problema 5: Una bacteria se reproduce por reproducción celular. De cada una se obtienen dos. ¿Cuántas bacterias formarán parte de la cuarta generación? ¿Y en la quinta generación? ¿Y en la generación número 100?

Solución. Un estudiante puede abordar la tarea del siguiente modo:

Generación	Bacterias	
1	2	2×1
2	4	2×2
3	8	$2 \times 2 \times 2$
4	16	$2 \times 2 \times 2 \times 2$
5	32	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

Se establece una dependencia funcional entre la generación (variable independiente) y el número de bacterias correspondiente (variable dependiente). El lenguaje es aritmético y se pretende generar la regla general, o criterio de la correspondencia, al cual se puede llegar por multiplicaciones sucesivas y subsecuentemente, por el reconocimiento del uso de potencias. Lo que podría desembocar en la expresión funcional que establece que a la generación "*n*" le corresponde 2^n bacterias.

Calificamos esta configuración como de tipo funcional, generativo (se debe reconocer el criterio general de la correspondencia), expresada con lenguaje natural y numérico.

2.2.3.5. Configuración estructural

Intervienen como objetos centrales las propiedades estructurales de las operaciones.

En libros de primaria encontramos elementos teóricos que suponen el inicio de una reflexión sobre la estructura algebraica de los conjuntos y operaciones con números. Tal es el caso de los enunciados generales de las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de las operaciones aritméticas y su aplicación a la solución de problemas, como en Ferrero et al, (1999)

Las propiedades de la suma

Propiedad conmutativa El orden de los sumandos no altera la suma	*Propiedad asociativa* Para sumar tres números, sumamos dos cualesquiera de ellos y el resultado se suma con el tercero.

Relaciones entre los términos de la resta

Para comprobar si una resta está bien hecha se suma el sustraendo con la diferencia y el resultado debe ser el minuendo	M - S = D S + D = M M - D = S
En una resta, la diferencia no varía cuando se suma o se resta un mismo número al minuendo y al sustraendo	

Propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de la multiplicación

Propiedad conmutativa En una multiplicación, el orden de los factores no altera el resultado	*Propiedad asociativa* Para multiplicar tres números, se multiplican primero dos de ellos y el resultado por el tercero

Propiedad distributiva

El producto de una suma por un número es igual a la suma de los	El producto de una diferencia por un número es igual a la diferencia de los

productos de cada sumando por ese número	productos de cada término por ese número

En la siguiente sección, describimos la frontera entre la aritmética y el álgebra en términos de las dualidades y procesos descritos. Pero esta frontera no está objetiva o platónicamente establecida, puesto que estas dualidades y procesos son relativos al contexto donde se desarrolla la práctica matemática. De hecho, el carácter algebraico está esencialmente ligado al reconocimiento por el sujeto que realiza la actividad de la regla que conforma el objeto intensivo, la consideración de la generalidad como una nueva entidad unitaria y su materialización mediante cualquier registro semiótico para su posterior tratamiento analítico. Este triple proceso (reconocimiento o inferencia de la generalidad, unitarización y materialización) va a permitir definir dos niveles primarios del pensamiento algebraico, distinguibles de un nivel más avanzado en el que el objeto intensivo es visto como una nueva entidad representada con lenguaje alfanumérico.

3. EL MODELO DE ALGEBRIZACIÓN

En las líneas anteriores hemos descrito los supuestos de nuestra conceptualización del álgebra. En síntesis, podemos establecer que nuestro modelo de algebrización de basa en la interpretación de la *práctica algebraica* como resultado de un proceso de generalización del cual se obtiene un tipo de objeto matemático que denominaremos objeto *intensivo*, que viene a ser la regla que genera la clase, el tipo o generalidad implicada. Luego, la formulación de esta regla, pasa a ser algo nuevo, diferente de los elementos que lo constituyen o describen, como una entidad unitaria emergente del sistema. Por tanto, además de la generalización que da lugar al conjunto, hay un proceso de *unitarización*. Por otra parte, la nueva entidad unitaria tiene que ser hecha ostensiva o *materializada* mediante un nombre, icono, gesto o un símbolo, a fin de que pueda participar de otras prácticas, procesos y operaciones. El objeto ostensivo que materializa al objeto unitario emergente de la generalización es otro objeto que refiere a la nueva entidad intensiva, por lo que tiene lugar un proceso de *representación* que acompaña a la generalización y materialización. Finalmente, el símbolo se desprende de los referentes a los cuales representa/sustituye para convertirse en objeto sobre el cual se realizan acciones (*proceso de reificación*). Estos símbolos-objetos forman nuevos conjuntos sobre los cuales se definen operaciones, propiedades y estructuras, esto es, sobre los cuales se opera de manera sintáctica, analítica o formal (figura 3.6).

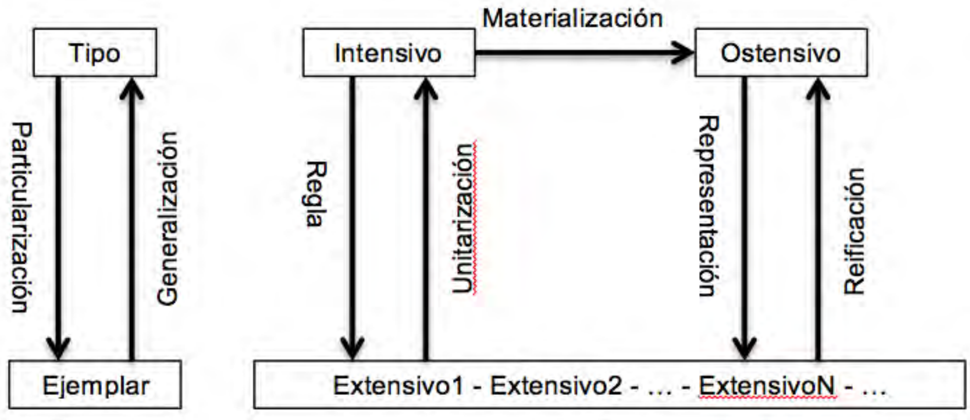


Figura 3.6. Procesos asociados a la dualidad generalización-particularización en una práctica algebraica.

Los tipos de objetos y procesos algebraicos se pueden expresar con diversos lenguajes, preferentemente de tipo alfanumérico en los niveles superiores de algebrización. Pero los estudiantes de los primeros niveles educativos también pueden usar otros medios de expresión para representar objetos y procesos de índole algebraica, en particular el lenguaje ordinario, gráfico, incluso gestual (Radford, 2003).

De este modo, proponemos utilizar tres criterios para distinguir los niveles de RAE:

- La presencia de "objetos algebraicos" intensivos (esto es, entidades que tienen un carácter de generalidad, o de indeterminación).
- Tipo de lenguajes usados para expresar dichos objetos.
- El tratamiento que se aplica (operaciones, transformaciones basadas en la aplicación de propiedades estructurales).

3.1. DEFINICIÓN DE LOS NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN EN LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA ESCOLAR

En esta sección describimos las características de las prácticas realizadas para resolver tareas matemáticas, abordables en educación primaria, que permiten definir distintos niveles de algebrización. Proponemos distinguir dos niveles de algebrización primarios (que llamamos proto-algebraicos). Dichos niveles están enmarcados entre un nivel 0 de algebrización y un tercer nivel en el que la actividad matemática se puede considerar como propiamente algebraica.

El nivel se asigna, no a la tarea en sí misma, sino a la actividad matemática que se realiza, por lo que dependiendo de la manera en que se resuelve una tarea, la actividad matemática puede ser clasificada en un nivel u otro. No se trata por tanto de niveles exclusivamente matemáticos (centrados en las tareas), sino de estadios del funcionamiento de los conocimientos matemáticos en la resolución de problemas (centrados en la relación de los sujetos con las tareas). Además, el cambio en alguna de las variables del problema puede dar lugar a nuevas prácticas matemáticas con progresivo nivel de algebrización.

Por ejemplo:

Un profesor propone a sus estudiantes el siguiente problema:

> Hay seis asientos entre sillas y taburetes. Las sillas tienen cuatro patas y los taburetes tienen tres. En total hay 20 patas. ¿Cuántas sillas y cuántos taburetes hay?

El estudiante A resolvió el problema de la siguiente manera:

> Supongamos que hay el mismo número de sillas y de taburetes: $3 + 3 + 3 + 4 + 4 + 4$. Como el resultado sobrepasa el total de 20 patas, excediéndose en 1 pata, se cambia una silla (de 4 patas) por un taburete (de 3 patas). Finalmente se obtiene 4 taburetes y 2 sillas: $3 + 3 + 3 + 3 + 4 + 4$, teniendo un total de 20 patas.

El estudiante B resolvió el problema de la siguiente manera:

> Sea T el número de taburetes y S el número de sillas. Como el total de taburetes y sillas deben sumar 6, entonces, $T + S = 6$. Por otro lado, se debe tener un total de 20 patas entre los taburetes y las sillas, esto es, $3T + 4S = 20$. Como de $T + S = 6$ se obtiene que $T = 6 - S$; por tanto, $3(6 - S) + 4S = 20$, de donde $18 + S = 20$, obteniéndose finalmente que $S = 2$. Si $S = 2$, entonces $T = 4$. Se deben tener 4 taburetes y 2 sillas para tener una total de 20 patas.

En este ejemplo podría existir un consenso en aceptar que la solución del estudiante A se puede calificar de aritmética, mientras que la del estudiante B de algebraica. Sin embargo, supongamos ahora que un estudiante C resuelve el problema de la siguiente manera:

Teniendo en cuenta que el número de asientos es 6 y que cada silla aporta 4 patas y cada taburete 3, entonces se puede construir una tabla con todos los casos posibles:

Número	1	2	3	4	5	6
Patas de sillas	4	**8**	12	16	20	24
Patas de taburetes	3	6	9	**12**	15	18

Luego, tiene que haber 2 sillas y 4 taburetes, ya que entonces hay 6 asientos en total $(2 + 4 = 6)$ y el número total de patas es 20 $(8 + 12 = 20)$.

El problema así resuelto permite reconocer ciertos aspectos considerados tradicionalmente como algebraicos:

1. Determinación de reglas o técnicas generales. Para resolver problemas del mismo tipo es suficiente aplicar la *técnica general* siguiente: "Se construye una tabla con tantas columnas como número de asientos haya y se determina cuál de las combinaciones posibles determina el número de asientos justos con el número de patas exacto".

2. Simbolización o representación de un objeto mediante un símbolo o una letra. Una persona podría haber sustituido en la primera columna los términos "patas de sillas" y "patas de taburetes" por los símbolos: □ y □□respectivamente; de tal manera, que el símbolo utilizado evocara la característica principal de los asientos en el problema (tener 4 o 3 patas, respectivamente).

3. Determinación de propiedades y proposiciones. La tabla muestra el número de patas que "aportan" uno, dos, tres, etc. asientos de cada tipo. Así, se deduce las propiedades:

    a) Si el número de patas es impar, el número de taburetes tiene que ser impar.

    b) Si el número de patas es par, el número de taburetes también.

    c) El número de patas de un conjunto de sillas es siempre par.

d) El número de patas de un conjunto de sillas es múltiplo de 4; el de taburetes, de 3.

En estas condiciones, la resolución propuesta por el estudiante C excede el campo meramente aritmético, aportando el germen de un trabajo algebraico; y ello a pesar de que en la resolución C sólo usa "números". Parece necesario entonces identificar indicadores de la actividad matemática que permitan clasificarla como "aritmética" o "algebraica" o, de forma más precisa, aspectos que permitan establecer una graduación en diferentes niveles de algebrización.

Los criterios básicos para definir los niveles de algebrización son:

1. *Generalización.* Generación o inferencia de intensivos.
2. *Unitarización.* Reconocimiento explícito de intensivos como entidades unitarias.
3. *Formalización y ostensión.* Nombramiento mediante expresiones simbólico-literales.
4. *Transformación.* Utilización de los objetos intensivos en procesos de cálculo y en nuevas generalizaciones.

Ilustraremos las descripciones de los niveles de algebrización con ejemplos de actividades pertenecientes a las tres facetas o campos del razonamiento algebraico que propone Kaput (2008), esto es, estructuras/operaciones, funciones/patrones y modelización.

3.1.1. Ausencia de razonamiento algebraico (nivel cero)

Si deseamos capacitar al maestro de primaria para que desarrolle el razonamiento algebraico en sus estudiantes, es necesario describir las prácticas matemáticas de nivel 0, esto es, aquellas que no incluyen características algebraicas. Proponemos la siguiente regla para asignar el nivel 0 de algebrización a una práctica matemática:

> Intervienen objetos extensivos (particulares) expresados mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos o literales que refieren a un valor desconocido, pero dicho valor se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares. En tareas funcionales, el reconocimiento de la relación de un término con el siguiente, no implica la determinación de una regla que generaliza la relación de los casos particulares.

Ejemplo 1. Calcula el término que falta: $1500 - 925 =$ ____

Suponiendo que el resultado 575 se obtiene mediante el algoritmo usual de la sustracción, el número desconocido, representado por una línea horizontal (___), es simplemente el resultado de efectuar la operación indicada en el primer miembro de la igualdad; el signo igual expresa el resultado de la operación. Se trata, por tanto de una actividad típicamente aritmética. El trabajo consiste en calcular el número particular que se debe asignar a la línea horizontal de la derecha.

Ejemplo 2. Realiza estas sumas y compara los resultados:

$$a)\ 24386 + 6035; \qquad 6035 + 24386$$

$$b)\ 24386 + 6035 + 715; \qquad 6035 + 715 + 24386$$

Si un alumno se limita a realizar las operaciones pedidas y comprobar que los resultados son iguales dos a dos, la actividad matemática realizada no implica ningún nivel de razonamiento algebraico.

Ejemplo 3. En los libros de educación primaria encontramos abundantes enunciados de problemas como el siguiente:

> El Ayuntamiento plantó al comienzo de la primavera 25 cajas de petunias. Cada caja contenía 20 petunias. Tras unos días de sequía murieron 72 petunias. ¿Cuántas quedan aún?

Un alumno puede razonar del siguiente modo:

> El número total de petunias que se plantaron fueron 25 cajas, por 20 petunias en cada caja, total 500 petunias. Como después se estropearon 72, habrá que descontarlas del total, o sea, quedan $500 - 72 = 428$; 428 petunias.

En esta práctica matemática intervienen números particulares, operaciones aritméticas aplicadas a dichos números y la igualdad como resultado de la operación. Es cierto que en la tarea el sujeto debe reconocer la ocasión de aplicar los conceptos (objetos intensivos) de multiplicación y sustracción de números naturales, además del concepto de número natural aplicado como medida del tamaño de colecciones discretas. Sin embargo, estos procesos de particularización no los consideramos como propios del razonamiento algebraico: las reglas que definen las situaciones de uso de tales conceptos no se hacen explícitas en la realización de la tarea.

3.1.2. Nivel incipiente de algebrización (nivel 1)

En el ejemplo 2, un alumno podría haber razonado de la siguiente forma: "puesto que $24386 + 6035$ es $30421,$ entonces para calcular $24386 + 6035 + 715$ es suficiente añadir 715 al resultado 30421, dando como suma total 31136. Asimismo, podría haber razonado que los resultados son iguales dos a dos, puesto que el orden en que se suman dos términos es irrelevante. El alumno no tiene porqué nombrar a estos razonamientos "propiedades asociativa y conmutativa"; lo esencial es que establece una relación genérica entre números y unas propiedades reutilizables de sus operaciones. Es aquí que se establece un primer paso en la algebrización del razonamiento.

> En un nivel 1 de algebrización, intervienen objetos intensivos cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Se aplican relaciones y propiedades de las operaciones y pueden intervenir datos desconocidos expresados con símbolos o letras pero sin operar con dichos objetos. En tareas funcionales se reconoce la generalidad aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal.

En el caso de prácticas matemáticas que ponen en juego incógnitas y relaciones (ecuaciones) el uso de materializaciones simbólicas (__, …, [ ], ○) para las cantidades desconocidas marca un primer nivel de algebrización si la determinación del valor desconocido no se hace mediante la mera asignación del resultado de operaciones sobre objetos particulares. Asimismo, la aplicación de propiedades relacionales y estructurales del semigrupo $\mathbb{N}$ de los naturales, expresadas con lenguaje numérico y natural, es también propia del nivel 1 de algebrización.

Ejemplo 4:

$$a)\ 15 + 11 = 11 + [\ \ ]; \quad b)\ 10 + [\ \ ] = 15 + 15; \quad c) 3 \times [\ \ ] = 672$$

La tarea a) se puede resolver sin realizar directamente las operaciones, evocando la propiedad conmutativa de la suma de los números naturales. La b) se puede resolver mediante descomposición y aplicando la propiedad asociativa:

$$10 + [\ \ ] = 10 + 5 + 15 = 10 + (5 + 15) = 10 + 20$$

Luego el número que falta es 20. La c) se puede resolver reconociendo que la división es la operación inversa de la multiplicación. Algunos alumnos de 12-13 años persisten en resolver la expresión c) mediante ensayo y error, sin reconocer la relación inversa entre la división y multiplicación ("síndrome de la inversa de la multiplicación"; Filloy, Puig y Rojano, 2008, p. 8). La resolución mediante ensayo y error, probando sucesivos números, sería una práctica de nivel 0 de algebrización.

En los tres casos las tareas se resuelven evocando propiedades algebraicas de las operaciones con números naturales, y no realizando los cálculos sobre los números particulares que intervienen, o mediante ensayo y error. Esta es la razón por la que le asignamos un primer nivel de algebrización.

Ejemplo 5 *(balanza algebraica)*: ¿Cuántos tornillos hay que poner en la tercera balanza (figura 3.7) para que quede equilibrada*?*

Solución: La segunda balanza indica que 3 destornilladores pesan igual que 6 tornillos; luego 1 destornillador pesa igual que 2 tornillos. En la primera balanza hay 14 tornillos en el plato de la derecha; si quitamos el destornillador habrá que quitar 2 tornillos para que se mantenga el equilibrio. Luego en la tercera balanza hay que poner $14 - 2 = 12$; 12 (tornillos).

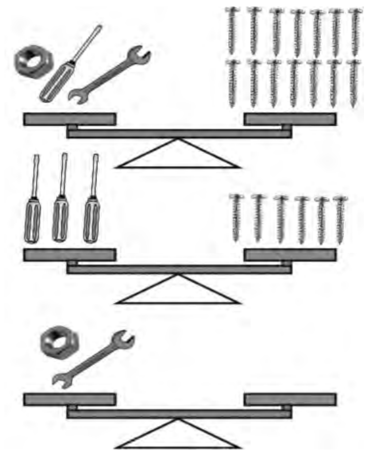


Figura 3.7. Balanza algebraica

Como se ve se están aplicando propiedades estructurales del semianillo $(\mathbb{N}, +, \times)$, aunque con un lenguaje natural. Se puede asignar el nivel 1 de algebrización a cada una de las etapas en que se descompone la tarea.

Ejemplo 6 *(áreas y perímetros)*: Indica el lado de un cuadrado y la base y altura de un rectángulo que tengan igual área y distinto perímetro.

Solución 1: Supongamos que el lado del cuadrado es 6; el perímetro será 24 (cuatro veces el lado) y el área 36 (lado por lado). Un rectángulo de área 36 puede estar formado por una base de 12 y una altura de 3 ($12 \times 3 = 36$); en este caso el perímetro será $12 + 12 + 3 + 3 = 30$, que es diferente de 24.

En esta resolución interviene los objetos intensivos, fórmulas generales de cálculo del área de un cuadrado (lado × lado), del rectángulo (base × altura), perímetro del cuadrado (4 × lado) y perímetro del rectángulo (2 veces la base más dos veces la altura). Sin embargo, dichas reglas no aparecen enunciadas de manera general y explícita, sino particularizadas con valores numéricos específicos. La actividad matemática que se realiza es de índole aritmético-geométrica sin ningún carácter algebraico (nivel 0).

Solución 2: Supongamos que el lado del cuadrado es 6; el perímetro será 24 y el área 36. Podemos encontrar muchos rectángulos cuya área sea 36, y perímetro diferente de 24. Por ejemplo, si la base fuera 4, la altura sería 9 (36/4=9), el perímetro 26; si la base fuera 2, la altura sería 18 (36/2=18), el perímetro 40. En general, la altura sería 36 dividido por la base.

En esta segunda solución se genera un objeto intensivo: el conjunto de soluciones posibles para la base y altura del rectángulo una vez fijada el área del cuadrado. Se establece una relación general entre la altura y la base del rectángulo (altura=Área/base), aunque dicha regla se enuncia con lenguaje aritmético y natural. Esta actividad matemática supone un nivel 1 de razonamiento algebraico.

3.1.3. Nivel intermedio de algebrización (nivel 2)

Este nivel de algebrización lo definimos mediante la siguiente regla[2]:

> Intervienen indeterminadas o variables expresadas con lenguaje simbólico – literal para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial temporal. En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $\mathrm{Ax} \pm \mathrm{B} = \mathrm{C}$. En tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.

[2] En tareas estructurales seguimos el criterio propuesto por Filloy et al. (2008), quienes consideran como no propiamente algebraica la modelización de problemas verbales mediante ecuaciones de la forma $Ax + B = C$. En tareas funcionales nuestra propuesta incluye en este nivel las generalizaciones contextuales (Radford, 2003) y las generalizaciones simbólicas que no reconozcan las formas canónicas de expresión de la generalidad. Las generalizaciones factuales las consideramos como propias del nivel 1.

Ejemplo 7: Una caja mágica duplica el número de monedas que metas en ella, pero después que se usa cada vez se deben pagar 4 monedas. Juan probó e introdujo sus monedas en la caja y, efectivamente se duplicaron. Pagó 4 monedas y volvió a intentarlo. De nuevo se duplicaron, pero al pagar las 4 monedas se quedó sin dinero. ¿Cuántas monedas tenía Juan al principio?

Solución 1: Si Juan tuviera 2 monedas podría jugar; al meterlas en la máquina obtendría 4, pagaría 4 y se quedaría con 0, por lo que no podría volver a jugar. Si Juan tuviera 3 moneda, al meterlas en la máquina obtendría 6, al pagar 4 se queda con 2. Vuelve a meterlas, obtiene 4; al pagar 4 se queda sin dinero. Luego Juan tenía al principio 3 monedas.

La actividad matemática desarrollada en esta resolución no pone en juego ningún nivel de algebrización. El sujeto trabaja con valores particulares de las variables de la tarea y opera aritméticamente con ellos. Veamos la siguiente solución:

Solución 2: Juan comienza con *n* monedas (cantidad desconocida); al ponerlas en la máquina obtiene $2n$; paga 4 y se queda con $2n - 4$. Introduce $2n - 4$ en la máquina y obtiene el doble, o sea, $2(2n - 4)$. Al pagar 4 se queda sin dinero, o sea:

$$2(2n - 4) - 4 = 0; 4n - 8 - 4 = 0; 4n - 12 = 0; n = 3$$

La solución 2 es claramente de nivel 2. La cantidad desconocida de monedas (incógnita) se representa simbólicamente mediante una ecuación de la forma $Ax + B = C$.

Ejemplo 8 *(secuencia de figuras con palillos)*[3]: En la figura 3.8, ¿Cuántos palillos son necesarios para formar el dibujo situado en la posición 4ª? ¿Y para formar el dibujo que estuviera en la posición 50? ¿Y para la posición 100?

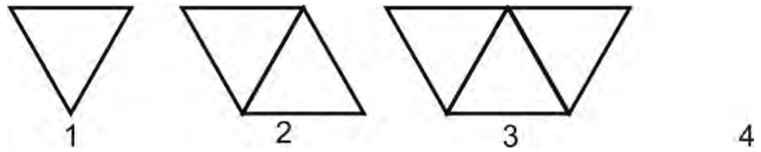


Figura 3.8. Figuras con palillos

[3] Un ejemplo similar es descrito en Radford (2011) en una experiencia realizada con niños de segundo grado (7-8 años). Los alumnos fueron capaces de encontrar la regla que genera las figuras de una posición genérica (50, 100, 500, …), y expresarla con el apoyo de ejemplos particulares (generalización factual). Asimismo, fueron capaces de referir mediante gestos a un valor indeterminado para la posición de las figuras y la forma de las mismas.

Solución: La secuencia de figuras está formada por triángulos; cada triángulo requiere 3 palillos, luego la figura en la posición n, requiere $3n$ palillos. Pero al poner juntos los triángulos se eliminan palillos; en la figura 2ª se elimina 1, en la 3ª se eliminan 2, en la 4ª se eliminan 3. O sea, la fórmula general será $3n-(n-1)$. Para la figura 50 se necesitan 101 palillos y para la 100, 201.

Se trata de una generalización de tipo mixto, contextual y simbólico. La regla que proporciona el número de palillos en una posición cualquiera se relaciona con la forma y posición ordinal de la figura. La fórmula dada no es transformada operando con la variable para obtener la forma canónica de expresión, $2n+1$.

3.1.4. Nivel consolidado de algebrización (Nivel 3)

En el ejemplo 6 (balanza algebraica) la exposición en lenguaje natural podría haberse formalizado: puesto que $3d=6t$ (3 destornilladores = 6 tornillos); dividiendo por 3 ambos miembros, $d=2t$. Además, en la primera balanza, $p+d+l=14t$ (pieza, destornillador, llave = 14 tornillos). Entonces, si se quita el destornillador del platillo izquierdo el equilibrio se mantiene si quitamos un peso equivalente, o sea 2 tornillos. Esta explicación de la actividad matemática realizada supone un nivel consolidado de algebrización (nivel 3) ya que se han planteado de manera simbólica las ecuaciones y se aplica una técnica de sustitución para resolver la ecuación requerida.

Este nivel puede ser descrito de la siguiente forma:

> Se generan objetos intensivos representados de manera simbólica – literal y se opera con ellos; se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia. Se realizan tratamientos con las incógnitas para resolver ecuaciones del tipo $\mathrm{Ax} \pm \mathrm{B} = \mathrm{Cx} \pm \mathrm{D}$, y la formulación simbólica y descontextualizada de reglas canónicas de expresión de funciones y patrones.

Evidentemente, se pueden identificar niveles más avanzados de razonamiento algebraico, como aquellos que implican el reconocimiento, enunciado y justificación de propiedades estructurales de los objetos matemáticos que intervienen en la práctica correspondiente (números, medidas, transformaciones geométricas,...).

En la tabla 3.1, sin pretender ser categóricos, resumimos las características esenciales de los cuatro niveles de algebrización identificados, que hemos descrito y ejemplificado anteriormente, y que nos permiten distinguir tres niveles de razonamiento algebraico elemental.

Tabla 3.1: Rasgos característicos de los niveles de razonamiento algebraico elemental

NIVELES	TIPOS DE OBJETOS	TRANSFORMACIONES	LENGUAJES
0	No intervienen objetos intensivos. No se diferencian propiedades Pueden intervenir datos desconocidos.	Se opera con objetos extensivos	Natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos o incluso letras que refieren a objetos extensivos o datos desconocidos
1	En tareas estructurales pueden intervenir datos desconocidos. En tareas funcionales se reconocen los intensivos	En tareas estructurales se aplican relaciones y propiedades de las operaciones. En tareas funcionales se calcula con objetos extensivos.	Natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos
2	Intervienen indeterminadas o variables	En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax \pm B = C$. En tareas funcionales se reconoce la generalidad pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.	Simbólico – literal, usado para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial y temporal
3	Intervienen indeterminadas o variables	En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax \pm B = Cx \pm D$. Se opera con las indeterminadas o variables.	Simbólico – literal ; los símbolos se usan de manera analítica, sin referir a la información del contexto

Se hace preciso mencionar que es necesario reconocer que las fronteras entre los niveles pueden a veces ser difusas y que dentro de cada nivel es posible hacer distinciones que podrían llevar a proponer nuevos niveles. Sin embargo, nuestra propuesta puede ser útil para orientar la acción del maestro de primaria que trate de impulsar la progresión del pensamiento matemático de los alumnos hacia niveles progresivos de generalización y eficacia representacional y operatoria.

3.2. CONEXIONES DEL MODELO DE NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN CON OTRAS PROPUESTAS

Los niveles de algebrización que proponemos están relacionados con los dos aspectos que Kaput (2008) identifica como característicos del álgebra y del razonamiento algebraico: A) El álgebra como simbolización sistemática de generalizaciones de regularidades y restricciones; B) El álgebra como razonamiento guiado sintácticamente y acciones sobre generalizaciones expresadas en sistemas de símbolos convencionales. El aspecto A se concreta en nuestro modelo en dos niveles proto-algebraicos de razonamiento, mientras que el B se asociada a un nivel algebraico consolidado. Los niveles de algebrización que describiremos son también interpretables en términos de "capas de generalidad" que describe Radford (2011, p. 311).

Nuestro requerimiento del uso de lenguaje simbólico-literal para asignar un nivel propiamente algebraico (nivel 3) a una práctica matemática, y que se opere de manera analítica/sintáctica con dicho lenguaje, concuerda con las posiciones de otros autores interesados por definir "lo algebraico". Puig y Rojano (2004, p. 198) incluyen entre otras las siguientes características:

- El uso de un sistema de signos para resolver problemas que permita expresar el contenido del enunciado del problema relevante para su solución (su "estructura"), separada de lo que no es relevante.

- La ausencia de compromiso ontológico de los sistemas de signos, que les permitan representar a cualquier tipo de objeto matemático.

- El carácter analítico del uso de los sistemas de signos para reducir el enunciado del problema a una forma canónica.

Asimismo, operar con la incógnita como si fuese conocida, representada en lenguaje simbólico-literal, marca diferencias distintivas entre el razonamiento aritmético y el propiamente algebraico. “Este tipo de insuficiencia operacional en lo que está representado en el estadio pre-simbólico del álgebra sugiere la presencia de un punto de corte o cambio entre operar sobre la incógnita y no operar sobre ella, aquí al nivel del pensamiento individual” (Filloy, Puig y Rojano, 2008, 93).

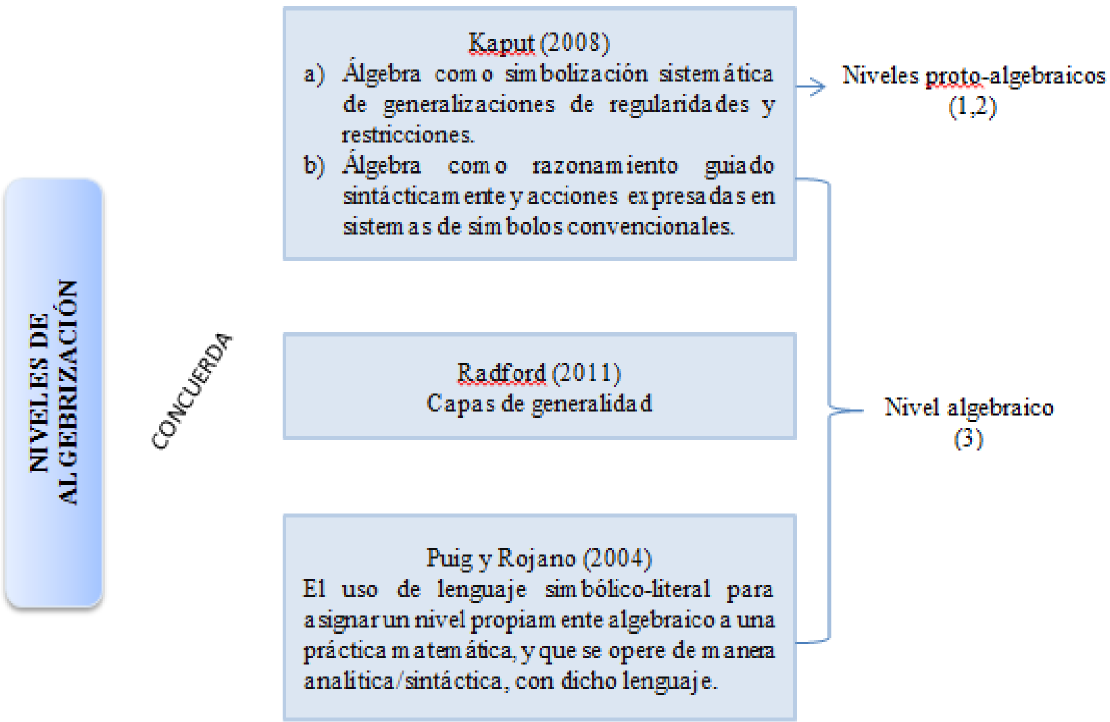


Figura 3.9. Concordancia del modelo de algebrización con otras perspectivas

En consonancia con las propuestas de los autores que investigan en el campo conocido como “algebra temprana” (Carraher y Schliemann, 2007) proponemos distinguir dos niveles primarios de razonamiento proto-algebraico para distinguirlos de otras formas estables o consolidadas de razonamiento algebraico. La idea clave es “hacer explícita la generalidad”, en el campo de las relaciones (equivalencia y orden), estructuras, el estudio de las funciones y la modelización de situaciones matemáticas o extra-matemáticas, al tiempo que se opera o calcula con dicha generalidad. Estos componentes quedan expresados en la figura 3.10:

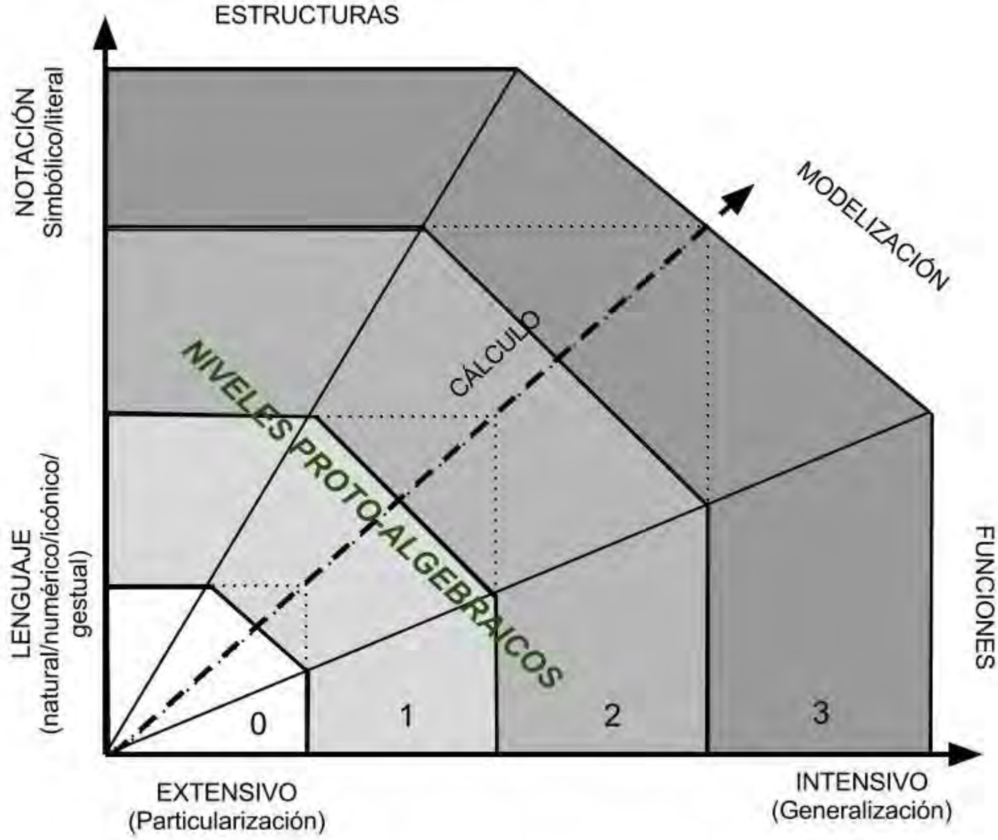


Figura3.10. Niveles proto-algebraicos de razonamiento matemático

De la figura podemos interpretar cómo el razonamiento algebraico puede ser adquirido a través del desarrollo progresivo de un lenguaje y de acciones de generalización a través de diversas tipologías de tarea. En el caso del conocimiento de la estructura, es posible desarrollarlo en un primer nivel en la realización de variedad de tareas matemáticas tales como la interpretación de expresiones, el cálculo de valores de expresiones, juzgar la equivalencia de expresiones hasta llegar a un nivel avanzado en donde se realizan transformaciones que preservan la equivalencia en expresiones algebraicas complejas y consecuentemente llegar al estudio de entidades estructurales propias del álgebra en niveles superiores que involucra estructuras tales como grupos, anillos, etc. En cuanto a las funciones es posible comenzar con actividades elementales sobre patrones. Algunas veces los patrones son generados geométricamente, como cuando se trabaja con números triangulares o figurativos.

En nuestra concepción del álgebra, la modelización adquiere una importancia relevante. Las variables, ecuaciones, funciones, y las operaciones que se pueden realizar con éstas, son instrumentos de modelización matemática de problemas procedentes de la propia matemática (aritméticos, geométricos), o problemas aplicados de toda índole (de la vida cotidiana, financieros, físicos, etc.). Cuando estos problemas se expresan en el lenguaje algebraico producimos un nuevo sistema en el que se puede explorar la estructura del problema modelizado y obtener su solución. La modelización algebraica de los problemas proporciona nuevas capacidades para analizar las soluciones, generalizarlas y justificar el alcance de las mismas. Permite además reducir los tipos de problemas y unificar las técnicas de solución.

Esta concepción ampliada del álgebra como instrumento de modelización matemática es la que se puede y debe ir construyendo progresivamente desde los primeros niveles educativos, puesto que la modelización algebraica es una cuestión de menor o mayor grado (Bolea, Bosch y Gascón, 2001). Aunque el cálculo literal, basado en las propiedades estructurales de los conjuntos numéricos se suele iniciar en secundaria, los procesos de simbolización, expresión de relaciones, identificación de patrones, son propios de los primeros niveles de algebrización y, puesto que se puede iniciar su estudio desde la educación primaria se debería hacerlo (Cai y Knuth, 2011).

Los tipos de objetos y procesos algebraicos considerados en el modelo descrito suponen un análisis microscópico complementario al abordado mediante la noción de praxeología (Chevallard, 1999). De hecho, el modelo propuesto permite un estudio pormenorizado de los comportamientos de los sujetos, que excede el carácter institucional abordado desde la identificación de las praxeologías matemáticas y didácticas. Además, al incluir nuestro modelo niveles proto-algebraicos, está más adaptado a etapas donde el razonamiento algebraico es incipiente (tercer ciclo de Educación Primaria y primer ciclo de Educación Secundaria), mientras que las etapas del proceso de algebrización de las praxeologías matemáticas, que se identifican y describen en diversos trabajos realizados en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Gascón, 1999; Bolea, et al., 2001; Ruiz-Monzón, Bosch y Gascón, 2010; Gascón, 2011) corresponden a tareas y actividades matemáticas que, según nuestra modelización del razonamiento algebraico, tienen ya un carácter algebraico consolidado. Por ejemplo, la primera etapa del proceso de algebrización que describen Ruiz, Bosch y Gascón (2010), consistente en la formulación escrita (simbólica) de un "programa de cálculo aritmético", ya corresponden a una actividad matemática del nivel 3 según nuestro modelo.

Nuestra conceptualización del álgebra también se diferencia de las ideas de Caspi y Sfard (2012). Estos autores conciben al algebra elemental como un meta-discurso de la aritmética y sostienen que "el pensamiento algebraico surge cuando se observan y analizan las relaciones y procesos numéricos en la búsqueda de una generalización o en un intento de encontrar un valor desconocido" (p. 46). Proponen una estructura jerárquica sobre el discurso algebraico presentando los modos informales y formales del mismo. A diferencia de nuestro modelo, que propone un desarrollo progresivo de las formas del lenguaje, el modelo de Caspi y Sfard supone una evolución en el discurso formal e informal de manera independiente.

4. IMPLICACIONES PARA EL MAESTRO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Sin duda alguna el profesor juega un papel importante en el desarrollo de los conocimientos de los estudiantes. Si queremos desarrollar el razonamiento algebraico en los niños, y mejorar el tratamiento del álgebra en secundaria, el profesor debe ser el principal agente del cambio. Como afirma Radford (2011):

> El pensamiento algebraico es de ninguna manera 'natural', algo que aparecerá y se desarrollará una vez que los estudiantes hayan madurado bastante. El pensamiento algebraico es un tipo de reflexión y acción cultural muy sofisticado, un modo de pensamiento que fue refinado sucesivamente a lo largo de siglos antes que alcanzara su forma actual (p. 319).

No basta con elaborar propuestas curriculares (por ejemplo, NCTM, 2000) que incluyan el álgebra desde los primeros niveles educativos. Es necesario que los maestros participen de la visión ampliada del álgebra que proponen diversas investigaciones y experiencias didácticas (Carpenter, Frankle y Levi, 2003; Molina, 2009; Cai y Knuth, 2011; Godino, Castro, Aké y Wilhelmi, 2012; Godino, Aké, Gonzato, y Wilhelmi, en prensa) a fin de que estén capacitados para transformar las tareas matemáticas escolares hacia el logro de niveles progresivos de algebrización.

Un punto crucial es la elección de las tareas que los profesores proponen a sus estudiantes con la finalidad de fomentar en ellos la reflexión sobre los objetos matemáticos. En este sentido la herramienta desarrollada a partir del Enfoque Ontosemiótico puede permitir al profesor juzgar el carácter algebraico de las tareas y seleccionar aquellas que proporcione un mayor grado de algebrización. Las variables y valores que caracterizan el razonamiento algebraico elemental, según el modelo propuesto en este capítulo, pueden servir de base al profesor para modificar adecuadamente las tareas de los libros de texto, a fin de promover progresivamente el pensamiento algebraico de sus alumnos.

Esto, no obstante, supone un reto para la formación de profesores ya que dicha formación debe contemplar de manera sistemática la visión ampliada del álgebra que aquí se ha desarrollado, que exige por parte de los profesores un cambio en su concepción acerca del álgebra y focalizar su atención en las conexiones existentes entre el álgebra y la aritmética ofreciendo oportunidades para el desarrollo del razonamiento algebraico elemental a través de tareas que permiten reconocer estructuras, el carácter relacional del signo igual, identificación de patrones que lleven a la generalización, etc. Los profesores requieren desarrollar habilidades para "algebrizar" ejercicios que se encuentran en los libros de texto, e identificar aspectos de la red de conceptos y significados algebraicos que podrían ser puestos en juego durante la actividad matemática.

La distinción de niveles de razonamiento algebraico elemental que hemos descrito, junto con los ejemplos ilustrativos de los mismos, puede ser útil en la formación matemática de maestros de educación primaria. El estudio y discusión de ejemplos similares a los expuestos en este capítulo puede permitir el desarrollo en los maestros de un *sentido algebraico,* al permitir reconocer rasgos de las prácticas matemáticas sobre los cuales se puede intervenir para aumentar progresivamente el nivel de algebrización de la actividad matemática de los alumnos. Este sentido algebraico se puede entender, de acuerdo con el modelo de algebrización como la capacidad de un sujeto para,

- Usar de manera sistemática símbolos para expresar cantidades indeterminadas y generalizaciones, especialmente mediante notaciones simbólico-literales.
- Reconocer y aplicar propiedades estructurales de los sistemas matemáticos, particularmente propiedades de las operaciones y relaciones.
- Reconocer patrones, regularidades y funciones.
- Modelizar situaciones matemáticas o del mundo real con expresiones simbólico-literales y operar de manera sintáctica (siguiendo reglas) con ellas, para obtener una respuesta interpretable en la situación dada.

El sentido algebraico se puede desarrollar en los niños como resultado de la realización de actividades debidamente planificadas, que partiendo de tareas aritméticas, o de otros bloques de contenido (medida y geometría), vayan creando la tensión hacia la generalización, simbolización y el cálculo analítico.

CAPÍTULO 4

EVALUACIÓN DE CONOCIMIENTOS SOBRE EL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO EN FUTUROS MAESTROS: UN ESTUDIO EXPLORATORIO

1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se desarrolla la segunda etapa de nuestra investigación, la cual pretende dar respuesta a la siguiente pregunta de investigación:

> *¿Qué conocimientos, incluyendo comprensión y competencia, tienen los maestros en formación inicial sobre el razonamiento algebraico elemental (RAE)?*

Es una cuestión que se justifica por la necesidad de tener un marco de referencia sobre el conocimiento que posee el maestro en formación respecto al RAE. Dado que el conocimiento que el maestro exhibe ha sido identificado como un aspecto determinante en su gestión docente (Borko y Putnam, 1996) y tiene efecto en lo que los estudiantes aprenden (Hill, Rowan, y Ball, 2005), se precisa, entonces, determinar si los conocimientos que los maestros poseen permiten reconocer el razonamiento algebraico elemental.

Como primer paso para dar respuesta a nuestro planteamiento, se diseñó un cuestionario con base en el modelo para la evaluación y desarrollo del conocimiento didáctico-matemático propuesto por Godino (2009). A lo largo de este capítulo, se describe la construcción del cuestionario y se argumenta la elección de cada una de las tareas que la integran así como el contenido que evalúan. Se desarrollan posibles soluciones a las tareas propuestas en el cuestionario y se lleva a cabo un análisis epistémico en términos de objetos matemáticos identificados en cada una de las tareas y sus soluciones plausibles. Así mismo, describimos el contexto en el que se llevó a cabo la aplicación del cuestionario, la metodología seguida y el análisis y discusión de los resultados obtenidos. Finalmente se presentan una síntesis y las conclusiones de este estudio exploratorio.

2. CONSTRUCCIÓN DE UN CUESTIONARIO SOBRE EL RAE

Para introducir y desarrollar el razonamiento algebraico en los niños de la escuela primaria, los maestros requieren construir una visión más ampliada del pensamiento algebraico y ser capaces también de conectar éste con el currículo de la primaria en sus distintos bloques de contenido. El NCTM (2000), establece que "los maestros deben conocer y entender profundamente las matemáticas que enseñan y deben ser capaces de usar este conocimiento con flexibilidad en sus funciones docentes" (p. 17). Sin embargo, la implantación de una propuesta curricular, como lo es el desarrollo del razonamiento algebraico en la escuela primaria, requiere, además, que los maestros exhiban conocimientos algebraicos que favorezcan el desarrollo del razonamiento algebraico elemental manifestado en clase por los niños de la escuela primaria.

Es así como en esta segunda etapa se pretende indagar sobre qué conocimientos poseen los maestros en formación sobre el álgebra y el razonamiento algebraico que posteriormente nos permita identificar las limitaciones y carencias en los diferentes aspectos parciales de su conocimiento. De este modo, se utilizó la encuesta como método descriptivo y se eligió el cuestionario de pregunta abierta como instrumento de medición para las características generales de los estudiantes (Cohen y Manion, 1990). Y es precisamente el interés en describir las características de los estudiantes lo que motivó la elección del cuestionario en su modalidad de pregunta abierta; una pregunta abierta puede capturar la autenticidad, la riqueza y la profundidad de una respuesta (Cohen, Manion y Morrison, 2011).

Para la construcción del cuestionario se realizó un banco de tareas (anexo 1.3) donde se recopilaron tareas propuestas en diferentes investigaciones referidas al álgebra en la escuela primaria (Carraher, Schliemann y Brizuela, 2000; Blanton y Kaput, 2003, Bednarz, Radford, Janvier, y Lepage, 1992), así como algunas tareas propuestas en el libro de texto de la editorial Anaya (Ferrero et al, 2007). La creación de un banco de tareas propuestas desde las investigaciones tuvo la finalidad de representar el contenido a estudiar; en este sentido las tareas seleccionadas fueron utilizadas para el desarrollo del razonamiento algebraico, principalmente en niños. Por otro lado, la inclusión de tareas propuestas en los libros es debido a que son la fuente de información en la que los maestros se basan para su enseñanza (Kieran, 1992) y por tanto deben apreciar en ellas las oportunidades para desarrollar el razonamiento algebraico. "La idea no es simplemente atribuir significado algebraico a las actividades matemáticas de la escuela primaria, los contenidos matemáticos deben ser transformados sutilmente para resaltar el carácter algebraico" (Carraher, Schiliemann, Brizuela y Earnets, p. 88).

La selección final se realizó considerando la presencia o ausencia de ciertos rasgos algebraicos, de acuerdo a la propuesta realizada en términos del EOS del razonamiento algebraico (capítulo 3) en donde la naturaleza algebraica se concibe desde una visión ampliada que permite reconocer distintos tipos y grados de algebrización en la actividad matemática. En el cuestionario también se incluyeron consignas para explorar 2 facetas del conocimiento del profesor (Godino, 2009) a saber, la faceta epistémica y la faceta instruccional.

3. DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LAS TAREAS DEL CUESTIONARIO

Para cada una de las tareas hemos elaborado soluciones esperadas y posteriormente hemos realizado un análisis detallado de las mismas basado en el marco teórico adoptado. Mediante este análisis identificamos la trama de objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas ligadas con la resolución de las tareas lo que permite describir la complejidad y naturaleza algebraica de dichas prácticas.

3.1. TAREA 1: MULTIPLICACIONES INCOMPLETAS

El apartado a) de la tarea 1 (figura 4.1) ha sido tomado de Anaya (Ferrero et al 2007, p. 41) y plantea la resolución de dos multiplicaciones con cifras desconocidas en las que se precisa relacionar aspectos del funcionamiento y la estructura del algoritmo de la multiplicación de números naturales; también se encuentra inmersa la idea de relación. Este tipo de tareas son consideradas por Gallardo (2004) como problemas de matemáticas y no como simples tareas. Aunque se trata de poner de manifiesto un algoritmo el resolutor se ve obligado a resolver mentalmente ecuaciones en el transcurso de resolución ($7\times\_ = a10+1$). El apartado b) de esta tarea fue tomado del LMT project (s. f) y plantea tres diferentes métodos para multiplicar dos números naturales; en el procedimiento subyacen las propiedades distributiva y conmutativa. Se aprecia la estructura del sistema de numeración decimal. En este sentido el maestro debe poder apreciar en la tarea esas características algebraicas subyacentes, es decir, mirar a la tarea con "ojos algebraicos" (Kaput y Blanton, 2001).

Da respuesta a las siguientes situaciones relacionadas con la multiplicación.

a) Completa las siguientes multiplicaciones y determina los números faltantes. Explica tu razonamiento.

a1)
$$\begin{array}{cccccc}
 & & & 4 & 2 & 7 \\
 & & \times & \square & \square & 4 \\
\hline
 & & \square & \square & \square & \square \\
 & 1 & 2 & 8 & 1 & \\
+ & \square & \square & \square & & \\
\hline
 & 5 & 7 & 2 & 1 & 8
\end{array}$$

a2)
$$\begin{array}{cccccc}
 & & & 3 & 9 & 4 \\
 & & \times & \square & \square & 6 \\
\hline
 & & 2 & 3 & \square & 4 \\
+ & \square & \square & \square & & \\
\hline
 & 8 & 1 & 1 & \square & \square
\end{array}$$

b) Imagina que trabajas con tu clase el tema de multiplicación. Entre las respuestas de los estudiantes, se tiene las siguientes:

b1)
$$\begin{array}{cccc}
 & & 3 & 5 \\
 & \times & 2 & 5 \\
\hline
 & 1 & 2 & 5 \\
+ & 7 & 5 & \\
\hline
 & 8 & 7 & 5
\end{array}$$

b2)
$$\begin{array}{cccc}
 & & 3 & 5 \\
 & \times & 2 & 5 \\
\hline
 & 1 & 7 & 5 \\
+ & 7 & 0 & 0 \\
\hline
 & 8 & 7 & 5
\end{array}$$

b3)
$$\begin{array}{cccc}
 & & 3 & 5 \\
 & \times & 2 & 5 \\
\hline
 & & 2 & 5 \\
 & 1 & 5 & 0 \\
 & 1 & 0 & 0 \\
+ & 6 & 0 & 0 \\
\hline
 & 8 & 7 & 5
\end{array}$$

¿En cuál de las respuestas anteriores, según tu juicio, se está usando un método que podría ser usado para multiplicar cualquier par de números naturales? Justifica la respuesta.

Figura 4.1 Tarea 1 (multiplicaciones incompletas)

La elección de esta tarea, cuyo contenido central es la multiplicación de números naturales, se realizó por ser una temática que se desarrolla en la escuela elemental y que los maestros pueden aprovechar para poner énfasis en aspectos del razonamiento algebraico susceptibles de ser potenciados.

3.1.1. Previsión de posibles soluciones a la tarea 1

A continuación describiremos posibles soluciones que podrían corresponder a la tarea 1, tanto para el ítem a) como para el ítem b). Se precisa mencionar que podrían considerarse más soluciones; las que aquí se incluyen se corresponden con distintos niveles de algebrización, en los casos en los que fue posible encontrar una variante de la misma. En la tabla 4.1 se desarrollan posibles soluciones para el inciso a) de la tarea 1:

Tabla 4.1. Soluciones previstas para el ítem a) de la tarea 1

Solución 1	*Para el caso* a_1. Aplicar las tablas de multiplicar y el algoritmo de la multiplicación en columna, probando dígitos para hallar los productos parciales posibles, considerando los datos proporcionados. *Para el caso* a_2. Se aplica el mismo procedimiento seguido en el primer caso
Solución 2	*Para el caso* a_1. Considerando que la multiplicación y división son operaciones inversas, un camino que nos llevaría a la solución sería: se puede proceder a dividir el producto final y el multiplicando, obteniendo el multiplicador, esto es, $57218 \div 427 = 134$. Como paso último se hace la multiplicación para hallar el resto de los números que faltan. *Para el caso* a_2. Se puede proceder a realizar la multiplicación $396 \times 6 = 2364$, con esto se obtiene el primer producto parcial y consecuentemente el resultado final. Se puede continuar realizando el mismo proceso ejecutado en a_1. Finalmente se hace la multiplicación para hallar el resto de los números que faltan.
Solución 3	El multiplicador m es desconocido, pero está relacionado con el multiplicando M (conocido, 427) y con el producto P (conocido, 57218) mediante la siguiente ecuación, $m = P/M$; por tanto, $m = 134$. (Se usa una propiedad estructural, relación entre multiplicación y división). Análogamente se realiza el mismo procedimiento para el caso a2, donde $m = 206$. Los dígitos faltantes en cada caso se hallan realizando la multiplicación.

Dado los elementos puestos en juego se considera que la resolución de esta tarea no implicaría alguna dificultad para los maestros en formación al ser la multiplicación un concepto básico desarrollado en la escuela primaria. Por otro lado, producciones como la que se plantea en la solución 3 se considera que sería poco manifestada por los maestros en formación.

A continuación se incluyen las posibles soluciones para el ítem b) de la tarea 1; a diferencia de las soluciones que se corresponden con el ítem a) para este ítem b se hallaron solamente dos soluciones. Dada las exigencias de este ítem se considera que las justificaciones de los maestros en formación serán de carácter explicativo sobre los procedimientos implicados en cada uno de los métodos realizados para "generar" cada una las multiplicaciones.

Tabla 4.2 Soluciones propuestas al inciso b) de la tarea 1

Solución 1	*Para el caso* b_1. En el método b_1 se procedió a realizar la multiplicación del siguiente modo $25(30+5) = 25 \times 5 + 25 \times 30 = 125 + 750$, al realizarlo en columna se considera el valor posicional y el número 750 se expresa 75. *Para el caso* b_2. Para el método realizado en b_2 tenemos $35(20+5) = 35 \times 5 + 35 \times 20 = 175 + 700$, el algoritmo usual de la multiplicación.

	Para el caso b_3. Para el método desarrollado en b_3 se observa $(20+5)(30+5)=5\times5+5\times30+20\times5+20\times30=25+150+100+600$. Por lo tanto, en los tres métodos desarrollados se consideran propiedades como la comnutativa y la distributiva; cualquiera de los tres métodos puede ser utilizado para multiplicar cualquier par de números naturales.
Solución 2	En el contexto de la tarea, sean a y b números naturales de dos dígitos, entonces los números se pueden expresar como: $a=a_1 10+a_0$ $b=b_1 10+b_0$ El producto $a\times b$ se puede plantear del siguiente modo: $a(b_1 10+b_0)$, $b(a_1 10+a_0)$ ó $(a_1 10+a_0)(b_1 10+b_0)$ donde se aplica la propiedad conmutativa y distributiva al realizar la multiplicación, (igualmente aplicable si el par de números tiene n dígitos, a saber $a=a_n 10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\ldots+a_2 10^2+a_1 10+a_0$ y $b=b_n 10^n+b_{n-1}10^{n-1}+\ldots+b_2 10^2+b_1 10+b_0$); por lo tanto los tres métodos son válidos para cualquier par de numeros naturales.

El maestro en formación debe ser capaz de reconocer los aspectos algebraicos, implícitos en las tareas, aunque no parezcan algebraicas a simple vista. Se considera que diferentes modos de pensamiento algebraicos pueden emerger con naturalidad de las matemáticas propias de la educación primaria y tienen el potencial de enriquecer la actividad matemática escolar y, muy especialmente, el aprendizaje de la aritmética (Molina, 2009)

3.1.2. Análisis epistemico correspondiente a la tarea 1 y sus soluciones previstas

A continuación desarrollaremos un análisis en términos tipos de objetos y significados conferidos a elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos de la tarea y de las soluciones posibles; esto permitirá poner de manifiesto aquellos objetos matemáticos con naturaleza algebraica.

En la tarea 1, en su apartado a) se pueden indentificar *elementos lingüísticos* tales como “completa las multiplicaciones” y “determina los números faltantes” que indican al resolutor la acción de realizar la operación de multiplicar y de hallar el dígito correcto para cada una de las casillas en blanco, elementos desconocidos en la tarea. Se presentan *conceptos* como la multiplicación de números naturales; el de valor posicional, que indica que un número está integrado por dígitos que adquieren un valor determinado de acuerdo a su posición (unidades, decenas, centenas, etc.). *Procedimientos* como el algoritmo de la multiplicación, que indica el seguimiento de un procedimiento específico a realizar, en este caso con la disposición de los datos en columna; y *propiedades* relacionadas con la estructura del sistema decimal.

Para el apartado a) de la tarea 1 se proponen tres soluciones plausibles. De la primera solución plausible emerge el *elemento lingüistico* "probando digitos" que indica el *procedimiento* seguido para encontrar los valores faltantes. También emergen *conceptos* como algoritmo de multiplicación en columna y el signo igual en su acepción de resultado de una operación. En la segunda solución plausible propuesta para el apartado a) se identifica la frase " la multiplicación y división como operaciones inversas" como un *elemento lingüistico* clave asociado al *concepto* de operación inversa. La operación inversa indica la relación que cada una de las partes del algoritmo de la multiplicación tiene con las partes del algortimo de la división, *propiedad* que se usa como *procedimiento* para encontrar la solución a la tarea. Por otro lado, de la tercera solución plausible emerge la designacion de las literales m, *M* y *P, elementos lingüisticos,* para denotar al multiplicador, multiplicando y producto respectivamente. Surge el *concepto* de incógnita al plantearse la expresión $m = P/M$ que relaciona el multiplicando y el producto (datos conocidos) con el dato desconocido y también indica el *procedimiento* de dividir. El planteamiento de la igualdad $m = P/M$ pueden ser un acercamiento al concepto de ecuación.

En el apartado b) de la tarea 1 se presenta a la multiplicación, en su representación en columna, muestra tres algoritmos diferentes de resolución, con el *elemento lingüistico* " cuál de los tres métodos es válido para multiplicar cualquier par de números" se le solicita al resolutor una práctica *argumentativa*. Se trabajan *propiedades* implicadas en el sistema de numeración posicional.

Para este apartado b) se proponen 3 soluciones plausibles. De la solución plausible 1 del apartado b propuesta se identifica un *elemento lingüistico* clave, la expresión $(20+5)(30+5) = 5\times5+5\times30+20\times5+20\times30 = 25+150+100+600$ que indica el *procedimiento* de descomposición de los numeros 25 y 35 en decenas y unidades. Se aplican los *conceptos* de multiplicación y suma primordialmente en el que el signo igual tiene una acepción de resultado, el valor posicional que indica el valor que ocupa el dígito respecto al número, adquiere relevacia para poner en funcionamiento *propiedades* como la conmutativa de la multiplicación y la distributiva respecto a la suma. El *argumento* "los tres métodos desarrollados se consideran propiedades como la comnutativa y la distributiva, por lo tanto cualquiera de los tres métodos puede ser utilizado para multiplicar cualquier par de números naturales", esta basado en la presencia de propiedades aritméticas cuya "demostración" es realizada utilizando la multiplicación con los números proporcionados en la tarea. En la solución posible 2, por otro lado, los *elementos lingüisticos* $a= a_1 10+a_0$; $b= b_1 10+b_0$ indican por un lado dos números naturales cualesquiera (una generalización que va de considerar un caso específico a considerar un caso general) y por otro expresa el *procedimiento* de descomponer un número en unidades y decenas. Sobresale el *concepto* de dígito como cada una de las cifras que conforman al número relacionado también con el valor posicional que juega un papel esencial así como también las *propiedades* conmutativa y distributiva al realizar el producto $(a_1 10+a_0)$ $(b_1 10+b_0)$. Se *argumenta* que los tres métodos son válidos para cualquier par de números naturales; tal afirmación se sustenta en la designación de dos números naturales cualesquiera $a= a_n 10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\ldots+a_2 10^2+a_1 10+a_0$ y $b= b_n 10^n+b_{n-1}10^{n-1}+\ldots+b_2 10^2+b_1 10+b_0$) y en la aplicabilidad de las propiedades correspondientes.

3.1.3. Nivel de algebrización asociado a la tarea 1 según las soluciones posibles

Se recuerda que el grado de algebrización será inferido a partir de las manifestaciones externas observables que es estudiante realice durante la actividad matemática de resolución.

En la tabla 4.3 se hacen explícitas las características esenciales de las soluciones posibles proporcionadas que permiten clasificarlas en determinados niveles de algebrización. Es preciso mencionar que las actividades puestas de manifiesto en la resolución evidencian conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos que se entretejen en configuraciones que priorizan aspectos procedimentales (uso de operaciones aritméticas), relacionales (tratamiento del signo igual como equivalencia), estructurales (tratamiento de propiedades) y funcionales (que implican un pensamiento funcional).

Tabla 4.3. Categorización de las soluciones previstas de la tarea 1 por niveles de algebrización

	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2
Ítem a	<u>Solución 1</u> Se realizan cálculos. Énfasis en realizar operaciones. Se obtiene un resultado. Se usa números particulares sobre los que aplica las tablas de multiplicar para determinar los dígitos faltantes. Se utiliza una explicación verbal. El signo igual en su acepción de resultado. ***Configuración algebraica mayoritariamente operacional***	<u>Solución 3</u> Se plantea una relación entre las operaciones de multiplicación y división en términos de cantidades conocidas y desconocidas. Se identifica a la multiplicación y división como operaciones inversas. Se utiliza letras para designar a los valores conocidos y desconocidos, pero no se opera con la expresión $m = P/M$ donde P y M son conocidos. El signo igual se utiliza para obtener un resultado. ***Configuración algebraica mayoritariamente estructural***	
		<u>Solución 2</u> Se identifica y usa relaciones inversas entre las operaciones, en este caso multiplicación y división. Utiliza una explicación numérico-aritmética. El signo igual tiene su acepción de resultado. ***Configuración algebraica mayoritariamente estructural***	
Ítem b	<u>Solución 1</u> Se jutifica en términos de casos particulares, explicando el funcionamiento y la estructura de cada método. Se identifican propiedades de las operaciones aritméticas como la conmutativa y distributiva. Se utiliza una explicación numérico-aritmético. El signo igual en su acepción de equivalencia. ***Configuración algebraica mayoritariamente estructural***		<u>Solución 2</u> Se jutifica de modo general, explicando el funcionamiento y la estructura de cada método, Se identifican propiedades de las operaciones aritméticas como la conmutativa y distributiva. Se utilizan letras para denotar a los números. Se generaliza definiendo un par de números cualesquiera. El signo igual en su acepción de equivalencia. ***Configuración algebraica mayoritariamente estructural***

3.2. TAREA 2: SUMA CON DÍGITOS DESCONOCIDOS

La tarea 2 (figura 4.2) tomada del libro Anaya (Ferrero et al, 2007, pág. 141) plantea en el apartado a) la determinación de dígitos desconocidos representados por letras en una suma. El apartado b) requiere una argumentación por parte del resolutor. El apartado c) está relacionado con el conocimiento especializado del contenido y el d) con aspectos de la enseñanza. Por un lado el apartado c) plantean al resolutor la identificación de conocimientos que desde su perspectiva sean algebraicos, mientras que, el apartado d) plantea una explicación del problema para un niño que no ha podido resolver la tarea.

Observa detenidamente la siguiente suma, y determina el dígito que representa cada letra. Considera que cada letra tiene un valor distinto.

$$\begin{array}{cccc} & A & B & C \\ & A & B & C \\ + & A & B & C \\ \hline 2 & A & C & C \end{array}$$

a) ¿Cuáles son los valores numéricos de A, B y C?
b) ¿Cómo sabes que son correctos?
c) Identifica conocimientos de tipo algebraico que se ponen en juego al resolver este problema.
d) ¿Cómo explicarías la resolución del problema a un niño que no ha podido resolverlo?

Figura 4.2. Tarea 2 propuesta en el cuestionario

La elección de esta tarea se realizó por ser una temática que se desarrolla en la escuela elemental y que los maestros pueden aprovechar para poner énfasis en aspectos del razonamiento algebraico que pueden ser potenciados ya que la tarea plantea la resolución de una suma con llevadas en la que se pone de manifiesto el funcionamiento y la estructura del algoritmo. Posibilita el uso de ecuaciones sujetas a las condiciones de cada columna y también una ecuación general que representa a la condición de la tarea en general.

3.2.1. Previsión de posibles soluciones a la tarea 2

En las siguientes líneas describiremos posibles soluciones que podrían corresponder a la tarea 2. Al igual que en la tarea 1 se podrían considerar más soluciones, las que aquí se expresan se corresponden con distintos niveles de algebrización, en los casos en los que fue posible encontrar una variante de la solución. En la tabla 4.4 se desarrollan las posibles soluciones para para cada uno de los incisos de la tarea 2; es necesario aclarar que dada las condiciones de la tarea existe una única solución correcta, siendo en las explicaciones (argumento solicitado en el apartado b) donde es posible encontrar variantes que expliquen cómo se obtuvo la solución.

Tabla 4.4. Soluciones previstas a la tarea 2 del cuestionario

<table>
<tr><th>Ítem a)
Respuesta</th><th>Ítem b)
Argumento</th></tr>
<tr><td rowspan="3">La respuesta es:
$C = 5$
$B = 8$
$A = 9$

Así, obtenemos:
$\begin{array}{r} 9\ 8\ 5 \\ 9\ 8\ 5 \\ +\ 9\ 8\ 5 \\ \hline 2\ 9\ 5\ 5 \end{array}$</td><td>Solución 1:
Recurriendo a las tablas de multiplicar se establece que el valor de C puede ser 0 o 5. Como cada letra debe tener un valor diferente, el valor de C debe ser 5 (si se considerará $C = 0$ implicaría que $B = 0$). El valor de B, se determina considerando que el triple de un número más una “unidad” da como resultado un número de dos cifras que termina en cinco. El único valor que cumple tal condición es el ocho ($8 \times 3 + 1$). Finalmente se halla el valor de A, siguiendo el mismo razonamiento, obteniendo que el único valor posible para A es el nueve ($9 \times 3 + 2$).</td></tr>
<tr><td>Solución 2:
Para hallar el valor de C, se considera la condición que se establece en la primera columna, la de las unidades: $3C = C$, o $3C = 10 + C$, de donde $C = 0$ o $C = 5$, pero de la lectura de la segunda columna (la de las decenas) se obtiene que C no puede valer cero, así que C=5.
Para hallar el valor de B, se consideran los casos posibles $3B + 1 = 20 + C$ o $3B + 1 = 30 + C$, donde $C = 5$. Se determina que $3B + 1 = 25$ cumple con las condiciones establecidas en la columna de las decenas, así se obtiene que $B = 8$.
Para hallar el valor de A se puede establecer: $3A + 2 = 20 + A$, de donde el único valor posible para A es el nueve.</td></tr>
<tr><td>Solución 3:
La suma se puede expresar del siguiente modo: $3\,(100A + 10B + C) = 2000 + 100A + 10C + C$ de donde se obtiene $200A + 30B - 8C = 2000$ considerando que $A \neq B \neq C$ cuyos valores pertenecen a [1,9]</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Ítem c)</td><td>Se pueden considerar como conocimientos de tipo algebraico los siguientes: El uso de un lenguaje alfanumérico y el uso de las letras como incógnita en ecuaciones de primer grado.</td></tr>
<tr><td>Ítem d)</td><td>Se puede proponer al niño la comprobación sistemática de casos posibles. Para el valor de C, daría sucesivamente valores, 0, (sería un caso posible), 1, 2, 3, 4, y 5 (otros casos posibles), 6, 7, 8, 9 (no serían posibles). Se pueden hacer tablas como las siguientes:</td></tr>
</table>

C	3C
0	
1	
2	

B	3B	3B+1
0		
1		
2		

A	3A	3A+2
0		
1		
2		

3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	

3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

En este caso, la tabla otorga una nueva orientación a la tarea, proporciona más control sobre las variables y el estudio de casos posibles.

Los maestros deben propiciar y conducir a los niños hacia un análisis de las tareas que fomente el desarrollo del razonamiento algebraico. Los maestros deben considerar que el "algebra" en la escuela primaria no es álgebra que se asocia con el contenido cubierto en una escuela secundaria tradicional.

3.2.2. Análisis epistémico correspondiente a la tarea 2 y sus soluciones previstas

En lo siguiente desarrollaremos un análisis en términos tipos de objetos y significados conferidos a elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos de la tarea y de las soluciones posibles, esto permitirá poner de manifiesto aquellos objetos matemáticos con naturaleza algebraica.

En la tarea 2, con el *elemento lingüístico* "observa detenidamente la siguiente suma, y determina el dígito que representa cada letra" se indica al resolutor realizar una acción para encontrar la solución a la tarea planteada. También como elementos lingüísticos se encuentran las letras "A, B y C" que que representan dígitos, la frase "cada letra tiene un valor distinto" que hace referencia a que se considere $A \neq B \neq C$. Se ponen en juego los *conceptos* de número natural y también el de dígito (cada una de las cifras que componen al número). El valor posicional y absoluto de un número juegan un papel central indicando así el doble valor del dígito en un número, es decir, el "valor" que adquiere un dígito respecto a la posición que ocupa en el número y como número en sí, hecho que otorgan la *propiedad* de unicidad a los valores A, B y C habiendo así una única respuesta correcta.

En la solución 1, apartados a y b, como *elementos lingüísticos* podemos encontrar la expresión "tablas de multiplicar" que indica el *procedimiento* usado para encontrar los valores de las letras, también encontramos la expresión "el valor de C puede ser 0 o 5 que indica una de las condiciones del problema en el que C adquiere el significado de número generalizado, además de que el cero y el cinco son los únicos números que tienen la *propiedad* de que su triple valor es igual (en las unidades) así mismo. Finalmente la frase "Si se considerara $C = 0$ implicaría que $B = 0$" que indica un *argumento* sobre el valor que debe adquirir la letra C, es decir, 5. La expresión "el valor de B, se determina considerando que el triple de un número más una unidad" indica la condición que debe cumplir el valor de B, sabiendo que tiene que terminar en 5, el resolutor tiene que resolver el *procedimiento* $\nabla \times 3 + 1 = \Delta 5$.

De la solución 2, apartados a y b, se destaca el *elemento lingüístico* $3C = 10 + C$; $3B + 1 = 25$; $3A + 2 = 20 + A$ que indican las condiciones de la tarea expresadas en ecuaciones, el signo igual tiene una acepción de equivalencia, también expresa el *procedimiento* de descomponer un número que indica que éste se puede expresar como la suma de sus unidades, decenas y centenas. Surgen conceptos como *ecuación* en donde se pone en juego la equivalencia al plantearse igualdades como $3C = 10 + C$; $3B + 1 = 25$; $3A + 2 = 20 + A$; de incógnita al establecer A, B y C como números desconocidos. Se plantean *procedimientos*, transformaciones elementales aplicando las mismas operaciones en ambos lados de la expresión, principalmente se aplica la *propiedad*: la suma de opuestos es cero. Como *argumentos* se pueden identificar las siguientes expresiones: "El valor de C puede ser 0 o 5, si se considera $C = 0$ implicaría que $B = 0$, así $C = 5$"; esta expresión indica que se considera la condición para las unidades, de donde se obtienen dos posibilidades, para elegir una se toma en cuenta la condición de las decenas. También la expresión, "Para hallar el valor de B, se consideran los casos posibles $3B + 1 = 20 + C$ o $3B + 1 = 30 + C$, como $C = 5$, entonces $3B + 1 = 25$, cumple con las condiciones establecidas en la tarea, $B = 8$", indica un argumento ya que se consideran los casos posibles dada la condición para la columna de las decenas, sabiendo cuánto debe dar el resultado en esa columna se llega a la conclusión de un único valor. Finalmente la frase "con la expresión $3A + 2 = 20 + A$ se obtiene que el único valor posible para A es nueve" indica también un argumento, el planteamiento considera las condiciones para la columna de las centenas para hallar el valor del dígito.

En la solución 3, del inciso a y b, entre los *elementos lingüísticos* destacamos $3(100A + 10B + C) = 2000 + 100A + 10C + C$ que pone de manifiesto el *concepto* de ecuación e indica la condición general de la tarea; el intervalo de números naturales $[1,9]$ que indica el conjunto de valores que pueden adquirir las letras A, B y C. Surge el concepto la igualdad de dos expresiones, que en este caso indica que los objetos $3\,(100A + 10B + C)$ y $2000 + 100A + 10C + C$ tienen el mismo valor, y el de equivalencia. Entre los *procedimientos* a destacar están las transformaciones elementales en las cuales se aplican *propiedades* tales como la suma de apuestos es cero, por ejemplo. El argumento queda recogido en la expresión $3\,(100A + 10B + C) = 2000 + 100A + 10C + C$, ecuación que satisface las condiciones expuestas en la tarea y en el cual reconoce el valor posicional de los dígitos y la estructura y funcionamiento del algoritmo de la suma.

En las respuestas posibles a los apartados c) y d), la cuestión ¿cuáles son los valores numéricos de A, B y C? indica la asignación de valores a cada una de las letras; la cuestión ¿cómo sabes que son correctos? indica proporcionar una justificación a la asignación de valores y finalmente la cuestión ¿cómo explicarías la resolución del problema a un niño que no ha podido resolverlo?, busca determinar qué otros tipos de solución (accesible a los niños de la escuela elemental) puede proporcionar el maestro en formación.

3.2.3. Nivel de algebrización asociado a la tarea 2 según sus soluciones posibles

El apartado b de la tarea 2 es el designado para indagar sobre el modo de resolución de la tarea, en este caso, cada solución propuesta se hace corresponder a un nivel de algebrización

Tabla 4.5. Categorización de las soluciones de la tarea 2 por niveles de algebrización

	Nivel 1	**Nivel 2**	**Nivel 3**
Ítem b	<u>Solución 1</u> Se obtienen los valores atendiendo al uso de las operaciones aritméticas. Se utiliza un lenguaje numérico-aritmético aunque intervienen símbolos que refieren a intensivos reconocidos.	<u>Solución 2</u> Se obtiene los valores planteando ecuaciones resultantes de las condiciones de cada columna de la suma planteada. Se utiliza un lenguaje simbólico-literal.	<u>Solución 3</u> Se plantea una ecuación que describe la condición general de la suma planteada en la tarea. Se utiliza un lenguaje simbólico-literal. Se opera con el valor desconocido

El signo igual en su acepción de resultado u operacional. Se trabaja sobre la estructura y funcionamiento del algoritmo de la suma. ***Configuración algebraica mayoritariamente operacional***	Se utiliza el signo igual en su acepción de equivalencia al plantear ecuaciones como 3B+1= 20+C. Pone de manifiesto la estructura y funcionamiento de la suma. ***Configuración algebraica mayoritariamente estructural***	Se utiliza el signo igual en su acepción de equivalencia Se pone de manifiesto la estructura y funcionamiento de la suma. ***Configuración algebraica mayoritariamente estructural***

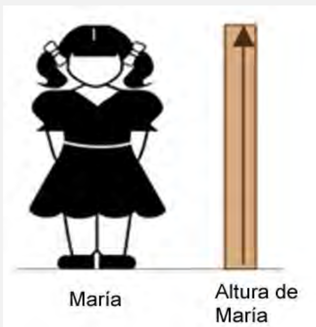
Dada la naturaleza de la tarea, como un conocimiento básico de la escuela elemental, se considera que los maestros en formación la pueden abordar de manera satisfactoria usando el algoritmo de la suma. Sin embargo, el abordar la tarea utilizando ecuaciones implicaría dificultades dada las implicaciones que conlleva: distinguir número de dígito y expresar un número como la sumatoria de sus dígitos de acuerdo al sistema posicional.

3.3. TAREA 3: COMPARACIÓN DE ALTURAS

La tercera tarea (figura 4.3) es una variación de la que se presenta en Carraher, Schliemann y Brizuela (2000); corresponde al tipo de los problemas aritméticos verbales compuestos de estructura multiplicativa (Castro, 1994); no se requiere hacer cálculos con números particulares dado que no se proporcionan datos numéricos en el enunciado. Las alturas de Tomás y María actúan como dos variables entre las cuales existe una relación cuantitativa "cuatro veces más alto que"; a su vez las alturas de María y Lucía también actúan como variables entre las cuales existe una relación cuantitativa "seis veces más baja que".

Tomás es 4 veces más alto que María. María es 6 veces más baja que Lucía.

a) Dibuja la altura de María, la altura de Tomás y la de Lucía. Establece las expresiones que relacionan dichas alturas.
b) Explica en el contexto del problema a qué se refieren los números 4 y 6.
c) Identifica conocimientos de tipo algebraico que se ponen en juego al resolver este problema.
d) ¿Cómo explicarías la resolución del problema a un niño



que no ha podido resolverlo?

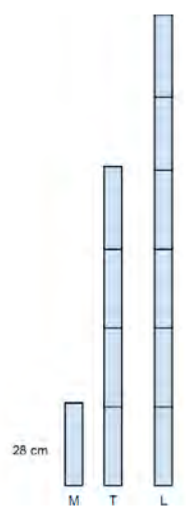
Figura 4.3. Tarea 3 propuesta en el cuestionario

Esta tarea se eligió porque al no haber datos numéricos es posible plantear un conjunto solución para las alturas que podrían tomar Tomás, María y Lucía. Es posible potenciar el concepto de variable y el planteamiento de dos relaciones funcionales ($f(t) = 4\,(m) y\ f(l) = 6(m)$ donde $t, l\ y\ m$ representan las alturas de Tomás, Lucía y María respectivamente) que podrían ser analizadas a través del uso de tablas. La idea de la variable ha recibido considerable atención en la comunidad de investigación en educación matemática así como su desarrollo en los grados elementales (por ejemplo, Küchemann 1978, MacGregor y Stacey 1997; Philipp 1992; Usiskin 1988; Carraher, Schliemann y Brizuela, 2001).

3.3.1. Previsión de posibles para la Tarea 3

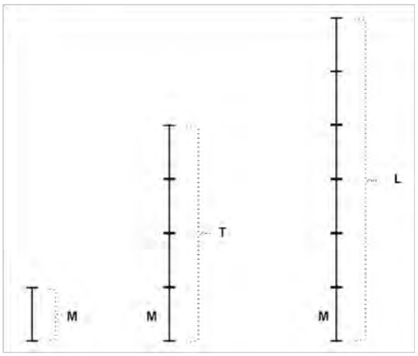
Para el ítem a) hemos previsto dos soluciones mientras que para el resto una. En la tabla 4.6 se describen las posibles soluciones a la tarea en cada uno de los ítems. Si bien es posible encontrar más soluciones, aquí se exponen las que a nuestro criterio tienen rasgos algebraicos.

Tabla 4.6. Soluciones propuestas a la tarea 3 para cada uno de sus ítems

Ítem a	**Solución 1** Sea M, la altura de María. Sea T, la altura de Tomás. Sea L, la altura de Lucía. Consideremos que María tiene como altura 28 cm, es decir, *M=28* Como las alturas de Tomás y Lucía se pueden establecer en relación a la altura de María, tenemos que la altura de Tomás es cuatro veces más que la de María entonces, $T = 4(28) = 112\ cm$ Por otro lado Lucía es seis veces más alta que María por lo que $L = 6(28) = 168\ cm$ Una representación de las alturas anteriores se aprecia en la adjunta.	

Solución 2:

Sea M, la altura de María.
Sea T, la altura de Tomás.
Sea L, la altura de Lucía.
Entonces tenemos que $T = 4M$ y $L = 6M$
Una representación de las alturas se aprecia en la figura adjunta.



Ítem b

Los números 4 y 6 expresan una comparación multiplicativa entre las alturas de María, Tomás y Lucía. O sea, considerando la altura de María como unidad entonces la altura de Tomás es cuatro veces la de María, y la de Lucía, 6 veces mayor, de manera que 4 y 6 son los valores numéricos de dichas medidas en relación con la medida de María.

Ítem c

Los conocimientos de tipo algebraico son: el uso de las letras como variable, se establecen dos funciones lineales; el segmento que representa la altura de los niños (variables) es una “notación” gráfica de la variable.

Ítem d

Es posible hacer más explícita la resolución de la tarea dando un valor particular a la altura de María.

3.3.2. Análisis epistémico correspondiente a la tarea 3 y sus soluciones previstas

En las siguientes líneas se desarrolla un análisis en términos de tipos de objetos y significados que permite la apreciación de aquellos objetos matemáticos con naturaleza algebraica que se ponen en juego en la tarea.

Destacamos como *elementos lingüísticos* las frases “Tomás es cuatro veces más alto que María” y “María es 6 veces más baja que Lucía” la cual indica una *proposición/propiedad* relacional que expresan la conexión entre dos variables (en este caso usadas como incógnitas al darles valores específicos). En el mismo sentido también se destacan las frases “dibuja la altura de María, la altura de Tomás y la de Lucía” y “establece las expresiones que relacionan dichas alturas” que indican el *procedimiento* de dibujar las relaciones entre las alturas de manera gráfica y el de articular una expresión, no gráfica, usando letras. Una acción *argumentativa* la indica la frase “explica en el contexto del problema a qué se refieren los números 4 y 6” y finalmente la frase ¿cómo explicarías la resolución del problema a un niño que no ha podido resolverlo? busca determinar qué otros tipos de solución (accesible a los niños de la escuela elemental) puede proporcionar el maestro en formación. Se ponen en juego *conceptos* como altura; de comparación, que radica en establecer una relación entre las alturas de María, Tomás y Lucía; el múltiplo que indica que lo "contiene" un número exacto de veces, es decir, en este caso las alturas de Tomás y Lucía son múltiplos de la altura de María.

En la solución 1 se identifican *elementos lingüísticos* como las literales "M, L, T" que son utilizadas como objeto (indicador o etiqueta) para identificar las alturas correspondientes a María, Lucía y Tomás; las expresiones $T = 4M;\ L = 6M$ *en las que* el signo igual expresa una relación de dependencia entre las literales T y L con respecto a M. El elemento lingüístico "consideremos que María tiene como altura 28 cm, es decir, *M=28* da lugar a las expresiones $T = 4(28) = 112\ cm;\ L = 6(28) = 168\ cm$ donde la letra M funge como letra evaluada (Küchemann, 1978), el signo igual tiene su acepción de resultado y se determinan valores particulares para las alturas. También se usa el *concepto* de unidad de medida, la altura de María es el referente para determinar el valor de la altura de Tomás y de Lucía.

Por otro lado, de la solución 2, se destacan los *elementos lingüísticos* "M, L, T" en donde cada letra es utilizada como objeto (indicador o etiqueta) para identificar las alturas correspondientes a María, Lucía y Tomás; las expresiones $T = 4M;\ L = 6M$ en las que el signo igual expresa una relación de dependencia entre las variables T y L con respecto a M; interviene así el *concepto* de variable pues las letras M, L y T pueden tomar un conjunto de valores posibles, y de función lineal que indica que existe una correspondencia entre las alturas. Se aprecia la forma $T = kM$ donde *k=4*, similarmente pasa con la altura de Lucía aquí el signo igual indica una relación funcional.

3.3.3. Nivel de algebrización asociado a la tarea 3 según sus soluciones posibles

En la tabla 4.7 se explicitan las características esenciales de las soluciones posibles que las categorizan en determinados niveles de algebrización. Considerando que la tarea se trata de una comparación multiplicativa, un conocimiento elemental, consideramos que los maestros en formación no presentarían dificultades al resolverla, pese a la omisión de valores numéricos. El proporcionar valores puede ser una actividad esperada en los niños, pero en los futuros maestros se espera que sus producciones presenten una configuración funcional.

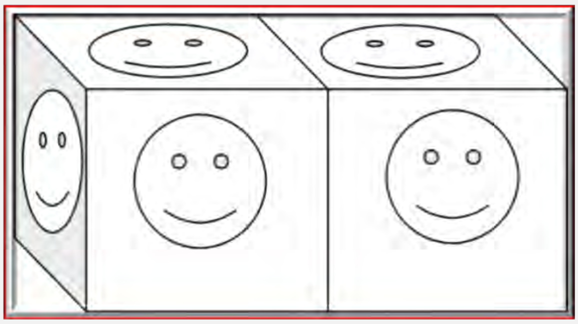
Tabla 4.7. Categorización de las soluciones de la tarea 3 por niveles de algebrización

	Nivel 0	**Nivel 2**
Ítem b	<u>Solución 1</u> Para la resolución de la tarea se planteó una altura determinada para María, para hallar las demás alturas de Tomás y Lucía. Se obtuvo una respuesta particular, para el caso en el que la altura de María es igual a 28 cm. Se utiliza un lenguaje predominantemente numérico-aritmético. El signo igual tiene la acepción operacional. ***Configuración algebraica mayoritariamente operacional***	<u>Solución 2</u> Se expresa la relación entre las alturas, en la que altura de María puede tomar un conjunto de valores y dependiente del valor proporcionado se obtendrán los valores de las altura de Tomás y Lucía. Las relaciones entre las alturas se expresan en un lenguaje simbólico-literal. El signo igual indica una relación funcional. ***Configuración algebraica mayoritariamente funcional***

3.4. TAREA 4: SECUENCIA DE CUBOS ADOSADOS

La tarea 4 (figura 4.4) fue tomada de Moss y Beatty (2006) y se sitúa dentro de una perspectiva funcional para el desarrollo del razonamiento algebraico, en contraste con el enfoque más tradicional que se centra en el álgebra como la manipulación simbólica. El maestro en formación tiene que identificar patrones, encontrar la regularidad subyacente y expresarlo como una función explícita o regla a través de un proceso de generalización.

Una compañía fabrica barras de colores uniendo cubos en una fila. La compañía usa una máquina para etiquetar y poner pegatinas de caritas sonrientes en las barras. La máquina coloca exactamente una pegatina en cada cara, es decir, cada cara expuesta de cada cubo tiene que tener una pegatina. Por ejemplo, una barra de longitud 2 (dos cubos) necesitaría diez pegatinas.



a) ¿Cuántas pegatinas se necesitan para una barra de: Tres cubos; cuatro cubos; diez cubos; veinte cubos? Con esta información determina ¿Cuál es la regla a seguir para hallar el número de pegatinas para una barra de longitud cualquiera?
b) Identifica conocimientos de tipo algebraico que se ponen en juego al resolver este problema.
c) ¿Cómo explicarías la resolución del problema a un niño que no ha podido resolverlo?

Figura 4.4. Tarea 4 propuesta en el cuestionario

Esta tarea se eligió porque en los últimos años, los patrones y el álgebra se han convertido en parte del currículo de primaria en muchos países. Los patrones ofrecen un poderoso vehículo para la comprensión de las relaciones de dependencia entre cantidades que subyacen a las funciones matemáticas, así como una manera concreta y transparente para los jóvenes estudiantes de empezar a tratar con las nociones de abstracción y generalización (Moss y Beatty, 2006). Respecto a este punto se precisa mencionar que en el caso del currículo mexicano, en la asignatura de matemáticas se incluye como uno de los tres ejes temáticos el sentido numérico y el pensamiento algebraico, en el que es posible encontrar tareas que involucran patrones (RIEB, 2009) por lo que el desarrollo de estas actividades se consideran parte de un conocimiento común.

El NCTM (2000) propone que los patrones se deben enseñar desde los primeros años de escolaridad, con la expectativa de que los estudiantes, ya en el segundo grado, deben ser capaces de analizar cómo se generan los patrones que se repiten; para el final de quinto grado deben ser capaces de representar patrones y funciones mediante palabras, tablas y gráficas.

3.4.1. Previsión de posibles soluciones a la tarea 4

La tarea 4 consta de 3 ítems, la primera implica resolver la tarea hallando la regla que describe el comportamiento del patrón; el segundo ítem indaga sobre el conocimiento especializado de los maestros en formación y el ítem c) tiene la finalidad de obtener información sobre el conocimiento del contenido y la enseñanza. En la tabla 4.8 describiremos las posibles soluciones a la tarea.

Tabla 4.8.Soluciones propuestas a la Tarea 4 para cada uno de sus incisos

Ítem a	**Solución 1** Para 3 cubos se necesitan 14 pegatinas; para 4 cubos necesitan 18 pegatinas; para 10 cubos necesitan 42 pegatinas; para 20 cubos necesitan 82 pegatinas. Así, la regla a seguir para determinar el número de pegatinas para una barra de cualquier longitud está dada por la expresión $f(n) = 4n + 2$.

Solución 2

Para 3 cubos se necesita 14 pegatinas.
Para 4 cubos se necesita 18 pegatinas.
Luego
Para 10 cubos se necesita 42 pegatinas.
Para 20 cubos, 82 pegatinas.
Entonces para obtener el número de pegatinas que necesita una barra de longitud determinada se multiplica el número de cubos por cuatro y se suman 2 pegatinas.

Cubos	Pegatinas
1	6
2	10
3	14
4	18
5	22
⋮	⋮
10	42
⋮	⋮
n	$4n+2$

Ítem b

Se pueden considerar como conocimientos de tipo algebraico los siguientes**:** El uso de las letras como variable y la función lineal, que describe la asignación del número de pegatinas dependiendo del número de cubos.

Ítem c

Utilizar un material tangible, para apreciar la regularidad y hacer el recuento para valores pequeños del número de cubos. Cada cubo, exceptuando el de los extremos, necesita cuatro pegatinas.

3.4.2. Análisis epistémico correspondiente a la tarea 4 y a sus soluciones previstas

En las siguientes líneas se desarrolla el análisis epistémico correspondiente a la tarea 4. Este análisis permitirá poner de manifiesto las características intrínsecas de la tarea, los diversos elementos de naturaleza algebraica puestos en juego.

Se destaca como elemento lingüístico la frase "se coloca exactamente una pegatina en cada cara expuesta de cada cubo" condición que indica que al momento de unir dos cubos las caras utilizadas para la "conexión" no llevan pegatinas". También resaltamos como elemento lingüístico la cuestión, ¿Cuál es la regla para hallar el número de pegatinas?, que indica un *proceso de generalización* para expresar que dado un número *C* de cubos puede hallarse el número de pegatinas. En este sentido se ve implicado el *concepto* de función lineal para describir la relación de dependencia entre el número de cubos y el número de pegatinas.

Los elementos lingüísticos, "Identifica los conocimientos de tipo algebraico", y "Cómo explicarías la resolución a un niño que no ha podido resolverlo", refieren a elementos relacionados con la enseñanza. La primera pretende determinar si el maestro en formación identifica objetos algebraicos inmersos en la tarea. Se pueden indicar los conceptos, las propiedades, los procedimientos y las argumentaciones de carácter algebraico que interactúan en la resolución de la tarea. Por otro lado la segunda busca determinar qué otros tipos de solución (accesible a los niños de la escuela elemental) puede proporcionar el maestro en formación.

De la tarea 4 se propusieron 2 soluciones plausibles para el ítem a), una solución plausible, tanto para el ítem b) como c). En la primera solución plausible del ítem a), señalamos como *elemento lingüístico* la expresión $f(n)=4n+2$, función con la que dado cualquier número de cubos es posible hallar el número de pegatinas. Se pone en funcionamiento el concepto de variable designada por la letra n y que representa a un conjunto de valores, en este caso el número de pegatinas. Intervienen los conceptos de variable dependiente e independiente. El signo igual se utiliza para expresar una relación funcional entre las variables. Por otro lado, en la segunda solución plausible del ítem a), se destaca el elemento lingüístico "tabla de relación entre cubos y pegatinas que indica un *proceso de representación tabular* que recoge el número de cubos y su correspondiente número de pegatinas.

También ponemos énfasis en el elemento lingüístico "para obtener el número de pegatinas que necesita una barra de longitud determinada se multiplica el número de cubos por cuatro y se suman 2 pegatinas" que indica un *proceso de generalización verbal* implicando establecer una regla de correspondencia que se corresponde con el *concepto* de función lineal.

3.4.3. Nivel de algebrización asociados a la tarea 4 según sus soluciones posibles

En la tabla 4.9 se indican las características esenciales de las soluciones posibles a la tarea 4, lo que permite su categorización en determinados niveles de algebrización. Considerando los elementos puestos en juego en la tarea y la familiarización de estos estudiantes respecto al contenido, se espera que resuelvan de manera adecuada la tarea, al menos al expresar la regla en un lenguaje natural.

Tabla 4.9. Categorización de las soluciones de las tarea 4 por niveles de algebrización

	Nivel 1	**Nivel 2**
Ítem a	<u>Solución 1</u> Se parte de observar el comportamiento de unos casos particulares para luego expresar en términos generales una regla que describa tal comportamiento. Se utiliza un lenguaje numérico-aritmético para luego expresar la regla en un lenguaje natural ***Configuración mayoritariamente algebraica funcional***	<u>Solución 2</u> Se parte de observar el comportamiento de unos casos particulares (los suficientes) para luego expresar en términos generales una regla que describa tal comportamiento. El signo igual para designar una relación funcional. Se utiliza un lenguaje numérico-aritmético para luego expresar la regla en un lenguaje simbólico literal. ***Configuración algebraica mayoritariamente funcional***

En la tabla se aprecia cómo dos actividades que entretejen una misma configuración pueden tener connotaciones diferentes, en este caso, un cambio en el lenguaje.

3.5. TAREA 5: COMPARACIÓN MULTIPLICATIVA

La quinta tarea planteada en el cuestionario (figura 4.5) fue recogida de Usiskin, (1997), en semejanza con la tarea 3, se sitúa en los problemas aritméticos verbales simples de estructura multiplicativa (Castro, 1994) sin la presencia de datos numéricos. Pone de manifiesto el uso de las letras como variables en un determinado contexto. Se tiene que identificar la relación existente entre el número de estudiantes y el número de profesores como una relación de dependencia.

a) Escribe una ecuación usando las variables S y P para representar lo siguiente: En una Universidad hay seis veces más estudiantes que profesores. Usa S para el número de estudiantes y P para el número de profesores.
b) Identifica conocimientos de tipo algebraico que se ponen en juego al resolver este problema.
c) ¿Cómo explicarías la resolución del problema a un niño que no ha podido resolverlo?

Figura 4.5. Tarea 5 propuesta en el cuestionario

La tarea se eligió por la importancia del concepto de variable en álgebra, que su comprensión supone un reto difícil para los estudiantes (Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg, y Stephens, 2011) y es uno de obstáculos conceptuales para su progreso. Este obstáculo se origina en la falta de comprensión de este concepto del cual muy poco se habla en muchas aulas donde se presenta el álgebra, pero que subyace en todo lo que los estudiantes aprenden (Graham y Thomas, 2000).

3.5.1. Previsión de posibles soluciones a la tarea 5

En las siguientes líneas describiremos posibles soluciones para cada uno de los ítems implicados en la tarea. Se recuerda que podrían considerarse más soluciones pero las que aquí se expresan corresponden a distintos niveles de algebrización.

Tabla 4.10.Soluciones previstas para la Tarea 5 en cada uno de sus apartados

<table>
<tr><td>Ítem a)</td><td>Solución 1:

Sea S= número de estudiantes
Sea P= número de profesores
Si en la universidad hay 43 profesores y sabiendo que el número de alumnos supera al de profesores por “seis veces más” entonces se obtiene $S = 6P = 6(43) = 258$

Solución 2:

Sea S= número de estudiantes
Sea P= número de profesores
La ecuación es: $S = 6P$; o bien establecerlo de la siguiente manera: $P = \frac{1}{6}S$</td></tr>
<tr><td>Ítem b)</td><td>Se pueden considerar como conocimientos de tipo algebraico los siguientes: Lenguaje simbólico literal, uso del signo igual como equivalencia, el uso de las letras como variables.</td></tr>
<tr><td>Ítem c)</td><td>A partir del error cometido por el niño se puede promover la reflexión sobre la validez de su planteamiento remitiéndose al contexto real: ¿es posible que en una universidad existan más profesores que estudiantes?

También es posible analizar la relación a través de una tabla como la siguiente:

<table>
<tr><td>Profesores</td><td>Estudiantes</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>6</td><td>6(1)</td></tr>
<tr><td>2</td><td>12</td><td>6(2)</td></tr>
<tr><td>3</td><td>18</td><td>6(3)</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>P</td><td></td><td>6P</td></tr>
</table>
..</td></tr>
</table>

3.5.2. Análisis epistémico correspondiente a la tarea 5 y sus soluciones previstas

En la tarea 5 se destacan 3 elementos lingüísticos. El primer elemento lingüístico “escribe una ecuación usando las variables S y P” indica una acción a ejecutar y el uso de *conceptos* como variable y ecuación. El segundo elemento lingüístico “hay seis veces más estudiantes que profesores" indica condición que debe cumplir la ecuación planteada; indica una relación cuantitativa entre las variables S y P. Por último, con el elemento lingüístico, "usa S para el número de estudiantes y P para el número de profesores" se indica el uso de las literales como objeto (Küchemann, 1978).

De la tarea 5, se proponen dos soluciones para el ítem a) y una solución tanto para el ítem b) como c).

En la primera solución propuesta para el ítem a) con el elemento lingüístico "S= número de estudiantes; sea P= número de profesores" se designa a cada literal con un criterio que las diferencia. El elemento lingüístico "si en la universidad hay 43 profesores" se designa un número específico de profesores, es decir un caso particular. La frase "el número de alumnos supera al de profesores por seis veces más" se establece la superioridad en número de los estudiantes respecto al de los profesores. La expresión $S = 6P = 6(43) = 258$ indica un procedimiento que determina el número de estudiantes dado el número de profesores (43). En este procedimiento interviene el concepto de incógnita al otorgar a la letra P un valor específico, el signo igual tiene su acepción de resultado, se opera para hallar el número de estudiantes, establecido previamente el número de profesores.

En la segunda solución propuesta para el ítem b) se destacan 2 elementos lingüísticos principales. El primer elemento lingüístico S=6P y $P = \frac{1}{6}S$ ponen de manifiesto el concepto de ecuación y expresión equivalente al realizar transformaciones elementales a ambos lados de la ecuación "original", a partir de cualquiera de ellas se obtienen los mismos resultados. El de variables al establecer para S y P un conjunto de valores, también la dependencia e independencia de las mismas. Signo igual: se utiliza como indicador de una relación funcional entre variables. Función lineal: describe la relación de dependencia entre el número de profesores y el número de estudiantes.

3.5.3. Nivel de algebrización asociado a la tarea 5 según sus soluciones posibles

En la tabla 4.11 se indican las características esenciales de las soluciones propuestas para la tarea 5 que permiten su categorización en determinados niveles de algebrización. Se considera que esta tarea es accesible para los futuros maestros, dada su formación se espera, al igual que en la tarea 3, que sus producciones reflejen un nivel 2 de algebrización

Tabla 4.11. Categorización de las soluciones de la tarea 5 por niveles de algebrización

	Nivel 0	Nivel 2
Ítem a)	<u>Solución 1</u> Lenguaje numérico-aritmético. El signo igual en su acepción operacional. Se particulariza a un caso concreto en el que el número de profesores es 43. ***Configuración algebraica mayoritariamente operacional***	<u>Solución 2</u> Se plantea una ecuación. Lenguaje simbólico-literal. El signo igual indica una relación funcional. ***Configuración algebraica mayoritariamente funcional***

3.6. TAREA 6: IGUALDADES VERDADERAS

La tarea 6 fue tomada de Usinski (1997); involucra el concepto de variable y el uso de las letras en igualdades que ponen de manifiesto las propiedades de las operaciones. Philipp (1992) indica que muchas de las dificultades que presentan los estudiantes con las variables están relacionadas con la incapacidad de reconocer el rol correcto del símbolo literal.

a) ¿Qué valores deben tener las letras para que las siguientes igualdades sean verdaderas?

$a_1)$ $36 \cdot b = b$ $a_2)$ $a \cdot a = a$

$a_3)$ $c + c = c$ $a_4)$ $b \cdot 0 = 0$

$a_5)$ $12 \cdot a = a \cdot 12$ $a_6)$ $c + c = c + 6$

$a_7)$ $2 \cdot b = b + 5$

b) ¿Cómo sabes que esos valores son correctos?

c) Identifica conocimientos de tipo algebraico que se ponen en juego al resolver este problema.

d) ¿Cómo explicarías la resolución del problema a un niño que no ha podido resolverlo?

Figura 4.6. Tarea 6 propuesta en el cuestionario

3.6.1. Previsión de posibles soluciones a la tarea 6

En la tabla 4.12 describiremos posibles soluciones a la tarea 6 en cada uno de sus ítems. Se precisa aclarar que en el ítem a) dado la admisión de respuestas únicas, es en las explicaciones (argumento solicitado en el apartado b) donde es posible analizar los modos de abordar la tarea.

Tabla 4.12. Soluciones posibles para la tarea 6

Ítem a)

Los valores para cada uno de los incisos son:

$a_1)\ b = 0$	$a_2)\ a = 1\,, a = 0$
$a_3)\ c = 0$	$a_4)\ b\ \in \mathbb{R}$
$a_5)\ a \in \mathbb{R}$	$a_6)\ c = 6$
$a_7)\ b = 5$	

Ítem b)

En la asignación de valores se considera en algunos casos (a_1, a_2, a_4) que todo número multiplicado por cero es igual a cero, que el cero es neutro aditivo, que el uno es neutro multiplicativo, etc.; en otros casos (como el a_3, a_5, a_6 y a_7) se obtiene a través de la aplicación de transformaciones elementales. Así los valores son correctos y satisfacen la igualdad.

Ítem c)

Se pueden considerar como conocimientos de tipo algebraico los siguientes**:** El uso de las letras como variable, incógnita y el uso del signo igual como equivalencia.

Ítem d)

Se puede proceder a asignar valores específicos a las literales y analizar su estructura utilizando tablas

36	b	$36 \times b$	Propiedad
36	0	$36 \times 0 = 0$	
36	1	$36 \times 1 = 36$	
36	2	$36 \times 2 = 72$	

a	a	$a \times a$	Propiedad
0	0	$0 \times 0 = 0$	
1	1	$1 \times 1 = 1$	
2	2	$2 \times 2 = 4$	

c	c	$c + c = c$	V / F
0	0	0+0=0	
1	1	1+1=1	
2	2	2+2=2	

b	$b \cdot 0 = 0$	Propiedad
0	$0 \cdot 0 = 0$	
1	$1 \cdot 0 = 0$	
2	$2 \cdot 0 = 0$	

a	$12 \cdot a = a \cdot 12$	Propiedad
0	$12 \cdot 0 = 0 \cdot 12$	
1	$12 \cdot 1 = 1 \cdot 12$	
2	$12 \cdot 2 = 2 \cdot 12$	

c	$c + c = c + 6$	V/F
0	$0 + 0 = 0 + 6$	
1	$1 + 1 = 1 + 6$	
2	$2 + 2 = 2 + 6$	
3	$3 + 3 = 3 + 6$	
4	$4 + 4 = 4 + 6$	
5	$5 + 5 = 5 + 6$	
6	$6 + 6 = 6 + 6$	
7	$7 + 7 = 7 + 6$	
	$c + c = c + c$	

b	$2 \cdot b = b + 5$	V/F
0	$2 \cdot 0 = 0 + 5$	
1	$2 \cdot 1 = 1 + 5$	
2	$2 \cdot 2 = 2 + 5$	
3	$2 \cdot 3 = 3 + 5$	
4	$2 \cdot 4 = 4 + 5$	
5	$2 \cdot 5 = 5 + 5$	
6	$2 \cdot 6 = 6 + 5$	
	$2 \cdot b = b + b$	

…

3.6.2. Análisis epistémico correspondiente a la tarea 6 y sus soluciones previstas

En las siguientes líneas desarrollaremos un análisis en términos de tipos de objetos y significados que permite poner de manifiesto los rasgos algebraicos de las tareas.

En la tarea 6 se destacan 3 elementos lingüísticos. El primer elemento lingüístico "qué valores deben tener las letras, indica el *procedimiento* de determinar el valor numérico de cada letra en cada sentencia para que exista una igualdad. Los elementos lingüísticos "a, b y c" indican incógnitas o variables, principales conceptos puestos en juego con la tarea. Las literales pueden tomar un valor específico o un conjunto de valores. La frase "cómo sabes que son correctos" solicita un *proceso de argumentación* por parte de los estudiantes sobre la validez de sus respuestas

Para la tarea 6 se propuso una solución plausible tanto para el ítem a) y b) así como para los ítems c) y d)

Para la solución propuesta al el ítem a) y su justificación enmarcada en el ítem b) se identifican elementos lingüísticos, "toda cantidad multiplicada por cero es cero" que indica una propiedad. Los elementos lingüísticos "neutro aditivo" y neutro multiplicativo" indican también propiedades como toda cantidad a la cual se le suma cero se conserva y toda cantidad multiplicada por uno da como resultado la misma cantidad, respectivamente. La frase "aplicación de transformaciones elementales" indican los procedimientos utilizados para encontrar algunas de las soluciones, implícitamente se pone en juego la noción de ecuación equivalente que indica que dos expresiones con "forma diferente" (pero con la misma estructura subyacente) que llevan a los mismo resultados.

3.6.3. Nivel de algebrización asociado a la tarea 6 según sus soluciones posibles

La tarea 6 pone énfasis en el uso de las letras y la identificación de propiedades. Los símbolos se utilizan de manera analítica. Es una configuración algebraica mayoritariamente estructural de nivel 3.

Como se aprecia en el análisis epistémico, la resolución de esta tarea implica el reconocimiento de propiedades, su resolución adecuada implica un nivel 3 de algebrización por lo que esperamos que los maestros en formación presenten inconsistencias en sus formas de resolución.

3.7. TAREA 7: MODELIZACIÓN ALGEBRAICA EN CONTEXTO GEOMÉTRICO

La tarea 7 fue tomada de Cerdán (2007) se eligió para indagar conocimientos avanzados de los maestros en formación sobre modelización algebraica.

Una editorial necesita cortar hojas rectangulares, cuyo ancho es la mitad de su largo, para imprimir en cada página una superficie de 300 cm^2. Si los márgenes son de 2 cm. arriba y abajo y 2.5 cm. en cada lado, determina ¿cuáles son las dimensiones de la hoja?

Figura 4.7. Tarea 7 planteada en el cuestionario

3.7.1. Previsión de posibles soluciones a la tarea 7

Tabla 4.13. Soluciones posibles a la Tarea 7

Solución

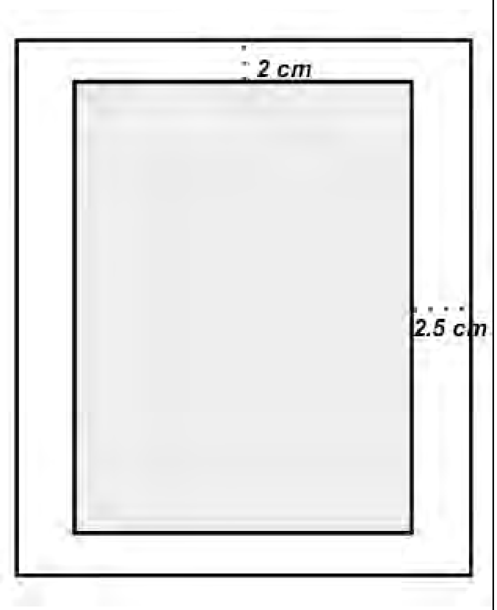
Sea $L\ y\ \frac{L}{2}$ las dimensiones de la hoja correspondientes al largo y ancho respectivamente ⇒ el área de la superficie de impresión está dada por la expresión:

$$(L-4)\left(\frac{L}{2}-5\right)=300\ cm^2$$

$$\Rightarrow\ \frac{L^2}{2}-5L-2L+20=300\ cm^2$$

$$\Rightarrow\ \frac{L^2}{2}-7L-280cm^2=0$$

$$\Rightarrow\ L^2-14L-560cm^2=0$$



$$L=\frac{14\pm\sqrt{(14)^2+2240}}{2}$$

$$L=\frac{14\pm\sqrt{2436}}{2}$$

$$L=\frac{14\pm2\sqrt{609}}{2}$$

$L=7\pm\sqrt{609}$ así $L_{1=}31.678\ y\ L_2=-17.678$

Así las dimensiones de la hoja son: $L=31.678\ \ cm\ \ \ y\ \ \ \frac{L}{2}=15.839\ cm$

3.7.2. Análisis epistémico correspondiente a la tarea 7 y su solución

En la tarea 7 se identifican como elemento lingüístico “el ancho es la mitad de su largo” que indica la condición de la tarea que establece la relación principal entre las dimensiones largo y ancho de la hoja. También se destaca los elementos lingüísticos "los márgenes de arriba y abajo son de 2 cm" y "los márgenes en cada lado son de 2.5 cm" que indican las áreas que se quedan sin imprimir, indicando también el área de escritura. Se ponen en el juego los conceptos de ecuación, y las magnitudes longitud y , área, con sus respectivas unidades de medida y medidas.

De la solución plausible de la tarea 7 se destacan los elementos lingüísticos L y L/2 que representan las dimensiones largo y ancho de la hoja. Las letras fungen como incógnitas. Se ponen en juego conceptos como ecuación cuadrática para modelizar las condiciones de la tarea, ecuaciones equivalentes al aplicar procedimientos de transformación a través de operaciones elementales, número decimal y redondeo. El procedimiento de traducción del problema de palabras a una representación gráfica que traslada las condiciones verbales del problema a una representación visual que permita relacionarlos. También se aplican procedimientos como reducción de términos semejantes (sumar o restar los coeficientes numéricos en una expresión algebraica, que tengan el mismo factor literal)

3.7.3. Nivel de algebrización asociado a la resolución de la tarea 7

En la solución propuesta en esta tarea se utilizan símbolos literales y se opera con ellos de manera analítica, sin referir a la información del contexto. Es una configuración mayoritariamente estructural de nivel 3.

La tarea 7 pretende dar cuenta del conocimiento avanzado de los maestros en formación; se considera que una resolución como la planteada en el análisis epistémico, que implica un nivel 3 de algebrización, no será manifestada por los futuros maestros.

3.8. TAREA 8: VAGONES DE TRENES

La tarea 8 fue tomada de Radford (2001) para evaluar aspectos del conocimiento avanzado de los maestros en formación.

Analiza la siguiente situación y responde:

588 pasajeros deberán viajar de una ciudad a otra. Dos trenes están disponibles. Un tren se compone sólo de vagones de 12 asientos, y el otro sólo de vagones de 16 asientos. Suponiendo que el tren con vagones de 16 asientos tendrá ocho vagones más que el otro tren,

a) ¿Cuántos vagones se adjuntaría a las locomotoras de cada tren para que los 588 pasajeros puedan viajar?

b) Identifica conocimientos de tipo algebraico que se ponen en juego al resolver este problema.
c) ¿Cómo explicarías la resolución del problema a un niño que no ha podido resolverlo?

Figura 4.8. Tarea 8 planteada en el cuestionario

3.8.1. Previsión de posibles soluciones a la tarea 8

En la tabla 4.14 se describen soluciones posibles de la tarea 8. Se precisa recordar que podrían considerarse más soluciones pero las que aquí se refieren corresponden a niveles de algebrización en los casos en que fue posible encontrar variantes de las soluciones al problema.

Tabla 4.14. Soluciones posibles a la tarea 8

Ítem a)	**Solución 1:** Como el tren con vagones de 16 asientos tendrá ocho vagones más que el otro tren, se puede determinar que tendrá 128 pasajeros (16x8) más que el otro tren (de 12 asientos). Entonces del total de pasajeros (588) podemos restar los 128 pasajeros, que corresponden a los ocho vagones extra del tren de 16 asientos, obteniendo 460 pasajeros. Así hemos igualado el número de vagones de 16 asientos al número de vagones de 12 asientos. Como el número de vagones por cada tren es igual, entonces si dividimos los 460 pasajeros entre el número de asientos 28 (que resulta de sumar 16 y 12 asientos por cada tren) obtendremos el número de vagones con 12 asientos, es decir 17 vagones (redondeando 16.4). Así el número de vagones de 16 asientos es 25.
	Solución 2: $Sea\ x = número\ de\ vagones\ con\ 12\ asientos$ $Sea\ y = número\ de\ vagones\ con\ 16\ asientos$ Entonces $12x + 16y = 588 \ldots (1)$ $y = x + 8 \ldots (2)$ Sustituyendo (2) en (1) tenemos: $12x + 16(x + 8) = 588$ $12x + 16x = 588 - 128$ $28x = 460$ $x = 16.429 \ \Rightarrow y = 24.429$ En términos del problema $x = 17$ vagones con 12 asientos $\Rightarrow y = 25$ vagones con 16 asientos

Ítem b)

Se pueden considerar como conocimientos de tipo algebraico los siguientes: El lenguaje simbólico-literal, el uso de las letras como incógnita y el uso del signo igual como equivalencia.

Item c)

Se propone una tabla en el que se pueden ir probando los valores posibles de los vagones, incluso se puede proporcionar un una hoja Excel donde te calcule el resultado. Por ejemplo:

Vagones		Asientos				Vagones		Asientos		
	×	12	=		$\Longrightarrow$	17	×	12	=	204
	×	16	=			24	×	16	=	384
										588

3.8.2. Análisis epistémico correspondiente a la tarea 8 y sus soluciones previstas

En la tarea 8, se identifican como *elementos lingüísticos* relevantes, "Un tren se compone sólo de vagones de 12 asientos, el otro sólo se compone de vagones de 16 asientos" y "El tren con vagones de 16 asientos tendrá ocho vagones más que el otro tren" que indican la primera condición que establece la diferencia de asientos entre los vagones de cada tren y la segunda condición que establece la diferencia de vagones entre los trenes, respectivamente. Se plantea un *proceso argumentativo* con la pregunta ¿Cuántos vagones se adjuntarán a las locomotoras de cada tren para que los 588 pasajeros puedan viajar? Que también plantea el *concepto* de incógnita, dado que se desconoce el número de vagones que se debiera adjuntar.

Para la tarea 8, se propusieron dos soluciones para el ítem a) y una solución para los ítems b) y c). En la primera solución plausible para el ítem a) el *elemento lingüístico* "el tren con vagones de 16 asientos tiene ocho vagones más que el otro tren de 12 asientos, y por tanto 128 pasajeros más", expresa el *procedimiento*$16 \times 8 = 128$. Por otro lado, la expresión "se iguala el número de vagones de 16 asientos al número de vagones de 12 asientos" expresa también un *procedimiento*: $558 - 128 = 460$. Estos razonamientos indican la solución al problema. Intervienen los *conceptos* de división y multiplicación.

En la segunda solución propuesta para el ítem a) se identifica la asignación de un valor específico a las literales (x, y), emerge así el concepto de incógnita. El concepto de ecuación surge con el planteamiento de $12x + 16y = 588$ que indica la relación entre la cantidad de asientos de los vagones con el número total de pasajeros. También intervienen conceptos como sistema de ecuaciones y número decimal. Surgen procedimientos que implican transformaciones elementales aplicadas a las ecuaciones y la reducción de términos. El signo igual interviene en su acepción de equivalencia.

3.8.3. Nivel de algebrización asociado a la tarea 8 según sus soluciones posibles

En la siguiente tabla se categoriza las soluciones de acuerdo a las características algebraicas manifestadas en las soluciones. De manera similar que la tarea 7, la tarea 8, demanda de los estudiantes movilizar un conocimiento avanzado cuya solución algebraica requiere un nivel 3 de algebrización. Los objetos movilizados nos sugieren que las soluciones de los estudiantes manifestarían un nivel 1 de algebrización.

Tabla 4.15. Categorización de las soluciones de las tarea 4 por niveles de algebrización

	Nivel 1	**Nivel 3**
Ítem a	Solución 1 Se aplican relaciones y propiedades en un lenguaje natural y numérico. El signo igual se utiliza para designar un resultado. ***Configuración mayoritariamente algebraica estructural***	Solución 3 Se opera de manera simbólica con las cantidades indeterminadas. El signo igual para designar una relación. Se utiliza un lenguaje simbólico literal. ***Configuración algebraica mayoritariamente estructural***

En la Tabla 4.16 se muestra la distribución de los conocimientos implicados sobre el razonamiento algebraico de una manera sucinta y del tipo de conocimiento evaluado en cada una de las tareas.

Tabla 4.16. Conocimientos implicados en el cuestionario

Tarea	Ítem	Tipo de conocimiento	Conocimientos sobre el RAE implicados
1	a)[1] 2 b)	C. Común	Propiedades. Involucra la estructura y funcionamiento del algoritmo de la multiplicación con cifras desconocidas y los diferentes métodos para multiplicar.
2	a) b)	C. Común	Propiedades y lenguaje alfanumérico. Involucra la estructura y funcionamiento del algoritmo de la suma operando con literales, también se trabaja sobre la idea de relación al ofrecer a través de su resolución el planteamiento de ecuaciones.
	c)	C. Especializado	
	d)	C. Del contenido y la enseñanza	

[1] En la tarea uno, el ítem a) contiene 2 subítems a resolver, pero son sentencias similares.

3	a),b)	C. Común	Pensamiento funcional y comparación de magnitudes. Plantea comparación multiplicativa que deja de lado los cálculos con datos particulares y se centra en las relaciones, posibilita el uso de notación algebraica.
	c)	C. Especializado	
	d)	C. Del contenido y la enseñanza	
4	a)[2] 5	C. Común	Pensamiento funcional. Involucra la idea sobre función, en la que se pretende generar un patrón que describe una situación.
	b)	C. Especializado	
	c)	C. Del contenido y la enseñanza	
5	a)	C. Común	Pensamiento funcional. Plantea una comparación multiplicativa sin implicar datos numéricos, requiere el uso de notación algebraica
	b)	C. Especializado	
	c)	C. Del contenido y la enseñanza	
6	a)[3] 7	C. Común	Pensamiento relacional y lenguaje simbólico-literal. Involucra el uso de propiedades tales como el neutro aditivo, neutro multiplicativo, la propiedad del cero.
	b)	C. Especializado	
	c)	C. Del contenido y la enseñanza	
7	a)	C. Avanzado	Lenguaje alfanumérico. Problemas de palabras que potencian el uso de ecuaciones.
8	a)	C. Avanzado	
	b)	C. Especializado	
	c)	C. Del contenido y la enseñanza	

4. APLICACIÓN DEL CUESTIONARIO SOBRE RAE A MAESTROS EN FORMACIÓN

El cuestionario fue aplicado en la ciudad de Mérida, Yucatán en México, bajo el contexto del Subsistema de Educación Normal. Las Escuelas Normales son organismos encargados de la formación de profesores (SEP, s.f).

Para situar el contexto educativo en México es importante señalar que según la Ley General de Educación (LGE), en su artículo 37 menciona que el Sistema Educativo Mexicano se integra por los siguientes tipos de educación: el básico, el medio superior y el superior, los cuales se dividen a su vez en niveles: el básico, en pre-escolar, primaria y secundaria; el medio superior, comprende el bachillerato en sus diferentes modalidades; el superior, en licenciatura y especialidad; y el posgrado, en maestría y doctorado.

[2] En la tarea cuatro, el ítem a) contiene 5 subítems a resolver, pero son sentencias similares.
[3] En la tarea seis, el ítem a) contiene 6 subítems a resolver, pero son sentencias similares.

El subsistema de Educación Normal es uno de los 6 subsistemas[4] que se encargan de la formación Superior en México. En este sentido las Escuelas Normales preparan a los educandos para que ejerzan la actividad docente en los distintos tipos y niveles del Sistema Educativo Nacional. La carrera tiene una duración de cuatro años y actualmente se forman licenciados en educación preescolar, educación primaria, educación secundaria, educación especial y educación física.

El cuestionario diseñado se implementó en la Escuela Normal de Educación Primaria "Rodolfo Menéndez de la Peña" que tiene como misión:

> Formar docentes de educación primaria que asuman el compromiso de ejercer la profesión de manera crítica, creativa, reflexiva y con responsabilidad social. Dispuestos a enfrentar los retos que les plantea el entorno social y natural mediante los conocimientos, habilidades y las actitudes que les permitan contribuir, a través de una educación de calidad, al desarrollo comunitario del lugar en el que se desenvuelvan. Generar conocimientos que contribuyan a la búsqueda de propuestas innovadoras y a la resolución de los problemas educativos del ambiente local, nacional e internacional. Contribuir a la generación, promoción y a la difusión de la cultura (ENEPY, s.f).

Esta institución es el único centro educativo público de donde egresan profesionales cuyo campo laboral son las escuelas primarias en el estado de Yucatán.

4.1. METODOLOGÍA

El cuestionario se aplicó durante el curso académico 2010-2011 en la Escuela Normal para Maestros de la ciudad de Mérida en México. Se determinó realizar este estudio en México dada la incorporación, en el currículo de la educación básica, de un enfoque sobre resolución de problemas con tres ejes temáticos, de los cuales, uno se titula sentido numérico y pensamiento algebraico (RIEB, 2009). Además, es importante señalar que el plan de estudios de la Escuela Normal para Maestros contempla una asignatura obligatoria, relativa al álgebra, titulada *Álgebra: su enseñanza y aprendizaje*

[4] Las instituciones que imparten la Educación Superior en México se organizan obedeciendo a su coordinación, dependencia o régimen en seis grandes subsistemas: universidades públicas; educación tecnológica; universidades tecnológicas; instituciones particulares; educación normal.

que se cursa en el segundo semestre de la licenciatura. Esta asignatura aborda tres temas específicos: acercamiento a los conceptos de función y ecuación, análisis de los comportamientos de funciones lineales, cuadráticas y racionales, y procedimientos para operar con expresiones algebraicas y resolver ecuaciones.

4.1.1. Los sujetos

El cuestionario se aplicó a un grupo de 40 estudiantes en el contexto de un curso de formación en didáctica general. Los futuros maestros cursaban el último año de estudios y realizaban su prácticum en escuelas de educación primaria. El grupo está formado por 33 de mujeres y 7 de hombres, y cuya edad promedio era alrededor de los 21 años. La muestra para el estudio se escogió en un muestreo no probabilístico (León y Montero, 2003). La elección fue de tipo incidental, por lo tanto no aleatoria, ya que los estudiantes participaron en tanto que estaban inscritos en el curso de didáctica general referido.

4.1.2 El procedimiento

La aplicación se realizó como si fuera un examen de fin de curso, es decir, fue un trabajo completamente individual por parte de los estudiantes. Se indicó a los sujetos que se les sería proporcionado un cuestionario con ocho tareas matemáticas y que se disponía de 2 horas para su resolución. Se solicitó que siguieran las instrucciones planteadas en el cuestionario.

4.1.3. Definición de variables y valores para el análisis de las respuestas al cuestionario

Dada la forma en la que se construyó el cuestionario hemos considerado dos aspectos en la descripción de la resolución de los problemas realizados por los estudiantes, a saber: a) el método de resolución y b) si el desarrollo realizado para dar solución a la tarea era correcto o no. Hemos definido así las variables grado de corrección y el método de solución; además, también se analizó atendiendo a los ítems de las tareas el tipo de conocimientos reconocidos y el tipo de estrategia de enseñanza que proponen. La asignación de valores a cada una de las variables, se realizó de acuerdo a los elementos considerados en nuestro modelo de niveles de algebrización. Esto queda explícito en la tabla 4.17:

Tabla 4.17. Variables y valores a estudiar para el análisis de resultados

Ítems	Variables	Valor
1a, 1b, 2a, 2b, 3a, 3b, 4a, 5a, **6a**, 6b, 7, 8a	Grado de corrección (G. C.) 18 ítems en total[5]	En blanco= No responde 0= Incorrecto 1= Parcialmente correcto 2= Correcto
1a, 2a, 3a, 4a, 6a, 7, 8a	Método de solución (M. S.) 8 ítems	En blanco=No responde 1=Pictórico 2=Gráfico 3=Ensayo y error 4=Tendencia aritmética 5=Relacional 6=Tendencia algebraica
2c, 3c, 4b, 5b, 6c, 8b	Tipos de conocimientos reconocidos (T.C.) 6 ítems	En blanco= No responde 1= Tendencia aritmética 2= Tendencia algebraica
2d, 3d, 4c, 5c, 6d, 8c	Tipos de estrategias de enseñanza planteadas (T.E.) 6 ítems	En blanco=No responde 1=Verbal 2= Uso de casos particulares 3= Uso de representaciones 4= Uso de material tangible

Para realizar el análisis de la información que se ha obtenido a través del cuestionario se codificaron numéricamente los datos a partir de las variables y los valores definidos (anexo 2) y se introdujeron para su análisis en el software Statgraphics. Primeramente se describe el análisis cuantitativo, que toma en cuenta las respuestas como correctas, parcialmente correcta, incorrectas o en blanco. A partir de esta primera codificación se analiza la dificultad comparada de los ítems y el rendimiento total de los estudiantes en esta prueba escrita, y se realiza un análisis de frecuencias por cada tarea:

1. Frecuencia de respuestas correctas, incorrectas, parcialmente correctas y respuestas en blanco en la resolución del problema
2. Frecuencia de empleo de los diferentes métodos de resolución definidos de acuerdo al modelo de niveles de algebrización
3. Frecuencia de los diferentes tipos de conocimiento identificados

[5] La tarea 6 consta de 7 aspectos a evaluar.

4. Frecuencia de las diferentes estrategias de enseñanza sugeridas

4.1.4. Algunas especificaciones sobre la validez y la fiabilidad del cuestionario

Esta etapa de la investigación, como se mencionó al comienzo de este capítulo, se enmarca en un estudio exploratorio y descriptivo que no pretende validar el cuestionario diseñado para la recogida de datos como si se tratara de un instrumento psicométrico de aplicación general. Sin embargo, resulta pertinente determinar si las tareas incluidas en el cuestionario son un material válido y fiable. Para determinar la consistencia interna del cuestionario se calculó el coeficiente α de Cronbach, considerando la varianza de la puntuación total de la prueba y las varianzas de cada uno de los ítems incluidos en la misma. Se ha obtenido un valor de $\alpha = .8495$ lo que se puede considerar un valor aceptable y concluir que el cuestionario es fiable. En relación con la validez parece pertinente controlar la validez del contenido de las 8 tareas incluidas en el cuestionario, la cual se deriva y justifica de la revisión de la literatura realizada, ya que las tareas 3,4,5,6,7 y 8 responden a contenidos planteados en diversas investigaciones para el desarrollo del razonamiento algebraico. Además, las 8 tareas fueron sometidas a un análisis a través del cual es posible apreciar el contenido que se pretende medir. Por otro lado la validez de constructo parece poco pertinente a razón de que el cuestionario no es homogéneo, dado que no evalúa un solo constructo.

5. CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO SOBRE EL RAE MANIFESTADO POR MAESTROS EN FORMACIÓN

De modo general, como se aprecia en la figura 4.9, el cuestionario resultó ser difícil para los estudiantes; la puntuación máxima que es posible obtener, puntuando las respuestas correctas con el valor numérico 2, es de 36 puntos. Vemos que la media fue de 15 y la máxima puntuación registrada de 27, de un total de 36 puntos, lo que significa que el número de ítems que pueden ser abordados y resueltos por los estudiantes es relativamente bajo.

Recuento	40
Promedio	15,1
Desviación Estándar	6,91
Coeficiente de Variación	45,75%
Mínimo	0,0
Máximo	27,0
Rango	27,0
Sesgo Estandarizado	-0,53
Curtosis Estandarizada	-1,05

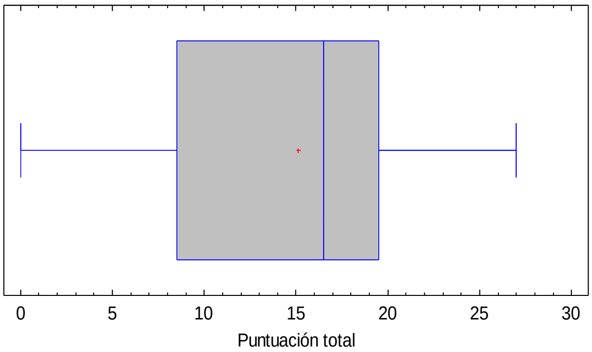


Figura 4.9. Puntuación total del cuestionario

El índice de dificultad (I. D.) de cada una de las tareas (ver figura 4.10), nos indica que la tareas 6, 7 y 8 (tareas relacionadas con el uso de las letras, variables y ecuaciones) resultaron claramente difíciles de resolver por los estudiantes. Este hecho revela que la formación de estos estudiantes en los contenidos incluidos en los ítems del cuestionario es insuficiente, teniendo en cuenta que la aplicación se realizó en el cuarto año de su carrera.

Ítems	**I. D.**
G.C. Tarea 1, ítem a	0,86
G.C. Tarea 1, ítem b	0,90
G.C. Tarea 2, ítem a	0,78
G.C. Tarea 2, ítem b	0,65
G.C. Tarea 3, ítem a	0,60
G.C. Tarea 3, ítem b	0,48
G.C. Tarea 4, ítem a	0,73
G.C. Tarea 5, ítem a	0,40
G.C. Tarea 6, ítem a_1	0,68
G.C. Tarea 6, ítem a_2	0,03
G.C. Tarea 6, ítem a_3	0,65
G.C. Tarea 6, ítem a_4	0,25
G.C. Tarea 6, ítem a_5	0,20
G.C. Tarea 6, ítem a_6	0,65
G.C. Tarea 6, ítem a_7	0,65
G.C. Tarea 6, item b	0,63
G.C. Tarea 7	0,05
G.C. Tarea 8, ítem a	0,18

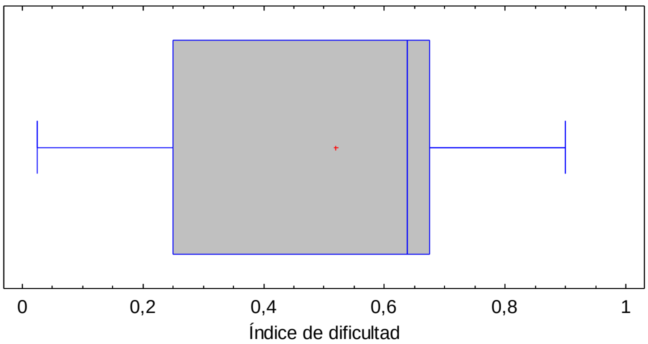


Figura 4.10. Índice de dificultad de los ítems

La tarea 6, en la segunda, cuarta y quinta sentencia (los ítems a_2: $a \cdot a = a$; a_4: $b \cdot 0 = 0$; a_5: $12 \cdot a = a \cdot 12$) resultaron ser particularmente difíciles de resolver por los estudiantes. Llama la atención que la tarea 7 y la tarea 8, designadas para indagar sobre los conocimientos avanzados de los estudiantes resultaron también difíciles de resolver.

A continuación describimos los resultados que se obtuvieron en cada una de las tareas, lo que nos permite una apreciación específica del modo en que los maestros en formación respondieron al cuestionario. Se presentan los resultados analizando los ítems correspondientes al conocimiento común del contenido, especializado, avanzado y sobre el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza, tal como se muestra en la tabla 4.18:

Tabla 4.18. Distribución del contenido del cuestionario por tipo de conocimiento

<table>
<tr><th rowspan="2">FACETA</th><th rowspan="2" colspan="2">CONOCIMIENTO</th><th colspan="8">Tarea</th></tr>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th>8</th></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="8">Ítems</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Epistémica</td><td>Común</td><td rowspan="2">Resolver la tarea</td><td>a</td><td>a</td><td>a</td><td>a</td><td>a</td><td>a</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Avanzado</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>x</td><td>a</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Especializado</td><td>Justificar y/o explicar</td><td>b</td><td>b</td><td>b</td><td></td><td></td><td>b</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Identificar conocimientos de tipo algebraico</td><td></td><td>c</td><td>c</td><td>b</td><td>b</td><td>c</td><td></td><td>b</td></tr>
<tr><td>Instruccional</td><td>Del contenido en relación con la enseñanza</td><td>Proponer diferentes formas de explicación</td><td></td><td>d</td><td>d</td><td>c</td><td>c</td><td>d</td><td></td><td>c</td></tr>
</table>

Sin embargo, dado el relativamente bajo desempeño de los estudiantes, se decidió no ser exhaustivos en las descripciones y análisis de cada una de las tareas; lo que se pretende es resaltar aspectos relevantes sobre las manifestaciones de carácter algebraico, si existieran, de los futuros maestros.

5.1. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS A LOS ÍTEMS SOBRE CONOCIMIENTO COMÚN DEL CONTENIDO

El análisis de las respuestas a los ítems 1a, 2a, 3a, 4a, 5a, 6a nos permitió caracterizar *el conocimiento común* de los maestros en formación sobre razonamiento algebraico elemental. A través del análisis de los elementos lingüísticos, los conceptos, los procedimientos, propiedades y argumentaciones puestos en juego en el método de solución de cada uno de estos ítems por los futuros maestros, se identificó el uso de objetos algebraicos. El análisis de la actividad matemática de resolución de cada ítem permitió identificar diferentes métodos de solución. Los métodos utilizados por los estudiantes indican el conjunto de conocimientos que asocian a la tarea lo que nos permite discriminar su carácter algebraico.

5.1.1. Tarea 1: Multiplicaciones incompletas

La tarea 1 pretende dar evidencia del modo en que los estudiantes abordan conocimientos comúnmente desarrollados en la escuela primaria como lo es el algoritmo de la multiplicación. El futuro maestros debe ser consciente de que conocer cómo multiplicar y ser capaz de producir de manera eficiente la respuesta, no es suficiente para explicar y justificar el algoritmo a los estudiantes (Ball, 2003). La tabla 4.19 muestra el grado de corrección y el método de solución de la tarea 1, ítem a.

Tabla 4.19. Método de solución y grado de corrección de la tarea 1, ítem a)

Grado de Corrección	Ítem a		Método de solución	Ítem a	
	Frecuencia	%		Frecuencia	%
Correcta	28	70	T. Algebraica	1	2,5
Parcialmente correcta	7	17,5	Relacional	3	7,5
Incorrecta	5	12,5	T. Aritmética	21	52,5
Total	40	100	Ensayo y error	15	37,5
			Total	40	100

En la tabla 4.19, se señala que 28 de los 40 futuros maestros resolvió correctamente el ítem a) de la tarea; 7 de las respuestas fueron parcialmente correctas al no plantear explícitamente el razonamiento completo seguido en la resolución; finalmente, 5 de los maestros en formación erró al resolverla. Las respuestas evidenciaron que los estudiantes parecen no tener claro el valor posicional. El análisis de la actividad matemática de resolución de este ítem permitió identificar diferentes métodos de solución, que indican el conjunto de conocimientos que los estudiantes ponen en juego en la tarea. En este sentido, 15 estudiantes usaron un método por ensayo y error probando valores, sin una justificación aparente u observable de la elección de los mismos, hasta encontrar aquellos dígitos que satisfacían los datos de la multiplicación. Por otro lado, 21 de los 40 estudiantes utilizó el algoritmo de la multiplicación hallando los productos parciales posibles; se destaca que 3 de los estudiantes manifestó la observación de una propiedad, utilizaron la multiplicación y la división como operaciones inversas para hallar los dígitos faltantes. Finalmente uno de los estudiantes para profesor manifestó en su procedimiento una tendencia algebraica (figura 4.11).

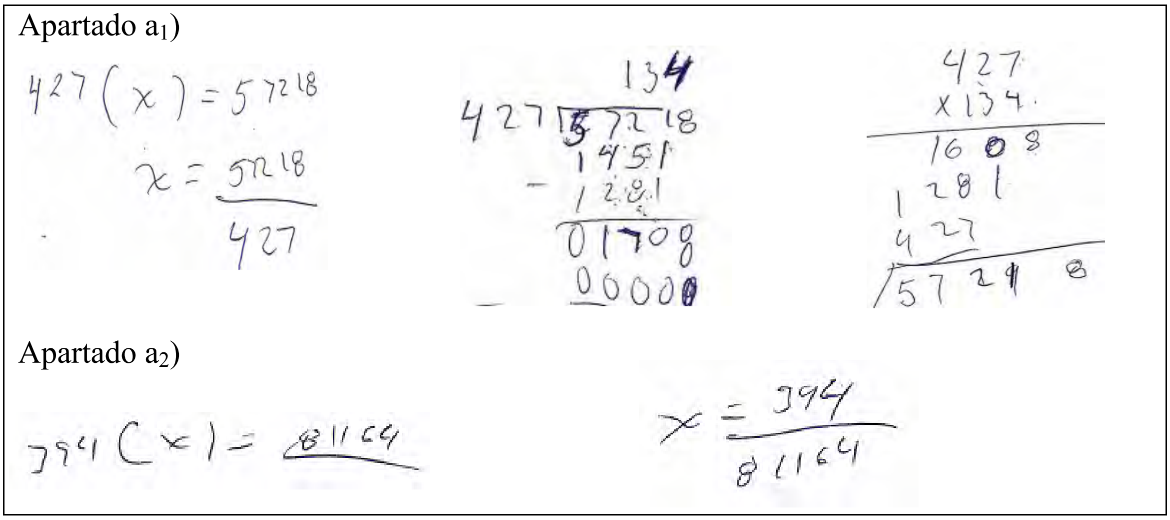


Figura 4.11. Resolución del estudiante E03.

En la resolución se advierte que el futuro maestro identifica los valores faltantes del multiplicador de un modo global y lo designa como un número desconocido que hay que hallar. En ambos apartados de la tarea se utiliza el concepto de incógnita al designar con una x el valor del multiplicador; articula las condiciones de la tarea, surge también el concepto de ecuación utilizando el signo igual en su acepción de equivalencia; y plantea la solución de la misma en términos de una operación inversa entre la multiplicación y división, evidenciando la estructura de las relaciones inversas entre las operaciones. El futuro maestro llevó con éxito el apartado a_1), aplicó como procedimientos la división y multiplicación a través de los cuales manifiesta propiedades de los números reales tales como las transformaciones elementales en ambos lados de la ecuación. Finalmente, con la multiplicación halla los productos parciales que proporcionan los dígitos faltantes y también sirve de argumento para comprobar su respuesta como correcta. Sin embargo, el apartado a_2) no fue concluido; al parecer el estudiante no tiene claro cómo se opera las transformaciones elementales en ambos lados de la ecuación, aunque lo ejecutó de modo correcto en el primer apartado, en el segundo parece desconocerlo. La actividad exhibida por el maestro en formación manifiesta rasgos algebraicos al reconocer en la tarea las condiciones necesarias para el planteamiento de una ecuación. Esta forma de abordar la solución contemplada en el análisis a priori fue considerada de nivel 1.

Como se aprecia en los resultados, se registraron producciones que se corresponden con las previstas en el análisis a priori, exceptuando aquella en las que los maestros en formación parecen asignar valores sin una regla aparente que guíe tal asignación (método ensayo y error) el cual no fue considerado. Asimismo, como fue previsto, la tarea no implicó alguna dificultad para los maestros en formación, dado que la resuelven. Sin embargo, sus procedimientos implican una desconexión entre las formas de resolución y dominio de las propiedades intrínsecas de la multiplicación.

5.1.2. Tarea 2: Suma con dígitos desconocidos

El grado de corrección de la tarea 2, junto con el método de solución se recoge en la tabla 4.20. La tabla indica que 30 maestros en formación resolvieron la tarea de forma satisfactoria; un estudiante para maestro no concluyó la tarea proporcionando dos valores de los tres que dígitos que se solicitan hallar; 4 soluciones dadas proporcionan dígitos incorrectos o bien no llegan a una conclusión. Destaca el hecho de que 6 estudiantes no responden a la tarea planteada.

Tabla 4.20. Grado de corrección y método de solución de la tarea 2, ítem a)

Grado de Corrección	Ítem a)		**Método de solución**	Ítem a)	
	Frecuencia	%		Frecuencia	%
Correcta	30	75	Algebraico	2	5
Parcialmente correcta	1	2,5	Aritmético	14	35
Incorrecta	4	10	Ensayo y Error	18	45
No responde	6	15	No responde	6	15
Total	40	100	Total	40	74,6

La tabla también indica que 2 de los estudiantes pone de manifiesto el carácter algebraico de la tarea; 14 aplicaron el algoritmo de la suma y las tablas de multiplicar para hallar los valores y 18 de los 40 maestros en formación procedió por ensayo y error, dando valores a las literales sin una justificación aparente u observable en la elección de los mismos.

En la figura 4.12 se muestra la resolución del maestro en formación E02, en la cual se identifica el uso de propiedades de los números naturales, que se ponen de manifiesto al aplicar operaciones elementales tales como: sumar o restar la misma expresión a ambos lados de la ecuación. Como procedimiento el futuro maestro plantea una relación entre las incógnitas, que deja a la letra B como parámetro. El establecimiento de esta relación se justifica en términos de lo que observa en la suma $B + B + B = C$, $(C = 3B)$ y atiende al conteo de las letras A, B y C. El segmento horizontal, lo considera como signo igual, en su acepción de resultado. Interpreta la expresión algebraica 2ACC como una concatenación de caracteres, y aparentemente considera que concatenar es equivalente a unir caracteres y unir caracteres es equivalente a sumar (plantea $2ACC = 2A + C + C$).

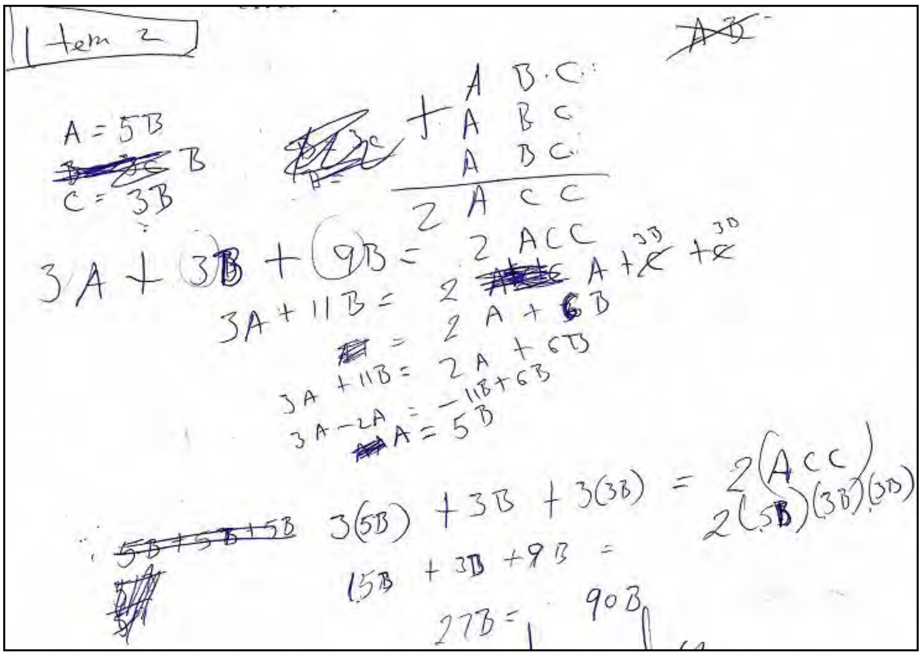


Figura 4.12. Resolución completa de la tarea 2 por el estudiante E02

Posteriormente, interpreta la “concatenación” *2ACC* como un producto. Sin embargo, llama la atención que el estudiante multiplica solo los números, mas no así las letras. Igualmente el estudiante no hace uso de la interpretación de la concatenación de letras en términos del sistema posicional, que parece desconocer. Finalmente, al apreciar que los resultados obtenidos, no conducen a un valor numérico, el estudiante renuncia.

La actividad manifestada por el futuro maestro pone de manifiesto objetos algebraicos; sin embargo, aunque sigue un procedimiento basado en las relaciones entre A, B y C que observa en la suma, no los percibe como dígitos de un número, pasa por alto la estructura matemática que soporta al sistema posicional, lo que le lleva a que la ecuación que plantea no cumpla con las condiciones de la tarea. Hace un intento de conectar la tarea con conocimientos más avanzados, sin embargo el hecho de no concluir la misma mediante estos conocimientos indica una falta de conexión entre la estructura de los conocimientos elementales y su relación con los conocimientos más avanzados. Los maestros deben conocer a profundidad las matemáticas que enseñan (Ball, 2003).

De manera general, como fue previsto en el análisis a priori, la tarea fue resuelta por la mayoría de los estudiantes de manera satisfactoria pero utilizando el algoritmo de la suma o recurriendo a la asignación de valores (sin evidenciar alguna estrategia para tal asignación). Se advierte que cuando se intenta plantear una ecuación que describe de modo general la situación planteada se presentan dificultades que recaen en una falta de dominio del sistema posicional (no se reconoce que $ABC = 100A + 10B + C$). La orientación adecuada de esta actividad llevaría a un nivel 3 de algebrización.

5.1.3. Tarea 3: Comparación de alturas

En la tabla 4.21 se aprecia que 2 estudiantes resolvieron la tarea de manera satisfactoria, proporcionando un dibujo y la expresión que relaciona las alturas, esto es, 2 estudiantes articularon un expresión usando notación algebraica; 22 de las soluciones fueron parcialmente correctas, dado que no se articuló una expresión que representa a las alturas y los dibujos presentados contenían partes de medida desiguales. Se destaca que 10 de los estudiantes resolvieron de manera incorrecta al establecer expresiones como: "*M=4T* (estudiante E41)" que tradujo incorrectamente las condiciones de la tarea.

Tabla 4.21. Grado de corrección y método de solución de la tarea 3, ítem a)

Grado de Corrección	Ítem a) Frecuencia	%	**Método de solución**	Ítem a) Frecuencia	%
Correcta	2	5	Gráfico	26	65
Parcialmente correcta	22	55	Pictórico	5	12,5
Incorrecta	10	25	Aritmético	3	7,5
No responde	6	15		6	15
Total	40	100	Total	40	100

Cabe destacar que entre las formas que los futuros maestros llevaron a cabo la solución de las tareas, 26 soluciones se caracterizaron por usar un método gráfico al señalar la relación entre las alturas usando barras o rectas; 5 de los estudiantes establecieron la relación entre las alturas usando dibujos (de personas); y 3 proporcionan valores específicos consistentes con los datos relativos a las diferencias de alturas. Pintar dibujos y proporcionar valores específicos son reacciones comprensibles en niños de la escuela elemental, dado que los problemas de palabras con los que están familiarizados pueden resolverse mediante la adición o sustracción, prestando una atención mínima a las palabras y al el contexto y las relaciones entre los diferentes números en el problema (Carraher, Schliemann y Brizuela, 2000). Sin embargo, el profesor, además de esto, debe ser capaz de encontrar otras formas que conduzcan a los niños a pensar algebraicamente.

En la Figura 4.13 se muestra la resolución del estudiante E30.

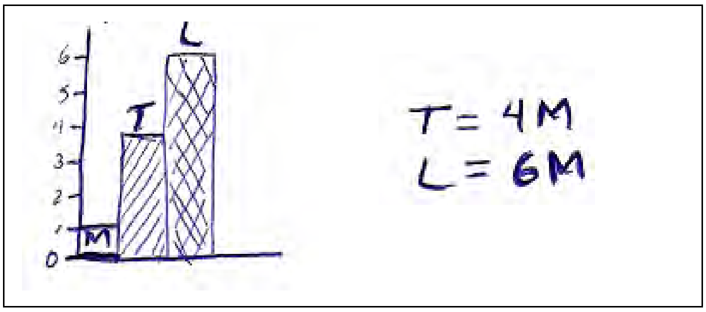


Figura 4.13. Resolución de la tarea 2 por el estudiante E30

El estudiante hace uso de una representación gráfica para establecer las diferencias entre las alturas, considera a la altura de María como un valor determinado pero genérico y la utiliza como unidad de medida. Intervienen tres datos, las alturas de María, Tomás y Lucía. Tomás y María actúan como dos variables entre las cuales existe una relación cuantitativa respecto a la de María. La práctica llevada a cabo en esta tarea implica el reconocimiento de las letras como objeto (Kücheman, 1978) para identificar a las alturas de María, Tomás y Lucía con las letras correspondientes, M, T y L. Las alturas son asociadas a una barra vertical, la enumeración del 1 al 6 indica la "conservación" de partes de medidas iguales. Luego del grafico el estudiante articula las expresiones $T = 4M$; $L = 6M$, donde el signo igual expresa una relación de dependencia entre las variables T y L con respecto a M y letras pueden representar a un conjunto de valores. Esta forma de solución, la cual fue revista en el análisis a priori, comprende un nivel de algebrización 2. En general, la resolución de la tarea 3, en contraste con lo que fue previsto en el análisis a priori, representó una actividad difícil de abordar por los estudiantes, dado el número reducido de estudiantes que la resolvieron de manera adecuada.

5.1.4. Tarea 4: Secuencia de cubos adosados

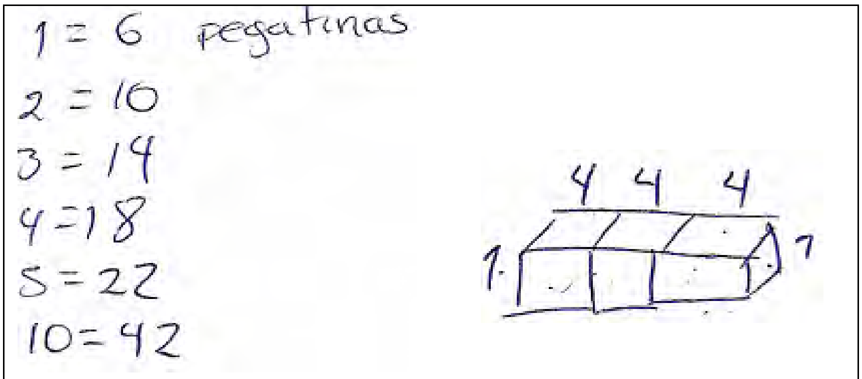
Respecto a esta tarea, en la tabla 4.22 se muestra que para el grado de corrección 18 estudiantes resolvieron la tarea de manera correcta, es decir, el estudiante logra establecer la regla que describe la relación entre el número de cubos y las pegatinas de forma general expresado en cualquier lenguaje. Por otro lado, 11 de las respuestas son parcialmente correctas al proporcionar las respuestas de los casos particulares, pero no logra expresar la regla general que relaciona el número de caras con el número de pegatinas. Resultaron incorrectas 10 de las respuestas al expresar planteamientos como: "*para un cubo se necesitan cinco pegatinas, para dos cubos, diez pegatinas,… y así sucesivamente*" (Estudiante E25) o bien utilizar razonamientos incorrectos que no se corresponden con la descripción de la situación.

Tabla 4.22. Grado de corrección y método de solución de la tarea 4, ítem a)

Grado de Corrección	Ítem a)		**Método de solución**	Ítem a)	
	Frecuencia	%		Frecuencia	%
Correcta	18	45	Pictórico	37	92,5
Parcialmente correcta	11	27,5	Aritmético	2	5
Incorrecta	10	25			
No responde	1	2,5	No responde	1	2,5
Total	40	100	Total	40	100

En la Tabla 4.22 también se recoge el método de solución empleado por el maestro en formación para dar su respuesta. La tabla refleja que 37 estudiantes se centraron en un desarrollo pictórico al pintar dibujos de cubos que sirvieron de apoyo para posteriormente identificar y generar una correspondencia entre cubos y pegatinas; una minoría se centró en desarrollos aritméticos (2 estudiantes) caracterizados por poner en juego la regla de tres para encontrar la relación entre los cubos y las pegatinas, método que proporcionó respuestas incorrectas. Sobre los métodos de solución, los profesores deben ser capaces de utilizar imágenes, palabras, tablas y símbolos en formas progresivamente más sofisticadas para que los niños de primaria puedan dar sentido a los datos e interpretar relaciones funcionales y promover la transición del lenguaje natural hacia los sistemas de notación simbólica (Blanton y Kaput, 2011). Esto porque diversas investigaciones evidencian que los niños de primaria pueden desarrollar y utilizar una variedad de herramientas de representación para razonar acerca de funciones y transitar de un lenguaje icónico y natural hacia sistemas de notación simbólica (Blanton y Kaput, 2011, 2004; Carraher, Schliemann, y Schwarz, 2008).

En la Figura 4.14 se muestra la solución del estudiante E21. En dicha solución, el maestro en formación plantea el signo igual como un indicador de correspondencia (Molina, Castro y Castro, 2009) entre el número de cubos y el de pegatinas al escribir "1=6". Con ello establece que a un cubo le corresponden seis pegatinas, que a dos cubos le corresponden diez, que a tres cubos 14 y así sucesivamente. Esta notación recurrente (y conflictiva cuando se interpreta que 1 es igual a 6) de los profesores en formación para asignar el número de pegatinas al número de cubos, parece evidenciar la falta de familiaridad con este tipo de tareas. También se aprecia que en una barra de tres cubos se necesitarían 4 pegatinas por cubo, más 1 pegatina por cada extremo. La forma de abordar la tarea de los maestros en formación refleja la importancia de poder visualizar las imágenes de los cubos para encontrar las relaciones



El estudiante plantea como regla general: "de acuerdo con el número de cubos (c) se multiplica por 4, por ejemplo: $4c + 2 =$ *número de pegatinas. Se va sumando cuatro pegatinas más conforme se agrega un cubo"*

Figura 4.14. Resolución de la tarea 2 por el estudiante E21

Ningún estudiante recurrió al planteamiento de tablas para el análisis de la relación entre el número de cubos y el de pegatinas. Los maestros en formación se apoyan en un lenguaje icónico para contar las pegatinas requeridas por cubo una vez que se encuentran unidos. En este caso, según el análisis previo realizado sobre la tarea, esta actividad del estudiante implica un nivel 1 de algebrización. Por otro lado, también se esperaba que los maestros resolvieran la tarea proporcionando una regla general que describa la relación de las pegatinas y los cubos; sin embargo, la tarea implicó ciertas dificultades, dado que solo 18 de los 40 estudiantes la resolvieron de manera adecuada indicando una regla.

5.1.5. Tarea 5: Comparación multiplicativa

La tabla 4.23 recoge los resultados del grado de corrección en las respuestas dadas por los estudiantes en esta tarea. Dado que los estudiantes dieron una respuesta directa, los métodos de resolución no fueron identificables.

Tabla 4.23. Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de la tarea 5

Grado de corrección	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	15	37,5
Incorrecta	20	50
No responde	5	12,5
Total	40	100

Se consideró como correcta si el maestro en formación establece la expresión que relaciona el número de profesores con el número de estudiantes. Por otro lado, 19 de los 40 estudiantes tradujeron incorrectamente las condiciones de la tarea al expresar la relación como "$6S = P$ *de donde* $S = \frac{P}{6}$ " (estudiante E31). Llama la atención este número considerable de respuestas incorrectas, dado que se esperaba que los estudiantes la abordaran adecuadamente; sin embargo, al parecer la comparación multiplicativa planteada en esta tarea (y la tarea 3) implican dificultades para los futuros maestros.

En la Figura 4.15 se muestra la solución del estudiante E29, que tiene un nivel 2 de algebrización

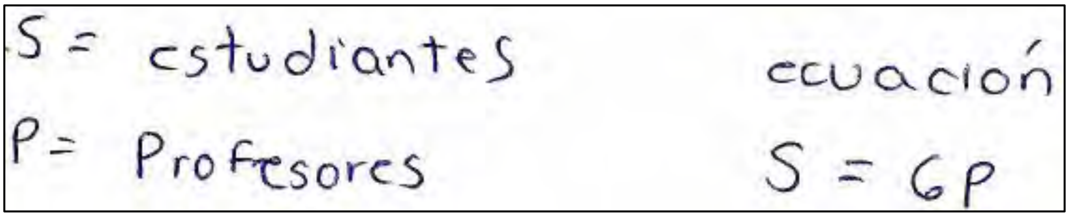


Figura 4.15. Resolución de la tarea 2 por el estudiante E29

5.1.5. Tarea 6: Igualdades verdaderas

En la tabla 4.24, se muestra el grado de corrección de los ítems cada uno de los 7 ítems planteados en las tareas: a_1) $36 \cdot b = b$; a_2) $a \cdot a = a$; a_3) $c + c = c$; a_4) $b \cdot 0 = 0$; a_5) $12 \cdot a = a \cdot 12$; a_6) $c + c = c + 6$; a_7) $2 \cdot b = b + 5$. Se consideraron como correctas la determinación de los valores numéricos que satisfacen la igualdad y por tanto la hacen verdadera, de lo contrario se consideró como incorrecta. Se destacan los ítems a_2), a_4) y a_5) por su alto porcentaje de respuestas incorrectas al parecer porque las igualdades la satisfacen más de un valor numérico; en estos casos los maestros en formación se remitieron a un solo caso.

Tabla 4.24. Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de la tarea 6

Grado de Corrección	Ítem a_1)		Ítem a_2)		Ítem a_3)	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Correcta	27	67,5	1	2,5	26	65

Incorrecta	3	7,5	**29**	72,5	4	10
No responde	10	25	10	25	10	25
Total	40	100	40	100	40	100

Tabla 4.24. Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de la tarea 6 (continuación)

Grado de Corrección	Ítem a_4)		Ítem a_5)		Ítem a_6)	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Correcta	10	25	8	20	26	65
Incorrecta	**20**	50	**22**	55	4	10
No responde	10	25	10	25	10	25
Total	40	100	40	100	40	100

Tabla 4.24. Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de la tarea 6 (continuación)

Grado de Corrección	Ítem a_7)	
	Frecuencia	%
Correcta	26	65
Incorrecta	4	10
No responde	10	25
Total	40	100

Tabla 4.25. Frecuencias y porcentajes del método de solución de la tarea 6

Método de solución	Ítems: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7	
	Frecuencia	%
Ensayo y error	21	52,5
Relacional	9	22,5
No responde	10	25
	40	100

En la tabla 4.25 se aprecia los procedimientos de resolución de los maestros en formación para los ítems de la tarea 6. Se advierte que 21 de los 40 estudiantes usó un método por ensayo y error, es decir, los valores numéricos elegidos para sustituir en la igualdad son asignados sin una justificación aparente u observable. Por otro lado 9 estudiantes resolvieron la tarea usando determinadas propiedades, método que denominamos relacional.

El pensamiento relacional implica el uso de las propiedades fundamentales de las operaciones y la igualdad. La aplicabilidad de las propiedades fundamentales como la propiedad asociativa de la suma y la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la adición, donde se razona sobre las cantidades generales en vez de números específicos son accesibles para los niños de la escuela primaria (Carpenter et al 2003, Carpenter, Franke y Levi, 2005).

En la actividad desarrollada por el estudiante E20 (figura 4.16), se aprecia cómo el estudiante pone en juego transformaciones elementales, considerando la aplicación de operaciones a ambos lados de la ecuación. A la vez que se opera con las literales, justifica la elección de los valores numéricos.

El alumno E20 procedió del siguiente modo:

a1) $36 \cdot b = b$

$$36 \cdot b = b$$
$$36b = b$$
$$36b - b = 0$$
$$35b = 0$$
$$\boxed{b = 0}$$

a2) $a \cdot a = a$

$$a \cdot a = a$$
$$\frac{a^2}{a} = \frac{a}{a}$$
$$\boxed{a = 1}$$

a3) $c + c = c$

$$c + c = c$$
$$2c = c$$
$$2c - c = 0$$
$$\boxed{c = 0}$$

a4) $b \cdot 0 = 0$

$b \cdot 0 = 0$

"b" puede tomar cualquier valor, ya que todo número multiplicado por cero da como resultado cero.

a5) $12 \cdot a = a \cdot 12$

$12 \cdot a = a \cdot 12$

"a" puede tomar cualquier valor, ya que simplemente se ha planteado una igualdad

a6) $c + c = c + 6$

$$c + c = c + 6$$
$$2c = c + 6$$
$$2c - c = 6$$
$$\boxed{c = 6}$$

a7) $2 \cdot b = b + 5$

$$2 \cdot b = b + 5$$
$$2b = b + 5$$
$$2b - b = 5$$
$$\boxed{b = 5}$$

Figura 4.16. Resolución de la tarea 2 por el estudiante E20

En el caso particular de la igualdad $a \cdot a = a$ el alumno no reconoce que no está definida una división por cero y que, sin embargo, el cero se admite como un valor numérico que hace que la igualdad sea verdadera.

Los resultados referentes al grado de corrección evidencian que aunque los futuros profesores resolvieron las tareas planteadas, lo que indica un *conocimiento común*, las resoluciones manifiestan más un conocimiento procedimental, es decir, involucran procedimientos matemáticos para calcular respuestas correctas (Hodgen, 2011).

Algunos de los métodos utilizados no son apropiados para el desarrollo del razonamiento algebraico elemental tal es el caso del método ensayo y error aplicado por un porcentaje considerable de estudiantes a las tareas 1, 2 y 6, en las cuales es factible resaltar características estructurales y de aplicación de propiedades. Es necesario que los maestros sean capaces de poner de manifiesto el carácter algebraico de la tarea matemática elemental (Carraher y Schliemann, 2007) y consideren al álgebra una "forma de pensamiento" y no como una lista de procedimientos a seguir (Stephens, 2008). Se considera que unas matemáticas elementales "algebrizadas" darán poder a los alumnos, promoviendo un mayor grado de generalidad a su pensamiento y aumentando su capacidad de expresar la generalidad (Molina, 2009).

5.2. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS A LOS ÍTEMS SOBRE CONOCIMIENTO AVANZADO DEL CONTENIDO

La integración y potenciación del razonamiento algebraico en la escuela elemental demanda por parte de los profesores el desarrollo de un conocimiento didáctico-matemático específico reconocer el carácter algebraico de las tareas matemáticas propias de dichos niveles. Este reconocimiento implica realizar conexiones con objetos matemáticos más avanzados que orienten la actividad matemática hacia un tratamiento más algebraico. En Godino (2009), el conocimiento avanzado o ampliado del contenido consiste en generalizar tareas sobre el conocimiento común y conectar la resolución de la tarea con contenidos matemáticos más avanzados. Este tipo de conocimiento tiene un carácter relativo al currículo del nivel educativo, por lo que las conexiones con objetos matemáticos más avanzados son dependientes de las diferentes etapas escolares.

Las tareas 7 y 8 del cuestionario fueron elegidas por su carácter claramente algebraico, poniendo en juego temas más avanzados respecto al currículum de primaria.

5.2.1 Tarea 7: Modelización algebraica en un contexto geométrico

La tarea 7 implica la resolución de un problema que puede ser resuelto a través del planteamiento de ecuaciones. Se recuerda el enunciado de la tarea:: Una editorial necesita cortar hojas rectangulares, cuyo ancho es la mitad de su largo, para imprimir en cada página una superficie de 300 cm^2. Si los márgenes son de 2 cm. arriba y abajo y 2.5 cm. en cada lado, determina ¿cuáles son las dimensiones de la hoja?

En la tabla 4.26 se incluye el resumen estadístico de las variables grado de corrección y el método de solución de las producciones de los estudiantes respecto a la tarea 7.

Tabla 4.26. Grado de corrección y método de solución de la tarea 7

Grado de Corrección	Frecuencia	%	**Método de solución**	Frecuencia	%
Parcialmente correcta	2	5	Aritmético	13	32,5
Incorrecta	15	37,5	Algebraico	4	10
No responde	23	57,5	No responde	23	57,5
Total	40	100	Total	40	100

Se reconoce que la tarea 7 implicó una actividad de mayor complejidad para los estudiantes. Se obtuvieron 2 respuestas parcialmente correctas al proporcionar un resultado aproximado evidenciando un proceso poco claro. Por otro lado, 15 de los 40 maestros en formación realizó una serie de operaciones que no condujeron a un resultado concreto. Se enfatiza que 23 estudiantes no responden a la tarea. De la tabla también se desprende que 13 estudiantes aplicaron un método aritmético, utilizando operaciones básicas para aproximar el resultado y que 4 estudiantes emplearon un método algebraico. Es importante señalar que los 40 estudiantes para maestro hicieron un dibujo para representar la situación del problema.

El maestro en formación E21 procedió del siguiente modo:

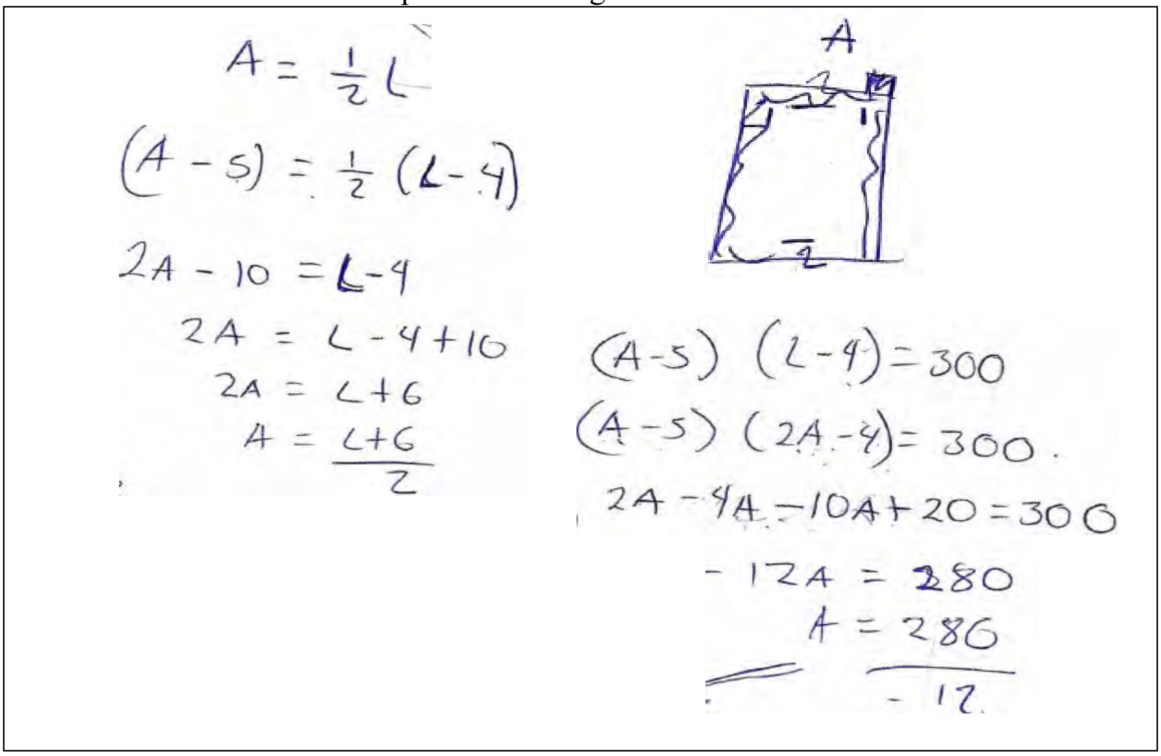


Figura 4.17. Resolución de la tarea 2 por el estudiante E21

En la actividad del alumno se puede apreciar que logra establecer la relación de dependencia entre el largo y el ancho de la hoja. En su primer intento por plantear una ecuación, no tiene claro las variables designadas $\frac{1}{2}(L-4)$ y se equivoca en el uso del paréntesis y en la designación de las variables. Entendiendo el uso del paréntesis la expresión sería $\frac{1}{2}L-4$; sin embargo, al ancho debiera restarse 5 cm y esto lo refleja en la otra parte de la ecuación $A-5$. No reconoce la dependencia entre las variables al trabajar con 2 literales diferentes, donde una puede ser expresada en términos de la otra. Aplica la misma operación en ambos lados de la ecuación y la reduce. Sin embargo, al ver que llega a una expresión que no le permite determinar datos numéricos replantea la expresión inicial. En su segundo planteamiento, la ecuación es correcta $(A-4)(L-4)=300$ y realiza la sustitución de $L=2A$. Sin embargo no realiza correctamente la multiplicación de los 2 binomios, fallo que le lleva a una respuesta incorrecta.

En la respuesta se percibe que el maestro en formación tiene dificultades para operar con las literales. De manera general, se informa que no se presentaron soluciones como la del análisis a priori, de hecho, 23 de los 40 estudiantes no responden a la tarea.

5.2.2. Tarea 8: Vagones de trenes

La tarea 8 fue planteada para indagar sobre el conocimiento avanzado de los maestros en formación y al igual que la tarea 7 pretende recopilar información sobre el modo en que los estudiantes para maestro abordan este tipo de tareas. Recordamos el enunciado de la tarea: 588 pasajeros deberán viajar de una ciudad a otra. Dos trenes están disponibles. Un tren se compone sólo de vagones de 12 asientos, y el otro sólo de vagones de 16 asientos. Suponiendo que el tren con vagones de 16 asientos tendrá ocho vagones más que el otro tren, ¿Cuántos vagones se adjuntaría a las locomotoras de cada tren para que los 588 pasajeros puedan viajar? Identifica conocimientos de tipo algebraico que se ponen en juego al resolver este problema. ¿Cómo explicarías la resolución del problema a un niño que no ha podido resolverlo?

En la tabla 4.27 se registran los resultados de las variables 1 grado de corrección y el método de solución evidenciados por los maestros en formación. Se aprecia que 5 estudiantes respondieron correctamente a la tarea proporcionando un procedimiento coherente, mientras que 2 lo hicieron de manera parcial, es decir, se realiza una serie de operaciones que le llevan a un resultado aproximado del resultado. Se destaca que 12 estudiantes resuelven de manera incorrecta mientras que 21 maestros en formación la deja en blanco.

Tabla 4.27. Grado de corrección y método de solución de la tarea 4, inciso a)

Grado de Corrección	Ítem a)		**Método de solución**	Ítem a)	
	Frecuencia	%		Frecuencia	%
Correcta	5	12,5	Aritmético	18	45
Parcialmente correcta	2	5	Algebraico	1	2,5
Incorrecta	12	30			
No responde	21	52,5	No responde	21	52,5
Total	40	100	Total	40	49,15

De la tabla también se desprende que 18 maestros en formación manifestaron un método aritmético y solamente 1 alumno empleó un método algebraico.

El alumno E30 procedió del siguiente modo:

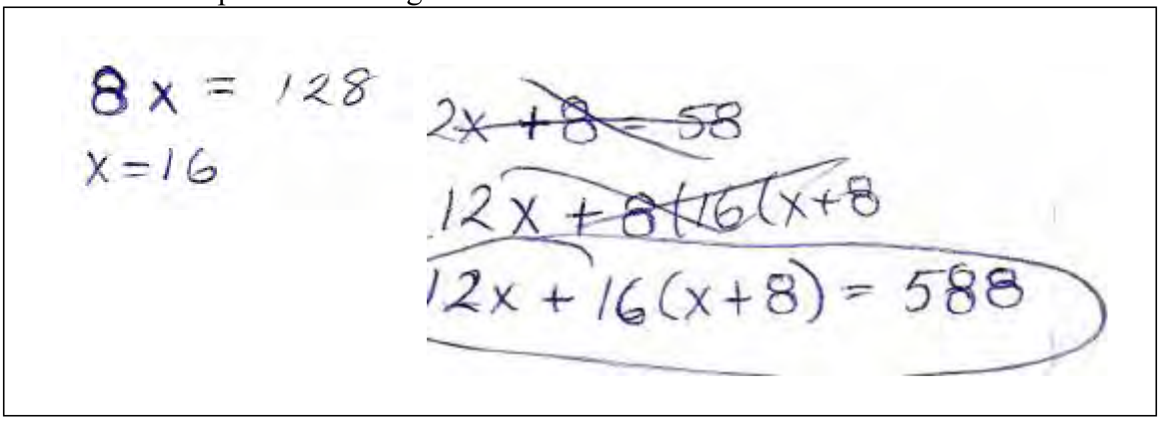


Figura 4.18. Resolución de la tarea 2 por el estudiante E30

En la resolución del maestro en formación se aprecia que con la expresión $x = 16$ intenta denotar que uno de los trenes x, solo tiene vagones de 16 asientos. Por otro lado, con la expresión $8x = 128$ intenta traducir la frase: el tren con vagones de 16 asientos tendrá ocho vagones más que el otro tren. Parece que el estudiante entiende el problema pero se le dificulta traducirlo en una notación algebraica. Después de varios intentos logra establecer una expresión, sin embargo, deja incompleta la tarea. La orientación adecuada de esta tarea, implicaría un nivel 3 de algebrización de acuerdo con el análisis a priori realizado previamente.

El análisis de estas tareas muestra que las resoluciones por parte de los futuros maestros no muestran conexiones con conocimientos más avanzados. Al parecer muchas de sus dificultades se remontan a la limitada comprensión de los números y las operaciones, mientras que otros errores son causados por no saber escribir lo que ellos entienden (Stacey, 1997).

5.3. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE LOS ÍTEMS SOBRE SOBRE CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL CONTENIDO

En el cuestionario aplicado, el análisis del grupo de ítems 1b, 2b, 3b y 2c, 3c, 4b, 5b, 6c, 8b, que solicitan dar argumentaciones e identificar conocimientos de tipo algebraico que pueden manifestarse durante la resolución de la tarea, permitió describir sobre algunos aspectos relevantes del conocimiento especializado sobre razonamiento algebraico elemental.

5.3.1. Las argumentaciones manifestadas por los maestros en formación

Las argumentaciones expuestas por los maestros en formación quedan recogidas en las tareas 1, 2 y 3 en ítems específicos de las mismas.

Tarea 1, ítem b). En este ítem se precisa que los maestros en formación proporcionen justificaciones sobre tres algoritmos diferentes para la multiplicación, a saber:

$b_1)$
$$\begin{array}{cccc} & & 3 & 5 \\ & \times & 2 & 5 \\ \hline & 1 & 2 & 5 \\ + & 7 & 5 & \\ \hline & 8 & 7 & 5 \end{array}$$

$b_2)$
$$\begin{array}{cccc} & & 3 & 5 \\ & \times & 2 & 5 \\ \hline & 1 & 7 & 5 \\ + & 7 & 0 & 0 \\ \hline & 8 & 7 & 5 \end{array}$$

$b_3)$
$$\begin{array}{cccc} & & 3 & 5 \\ & \times & 2 & 5 \\ \hline & & 2 & 5 \\ & 1 & 5 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ + & 6 & 0 & 0 \\ \hline & 8 & 7 & 5 \end{array}$$

Se registra que 4 de los 40 estudiantes dieron una respuesta incorrecta, es decir, la justificación del estudiante resulta incoherente respecto a lo que se solicita en la tarea. Por ejemplo, el estudiante E27 expresa: "*el procedimiento correcto es el b_1) ya que es cómo deben acomodarse las cantidades, pero el procedimiento es incorrecto*." El estudiante identifica por el "salto" de los espacios que se trata del método correcto, se deja llevar por la disposición convencional de la multiplicación, sin un aparente análisis del algoritmo.

En la figura 4.19 se muestra un argumento similar al del estudiante E27. El profesor de igual manera elige como procedimiento correcto el ítem b_1) y justifica su elección sobre su conocimiento del algoritmo de la multiplicación y no analiza el procedimiento de los otros métodos.

Pregunta b) de la tarea 1: ¿En cuál de las respuestas anteriores, según tu juicio, se está usando un método que podría ser usado para multiplicar cualquier par de números enteros?

b2) 35
×25
175
70
875

La segunda porque nos vamos guiando del algoritmo de la multiplicación, utilizando la cantidad que se encuentra en el multiplicador para resolver primero las unidades y luego las decenas, dejando las posiciones correctas.

Figura 4.19. Justificación dada por el estudiante E29

Por otro lado, 31 estudiantes dieron una respuesta parcialmente correcta dónde la justificación del estudiante es coherente pero parcial respecto a uno de los casos. Estas respuestas también se caracterizan por la elección del ítem *b_2)* como correcto. El caso representativo es cuando el estudiante reconoce el algoritmo de la multiplicación en su uso más frecuente. En este caso, las argumentaciones son similares, "*el b_2) porque utiliza un procedimiento más cercano a la convencionalidad y al que normalmente uso, ya que sólo agrega un cero para cubrir espacios. Los otros si bien funcionan no queda claro si podrían utilizarse en diferentes números*" (estudiante E20). El estudiante reconoce que b_2) se aplica a diferentes números y que las multiplicaciones b_1) y b_3) son también correctas pero no conecta que sus respectivos métodos están justificados por la propiedad conmutativa y valor posicional de los números naturales.

Finalmente, 5 estudiantes dieron una respuesta correcta y se justifica por qué los tres casos son válidos para cualquier par de números. Por ejemplo, el estudiante E38 expresa: "*las tres multiplicaciones son válidas, ya que se hacen sumas en diferentes órdenes de acuerdo a las posiciones, pero se llega al resultado correcto; en el primer caso se hace desde arriba hacia abajo, en el segundo caso se sigue otro orden agregando un cero en la multiplicación y en el tercer caso se desglosa la multiplicación*". Respuestas de este tipo se consideraron como correctas, pese a que los argumentos son poco claros. Se manifiesta un conocimiento sobré el porqué de los procedimientos seguidos en cada caso y aparentemente se reconocen las propiedades puestas en juego, pero sin hacerlas explícitas.

Se concluye que aunque los estudiantes entendieron el "proceso" en el que se realizaban las multiplicaciones, no lo conectan correctamente con las propiedades conmutativas y valor posicional de los números; sus explicaciones son más bien descriptivas del procedimiento que suelen usar, tal como se indicó en el análisis a priori. En este sentido, estamos de acuerdo con Ball (2003) cuando afirma que los maestros tienen que saber por qué los procedimientos funcionan, qué propiedades son verdaderas, qué relaciones particulares existen y sobre qué bases se establecen.

En el caso de la multiplicación de dos dígitos, los maestros deben ser conscientes que es un contenido que anticipa el caso más general de la multiplicación de un binomio (aspectos del conocimiento avanzado).

Tarea 2, ítem b). En este ítem se pretende que los maestros en formación proporcionen una justificación sobre la elección de los dígitos que representan las letras A, B y C en la siguiente suma:

$$\begin{array}{cccc} & A & B & C \\ & A & B & C \\ + & A & B & C \\ \hline 2 & A & C & C \end{array}$$

Resulta relevante que 26 de los 40 estudiantes que resolvieron la tarea justificaron su respuesta argumentando: "*los valores asignados son correctos porque al realizar la suma me da el resultado*" (E21). El resto de los estudiantes no respondió a este ítem.

En la siguiente figura se muestra la respuesta del estudiante E05 que proporciona un argumento similar al del estudiante E21:

Respuesta a la pregunta b) de la tarea 2: ¿Cómo sabes que son correctos?

b) Porque al realizar las operaciones con los numeros dio el resultado final.

Figura 4.20. Justificación dada por el estudiante E05

Tarea 6, ítem b). Este ítem plantea a los maestros en formación una justificación sobre la asignación de valores para cada una de las siguientes igualdades:

$a_1)$ $36 \cdot b = b$ $\qquad$ $a_2)$ $a \cdot a = a$

$a_3)$ $c + c = c$ $\qquad$ $a_4)$ $b \cdot 0 = 0$

$a_5)$ $12 \cdot a = a \cdot 12$ $\qquad$ $a_6)$ $c + c = c + 6$

$a_7)$ $2 \cdot b = b + 5$

Respecto a las respuestas de los estudiantes 15 fueron catalogadas como incorrectas, al asignar los valores sin proporcionar alguna explicación sobre su elección, esto es, 15 estudiantes dejaron en blanco este ítem de la tarea. Por otro lado 23 estudiantes remitieron a la comprobación de la igualdad para argumentar que los valores determinados son correctos: "porque sustituí y acerté a la cantidad" (E26), este tipo de respuestas se catalogaron como parcialmente correctas. Finalmente 2 estudiantes proporcionaron respuestas que indican el uso de propiedades para encontrar los valores de las sentencias expuestas en la tarea.

El alumno E39 procedió del siguiente modo:

Respuesta del estudiante E39 a la pregunta b) de la tarea 6: ¿Cómo sabes que esos valores son correctos?

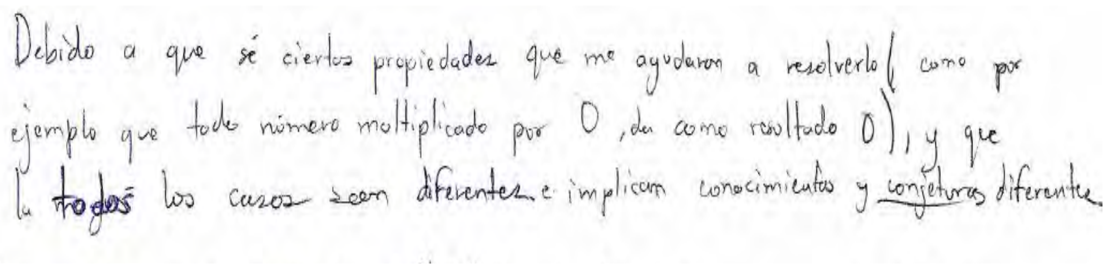

Debido a que sé ciertos propiedades que me ayudaron a resolverlo (como por ejemplo que todo número multiplicado por 0, da como resultado 0), y que la todos los casos sean diferentes e implican conocimientos y conjeturas diferentes

Figura 4.21. Justificación dada por es estudiante E39

Las argumentaciones de los maestros en formación evidencian la falta de un dominio de las propiedades implicadas en la resolución del problema por lo que posibles generalizaciones y conexiones (relativas al conocimiento avanzado) no se hacen factibles.

5.3.2. Identificación de conocimientos de tipo algebraico

Los conocimientos de tipo algebraico que se requieren ser identificados por los maestros en formación quedan recogidas en las tareas 2, 3, 4, 5, 6 y 8 en ítems específicos, bajo la sentencia*: Identifica conocimientos de tipo algebraico que se ponen en juego al resolver este problema.*

En la figura 4.22 se muestra que se identificaron conocimientos prioritariamente de tipo aritmético, los conocimiento de tipo algebraico fueron más frecuentes en aquellas tareas que evidenciaban el uso de las letras, tal fue el caso de la tarea 5 (comparación multiplicativa). La tarea 2 pese a que involucraba una suma con dígitos desconocidos representados por letras, los resultados sugieren que el hecho de tratarse de un contenido desarrollado en la escuela primaria influyó en la manifestación de conocimientos prioritariamente aritméticos tales como la suma, multiplicación y "estimación" que fueron las más frecuentes. La estimación sugiere el método por ensayo y error.

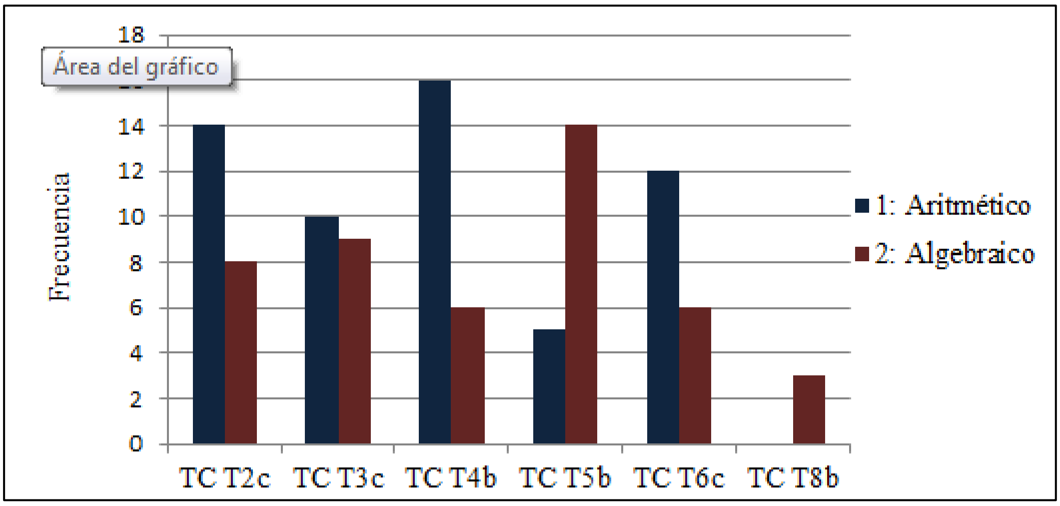


Figura 4.22. Frecuencias sobre el tipo de conocimiento (TC) identificado en las tareas

Por otro lado, se destaca la tarea 8 (vagones de trenes) de la cual solo se manifestaron 3 respuestas de naturaleza algebraica. Los maestros en formación exhiben dificultades cuando intentan conectar las condiciones de la tarea con la identificación de conocimientos algebraicos implicados, aspectos relacionados con el conocimiento especializado. El número elevado de sujetos que no respondió esta demanda en las 6 tareas implicadas, sugiere que los futuros maestros han tenido dificultades para identificar los conocimientos requeridos para resolverla, lo que muestran un poco dominio de este aspecto del conocimiento especializado.

5.4. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS A LOS ÍTEMS SOBRE EL CONOCIMIENTO DEL CONTENIDO EN RELACIÓN CON LA ENSEÑANZA

El conocimiento del contenido en relación con la enseñanza (faceta instruccional) queda recogido en las tareas 2, 3, 4, 5 y 8 en ítems específicos, bajo la pregunta: *¿cómo explicarías la resolución del problema a un niño que no ha podido resolverlo?*

En la figura 4.23 se aprecia el predominio de explicaciones verbales; el maestro en formación se limita a reformular con otras palabras el enunciado para proporcionar una guía al niño.

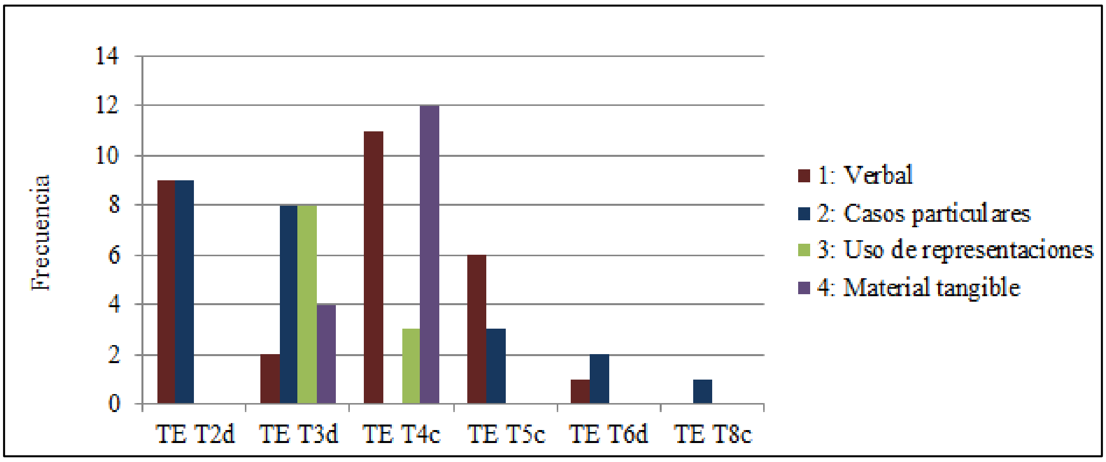


Figura 4.23. Frecuencias sobre el tipo de estrategia (TE) de enseñanza sugerida

El planteamiento de casos particulares se manifestó en 5 respuestas (la tarea 2: suma con dígitos desconocidos, la tarea 3: secuencia de cubos adosados, la tarea 5: comparación multiplicativa, la tarea 6: igualdades verdaderas y la tarea 8: vagones de trenes) de las 6 tareas que involucraban al ítem relativo al conocimiento del contenido en relación con la enseñanza. En estos casos los maestros en formación sugieren que el niño debiera indagar sobre la respuesta proporcionando valores específicos a los datos que se desconocen. El uso de representaciones y material tangible fueron sugeridas en las tareas 3 (comparación de alturas) y 4 (secuencia de cubos adosados) donde se plantea el uso de material métrico y de cubos y pegatinas respectivamente.

El elevado número de sujetos que no respondieron implica debilidades en el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza. Conviene recordar que los estudiantes a los que se les aplicó el cuestionario estaban finalizando su formación inicial como profesores de educación primaria y que habían cursado una asignatura relativa al álgebra, su enseñanza y aprendizaje.

6. SÍNTESIS Y CONCLUSIONES DEL ESTUDIO EXPLORATORIO

En el análisis realizado se advierte que los futuros maestros exhiben dificultades tanto en la faceta epistémica (conocimiento común, especializado, avanzado) del razonamiento algebraico elemental como en la faceta instruccional (conocimiento del contenido en relación con la enseñanza), como se infiere de las soluciones que dan a las tareas, las limitadas argumentaciones y las deficientes propuestas de aprendizaje que proponen.

En general se manifiestan dificultades tanto en las justificaciones dadas como en la identificación de conocimientos de tipo algebraico involucrados, dos aspectos del conocimiento especializado del contenido necesarios para la enseñanza del RAE en la escuela elemental. Los estudiantes asocian el uso de conocimientos algebraicos a la presencia de letras en las tareas y sus argumentaciones se refieren a comprobaciones de resultados de cálculos. Ello indica una desconexión entre sus razonamientos y los conocimientos intrínsecos de las tareas que el profesor debiera ser capaz de identificar. Respecto al conocimiento del contenido en relación con la enseñanza, los profesores realizan modificaciones en los enunciados verbales de las tareas como único "apoyo" a sus propuestas para facilitar la posible resolución del problema por los niños. En este sentido los maestros deberían ser capaces de utilizar las representaciones hábilmente, elegir de manera apropiada los números implicados, y las operaciones o procesos que se modelan. Sin embargo, esto requiere gran habilidad matemática y comprensión, lo que va mucho más allá de los conocimientos necesarios para llevar a cabo un procedimiento algorítmico (Ball, 2003).

Se evidencia también que la concepción que tienen del álgebra es bastante reducida y su atención se concentra en el álgebra como manipulación simbólica, lo que indica que a los maestros les cuesta identificar formas de "razonamiento algebraico elemental" como pertenecientes al dominio del álgebra. En este sentido, los maestros tiene que ser conscientes de que los niños no tendrán que resolver problemas algebraicos, pero que es necesario proporcionarles un fundamento para el desarrollo del razonamiento algebraico (Caprano, Rangel-Chavez, Caprano, 2008). Parece que la visión usual que los futuros maestros tienen del álgebra, se derivada de sus experiencias en la escuela media (16-18 años en la educación mexicana) y es, mayoritariamente, el de un conjunto de reglas y procedimientos para la manipulación de símbolos. Los maestros no conciben como razonamiento algebraico el asumir y expresar relaciones, de generalizar patrones, de modelar y de resolver problemas. Los maestros en formación deben apreciar al algebra como algo más que la manipulación de símbolos, como un sistema caracterizado por la indeterminación de los objetos, el carácter analítico del pensamiento y las formas simbólicas de los objetos que designan (Cooper y Warren, 2011).

Nuestros datos sugieren que los conocimientos matemáticos que los futuros profesores traen son inadecuados para el desarrollo del razonamiento algebraico elemental, dada la poca manifestación de conexiones de conceptos algebraicos con las tareas. Y no se trata de que los maestros en formación tomen más clases de matemáticas, no es la solución. Los maestros deben centrarse en la actividad matemática y pensamiento para ayudar a los niños a aprender álgebra en el futuro (Carpenter, Levi, Franke, y Zeringue, 2005); deben entender los contenidos matemáticos, conocer cómo los estudiantes aprenden matemáticas, y ser capaces de utilizar estrategias de enseñanza que fomenten el aprendizaje de las matemáticas (Hill, Schilling, y Ball, 2004).

Por tanto se precisa que los maestros experimenten "procesos de desarrollo de ideas matemáticas relacionadas con la estructura, las propiedades o las relaciones que subyacen en las ideas matemáticas" (NCISLA, 2003, p.11). Según diversos estudios (Darling-Hammond, et al., 2005) existen relaciones significativas entre las competencias de los maestros y el desempeño de los niños, por tanto la formación de los maestros en temas vinculados con el razonamiento algebraico elemental podría tener un efecto positivo en el desempeño de los niños en tareas de carácter algebraico. Parece, entonces, justificada la pertinencia de diseñar acciones formativas para el desarrollo del razonamiento algebraico elemental en los programas de formación inicial de maestros.

El planteamiento anterior nos condujo, en el seno de nuestro grupo de investigación, al diseño, implementación y valoración de un proceso de instrucción que pusiera en funcionamiento el modelo de niveles de algebrización, modelo que implica una reconceptualización del álgebra y del razonamiento algebraico. Esta experiencia formativa se describe en el capítulo 5 de esta tesis.

CAPÍTULO 5

DESARROLLO DEL SENTIDO ALGEBRAICO EN MAESTROS EN FORMACIÓN

1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo abordamos la tercera pregunta general de nuestra investigación que fue formulada en el capítulo 2 en los siguientes términos:

> *¿Qué tipo de acciones formativas sería necesario (y posible) implementar en un programa de formación inicial de maestros de primaria para desarrollar en ellos el sentido algebraico?*

Se trata de un problema de diseño instruccional ya que consiste en indagar posibles intervenciones en los procesos de formación de profesores que ayuden a mejorar el estado de una situación de partida, en nuestro caso, las carencias de conocimientos, comprensión y competencia sobre el razonamiento algebraico elemental de los maestros de primaria en formación inicial. Dichas carencias fueron detectadas en el estudio de evaluación descrito en el capítulo 4 y son concordantes con resultados de investigaciones precedentes descritas en el capítulo 1.

El marco metodológico que guiará esta parte de la investigación será el de la ingeniería didáctica, entendida en el sentido generalizado propuesto en Godino, Batanero, Contreras, Estepa, Lacasta y Wilhelmi (2013) donde se amplía la concepción tradicional de la ingeniería didáctica (Artigue, 1989; 2011) en la dirección de las investigaciones basadas en el diseño (Cobb, Confrey, Disessa, Lehrer, y Schauble, 2003; Kelly, Lesh y Baek, 2008). Como marco teórico soporte de la ingeniería adoptamos el Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, sintetizado en el capítulo 2.

Siguiendo esta interpretación de la ingeniería didáctica distinguimos cuatro fases en la investigación: 1) Estudio preliminar; 2) Diseño del experimento,3) Implementación; 4) Evaluación o análisis retrospectivo.

En el problema que aquí planteamos, la fase de estudio preliminar ya ha sido abordada en los capítulos 1 y 3, ya que consiste en hacer una reconstrucción del significado de referencia global para el "objeto matemático" en el que se centra la investigación, en nuestro caso el Razonamiento Algebraico Elemental. Procede, por tanto, describir, en primer lugar el diseño del experimento, o acción formativa, después la implementación efectiva de dicha acción y finalmente proceder a la evaluación sistemática de la misma con vista a identificar posibles mejoras del diseño y la implementación.

2. CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL PROCESO FORMATIVO

Una característica propia de las investigaciones basadas en el diseño instruccional, que atribuimos a la ingeniería didáctica (sentido generalizado), es que las acciones tienen lugar en los contextos reales de clase, y no en ambientes clínicos o de laboratorio. Por tanto, tienen un enfoque exploratorio e interpretativo, más que experimental o cuasi-experimental. Además, las investigaciones son llevadas a cabo por equipos de trabajo en los que los roles de profesor e investigador no tienen que ser netamente diferenciados.

En nuestro caso el equipo de investigación está formado por el profesor del curso en que tiene lugar la experiencia (y director de la tesis doctoral) y la doctoranda, que desempeña el papel de observadora no participante. El análisis e interpretación de los datos recogidos son realizados conjuntamente en el seno de ese equipo.

En las fases de diseño, implementación y evaluación tendremos en cuenta las facetas epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional que propone el EOS, así como las nociones de configuración didáctica y trayectoria didáctica (Godino, Contreras y Font, 2006).

En líneas generales la experiencia consiste en introducir de manera explícita conocimientos especializados sobre razonamiento algebraico elemental a lo largo de un curso para maestros en formación inicial sobre "Enseñanza y aprendizaje de la matemática en educación primaria", impartido en la Facultad de Educación de la

Universidad de Granada. El curso se desarrolla en el segundo cuatrimestre con una valoración de 6 créditos (150 horas presenciales y no presenciales).

El objetivo es introducir progresivamente a los estudiantes en el reconocimiento de objetos algebraicos que se ponen en juego en la resolución de tareas matemáticas propias de educación primaria, y la asignación de niveles de algebrización a la actividad correspondiente, tal y como se han descrito en el capítulo 3 de la tesis doctoral.

De acuerdo con la Guía docente del curso, aprobada por el Departamento, hay actividades de clase con el grupo completo (56 estudiantes), consideradas como "clases de teoría", y otras actividades con el grupo dividido en tres subgrupos, consideradas como clases de prácticas o seminarios. A lo largo del cuatrimestre se realizaron 7 seminarios de prácticas, uno de ellos (práctica 5) específicamente diseñado para tratar del tema del álgebra en educación primaria. Asimismo, la práctica 1 sobre resolución de problemas fue orientada hacia la iniciación de la reflexión sobre los objetos algebraicos intervinientes en la resolución de problemas matemáticos. Durante las sesiones de clase de teoría, el profesor fue intercalando la reflexión sobre las características del sentido algebraico escolar.

Como instrumentos de recogida de datos de esta parte de la investigación se dispone de los siguientes documentos:

- Respuestas de cada uno de los estudiantes participantes a algunas de las tareas propuestas (Práctica 1 y prueba de evaluación final)
- Respuestas de los distintos equipos de trabajo formados para responder a las tareas de análisis didáctico (Práctica 5)
- Grabación de audio de todas las sesiones de clase del curso
- Registro de las observaciones no participantes de la investigadora

En los siguientes apartados de este capítulo vamos a describir con detalle el desarrollo del proceso formativo distinguiendo las tres fases mencionadas: Diseño, implementación y evaluación. En cada fase fijamos la mirada sucesivamente en la faceta epistémica (y ecológica), las facetas cognitiva y afectiva, y las facetas interaccional y mediacional.

3. DISEÑO DEL PROCESO FORMATIVO. ANÁLISIS A PRIORI DE LAS TAREAS

En este apartado se describirán con detalle las actividades planificadas en la Práctica 1 (Resolución de problemas), Práctica 5 (Álgebra en educación primaria), y la tarea sobre RAE que se planificó incluir en el examen final de la asignatura. Las intervenciones sobre RAE del profesor en las clases de teoría fueron en su mayor parte "diseñadas sobre la marcha", excepto una presentación sobre características del sentido algebraico.

El análisis a priori de las tareas consistirá en la formulación de soluciones esperadas para las mismas, el reconocimiento de objetos matemáticos puestos en juego en la solución, con atención particular a los objetos algebraicos y nivel de algebrización involucrados.

3.1. SUBTRAYECTORIA EPISTÉMICA Y ECOLÓGICA

En la subtrayectoria epistémica se ponen de manifiesto los componentes del significado institucional del contenido matemático que se pretende implementar. También se pone de manifiesto cómo se relaciona este contenido matemático con el resto de los contenidos de la asignatura sobre la cual se desea incidir, así como también las conexiones intra e inter disciplinares si las hubiera.

3.1.1. Contenido matemático a desarrollar

La inclusión del razonamiento algebraico en las aulas de la escuela primaria demanda una nueva visión del álgebra que contemple y reconozca sus rasgos en los niveles más primitivos en las tareas propias de la escuela elemental. En este sentido, desde el EOS se articula una aproximación al álgebra para la escuela primaria y propone niveles de algebrización para el desarrollo progresivo del razonamiento algebraico (capítulo 3). Para promover esta visión del álgebra en los maestros en formación, como primer paso, se diseñaron una serie de actividades (10 tareas específicas agrupadas en 2 prácticas y una cuestión incluida en el examen final de la asignatura), así como otros materiales que serían propuestos a los futuros maestros en determinadas intervenciones en el aula a lo largo del proceso formativo. A continuación se describen estas actividades en las cuales se pone en juego el contenido matemático pretendido.

3.1.1.1. Práctica 1: Resolución de problemas

Con la práctica 1 se pretende dar cuenta de los conocimientos iniciales que manifiestan los maestros en formación al resolver tareas de naturaleza algebraica. Por tal motivo esta práctica constaba de 2 partes:

En la primera parte, A, se enfrentaba a los estudiantes a la resolución de 4 tareas (Anexo 5). La primera y las cuarta tarea corresponden a actividades comunes que se desarrollan en la escuela primaria (abordan conocimientos sobre proporcionalidad y multiplicación respectivamente). La segunda tarea queda enmarcada como una actividad de los niveles posteriores a la educación primaria al plantear un problema verbal susceptible de ser resuelto de manera algebraica. La tarea 3 es una actividad que las investigaciones proponen para el desarrollo del razonamiento algebraico en los niveles elementales a través del estudio de patrones y por tanto se debe enmarcar entre los conocimientos de índole avanzado de los maestros en formación, al no incluirse temáticas como ésta en el currículo español (BOE, 2006).

Las producciones que resulten de esta primera etapa de la práctica permitirán conocer los modos de resolución que emplean los maestros en formación e identificar aquellos que evidencien elementos algebraicos, dando pautas de su conocimiento inicial.

En una segunda parte, B (Anexo 6), se enfrenta a los estudiantes a realizar un análisis de sus producciones; se les requiere identificar los objetos y significados matemáticos que han utilizado en la resolución de cada una de las 4 tareas utilizando una guía similar a la indicada en la tabla 5.1.

Tabla 5.1. Guía para la identificación de objetos y significados matemáticos

<table>
<tr><th>Objetos matemáticos que se ponen en juego</th><th>Significado
(Interpretación que se espera del estudiante)</th></tr>
<tr><td colspan="2">REPRESENTACIONES (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas)</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición, más o menos formal)</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

PROPOSICIONES (Enunciados para las cuales se requiere una justificación o prueba)	
ARGUMENTOS (Justificaciones, demostraciones, o pruebas de las proposiciones usadas)	

La identificación permite ampliar la atención desde los conocimientos que se pretenden movilizar en cada uno de los problemas hasta el papel que juegan en la actividad matemática desde el punto de vista de los maestros en formación. Esto permitirá complementar la caracterización del razonamiento empleado por los maestros en la resolución de cada una de las tareas respecto a lo que ellos consideran objetos matemáticos algebraicos.

Es importante recordar que el desarrollo de competencias de análisis para reconocer explícitamente los objetos matemáticos algebraicos forma parte, según la interpretación del EOS, del conocimiento especializado del contenido que se debe promover en el maestro de educación primaria. De este modo esta primera actividad sirve como diagnóstico, para analizar la comprensión inicial de los maestros en formación y caracterizar los significados personales iniciales respecto al razonamiento algebraico elemental. En este sentido, es reconocido que cualquier propuesta de cambio curricular debe tener en cuenta las creencias, actitudes y conocimientos que los maestros tienen hacia las matemáticas y su enseñanza. Además, la idoneidad cognitiva de los procesos de instrucción matemática debe partir de un conocimiento del estado inicial del conocimiento de los estudiantes con relación al tema abordado, en este caso el razonamiento algebraico elemental.

A continuación, como parte de la profundización del conocimiento a desarrollar y el alcance de las tareas para promover el razonamiento algebraico elemental, se presenta el análisis a priori que realizamos para cada una de las tareas incluidas en la práctica 1. También se describe el conocimiento que previmos manifestarían los maestros en formación al resolver dichas tareas. Primero se planteó, para cada apartado, una solución prevista. Luego, a partir de dicha solución, se realizó un análisis del contenido mediante la utilización de la herramienta teórica "configuración de objetos y procesos" del EOS, con la finalidad de establecer un nivel de algebrización de la práctica realizada de acuerdo al modelo desarrollado en el capítulo 3. Se pone especial interés en los análisis de cada una de las tareas planteadas en las prácticas, en los aspectos algebraicos identificados que argumentan la determinación de niveles de algebrización sobre las tareas. Con estos análisis se pretende poner de manifiesto los componentes de significado que se pretende implementar.

Tarea 1: La limonada. Juan prepara una limonada utilizando 3 cucharadas de azúcar y 12 cucharadas de concentrado de zumo de limón. María utiliza 5 cucharadas de azúcar y 20 cucharadas de concentrado de zumo de limón.

a) ¿Cuál de las dos limonadas es más dulce, la de Juan o la de María, o tienen el mismo sabor?
b) Si Juan quiere preparar una limonada con el mismo sabor que la anterior pero con 24 cucharadas de limón, ¿Cuántas cucharadas de azúcar debe poner?
c) ¿Cuántas cucharadas de azúcar se debe poner para un número cualquiera de cucharadas de limón?

Figura 5.1. Tarea 1 planteada en la práctica 1

La primera tarea de la práctica 1 fue tomada de Rivas y Godino (2009) y pretende que el estudiante generalice y asocie el concepto de proporcionalidad con la formulación de una función lineal. En la parte a) de esta tarea se solicita a los maestros en formación una comparación de razones. La parte b) implica encontrar un valor desconocido, la cuarta proporcional. Por último, la parte c) solicita expresar la relación funcional lineal que existen entre los elementos correspondientes (número de cucharadas de azúcar y número de cucharadas de zumo de limón).

Esta tarea se incorporó a la práctica ya que la proporcionalidad es un tema integrador en los programas de matemáticas que se desarrolla a través del trabajo con muchos temas del currículo: razón y proporción, porcentaje, semejanza, escalas, ecuaciones lineales, pendiente, histogramas de frecuencia relativa y probabilidad (NCTM, 2000). Pero también constituye la base de conocimientos matemáticos más avanzados como funciones lineales, trigonometría, geometría, entre otros (Rivas, Godino y Castro, 2012).

Planteamiento de posibles soluciones para la tarea 1. En las siguientes líneas describiremos las posibles soluciones que podrían corresponder a la tarea 1, tanto para el ítem a) como para los ítem b) y c). Se precisa mencionar que podría considerarse más soluciones, las que aquí se expresan se corresponden, en medida de lo posible, con distintos niveles de algebrización.

Tabla 5.2. Soluciones previstas para la tarea 1

ITEM A)

Solución 1

En la limonada de Juan, la razón entre el número de cucharadas de limón al de azúcar es, 3 cdas de azúcar por cada 12 cdas de limón, o sea, por cada cda de azúcar se tiene 4 cucharadas de limón. Esta razón, $\frac{1\ cda\ de\ azúcar}{4\ cdas\ de\ limón}$, es una medida de la concentración de azúcar en la limonada preparada por Juan.
En la limonada de María, por cada 5 cdas de azúcar se vierten 20 cdas de zumo de limón; luego la razón entre ambas cantidades $\frac{5\ cda\ de\ azúcar}{20\ cdas\ de\ limón}$, es también de una cda de azúcar por cada 4 cdas de limón, $\frac{1\ cda\ de\ azúcar}{4\ cdas\ de\ limón}$. Por lo tanto, ambas razones son iguales, luego tendrán el mismo sabor.

Solución 2

Si establecemos una correspondencia entre el número de cucharadas de azúcar y el número de cucharadas de limón obtenemos un comportamiento creciente proporcional, por lo tanto las dos limonadas tienen el mismo sabor.

$$
\begin{array}{ccc}
\text{Cdas azúcar} & & \text{Cdas zumo de limón} \\
\frac{1}{4} & \longrightarrow & 1 \\
\frac{2}{4} & \longrightarrow & 2 \\
\frac{3}{4} & \longrightarrow & 3 \\
1 & & 4 \\
\frac{5}{4} & \longrightarrow & 5 \\
\ldots & & \ldots \\
\frac{10}{4} & \longrightarrow & 10 \\
\frac{12}{4} & \longrightarrow & 12 \\
\frac{15}{4} & \longrightarrow & 15 \\
\frac{20}{4} = 5 & \longrightarrow & 20
\end{array}
$$

ITEM B)

Solución 1

Determinamos la cuarta proporcional. Conociendo que dos razones son proporcionales si el producto de medios es igual al producto de extremos tenemos:

$$\frac{3}{12} = \frac{x}{24}$$

$$12x = 72$$

$$x = 6$$

Por lo tanto, se requiere 6 cucharadas de azúcar

Solución 2	La correspondencia entre magnitudes indica que la cantidad que se desconoce son 6 cucharadas de azúcar.

Cdas de azúcar		Cdas de zumo de limón
$\frac{10}{4}$	$\longrightarrow$	10
$\frac{12}{4}$	$\longrightarrow$	12
$\frac{15}{4}$	$\longrightarrow$	15
$\frac{20}{4} = 5$	$\longrightarrow$	20
$\frac{24}{4} = 6$	$\longrightarrow$	24

ITEM C)

Solución 1	Como las limonadas están a razón 1:4 podemos establecer que si queremos determinar el número de cucharadas de azúcar para cualquier número de cucharadas de limón basta con dividir éste entre 4.
Solución 2	Si representamos por *x,* el número cualquiera de cucharadas de limón, el número *y* de cucharadas de azúcar que se requieren serán, $y = \frac{1}{4}x$, ya que por cada cucharada de limón se requieren $\frac{1}{4}$ de azúcar. O bien $f(x) = \frac{1}{4}x$

Análisis correspondiente a la tarea 1 y sus soluciones posibles. En el análisis se indicarán los tipos de objetos y significados (interpretación que se espera del estudiante) que corresponden a elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos.

En el enunciado de la tarea 1 se pueden identificar *elementos lingüísticos* tales como “3 y 5 cucharadas de azúcar”, “12 y 20 cucharadas de limón” que representan los datos del problema, donde las cantidades de limón y de azúcar se toman como medida considerando $\frac{1}{4}$ de cucharada como unidad. También se puede mencionar que el elemento lingüístico “qué limonada es más dulce” indica el *concepto* de incógnita para el problema y que también indica como *procedimiento* una comparación de razones. Asimismo la frase “grado de dulzura y acidez” se considera una magnitud intensiva, estas magnitudes intensivas requieren números racionales para su representación lingüística. En nuestra tarea de la limonada la dulzura/ acidez, magnitud intensiva, es el cociente de dos magnitudes extensivas (número de cucharadas de limón/ número de cucharadas de azúcar) que indica una medida de concentración. Entre las *propiedades* presentes se puede mencionar, las cantidades de azúcar y limón están en proporción en el problema, es decir, tienen la misma constante de proporcionalidad; la comparación que se establece entre las cantidades de azúcar y de limón es parte/parte. Un elemento lingüístico importante es la expresión "…un número cualquiera de cucharadas de limón" que indica un *proceso* de generalización. Se sitúa el problema dentro la *modelización* de una situación de un problema aritmético que es posible algebrizar introduciendo una variable y reconociendo cantidades desconocidas.

En la solución 1 del ítem a), se destacan las expresiones "$\frac{3\ \ cda\ de\ azúcar}{12\ cdas\ de\ limón}$ y $\frac{5\ \ cda\ de\ azúcar}{20\ cdas\ de\ limón}$ que indica el valor numérico (racional) de las medidas del grado de dulzura de las limonadas de Juan y María respectivamente. Entre los *conceptos,* se puede señalar la razón como relación multiplicativa entre cantidades de magnitud (número de cucharadas de limón por cada cucharada de azúcar) y como cociente indicado entre dos números naturales. Como *procedimiento* se destaca la reducción a la unidad $\frac{1\ cda\ de\ azúcar}{4\ cdas\ de\ limón}$ para comparar ambas razones. Se proporciona como *argumento* ambas limonadas tienen el mismo sabor porque las razones entre el número de cucharadas de limón y el de azúcar es el mismo en ambos preparados (los grados de dulzura y acidez, medidos por las razones correspondientes, son los mismos en las dos limonadas). Por otro lado, en la solución 2 del ítem a) se identifica a la situación planteada en términos de correspondencia, los *conceptos* de variable independiente y dependiente son susceptibles de ser potenciados y se abre paso a la interpretación del problema en términos funcionales. El *elemento lingüístico* →, otorga una asignación entre las cucharadas de azúcar y las de limón e indica el *procedimiento* que guía la tabla de correspondencia en la reducción a la unidad para comparar ambas razones.

En la solución 1 del ítem b se reconoce como *procedimiento* la igualdad de razones para determinar la cuarta proporcional, emerge una cantidad desconocida que es representada por una literal y se plantea una ecuación de la forma $Ax = B$ que emerge del reconocimiento de una propiedad de las proporciones. Por otro lado, en la solución 2 del ítem b, se reconocen como elementos lingüísticos el símbolo → que asigna las cucharadas de azúcar con su correspondiente número de cucharadas de limón, este *procedimiento* de asignación conlleva implícitamente el concepto de función lineal.

En la solución 1 propuesta para el ítem c) se destaca como *procedimiento* la división del número (cualquiera) de cucharadas de zumo de limón entre 4 (que implícitamente conlleva la noción de función). Por otro lado, en la solución 2 del ítem c, se destaca como *procedimiento* la modelización funcional ($y = \frac{1}{4}x$) que implica un tratamiento para el signo igual como indicador de una relación funcional. Como *argumentos* se identifican la relación entre x e y a través de la expresión $y = \frac{1}{4}x$, porque las cantidades de azúcar y limón se relacionan proporcionalmente siendo $\frac{1}{4}$ la constante de proporcionalidad directa en donde el signo igual es un indicador de una relación funcional.

Teniendo en cuenta los objetos algebraicos identificados en la tabla 5.3 indicamos los niveles de algebrización correspondientes a las soluciones previstas para los ítems de la tarea 1.

Tabla 5.3. Niveles de algebrización asociados a las soluciones previstas de la tarea 1

	Nivel 0	**Nivel 1**	**Nivel 2**
Ítem a)	<u>Solución 1</u> Cantidades particulares Operaciones aritméticas No se diferencian propiedades de corte algebraico. ***Configuración algebraica mayoritariamente operacional***	<u>Solución 2</u> Noción de correspondencia particularizada. Reconoce propiedades de corte algebraico como la asignación uno a uno. ***Configuración algebraica mayoritariamente funcional***	
Ítem b)		<u>Solución 1</u> Se reconoce una cantidad desconocida. Se expresa la cantidad desconocida con una literal expresando una ecuación de la forma $Ax = B$. Los procedimientos son aritméticos pero se diferencian propiedades. ***Configuración algebraica mayoritariamente operacional***	

	Solución 2 Se reconoce una cantidad desconocida sin ser expresada con un símbolo o literal. Reconoce propiedades de corte algebraico como la asignación uno a uno. Noción de correspondencia. ***Configuración algebraica mayoritariamente funcional***	
Ítem c)	Solución 1 Se reconoce una regla que se expresa en lenguaje verbal. ***Configuración algebraica mayoritariamente funcional***	Solución 2 Se reconoce variables. Se expresan las variables en términos alfanuméricos. No se opera con las variables. ***Configuración algebraica mayoritariamente funcional***

Consideramos que planteamientos que conlleven un nivel 2 de algebrización resultarían difíciles para los maestros en formación, ya que suelen relacionar la proporcionalidad con el uso de la regla de 3 de forma mecánica, por lo que se espera que sus producciones se encuadren entre un nivel 0 y un nivel 1 de algebrización.

La segunda tarea de la práctica (Figura 5.2) es similar al problema del heno planteado en Cerdán (2007) y se incluyó para evaluar aspectos del conocimiento avanzado de los maestros en formación. Se pretende que el estudiante resuelva un problema de palabras que puede ser resuelto tanto de modo aritmético como algebraico.

Tarea 2: El gasto diario. Un estudiante recibió de sus padres una cierta cantidad de dinero para comer durante 40 días. Sin embargo, encontró sitios en donde pudo ahorrar 4 euros al día en la comida. De esta forma, el presupuesto inicial le duró 60 días. ¿Cuánto dinero recibió?

Figura 5.2. Tarea 2 planteada en la práctica 1

Se precisa aclarar que no es la finalidad de nuestro estudio discutir sobre la naturaleza algebraica o aritmética de este problema verbal y de ninguna de las tareas planteadas en esta investigación; para algunos autores (Puig y Cerdán, 1990) un problema es algebraico si carece de soluciones aritméticas lo que indicaría que las tareas planteadas en nuestro estudio tendrían un corte meramente aritmético. Lo que se pretende es acercar a los futuros maestros a formas de razonamiento algebraico y promover su comprensión sobre cómo determinadas características del álgebra de secundaria pueden ser accesibles para los niños de la escuela elemental.

Planteamiento de soluciones previstas para la tarea 2. En las siguientes líneas se plantean soluciones plausibles para la tarea del gasto diario. Consideramos que este tipo de problemas (aritméticos) se pueden algebrizar introduciendo una incógnita, no por el simple hecho de introducirla, sino atendiendo a determinadas propiedades implícitas en las tareas.

Tabla 5.4. Soluciones previstas para la tarea 2

Solución 1	Sea X el dinero recibido de los padres. Representamos por x el gasto diario previsto por los padres para comer 40 días. $x = \frac{X}{40}$. Sea y el gasto diario real, que permitió comer 60 días: $y = \frac{X}{60}$ $40x = 60y$; además $y = x - 4$; $40x = 60(x - 4)$; $20x = 240$; $x = 12$ Cantidad recibida: 12 ×40=480; 480€
Solución 2	El ahorro de 4€/día durante 40 días previstos supone un ahorro total de 160€. Con esta cantidad pudo comer durante 20 días más. El coste diario real fue de 160€/20 días = 8€/ día. Como los días reales fueron 60, el presupuesto total será 60 días x 8€/día = 480€.

Análisis correspondiente a la tarea 2 y sus soluciones posibles. En el enunciado de la tarea 2 se destaca el *elemento lingüistico* “recibe cierta cantidad de dinero”, que indica la condición fija del dinero recibido, un dato desconocido que evoca el *concepto* de incógnita y que permanece invariante en el problema. Otro elemento lingüístico a destacar es “cuarenta días” que representan al dato conocido en el problema. Por otro lado, la expresión “pudo ahorrar 4 euros al día” indica un cambio en el gasto diario; otro dato desconocido en el problema y que varía de acuerdo a la situación de ahorro que modifica la duración del presupuesto inicial a 60 días.

Se advierte que en la tarea 2, con la solución prevista 1, se pueden identificar *elementos lingüísticos* tales como las letras x; X representan el gasto diario ($X/40$) y la cantidad recibida respectivamente (X). La letra y indica el gasto diario para 60 días, $\frac{X}{60}$; $y = x -$

4. También se pueden mencionar como elementos lingüísticos asociados al problema, las expresiones $40x = 60y$; $y = x - 4$ que representan a un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas que es posible expresar en términos de una. Finalmente, el signo = tiene una acepción de equivalencia. Como *conceptos* podemos mencionar el uso de magnitudes (dinero), unidad de medida (euros), tasa de gasto (coste diario), sistemas de ecuaciones, las incógnitas (x, X, y). Entre los *procedimientos* destacamos la resolución de un sistema de ecuaciones. Como *propiedades* se identifican la suma de cantidad diaria es igual al total, el total inicial por 40 días ha de ser igual al total final (con ahorro) durante 60 días. Finalmente como *argumentos* destacamos que las condiciones del enunciado llevan a plantear el sistema de ecuaciones: $40x = 60y$; $y = x - 4$ y los únicos valores que satisfacen el sistema es $x = 12$; $y = 8$. Por tanto, la cantidad inicial es 480€.

En la tarea 2, con la solución prevista 2, se destaca el lenguaje métrico utilizado (número de días, coste total, coste diario,…). Como *conceptos* se encuentran las magnitudes (valor monetario de la comida; número de días); las razones (coste diario, real y previsto); las cantidades y medidas; la multiplicación como suma repetida de sumandos iguales; la sustracción y la división en su acepción de reparto. Como *procedimiento* se destacan: multiplicar, restar y dividir. Entre las *propiedades* se pueden mencionar "El coste diario real es 8€/día" y "El presupuesto inicial fue de 480€".

Nivel de algebrización asociado a las resoluciones de la tarea 2. En la tabla 5.5 se aprecia cómo las soluciones previstas se distribuyen en el nivel 0 y nivel 3 de algebrización. El nivel 1 estaría representado por situaciones que pudieran modelarse con ecuaciones de la forma $Ax = B$, mientras que el nivel 2 por ecuaciones de la forma $Ax \pm B = C$.

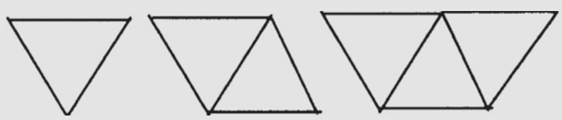
Dada la naturaleza del problema, que implica el planteamiento de una ecuación en la que se opera con la incógnita, esperamos que las producciones de los maestros en formación tengan en su mayoría un nivel cero de algebrización. La formación de los maestros de primaria en España, no se incluye tratamientos sobre el razonamiento algebraico por lo que sus conocimientos posiblemente sean de sus estudios anteriores a la universidad.

Tabla 5.5. Niveles de algebrización asociados a las soluciones previstas de la tarea 2

	Nivel 0	**Nivel 3**
Ítem a)	Solución 2 Cantidades particulares Operaciones aritméticas No se diferencian propiedades de corte algebraico. Se utiliza un lenguaje numérico y verbal ***Configuración algebraica mayoritariamente operacional***	Solución 1 Definición de incógnitas Planteamiento de ecuaciones Leguaje simbólico-literal Se diferencia propiedades que permiten operar con la incógnita ***Configuración algebraica mayoritariamente estructural***

La tercera tarea de la práctica (figura 5.3) fue tomada de Radford (2010). Se pretende que el estudiante realice un proceso de generalización para poder encontrar el número de palillos que forman la figura de la posición 100.

Tarea 3: Los palillos. a) ¿Cuántos palillos son necesarios para formar la 4ª figura?, ¿y para formar la figura que estuviera en la posición 20? b) ¿Cuántos palillos serían necesarios para construir la figura que estuviera en la posición 100?



1ª 2ª 3ª 4ª

Figura 5.3. Tarea 3 planteada en la práctica 1

Planteamiento de soluciones previstas para la tarea 3. Se distinguen dos instancias, la primera queda a un nivel concreto (Radford, 2003) y la segunda a un nivel simbólico.

Tabla 5.6. Posibles soluciones a la tarea 3

Solución 1	La figura 1 requiere 3 palillos; la 2, dos más, o sea 5; la tres, dos más que la 2, o sea 7; la cuatro requiere dos más que la 3, 9; y así sucesivamente siempre agregando 2, es decir, la diferencia entre un término y el anterior es 2 de dos palillos.
Solución 2	Si *n* indica el número de orden de la figura, el número de palillos de la figura en la posición *n* será, $P(n) = 3 + 2(n-1)$. En efecto, esta regla se cumple: si $n = 1, P(1) = 3, si\ n = 2, P(2) = 5$, etc.

Si a la figura en la posición *n* le añadimos otros dos palillos para formar la figura $P(n+1)$, el número total de palillos es, $P(n+1) = 3 + 2(n-1) + 2 = 3 + 2[(n-1) + 1] = 3 + 2[(n+1) - 1]$, luego por el principio de inducción completa la fórmula es válida para todo n natural.

Análisis correspondiente a la tarea 3 y sus soluciones previstas. En el enunciado de la tarea 3 se identifica como *elementos lingüísticos* expresiones como la secuencia de tres figuras formadas por segmentos construidos según una regla. Los cuestionamientos, ¿cuántos palillos son necesarios para formar la 4ª figura?, ¿y para formar la figura que estuviera en la posición 20?, implican la determinación de casos particulares, mientras que la pregunta, ¿cuántos palillos serían necesarios para construir la figura que estuviera en la posición 100?, conlleva un *proceso* de generalización.

Para la solución prevista 1, se destaca como *elementos lingüísticos* la secuencia ordinal de números naturales que indica el *procedimiento* de contar el número de segmentos de las figuras en la posición 1, 2, 3, y conjeturar que la diferencia entre cada dos figuras consecutivas es siempre 2. Se manifiesta el reconocimiento de una regla recursiva que indica que una acción (agregar dos palillos) que genera la colección ilimitada de figuras, se reconoce y expresa con lenguaje natural. Sin embargo, la obtención del número de palillos de la figura en la posición 20 requiere hacer la suma de los 20 términos, lo que resultará impracticable para el caso 100 o mayor.

Por otro lado, para la solución prevista 2, se indican como *elementos lingüísticos,* las notaciones, n y $P(n)$ y la expresión $P(n) = 3 + 2(n-1)$ que designan objetos genéricos. Como *conceptos* se encuentran la secuencia ilimitada de números naturales y la magnitud discreta, el número de segmentos que forma cada figura. Finalmente, como *argumentos* destacamos la inducción empírica y la inducción completa.

Nivel de algebrización asociado a las resoluciones de la tarea 3. Se aprecia en la tabla 5.7 que las soluciones se enmarcan dentro de un nivel cero y un nivel 2 de algebrización.

El nivel 1 se distingue por el reconocimiento de la regla en un lenguaje diferente al simbólico-literal (o alfanumérico), mientras que en un nivel 3 implica la manipulación simbólica para obtener formas canónicas de expresión.

Tabla 5.7. Niveles de algebrización asociados a las soluciones previstas de la tarea 3

	Nivel 0	Nivel 2
Ítem a)	Solución 2 Cantidades particulares Lenguaje natural Se diferencia una regla recursiva ***Configuración algebraica mayoritariamente operacional***	Solución 1 Designación de objetos genéricos Lenguaje simbólico-literal Generalización del patrón ***Configuración algebraica mayoritariamente funcional***

La tarea 4 (figura 5.4) fue incluida en el cuestionario del estudio de evaluación descrito en el capítulo 4 por lo que remitimos a dicho capítulo.

Tarea 4: Multiplicaciones incompletas. Completa la siguiente multiplicación y determina los números faltantes. Explica tu razonamiento.

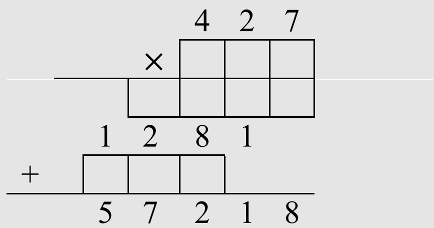


Figura 5.4. Tarea 4 planteada en la práctica 1

En la Tabla 5.8 se muestra en forma sucinta la distribución de los conocimientos implicados sobre el razonamiento algebraico y del tipo de conocimiento evaluado en cada una de las tareas.

Tabla 5.8 Conocimientos implicados en las tareas de la práctica 1

	Tarea	Ítem	Tipo de conocimiento	Conocimientos RAE implicados
Parte A	1. La limonada	a) b) c)	Común Común Avanzado	Función Generalización Modelización
	2. El gasto diario	a)	Avanzado	Ecuaciones. Problemas de palabras que potencian el uso de ecuaciones. Modelización
	3. Los palillos	a) b)	Avanzado	Pensamiento funcional. Involucra la idea sobre función, en la que se pretende generar una regla que describe una situación.
	4. Multiplicaciones incompletas	a)	Común	Pensamiento estructural. Involucra la estructura y funcionamiento del algoritmo de la multiplicación con cifras desconocidas

Parte B	Reconocimiento de objetos y significados	Especializado	Identificación de objetos matemáticos implicados en las tareas y en sus soluciones correspondientes.

La clasificación de las tareas por tipo de conocimiento se realizó teniendo en cuenta el Decreto de enseñanzas mínimas (MEC, 2006) y los Decretos de la Junta de Andalucía (Junta de Andalucía, 2007). Según estos documentos curriculares en la educación primaria no están considerados aquellos contenidos como el de función y el análisis de secuencias de figuras o planteamientos de ecuaciones que involucren operar con la incógnita, como las que se plantean en las tareas 1 (ítem c), 3 y 2, respectivamente; por esta razón se considera parte de un conocimiento avanzado del contenido.

3.1.1.2. Práctica 5: Reconocimiento de objetos algebraicos y asignación de niveles de algebrización

Durante el desarrollo del curso se planificó la realización de un total de 7 seminarios de prácticas sobre diversos contenidos matemáticos y didácticos; la práctica 5 se diseñó para promover de manera específica el reconocimiento de objetos y procesos de índole algebraica. Con la práctica 5 (Anexo 7), se pretende promover y desarrollar las competencias de análisis didáctico para discriminar niveles de algebrización en la resolución de tareas matemáticas. Por tal motivo esta práctica, además de la lectura y discusión del artículo, Godino, Aké y Gonzato (2012), incluía varias actividades a desarrollar: en un primer apartado se le solicitaba a los maestros en formación resolver 5 tareas justificando las respuestas y de ser posible, resolverla de varias formas (ítem a). En un segundo apartado se les solicitaba indicar los "objetos algebraicos" que intervienen y el nivel de algebrización que se pone en juego en la resolución; asimismo se les solicitaba que justificaran las respuestas (ítem b). Finalmente, en un tercer apartado, se les indicaba que cambiaran las variables de la tarea para aumentar (y/o disminuir) el nivel de algebrización, que resolvieran esta tarea modificada y justificara por qué cambia el nivel de algebrización (ítem c). Se pretendía así, promover la reflexión de los maestros en formación sobre la identificación y el análisis de tareas con naturaleza algebraica.

A continuación se presenta el análisis a priori que realizamos para cada una de las tareas incluidas en la práctica 5. También se describe el conocimiento que previmos manifestarían los maestros en formación al resolver dichas tareas.

El primer enunciado que incluimos en la práctica 5 (figura 5.5), fue articulado considerando las propuestas del pensamiento relacional para promover el significado del signo igual como equivalencia. Pretendíamos analizar las formas de abordar estas sentencias con las que los maestros en formación no se encuentran del todo familiarizados.

Enunciado 1: Igualdades con datos desconocidos

Determina el número que falta en cada uno de los siguientes casos:

1) $52 \times 11 = 52 \times 10 + \Delta$ 2) $\blacksquare + \blacksquare + 18 = \blacksquare + 53$

Figura 5.5. Enunciado 1 planteado en la práctica 5

En la tabla 5.9 planteamos soluciones posibles para este enunciado para cada uno de los ítems. De acuerdo a los elementos puestos en juego, se considera que la resolución de esta tarea (en su ítem a) no implicaría dificultades para los maestros en formación y podrían abordarla al menos de la primera solución posible.

Tabla 5.9. Soluciones previstas al enunciado1

ITEM A)		
Primera solución	Solución 1: Para el inciso 1) 52 por 11 son 572; del otro lado de la igualdad tenemos $52 \times 10 = 520$. A 520 le faltan 52 para sumar 572, por lo que Δ=52	 Para el inciso 2) Si ■ tuviera el valor de 18 del lado izquierdo tendríamos $18 \times 3 =$ 54, una unidad más del valor conocido en el miembro izquierdo. Por lo que ■ vale $18 \times 2 - 1 =$ 35.
Oras formas de solución	Solución 2: Para el inciso 1) Del lado izquierdo tenemos 11 veces 52, pero del lado derecho tenemos 10 veces 52 de ahí que el valor de Δ sea 52. (52 × 11 = 52 × (10+1) = 52 × 10 + 52)	 Para el inciso 2) Tanto del lado izquierdo como del derecho tenemos el mismo símbolo ■ por lo que la expresión ■+■+18=■+53 se transforma en ■+18=53; si descomponemos 53 en ■+18=35+18 entonces tenemos que ■=35

<table>
<tr><td colspan="2">ITEM B)</td></tr>
<tr><td>Objetos algebraicos Y niveles de algebrización</td><td>Solución 1 (para ambas expresiones):
Aunque en la tarea intervienen valores desconocidos estos no son expresados por el resolutor; además dicho valor desconocido se obtiene como resultado de realizar operaciones aritméticas sobre números específicos. A esta actividad matemática se le asigna un nivel 0 de algebrización, dado que no interviene ningún objeto algebraico.

Solución 2 (para ambas expresiones):
Intervienen los símbolos Δ y ■ representan un valor numérico desconocido sujeto a ciertas condiciones; también interviene el concepto de incógnita; el signo igual en las tareas planteadas es un indicador de equivalencia entre dos expresiones y las propiedades asociativa y distributiva de la multiplicación respecto de la adición.
A esta actividad matemática le asignamos un primer nivel de algebrización.</td></tr>
<tr><td colspan="2">ITEM C)</td></tr>
<tr><td>Solución</td><td>Determina el valor de cada una de las literales en cada uno de los siguientes casos:
1) $52 \times 11 = 52 \times 10 + x$ 2) $y + y + 18 = y + 53$

$572 = 520 + x$;
$x = 572 – 520$
$x = 52$

$2y + 18 = y + 53$;
$y = 35$</td></tr>
<tr><td>Justificación</td><td>En la solución del inciso 1) se advierte la noción de incógnita, el planteamiento de una ecuación de la forma $Ax \pm B = C$ y el uso de una simbología literal. Esta actividad es de nivel 2 de algebrización.

En la solución del inciso 2) interviene el planteamiento de una ecuación de la forma $Ax \pm B = Cx \pm D$, el uso de la incógnita representada de forma literal. Esta actividad es de nivel 3 de algebrización ya que se opera con la incógnita.</td></tr>
</table>

El enunciado 2 (figura 5.6) fue diseñado atendiendo al concepto de variable y de inecuación. En la formulación utilizamos en lugar de literales, símbolos por ser estos más asequibles. Al igual que en el enunciado 1, se pretendía analizar la interpretación que daban los futuros docentes a este tipo de sentencias.

Enunciado 2: La desigualdad con datos desconocidos

¿Qué valores diferentes puede tomar Δ para que la siguiente expresión sea verdadera:
■ + Δ < 20?

Figura 5.6. Enunciado 2 planteado en la práctica 5

En la tabla 5.10 planteamos soluciones posibles para este enunciado para cada uno de los ítems. Dado que la tarea involucra dos valores desconocidos sujetos a una condición, se considera que su resolución (en su ítem a) implicaría dificultades para los estudiantes en cuanto a la identificación y denotación de todos los conjuntos solución posibles.

Tabla 5.10. Soluciones previstas al enunciado 2

<table>
<tr><td colspan="2">ITEM A)</td></tr>
<tr><td>Primera solución</td><td>Solución 1:
Supongamos que ■ toma el valor de 5, la inecuación queda como 5 + Δ <20;
<table>
<tr><td>Δ</td><td>5 + Δ</td><td>Verdadero/Falso</td></tr>
<tr><td>0</td><td>5</td><td>V</td></tr>
<tr><td>1</td><td>6</td><td>V</td></tr>
<tr><td>2</td><td>7</td><td>V</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td>V</td></tr>
<tr><td>14</td><td>19</td><td>V</td></tr>
<tr><td>15</td><td>20</td><td>F</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Otras formas de solución</td><td>Solución 2:
Supongamos que ■ tiene el valor de 5, la inecuación queda como 5 + Δ < 20; $\Delta < 20 - 5 = 15$;
Δ puede tomar cualquier valor del conjunto de números naturales {0,1,2,…,14}.

Solución 3:
Podemos determinar el valor de Δ transformando la desigualdad ■ + Δ <20 en Δ <20 − ■ , así variando los valores de ■ obtendremos los valores respectivos de Δ. Si tenemos que ■ vale 1 entonces el conjunto solución de Δ= {0,1,2 ... 18}; si ■ vale 2 entonces Δ= {0,1,2 ... 17}; etc.
Para cada valor asignado a ■ se obtienen el conjunto de valores que puede tomar Δ.</td></tr>
<tr><td colspan="2">ITEM B)</td></tr>
<tr><td>Objetos algebraicos
Y niveles de algebrización</td><td>Solución prevista 1:
Interviene la idea de variable, representada simbólicamente por Δ, y el conjunto de valores (finito) que puede tomar. El conjunto solución se corresponde con un solo caso posible, cuando el valor de ■ es 5. Asignamos el nivel 0 de algebrización.

Solución prevista 2:
Se resuelve una inecuación del tipo $cx + d < p$) y se aplica la siguiente propiedad: “en una desigualdad no varía al sumar el mismo número a ambos miembros”. La solución se expresa como un conjunto de valores finitos {0,1,2,…,14}, en el caso de que ■ es 5. Asignamos el nivel 1 de algebrización por la particularización a un caso posible.</td></tr>
</table>

	Solución prevista 3: La inecuación se transforma en otra equivalente restando a ambos miembros una variable que toma valores naturales, y por tanto, aplicando una propiedad algebraica: “una desigualdad no varía al sumar el mismo valor a ambos miembros”. La solución a la función proposicional dada en la tarea se expresa como una familia de conjuntos finitos de valores: $\{0,1,2 \ldots 18\}$, $\{0,1,2 \ldots 17\}$, $\{0,1,2 \ldots 16\}, \ldots ., \{0\}$. Asignamos a esta solución un nivel 3.
ITEM C)	
Solución	¿La siguiente expresión es verdadera o falsa, $7 + 5 < 20$? Justifica la respuesta. El alumno puede hacer la operación, $7 + 5 = 12$, y decir que 12 es menor que 20. Nivel 0 de algebrización.
Justificación	No hay presencia de objetos algebraicos, se trabaja con casos particulares y operaciones aritméticas.

El enunciado 3 (figura 5.7) fue tomado de Bednarz y Guzmán (2000) y se incluyó en la práctica 5 con la finalidad de que los estudiantes pudieran resolverlo tanto de manera aritmética como de manera algebraica.

Enunciado 3: Los medios de locomoción

Para ir a la escuela los alumnos utilizan dos medios de locomoción. Por cada alumno que va en coche hay 3 que van andando. Si hay 212 alumnos en la escuela, ¿Cuántos alumnos utilizan cada medio de locomoción?

Figura 5.7. Enunciado 3 planteado en la práctica 5

En la tabla 5.11 proponemos soluciones posibles para este enunciado para cada uno de los ítems. Dada la posibilidad de plantear formas de solución tanto de corte aritmético como algebraico, se espera que los maestros en formación puedan modelizar la situación planteada, al menos de la primera forma posible.

Tabla 5.11. Soluciones previstas al enunciado3

ITEM A)	
Primera solución	Solución 1: Como 1 alumno va en coche y 3 van andando entonces 3+1 =4. Dividimos 212/4 y obtenemos 53. Ahora 212-53= 159. De este modo obtenemos que 53 alumnos van en coche y 159 a pie.

Otras formas de solución

Solución 2:
Si un alumno va en coche, resulta que 3 van andando.
Si dos alumnos van en coche, resulta que 6 van andando.

A coche	A pie
1	3
2	6
3	**9**
…	
40	120
50	**150**

Como el total de alumnos debe ser 212 tenemos que 50+150 son 200, hacen falta 12 estudiantes. En la tabla se observa que si tres alumnos van en coche entonces 9 irían a pie y esa suma da 12.
Por lo tanto 53 alumnos van en coche y 159 van pie.

Solución 3:
$x = número\ de\ alumnos\ que\ van\ en\ coche$
$3x = número\ de\ alumnos\ que\ van\ andando$

$x + 3x = 212$
$4x = 212$
$x = 53$
El número de alumnos que van en coche son 53, así el número de alumnos que van a pie es $53 \times 3 = 159$

ITEM B)

Objetos algebraicos Y niveles de algebrización

Solución prevista 1:
En esta solución se encuentran los valores que se desconocen realizando operaciones aritméticas sobre valores particulares. Se le asigna a esta actividad matemática un nivel cero de algebrización porque no interviene ningún objeto algebraico.

Solución plausible 2:
En la solución 2 planteada se usa la noción de correspondencia entre conjuntos discretos (alumnos que van en coche, alumnos que van a pie); se enumeran casos particulares y se usan dichos casos para encontrar el resultado. Intervienen la noción algebraica de "correspondencia" entre dos conjuntos y la movilización de la noción de variable independiente y dependiente.
A esta actividad matemática se le asigna un nivel 1 de algebrización.

Solución plausible 3:
En el problema intervienen dos datos desconocidos, uno se puede expresar en términos del otro. En la solución se plantea de manera simbólica una ecuación de la forma $Ax \pm B = C$ y se realizan transformaciones para resolverla. Intervienen el uso de símbolos literales para denotar los valores que se desconocen (incógnitas), el planteamiento de una ecuación y la aplicación de transformaciones que preservan la equivalencia entre expresiones para resolver la ecuación.
Es claramente una actividad de nivel 2 de algebrización

ITEM C)

Propuestas

(1) Para ir a la escuela los alumnos pueden utilizar tres medios de transporte. Hay 5 veces más alumnos que viajan a pie que aquellos que viajan en automóvil y 3 veces más alumnos que viajan en autobús que aquellos que viajan en automóvil. Si hay 468 alumnos en esta escuela, ¿cuántos alumnos utilizan cada medio de transporte?
Sea
x = nº alumnos que viajan en automóvil
y = nº alumnos que viajan a pie
z = nº alumnos que viajan en autobús
$x + y + z = 468$
Pero $5x = y;\ z = 3x$
$x + 5x + 3x = 468;\ 9x = 468;\ x = 52;\ y = 260;\ z = 156$

(2) En la escuela A, por cada alumno que va en coche hay 3 que van autobús; además 300 alumnos van andando. En la escuela B, hay el mismo número de alumnos que van en coche que en la A, pero por cada alumno que va en coche hay 4 que van en autobús; además hay 150 alumnos que van andando. Si en ambas escuelas hay el mismo número de alumnos, ¿cuántos usan cada medio de locomoción?

Sea x el número de alumnos que van en coche; el número de alumnos que viajan en autobús en la escuela A será $3x$, y en la escuela B, $4x$. Como el total de alumnos en ambas escuelas es el mismo tenemos:
$x + 3x + 300 = x + 4x + 150;\ 4x + 300 = 5x + 150;\ 5x - 4x = 300 - 150;\ x = 150.$

Alumnos que van en coche en ambas escuelas, 150; alumnos que van en autobús en la escuela A, 450 y en la escuela B, 600. El número de alumnos que van andando en cada escuela es un dato del problema, 300 en la escuela A y 150 en la escuela B.

Justificación

(1) En la resolución del problema intervienen tres datos desconocidos, dos de ellos se pueden expresar en términos del otro. Intervienen también el uso de símbolos literales para denotar los valores que se desconocen (incógnitas), el planteamiento de una ecuación y la aplicación de transformaciones que preservan la equivalencia entre expresiones para resolver la ecuación.

	Esta actividad es de un nivel 2 de algebrización, se exige al resolutor un mayor control sobre los datos que intervienen en el problema lo que implicaría un mayor nivel de dificultad, pero la ecuación planteada es de la forma $Ax \pm B = C$. (2) En este caso la solución se ha hecho planteando una ecuación con una incógnita de la forma, $Ax + B = Cx + D$. La resolución requiere operar con la incógnita por lo que el nivel de algebrización que asignamos es 3.

Con la idea de introducir conceptos más avanzados, se optó por incluir el enunciado de una tarea sobre proporcionalidad, que pone en juego el concepto de función lineal. El enunciado 4 (figura 5.8), tomado del NCTM (2000), fue introducido con esta finalidad.

Enunciado 4: El coste de los sándwiches

Si 2 sándwich cuesta 6€, ¿cómo puedes calcular el coste de 50 sándwiches?

Figura 5.8. Enunciado 4 planteado en la práctica 5

En la tabla 5.12 proponemos soluciones posibles para este enunciado para cada uno de los ítems. Dado los elementos que se ponen en juego en la resolución de la tarea (en su ítem a), se considera como una actividad que puede ser abordada satisfactoriamente por los maestros en formación.

Tabla 5.12. Soluciones previstas al enunciado 4

ITEM A)	
Primera solución	Solución 1: Como dos sándwich cuesta 6 euros entonces uno cuesta 3; por tanto 50 sándwiches costarán 150 euros ya que multiplicamos el número de sándwiches por el precio de una unidad, es decir, 50x3.
Otras formas de solución	Solución 2: Como dos sándwiches cuestan 6 euros entonces podemos establecer la siguiente correspondencia, 2 → 6 50 → x (función lineal o de proporcionalidad directa) $\frac{2}{6} = \frac{50}{x}$; En toda proporción el producto de medios es igual al producto de extremos: $2 \times x = 6 \times 50 = 300; x = 150$ Por lo tanto 50 sándwiches valen 150 euros.

Solución 3:
Si 2 sándwich vale 6 euros, entonces un sándwich vale 3 euros.

Sándwich	Costo
1	3
2	6
3	9
…	…
40	120
50	150

Por tanto, el coste de los sándwiches es de 150 euros.

ITEM B)

Objetos algebraicos
Y niveles de algebrización

Solución prevista 1:
En la solución planteada se realizan operaciones aritméticas con datos particulares para encontrar la solución. Se asocian los datos del problema con el concepto de multiplicación y así obtener un resultado. No intervienen objetos algebraicos. A esta actividad matemática se le asigna un nivel cero de algebrización.

Solución prevista 2:
En la solución se denota con un símbolo literal el valor que se desconoce y se aplica una relación de proporcionalidad directa. Intervienen el concepto de incógnita y ecuación.
Se le asigna a esta actividad matemática un nivel 1 de algebrización (interviene una ecuación de la forma $Ax = B$ que resulta de identificar que los datos cumplen una relación proporcional). Además se pone en juego la caracterización de las correspondencias de proporcionalidad directa (en esta solución, la igualdad de las dos razones).

Solución plausible 3:
En la solución planteada se propone una tabla para el registro del coste para distintas cantidades de sándwiches que se compran. Se enumeran los casos particulares y se usan dichos casos para encontrar el resultado; se halla el coeficiente de proporcionalidad (coste unitario). Intervienen la noción de "correspondencia" entre dos conjuntos y la movilización de la noción de variable independiente (número de sándwiches) y dependiente (coste).
A esta actividad matemática se le asigna un nivel 1 de algebrización.

ITEM C)

Propuestas

Si 3 sándwiches cuestan 12 euros. ¿Cómo calculamos el precio de un número cualquiera de sándwiches?

Si 3 sándwich vale 12 euros, entonces un sándwich vale 4 euros.

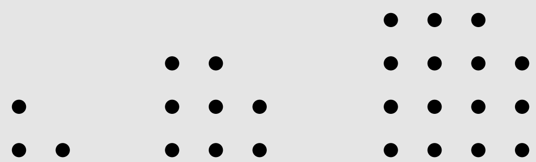
Sándwich	Costo	Observación
1	4	4(1)
2	8	4(2)
3	12	4(3)
…	…	
40	160	4(40)
50	200	4(50)
…	…	
		$f(n) = 4n$

La expresión $f(n) = 4n$ nos permite hallar el costo de un número n de sándwiches.

Justificación	En la solución interviene la noción de "correspondencia" entre dos conjuntos y la movilización de la noción de variable independiente y dependiente. La elaboración de la tabla permite observa una característica común entre los datos y se formula una regla general usando un lenguaje simbólico-literal. Es una actividad de nivel 2 de algebrización. (No se requiere operar con la variable para obtener una expresión simplificada o canónica de la regla de correspondencia)

El enunciado 5 (figura 5.9) fue introducido para promover el análisis de dos cantidades que varían simultáneamente (número de la posición, número de bolitas) e incitar a la formulación de una regla general que describa tal variación.

Enunciado 5: Secuencia de figuras
Observa las siguientes figuras:



1) ¿Cuántos puntos tiene la figura 15?

Figura 5.9. Enunciado 5 planteado en la práctica 5

En la tabla 5.13 planteamos soluciones posibles para este enunciado para cada uno de los ítems.

Tabla 5.13. Soluciones previstas al enunciado 4

ITEM A)	
Primera solución	Solución 1: La primera figura tiene $1 + (1+1) = 3$ puntos; la segunda figura tiene $2 \times 2 + 2 + 2 = 8$ puntos; la tercera, $3\times 3 + 3 + 3 = 15$ puntos; la figura 15 tendrá, $15 \times 15 + 2 \times 15 = 255$ puntos

Otras formas de solución

Solución 2:
Es posible analizar el comportamiento del patrón elaborando un registro a través de una tabla de valores.

Posición	# de puntos	Observación
1	3	$2^2 - 1$
2	8	$3^2 - 1$
3	15	$4^2 - 1$
…	…	…
10		$11^2 - 1$
15		$16^2 - 1$

De este modo la figura en la posición 15 tendrá 255 puntos.

ITEM B)

Objetos algebraicos Y niveles de algebrización

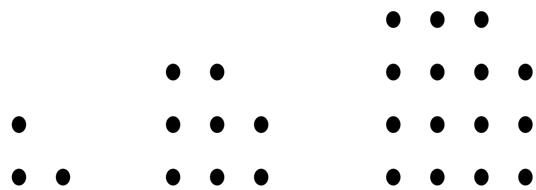
Solución 1:
Interviene una relación (correspondencia) entre dos variables, posición de la figura y número de puntos. También se halla una regla de correspondencia entre las mismas. Se utiliza lenguaje numérico y natural. Asignamos el nivel 1 de algebrización, por la presencia de dichos objetos algebraicos.

Solución 2:
En esta solución se propone una tabla para el registro del número de puntos de acuerdo a la posición de la figura. Se establece una regla de correspondencia, enumerando casos particulares pero se halla una relación común entre los datos numéricos. Interviene la noción de función y de variable (variable independiente, número de orden de la figura, y dependiente, el número de puntos)
Se le asigna un nivel 1 de algebrización dado que la relación encontrada permite encontrar el número de puntos en la posición 15.

ITEM C)

Propuestas

Observa las siguientes figuras:



¿Cómo hallamos el número de puntos que tiene la figura en una posición cualquiera?

Se podría analizar cómo cambia el número de puntos respecto a la posición de la figura usando la siguiente tabla

<table>
<tr><td></td><td>
<table>
<tr><th>Posición</th><th># de puntos</th><th>Observación</th></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td><td>$2^2 - 1$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>8</td><td>$3^2 - 1$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>15</td><td>$4^2 - 1$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>24</td><td>$5^2 - 1$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>35</td><td>$6^2 - 1$</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>10</td><td>120</td><td>$11^2 - 1$</td></tr>
<tr><td>15</td><td>255</td><td>$16^2 - 1$</td></tr>
</table>
Y encontrar que la expresión que describe tal relación es:
$f(n) = (n+1)^2 - 1$
$f(15) = (15+1)^2 - 1 = 256 - 1 = 255$
</td></tr>
<tr><td>Justificación</td><td>En esta solución se propone una tabla para el registro del número de puntos de acuerdo a la posición de la figura. Se establece una regla de correspondencia, interviene la noción de función y de variable (variable independiente, número de orden de la figura, y dependiente, el número de puntos) además se reconoce una regla general sobre el comportamiento del patrón y se expresa en un lenguaje simbólico-literal. Se asigna a esta actividad un nivel 2 de algebrización.

Cuando el estudiante es capaz de realizar transformaciones sobre la expresión hallada, es decir, pasar de la expresión $f(n) = (n+1)^2 - 1$ a la expresión $f(n) = n^2 + 2n$ entonces se ponen en juego características propias del nivel 3 de algebrización.</td></tr>
</table>

En la tabla 5.14 se muestra de manera sintética la distribución de los conocimientos implicados sobre el razonamiento algebraico y los tipos de conocimientos puestos en juego en cada una de las tareas.

Tabla 5.14. Conocimientos implicados para cada una de las tareas de la práctica 5

<table>
<tr><th>Tarea</th><th>Ítems para todas las tareas</th><th>Tipo de conocimiento</th><th>Conocimientos sobre el RAE implicados</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1. Igualdad con datos desconocidos</td><td>a) Resolver la tarea (primer aspecto del ítem a)</td><td>Conocimiento común</td><td rowspan="2">Pensamiento relacional
Signo igual como equivalencia
Ecuación
Incógnita</td></tr>
<tr><td>a) Resolver de varias formas (segundo aspecto del ítem a)
b) Identificar objetos y niveles
c) Proponer tareas</td><td>Conocimiento especializado</td></tr>
<tr><td rowspan="2">desigualdad con datos desconoc</td><td>a) Resolver la tarea (primer aspecto del ítem a)</td><td>Conocimiento común</td><td rowspan="2">Desigualdades
Inecuación
Variable</td></tr>
<tr><td>a) Resolver de varias formas (segundo aspecto del ítem a)</td><td>Conocimiento especializado</td></tr>
</table>

	b) Identificar objetos y niveles c) Proponer tareas		
3. Los medios de locomoción	a) Resolver la tarea (primer aspecto del ítem a)	Conocimiento común	Ecuaciones. Problemas de palabras que potencian el uso de ecuaciones. Modelización
	a) Resolver de varias formas (segundo aspecto del ítem a) b) Identificar objetos y niveles c) Proponer de tareas	Conocimiento especializado	
4. El coste de los sándwiches	a) Resolver la tarea (primer aspecto del ítem a)	Conocimiento común	Función Generalización Modelización
	a) Resolver de varias formas (segundo aspecto del ítem a) b) Identificar objetos y niveles c) Proponer tareas	Conocimiento especializado	
5. Secuencia de figuras	a) Resolver la tarea (primer aspecto del ítem a)	Conocimiento avanzado	Pensamiento funcional. Involucra la idea sobre función, en la que se pretende generar un patrón que describe una situación.
	a) Resolver de varias formas (segundo aspecto del ítem a) b) Identificar objetos y niveles c) Proponer tareas	Conocimiento especializado	

Es importante mencionar que para la designación del tipo de conocimiento se realizó con base a los documentos curriculares tal y como se realizó con las tareas incluidas en la práctica 1. Las tarea 1 queda enmarcada dentro de la propuesta del pensamiento relacional, la tarea 2 sobre desigualdades utilizando símbolos, son actividades que no se contempla de manera explícita como parte del currículo; sin embargo, decidimos situar este tipo de tareas como parte del conocimiento común dada su naturaleza y a las diversas propuestas curriculares (NTCM, TTIMSS, CCSS[1]) que la introducen en los grados elementales.

3.1.1.3. Tarea diseñada como prueba sumativa

La tarea que se incluyó en el examen final (sobre números triangulares) a resolver de manera individual por cada estudiante, versa sobre reconocimiento de patrones. Pretende dar cuenta de los conocimientos finales adquiridos por los maestros en formación a los largo del proceso formativo aplicándolos a la resolución de una tarea, que queda enmarcada dentro de los patrones. La figura 5.10 incluye en el enunciado de

[1] TIMSS: Trends in International Mathematics and Science Study
CCSS: Common Core State Standards

la tarea. Está formada por 5 ítems, el apartado a) se podría plantear para que lo resolvieran niños de primaria, por lo que podemos considerarlo como de conocimiento común, mientras que el apartado b), que requiere un proceso de generalización sería más propio de niveles más avanzados. Los apartados c), d) y e), involucran conocimientos especializados.

Observa la siguiente figura, y contesta:

```
                                   ⊙
                     ⊙            ⊙⊙
      ⊙             ⊙⊙           ⊙⊙⊙
```

a) ¿Cuántas bolitas tendrán las figuras de la cuarta y quinta posición?
b) ¿Cuántas bolitas hay en la posición 100?
c) ¿Qué objetos algebraicos intervienen en la resolución?
d) ¿Qué nivel de algebrización le asignarías?
e) Indica algunas variables que se puedan cambiar en esta tarea para aumentar el nivel de algebrización?

Figura 5.10. Tarea incluida en el examen final

Seguidamente incluimos las soluciones esperadas a los distintos ítems de la tarea del examen final, esto se reporta en la tabla 5.15.

Tabla 5.15. Previsión de posibles soluciones para la tarea final

<table>
<tr>
<td>Ítem a)</td>
<td>
De la posición 1 a la posición 2, aumentan 2 bolitas.
De la posición 2 a la posición 3, aumentan 3 bolitas.
De la posición 3 a la posición 4, aumentan 4 bolitas.
<table>
<tr><th>Posición</th><th># bolitas</th><th>Lo que se suma</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>+1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>+2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>6</td><td>+3</td></tr>
<tr><td>4</td><td>10</td><td>+4</td></tr>
<tr><td>5</td><td>15</td><td>+5</td></tr>
</table>
La posición 4 tendrá 10 bolitas
La posición 5 tendrá 15 bolitas
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td>Ítem b)</td><td>Para la posición 100 tendríamos:
<table>
<tr><th>Posición</th><th># bolitas</th><th>Lo que se suma</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>+1</td></tr>
<tr><td>5</td><td>15</td><td>+5</td></tr>
<tr><td>6</td><td>21</td><td>+6</td></tr>
<tr><td>…</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>n</td><td></td><td>$n-1$</td></tr>
<tr><td>$n+1$</td><td></td><td>$(n-1)+1=n$</td></tr>
</table>
La regla que se genera es $\frac{n(n+1)}{2}$, así el número de bolitas para la posición 100 es de 5050</td></tr>
<tr><td>Ítem c)</td><td>En la solución intervienen objetos algebraicos como el de función, variable independiente, variable dependiente.</td></tr>
<tr><td>Ítem d)</td><td>La actividad involucra un nivel 2 de algebrización</td></tr>
<tr><td>Ítem e)</td><td>La tarea tiene una exigencia amplia para los niños de la educación primaria. El llegar a una expresión que utilice símbolos implica un nivel intermedio. Para elevar ese nivel se tendría que operar con la incógnita, esto podría suscitarse si los estudiantes articularan diferentes expresiones que el profesor podría aprovechar para indicar una equivalencia entre las mismas.</td></tr>
</table>

3.1.2. Adaptación del contenido matemático a desarrollar al currículo establecido

Como se ha mencionado con anterioridad durante la planificación del proceso formativo se diseñaron diferentes actividades que se pretendían implementar en diferentes momentos del curso. El razonamiento algebraico elemental se pretendía imbricar en los contenidos de la asignatura obligatoria “Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la Educación Primaria” impartida en el segundo cuatrimestre del segundo curso, con un total de 6 créditos.

En primer lugar, las prácticas relativas al RAE que se diseñaron se pretendían incorporar con las otras seis prácticas diseñadas para esta asignatura, tal como se muestra en la tabla 5.16 que se presenta a continuación:

Tabla 5.16. Breve descripción de las prácticas diseñadas

	Modo
Práctica 1: Las matemáticas como una actividad de resolución de problemas. Esta práctica consta de 2 momentos. En un primer momento se pretende que los maestros en formación resuelvan 4 tareas relacionadas con el razonamiento algebraico de manera individual. Posteriormente se les pide para cada uno de los problemas, realizar un análisis de dicha solución.	Individual
Práctica 2: Comparación y análisis de estándares curriculares. Se les solicita a los maestros en formación que lean diferentes documentos curriculares: Decreto de enseñanzas mínimas (MEC), CCSS (Common Core State Standards) y TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) y que realicen un análisis sobre los contenidos que presentan.	Grupal
Práctica 3: Diseño de pruebas de evaluación. Sentido Espacial: Visualización de objetos tridimensionales. Se solicita a los maestros en formación resolver 2 ítems relacionados con la visualización. También se les pide elaborar una lista de posibles dificultades de los niños en las actividades propuestas y proponer una nueva tarea de geometría tridimensional, que ponga en juego la visualización.	Grupal
Práctica 4: Análisis de un cuestionario sobre probabilidad y respuestas de los estudiantes. En un primer momento se les solicita a los maestros en formación resolver una serie de tareas relacionadas con el azar y la probabilidad de manera individual. En un segundo momento se les solicita que a partir de las respuestas dadas al trabajo en la fase individual indiquen cuál o cuáles de las posibles respuestas dadas son correctas y cuáles incorrectas; en este segundo momento se pretende trabajar de modo grupal. Para cada una de las respuestas incorrectas señalar las posibles intuiciones o estrategias incorrectas que han llevado a los estudiantes a esa respuesta. También se les solicita indicar el contenido matemático que tienen que usar los alumnos para dar la respuesta correcta y elaborar una lista de los materiales que han aparecido en el cuestionario y que se pueden utilizar para trabajar con la probabilidad, además de las bolas en urnas y los dados.	Individual y grupal
Práctica 5: Álgebra en educación primaria. Se solicita a los maestros en formación resolver 5 tareas, analizarlas y clasificar las posibles soluciones según su nivel de algebrización. Se pretende que los maestros en formación conozcan las características del razonamiento algebraico elemental y orientaciones sobre su inclusión en el currículo de educación primaria. También se pide que elaboren tareas matemáticas escolares que permitan desarrollar el razonamiento algebraico en los alumnos de educación primaria.	Individual

Práctica 6: Enseñanza de la medida de longitudes. Análisis de experiencias de enseñanza de las matemáticas. En la fase individual se les proporciona a los maestros en formación un Anexo sobre "*La medida en el ciclo medio"* (N. Brousseau), se les solicita que describan diversas actividades de enseñanza de la medida directa de longitudes y la forma en que la resuelven los alumnos. Se pide, en la fase de trabajo personal, realizar una lectura detallada de este documento y responder a diversas cuestiones. En la fase grupal se les solicita entre otras cosas la valoración de la idoneidad didáctica sobre el estudio de la medición en la escuela.	Individual y grupal
Práctica 7: Estadística en Primaria En la fase individual se pide a los maestros en formación entre otras consignas realizar el experimento del lanzamiento de una moneda. En la fase grupal se les solicita analizar los contenidos sobre tratamiento de la información, estadística y probabilidad que se proponen para la educación primaria en el Decreto de enseñanzas mínimas (MEC). También estudiar la "Pauta de análisis de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática" entregada en clase y aplicarla a la programación de una "unidad didáctica sobre tratamiento de la información" propuesta para valorar su idoneidad didáctica.	Individual y grupal

Las siete prácticas se planificaron para su implementación en diferentes momentos a lo largo del curso y de acuerdo al contenido teórico programado para la asignatura, el cual se muestra en la tabla 5.17:

Tabla 5.17. Contenido teórico de la asignatura

TEMA 1: Matemáticas, cultura y sociedad
Parte 1
1.1 ¿Qué son las matemáticas?
- 1.1.1 Concepciones sobre las matemáticas
- 1.1.2 Actividad práctica. Encuesta sobre creencias previas.
- 1.1.3 Actividad práctica. Resolución de problemas matemáticos
- 1.1.4 La importancia social y cultural de las matemáticas

1.2 Las matemáticas en el sistema educativo
1.3 Los fines de la educación matemática
Parte 2
1.4 Características de las matemáticas
- 1.4.1 Rasgos característicos de las matemáticas (actividad, lenguaje y sistema organizado de conocimientos)
- 1.4.2 Objetos y procesos matemáticos

1.5 Institucionalización y transposición didáctica

TEMA 2: Sentido matemático
2.1 Fines y objetivos de la matemática escolar
2.2 Características del sentido matemático

2.3 Sentido numérico
2.4 Sentido algebraico
2.5 Sentido espacial y geométrico
2.6 Sentido estadístico

TEMA 3: Aprendizaje de las matemáticas
3.1 Nociones de competencia y comprensión
3.2 Dificultades, errores y obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas
3.3 Evaluación del aprendizaje matemático
  3.3.1 Fines de la evaluación
  3.3.2 Criterios de evaluación
  3.3.3 Instrumentos de evaluación
  3.3.4 Estándares de evaluación del NCTM

TEMA 4: Enseñanza de las matemáticas y recursos didácticos
Parte 1
4.1 El papel del profesor de matemáticas
  4.1.1 Enseñanza de las matemáticas. Supuestos básicos
4.2 Enseñanza mediante resolución de problemas
  4.2.1 Situaciones de acción
  4.2.2 Teoría de situaciones didácticas
4.3 Normas sociomatemáticas
  4.3.1 Contrato didáctico
4.4 Metodología de enseñanza de las matemáticas, técnicas y estrategias docentes
  4.4.1 Estándares sobre la enseñanza de las matemáticas (Tareas, discurso del profesor y de los estudiantes, entorno y análisis)
4.5 Actividades y tareas matemáticas, variables de la tarea y sus tipos
  4.5.1 Tareas y situaciones didácticas
  4.5.2 Variables que influyen en la solución de un problema
Parte 2
4.6 El papel de los materiales y recursos
  4.6.1 Tipos de recursos y su importancia
    4.6.1.1 Libros de texto y apuntes. Funciones del material visual
    4.6.1.2 Material manipulativo: grafico/textual y tangible
  4.6.2 Materiales en la actividad de modelización
  4.6.3 Tecnología (Calculadora, hoja de cálculo, ordenadores, software didáctico, recursos didácticos, video)

El contenido de la asignatura cuenta también con un temario práctico a desarrollar sobre los siguientes temas:

1. Conocimiento matemático en educación primaria.
2. Análisis del currículo de matemáticas de Educación primaria.
3. Resolución de problemas en matemáticas y en educación matemática
4. Identificación, organización y clasificación de errores y dificultades en pruebas de escolares de Educación Primaria.
5. Análisis, selección y diseño de tareas matemáticas, sus variables y conocimientos puestos en juego.

Como se aprecia, en el contenido oficial del curso no hay un tema relativo al razonamiento algebraico; el apartado 2.4 del tema 2 fue incluido en la guía didáctica del curso que impartía el profesor. Se pretendía que el profesor adaptara el temario teórico distribuido en los distintos núcleos temáticos, aritmética, geometría, medida, estadística y probabilidad desarrollados durante todo el cuatrimestre, para destacar aspectos relevantes del razonamiento algebraico, en los momentos que según su juicio eran pertinentes. De este modo, a medida en que el profesor lograra integrar el RAE en los contenidos del curso se podría considerar éste como un tema transversal respecto a los restantes bloques de contenido.

3.1.3. Conexiones intra e interdisciplinares del contenido matemático a desarrollar

Actualmente el razonamiento algebraico es un tema que pretende ser incluido como uno de los 5 bloques de contenido junto con números y operaciones, geometría, medida, análisis de datos y probabilidad, tal como lo plantea el NTCM (2000). Sin embargo, no sólo se precisa caracterizar el álgebra y el razonamiento algebraico en los niveles elementales, sino también, caracterizar sus rasgos más primitivos para su identificación en los diferentes bloques de contenido desarrollados en la escuela primaria. En este sentido se reconoce que el razonamiento algebraico es posible desarrollarlo desde diferentes temáticas como es la geometría, los números y operaciones, etc., temáticas que son abordables en la educación primaria, como por ejemplo la siguiente actividad:

¿Cuál es el ancho del rectángulo B, para que la siguiente relación entre áreas sea verdadera?:

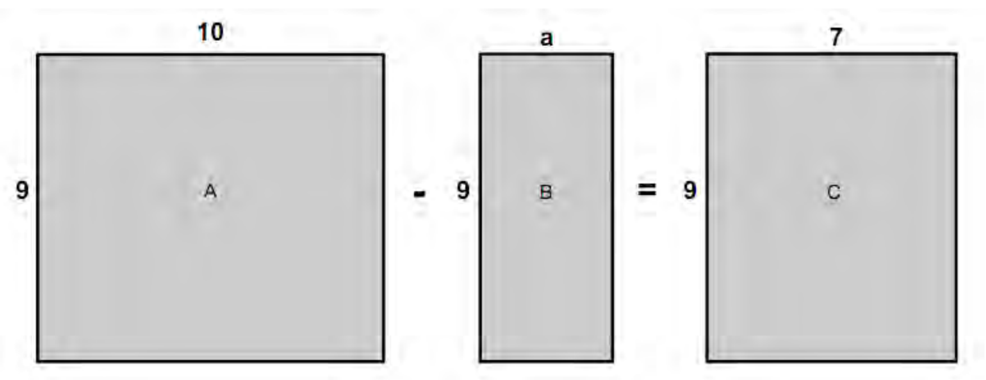


Figura 5.11. Interpretación geométrica de la expresión $9(10 - a) = 63$.

Se reconoce la longitud (de los lados del rectángulo) y el área (de los rectángulos) como magnitudes y se hace uso de representaciones geométricas para interpretar $9(10 - a) = 63$.

3.2. SUBTRAYECTORIA INTERACCIONAL Y MEDIACIONAL

En la fase de diseño que estamos describiendo la subtrayectoria interaccional-mediacional da cuenta de la distribución temporal de los contenidos, los recursos (tales como libros, software etc.) y de las acciones que se pretende que desempeñen los maestros en formación y el docente, así como la programación de cada una de las acciones e intervenciones a realizar en el aula.

3.2.1. Temporalización y recursos materiales

La asignatura "Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Primaria", alrededor de la cual se diseñó el proceso formativo sobre desarrollo del sentido algebraico, contaba con la organización temporal siguiente:

Tabla 5.18. Programación planificada de las sesiones

Sesión	Duración	Contenido a desarrollar
Primera sesión a la semana	2 horas teóricas	Temario teórico
Segunda sesión a la semana	1 hora práctica	Temario práctico

Como se aprecia en la tabla anterior a la semana se tenían 2 sesiones; una sesión teórica en la que se distribuían contenidos esencialmente teóricos (aunque algunas actividades prácticas se iniciaban o finalizaban durante las "sesiones teóricas", particularmente la presentación y discusión colectiva de los informes elaborados por los equipos) y una sesión práctica en la que se abordaba el temario práctico. La asignatura contaba en total con 150 horas que integraba horas presenciales y no presenciales. Los recursos materiales previamente establecidos con los que se contaba eran las prácticas diseñadas para el curso completo, además del material visual (diapositivas) previamente organizadas.

3.2.2. Criterios de evaluación

La evaluación de los conocimientos sobre el RAE quedó imbricada en el enfoque de evaluación propuesto para la asignatura en la guía docente. Por lo tanto, los contenidos a integrar sobre el RAE en el temario teórico-práctico, se evaluaron de acuerdo a los parámetros de evaluación establecidos por el Departamento. Los estudiantes tenían pleno conocimiento sobre que la resolución de las prácticas y diversas actividades en el aula puntuaban en su evaluación y calificación final.

De acuerdo al objetivo de "desarrollar progresivamente el razonamiento algebraico en los maestros en formación a través de la realización de actividades matemáticas basadas en situaciones-problema que impliquen razonamiento algebraico", en la evaluación se tuvo en cuenta,

- El análisis y valoración de las pruebas escritas, en concreto de aquellas actividades diseñadas para el desarrollo del razonamiento algebraico elemental.
- El análisis y valoración de las intervenciones realizadas por el profesor en el aula de clase sobre el contenido matemático en cuestión.

3.2.3. Formas de interacción docente-discente previstas

De acuerdo con la metodología descrita en la Guía docente del curso el profesor debe integrar diversas estrategias para promover la participación activa de los estudiantes para la construcción de su propio aprendizaje y enfatizar la interacción social en la construcción del conocimiento. Además de poner un tratamiento equilibrado de los diferentes temas de la teoría y la práctica, el docente debe complementarlas con tutorías individuales y en pequeños grupos.

Respecto a la incorporación del RAE en el contenido de la asignatura se espera que el profesor, de acuerdo a su conocimiento del curso y a su experiencia en el aula, integre, relacione y destaque los rasgos algebraicos del contenido durante sus intervenciones teóricas y las puestas en común de la resolución de las actividades.

Por su parte los estudiantes estarán comprometidos con la realización de todas y cada una de las actividades previstas para el curso, tanto individual como grupal. Tener una actitud participativa tanto para la presentación de cada una de las actividades ante el profesor como para la puesta en común de las soluciones. Además de tener disposición para el trabajo colaborativo para con sus compañeros en las actividades grupales.

3.2.4. Procedimiento a seguir en el aula

A continuación se describen las intervenciones claves que fueron previstas durante el desarrollo de las clases en el aula y que se concretan en la aplicación de las prácticas 1 y 5 (específicas del razonamiento algebraico elemental). En la figura 5.12 se muestra el modo de abordar previsto para cada una de las prácticas sobre razonamiento algebraico diseñadas y que anteriormente se han descrito, que son los momentos claves en donde se concentra el estudio de la noción de "Niveles de algebrización".

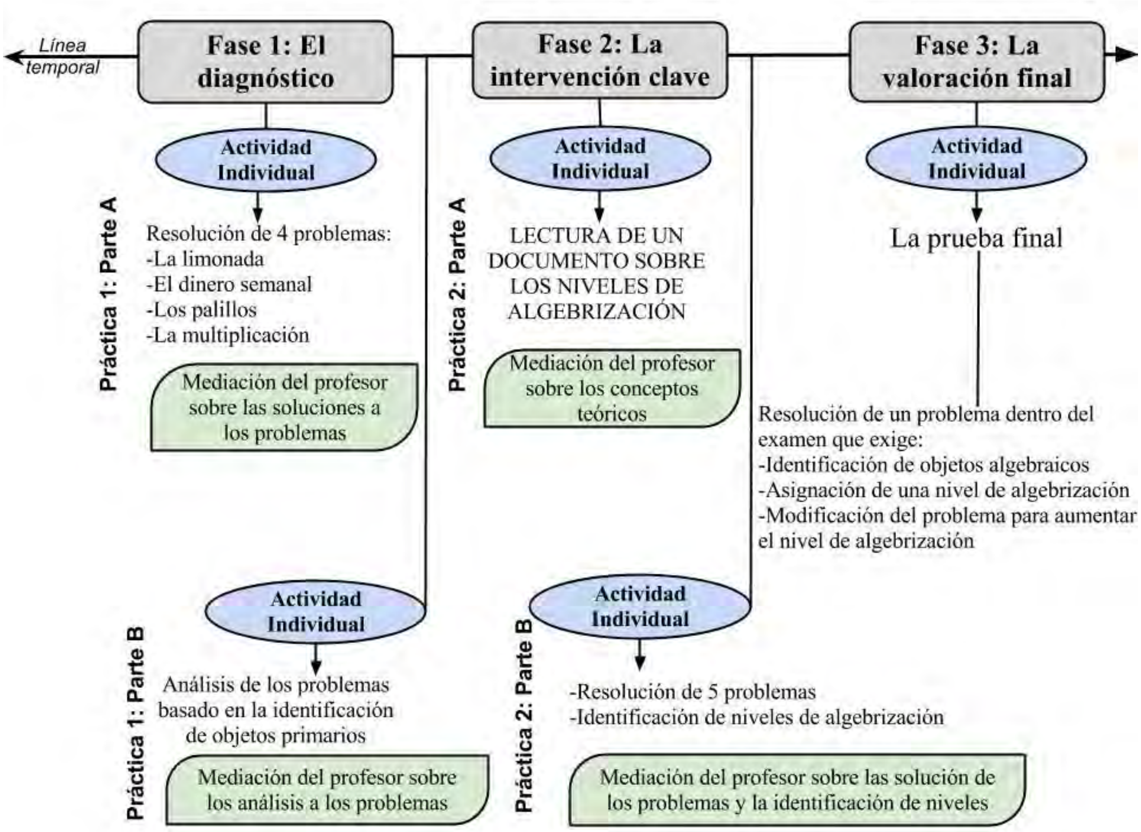


Figura 5.12. Secuencia de actividades planificadas sobre el razonamiento algebraico

La aplicación de esta práctica 1 se planificó a modo individual y en una sesión de clase. Como parte de este primer cuestionario, en un segundo momento se pretendía que los estudiantes analizaran sus respuestas identificando los objetos matemáticos que pusieron en juego en sus resoluciones. Esta práctica 1, como instrumento diseñado para recoger evidencias en relación con los conocimientos iniciales de los estudiantes, pretendía aplicarse antes de iniciar con las actividades instruccionales sobre RAE.

Posteriormente se planificó abordar y estudiar el material de apoyo: "Contenidos y actividades algebraicas en educación primaria" (Anexo 8), documento adaptado para los maestros. Con esto se pretendía instruir a los futuros docentes sobre la identificación de "niveles de algebrización" identificando "actividades proto-algebraicas". Ligado a este análisis y reflexión del documento consecuentemente se planificó implementar una segunda práctica a modo individual e integrado por 5 tareas referidas al razonamiento algebraico. Por último, en la evaluación final del curso se incluyó una tarea específica sobre el reconocimiento y análisis de patrones.

De manera general el trabajo en el aula se prevé desarrollarlo de la siguiente manera: las intervenciones del profesor sobre las cuestiones teóricas que fundamentan la práctica, la intervención de los estudiantes sobre las actividades que se proponen para los distintos temas programados para el curso y el trabajo colaborativo profesor-alumno, alumno-alumno.

Durante cada una de las sesiones, para recoger información sobre la interacción en el aula se grabaron las sesiones en audio, y se complementó con la toma de notas. En este sentido se contó con las observaciones participantes del profesor-investigador y la observación no participante del investigador novel. También se recogieron muestras del trabajo escrito realizado durante las sesiones de clases.

3.3. SUBTRAYECTORIA COGNITIVA Y AFECTIVA

En la subtrayectoria cognitiva-afectiva de la trayectoria didáctica planificada se contemplan aspectos de los conocimientos previos de los estudiantes respecto al razonamiento algebraico y se hacen explícitas las expectativas de aprendizaje que se pretenden alcanzar. También se describen las actitudes, errores y dificultades de los maestros en formación hacia el razonamiento algebraico de las cuales hubiera información en las investigaciones previas.

3.3.1. Los sujetos

Es importante destacar que la muestra sobre la que se decidió incidir se escogió en un muestreo no probabilístico (León y Montero, 2003). La elección fue de tipo incidental y, por lo tanto no aleatoria. La experiencia de enseñanza se planificó realizar con un grupo de clase (63 estudiantes). No obstante, la práctica 1 (Resolución de problemas) fue realizada en condiciones similares por otros dos grupos teniendo, por tanto, información de un total de 184 estudiantes, como se indica en la tabla 5.19.

Tabla 5.19. Alumnos inscritos al curso

	Alumnos		
Grupo	Mujeres	Hombres	Total
2A	35	28	63
2C	42	21	63
2G	28	30	58

Los futuros maestros cursaban el segundo año de estudios y se encontraban en el segundo cuatrimestre del curso.

3.3.2. Conocimientos previos de los maestros en formación sobre el razonamiento algebraico

Hablar de conocimientos previos sobre razonamiento algebraico en el ámbito de la formación de maestros de la escuela elemental es un tema complejo. La mayoría de los profesores de la escuela primaria tienen poca experiencia con los aspectos del razonamiento algebraico, de hecho, se precisa promover formas apropiadas de apoyo profesional que produzcan cambios en las prácticas curriculares (Blanton y Kaput, 2005), lo cual implica un reto para los formadores. Este hecho quedó constatado en el capítulo 4 de esta memoria en donde se evaluó los conocimientos sobre el razonamiento algebraico de maestros en formación en cuyo plan de estudios se contemplaba la enseñanza y aprendizaje del álgebra. Los resultados de dicha evaluación sugieren en general que los estudiantes abordan las tareas manifestando raramente el uso de propiedades y relaciones.

En el caso particular de los maestros en formación sobre los cuales se implementó el proceso formativo tenían como conocimientos previos los contenidos desarrollados en la asignatura “Bases matemáticas para la educación primaria”. En esta materia no se trabajan de manera explícita contenidos que tengan relación con el razonamiento algebraico elemental. De hecho, es importante señalar que el plan de estudios de los maestros de primaria no contempla una asignatura relativa al álgebra y su enseñanza y/o aprendizaje, ni de algún otro contenido relacionado con el razonamiento algebraico. Sin embargo, pese a esta limitación de los significados personales iniciales de los maestros en formación consideramos que la implementación y logro de los significados pretendidos es un reto aceptable.

3.3.3. Expectativas de aprendizaje previstas para los maestros en formación

Con el proceso formativo se pretendían alcanzar las siguientes expectativas de aprendizaje en los alumnos:

EA1: Demostrar comprensión y dominio sobre la nueva visión del razonamiento algebraico entendiéndose que es posible desarrollarlo a través de actividades que no parecieran algebraicas a simple vista.

EA2: Identificar niveles de algebrización según la presencia de objetos matemáticos de índole algebraica presentes en la actividad matemática.

EA3: Realizar diferentes propuestas de soluciones a una tarea con diferentes niveles de algebrización.

3.3.4. Errores y dificultades de los maestros en formación hacia el razonamiento algebraico

Las competencias matemáticas de los maestros de primaria y sus creencias acerca de las matemáticas tienen impacto en la manera como enseñan a sus estudiantes. En este aspecto, Stephens (2008) señala que "las concepciones de los maestros en formación sobre el álgebra son bastantes reducidas; su atención se concentra en el álgebra como manipulación simbólica" (p. 45); esto podría ser reflejado en las aulas y ser el origen de múltiples dificultades para los aprendices.

De acuerdo con Kieran (1989, 1992) las dificultades de aprendizaje de los estudiantes están centradas en el significado de las letras, el cambio de las convenciones aritméticas a las algebraicas y en el reconocimiento y uso de su estructura. Algunos de estos problemas son ampliados por los enfoques de enseñanza: a menudo el carácter estructural del algebra es poco enfatizado, ya que las interpretaciones procedimentales parecen ser más accesibles para los niños. Por otro lado, Sfard y Linchevsky (Sfard, 1991; Sfard y Lichevsky, 1994) sugieren que los problemas encontrados en el aprendizaje del algebra pueden ser en parte atribuidos a la naturaleza de los conceptos algebraicos. De acuerdo con Sfard (1991) hay dos caminos fundamentalmente diferentes para concebir las nociones matemáticas: operacional (como procesos) y estructural (como objetos). Los estudiantes luchan por adquirir una concepción estructural del álgebra, que es fundamentalmente diferente de una perspectiva aritmética.

Para ilustrar la concepción operacional, Sfard y Linchevsky (1994) explican que una expresión como $3(x+5)+1$ puede ser vista como una descripción de un proceso computacional. Esto es una secuencia de instrucciones: suma 5 para obtener un número exacto, multiplicar el resultado por 3 y a esto sumarle 1. Desde otra perspectiva, la expresión puede ser vista como el producto de la computación representando un número exacto (el cual en este momento no puede ser especificado). Y en otra perspectiva $3(x+5)+1$ puede comportarse como una función; en lugar de representar un número fijo, esto es, refleja un cambio. Sin embargo, la mayoría de las veces las expresiones algebraicas son vistas como una cadena sin sentido de símbolos. Estos conceptos (como secuencia de instrucciones, como resultado de un cómputo, como una función y una cadena de símbolos) reflejan una comprensión estructural del álgebra y según estos autores estas cuatro diferentes nociones de expresiones algebraicas representan diferentes fases en el aprendizaje individual del álgebra.

En el caso de los estudiantes sobre los cuales se implementó el proceso formativo, se espera que presenten algunas de las dificultades planteadas anteriormente y además manifiesten una concepción operacional.

4. DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LA IMPLEMENTACIÓN DEL PROCESO FORMATIVO

En este apartado describimos con detalle la implementación del diseño instruccional, fijando la atención en los contenidos algebraicos efectivamente introducidos, tanto en las actividades prácticas diseñadas como las explicaciones dadas por el profesor en las sesiones de la clases teóricas. Dado que los estudiantes no han recibido anteriormente formación sobre las características del RAE, la práctica 1 tiene un carácter de evaluación inicial, y fue realizada por tres grupos de clase (un total de 184 estudiantes); la práctica específica sobre RAE (práctica 5), con énfasis en la identificación de niveles de algebrización fue realizada solo en el grupo A. Asimismo, hemos observado la introducción de nociones algebraicas en las sesiones de teoría del grupo (un total de 27 sesiones en la que la investigadora actuó como observadora no participante).

Centramos la atención en el modo en que los estudiantes resuelven cada una de las tareas planteadas a lo largo del proceso de instrucción. Para el análisis de las respuestas hemos definido variables cuantitativas y cualitativas (Anexos 9, 10 y 11) que se codificaron numéricamente y se introdujeron para su análisis en el software Statgraphics.

Nuestro segundo foco de análisis fue el desarrollo de las clases impartidas a lo largo del cuatrimestre. Para el análisis de estas sesiones se subdividieron las clases en configuraciones didácticas que conforman la trayectoria del proceso formativo respecto al RAE. El criterio básico de determinación de cada configuración estuvo guiado por la manifestación, durante las clases, de características del sentido algebraico.

Para el análisis de la implementación del proceso formativo fijamos la atención sucesivamente en las seis subtrayectorias que Godino, Contreras y Font (2006) proponen para el análisis de los procesos de instrucción matemática: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional, las cuales fueron descritas en el marco teórico de la investigación (capítulo 2).

4.1. SUBTRAYECTORIA EPISTÉMICA Y ECOLÓGICA IMPLEMENTADA

En la subtrayectoria epistémica-ecológica se ponen de manifiesto los componentes del significado institucional del contenido matemático efectivamente implementado. Se destaca que no existieron modificaciones en las tareas planteadas en las prácticas, ni en la tarea que se planeó incluir en el examen final para los maestros en formación. Por tanto dicho contenido se desarrolló tal cual fue previsto. Se describirá con detalle los contenidos que el profesor destacó durante las clases y que se corresponden con el RAE.

4.1.1. Contenido matemático efectivamente desarrollado

Las prácticas 1 (resolución de problemas) y la práctica 5 (álgebra en educación primaria) se desarrollaron según se habían planificado. Hay que destacar, no obstante, que tras la realización de cada práctica y después que los estudiantes entregaran los informes escritos solicitados, el profesor organizó una sesión de discusión colectiva de las soluciones dadas, lo que dio oportunidad de sistematizar los conocimientos de tipo algebraico pretendidos. Por tanto, los contenidos algebraicos implementados concuerdan con los descritos en el análisis a priori de las tareas (Secciones 3.1.1.1 y 3.1.1.2 de este capítulo). Queda por describir los contenidos efectivamente implementados en las clases de teoría por el profesor. Estos contenidos son sintetizados en la tabla 5.20 donde se incluye un resumen de la trayectoria epistémica implementada; se distinguen 16 configuraciones didácticas en el conjunto de las 27 sesiones de clase impartidas y observadas. El Anexo 4 contiene la crónica narrativa del desarrollo de las 27 sesiones con detalle de las intervenciones del profesor y de los estudiantes.

Tabla 5.20. Resumen de la trayectoria epistémica implementada

Configuración didáctica	Prácticas/Tareas	Objetos Algebraicos	Procesos Algebraicos
1. Resolución de la primera práctica. Parte A	Tarea 1. La limonada Tarea 2. El gasto diario	Sistema de ecuaciones, incógnitas	Generalización
2. Resolución de la primera práctica. Parte A	Tarea 3. Los palillos Tarea 4. La multiplicación incompleta	Patrón, valor faltante	
3. La generalización y el lenguaje como características del álgebra.	Se plantea un problema: *Ocho estudiantes pesan un objeto, obteniendo los siguientes valores: 6,2; 6,6; 6,3; 6,1; 6,23; 6,15; 6,2. ¿Cuál es la mejor estimación del peso del objeto?* Se reflexiona sobre: $\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$	Generalización	Generalización
4. Resolución de la práctica 1. Parte B	Análisis de las 4 tareas de la práctica. Se distingue entre lenguajes, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos y se habla sobre aquellos de índole algebraica.	Identificación de objetos matemáticos	Ninguno
5. Reflexión, discusión y análisis (de objetos y significados) de la práctica 1: problema 1.	Se destaca el apartado c de la tarea 1: *¿Cuántas cucharadas de azúcar se debe poner para un número cualquiera de cuchadas de limón?* Se reflexiona sobre: La generalización Actividades más o menos algebrizadas Uso y no uso de notación simbólica	La literal x para designar un valor desconocido Generalización La función lineal Variable dependiente Variable independiente	Generalización
6. Reflexión discusión y análisis de un problema:	*El problema de los patos: en un estanque había 56 patos. Primero se echaron a volar 12 patos, después 15 y finalmente 4. ¿Cuántos patos quedaron en el estanque? ¿Cuántos se echaron a volar en total?* A través del problema se reflexiona sobre el lenguaje: Lengua natural, Numérico, Simbólico-literal, gestual.	Registros de representación: el lenguaje simbólico	Representación
7. Reflexión, discusión y análisis de problemas:	Se retoma el problema de la limonada: *El problema de la limonada* *El problema de los patrones: Al disponer puntos en el plano*	Patrón Razonamiento inductivo	Generalización

	en forma cuadrangular y contar el número total de éstos en cada uno de los cuadrados, obtenemos los llamados "números cuadrados: 1, 4, 9, 16, ... ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ⊛ ⊛ ⊛ ⊛ ■ ■ ■ ■ ■ ⊛ ⊛ ⊛ ⊛⊛ ■ ■ ■ ⊛ ⊛ ⊛⊛⊛ ⊛ Se plantea otro problema: *¿Podrías escribir los primeros 10 números cuadrados? Llamaremos C_n al número cuadrado cuya base está formada por n puntos ¿Puedes encontrar una expresión general para C_n?*	Generalización	
8. Reflexión, discusión y análisis (de objetos y significados) de la práctica 1: problema 2.	Se reflexiona sobre Los diferentes usos del lenguaje Las actividades algebrizadas	Incógnita Ecuación	Institucionalización
9. Reflexión, discusión y análisis (de objetos y significados) de la práctica 1: problemas 3 y 4	Se destaca: La articulación de una regla El uso de propiedades	Variable Función	Institucionalización
10. Reflexión sobre los objetos y procesos algebraicos	Objetos y procesos algebraicos como pautas de análisis para las tareas y actividades.	Generalización	Institucionalización
11. Reflexión sobre el álgebra	¿Qué es el álgebra? ¿Qué es la generalización?	Generalización	Generalización Lenguaje
12. Explicación teórica sobre el sentido algebraico	**Características del sentido algebraico** **Niveles de algebrización** **Guía de lectura para el estudiante**	Nociones sobre niveles de algebrización y actividad protoalgebraica	Generalización Lenguaje

13. Resolución de la quinta práctica.	Enunciado 1. Igualdades con datos desconocidos Enunciado 2. Desigualdad con datos desconocidos Enunciado 3. Los medios de locomoción Enunciado 4. Los sándwiches Enunciado 5. Secuencia de figuras.	Equivalencia Desigualdad Incógnita Variable	Generalización Lenguaje Indeterminación
14. Reflexión, discusión y análisis (de objetos y significados) de la práctica 5	Los diferentes usos del lenguaje Las actividades algebrizadas	Equivalencia Desigualdad Incógnita Variable	Institucionalización
15. Análisis de un episodio de clase	Reflexión sobre un episodio de clase *Se supone que M es un número natural de tres cifras y que S es otro número natural de dos cifras. ¿Qué valores pueden tomar M y S si se cumple la relación M – S = 3?* *Se supone que M es un número natural de tres cifras, que S es un número natural de dos cifras y que D es un número natural de una cifra. ¿Qué valores pueden tomar M, S y D si se cumple la relación M – S = D?* *¿Qué números reales, x, y, z, cumplen la relación x – y =z?* *¿Qué números hay que escribir en las celdas si se desea continuar con el mismo patrón?* Finalmente se analiza: *¿Qué números se pueden poner en los espacios en blanco para que la diferencia sea 3? ¿Cuántas soluciones hay?* − = 3	Generalización Variables del problema/Tarea	Generalización
16. Resolución de una tarea evaluativa	Resolución de un problema en la evaluación final Análisis de un patrón ⊙ ⊙ ⊙⊙ ⊙ ⊙⊙ ⊙⊙⊙	Generalización	Generalización

A continuación, en el siguiente apartado, destacamos algunas configuraciones por su contenido epistémico significativo para el desarrollo del RAE.

4.1.1.1. Explicaciones del profesor sobre el RAE en el desarrollo de las clases teóricas

Incluimos en este apartado algunas explicaciones sobre características del razonamiento algebraico que el profesor introdujo en el desarrollo de sesiones de clase de teoría, las cuales consideramos como "hechos didáctico significativos".

Configuración didáctica 3:

Profesor: Estamos diciendo que las nociones matemáticas, las teorías matemáticas vienen de los problemas. El siguiente problema nos ayuda a entender esto:

> ***El problema del peso**. Ocho estudiantes pesan un objeto, obteniendo los siguientes valores: 6,2; 6, 6; 6,3; 6,1; 6,23; 6,15; 6,2 ¿Cuál es la mejor estimación del peso del objeto?*

Profesor: Bueno, advertimos cómo ante una situación de este tipo a las personas se les ocurre hacer cosas. Uno pensó en coger el que más se repite […] otro dice, yo sumo todos los registros y divido entre el total de los mismos; esto nos daría la media aritmética. Algún otro pudo haber dicho, por qué no ordeno de mayor a menor y cojo el que está en el centro, es decir, la mediana y ese podría ser el más representativo. Entonces vemos cómo ante este tipo de problemas hay diferentes maneras de abordarlo y esas diferentes maneras de resolver un problema dan lugar a distintos objetos matemáticos. Ha salido la moda, el valor que más se repite; la media aritmética y la mediana que son objetos matemáticos que han surgido para dar respuesta a diversos problemas. Bueno, una solución puede ser esta:

> ***El problema del peso**. Ocho estudiantes pesan un objeto, obteniendo los siguientes valores: 6,2; 6, 6; 6,3; 6,1; 6,23; 6,15; 6,2 ¿Cuál es la mejor estimación del peso del objeto?*
> *Solución:*
> *(6,2+6+6+6,3+6,1+6,23+6,15+6,2)/8= 6,1475*
> *Generalización:*

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_1 + \cdots + x_1}{n}$$

Se observa cómo a través del problema de la estimación del peso el profesor introduce el concepto de generalización y el uso de lenguajes específicos como características importantes de la matemática.

Profesor: Ahora qué pasa si en vez de ser ocho estudiantes se pesan 15, 20, rápidamente esa técnica de promediar se nos ocurre que puede valer no para un caso particular sino para casos generales, es decir, una característica importante de la matemática es la tendencia a generalizar. Generalizar definiciones, reglas y procedimientos. Este procedimiento de sumar números y dividir por el número de sumandos nos lleva a una definición general de ese objeto que llamamos media. Fijaros también que otra característica importante de la matemática es el uso de lenguajes, en este caso estamos utilizando un lenguaje. El lenguaje matemático es un lenguaje que articula y mezcla varios lenguajes: un lenguaje natural o lenguaje ordinario usado al enunciar los problemas, pero también hay otros más específicos, los lenguajes numéricos.

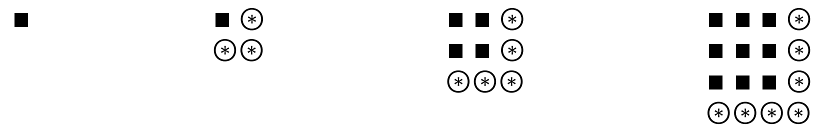
Profesor: Para lograr la generalización de las definiciones y de las técnicas hacen falta unos modos de expresión, registros de representación que son las letras. Si yo quiero expresar o representar de una manera general una situación es usual utilizar un modo de representación que vamos a llamar simbólico-literal. Por ejemplo, aquí ponemos x con barra *($\bar{x}$),* sabemos que es la media, pero la media de cualquier conjunto de datos, la media en general, $\frac{x_1 + x_1 + \cdots + x_1}{n}$; qué representa $\boldsymbol{x_1}$ **,** es cualquier valor numérico, genérico, ya no es un valor específico… $\boldsymbol{x_2}$ un número cualquiera y así etc., etc. Entonces una característica de la matemática es la tendencia a generalizar y el uso de notaciones, escrituras simbólico-literal.

[…]

Durante la siguiente hora, el profesor retoma los problemas que los estudiantes resolvieron previamente de modo individual. Posteriormente solicita a los estudiantes discutir en equipo las soluciones que han elaborado individualmente (fase personal) y elaborar una solución colectiva, la que sea más completa y que luego realicen un análisis, para ello se les proporciona una tabla que les da cierta pauta. Los estudiantes comienzan a trabajar en el primer problema de la limonada. A través de este problema se introducen nociones teóricas que ayudan al análisis.

Configuración didáctica 7

El profesor les propone a los maestros en formación una actividad relacionada con los patrones y el razonamiento inductivo.

> ***El problema de los patrones**. Al disponer puntos en el plano en forma cuadrangular y contar el número total de éstos en cada uno de los cuadrados, obtenemos los llamados "números cuadrados": 1, 4, 9, 16, ...*
>
> 
>
> *a) ¿Podrías escribir los primeros 10 números cuadrados?*
> *b) Llamaremos C_n al número cuadrado cuya base está formada por n puntos ¿Puedes encontrar una expresión general para C_n ?*

Profesor: En ese tipo de razonamiento estas pasando de 4 casos particulares que siguen una regla y a continuación puedes hacer un tipo de razonamiento inductivo […] estas induciendo una regla general. Pero, ¿qué garantiza que esa regla se cumple para cualquier caso? ¿Cómo sabemos que esa regla es válida para cualquier n?, ¿Cómo podríamos comprobarlo?

Supongamos que la regla sea cierta para n, qué pasaría con el caso siguiente, $n+1$. Habría que ir a la figura, ¿Cuántos se han añadido? Es decir, que si suponemos que sea verdadera para n… tendrías n^2 para la siguiente figura tendrías que añadir $n+\ n+1$, es decir $2n+1$…tendrías n^2+2n+1 o que es lo mismo $(n+1)^2$.

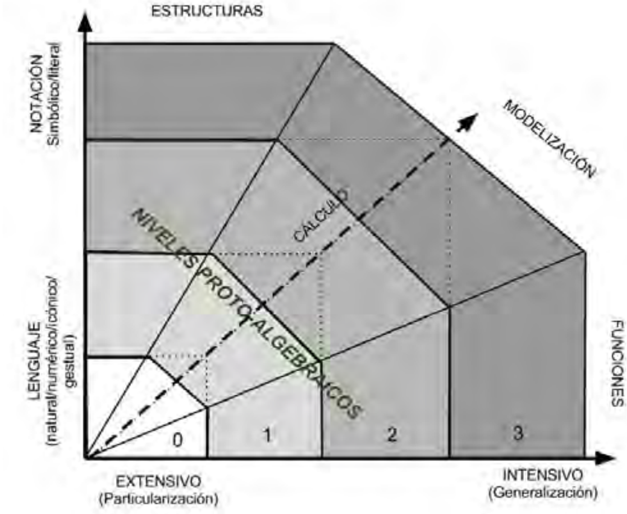
Configuración didáctica 12 (Sentido algebraico):

Profesor: Vamos a ver algunas ideas sobre lo que puede ser esto del sentido algebraico. En el Decreto de Enseñanzas Mínimas del Ministerio no aparece expectativas relativas al algebra. Sin embargo, si aparece explícitamente como un bloque temático en los Estándares americanos. Vamos a hacer algunas reflexiones sobre el razonamiento algebraico en los estándares americanos y esto del algebra en primaria. Aquí hemos elaborado siguiendo la misma línea de los otros bloques temáticos, que sería una capacidad para,

- Usar de manera sistemática símbolos para expresar cantidades indeterminadas y generalizaciones, especialmente mediante notaciones simbólico-literales.
- Reconocer y aplicar propiedades estructurales de los sistemas matemáticos, particularmente propiedades de las operaciones y relaciones.
- Reconocer patrones, regularidades y funciones

- Modelizar situaciones matemáticas o del mundo real con expresiones simbólico-literales y operar de manera sintáctica (siguiendo reglas) con ellas, para obtener una respuesta interpretable en la situación dada.

En este gráfico queremos expresar cuales son los ejes, los rasgos característicos de este sentido algebraico y como puede haber como grados.



Hay como 3 ejes aquí: El lenguaje. Lo que caracteriza al álgebra es el uso de notaciones, pero no precisamente se tiene que usar letras. La idea de lo particular y lo general […] siempre que hay una regla general va a aumentar el nivel e algebrización. Ahora, el cálculo se puede hacer con números particulares, o con cosas más generales. También hay tipos de tareas que se refieren al uso de estructuras algebraicas y operaciones […] funciones o patrones […] también se encuentra la modelización. Aquí hemos indicado que hay unos tipos de actividades sin ninguna algebrización y un nivel más claro, un nivel 3 de algebrización y entre esos dos niveles podríamos distinguir unos niveles intermedios. Más adelante haremos una práctica para ejercitar esto.

Configuración didáctica 15 (Análisis de un episodio de clases)

El profesor desarrolla el concepto de generalización a través del problema siguiente:

> ***Problema 1****. Se supone que M es un número natural de 3 cifras y que S es otro número natural de 2 cifras ¿Qué valores pueden tomar M y S si se cumple la relación $M - S = 3$?*
>
> Solución: $S = M - 3$; si $M = 100, S = 97$; $M = 101, S = 98$; $M = 102$, $S = 99$. Estas son las únicas soluciones ya que si M tomara un valor superior a 103, S debería ser 100 y no sería de dos cifras.

Análisis: Se trata de una ecuación de dos variables y, por tanto, no tiene solución única. En realidad se plantea una “familia de ecuaciones”. Para cada valor que se de a una de las incógnitas se tiene una ecuación que admite una solución única. La relación entre M y S es funcional: $S = M - 3$. En este caso M actúa como variable independiente (toma los valores 100, 101 y 102) y S como variable dependiente (toma los valores 97, 98 y 99).

Posteriormente el profesor ejemplifica cómo cambiando las variables del problema 1 se obtienen otros sobre los cuales es posible movilizar otro tipo de objetos matemáticos.

Problema 2. *Se supone que M es un número natural de tres cifras, que S es un número natural de dos cifras y que D es un número natural de una cifra. ¿Qué valores pueden tomar M, S y D si se cumple la relación $M - S = D$?*

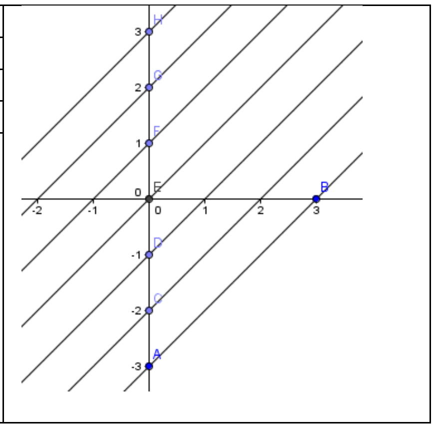
Solución:

D	M	S = M – D
1	100	99
2	100	98
	101	99
3	100	97
	101	98
	102	99
..	..	..
9	100	91
	101	92
	…	…
	108	99

Problema 3. *¿Qué números reales, x, y, z, cumplen la relación $x - y = z$?*

Solución: La relación se establece entre tres variables. Si se da un valor particular a z, por ejemplo, z = 1, se tiene una función entre las otras dos variables: $y = x - 1$. Para cada valor que se asigne a z se tiene una función diferente. Por tanto, la relación (1) define una familia de funciones, dependiente de un parámetro z.

z	*y = x - z*
1	y = x -1
2	y = x - 2
k	y = x - k



Problema 4. *¿Qué números hay que escribir en las celdas si se desea continuar con el mismo patrón?*

10	11	12	13	…	50	51	…
13	14	15	16		¿?	¿?	…

Relacionado a este problema se muestra a los estudiantes un episodio de una clase investigativa grabada en video realizada en Japón. En dicha clase los niños trabajan en la solución del siguiente problema:

> ***Problema 5***. *¿Qué números se pueden poner en los espacios en blanco para que la diferencia sea 3? ¿Cuántas soluciones hay?* $\square\square\square - \square\square = 3$

La introducción de este episodio de clase fue la pauta para desarrollar el concepto de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y realizar un análisis didáctico de la clase investigativa.

En el siguiente apartado describimos con detalle el desarrollo de la configuración 14 por ser la discusión colectiva de los trabajos realizados por los distintos equipos como solución de la práctica 5 (álgebra en educación primaria) resaltando las intervenciones del profesor. Se pone especial énfasis en esta configuración a razón de que promueve la identificación de objetos algebraicos y de niveles de algebrización.

4.1.1.2. Presentación y discusión de las soluciones a las tareas de la práctica 5 (Configuración didáctica 14)

Profesor: Vamos a centrarnos en el primer enunciado. ¿Cómo lo habéis interpretado? ¿Qué habéis hecho? El enunciado dice: Determina el número que falta para cada uno de los siguientes casos. Las consignas son proporcionar soluciones posibles, determinar qué objetos algebraicos se ponen en juego y qué nivel podemos asignar.

El profesor elije a un estudiante para que escriba su solución en la pizarra. El estudiante escribe lo siguiente:

$$52 \times (10+1) = 52 \times 10 + \Delta$$
$$(52 \times 10) + (52 \times 1) = 52 \times 10 + \Delta$$
$$(52 \times 1) = \Delta$$
$$\Delta = 52$$

Profesor: Bueno, cuéntanos, ¿cómo estás pensado este primer método? (el estudiante dice: "Si, hemos descompuesto 52×11, que sería $52 \times (10+1)$. Luego lo hemos separado y el primer miembro quedaría de esta manera" -señala la sentencia en la pizarra-) […] Bueno, has aplicado una propiedad, la propiedad ¿cómo se llama esa propiedad? (el alumno responde: "asociativa", el profesor responde que no) […] ¿Cómo se llama esa propiedad? (pregunta el profesor a la clase en general; los estudiantes contestan, distributiva)

Profesor: Bien, es la propiedad distributiva del producto respecto de la suma. Ahora, qué más has hecho (el alumno dice: "Lo que hemos hecho es agrupar, unir, digamos la misma estructura y lo que está sumando, pasaría restando") […] Entonces, tú reconoces que en los dos miembros hay un mismo número 52×10, luego dices que lo que está aquí lo puedo pasar restando cambiando el signo, bueno, esto es una propiedad algebraica. En realidad, esa idea de lo que está en un miembro lo paso del otro lado cambiándolo de signo, significa resto a los dos miembros de la igualdad el mismo número 52×10 y acontinuación se suprime en los dos miembros, eso es cancelar en ambos miembros de la ecuación lo mismo. Se trata de una propiedad algebraica. Entonces en esa solución hay algo de álgebra o es pura aritmética, ¿qué habéis pensado? (el alumno responde: "pues en este método sí") […] Ponme el otro método.

El alumno escribe en la pizarra lo siguiente:

$$52 \times 11 = 572$$
$$52 \times 10 = 520$$
$$572 - 520 = 52$$
$$\Delta = 52$$

Profesor: Bien, que tipo de objetos algebraicos habéis identificado en un caso y en otro. ¿Hay algo de algebra en ese primer método? ¿Qué habéis dicho? (el alumno responde: "nosotros hemos puesto que sería la simbología") […] Claro, hay un símbolo para expresar un número desconocido. Haber, cuando tu descompones 11= 10+ 1 ¿qué pasa?, ¿qué hay? (el alumno responde: "¿es una propiedad?")

Profesor: En realidad la descomposición del 11 en 10 + 1 es pura aritmética. Ahora, sin embargo, cuando tú ya aplicas la propiedad distributiva, es una propiedad de la operación que usualmente se considera algebraica. Ahora, cuando pasas ese término al otro miembro, estas aplicando también una propiedad, al restar una igualdad, es decir, estas entendiendo la igualdad como una equivalencia de expresiones, esta expresión es equivalente a esta (señala la pizarra). Entonces, si yo le quito a una expresión, en ambos miembros, el mismo término, esto sería otra propiedad de tipo algebraica. ¿De acuerdo? Entonces, ¿qué nivel asignamos? (el alumno responde: "hemos asignado un nivel incipiente).

Profesor: Si, un nivel incipiente, un nivel 1, porque hay algo de pensamiento algebraico. En el otro caso, ¿qué pasa? (el alumno responde: "Este caso es mucho más simple, no se utiliza ninguna propiedad")

Profesor: En la segunda solución es solo números particulares operaciones de sumar, multiplicar, entonces no hay objetos algebraicos, por lo cual diríamos que ahí no hay algebra, ¿están conformes? ¿Habéis coincido? Fijaros que la idea de asignar un nivel nos ayuda a pensar en indicios de algebra, pero no es algo rígido, es decir, los niveles no son como escalones discretos. Quizás la idea de asignar números es un poco rígida: 0, 1, 2, 3, mejor un nivel incipiente, consolidado, intermedio, pues da un poco la idea de graduación y deja de lado lo rígido. Y del segundo, ¿que habéis hecho? Haber otra compañera de tu equipo que salga y nos lo explique. Cómo lo habéis pensado. Escribe lo que habéis hecho.

El estudiante escribe en la pizarra lo siguiente:

$$x + x + 18 = x + 53$$
$$2x + 18 = x + 53$$
$$x = 53 - 18$$
$$x = 35$$

Profesor: Fijaros que el cuadradito y la x podría ser lo mismo, solo que están más acostumbrados, están más cómodos cuando ponemos letras. Bueno, esa solución esta como muy algebrizada, ¿verdad? Escribid su segunda solución:

El estudiante escribe: $\blacksquare + \blacksquare - \blacksquare = 53 - 18$

$$\blacksquare = 35$$

Profesor: ¿Hay alguna diferencia entre los dos métodos? Haber, en esas dos soluciones, ¿qué tipo de objetos habéis reconocido en cada una de ellas? ¿Hay alguna diferencia entre los dos métodos en cuanto a los tipos de objetos que aparecen ahí? (el alumno dice: "los objetos son la simbología, igualar el primer miembro con el segundo")

Profesor: Es el mismo trabajo, ¿no? Entonces, ¿qué nivel le asignamos a esto? Nivel 1, ¿no? Es decir, fijaros que en este primer caso estamos operando con la incógnita de cierta manera, aquí tenemos una ecuación de la forma $Ax + B = Cx + D$, entonces si veis en los criterios que hemos dado por ahí, en este caso, cuando planteas una ecuación como $Ax + B = Cx + D$ para encontrar el valor de x tú tienes que operar con la incógnita; entonces, eso ya supone un nivel de algebrización bastante alto, consolidado, por lo que aquí asignaríamos un valor 3. Y el otro método es prácticamente lo mismo.

Profesor: Pasemos al segundo ejercicio. Necesito un voluntario que quiera salir a explicar su solución. Haber ustedes, ¿han trabajado el ejercicio segundo? ¿Podéis ponerlo en la pizarra?

El alumno escribe en la pizarra lo siguiente:

$\blacksquare + 18 < 20 \quad \blacksquare < 20 - 18$
$\blacksquare + 17 < 20 \quad \blacksquare < 20 - 17$
$\blacksquare + 16 < 20 \quad \blacksquare < 20 - 16$
$\ldots$
$\blacksquare + 1 < 20 \quad \blacksquare < 20 - 1$

Profesor: Tú dices a Delta le voy a dar los valores de 18, 17, 16,.. etc. y ahora ¿cuánto vale el cuadrado en cada caso? En el primero, entonces debe ser menor que 2, es decir que cuadradito puede ser o cero o uno. ¿Habéis previsto otra solución diferente? (el alumno responde que no y el profesor designa a un integrante de otro equipo).

El estudiante escribe,

$\blacksquare = 3; \blacksquare = 9$
$x + 3 < 20\ ; \quad x < 17$
$x + 3 < 20\ ; \quad x < 11$

Profesor: A ver, ustedes, ¿habéis identificado aquí algún tipo de objetos algebraico, que pueda indicar que aquí hay algo de algebra o no hay algo de álgebra? Se tiene una inecuación con 2 datos desconocidos. Entonces, ¿cómo se está resolviendo?, tú le das valores y a continuación ¿qué has hecho para encontrar el valor de la otra? (El alumno responde: “Despejar”) [...] A ver, ¿quién ha hecho algo similar a esto? y ¿qué nivel le ha asignado?

Profesor: Si se le dan valores particulares y si están haciendo operaciones aritméticas, aunque en realidad la sola presencia de símbolos para indicar un número desconocido, si se prosigue en dar valores a esos símbolos, sencillamente haciendo operaciones aritméticas sin aplicar alguna propiedad de tipo algebraico, esto quedaría en un nivel cero, es puramente aritmético. Entonces, aquí ya hay una cierta diferencia, no porque hayáis puesto una literal en lugar de cuadradito, sea una x, no. Aunque bueno, también es verdad que le das un valor particular, pero empiezas a dar una solución general, x es menor que 17, das un intervalo, un conjunto de valores, entonces aquí hay un poquito de más algebra que allá, con lo cual en este caso podemos decir que hay un nivel 1 de algebrización. ¿Qué opináis? ¿Bien? Lo dejamos así.

Profesor: Vamos a pasar al siguiente ejemplo, sentaros. Un equipo que quiera salir a exponer el enunciado 3. A ver, ustedes. Explícanos, ¿qué has hecho?, ¿has dado más de una solución?

El estudiante coloca una de sus soluciones:

Por cada alumno que va en coche, hay 3 que van andando.
Total=212 alumnos
1 coche; 3 andando
25% coche; 75% andando
25% de 212= 53 alumnos en coche
75% de 212= 159 alumnos andando

Profesor: En esta actividad matemática, ¿hay algo de algebra ahí? (el alumno contesta: "no") […] Nivel cero, bien. ¿Qué otra solución habéis previsto?

El estudiante escribe:

$x =$ Alumnos en coche
$y =$ Alumnos andando

$x + y = 212$
$y = 3x$
$x + y = 212; 4x = 212$
$x = \frac{212}{4}; x = 53$
$y = 3(53)$
$y = 159$

Profesor: Bueno, ¿qué objetos algebraicos habéis previsto aquí y qué nivel le asignaríamos? (el alumno contesta: "hay incógnitas") […] en tu caso hay dos incógnitas y ahí en realidad hay un sistema de ecuaciones. ¿De qué tipo de ecuación se trata?, mira que es de la forma $Ax + B = C$. Haber, ¿qué nivel de algebrización tiene este? Evidentemente está muy algebrizado (el alumno responde: "tiene un nivel 3) […]

bueno, yo también le asignaría un nivel 3, con base en que planteas un sistema de ecuaciones con dos incógnitas y empiezas a manipularlas. Haber, si un alumno se salta este paso, porque en realidad el sistema de ecuaciones no habría porque plantearlo, se puede iniciar con una sola ecuación, se puede decir, bueno x es el número de los que van en coche más los que van andando que es, $x + 3x = 212$, evidentemente uno puede pensar así, por lo que de acuerdo con los criterios que hemos dado, uno no opera con la incógnita, porque no se encuentra en ambos miembros de la igualdad. No es lo mismo una ecuación de la forma $Ax + B = Cx + D$ en donde movilizo la igualdad como equivalencia, en el sentido de que se tiene que despejar la x. A este tipo de ecuaciones en las que las x están en los dos miembros y tengo que operar con ella y pasar de un miembro a otro, es el que le hemos asignado el nivel 3. De modo que si un alumno plantea directamente la ecuación $x + 3x = 212$ pues responde al criterio del nivel 2. Lo que pasa es que como tú planteas dos incógnitas, esto me hace pensar en un nivel más elevado, un nivel 3, esto indica que los niveles no es una cuestión rígida. Todo depende de la actividad matemática que hace el alumno.

Profesor: Pasemos al siguiente problema. A ver, ustedes, un integrante pase a poner sus soluciones.

El estudiante escribe en la pizarra todas las soluciones.

A

6/2=3

B)

2 → 6
50 → x

$$50 \times 3 = 150$$
$$50 \times 6 = \frac{300}{2} = 150$$

C)

n	$y = n \times 3$
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15

$$y = 50 \times 3 = 150$$

Profesor: Vamos a comentar las soluciones. En la primera solución, ¿hay algo de álgebra ahí? Nada, nivel cero. En la segunda solución, ¿qué habéis previsto? Veamos, ¿qué hay ahí de algebra?, poca cosa. Has puesto una x, pero esa x no tiene ninguna funcionalidad, en ese procedimiento aplicas una rutina. Esto indica que la presencia de un símbolo, de una x por sí sola no implica álgebra tiene que haber propiedades. Veamos la siguiente solución para este enunciado (el estudiante responde: "Hemos hecho una tabla de valores, es como una función") […] Vale, tú has encontrado una regla y a continuación la aplicas. Ahora bien, en esta solución ¿qué álgebra hay? ¿Qué objetos algebraicos hay? (el alumno contesta: "Hemos puesto que es de nivel 2 porque obtuvimos una regla general y la aplicamos") […]

Profesor: El hecho de poner una tabla con una variable independiente (número de sándwich n), esta n es una variable. Aquí hay otra variable que es una variable dependiente. Aparece la idea de función y la habéis expresado en símbolos: $y = n \times 3$, por lo que su asignación de nivel está bien, hay una función, una relación de correspondencia, aunque claro, el problema no te exige operar para obtener una expresión canónica, por lo cual, en efecto, es de un nivel 2. Vamos a pasar entonces al ejercicio 5. Otro voluntario.

El integrante de otro equipo explica sus soluciones, una de ellas era observando relaciones entre las figuras dadas y llegando a una expresión como:$(n+1)^2 - 1$ y otra fue ir añadiendo bolitas para formar las figuras hasta la posición 15.

Profesor: Bueno, planteas 2 soluciones. En la primera han añadidos los puntitos, han dibujado las figuras; la tercera figura tiene cuatro en la base y la altura menos una en la esquina. Aquí, ¿hay algún tipo de álgebra? ¿Qué algebra hay y que nivel le asignarías? (Los integrantes del equipo responden que pertenece a un nivel 2) […]. De acuerdo, hay que encontrar una regla general para cualquier n, pero no se trabaja con esa fórmula, no se simplifica para obtener una expresión canónica, por lo tanto es de nivel 2.

Resumidamente se aprecia que las intervenciones del profesor ponen de manifiesto el carácter algebraico de las actividades incluidas en el temario teórico, en la medida de lo posible. Se advierte que al inicio se invierte más tiempo en las tareas, pero conforme se avanza a lo largo de la sesión, cada tarea se aborda de una manera más breve. Se destaca que el desarrollo de temáticas como sentido numérico, sentido de la medida, sentido espacial y sentido estocástico fue utilizado para introducir el *sentido algebraico,* un punto clave del proceso formativo.

4.2. SUBTRAYECTORIA INTERACCIONAL Y MEDIACIONAL

La subtrayectoria interaccional-mediacional en esta fase de implementación da cuenta de la metodología llevada en el aula, es decir, de los recursos tecnológicos, materiales escritos usados y, además, también informa de las acciones e interacciones que desempeñaron efectivamente los estudiantes y el docente.

4.2.1. Temporalización efectuada

La asignatura "Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Primaria", alrededor de la cual se diseñó el proceso de instrucción, tuvo la organización temporal indicada en la tabla 5.21 durante la implementación:

Tabla 5.21. Organización de la asignatura efectivamente implementada

Sesión	Duración	Contenido a desarrollar	Organización
Primera sesión a la semana	2 horas teóricas	Teórico- práctico	El profesor optó por dividir esta sesión en una hora práctica y una teórica, en lugar de orientar la clase sólo a contenidos teóricos. Se trabaja con los 52 estudiantes.
Segunda sesión a la semana	1 hora práctica	Teórico-práctico	El profesor divide al grupo en 3 subgrupos. Se trabaja con cada subgrupo durante una hora.

Como se aprecia en la tabla anterior cada sesión tenía una duración y organización diferente, debido a que el profesor modificó la naturaleza (teórica, práctica) de cada sesión según el desarrollo de los contenidos, intercalándolos según fuese necesario. Los recursos materiales y el enfoque evaluativo previsto para los alumnos se mantuvo de igual manera que en el diseño.

4.2.2. Procedimiento seguido en el aula

Durante la implementación del proceso de instrucción el tema sobre razonamiento algebraico se introdujo con ciertos cambios los cuales se indican en la figura 5.13. La aplicación de la práctica 1 se desarrolló de forma diferente a la planificación realizada. En la primera fase la aplicación de la práctica 1 prevista de modo individual por cuestiones del tiempo académico, se modificó a grupal en la segunda parte referente a los análisis basados en la identificación de objetos y procesos. Además la parte A, la aplicación de las 4 tareas, se realizó en dos sesiones, es decir, en una sesión de clase los estudiantes resolvieron 2 tareas y, en una sesión posterior se resolvieron las 2 restantes.

Por otro lado, la fase intermedia (práctica 5) sufrió los mismos cambios que la fase 1 respecto al tratamiento individual, en este caso la parte B de la práctica 5 se realizó de manera grupal. Finalmente la fase 3 no sufrió cambio alguno en su organización (ver también figura 5.1 del diseño).

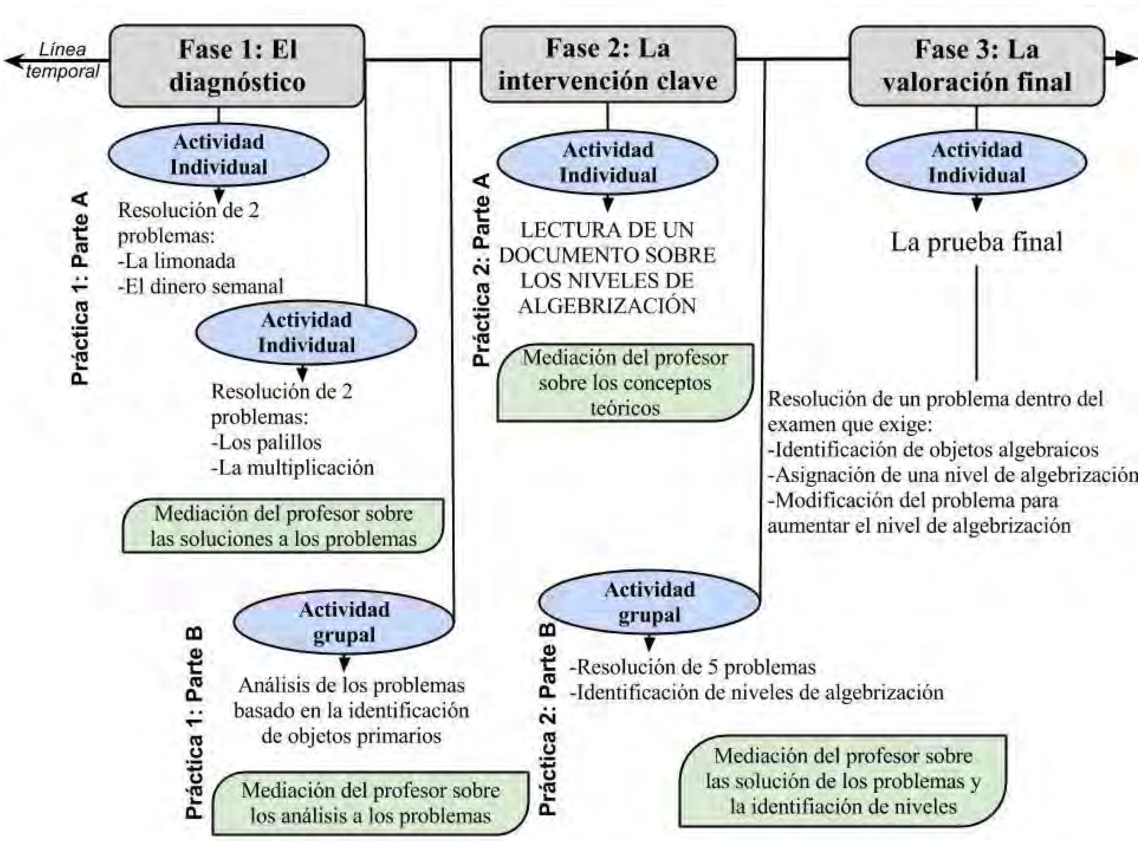


Figura 5.13. Secuencia de prácticas implementadas sobre el razonamiento algebraico

4.2.3. Interacciones docente-discentes

La trayectoria instruccional además de informar sobre la metodología llevada a cabo en el aula (tiempos, formas de trabajo, recursos tecnológicos,… etc.) también debe analizar cómo se relacionan el profesor y el alumno en el contexto del aula. En la tabla 5.22 presentamos un resumen de la trayectoria instruccional implementada.

Tabla 5.22. Trayectoria instruccional implementada

Configuración	Función docente	Función discente	Recursos	Patrón de Interacción
1. Resolución de la primera práctica, parte A.	De asignación: Se comunican las actividades a desarrollar para la práctica 1.	De aceptación y exploración	La hoja de trabajo. Lápiz y papel.	Personal
2. Resolución de la primera práctica, parte A	De asignación: Se comunica las actividades a desarrollar. Se	De aceptación y exploración	La hoja de trabajo. Lápiz y papel	Personal

	continúa con la práctica 1.			
3. La generalización y el lenguaje como características del álgebra.	De explicación: El profesor introduce la generalización y el lenguaje como características del álgebra aprovechando la noción de media aritmética.	De aceptación y recepción	Diapositivas	Magistral
4. Resolución de la práctica 1. Parte B	De asignación: Se comunica la actividad y el modo de desarrollarla	De aceptación y exploración	Diapositivas Hoja de trabajo Lápiz y papel	Magistral-Personal
5. Reflexión, discusión y análisis (de objetos y significados) de la práctica 1: problema 1.	De Institucionalización: Reflexión, discusión y análisis de la práctica 1, problema 1	Aceptación y recuerdo argumentación	Diapositivas Producciones de los estudiantes	Magistral Dialógica
6. Reflexión discusión y análisis de un problema:	De explicación: El profesor expone sobre el uso del lenguaje, los distintos registros de representación en la resolución de tareas.	Aceptación	Diapositivas	Magistral
7. Reflexión discusión y análisis de dos problemas:	De asignación: Se comunica dos problemas sobre los que recalca la generalización, inducción y deducción	De aceptación, recepción y exploración	Diapositivas	Magistral-personal
8. Reflexión, discusión y análisis (de objetos y significados) de la práctica 1: problema 2.	De institucionalización: Reflexión, discusión y análisis de la práctica 1, problema 2	Aceptación y recuerdo argumentación	Diapositivas Pizarra	Magistral Dialógica
9. Reflexión, discusión y análisis (de objetos y significados) de la práctica 1: problemas 3 y 4	De institucionalización Reflexión, discusión y análisis de la práctica 1, problema 3 y 4	Aceptación y recuerdo argumentación	Pizarra	Magistral Dialógica
10. Reflexión sobre los objetos y procesos algebraicos	De institucionalización	Aceptación	Diapositivas	Magistral

11. Reflexión sobre el álgebra	De explicación: el profesor promueve la reflexión sobre la naturaleza del álgebra	Interpreta y argumenta	Hoja de trabajo	Personal
12. Explicación teórica sobre el sentido algebraico	De explicación: El profesor introduce la noción de sentido algebraico y niveles de algebrización	Aceptación	Diapositivas	Magistral
13. Resolución de la quinta práctica.	De asignación: Se comunica las actividades a desarrollar para la práctica 5.	De aceptación y exploración	La hoja de trabajo. Lápiz y papel	Personal
14. Reflexión, discusión y análisis (de objetos y significados) de la práctica 5	De institucionalización: Reflexión, discusión y análisis de la práctica 5	Aceptación y recuerdo argumentación	Pizarra	Dialógica
15. Análisis de un episodio de clase	De asignación: Asigna y regula la actividad	Exploración	Vídeo	Magistral
16. Resolución de una tarea evaluativa	De asignación: Asigna y regula el examen	Interpreta y argumenta	La hoja de trabajo. Lápiz y papel	Personal

La Guía docente del curso, fijada por el Departamento, establece una separación entre clases en sesiones de gran grupo (grupo completo con todos los estudiantes matriculados), consideradas como clases teóricas y sesiones de seminario, con el grupo completo dividido en tres subgrupos. En las sesiones de seminario básicamente predomina el trabajo en equipo, con el profesor actuando como apoyo y supervisor del trabajo sobre las actividades prácticas diseñadas y sus intervenciones son principalmente de carácter magistral con un uso predominante de diapositivas. En algunos casos las actividades prácticas se inician en las sesiones de gran grupo, se continúan en las sesiones de seminario, y puesto que el tiempo de dichas sesiones es solo de una hora, lo usual es que los estudiantes terminen el informe del trabajo en equipo en horas fuera de clase.

La presentación y discusión colectiva de los informes del trabajo en equipo sobre las distintas prácticas se hizo unas veces en las sesiones de seminario y otras en sesiones de teoría. La práctica 5 (Álgebra en educación primaria) fue presentada y discutida en una sesión de gran grupo.

4.3. SUBTRAYECTORIA COGNITIVA Y AFECTIVA IMPLEMENTADA

En esta subtrayectoria se describe el desempeño de los estudiantes respecto a cada uno de los cuestionarios aplicados a lo largo del proceso de instrucción. Se trata de describir la progresión de los aprendizajes sobre el tema y los aspectos afectivos que acompañan a dichos aprendizajes.

En la figura 5.14 se indican los tres momentos importantes del proceso de instrucción, que resultan de la aplicación de las pruebas.

Práctica 1

- Parte 1. Resolución 4 tareas

184 maestros en formación

- Parte 2. Análisis de objetos y

PRUEBAS ESCRITAS

Práctica 5

56 maestros en formación

Examen final

Figura 5.14. Aplicación de las pruebas escritas

En las siguientes secciones se analizan las respuestas de los estudiantes a las distintas tareas usando la noción de configuración cognitiva, esto es, los tipos de respuestas dadas por los estudiantes indicando los objetos matemáticos relevantes que ponen en juego en la resolución de las tareas.

4.3.1. Análisis de la implementación de la práctica 1 (Resolución de problemas)

La realización de la práctica 1 sobre resolución de problemas tuvo una primera fase en la que se pide a los estudiantes que resolvieran 4 problemas de manera individual, de modo que las respuestas dadas se puede considerar como una prueba de diagnóstico del estado de sus conocimientos. En la segunda parte de la práctica se pide que los estudiantes, trabajando en equipo, realicen el análisis de los objetos y significados que ponen en juego en una de las soluciones dadas a las tareas, para lo cual deberían entregar un documento escrito. También en este caso, el protocolo de respuestas escritas lo podemos considerar como una prueba de diagnóstico sobre la competencia de análisis de los objetos matemáticos intervinientes en la actividad matemática. No obstante, para cada una de las partes de la práctica se organizó una sesión presencial de discusión colectiva, y consiguiente institucionalización, de las respuestas dadas, por lo que esta práctica forma parte también del diseño instruccional mediante el cual se pretende hacer evolucionar los conocimientos y competencias de los estudiantes.

Como se había mencionado en la subtrayectoria interaccional hubo un cambio relevante en el número de sujetos implicados en el proceso de instrucción. A diferencia de la subtrayectoria cognitiva del diseño, en la que se planificó trabajar con 3 grupos, en la implementación se trabajó con uno de los grupos (grupo 2ºA). El cambio se produjo durante la primera práctica debido a la disponibilidad de los profesores en cuanto a incluir en sus sesiones de clase el desarrollo y puesta en práctica de contenidos relacionados con el razonamiento algebraico. Ello implicaba adaptarse a ciertas instrucciones específicas para que la incorporación del contenido fuera posible, ajustar tiempos, incluir material específico y tener disponibilidad para las discusiones y análisis después de las sesiones. El grupo seleccionado fue dirigido por el profesor investigador.

En la tabla 5.23 se indican los estudiantes a los cuales fue aplicada la práctica 1. Se advierte que la aplicación de la primera práctica no fue homogénea respecto al número de estudiantes, dado que por limitaciones de tiempo la práctica fue aplicada en varios días; por tal motivo se presentaron los casos en los que algunos estudiantes resolvieron las 2 primeras tareas y las otras 2 no, y viceversa.

Tabla 5.23. Estudiantes implicados en la prueba diagnóstica

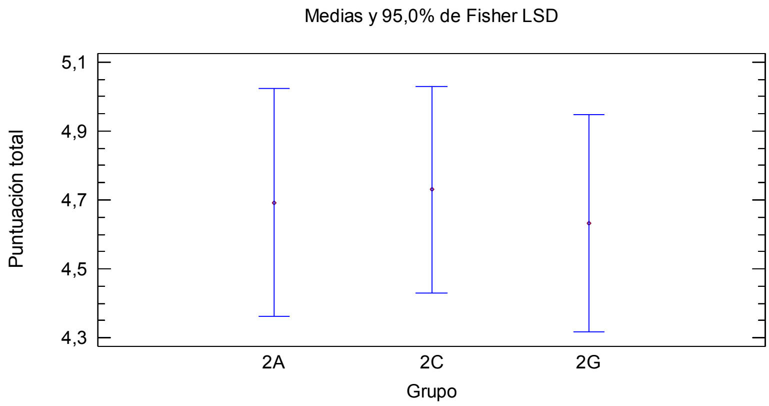
			Hombres		Mujeres		Total	
		GRUPO	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Diagnóstico Práctica 1	**T1-T2**	2A	17	31	28	33	45	32
		2C	16	29	37	44	53	38
		2G	22	40	20	23	42	30
		Total	55		85		**140**	100
	T3-T4	2A	22	33	29	33	51	33
		2C	17	26	36	40	53	34
		2G	27	41	24	27	51	33
		Total	66		89		**155**	100
	Análisis grupal 4 tareas	2A	24		32		**56**	100

En la tabla 5.24 se presentan los resultados obtenidos en cada uno de los grupos a los que se les aplicó esta primera práctica para la variable cuantitativa puntuación total. Los valores de esta variable estadística se han asignado con el siguiente criterio: si la respuesta a la tarea es correcta se asigna 1 y 0 si es incorrecta o en blanco. De este modo como los estudiantes resolvieron 7 ítems (en las 4 tareas) la puntuación total máxima es de 7 puntos (Anexo 9).

Tabla 5.24. Resumen estadístico de la puntuación total por grupo

	Grupo 2A	*Grupo 2C*	*Grupo 2G*	*Total*
Recuento	52	63	58	173
Promedio	4,6	4,7	4,6	4,7
Desviación Estándar	1,67	1,59	1,93	1,73
Coeficiente de variación	35,69%	33,59%	42,40%	37,06%
Mínimo	1,0	1,0	0,0	0,0
Máximo	7,0	7,0	7,0	7,0
Rango	6,0	6,0	6,0	7,0

La gráfica de comparación múltiple indica que no hay diferencia estadísticamente significativa entre cualquier par de medias, con un nivel del 95% de confianza. Los tres grupos a los cuales fue aplicado el cuestionario son homogéneos.



F

De modo general, como se aprecia en la figura 5.16, la resolución de las tareas resultó ser accesible para los estudiantes. Vemos en la figura 5.16 que la media fue de 4,6 y la máxima puntuación registrada fue de 7 puntos, lo que significa que el número de ítems que son abordados y resueltos por los estudiantes es relativamente moderado.

Recuento
Promedio
Desviación Estánd
Coeficiente de Var
Mínimo
Máximo
Rango
Sesgo Estandariza
Curtosis Estandari

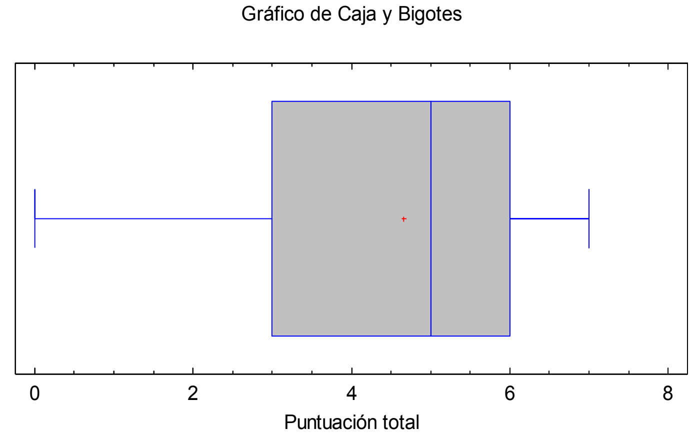


Figura 5.16. Puntuación total del cuestionario

El índice de dificultad (I.D) de cada uno de los ítems (figura 5.17), nos indica que el ítem c) de la tarea 1 (la limonada) resultó claramente difícil de resolver por los estudiantes. Este ítem requiere formular una regla general: *¿Cuántas cucharadas de azúca*

Ít
T1_i
T1_i
T1_i
T2
T3_i
T3_i
T4

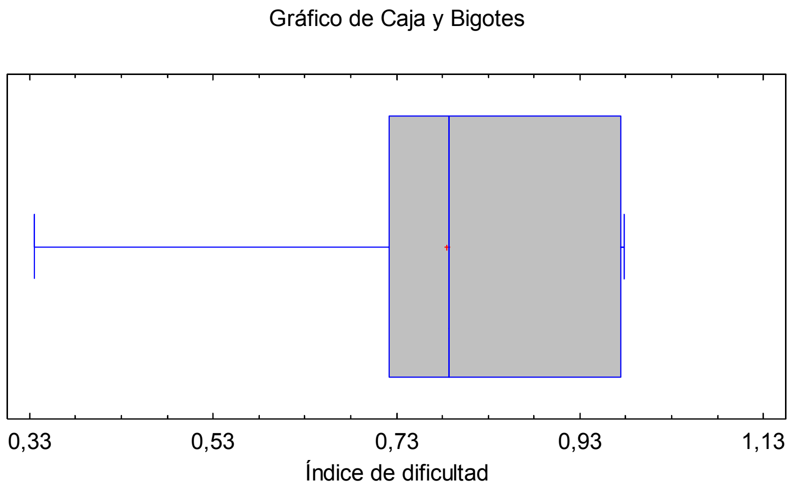


Figura 5.17. Índice de dificultad de los ítems

Llama la atención el ítem b) de la tarea 3 (los palillos) que solicita hallar el caso general, resultó menos accesible que la obtención de los casos particulares (ítem a). Esto indica que la generalización no es un proceso sencillo, y es aún más complicada cuando se requiere que los estudiantes expresen la generalidad con lenguaje algebraico (Radford, 2003).

A continuación presentamos los resultados que se obtuvieron en cada una de las tareas, lo que nos permite una apreciación más específica del modo en que los estudiantes respondieron a la práctica 1. Se presentan los resultados analizando los ítems correspondientes al conocimiento común, especializado, avanzado y categorizados según los niveles de algebrización, según se indica en la tabla 5.25.

Tabla 5.25. Distribución del contenido del cuestionario por tipo de conocimiento

FACETA	CONOCIMIENTO	NIVELES		Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 4
				Ítems			
Epistémica	Común	0 1 2 3	Resolver la tarea	a b			a
	Avanzado			c	a	a	
	Especializado		Identificar objetos matemáticos	✓	✓	✓	✓

En el siguiente apartado haremos un análisis de las respuestas de los estudiantes a las diferentes tareas distinguiendo distintos tipos de configuraciones de objetos y clasificando tales configuraciones según lo niveles de algebrización que manifiestan en la resolución. Mostraremos ejemplos típicos de respuestas de los diferentes tipos de configuraciones.

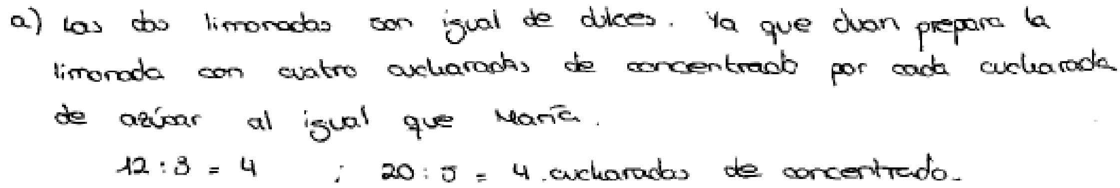
4.3.1.1. Respuestas relacionadas con el conocimiento común y avanzado del contenido (Parte A de la Práctica 1, resolución de problemas)

Tarea 1: La limonada. En esta tarea se plantea a los estudiantes una situación de proporcionalidad directa, un tipo de tareas que forma parte del conocimiento común de los maestros en formación, y que permite conectar con un conocimiento más avanzado (el de función lineal).

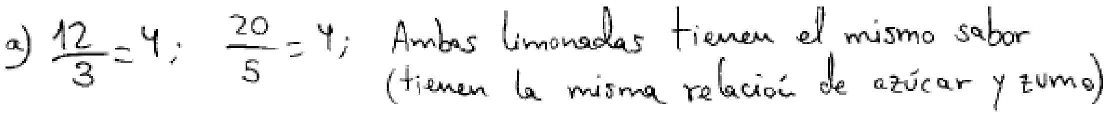
Se recuerda que la tarea 1, constaba de 3 ítems para cada uno de los cuales se realizó un análisis por separado. El ítem a) de esta tarea solicita al estudiante determinar ¿cuál de las dos limonadas es más dulce, la de Juan o la de María, o tienen el mismo sabor? Sabiendo que Juan utiliza 3 cucharadas de azúcar y 12 cucharadas de concentrado de zumo de limón y que María utiliza 5 cucharadas de azúcar y 20 cucharadas de concentrado de zumo de limón. Se han identificado cuatro configuraciones que describen las soluciones de los maestros en formación y que a continuación se categorizan de acuerdo a los niveles de algebrización definidos en el capítulo 3. Es importante señalar que para que las soluciones den lugar a una nueva configuración tienen que diferir en al menos un elemento primario relevante que influya en un cambio de nivel de algebrización (elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades, argumentos)

Nivel cero. Ausencia de razonamiento algebraico

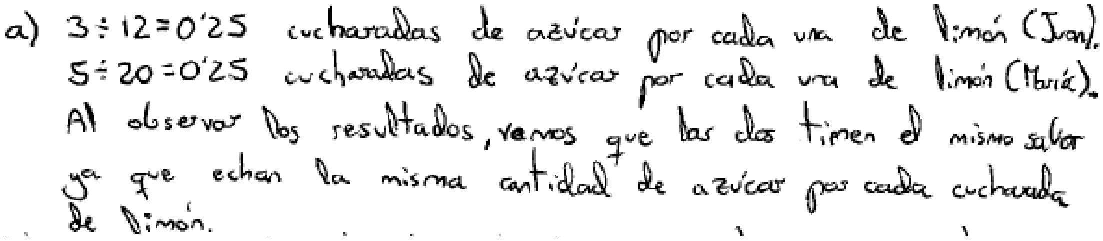
Configuración 1: Simplificación de ambas razones. En esta configuración se agrupan aquellas soluciones en las que los maestros en formación simplifican las razones a su expresión mínima, identificándose $\frac{1}{4}$; 4 y $.25$ como resultados de dicho procedimiento de simplificación. Se identifican también formas diferentes de representar a las razones ($\frac{3}{12}$; $3 : 12$). Llama particularmente la atención el uso de la división con caja para expresar $3 \div 12$ o $12 \div 3$, un tratamiento que según Freudenthal (1983) priva a la razón de lo que la hace valiosa como como tal.


a) las dos limonadas son igual de dulces. Ya que Juan prepara la limonada con cuatro cucharadas de concentrado por cada cucharada de azúcar al igual que María.
12 : 3 = 4 ; 20 : 5 = 4 cucharadas de concentrado.

Resolución del estudiante E95


a) $\frac{12}{3} = 4$; $\frac{20}{5} = 4$; Ambas limonadas tienen el mismo sabor (tienen la misma relación de azúcar y zumo)

Resolución del estudiante E21


a) 3÷12=0'25 cucharadas de azúcar por cada una de limón (Juan).
5÷20=0'25 cucharadas de azúcar por cada una de limón (María).
Al observar los resultados, vemos que las dos timen el mismo sabor ya que echan la misma cantidad de azúcar por cada cucharada de limón.

Resolución del estudiante E88

Figura 5.18. Resoluciones basadas en la simplificación de las razones

En la resolución del estudiante E95 se identifica el elemento lingüístico “Juan prepara la limonada con cuatro cucharadas de concentrado por cada cucharada de azúcar al igual que María”, el cual expresa que el estudiante identifica la relación 1 a 4 para ambos concentrados. Posteriormente, con los procedimientos $12:3 = 4$ y $20:5 = 4$ expresa la razón y realiza la simplificación correspondiente. De igual manera la solución que presenta el estudiante E21 y E88 expresan la misma solución pero con un diferente significado para el concepto de razón. Se aprecia que en las soluciones se pone énfasis en las operaciones y se centra en la obtención de un resultado.

Configuración 2: Aplicación del producto cruzado. En esta configuración se describen aquellas producciones en las que se realizó el producto cruzado para comprobar si las razones eran iguales. Se destaca que ningún estudiante hizo alusión a la propiedad de las razones sobre "el producto de los medios es igual al producto de los extremos".

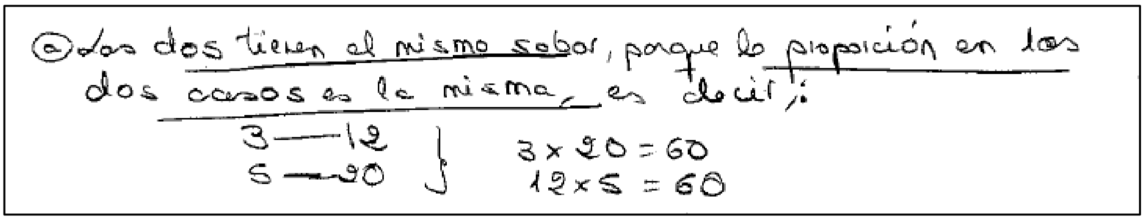


Figura 5.19. Resolución del estudiante E25 basada en el producto cruzado

En la solución del estudiante E25 se destaca el elemento lingüístico "los dos tienen el mismo sabor, porque la proporción es los dos casos es la misma" que indica una justificación de su respuesta. La aplicación del procedimiento de producto cruzado se pone de manifiesto sin aludir explícitamente a la propiedad de las proporciones.

Configuración 3: Homogeneización denominadores. Esta configuración agrupa aquellas soluciones en las que el sujeto obtiene el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los datos proporcionados.

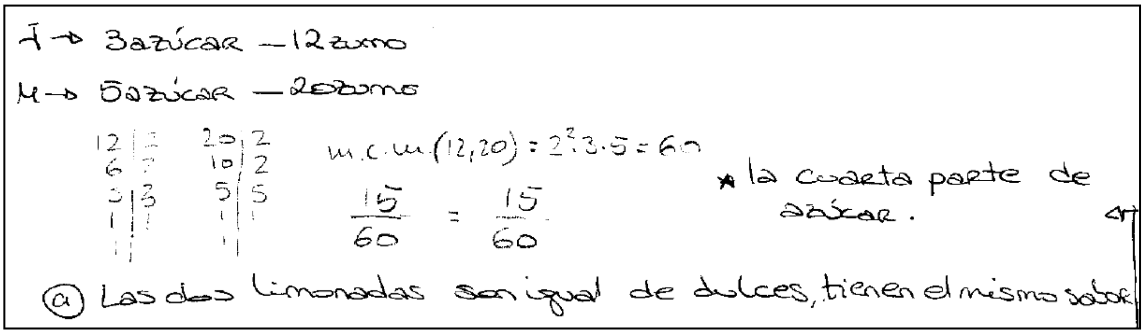
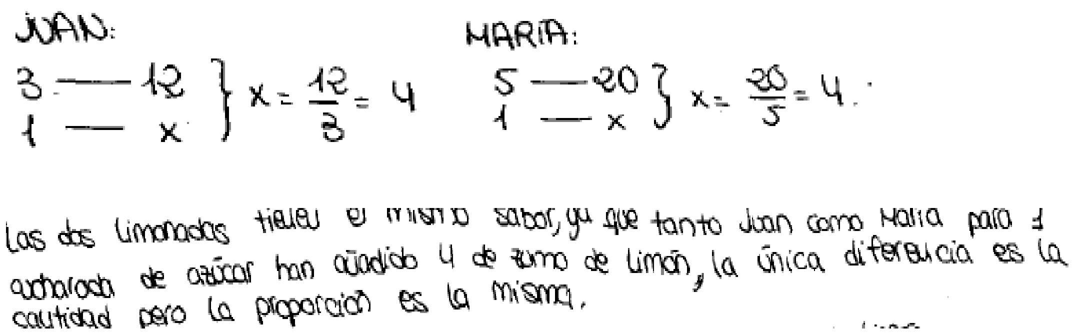


Figura 5.20. Resolución del E128 basada en la homogeneización de denominadores

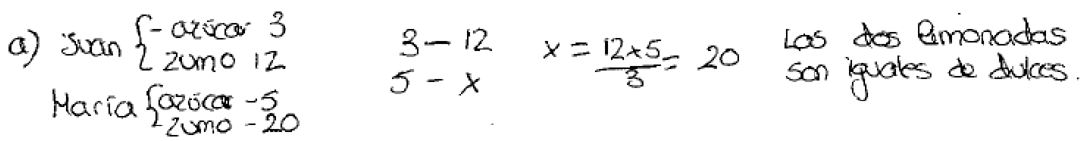
En la resolución del estudiante E128 se aprecia como procedimiento la descomposición de los números involucrados para obtener el m.c.m de 12 y 20. Parte de las expresiones

$\frac{3}{12}$ y $\frac{5}{20}$ para comprobar si las fracciones son equivalentes. Sin embargo, su argumento final "las dos limonadas son igual de dulces, tienen el mismo sabor…la cuarta parte de azúcar", no parece justificarlo con su procedimiento, indicando así una desconexión entre ambos.

Configuración 4: Aplicación de la regla de 3. Esta configuración agrupa aquellas producciones en las que se aplicó la regla de 3 como procedimiento de comparación de ambas razones. Se distinguen entre aquellas soluciones que hallan la razón unitaria y las que no hacen uso de ésta. Se destaca el hecho de que las producciones que no utilizan la razón unitaria, emplean la regla de 3 para "comprobar" que los datos se ajustan a esta estrategia.



Resolución del estudiante E35



Resolución del estudiante E96

Figura 5.21. Resoluciones basadas en la regla de 3

El primer resolutor E35 utiliza la estrategia de la unidad simple (Lamon, 1993) para determinar si ambas razones tienen la misma razón unitaria. En la solución planteada se reconoce y representa a la cantidad desconocida, utilizando una literal, se trabaja con cantidades particulares, operando aritméticamente para hallar el valor que se desconoce. El segundo resolutor halla la cuarta proporcional; llama la atención que considera un dato conocido (20) como desconocido para aplicar la regla de 3. En ambas soluciones las respuestas son obtenidas como resultado de operaciones aritméticas y aunque implícitamente parece hacerse uso de una propiedad (en toda proporción el producto de medios es igual a productos de extremos lo que justificaría la aplicación de la regla de 3) no hay evidencia explícita de que los estudiantes parezcan conocerla.

Posteriormente al análisis de las soluciones para el ítem a), se analizaron las correspondientes soluciones para el ítem b) de la tarea 1 identificándose 5 configuraciones que se describen a continuación y que se enmarcan dentro de un nivel cero de algebrización. Se recuerda que este ítem pretende que el estudiante determine la cuarta proporcional: dados 3 datos conocidos, encontrar el dato faltante para que la relación entre los mismos sean proporcionales. En concreto se les cuestiona sobre: Si Juan quiere preparar una limonada con 24 cucharadas de azúcar, cuántas cucharadas de limón debe agregar para conservar el mismo sabor (sabiendo que la relación que guardan las cucharadas de azúcar respecto a las de zumo de limón es de 1:4).

Configuración 5: Aplicación de la unidad compuesta. Se agrupan en esta configuración aquellas respuestas en las que los estudiantes toman como unidad la razón $\frac{3}{12}$.

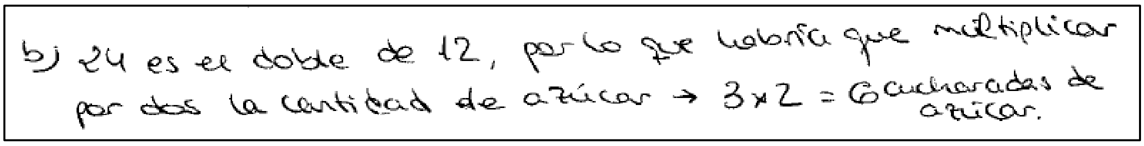

b) 24 es el doble de 12, por lo que habría que multiplicar por dos la cantidad de azúcar → 3×2 = 6 cucharadas de azúcar.

Figura 5.22. Resolución del estudiante E02 basada en la aplicación de la unidad compuesta

En la resolución del estudiante E02 se aprecia cómo toma de referencia la relación de la razón 3:12 e identifica que el doble del consecuente (12) es 24, así para que se conserve el mismo sabor, el doble del antecedente tendría que ser 6.

Configuración 6: Aplicación de la regla de 3. En esta configuración se recogen aquellas producciones de los estudiantes en las que se aplicó la regla de 3 para hallar el dato desconocido (cuarta proporcional). Se identificaron dos tipos de uso: Una en la que se utiliza la reducción a la unidad como referente (unidad simple) y otra en la que se parte de una relación compuesta.

$$1a \;—\; 4z$$
$$x \;—\; 24.$$
$$4x = 24$$
$$x = \frac{24}{4}$$
$$x = 6$$

b) Debe poner 6 cucharadas de azúcar.

Resolución del estudiante E68

b) $3 \;—\; 12$ $\quad x = \frac{3 \times 24}{12} = 6$ Debe poner 6 cucharadas.
$x \;—\; 24$

Resolución del estudiante E65

Figura 5.23. Resoluciones basadas en el uso de la regla de 3

En las resoluciones de los maestros en formación se aprecia el uso de la regla de 3 como el procedimiento para determinar la cuarta proporcional. Denotan con una literal el valor desconocido y posteriormente realizan el algoritmo.

Configuración 7: Aplicación de la proporción. Esta configuración agrupa aquellas soluciones en las que se hizo explícita una igualdad de razones. Es importante mencionar que lo que hace distinto a esta configuración es el uso de la representación dado que se interpretan los datos involucrados en términos de proporciones.

b) $\frac{3}{12} = \frac{x}{24} \Rightarrow \frac{24 \cdot 3}{12} = \frac{72}{12} = 6$ cucharadas de azúcar

Figura 5.24. Resolución del estudiante E118 basada en la igualdad de razones

En la resolución del estudiante E118 se aprecia el planteamiento de la igualdad de dos razones aunque posteriormente parece aplicar la regla de 3 y en ningún momento se hace alusión a que en una proporción el producto de medios es igual al producto de extremos.

Es importante señalar que en la aplicación de la regla de 3, con frecuencia los alumnos manipulan de una manera indistinta y sin sentido los datos involucrados, esto impide comprender la naturaleza del problema y determinar si la correspondencia entre las cantidades es de proporcionalidad directa o inversa.

Nivel 1. Nivel incipiente de algebrización

Configuración 8: Identificación de la razón unitaria como intensivo. En esta configuración se agrupan aquellas soluciones en las que el resolutor identifica que el número de cucharadas que de azúcar que se desconoce dividido por 24 (número de cucharadas de limón) debe dar $\frac{1}{4}$ o bien que 24 (cucharadas de limón) divido por el número de cucharadas de azúcar debe dar 4; esto es:

$$\frac{cucharadas\ de\ azúcar}{cucharadas\ de\ zumo\ de\ limon} = 0{,}25\ (o\ \frac{1}{4}) \qquad \frac{cucharadas\ de\ zumo\ de\ limon}{cucharadas\ de\ azúcar} = 4$$

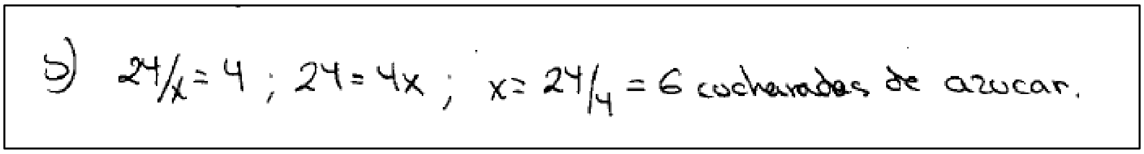


Figura 5.25. Resolución basada en la razón unitaria del estudiante E171

En la resolución del estudiante E171 se identifica el reconocimiento de una propiedad en su procedimiento, el estudiante expresa que la razón entre los datos debe ser 4 para que se conserve el mismo sabor. Denota con una literal la cantidad desconocida y a continuación transpone el término para hallar el resultado.

Configuración 9: Aplicación de la constante de proporcionalidad. Esta configuración agrupa las soluciones en las que se identifica $\frac{1}{4}$ (o .25) como el factor por el cual se tiene que multiplicar las cucharadas de limón para obtener el número de cucharadas de azúcar. La figura 5.26 representa una solución prototípica para esta configuración.

b) Para este caso multiplicamos los 0'25 que equivale de azúcar por cucharada de zumo de limón por las 24 de este caso que hacen un total de 6 cucharadas de azúcar y 24 de zumo, así saldrá igual de dulce que los casos anteriores.

Figura 5.26. Resolución basada en la razón unitaria del estudiante E80

En relación a estos dos primeros ítems, se advierte que en la mayoría de las soluciones manifestadas son procedimentales, se recurre frecuentemente a la regla de tres como si la proporcionalidad consistiera en la aplicación de ese procedimiento y se concibe a la razón principalmente como el cociente de dos números. Aunque el planteamiento de una regla de 3 implica la resolución de ecuaciones de la forma $Ax = B$ (lo que conlleva a un nivel 1 de algebrización), los maestros en formación parecen darle un uso sin sentido y que no justifican sobre las propiedades de las proporciones; tal motivo nos llevó a la consideración de que tales producciones se enmarcan en un nivel cero de algebrización. Para que la actividad sujeta a la tarea adquiera un primer nivel de algebrización se tiene que poner énfasis en las propiedades y relaciones y hacer uso de tablas para el análisis de las cantidades involucradas, tal como se planteó en el análisis a priori, de modo que bajo el mismo proceso de análisis se obtuvieran las respuestas, tanto del ítem a) como del ítem b), y que posteriormente condujera al análisis del ítem c) bajo un enfoque funcional.

El último ítem de la tarea, el ítem c), solicita al estudiante que determine, considerando las relaciones entre los ítems anteriores, ¿cuántas cucharadas de azúcar se debe poner para un número cualquiera de cucharadas de limón? Se pretende que el sujeto generalice el concepto de proporcionalidad al de función lineal. Para este ítem se han identificado 5 configuraciones las cuales se describen del mismo modo que las anteriores, de acuerdo a los niveles de algebrización.

Nivel 0. Ausencia de razonamiento algebraico

Configuración 10: ¿Cuánto por uno? En esta configuración se agrupan aquellas respuestas en las que se reconoce que por cada cucharada de azúcar se agregan cuatro cucharadas de limón (figura 5.27). Una relación que emerge del enunciado del problema y que no contesta de manera satisfactoria a la pregunta del ítem c.

c) Para cada 4 cucharadas de zumo de limón, se debería poner 1 de azúcar.

Figura 5.27. Solución del estudiante E02

Configuración 11: Razonamiento recursivo. Esta configuración describe las soluciones en las que se identifica una regla que permite hallar el término siguiente. En la solución planteada por el estudiante E91, se reinterpreta la frase “una cucharada de azúcar por cada cuatro de zumo de limón” como $\frac{1}{4}$ de cucharada de azúcar por cada cucharada de zumo de limón.

c) 0'25 cuchara de azúcar sería 1 de limón.
$\frac{1}{4}$ de azúcar por cada cuchara de limón.

Figura 5.28. Solución del estudiante E91

A diferencia de la configuración 10, esta configuración destaca el reconocimiento de las cucharadas de azúcar como la variable independiente, sin embargo no existe una generalización en esta configuración para que las soluciones asociadas a la misma obtengan un nivel 1 de algebrización.

Nivel 1. Nivel incipiente de algebrización

Configuración 12: Identificación de la razón unitaria como intensivo. En esta configuración se agrupan aquellas soluciones en las que el sujeto reconoce la expresión $\frac{cucharadas\ de\ azúcar}{cucharadas\ de\ zumo\ de\ limon} = 0{,}25\ (o\ \frac{1}{4})$

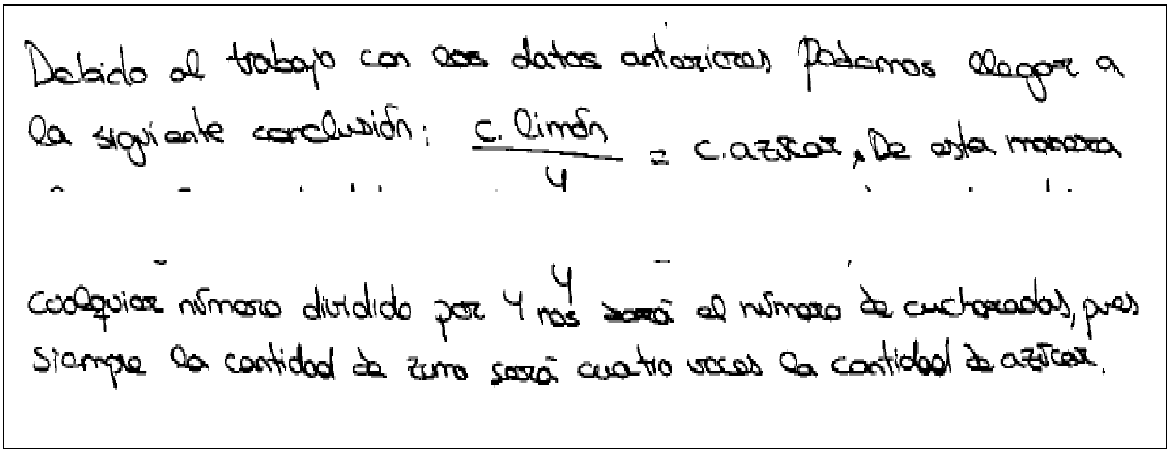
Se deberán poner las cucharadas de azúcar y las cucharadas de limón cuya fracción equivalga al mismo número anterior.
Ej: 3/12 = 0'4   5/20 = 0'4   6/24 = 0'4   10/40 = 0'4 → Funciones equivalentes

Figura 5.29. Solución del estudiante E63

La resolución del estudiante E63 manifiesta el reconocimiento de una propiedad similar a la identificada en la configuración 8 (denominada también como: identificación de la razón unitaria como intensivo). Se ejemplifica a través de varios ejemplos que el número de cucharadas de azúcar entre el número de cucharadas de zumo de limón están a la misma razón 0,25. Se advierte que estudiante comete un error, quizás de despiste al otorgar 0,4 como valor numérico a las distintas razones.

Configuración 13: Relación funcional en términos no alfanuméricos. En esta configuración se agrupan las soluciones en las que se reconoce que para cualquier número de cucharadas de limón se divide entre 4 (razón unitaria) o multiplica por $\frac{1}{4}$ o .25 (razón unitaria), para obtener el número de cucharadas de azúcar.

En la solución del estudiante E62 (figura 5.30) se aprecia la generación de una regla en la que el intensivo "cualquier número" indica cualquier número de cucharadas de limón. Además, se reconoce a las cucharadas de limón como la variable independiente.

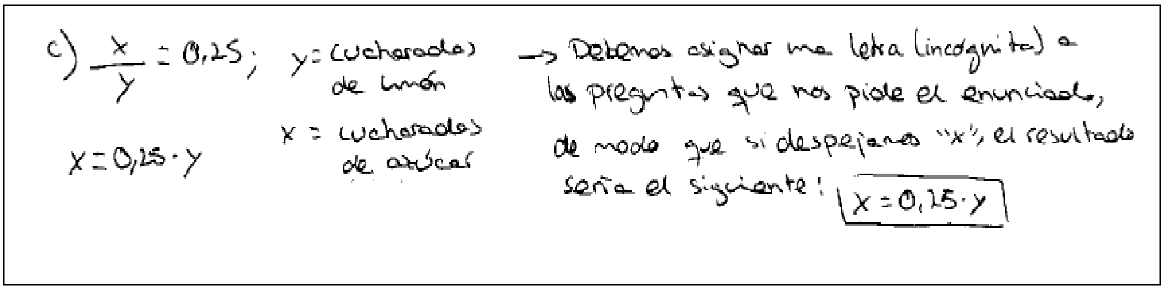


Debido al trabajo con los datos anteriores podemos llegar a la siguiente conclusión: $\frac{\text{c. limón}}{4}$ = c.azúcar, De esta manera cualquier número dividido por 4 nos dará el número de cucharadas, pues siempre la cantidad de zumo será cuatro veces la cantidad de azúcar.

Figura 5.30. Solución del estudiante E62

Nivel 2. Nivel intermedio de algebrización

Configuración 14: Relación funcional en términos alfanuméricos. En esta configuración se recogen aquellas producciones en las que se relaciona simbólicamente el número de cucharadas de azúcar y el número de cucharadas de limón.



c) $\frac{x}{y} = 0,25$; y: cucharadas de limón
x = cucharadas de azúcar

$x = 0,25 \cdot y$

→ Debemos asignar una letra (incógnita) a las preguntas que nos pide el enunciado, de modo que si despejamos "x", el resultado sería el siguiente: $\boxed{x = 0,25 \cdot y}$

Figura 5.31. Solución del estudiante E110

En la solución del estudiante se reconoce a la proporción en términos de una función lineal donde x e y son variables que representan el cambio en el número de cucharadas de limón y de azúcar y, 0,25 la constante de proporcionalidad.

En la tabla 5.26 se recogen las frecuencias de las configuraciones cognitivas clasificadas según los niveles de algebrización. Es importante mencionar que de 4 de los 140 estudiantes no respondieron al ítem a), 3 no respondieron al b) y 4 dejaron en blanco el ítem c).

Tabla 5.26. Frecuencias de respuestas a la tarea 1 del diagnóstico según niveles de RAE

Configuración	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Total
1. Simplificación de razones	109			109
2. Aplicación del producto cruzado	4			4
3. Homogeneización de denominadores	10			10
4. Aplicación de la regla de 3	13			13
Total	**136**			**136**
5. Aplicación de la unidad compuesta	20			20
6. Aplicación de la regla de 3	94			94
7. Aplicación de la proporción	9			9
8. Identificación de la razón unitaria como intensivo		4		4
9. Aplicación de la constante de proporcionalidad		10		10
Total	**123**	**14**		**137**
10. ¿Cuánto por uno?	60			60
11. Razonamiento recursivo	35			35
12. Identificación de la razón unitaria como intensivo		4		4
13. Relación funcional en términos no alfanuméricos		20		20
14. Relación funcional en términos alfanuméricos			17	17
Total	**60**	**59**	**17**	**136**

Se aprecia de manera general, tal como se expresó en el análisis a priori, que a los maestros en formación les resulta difícil abordar la tarea con planteamientos funcionales, aplicando correspondencias y realizando distinciones entre la variable independiente y dependiente. La mayoría de las soluciones de los estudiantes se concentran en el nivel cero de algebrización, formas de solución poco adecuadas para promover el RAE. Aunque los estudiantes resolvieron la tarea satisfactoriamente en su ítem a) y b) lo que implica un dominio del conocimiento común, es cierto que las conexiones de este con otros conocimientos más avanzados (ítem c) presentan inconsistencias (índice de dificultad para el ítem c = 33, 57 %). Los profesores deben ser capaces de tratar los conceptos desarrollados en la educación básica ligándolos con conceptos más avanzados con la finalidad de desarrollar el razonamiento algebraico en los niños. Por ejemplo, una tabla de multiplicación puede ser representada por medio de la expresión $y = mx$ donde x y y son números enteros y m es la "la tabla en cuestión (del 2, 3, 4,…9,10)". Schliemann, Carraher y Brizuela (2007) argumentan que los estudiantes comienzan a entender funciones (lineales) y proporciones (constantes) mucho antes de poder comprender una expresión como $y = mx + b$. Y que efectivamente, los educadores enseñan sobre las proporciones y funciones mucho antes de enseñar expresiones simbólico-literales a los estudiantes. En este sentido nosotros indicamos que los maestros en formación deben ser capaces de abrir paso para el desarrollo gradual del simbolismo ligado a los conceptos básicos.

Tarea 2: El gasto diario. En esta tarea se plantea a los maestros en formación un problema de palabras que es posible resolver tanto de manera aritmética como algebraica. Al igual que en la tarea 1, se describen las configuraciones cognitivas asociadas a las soluciones manifestadas por los estudiantes.

Nivel 0. Ausencia de razonamiento algebraico

Configuración 1. Razonamiento numérico-verbal. En esta configuración se recogen aquellas soluciones que resuelven el problema utilizando números y operaciones.

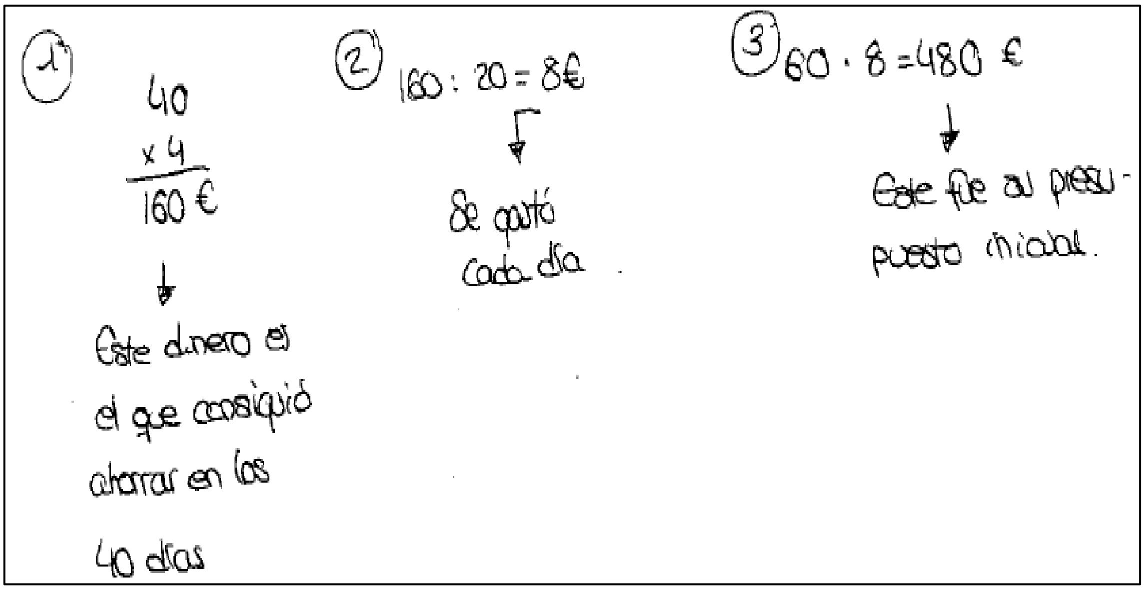


Figura 5.32. Solución del estudiante E39

En el primer paso el estudiante reconoce las condiciones de aplicación de la multiplicación. Se trata de una situación multiplicativa en la que se dan como datos el estado de una magnitud (número de días), una razón (4 euros por día), y se pide el estado de otra magnitud (cantidad de euros ahorrados). En el segundo paso reconoce primero una situación aditiva (diferencia entre los días totales, 60, y los días previstos, 40) y otra situación multiplicativa en la que conocen dos estados de dos magnitudes (cantidad de euros ahorrados, número de días) y halla la razón (gasto diario, 8 €). Finalmente, en el tercer paso, reconoce otra situación multiplicativa de tipo de razón en la que se conoce un estado de una magnitud (60 días), una razón (8 € por día) y se calcula otro estado final (cantidad de euros de presupuesto inicial).

Todos los objetos que aparecen en el proceso de resolución son medidas de cantidades particulares de magnitudes y operaciones aritméticas con los valores numéricos de dichas medidas. El estudiante realiza, no obstante, un proceso de modelización aritmética muy eficaz y sintético. En cada paso se pasa del mundo de las cantidades al de los números naturales, donde se realizan los cálculos, cuyos resultados son interpretados en términos del contexto del problema (160€; 8€; 480€).

Configuración 2: Aplicación de la regla de 3. En esta configuración se agrupan aquellas soluciones en las que se estableció una regla de 3 para obtener la respuesta. Se distinguen dos casos, aquellos que utilizan una "razón unitaria", 4 euros por un día; y aquellas en las que no, 160 euros por 20 días.

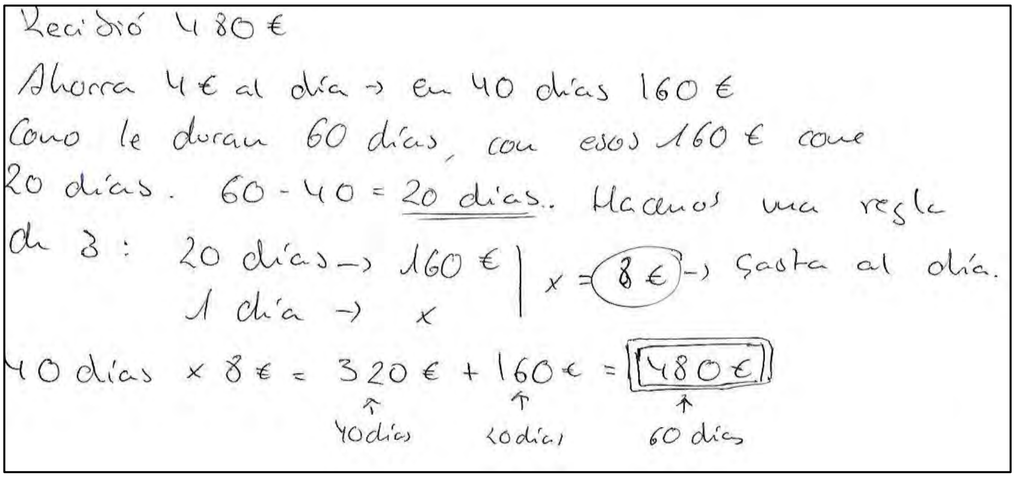

Recibió 480 €
Ahorra 4€ al día → en 40 días 160 €
Como le duran 60 días, con esos 160 € come
20 días. 60 - 40 = 20 días. Hacemos una regla
de 3: 20 días → 160 € | x = 8 € → gasta al día.
1 día → x
40 días × 8 € = 320 € + 160 € = 480 €
40días 20días 60 días

Figura 5.33. Resolución del estudiante E42

Este estudiante reconoce en el problema las condiciones de aplicación de los conceptos de multiplicación (4€ al día en 40 días), y de la sustracción ($60 - 40 = 20$; 20 días). El cálculo de la razón, gasto diario (8€ por día) lo realiza con el procedimiento de la regla de tres, simbolizando con la letra x la incógnita. En los siguientes pasos continúa aplicando conceptos y operaciones aritméticas. La intervención del símbolo literal para representar la incógnita es el único rasgo algebraico que pone en juego; para encontrar el valor de dicha incógnita no alcanza a plantear y resolver de manera explícita una regla de 3. Bajo este mismo procedimiento se identificaron soluciones similares en las que los estudiantes toman como referencia el ahorro de 160 euros por 20 días y encuentran la cantidad desconocida en euros para 40 días o para 60 días.

Nivel 3. Nivel consolidado de algebrización

Configuración 3. Planteamiento de ecuaciones. En esta configuración se recogen aquellas soluciones en las que se modeló la situación mediante el planteamiento de una ecuación.

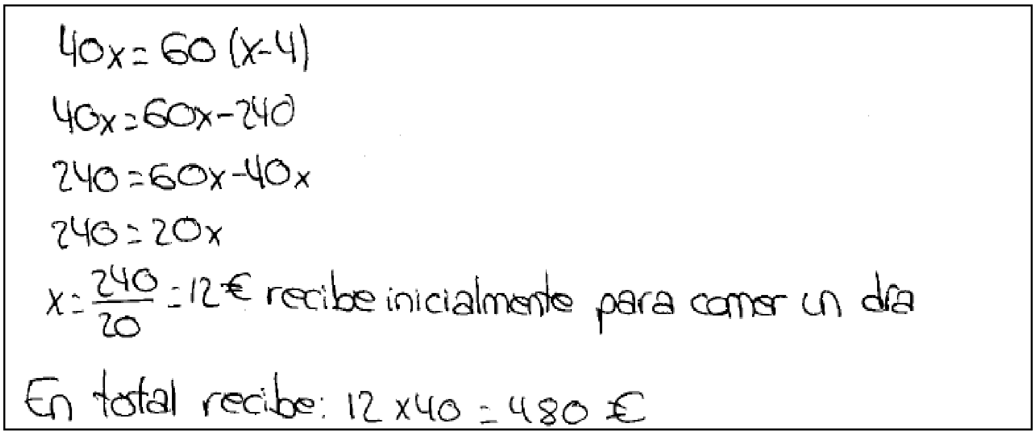


Figura 5.34. Solución del estudiante E9

Este estudiante simboliza con la letra x el gasto diario previsto inicialmente para los 40 días, y el gasto diario efectivamente realizado mediante $x - 4$. Es capaz de plantear una ecuación que relaciona los valores numéricos de las medidas de las cantidades que intervienen. A continuación aplica un procedimiento algorítmico para despejar la incógnita y hallar su valor (x =12 € recibe inicialmente para comer un día).

En la tabla 5.27 se recogen las frecuencias de las configuraciones cognitivas asociadas a la tarea 2 según los niveles de algebrización que manifestaron. Se señala que 6 producciones fueron catalogadas sin sentido/incompletas, mientras que 4 estudiantes no respondieron a esta tarea.

Tabla 5.27. Frecuencias de respuestas a la tarea 2 del diagnóstico según niveles de RAE

Configuración	**Nivel 0**	**Nivel 3**	**Total**
1. Razonamiento numérico-verbal	72		72
2. Aplicación de la regla de 3	41		41
3. Planteamiento de una ecuación		17	17
Total	**113**	**12**	**130**

Llama la atención la aplicación frecuente de la regla de 3, una forma de solución no prevista en el análisis a priori de esta tarea y que sugiere un fuerte arraigo por parte de los estudiantes hacia este procedimiento. Por otro lado, la mayoría de las producciones se concentran en un nivel cero de algebrización lo que sugiere la elección de modos aritméticos para abordar la tarea.

Tarea 3: Los palillos. La tarea 3 implica una generalización (algebraica) de patrones; requiere la capacidad de captar algo en común, observando algunos de los elementos de la secuencia S, siendo conscientes de que esta "comunalidad" se aplica a todos los términos de dicha secuencia. Además, implica utilizar esta comunalidad para proporcionar una expresión directa de cualquier término de S (Radford, 2010).

Nivel 0. Ausencia de razonamiento algebraico

Configuración 1. Razonamiento recursivo. La característica principal de esta configuración es el reconocimiento de una regla recursiva; se advierte que la secuencia tiene algo en común y se reconoce que todos los términos de la secuencia tienen ese algo en común, en este caso el aumento de los palillos en dos unidades.

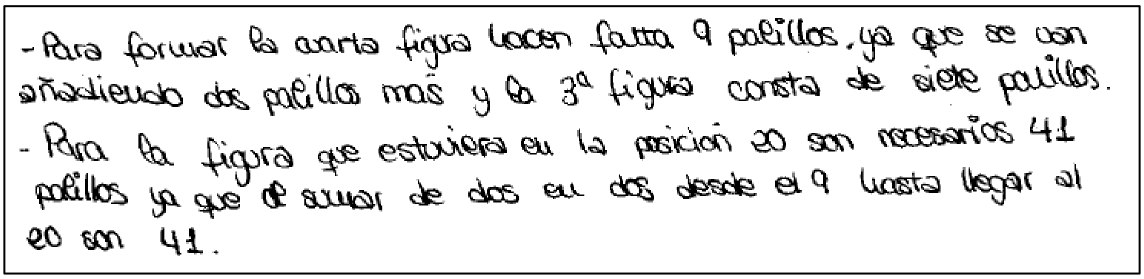
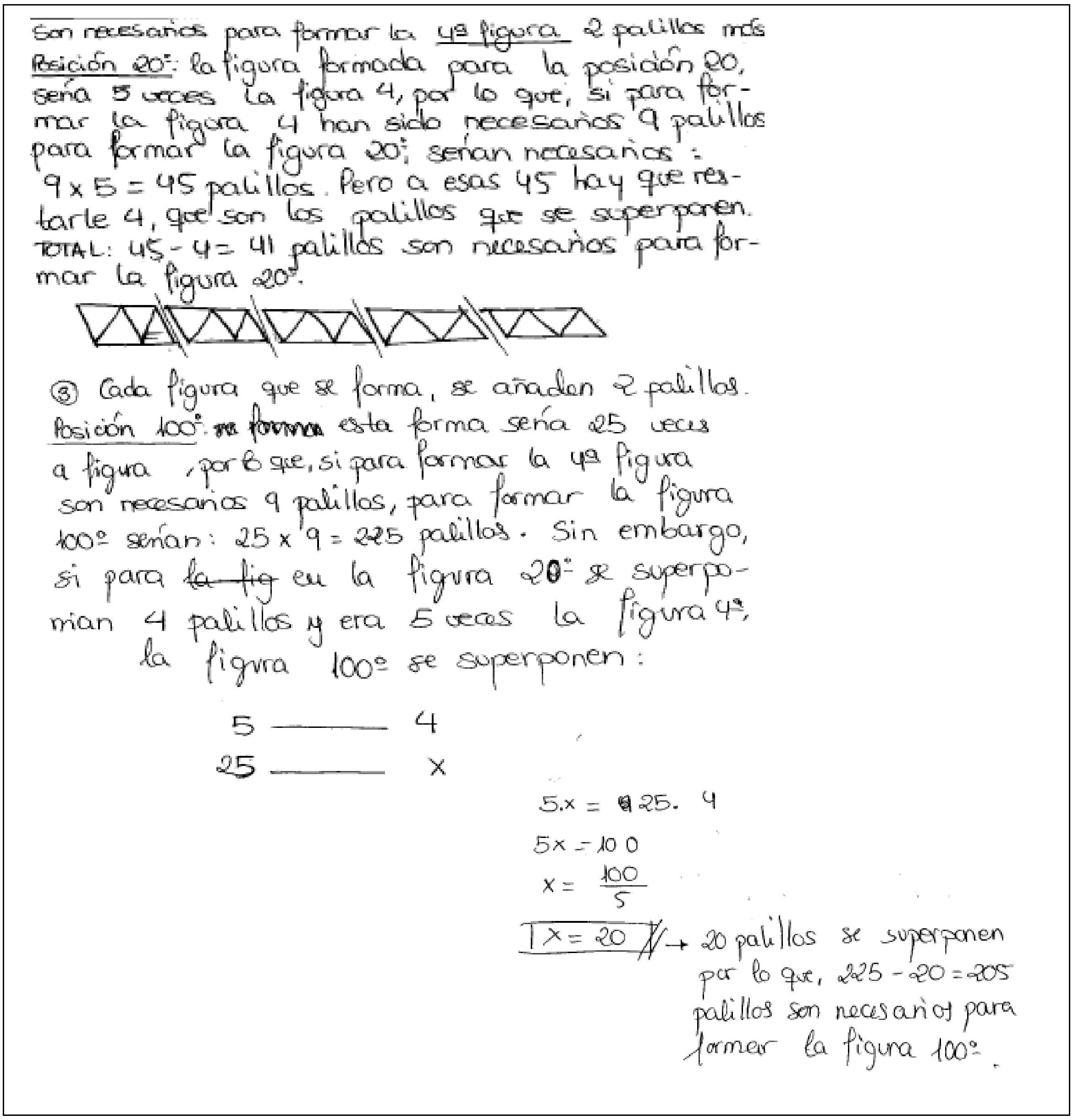

- Para formar la cuarta figura hacen falta 9 palillos, ya que se van añadiendo dos palillos más y la 3ª figura consta de siete palillos.
- Para la figura que estuviera en la posición 20 son necesarios 41 palillos ya que al sumar de dos en dos desde el 9 hasta llegar al 20 son 41.

Figura 5.35. Solución del estudiante E9

En la solución prototípica presentada en la figura 5.35 se identifica el *elemento lingüístico* "añadiendo dos palillos" que indica el *procedimiento* de formación de la figura de manera verbal. Este reconocimiento de una regla queda a nivel recursivo y no es suficiente para determinar el número de palillos de la figura en la posición 100, dado que el resolutor encuentra únicamente la variación dentro de la secuencia de valores.

Configuración 2. Formación de figuras tomando una figura como base. Las resoluciones que describe esta configuración se centran en la observación de la figura para encontrar el número de palillos de la posición 100.



Son necesarios para formar la 4ª figura 2 palillos más
Posición 20ª: la figura formada para la posición 20, sería 5 veces la figura 4, por lo que, si para formar la figura 4 han sido necesarios 9 palillos para formar la figura 20ª serían necesarios:
9 x 5 = 45 palillos. Pero a esas 45 hay que restarle 4, que son los palillos que se superponen.
TOTAL: 45 - 4 = 41 palillos son necesarios para formar la figura 20ª.

③ Cada figura que se forma, se añaden 2 palillos.
Posición 100ª: ~~en forma~~ esta forma sería 25 veces a figura, por lo que, si para formar la 4ª figura son necesarios 9 palillos, para formar la figura 100ª serían: 25 x 9 = 225 palillos. Sin embargo, si para ~~la fig~~ en la figura 20ª se superponían 4 palillos y era 5 veces la figura 4ª, la figura 100ª se superponen:

5 —— 4
25 —— x

$5 \cdot x = 25 \cdot 4$
$5x = 100$
$x = \frac{100}{5}$
$\boxed{x = 20}$ → 20 palillos se superponen por lo que, 225 - 20 = 205 palillos son necesarios para formar la figura 100ª.

Figura 5.36. Solución del estudiante E46

Como se observa en la figura 5.36, el maestro en formación elige una figura base (la figura que se corresponde con el número de palillos de la cuarta posición) para generar e inferir el número de palillos de las posiciones posteriores. Realiza como procedimiento el multiplicar por 5 y determina así el número de palillos de la posición 20, y considera los palillos que se duplican al "juntar" los "fragmentos" de la figura que ha elegido como base. Realiza el mismo procedimiento para determinar la posición 100, y se vale de la regla de 3 para determinar el número de palillos que se superponen, sin reconocer, en este caso, que lo hace de manera incorrecta.

Configuración 3. Razonamiento basado en la aplicación de la regla de 3. Aquí se agrupan las soluciones en las que se identifica erróneamente la solución de la tarea con un razonamiento proporcional que lleva a la aplicación de la regla de tres.

-Para la 4ª figura, se necesitaron 2 palillos más.

- Para formar la figura que está en la posición 20, se necesitan 36 palillos, porque con la 4ª figura hay 9 palillos, si 9 los multiplicamos por 4 veces, que serian 4 figuras que forman los 20.

- Para la figura en posición 100, necesita 180 palillos.

20 —— 36
100 —— x

$$x = \frac{100 \times 36}{20} = \frac{3600}{20} = 180$$

Figura 5.37. Solución del estudiante E50

En este caso, el estudiante, dado el modo de hallar el número de palillos de la posición 4ª asoció éste con un comportamiento constante (proporcional) que lo condujo a emplear la regla de 3, un procedimiento no justificado dada la naturaleza de la tarea.

Configuración 4. Razonamiento basado en múltiplos. En esta configuración se agrupan aquellas soluciones en las que el estudiante reconoce una característica común en el número de palillos de determinadas posiciones.

En el ejemplo prototípico de la figura 5.39 el elemento lingüístico "cada 5 posiciones aumentan 10 palillos" indica un el reconocimiento de una característica que siempre se cumple en la sucesión de números que representan al número de palillos que conforman las figuras. El estudiante emplea la notación "5=11", "10=21", "15=31" y "20=41" para denotar la correspondencia entre la posición y el número de palillos. Si se continuase la secuencia tendríamos "25=51", "30=61", 35=71" y así sucesivamente como se muestra

Posición	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
Palillos	81	91	101	111	121	131	141	151	161	171	181	191	201

a) Para formar la figura 4ª se necesitan 9 palillos

b) En la posición 20 hay 41 palillos. Porque cada 5 posiciones aumenta 10 palillos en la posición 5 = 11 palillos, en la 10 = 21, 15 = 31 y en la 20 = 41 palillos.

c) para la figura que ocupa el puesto 100 son necesarios 201 palillos. Mediante el mismo procedimiento que el ejercicio anterior

Figura 5.38. Solución del estudiante E137

Configuración 5. Razonamiento basado en la sumatoria de posiciones anteriores. Las soluciones que se agrupan en esta configuración basan la obtención del número de palillos de la posición 100 sumando los resultados anteriores.

La 4º figura estaría formada por 9 palillos ya que se van sumando 2 para cada figura.
De la 4º a la 20º figura hay 16, las cuales son formadas añadiendo dos palillos. Multiplicamos 16 · 2 = 32 palillos añadidos. 32+9= 41 palillos forman la figura 20.
De la figura 20 a la 100 hay 80 figuras. Multiplicamos 80 · 2 = 160 palillos añadidos. 160 + 41 = 201.

Figura 5.39. Solución del estudiante E4

En la solución que ejemplifica esta configuración, se aprecia cómo el maestro en formación parte del número de palillos de la posición 4 para hallar el de la posición 20. Realiza la diferencia entre las posiciones, es decir, entre la posición 20 y la cuarta hay 16 posiciones (20-4=16); el número de palillos de esas 16 posiciones es 32 (dado que se forma añadiendo dos palillos) más los de las primeras 4 posiciones, resulta 41. Este mismo razonamiento guía la obtención de los palillos que le corresponden a la posición 100.

Nivel 1. Nivel incipiente de algebrización

Configuración 6. Regla en términos no alfanuméricos. En esta configuración se recogen aquellas soluciones que articularon una regla en un lenguaje no alfanumérico. Por las diversas formas de analizar la secuencia de figuras se encontraron producciones que describen a fórmulas como $2n + 1$, $2(n - 1) + 3$, $3n - (n - 1)$ y $3 + [n + (n - 2)]$. En la figura 5.41 se presenta un ejemplo correspondiente a la última fórmula.

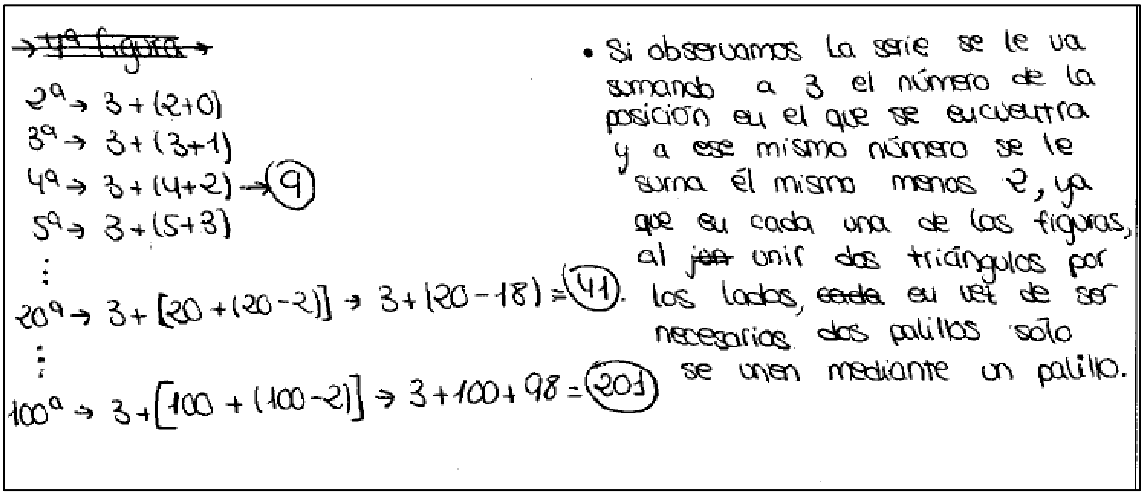


Figura 5.40. Solución del estudiante E35

El estudiante E35 escribe la secuencia de números naturales contextualizados para designar las figuras desde la 2ª posición hasta la 100ª. Establece una correspondencia entre la posición y el número de palillos necesarios para construir la figura, encontrando la respuesta para las posiciones pedidas (20ª → 41; 100ª → 201). La escritura permite identificar una relación entre el lugar que ocupa la figura en la serie y el número de palillos. Así, el estudiante identifica la regla general: N-ésimo lugar → Nº de palillos = $3 + [N + (N - 2)]$

Esta regla la enuncia verbalmente y mediante símbolos no formalizados: los puntos suspensivos (…) indican que la misma estructura se mantiene para todos los términos; la flecha (→), es la asignación de un valor (número de palillos) según el lugar que ocupa la figura en la serie. Estos símbolos evocan la escritura formal-literal que representa el término general de la sucesión “número de palillos”: $a_n = 3 + [n + (n - 2)] = 2n + 1$ Esta escritura aparecerá en niveles superiores de algebrización.

<u>Nivel 2. Nivel intermedio de algebrización</u>

Configuración 7. Regla en términos alfanuméricos. En esta configuración se agrupan todas aquellas soluciones en las que se estableció una regla en un lenguaje alfanumérico. Se identificaron fórmulas como $n + n + 1$, $2n + 1$, $2(n - 1) + 3$ y $3n - (n - 1)$. A continuación se describe esta última.

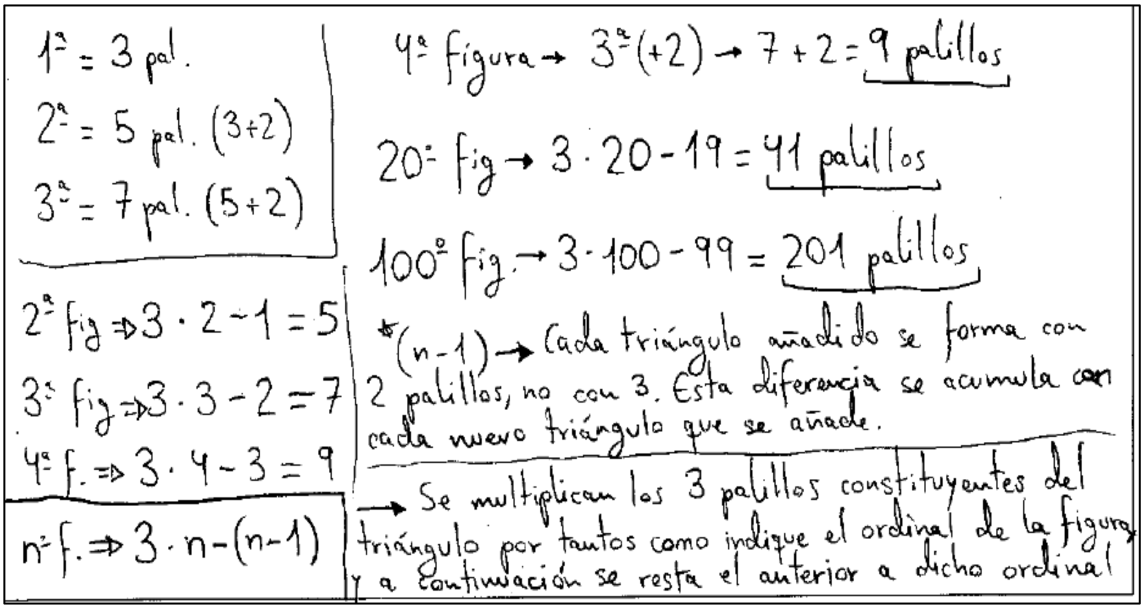


Figura 5.41. Solución del estudiante E15

Esta solución incluye los objetos indicados en la solución del estudiante anterior y además expresa el criterio de la correspondencia para un término general n, expresado con lenguaje natural y de manera simbólica – literal, *nºf* → *3n-(n-1).* La fórmula refleja las acciones que se deben hacer con los datos del problema específico; no se opera con las variables para obtener una forma canónica de dicha expresión. El estudiante no llega a formular el criterio de la correspondencia de forma canónica operando con los símbolos literales para obtener la función lineal: $f(n) = 2n+1$.

En la tabla 5.28 se recogen las frecuencias de las configuraciones cognitivas identificadas en las soluciones y el nivel de algebrización que le corresponde.

Tabla 5.28. Frecuencias de respuestas a la tarea 3 según niveles de RAE

Configuración	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Total
1. Razonamiento recursivo	2			2
2. Formación de figuras tomando una figura base	5			5
3. Razonamiento basado en la aplicación de la regla de 3	9			9
4. Razonamiento basado en múltiplos	4			4
5. Razonamiento basado en la sumatoria de posiciones anteriores	2			2
6. Regla en términos no alfanuméricos		48		48
7. Regla en términos alfanuméricos			78	78
Total	**22**	**48**	**78**	**148**

Se observó que 7 producciones fueron catalogadas como sin sentido/incompletas. Como se indica en la tabla, un número importante de la soluciones de los estudiantes se asocian a configuraciones de nivel 0 de algebrización. Llama la atención la aplicación de la regla de 3; parece que los estudiantes están muy familiarizados con el uso de este procedimiento y parecen desligarlo del contexto de la proporcionalidad dándole un uso "inconsciente". Al igual que se manifestó en la tarea 2, en esta tarea 3, los estudiantes utilizan los datos como si fuesen proporcionales.

En general las formas de resolución se concentran entre los niveles 1 y 2, por lo que el análisis del patrón parece ser regularmente accesible para los maestros en formación (Índice de dificultad = 72,26 % para el ítem b sobre la formulación de una regla general) lo que indica que esta tarea sobre el conocimiento avanzado puede ser abordado por los futuros maestros.

Tarea 4: La multiplicación incompleta. Hacer emerger el razonamiento algebraico de contenidos elementales no es una tarea sencilla. El maestro en formación requiere cambiar de foco, centrándose en las relaciones intrínsecas de la tarea y de ésta con otros contenidos, en lugar de un tratamiento aislado y procedimental. En el caso de la tarea 4, más que la aplicación del algoritmo de la multiplicación, se pretende abrir paso a una zona conceptual en donde los estudiantes pueden empezar a pensar algebraicamente (Ameron, 2002) acercándose a la idea de indeterminación con la introducción de espacios vacíos, observación de relaciones inversas entre las operaciones y uso del sistema posicional.

<u>Nivel 0. Ausencia de razonamiento algebraico</u>

Configuración 1. Aplicación del algoritmo de la multiplicación y operaciones básicas. Esta configuración describe aquellas soluciones en las que se utiliza las tablas de multiplicar para determinar los dígitos faltantes de la multiplicación.

Se aprecia en la figura 5.42 que el estudiante elige los dígitos de los espacios vacíos guiándose de las tablas de multiplicar. No identifica alguna propiedad y se centra en la realización de cálculos para obtener un resultado.

Para completar la multiplicación y determinar los números faltantes, he tomado como referencia el resultado final de la multiplicación, de tal forma que he ido colocando los números en el multiplicador para que el resultado final cuadrase.
Por ejemplo, como las unidades del resultado final de la multiplicación son 8, he colocado un 4 en la unidad del multiplicador para que al multiplicarlo por el 7 del multiplicando de 28. Colocaría un 8 y me llevaría 2. Si multiplico ahora 4 por 2, me da 8 y si le sumo el 2 que me llevaba 10, por tanto, colocaría 0 que al sumarlo con el 1 de abajo, suma 1 que es la cifra que aparece en las decenas del resultado final, por tanto está bien. De esta manera, he conseguido rellenar los huecos. Usando un poco la intuición y probando diferentes cifras para que cuadren.

Figura 5.42. Solución del estudiante E74

Nivel 1. Nivel incipiente de algebrización

Configuración 2. Aplicación de la operación inversa. Esta configuración agrupa aquellas soluciones en las que se identifica la relación inversa entre la multiplicación y la división.

Divido el resultado por 427 para obtener el otro factor de la multiplicación.

$$427x = 57218$$

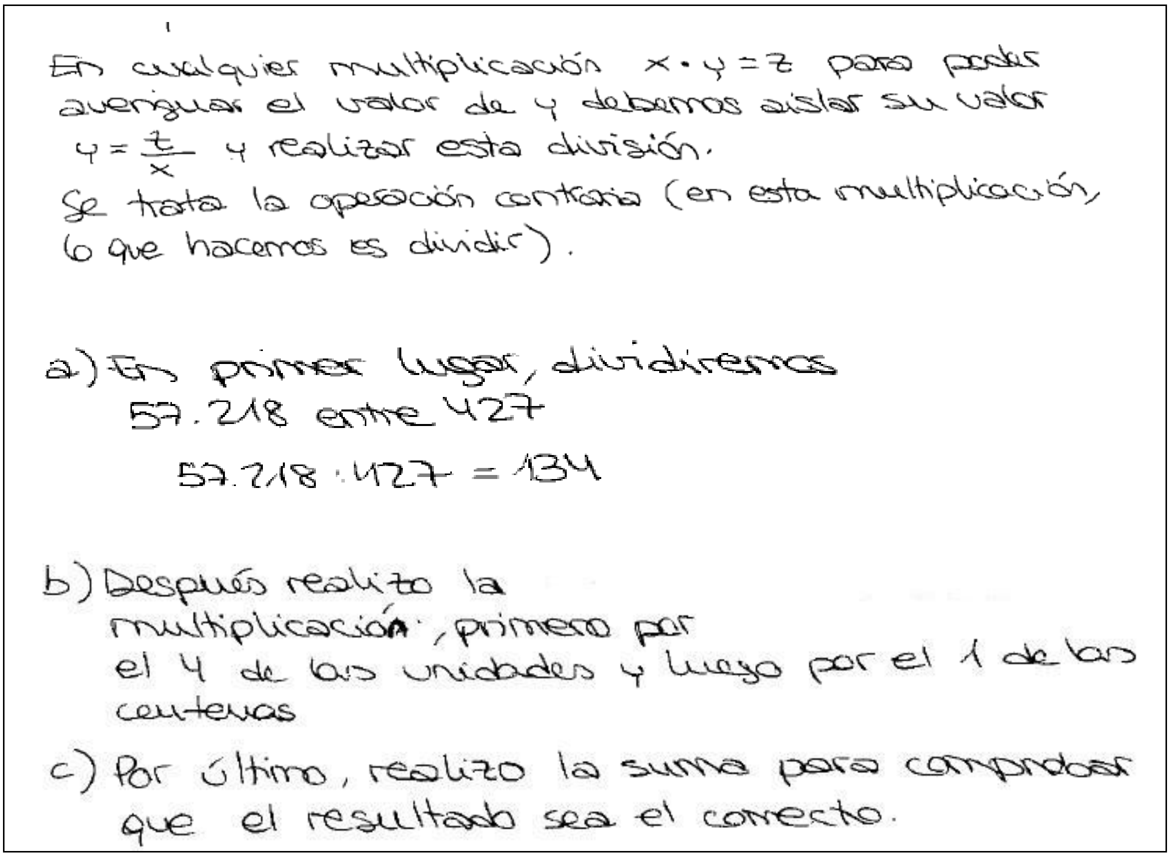
$$x = \frac{57218}{427} = 134$$

Una vez obtenidos los dos factores se realiza la multiplicación normal para sacar el resto de los números.

Figura 5.43. Solución del estudiante E5

En la resolución prototípica de la figura 5.43, se aprecia que el estudiante concibe al multiplicador como un número desconocido que denota con una literal, articulando una ecuación de la forma $Ax = B$, que resulta de la asociación de la multiplicación y la división como operaciones inversas. El signo igual indica la realización de una operación específica.

Configuración 3. Aplicación de la operación inversa, caso general. Esta configuración se caracteriza por el reconocimiento del caso general de la multiplicación; se denota expresiones como $x \cdot y = z$ para expresar el valor del multiplicador, multiplicando y el resultado. En la figura 5.44 se denota al multiplicador, multiplicando y al resultado como variables y lo asocia con su proceso inverso, el de división.


En cualquier multiplicación $x \cdot y = z$ para poder averiguar el valor de y debemos aislar su valor
$y = \frac{z}{x}$ y realizar esta división.
Se trata la operación contraria (en esta multiplicación, lo que hacemos es dividir).

a) En primer lugar, dividiremos
57.218 entre 427
57.218 : 427 = 134

b) Después realizo la multiplicación, primero por el 4 de las unidades y luego por el 1 de las centenas

c) Por último, realizo la suma para comprobar que el resultado sea el correcto.

Figura 5.44. Solución del estudiante E77

En la tabla 5.29 se muestran las frecuencias de las configuraciones cognitivas según los niveles de algebrización. De la tabla se desprende que la mayoría de las soluciones propuestas por los maestros en formación consisten en aplicar el algoritmo de la multiplicación, incluso cuando el tratamiento de operaciones inversas es algo con el que los maestros en formación debieran estar familiarizados. Pese a que los estudiantes resolvieron con éxito esta tarea (índice de dificultad = 97,42 %) las formas de abordarla promueven, en una minoría, la identificación de propiedades, en este caso, el de la multiplicación y división como operaciones inversas.

Tabla 5.29. Frecuencias de respuestas a la tarea 4 según niveles de RAE

Configuración	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Total
1. Aplicación del algoritmo de la multiplicación	87			87
2. Aplicación de la operación inversa		59		59
3. Aplicación de la operación inversa, caso general		9		9
Total	**87**	**68**		**155**

De manera general se aprecia que, de las 28 configuraciones cognitivas identificadas en las resoluciones de la práctica 1, 17 de ellas se concentran en el nivel cero de algebrización, tal y como se aprecia en la figura 5.46.

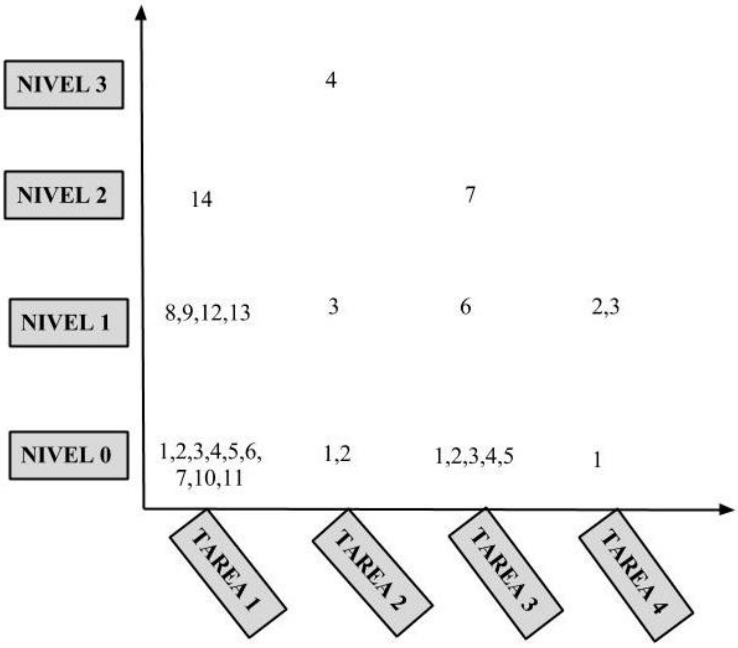


Figura 5.45. Niveles de algebrización en las tareas planteadas en la práctica 1

Esto indica una predisposición inicial de los estudiantes a enfocar la resolución de problemas mediante las herramientas propias de la aritmética.

4.3.1.2. Respuestas relacionadas con el conocimiento especializado del contenido (Parte B de la Práctica 1, reconocimiento de objetos y significados)

La parte B de la práctica 1 requiere la identificación de objetos matemáticos por parte de los estudiantes, de una solución consensuada entre los miembros del equipo, para cada una de las tareas propuestas en la parte A. Concretamente la consigna dada requería completar una tabla como la siguiente (mencionada previamente en el apartado 3.1.1.1):

Objetos matemáticos que se ponen en juego	**Significado** (Interpretación que se espera del estudiante)
REPRESENTACIONES (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas)	
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición, más o menos formal)	

PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
PROPOSICIONES (Enunciados para las cuales se requiere una justificación o prueba)	
ARGUMENTOS (Justificaciones, demostraciones, o pruebas de las proposiciones usadas)	

Se solicitó a los estudiantes que trabajando en equipo discutieran las soluciones que habían dado de forma individual y elaboraran la solución que ellos considerasen más correcta y completa y, a partir de ahí, realizaran el análisis de objetos y significados. Así se obtuvieron 15 producciones grupales. En el Anexo 12 incluimos las respuestas dadas por dos equipos que se analizan de manera sintética para evaluar su competencia inicial para realizar este tipo de análisis epistémico. La selección de los protocolos se realizó bajo el criterio de que los estudiantes hubieran identificado un número adecuado de objetos y significados matemáticos.

Como síntesis resaltamos que es posible apreciar de manera general que las dificultades presentadas en las resoluciones de los cuatro problemas entorno a la articulación de una regla (el ítem c de la limonada y el ítem b de los palillos) fueron de algún modo subsanadas durante la discusión grupal. Así lo reflejan las 2 soluciones grupales (y las restantes 13) propuestas a las 4 problemas, las cuales fueron realizadas correctamente en su totalidad.

Sin embargo, los objetos identificados y los significados conferidos por los estudiantes a las diversas entidades que intervienen en la resolución de los problemas resultó una tarea compleja para los futuros docentes, ya que los objetos matemáticos identificados se remiten superficialmente a las soluciones propuestas y raramente manifiestan las propiedades intrínsecas de las mismas. El reconocimiento de objetos algebraicos dentro de los objetos matemáticos también resultó escaso, mientras que la asignación de significados a los objetos matemáticos fue con frecuencia impertinente u omitida. En este sentido las producciones que se presentan en el Anexo 12 fueron las más completas en comparación con las restantes 13 producciones grupales, lo que indica que la identificación de objetos y significados es un reto para los maestros en formación.

4.3.2. Análisis de la implementación de la práctica 5 (Álgebra en educación primaria)

Mediante la realización de la práctica 1 sobre resolución de problemas y reflexión sobre los objetos matemáticos puestos en juego, realizada al comienzo del curso, y el análisis que hemos descrito en los apartados anteriores hemos podido constatar las carencias de los futuros profesores sobre reconocimiento de objetos de índole algebraica y los niveles de algebrización bajos que aplican en la resolución de las tareas. Estos resultados son concordantes con el estudio de evaluación realizado con los maestros mexicanos en formación descrita en el capítulo 4.

En este apartado de la memoria de tesis describimos la implementación de la acción formativa, aplicada a uno de los grupos de estudiantes, específicamente diseñada para promover el sentido algebraico. Dicha acción consiste en la práctica número 5 del conjunto de actividades prácticas incluidas en la Guía docente del curso, titulada, Álgebra en educación primaria, cuyo análisis a priori fue realizado en la sección 3.1.1.2 de este capítulo.

Esta intervención (práctica 5) se realizó de forma grupal; la organización de los grupos se mantuvo igual que en realización de la práctica sobre la identificación de objetos y significados matemáticos; por tanto también se registraron 15 producciones. Las cinco tareas que componen la práctica fueron aplicadas a un total de 56 estudiantes (32 mujeres y 24 hombres). Dado que cada tarea tiene varios apartados, para facilitar la lectura, se presenta en la tabla 5.38 la interpretaron que se realizó para la codificación de los datos.

Tabla 5.38. Ítems de cada una de las tareas de la práctica 5

a	**a_1**. Resuelve la tarea justificando las respuestas. **a_2**. Si es posible, resuélvela de varias formas.
b	**b_1**. Indica los "objetos algebraicos" que intervienen. **b_2**. Indica el nivel de algebrización que se pone en juego en la resolución. Justifica las respuestas.

Una primera variable inferida de los protocolos de respuesta fue el grado de corrección de las respuestas dadas a las tareas. Teniendo en cuenta que cada tarea tiene varios apartados el total de ítems es de 30 (Anexo 10); asignando 1 punto a cada respuesta correcta la puntuación máxima alcanzable es de 30 puntos. La figura 5.54 contiene el resumen estadístico de esta variable cuantitativa.

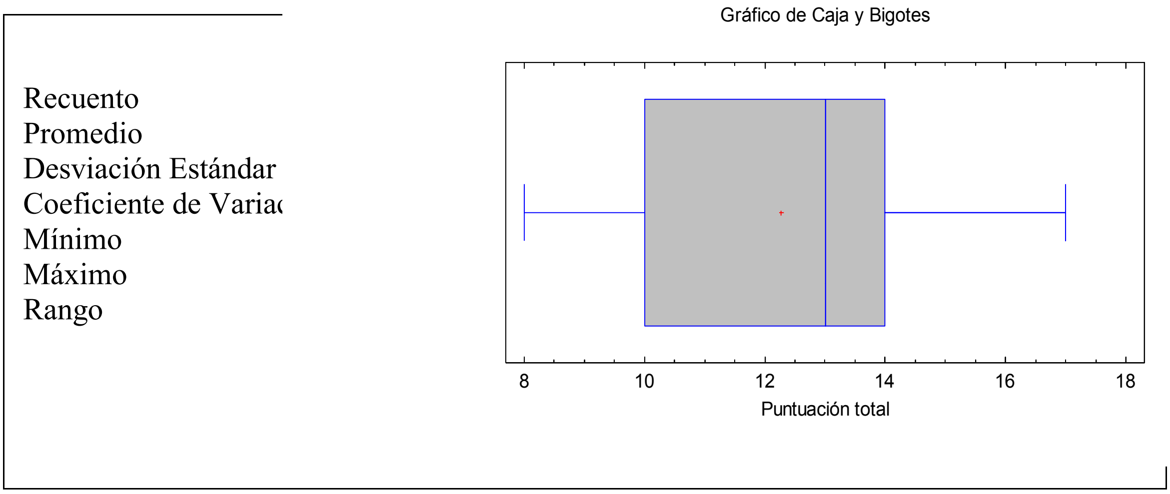


Figura 5.54. Puntuación total del cuestionario

Vemos que la media fue de 12 y la máxima puntuación registrada fue de 17 puntos, de un total de 30 puntos, lo que significa que el número de ítems que, pueden ser abordados y resueltos por los estudiantes fue relativamente bajo en esta fase del proceso formativo.

Tabla 5.39. El I.D de la práctica 5

Item	% de I.D
E1a1_Exp1	93,33
E1a1_Exp2	86,67
E1b1_Exp1	46,67
E1b1_Exp2	53,33
E1b2_Exp1	60,00
E1b2_Exp2	46,67
E2a1	93,33
E2b1	53,33
E2b2	40,00
E3a1	93,33
E3b1	66,67
E3b2	46,67
E4a1	93,33
E4b1	60,00
E4b2	33,33
E5a1	86,67
E5b1	46,67
E5b2	53,33

El índice de dificultad de cada una de las tareas se incluye en la Tabla 5.39. Las casillas en blanco (ítem a1) representan a las soluciones de las tareas, el porcentaje alto supone que los maestros en formación resolvieron exitosamente la mayoría de los enunciados de la práctica (al menos en la primera solución propuesta).

Las tonalidades grises indican si la identificación de objetos algebraicos se realizó adecuadamente por los estudiantes respecto a la solución prevista (ítem b1) y si el nivel de algebrización asignado por los estudiantes a dicha resolución se corresponde correctamente (ítem b2).

Llama la atención que la identificación de objetos algebraicos para la tarea 1 (que implica resolver dos expresiones: Exp1: $52 \times 11 =$

$52 \times 10 + \Delta$, Exp2: $\blacksquare + \blacksquare + 18 = \blacksquare + 53$) resultó difícil para los estudiantes, al igual que la tarea 2 (que implicaba resolver una desigualdad $\blacksquare + \Delta < 20$) y la tarea 4 sobre proporcionalidad (coste de los sándwiches). Los futuros docentes no reconocen objetos algebraicos que se correspondan con su solución planteada. Similarmente sucede para la tarea 3, un problema verbal (los medios de locomoción) y, la tarea 5, análisis de un patrón (secuencia de figuras). Por otro lado la asignación de niveles de algebrización a las soluciones no supera el 50% (exceptuando la tarea 5, con un 53%) en cuanto a una asignación correcta. Esto indica que para los maestros en formación es un reto asignar de forma justificada y correcta los niveles de algebrización de acuerdo a sus soluciones en esta fase del proceso formativo.

A continuación describimos los resultados que se obtuvieron en cada una de las tareas, lo que nos permite una apreciación específica del modo en que los estudiantes respondieron a la práctica 5. Se presentan los resultados analizando los ítems correspondientes al conocimiento común, especializado, avanzado y categorizados según los niveles de algebrización, tal como se muestra en la tabla 5.40:

Tabla 5.40. Distribución del contenido de las tareas (práctica 5) según tipo de conocimiento

<table>
<tr><th rowspan="2">FACETA</th><th rowspan="2">CONOCIMIENTO</th><th rowspan="2">NIVELES</th><th rowspan="2"></th><th colspan="5">Enunciado</th></tr>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th></tr>
<tr><th colspan="4"></th><th colspan="5">Ítems</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Epistémica</td><td>Común</td><td rowspan="2">0
1
2
3</td><td rowspan="2">Resolver la tarea</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Avanzado</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Especializado</td><td rowspan="3"></td><td>Resolver la tarea de varias formas</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td>Identificar objetos algebraicos</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td>Asignación de niveles</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td></tr>
</table>

A continuación presentamos una síntesis de las respuestas dadas por los equipos que resolvieron las tareas de la práctica 5 agrupadas en tipos de configuraciones cognitivas (indicando los objetos movilizados) y en niveles de algebrización. Hay que tener en cuenta que en esta fase de la investigación se trata de una evaluación formativa, ya que una vez entregados los informes escritos se dedicó una sesión para la presentación y discusión de las respuestas, lo cual supone una continuación de la acción formativa.

4.3.2.1. Análisis de las respuestas a las tareas relacionadas con el conocimiento común y avanzado del contenido

Para realizar el análisis de las respuestas a los ítems que ponen en juego conocimiento común y avanzado del contenido, decidimos considerar todas las soluciones propuestas por los estudiantes y analizar las formas de resolución de las mismas. En la tabla 5.41, se informa sobre el número total de soluciones propuestas por cada equipo a cada enunciado propuesto en la práctica; más adelante analizaremos la naturaleza de estas soluciones.

Tabla 5.41. Número de soluciones propuestas por los estudiantes para cada enunciado

Equipo	Enunciado 1		Enunciado 2	Enunciado 3	Enunciado 4	Enunciado 5
	Exp1	Exp2				
A1-1	2	2	2	2	2	2
A1-2	2	1	1	1	2	1
A1-3	2	2	1	1	3	1
A1-4	2	2	1	2	2	2
A1-5	2	2	2	2	2	3
A2-1	1	1	2	1	1	1
A2-2	1	1	1	1	1	1
A2-3	3	3	1	3	3	2
A2-4	2	2	1	1	2	1
A2-5	2	1	1	1	2	1
A3-1	2	2	1	3	2	2
A3-2	3	1	2	3	3	2
A3-3	2	2	2	3	3	2
A3-4	2	1	1	1	2	2
A3-5	2	1	2	1	2	2
Total	**30**	**24**	**21**	**26**	**32**	**25**

De la tabla 5.41 se desprende que para el enunciado 1, se manifestaron 54 soluciones (30 para Expresión 1, y 24 para Expresión 2), para el enunciado 2 se articularon 21 soluciones y para el enunciado 3, 26. Por otro lado, para el enunciado 4 y 5 se propusieron 32 y 25 soluciones respectivamente. A continuación se analizamos las respuestas agrupándolas en tipos de configuraciones cognitivas según los objetos movilizados en las soluciones elaboradas por los equipos.

Enunciado 1: Igualdades con datos desconocidos. En esta tarea se consideran las dos igualdades propuestas por separado. Para la primera igualdad $52 \times 11 = 52 \times 10 + \Delta$, los estudiantes propusieron 30 soluciones en total. Hemos identificado 3 configuraciones diferentes.

Nivel 0: Ausencia de razonamiento algebraico

Configuración 1.Operacional. Esta configuración describe aquellas soluciones en las que la sentencia se resuelve llevando a cabo las operaciones indicadas para obtener un resultado. En la figura 5.55 se muestra un ejemplo prototípico de esta configuración en la que no existe ninguna manifestación de usar alguna propiedad.

$$52 \times 11 = 52 \times 10 + \Delta$$

52 x 11 = 572

52x 10 = 520

572 – 520 = 52

Δ = 52

Figura 5.55. Resolución planteada por el equipo A1-1

Como se aprecia en la figura 5.55 el resolutor realiza como procedimientos las operaciones indicadas en cada lado de la igualdad (multiplicación), para posteriormente realizar la sustracción de los datos obtenidos. El signo igual tiene una acepción operacional y aunque en la expresión existe un dato desconocido y simbolizado que evoca el concepto de incógnita, su valor se obtiene como resultado de operaciones. También se presentó el caso en el que se concibe a la multiplicación como suma repetida, es decir, en lugar de realizar la multiplicación $52x11$, se realiza como procedimiento la sumatoria de 11 veces 52 (o viceversa).

Configuración 2: Sustitución directa. En esta configuración se agrupan aquellas soluciones en las que el valor que se desconoce es sustituido directamente por un valor numérico sin una justificación aparente de tal elección. La figura 5.50 muestra la solución del equipo A1-4 en la que se asigna de manera directa el valor numérico al símbolo. No hay evidencia de algún tratamiento previo para realizar esta asignación.

* 52 x 11 = 52 x 10 + (52)

Figura 5.56. Resolución planteada por el equipo A1-4

En la resolución del equipo A1-4 se aprecia que al símbolo se le asigna un valor numérico desde el inicio del proceso; en términos de Kücheman, (1981) se interpretaría como una letra evaluada. Sin embargo, no se realiza ninguna manipulación posterior, así como tampoco ninguna argumentación para concluir que ambos miembros de la igualdad son equivalentes.

Nivel 1: Nivel incipiente de algebrización

Configuración 3. Uso de propiedades. Aquí se recogen aquellas soluciones en las que se hizo uso de una propiedad para la resolución de la tarea.

Método 1

$52 \times (10 + 1) = 52 \times 10 + \Delta$

$(52 \times 10) + (52 \times 1) = 52 \times 10 + \Delta$

$52 \times 1 = \Delta$

$\Delta = 52$

Figura 5.57. Resolución planteada por el equipo A1-1

En la solución propuesta por el equipo A1-1, se identifica la descomposición del número 11 en sumandos que se relacionan con los elementos del lado derecho de la expresión. Consecuentemente la aplicación de la propiedad distributiva y cancelativa emergen en la solución planteada. Se pone de manifiesto el signo igual es su acepción de equivalencia. Actividades como ésta, según el análisis a priori, se corresponden con un primer nivel de algebrización.

Por otro lado, para la segunda igualdad $\blacksquare + \blacksquare + 18 = \blacksquare + 53$ se identificaron 3 configuraciones que se describen a continuación.

Nivel 0: Ausencia de razonamiento algebraico

Configuración 4: Asignación de valores. Esta configuración describe aquellas soluciones en las que el procedimiento central de resolución es la asignación de valores específicos.

La última solución que ofrecemos sería como jugar al juego de más o menos, es decir: cogeríamos una cifra aleatoria como 30 y la sustituiríamos en ■ después de sustituirlo la igualdad quedaría de la siguiente forma 78 = 83, por lo que podemos observar que la solución no es 30 si no un número mayor a este, ahora lo intentamos con el número 40 después de sustituirlo la igualdad nos queda de la siguiente forma 98 = 93, en este caso nos pasamos por lo que la solución es un número menor, pero dicha solución ya esta acotada, es decir, se encuentra entre 40 y 30, así iríamos probando hasta dar con la solución que es 35.

Figura 5.58. Resolución planteada por el equipo A2-3

En la resolución planteada en la figura 5.58 se aprecia el uso de valores específicos para sustituir en el símbolo. Llama la atención el uso de la frase "cifra aleatoria" con el que se indica el procedimiento de asignación aleatoria. No se pone de manifiesto la propiedad de que el símbolo representa un solo valor (incógnita). También se consideró en esta configuración la resolución que indicaba que se tenían que probar los números 1,2,3,4 …., y así sucesivamente hasta encontrar el número adecuado.

Nivel 1: Nivel incipiente de algebrización

Configuración 5: Igualdad como equivalencia. En esta configuración se recogen aquellas soluciones en las que se manifiesta el tratamiento equivalente en ambos lados de la sentencia.

■ + ■ + 18 = ■ + 53

■ + 18 = 53

■ = 53 – 18

■ = 35

Los alumnos se dan cuenta de que todos los ■ deben de tener el mismo valor para que la igualdad se cumpla, lo que han hecho los alumnos es suprimir ■ de ambos lados de la igualdad de ese modo se disponen a restar 53 – 18 y les da como resultado 35, de ese modo hacen una simple sustitución para ver si se da la igualdad, para ello donde ven un ■ ponen 35, y de ese modo queda la operación de la siguiente forma: 35 + 35 + 18 = 35 + 53; 88 = 88 por tanto, la igualdad se cumple y la operación está bien realizada, toman la igualdad como una equivalencia, van suprimiendo valores de cada lado de la igualdad.

Figura 5.59. Resolución planteada por el equipo A1-5

En el ejemplo prototípico de la figura 5.53 se muestra que la solución dada por el subgrupo A1-5 pone de manifiesto la igualdad como indicador de equivalencia de expresiones. Llama la atención, el señalamiento de la propiedad de que todos los símbolos deben tener el mismo valor, es decir, son iguales. Emerge la propiedad cancelativa y el significado de la igualdad como equivalencia.

Nivel 3: Nivel avanzado de algebrización

Configuración 6: Opera con el valor desconocido. En esta configuración se agruparon las soluciones que manifestaron el uso de transformaciones elementales. Se identificaron dos casos; en el primer caso, se manipula el símbolo transponiendo términos; en el segundo caso se realiza la sustitución del símbolo por una literal para posteriormente transponer términos semejantes (figuras 5.54 y 5.55 respectivamente).

$$\blacksquare + \blacksquare + 18 = \blacksquare + 53$$
$$\blacksquare + \blacksquare - \blacksquare = 53 - 18$$
$$\blacksquare = 35$$

Figura 5.60. Resolución planteada por el equipo A1-1

$$X+X+18 = X + 53$$
$$2X + 18 = X + 53$$
$$X + 18 = 53$$
$$X = 53 - 18$$
$$X = 35$$

Figura 5.61. Resolución planteada por el equipo A3-1

En la solución planteada en la figura 5.54 se procede a la agrupación de términos semejantes; los símbolos en el miembro izquierdo de la expresión y los datos numéricos en el miembro derecho para reducir los términos semejantes. Por otro lado, la solución planteada en la figura 5.55, realiza la agrupación $X + X = 2X$ (lo que no ocurre con ■) para posteriormente realizar transformaciones elementales en ambos lados de la expresión. El signo igual se manifiesta en su acepción de equivalencia y no se justifica el procedimiento con el uso de propiedades o al menos no hay información suficiente en las respuestas para inferir si los estudiantes conocen el significado de las operaciones que realizan, aunque se infiere que cuentan con cierto conocimiento dadas las resoluciones adecuadas que manifiestan.

De la tabla 5.42 se desprende que para la expresión 1, los maestros en formación proponen soluciones de índole operacional y de uso de propiedades lo que indica que conciben la diferencia del uso del signo igual en esas dos acepciones. La mayoría de las soluciones propuesta para expresión 2 se concentran en la configuración 6; los futuros maestros tienden a interpretar esta expresión como si fuese una ecuación que hay que resolver.

Tabla 5.42. Frecuencias de respuestas del enunciado 1 según niveles de RAE

Configuración	**Nivel 0**	**Nivel 1**	**Nivel 3**	**Total**
1. Operacional	16			16
2. Sustitución directa	2			2
3. Uso de propiedades		12		12
				30
4. Asignación de valores	3			3
5. Igualdad como equivalencia		3		3
6. Operar con el valor desconocido			18	18
				24
Total de soluciones	**21**	**15**	**18**	**54**

Tal como se sugirió en el análisis a priori, la mayoría de los estudiantes determinan correctamente los valores desconocidos (índice de dificultad = 93, 33%) lo que indica cierto dominio del conocimiento común del contenido. Sin embargo, las formas de hallar la solución se corresponden con un nivel cero de algebrización. Llama la atención lo familiar que le resulta a los estudiantes interpretar la expresión $\blacksquare + \blacksquare + 18 = \blacksquare + 53$ en términos de x y operar con ella.

Enunciado 2: La desigualdad con datos desconocidos. Esta tarea pone de manifiesto el concepto de variable al introducirlo por medio de la expresión $\blacksquare + \Delta < 20$, los símbolos representan a un conjunto de valores. Las resoluciones manifestadas por los estudiantes se han agrupado en 5 configuraciones que a continuación se presentan.

<u>Nivel 0: Ausencia de razonamiento algebraico</u>

Configuración 1: Fijar un valor y variar el otro. Se recogen en esta configuración las soluciones en las que se le asignan valores particulares a uno de los símbolos para determinar el conjunto solución del símbolo restante.

- Una posible solución podría ser dándole valores al □ y seguidamente indicar el espacio muestral. Por ejemplo:

  □ = 1
  △ = E {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18}

En esta respuesta, dependiendo del valor que se le dé al □ , del 0 al 19, el espacio muestral del △ será más o menos amplio, ya que si por ejemplo, el niño prueba a darle 3 al △, resolvería el problema diciendo que □ es 17 por lo que el espacio muestral sería E= {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16}.

Figura 5.62. Resolución planteada por el equipo A1-1

En la solución del equipo A1-1 de la figura 5.56 se pone de manifiesto un ejemplo de cómo se obtiene el conjunto solución para el símbolo Δ, particularizando $\blacksquare = 1$. El elemento lingüístico "dependiendo del valor que se le dé al ■, del 0 al 19" indica el reconocimiento por parte de los estudiantes de que los conjuntos solución posibles depende de la relación entre las variables. Llama la atención el uso impertinente de "espacio muestral" (objeto matemático empleado en probabilidad) para denotar el conjunto solución de la variable.

Configuración 2: Interpretación tabular. Esta configuración representa a una única solución. En la figura 5.63 se aprecia el conjunto solución proporcionado por los estudiantes, donde el símbolo ■ puede tomar valores de 0 al 19 al igual que el símbolo Δ. El conjunto solución representado es el de los enteros positivos.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
10	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
11	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
12	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
13	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
14	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
15	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
16	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
17	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
18	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
19	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38

Asigna valores entre 0 y 19 (por ser menor estricto) a los dos elementos y comprueba en que casos el resultado de la operación da valores por debajo de 20.

Figura 5.63. Resolución planteada por el equipo A1-5

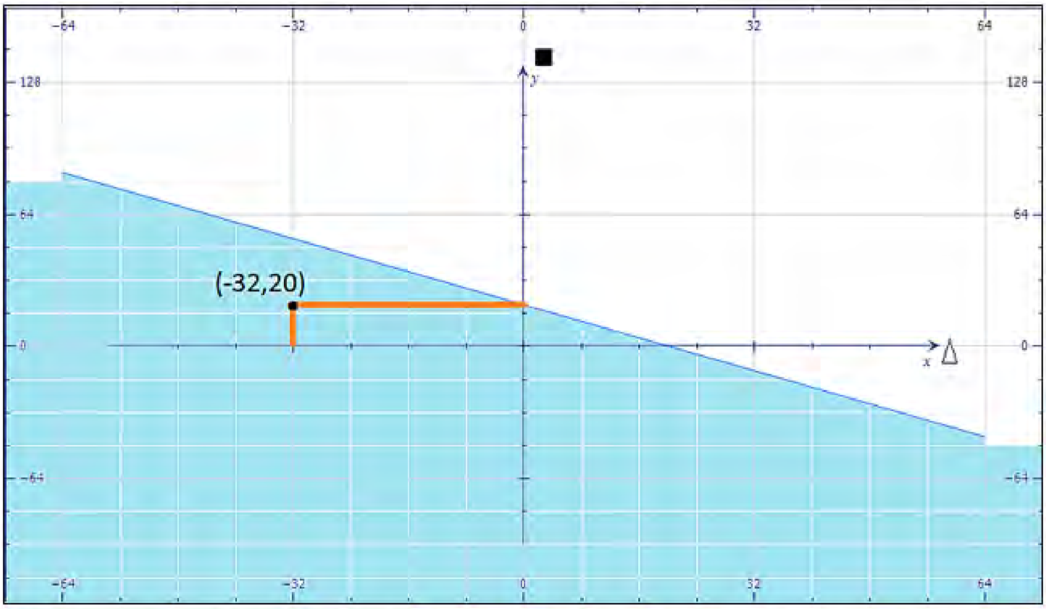
La resolución planteada es completamente numérica, la dependencia entre los valores que pueden adquirir los símbolos no queda explícita por completo.

<u>Nivel 1: Nivel incipiente de algebrización</u>

Configuración 3: Interpretación gráfica. Esta configuración representa a aquellas soluciones en las que se representa el conjunto solución utilizando una gráfica.

En la figura 5.64 se aprecia que los estudiantes consideran que la inecuación tiene infinitas soluciones dado que consideran los valores negativos. Se presentan inconsistencias en los procedimientos para abordar la tarea, al considerar a los números negativos parte del conjunto solución. Sin embargo, se resuelve una inecuación tipo $cx + d < p$) sobre la cual se realiza el trazado de la gráfica.

Si designamos al cuadrado la letra 'y' y al triángulo le designamos la letra 'x', podemos obtener todos los resultados posibles al problema con la inecuación y<20-x



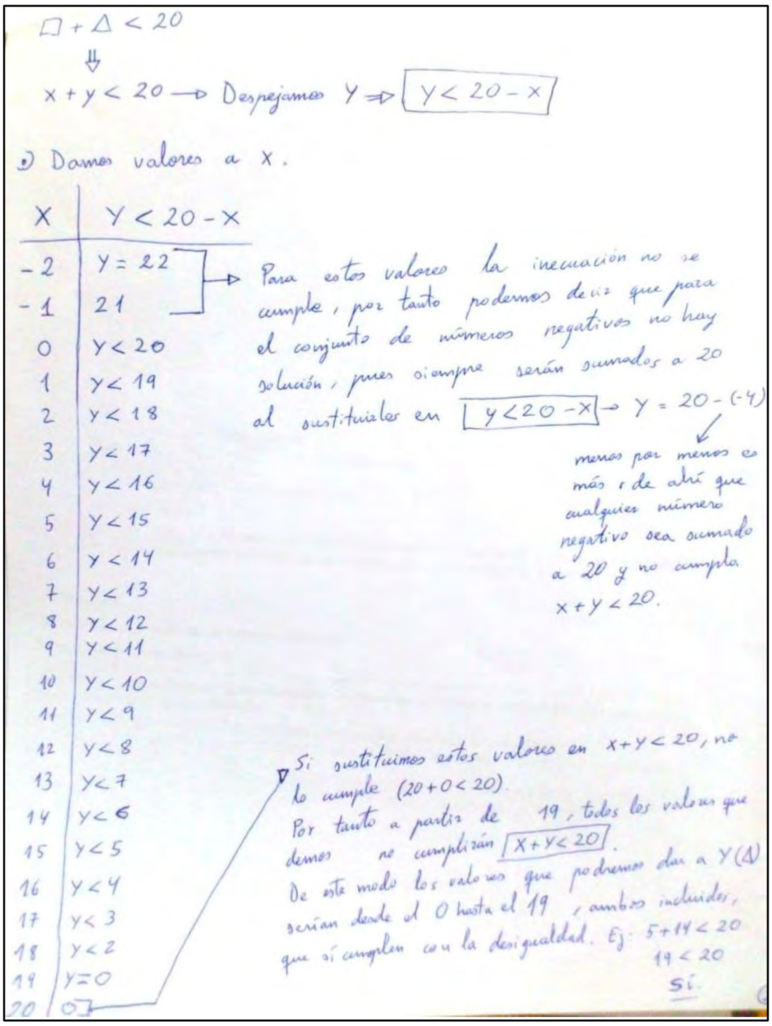
Aquí se muestra gráficamente las soluciones al problema, así que si por ejemplo, cogemos un valor al azar para el cuadrado de 20, el triangulo debe de ser menor que 0, como es el caso del ejemplo propuesto en la ilustración.

Figura 5.64. Resolución planteada por el equipo A1-2

Nivel 3: Nivel incipiente de algebrización

Configuración 3: Despejar una variable en términos de la otra variable. Lo característico de esta configuración es que recoge aquellas soluciones en las que se transponen términos de la desigualdad, despejando Δ en términos de ■, para posteriormente fijar un valor y expresar el conjunto solución en términos de una desigualdad. Se manifestó la tendencia de "reinterpretar" los símbolos en términos de literales.

En la solución expuesta en la figura 5.65 por el equipo A3-5, se pone de manifiesto la utilización de una tabla que guía la asignación de valores. Se realiza un procedimiento de despeje, para definir un símbolo en términos del otro, es decir, la inecuación se transforma en otra diferente aplicando una propiedad algebraica. Los estudiantes justifican a través de 2 ejemplos específicos el hecho de que los números negativos no se consideran en el conjunto solución. La solución a la función proposicional dada en la tarea se expresa como una familia de conjuntos finitos de valores: $\{0,1,2 \dots 18\}$, $\{0,1,2 \dots 17\}$, $\{0,1,2 \dots 16\}, \dots, \{0\}$, expresados con la notación de desigualdad.



$\square + \Delta < 20$

$\Downarrow$

$x + y < 20 \rightarrow$ Despejamos $Y \Rightarrow \boxed{Y < 20 - x}$

• Damos valores a x.

X	Y < 20 − X
−2	Y = 22
−1	21
0	Y < 20
1	Y < 19
2	Y < 18
3	Y < 17
4	Y < 16
5	Y < 15
6	Y < 14
7	Y < 13
8	Y < 12
9	Y < 11
10	Y < 10
11	Y < 9
12	Y < 8
13	Y < 7
14	Y < 6
15	Y < 5
16	Y < 4
17	Y < 3
18	Y < 2
19	Y = 0
20	0

Para estos valores la inecuación no se cumple, por tanto podemos decir que para el conjunto de números negativos no hay solución, pues siempre serán sumados a 20 al sustituirlos en $\boxed{Y < 20 - X} \rightarrow Y = 20 - (-4)$

menos por menos es más y de ahí que cualquier número negativo sea sumado a 20 y no cumpla $x + y < 20$.

Si sustituimos estos valores en $x + y < 20$, no lo cumple $(20 + 0 < 20)$. Por tanto a partir de 19, todos los valores que demos no cumplirán $\boxed{X + Y < 20}$. De este modo los valores que podremos dar a $Y(\Delta)$ serán desde el 0 hasta el 19, ambos incluidos, que sí cumplen con la desigualdad. Ej: $5 + 14 < 20$
$14 < 20$
Sí.

Figura 5.65. Resolución planteada por el equipo A3-5

A continuación, en la tabla 5.43, se presentan las frecuencias de las configuraciones cognitivas asociadas a las soluciones de acuerdo a los niveles de algebrización.

Tabla 5.43. Frecuencias de respuestas del enunciado 2 según niveles de RAE

Configuración	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 3	Total
1. Fijar un valor y variar otros	12			12
2. Interpretación tabular	2			2
3. Interpretación gráfica		2		2
4. Despejar una variable en términos de otra variable			5	5
Total de soluciones	**14**	**2**	**5**	**21**

El análisis de la inecuación a través del uso de gráficos (configuración 4), o utilizando una tabla de "correspondencia" (configuración 3), proporcionan medios pertinentes para promover el RAE. Al contrario de lo que se indicó en el análisis a priori, las soluciones de los maestros en formación sugieren cierta comprensión de las características de las tareas reconociendo que el conjunto solución de Δ depende del valor asignado a ■ (índice de dificultad = 93, 33 %). Esto indica cierto dominio del conocimiento común del contenido. Sin embargo, sus resoluciones se agrupan prioritariamente en un nivel cero de algebrización en el predomina la asignación de valores a los símbolos.

Enunciado 3: Los medios de locomoción. Esta tarea implica resolver un problema verbal. Se identificaron 3 configuraciones cognitivas según las soluciones planteadas a esta tarea.

Nivel 0: Ausencia de razonamiento algebraico

Configuración 1: Resolución numérica. En esta configuración se agrupan aquellas soluciones en las que se utilizaron operaciones aritméticas para resolver la tarea.

- Otra solución es a través de la cuenta de la vieja:

Si de cada 3 alumnos que van andando hay 1 que va en coche, de cada 4 alumnos en total (3+1) hay 1 que va andando (la cuarta parte), por lo tanto de cada 200 alumnos, 50 irían coche (la cuarta parte), y de cada 12 alumnos 3 irían coche, por lo que 50 (la cuarta parte de 200) + 3 (la cuarta parte de 12) = 53 alumnos irían en coche. La solución sería que 53 alumnos irían en coche mientras que el triple de 53, es decir, 159 irían andando.

Figura 5.66. Resolución planteada por el equipo A1-1

En esta resolución del equipo A1-1 se aprecia que se realizan únicamente cálculos y no se pone en juego el uso de propiedades. No hay manifestación de algún objeto algebraico.

Configuración 2: Aplicación de la regla de 3. A esta configuración se asocian aquellas soluciones en las que se utilizó la regla de 3 como procedimiento para encontrar la solución a esta tarea. Aunque se pudo haber denotado como parte de la configuración 1, distinguimos estas soluciones por la persistencia de los estudiantes en la aplicación de este método en las diversas tareas planteadas.

En esta situación, observamos que hay 2 medios de locomoción para ir a la escuela; andando y en coche. Se nos dice que por cada alumno que va en coche, hay 3 que van andando. En este punto podemos llegar a la siguiente proporción:

4(niños en total)------------------→ 3 van andando

212 (niños en la escuela)-------→ X van andando

X=159 niños que van andando

Una vez obtenemos el número de niños que va andando a clase, solo queda restar al número total de alumnos, los que van andando para que obtengamos los que acuden al colegio en coche.

212 – 159= 53 niños que van en coche

Aclaración gráfica

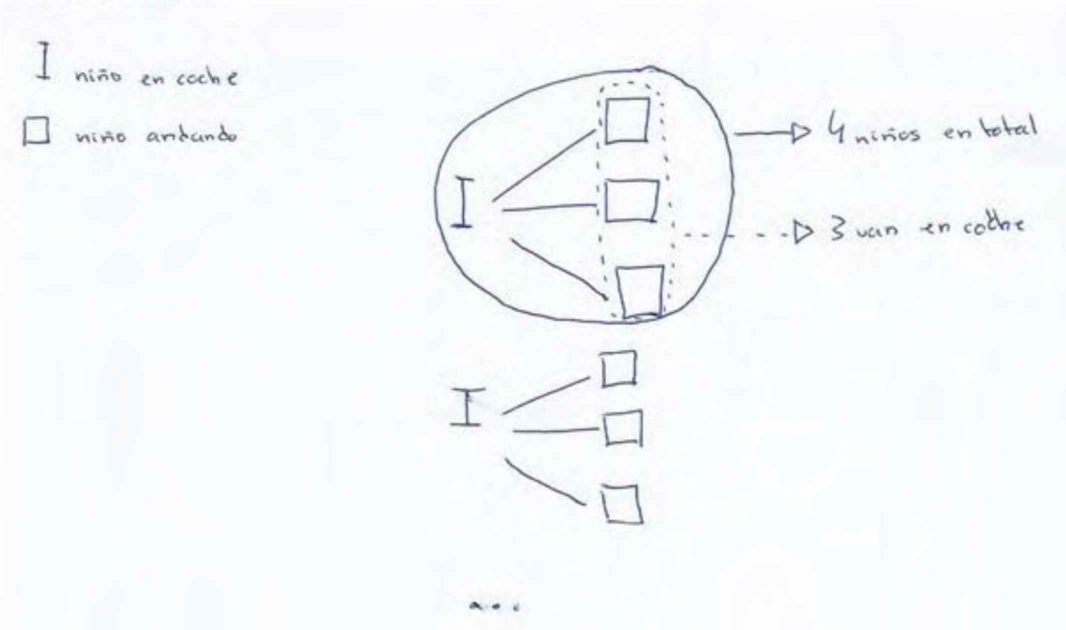


Figura 5.67. Resolución planteada por el equipo A3-5

De la solución planteada en la figura 5.67 se aprecia la identificación del concepto de proporción y su asociación a la regla de 3. Aunque denota con una literal el valor que se desconoce, su valor es hallado aplicando un procedimiento básicamente aritmético. No emerge ningún objeto algebraico.

Nivel 2: Nivel intermedio de algebrización

Configuración 3: Planteamiento de una ecuación. Esta configuración recoge aquellas soluciones que se caracterizan por el planteamiento de una ecuación.

212= x+3x
212= x·4
x= 212/4
x=53; **53** alumnos van en coche y 212-53= **159** alumnos van andando.

Figura 5.68. Resolución planteada por el equipo A1-4

En la solución planteada en la figura 5.68 por el equipo A1-4 se pone de manifiesto conceptos como ecuación e incógnita. Se trata de una ecuación de la forma $Ax + B = C$, por lo tanto no se opera con el valor que se desconoce. En este caso el estudiante modeliza adecuadamente el problema traduciendo de un lenguaje verbal a un lenguaje alfanumérico.

Nivel 3: Nivel consolidado de algebrización

Configuración 4. *Planteamiento de un sistema de ecuaciones*. Se agrupan en esta configuración aquellas soluciones en las que se tiene como planteamiento inicial un sistema de ecuaciones.

x= alumnos en coche, y = alumnos andando

x+ y=212 x+3x=212, 4x=212, x=53
y=159
y=3x

Figura 5.69. Resolución planteada por el equipo A2-5

En la solución prototípica planteada en la figura 5.69 se reconocen dos incógnitas (x, y) y se expresa una en términos de otra; esta acción sugiere el reconocimiento de cierta dependencia entre las incógnitas, aunque su posterior sustitución en la expresión principal ($x + y = 212$) la reduce a una expresión de la forma $Ax + B = C$; el planteamiento inicial lo hace diferente a la configuración 3.

En la tabla 5.44 se muestran las frecuencias de cada configuración respecto al nivel de algebrización asignado.

Tabla 5.44. Frecuencias de respuestas del enunciado 3 según niveles de RAE

Configuración	**Nivel 0**	**Nivel 2**	**Nivel 3**	**Total**
1. Resolución numérica	13			13
2. Regla de 3	4			4
3. Planteamiento de una ecuación		4		4
4. Planteamiento de un sistema de ecuaciones			5	5
Total de soluciones	**17**	**4**	**5**	**26**

La resolución de esta tarea resultó accesible para los maestros en formación (índice de dificultad =93,33 %), en su mayoría determinaron el número de alumnos que van a pie y en autobús. Sin embargo, 13 de las 26 soluciones tienen asociada una configuración de resolución numérica lo que indica que los estudiantes abordan la resolución del problema utilizando la aritmética. El planteamiento de una ecuación de la forma $Ax + B = C$ resultó difícil.

Enunciado 4: El coste de los sándwiches. Para este enunciado se identificaron 5 configuraciones que a continuación se describen.

Nivel 0: Ausencia de razonamiento algebraico

Configuración 1: ¿Cuánto por uno? Esta configuración se caracteriza por la identificación de la razón unitaria, a saber, un sándwich por 3 euros.

2 sándwich=6 euros
1 sándwich=3 euros

50sandwich x 3euros=150 euros

Hemos resuelto esta actividad mediante la deducción, es decir, hemos partido de que si dos unidades cuestan 6 euros, una unidad costará 3 euros (6/2= 3) y a partir de ahí, hemos multiplicado 50 unidades (sándwich) por el precio de una unidad 3 euros, con lo cual hemos obtenido la cifra de 150 euros, al igual que en el caso anterior (3x50= 150 sandwich)

Figura 5.70. Resolución planteada por el equipo A3-5

La solución planteada en la figura 5.70 pone énfasis en la realización de operaciones, no hace referencia a propiedades. Se limita a determinar el precio por unidad para posteriormente indicar (utilizando una multiplicación) el precio de 50 unidades.

Configuración 2: Unidad compuesta. Soluciones en las que se considera la relación 2 sándwiches cuestan 6 euros, para determinar la solución.

2) 2 =6€→ x10→ 20 =60 € (se realiza la misma operación, por lo tanto tendríamos 40 sándwiches) para los 10 que nos falta multiplicamos los 2 y los 6 € x5 → 10 = 30 euros. Para finalizar sumamos todo→ 20=60

20=60
+ 10=30
----
50 =150

Figura 5.71. Resolución planteada por el equipo A1-1

Similarmente a como ocurre en la configuración 1, en esta configuración 2 se toma como unidad el precio de 2 unidades (de sándwich) para determinar que 20 unidades valdrían 60 euros y posteriormente a través de la realización de operaciones encontrar la solución a la tarea.

Configuración 3: Aplicación de la regla de 3. En esta configuración se agrupan aquellas soluciones que emplean el procedimiento de regla 3.

2 ----------- 6 €
50 ----------- x

$X = \frac{50 \cdot 6}{2}$; X= 150 €

Figura 5.72. Resolución planteada por el equipo A3-3

En la solución planteada en la figura 5.72 se pone de manifiesto el uso de la regla de 3 como procedimiento de solución, no hay evidencia suficiente para indicar si el equipo A3-3 asocia este método con el concepto de proporción. Aunque designan el valor desconocido con una literal, el valor de ésta se obtiene a través de la realización de operaciones aritméticas.

Configuración 4: Correspondencia. Se asocian a esta configuración aquellas soluciones que indican el resultado de la tarea en un arreglo de correspondencia.

1…3	4…12
2…6	5…15
3…9	50…150

Figura 5.73. Resolución planteada por el equipo A1-3

En la solución planteada en la figura 5.73 la secuencia de puntos indican una correspondencia entre los datos; la columna de la izquierda indica las unidades del sándwich y la columna de la derecha el precio que le corresponde. La mayoría de las soluciones agrupadas en esta configuración no muestran evidencia explícita y consciente de una posible conexión con el concepto de función.

<u>Nivel 2: Nivel intermedio de algebrización</u>

Configuración 5: Interpretación funcional. En esta configuración se agrupa una única solución en la que se articuló una expresión de índole funcional.

N= número de sándwich
y= precio final y=50x3= 150

n	y = n x 3
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15
…	…

Este alumno realiza una tabla y se da cuenta que la función que la rige es f(n)=nx3 y la aplica para el valor 50.

Figura 5.74. Resolución planteada por el equipo A3-2

En la figura 5.67 se plantea la interpretación del equipo A3-2 del enunciado 4. Se identifica la variable independiente y la variable dependiente, además de expresarlo adecuadamente en términos alfanuméricos $f(n) = n \times 3$.

En la tabla 5.45 se recogen las frecuencias de las configuraciones relativas al enunciado 4 según los niveles de algebrización.

Tabla 5.45. Frecuencias de respuestas del enunciado 4 según niveles de RAE

Configuración	**Nivel 0**	**Nivel 2**	**Total**
1. ¿Cuánto por uno?	12		12
2. Unidad compuesta	2		2
3. Aplicación de la regla de 3	14		14
4. Correspondencia	3		3
5. Interpretación funcional		1	1
Total	**31**	**1**	**32**

La resolución de esta tarea por parte de los maestros en formación indica un dominio del conocimiento común del contenido, dado que fueron capaces de encontrar la solución correcta a la tarea. Sin embargo, casi todas las soluciones se corresponden con un nivel cero de algebrización, lo que indica que los maestros movilizan conceptos del campo aritmético sin aludir a propiedades o relaciones.

Enunciado 5: Secuencia de figuras. Para este enunciado que involucra la identificación de un patrón se determinaron 4 configuraciones.

<u>Nivel cero: Ausencia de razonamiento algebraico</u>

Configuración 1: Razonamiento recursivo. En esta configuración se agrupan aquellas soluciones en las que se identifican el número de bolitas que se precisan añadir para la formación de la siguiente figura (5, 7, 9, 11, 13… números impares).

Para la figura 1 son 3 puntos; para la figura 2 son 8 puntos (a los puntos de la f1 se suman 5); a la figura 3 son 15 (a los puntos de la f1 se suman 7); para la figura 4 son 24 puntos (a los puntos de la figura 3 se suman 11).... Y así sucesivamente, la primera se suman a la anterior 5, en la segunda se suman a la anterior 7, en la tercera se suman a la anterior 9, en la cuarta suman a la anterior 11, en la quinta se suman a la anterior 13, en la sexta se suman a la anterior 15, en la séptima se suman a la anterior 17, en la octava se suman a la anterior 19, en la novena suman a la anterior 21....

En la tabla se indica que al número de la frecuencia debemos de ir añadiéndole +2, empezando por 5 : 5+2=7; 7+2=9; 9+2=11; 11+2= 13; 13+2= 15; 15+2= 17; 17+2= 19; 19+2= 21; 21+2= 23; 23+2= 25; 25+2=27; 27+2= 29; 29+2= 31; 31+2= 33; 33+2= 35.
Una forma sería haciendo uno a uno hasta la figura 15, que tendría 255 puntos.

N	F(N)	
1	3	+5
2	8	+7
3	15	+9
4	24	+11
5	35	+13
6	48	+15
7	63	+17
8	80	+19
9	99	+21
10	120	+23
11	143	+25
12	168	+27
13	195	+29
14	224	+31
15	255	+33
16	288	+35
17	323	

Figura 5.75. Resolución planteada por el equipo A1-4

En la figura 5.75 se plantea la solución prototípica que representa a esta configuración. En la tabla de correspondencia se indica el número de bolitas que se precisan añadir para la formación de la figura siguiente. De esta forma de resolución no emerge ningún objeto algebraico. Sin embargo, en la figura 5.69 se indica cómo a partir de la tabla se alcanza la formulación de una regla general que permite determinar el número de bolitas de una posición cualquiera. El planteamiento del equipo A1-4 respecto a la formulación de una expresión implica una configuración diferente, la articulación de una regla en términos alfanuméricos.

N= N·(N+2); N= 15· (15+2); N= 15· (17); N= 255 puntos.

A través de la observación de la tabla, hemos intentado buscar una regla para no tener que averiguar los puntos de cada figura una por una.
Cuando realizamos la tabla nos dimos cuenta que para la figura 1 son 3 puntos (sería 1·3), para la figura 2 son 8 (2·4), para la figura 3 son 15 (3·5), para la figura cuatro son 24 (4·6).... Nos dimos cuenta que el número de figura lo multiplicábamos por (n+2) y así obtenemos el número de puntos de la figura.

Figura 5.76. Resolución planteada por el equipo A1-4

Configuración 2: Razonamiento numérico. En esta configuración se agrupan aquellas soluciones en las que se determina de una forma aritmética la solución de esta tarea.

Al obtener los resultados de las figuras F.1=3,F.2=4,F.3=15,F.4=24… hemos descubierto que el número de la F.1 multiplicado por 3=3, el número de la F.2 multiplicado por 4=8, el número de la F.3 multiplicado por 5=15… Haciendo este cuadro se ve más claro:

Nº de figura	1	2	3	4	5	6	…	15
Nº a multiplicar	3	4	5	6	7	8	…	17
Resultado	3	8	15	24	35	48	…	255

Figura 5.77. Resolución planteada por el equipo A3-5

En la solución de la figura 5.77 se interpreta al número de bolitas como el resultado de un producto (el número de la figura por un número de la secuencia de números impares). Esto no permite determinar el de una posición cualquiera, se tendría que continuar con la tabla de manera similar al ejemplo de la configuración 1. De manera similar sucede con el ejemplo de la figura 5.71 que se agrupó en esta configuración.

16 x 15 + 15= 255 puntos

Esta sería la solución porque son 16 puntos por fila ya que cada figara es un punto más por 15 filas más 15 de la última fila que se queda con un punto menos.

Figura 5.78. Resolución planteada por el equipo A3-3

Nivel 1: Nivel incipiente de algebrización

Configuración 3: Regla general en términos simbólicos. En esta configuración se agrupó una única solución en la que se evitó el uso de literales pero se aplicaron símbolos.

Siempre por cada número de figura en los laterales del cuadrado tendrá un punto más que el número de la figura en el que nos encontremos, por lo tanto en el ejemplo de la posición 15, tendría 16 puntos en el lateral hacia la derecha y 16 puntos hacia el lateral hacia arriba. Por lo tanto para averiguar cuantos puntos hay en el cuadrado entero multiplicamos esos dos números de puntos de los dos laterales, que en este caso sería 16 *16 =256. Pero como vemos este en cada figura se le quita el punto de la esquina de la derecha de arriba, por lo tanto habrá que restarle a ese resultado -1 y por lo tanto sale 255 puntos.

((Nº figura + 1)* 2) -1 = □

(16 * 16) -1= **255**

Figura 5.79. Resolución planteada por el equipo A1-2

En la figura 5.79 la frase Nº figura funge como una variable que indica la posición, el uso de paréntesis señala el orden de la realización de la operaciones. El recuadro vacío indica un valor desconocido que depende del valor de Nº de figura.

Nivel 2: Nivel intermedio de algebrización

Configuración 4. Regla general en términos alfanuméricos. En esta configuración se agrupan aquellas soluciones en las que se pone de manifiesto el uso de literales para denotar una relación funcional como la planteada en la figura 5.68.

A continuación en la tabla 5.46 se muestran las frecuencias de las configuraciones cognitivas respecto a los niveles de algebrización.

Tabla 5.46. Frecuencias de respuestas del enunciado 5 según niveles de RAE

Configuración	**Nivel 0**	**Nivel 1**	**Nivel 2**	**Total**
1. Razonamiento recursivo	5			5
2. Razonamiento numérico	5			5
3. Regla general en términos simbólicos		1		1
4. Regla general en términos alfanuméricos			14	14
Total	**10**	**1**	**14**	**25**

Esta tarea relacionada con patrones resultó relativamente fácil de abordar por los maestros en formación (índice de dificultad= 86,67 %); llama la atención que un número considerable de las soluciones (14) implican la formulación de una regla general en términos alfanuméricos. Esto indica cierto dominio del conocimiento avanzado del contenido.

En la figura 5.80 se muestra las configuraciones asociadas a cada enunciado de acuerdo a los niveles de algebrización. Se aprecia una concentracion entre los niveles 0 y 1, aunque exite un ligero aunmento en la manifestación de configuraciones de nivel 2 y nivel 3 en comparación con los resultados de la práctica 1 (figura 5.45 de la sección 4.3.1.1).

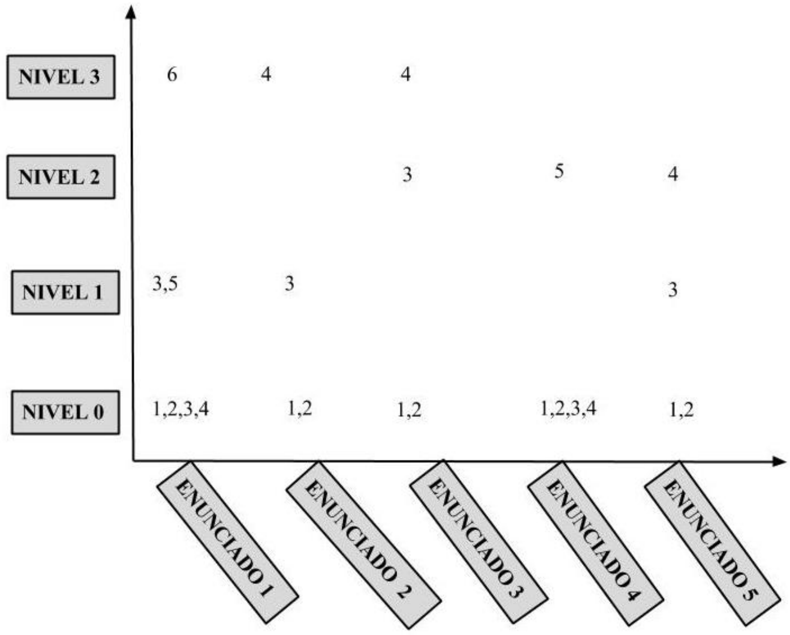


Figura 5.80. Niveles de algebrización en las tareas planteadas en la práctica 5

4.3.2.2. Análisis de las respuestas a los ítems sobre el conocimiento especializado del contenido

El conocimiento especializado se recoge en los ítems a2 (varias soluciones propuestas), b1 (objetos algebraicos) y b2 (justificación del nivel de algebrización asignado) presentes en las 5 tareas propuestas en esta práctica. Hemos realizado un análisis sistemático y pormenorizado de las respuestas dadas por los 15 equipos de estudiantes a los diferentes ítems que ponen en juego aspectos relevantes del conocimiento especializado del contenido usando el programa NVIVO 9, el cual hemos preferido incluir en el Anexo 12. En este apartado incluimos una síntesis de dichos resultados.

Sobre la identificación de objetos algebraicos

De manera general se aprecia que la identificación de objetos algebraicos por parte de los estudiantes es difícil hasta este momento del proceso formativo; sus producciones indican que existe una desconexión entre las listas de objetos algebraicos que elaboran y las diversas soluciones propuestas para cada enunciado. En la tabla 5.58 se aprecia que la identificación de objetos algebraicos es una minoría en comparación con los objetos aritméticos enlistados por cada equipo. Existe una tendencia ligeramente predominante en identificar objetos matemáticos (ya sea aritméticos o algebraicos) sin hacer una distinción entre las soluciones propuestas, exceptuando los enunciados 3 y 4 que prioritariamente propusieron una única solución. Esto indica que los maestros en formación no asimilan que los objetos algebraicos movilizados dependen de las soluciones dadas al problema, es decir, procedimientos de resolución diferentes pueden movilizar objetos algebraicos diferentes, tanto en su naturaleza como en cantidad.

Tabla 5.48. Frecuencia de tipo de objetos matemáticos identificados en la práctica 5

		E1	E2	E3	E4	E5
Tendencia aritmética y/o del contexto	Se distingue entre las soluciones	2	4	6	8	3
	No se distingue entre las soluciones	4	3	3	3	3
Tendencia algebraica	Se distingue entre las soluciones	2	2	4		2
	No se distingue entre las soluciones	6	2	2	2	3
Igual número de objetos algebraicos y aritméticos	Se distingue entre las soluciones	1	1			
	No se distingue entre las soluciones		1			
No contesta			2		2	4
Total equipos		15	15	15	15	15

Sobre la justificación de asignación de los niveles de algebrización

De manera general, el análisis realizado muestra que los futuros docentes consideran, a diferencia de la identificación de los objetos algebraicos, que la asignación de niveles de algebrización se realiza según las soluciones manifestadas; esto queda reflejado en la tabla 5.59. Por otro lado, se aprecia que una media de 5 equipos, no asigna por cada tarea, un nivel de algebrización, un número considerable atendiendo a que el total de grupos son 15.

Tabla 5.59.Asignación de niveles de algebrización

			E1	E2	E3	E4	E5
Asigna un nivel	Justifica	Distingue entre soluciones	6	8	8	11	10
		No distingue entre soluciones	3				
	No justifica		3	3	3	1	1
No asigna un nivel			4	5	4	3	4
Total equipos			15	15	15	15	15

De manera global, en las producciones de los estudiantes (anexo 12) se aprecia una falta de asociación de los objetos algebraicos con los niveles de algebrización otorgados y las soluciones correspondientes (así lo indican también los índices de dificultad de estos ítems reportados en la tabla 5.31 del apartado 4.3.2), lo que sugiere que el desarrollo del conocimiento especializado respecto al RAE aún es inconsistente en los estudiantes.

4.3.3. Análisis de resultados de la prueba final

En el examen final de la asignatura se incluyó una pregunta específica sobre los contenidos algebraicos tratados durante el curso, la cual fue descrita y analizada en la sección 3.1.1.3. El examen fue realizado por 52 estudiantes (22 hombres y 30 mujeres).

Recordamos el enunciado de la tarea (figura 5.73). Para el análisis de las respuestas dadas por los 52 estudiantes que respondieron a la pregunta sobre RAE incluida en el examen final, hemos definido una variable cuantitativa, grado de corrección, con una puntuación máxima alcanzable de 5 puntos (1 por cada ítem respondido correctamente), y otras dos variables cualitativas sobre los tipos de objetos algebraicos reconocidos y los tipos de cambios propuestos a la tarea (anexo 11).

Observa la siguiente figura, y contesta:

```
                                   ⊙
                  ⊙               ⊙⊙
      ⊙          ⊙⊙              ⊙⊙⊙
```

a) ¿Cuántas bolitas tendrán las figuras de la cuarta y quinta posición?
b) ¿Cuántas bolitas hay en la posición 100?
c) ¿Qué objetos algebraicos intervienen en la resolución?
d) ¿Qué nivel de algebrización le asignarías?
e) Indica algunas variables que se puedan cambiar en esta tarea para aumentar el nivel de algebrización?

Figura 5.81. Enunciado de la pregunta sobre RAE incluida en el examen final

La figura 5.82 contiene el resumen estadístico para la variable grado de corrección. Es posible apreciar que la media fue de 1,8, la desviación típica 0,85, la máxima puntuación registrada fue de 4 puntos y la mínima de 0, de un total de 5 puntos, lo que indica que el número de ítems que fueron abordados y resueltos por los estudiantes es bajo.

Recuento
Promedio
Desviación Está
Coeficiente de Variación
Mínimo
Máximo
Rango
Sesgo Estandari
Curtosis Estand

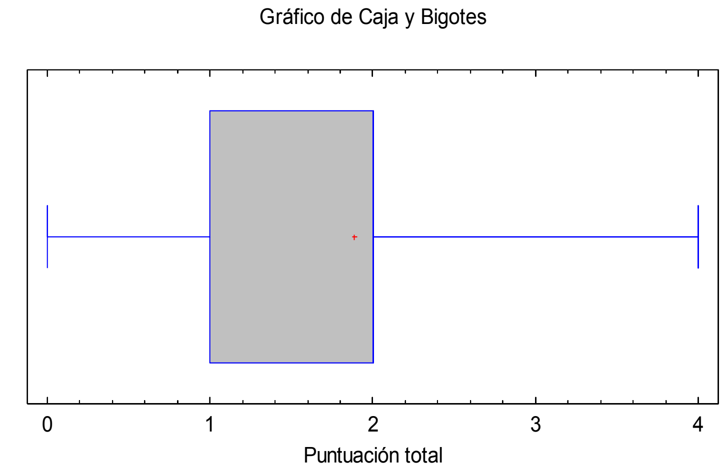


Figura 5.82. Puntuación total del cuestionario

El índice de dificultad (I.D) de cada una de los ítems (figura 5.76), nos indica que el ítem b (relacionada con la obtención de una regla general) resultó claramente difícil de abordar por los estudiantes. Llama la atención que el ítem d) sobre la asignación de un nivel de algebrización también resultó difícil dado que las asignaciones no se correspondían (

Ítem	%
E5_ítem a	
E5_ítem b	
E5_ítem c	
E5_ítem d	

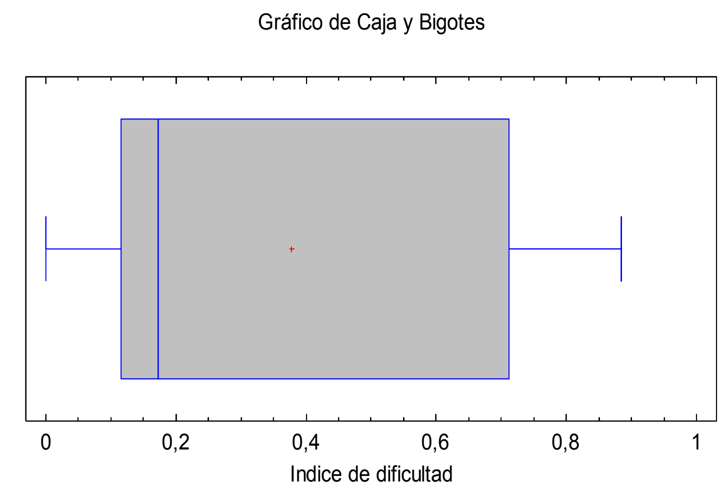


Figura 5.83. Índice de dificultad de los ítems

A continuación describimos los resultados que se obtuvieron en cada una de los ítems, lo que nos permite una apreciación específica del modo en que los maestros en formación respondieron a la pregunta del examen final. Se presentan los resultados analizando los ítems de acuerdo a la tabla 5.60:

Tabla 5.60. Distribución del contenido según tipo de conocimiento

FACETA	CONOCIMIENTO	NIVELES		Tarea a	Tarea b	Tarea c	Tarea d	Tarea e
				Ítems				
Epistémica	Avanzado	0 1 2 3	Resolver la tarea (Patrones)	x	x			
	Especializado		Identificar objetos algebraicos		x			
			Asignación de niveles			x		

A continuación analizamos de manera cualitativa las respuestas dadas por los estudiantes a la pregunta del examen final, agrupando las respuestas en tipos de configuraciones cognitivas y niveles de algebrización puestos en juego por los estudiantes. Los apartados a) y b) ponen en juego información sobre el conocimiento común y avanzado de los maestros y los c), d) y e) proporcionan información sobre el conocimiento especializado del contenido.

4.3.3.1. Respuestas relacionadas con el conocimiento común y avanzado del contenido

En las respuestas a los ítems a) y b) identificamos cinco configuraciones cognitivas que describimos a continuación:

<u>Nivel 0. Ausencia de razonamiento algebraico</u>

Configuración 1. Aplicación de la regla de 3. Esta configuración agrupa aquellas soluciones en las que se pone de manifiesto el uso de la regla de 3 como procedimiento.

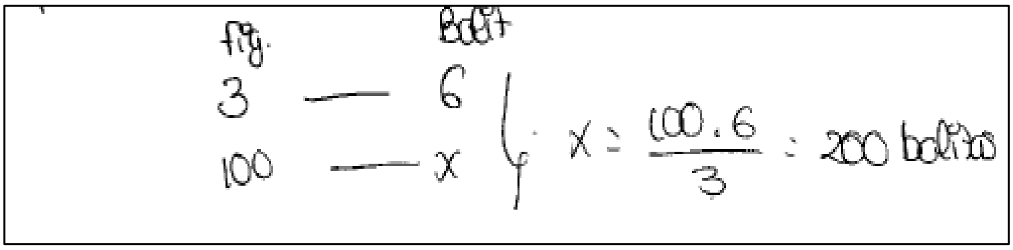


Figura 5.84. Solución del estudiante E51

Configuración 2. Formulación de una regla recursiva. Esta configuración describe aquellas soluciones que determinan la n-ésima posición como $a_{k+1} = a_k + d$, criterio que, sin embargo, no permite proporcionar un valor para la posición n-ésima de la sucesión planteada. Bajo esta configuración global se han identificado soluciones que no dejan de ser recursivas pero que contienen matices diferentes. La primera son aquellas en las que se enuncia una regla recursiva articulada desde la descomposición de la figura y la segunda son aquellas soluciones en las que se remite simplemente a las posiciones anteriores

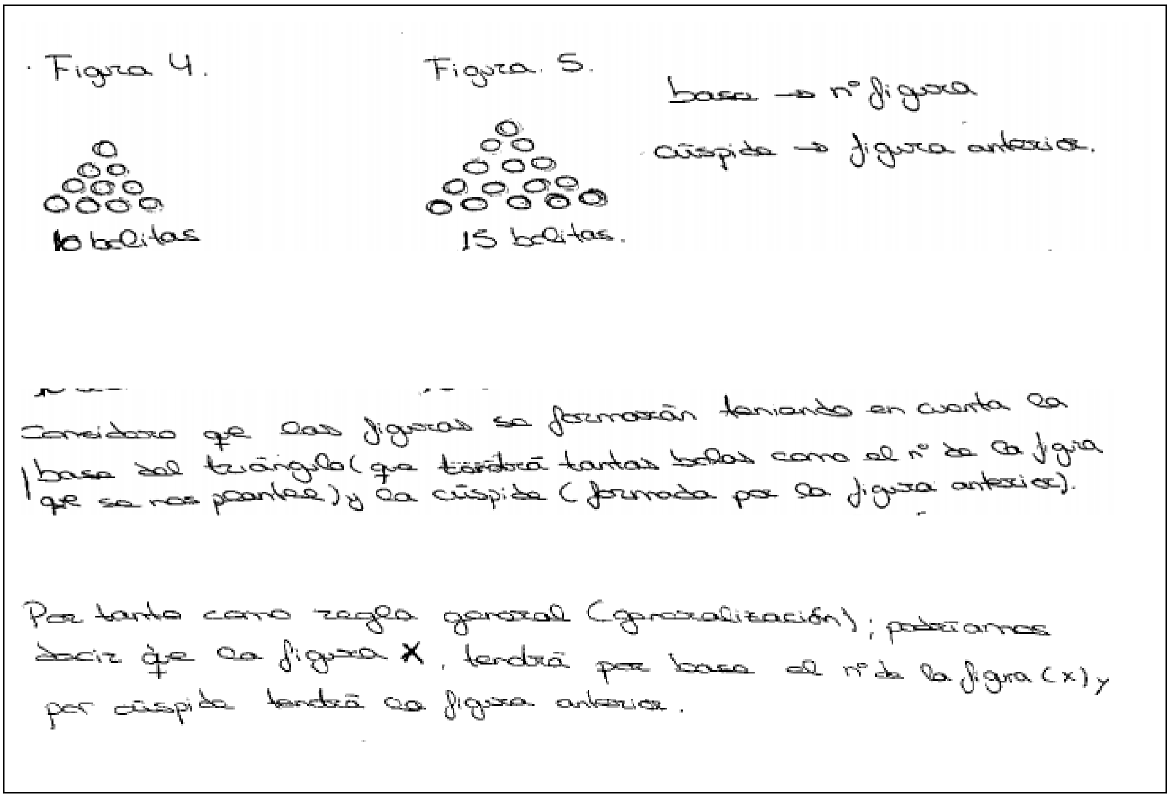


Figura 5.85. Solución del estudiante E62

En la solución el estudiante E62 usa un lenguaje icónico y verbal a través de los cuales expresa la identificación de características en el patrón, a partir de la figura, que no conducen a una regla de formación de las sucesivas figuras. Usa los conceptos de base y cúspide para diferenciar las partes que aprecia del dibujo y sobre la cual basa sus afirmaciones: “las figuras se formarán teniendo en cuenta la base del triángulo (que tendrá tantas bolitas como el nº de figura se plantee) y la cúspide (formada por la figura anterior).

En la figura 5.79, el estudiante articula la descripción de las bolitas correspondientes a las primeras posiciones.

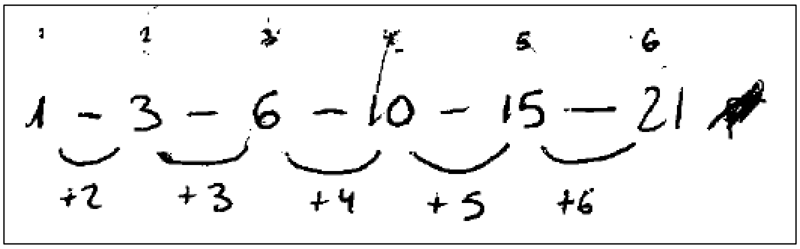
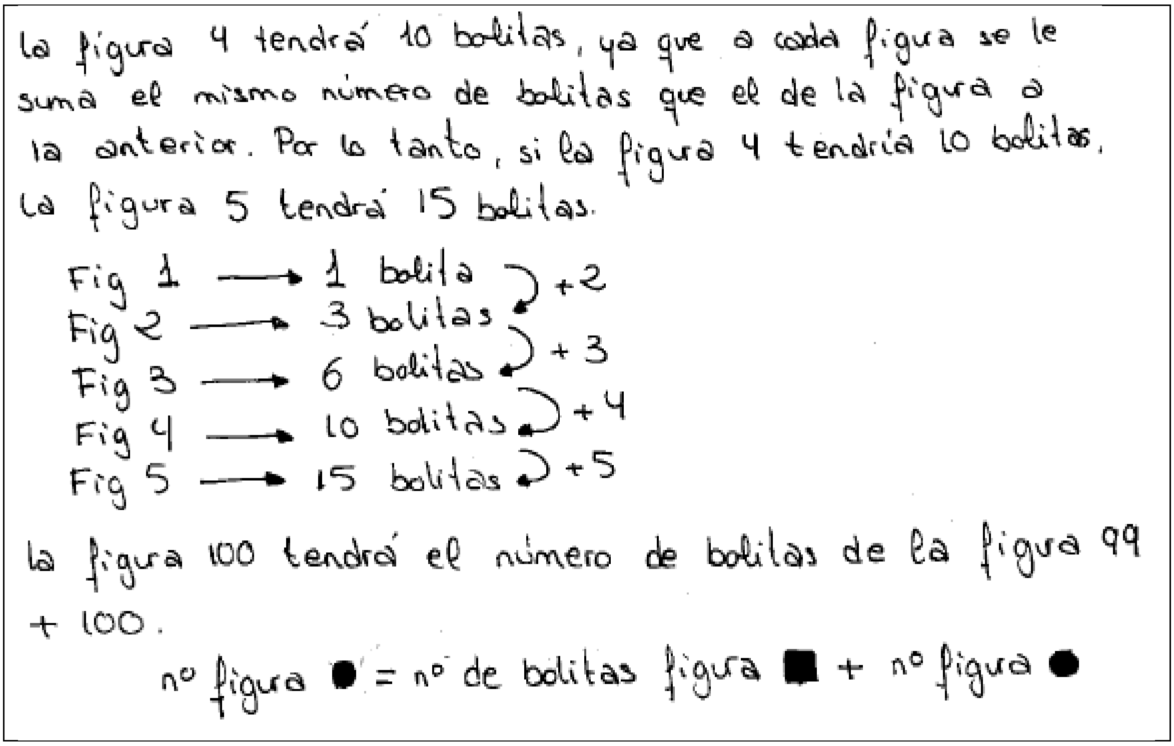


Figura 5.86. Solución del estudiante E30

En la solución del estudiante E30 vemos cómo se utiliza un lenguaje numérico que describe los primeros valores de la variable independiente de la función (número de orden de la figura), expresando así una regla de formación de las figuras sucesivas (al menos el número de puntos que las forman) pero que no permite alguna generalización. Como se puede observar en la solución el procedimiento que se utiliza es aritmético, el uso de conceptos como el conteo y la suma es la base para determinar el número de puntos que las figuras.



la figura 4 tendrá 10 bolitas, ya que a cada figura se le suma el mismo número de bolitas que el de la figura a la anterior. Por lo tanto, si la figura 4 tendría 10 bolitas, la figura 5 tendrá 15 bolitas.

Fig 1 → 1 bolita +2
Fig 2 → 3 bolitas +3
Fig 3 → 6 bolitas +4
Fig 4 → 10 bolitas +5
Fig 5 → 15 bolitas

la figura 100 tendrá el número de bolitas de la figura 99 + 100.

nº figura ● = nº de bolitas figura ■ + nº figura ●

Figura 5.87. Solución del estudiante E51

En la solución del estudiante E51 se observa que los conceptos como el conteo y la suma para establecer una regla de correspondencia que ayuda a articular una relación recursiva simbólica. La fórmula que se quiere expresar sería, f(n+1) = f(n) + (n+1); con la notación del estudiante debería ser: "nº de bolitas figura **O** más 1" = nº de bolitas figura **O**" + nº figura **O** más 1". No consigue expresar la fórmula recursiva correcta de manera alfanumérica, aunque sí con lenguaje numérico-natural: **"**la figura 100 tendrá el número de bolitas de la figura 99 + 100". Tiene problemas para expresar de manera alfanumérica la generalidad de la regla recursiva, aunque lo intenta al utilizar los símbolos **O** y **■.**

Es importante mencionar que este tipo de soluciones fueron las más predominantes dentro de las soluciones manifestadas por los estudiantes; existen variantes en las que en lugar de símbolos de describe verbalmente la regla recursiva, por ejemplo "para calcular el número de bolitas de la posición 100 añadimos 100 bolitas a la figura 99, puesto que se le añade siempre a la figura anterior el número de bolitas de la figura posterior" (E29). Se advierte que incluso verbalmente se tienen dificultades para distinguir la posición de la figura del número de bolitas de la misma. También se manifestaron producciones similares a la del estudiante E51 utilizando letras como la que se muestra en la siguiente figura 5.81. Es importante mencionar que el estudiante no respondió al ítem b) de la tarea.

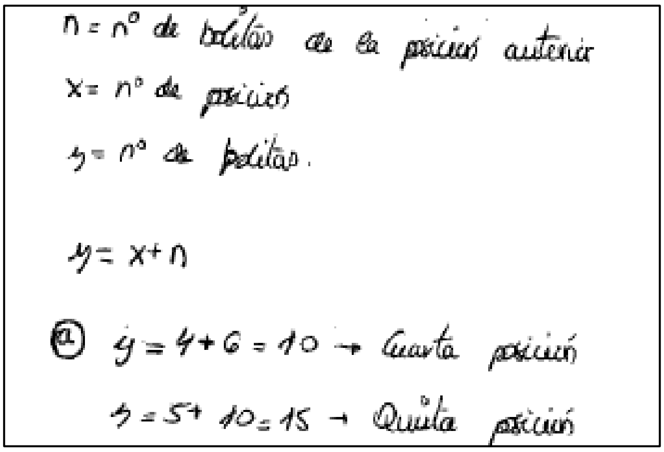


Figura 5.88. Solución del estudiante E18

Las configuraciones agrupadas en este nivel manifiestan la enumeración de casos particulares sin llegar a la articulación de una regla que describa el comportamiento de la figura en la posición n-ésima, o bien su razonamiento queda en un nivel recursivo reconociendo cierta regla que describe el comportamiento n-ésimo pero que no permite hallar el valor numérico.

Nivel 1. Nivel incipiente de algebrización

En este nivel se agrupan aquellas configuraciones en las que se reconoce una regla general y se expresa en un lenguaje diferente al simbólico-literal o alfanumérico. Queda explícito el número de bolitas de la figura n-ésima pero no se calcula.

Configuración 3. Regla general basada en la sumatoria de las posiciones de las sucesivas figuras. En esta configuración se agrupan aquellas soluciones en las que se reconoce el número de bolitas que se corresponde en la posición n-ésima resultado de efectuar las sumatoria de las posiciones anteriores.

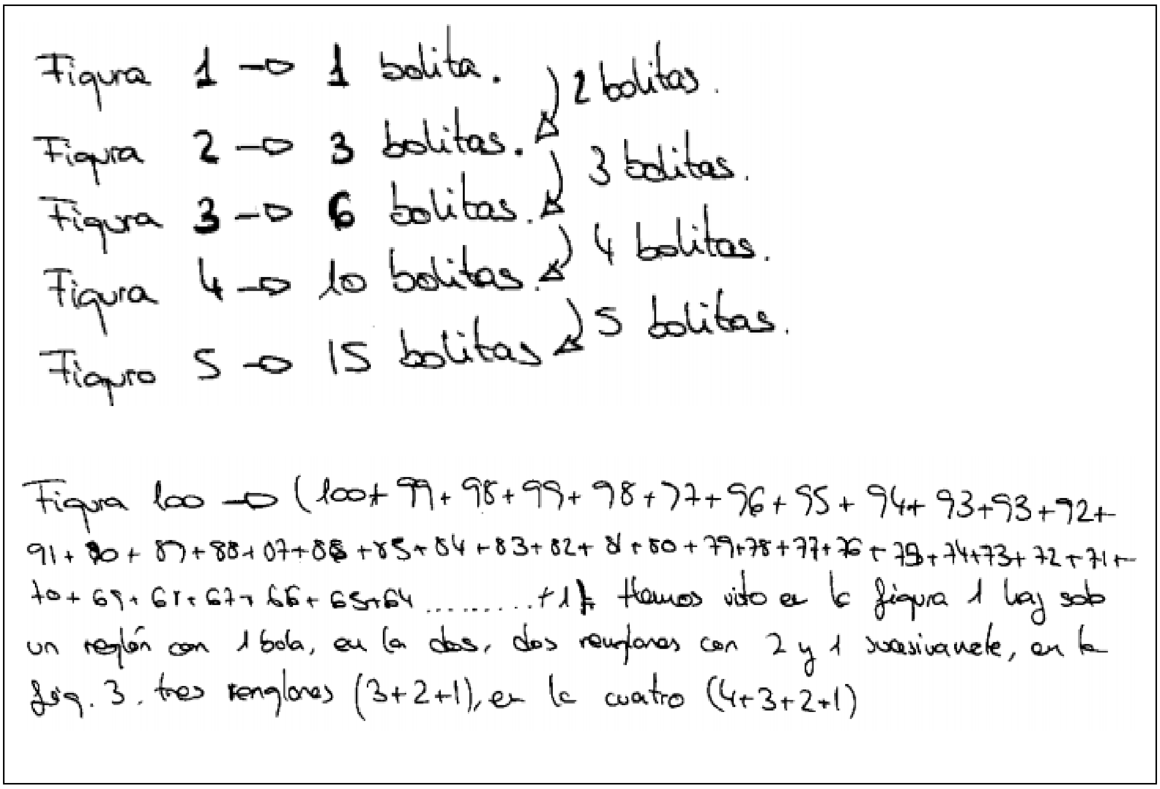


Figura 1 → 1 bolita.
2 bolitas.
Figura 2 → 3 bolitas.
3 bolitas.
Figura 3 → 6 bolitas.
4 bolitas.
Figura 4 → 10 bolitas.
5 bolitas.
Figura 5 → 15 bolitas

Figura 100 → (100+99+98+99+98+97+96+95+94+93+93+92+91+90+87+88+07+88+85+84+83+82+81+80+79+78+77+76+75+74+73+72+71+70+69+61+67+66+65+64 ....+1). Hemos visto en la figura 1 hay solo un reglón con 1 bola, en la dos, dos renglones con 2 y 1 sucesivamente, en la fig. 3. tres renglones (3+2+1), en la cuatro (4+3+2+1)

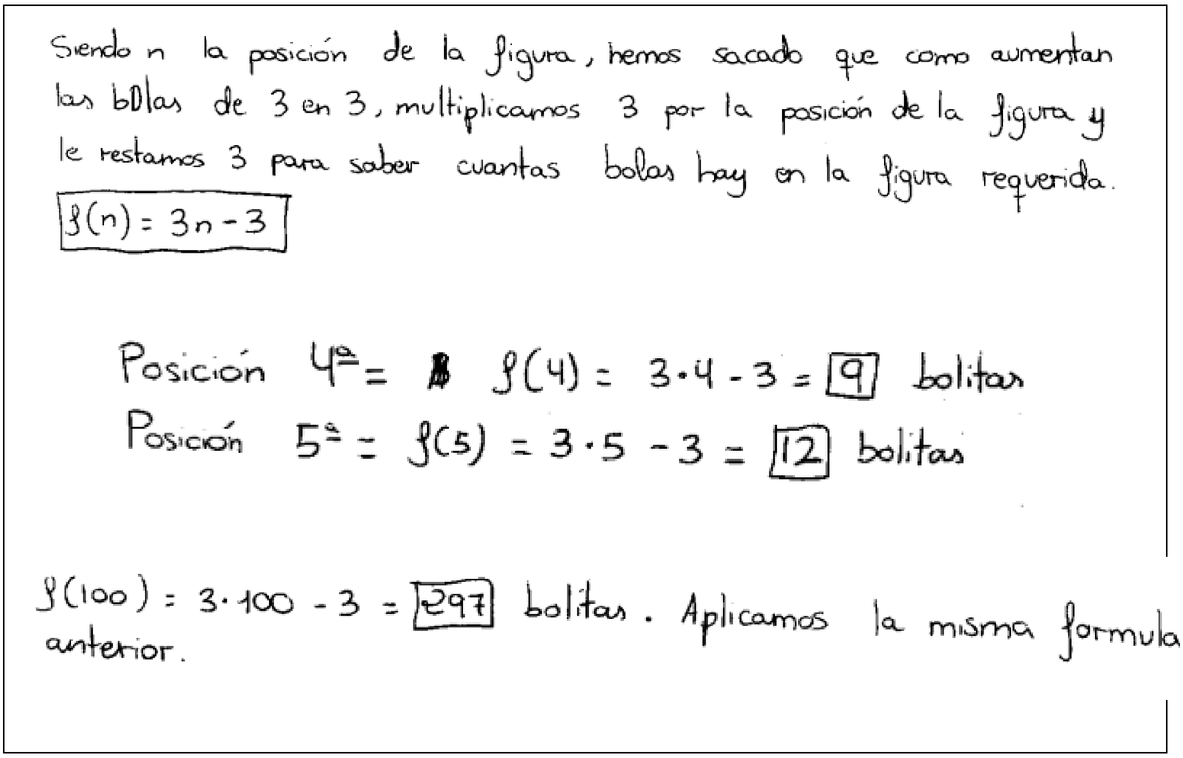
Figura 5.89. Solución del estudiante E34

Este estudiante encuentra una regla general (un objeto intensivo) que permite hallar el valor de la función para cualquier valor de la variable independiente (posición de la figura) y que define de manera explícita con una sumatoria. Utiliza los lenguajes natural y aritmético, aunque no ha sido capaz de encontrar una expresión simbólica para dicha sumatoria, además en la resolución se utiliza el concepto de sumatoria. El estudiante puede encontrar el número de bolitas de la figura 100, no formando dicha figura y contando las bolitas, sino operando con la secuencia de números particulares.

Nivel 2. Nivel intermedio de algebrización

En este nivel se describen las configuraciones que manifiestan un reconocimiento de la generalidad y la expresa de forma alfanumérica. Es posible encontrarse determinados errores, sin embargo lo que guía la designación de cada nivel son los objetos de naturaleza algebraica que emergen de las soluciones.

Configuración 4. Regla general expresada en términos alfanuméricos. En esta configuración se recogen aquellos razonamientos en los cuales el resolutor plantea la solución al problema denotando a las variables en términos alfanuméricos independientemente de lo correcto o incorrecto del planteamiento. En este tipo de configuración agrupamos dos casos: uno en la que la regla formulada es correcta para casi todos los casos, es decir, formulaciones que contienen errores en su articulación y, por otro lado, aquellas que son formuladas correctamente.


Siendo n la posición de la figura, hemos sacado que como aumentan las bolas de 3 en 3, multiplicamos 3 por la posición de la figura y le restamos 3 para saber cuantas bolas hay en la figura requerida.

$\boxed{f(n) = 3n - 3}$

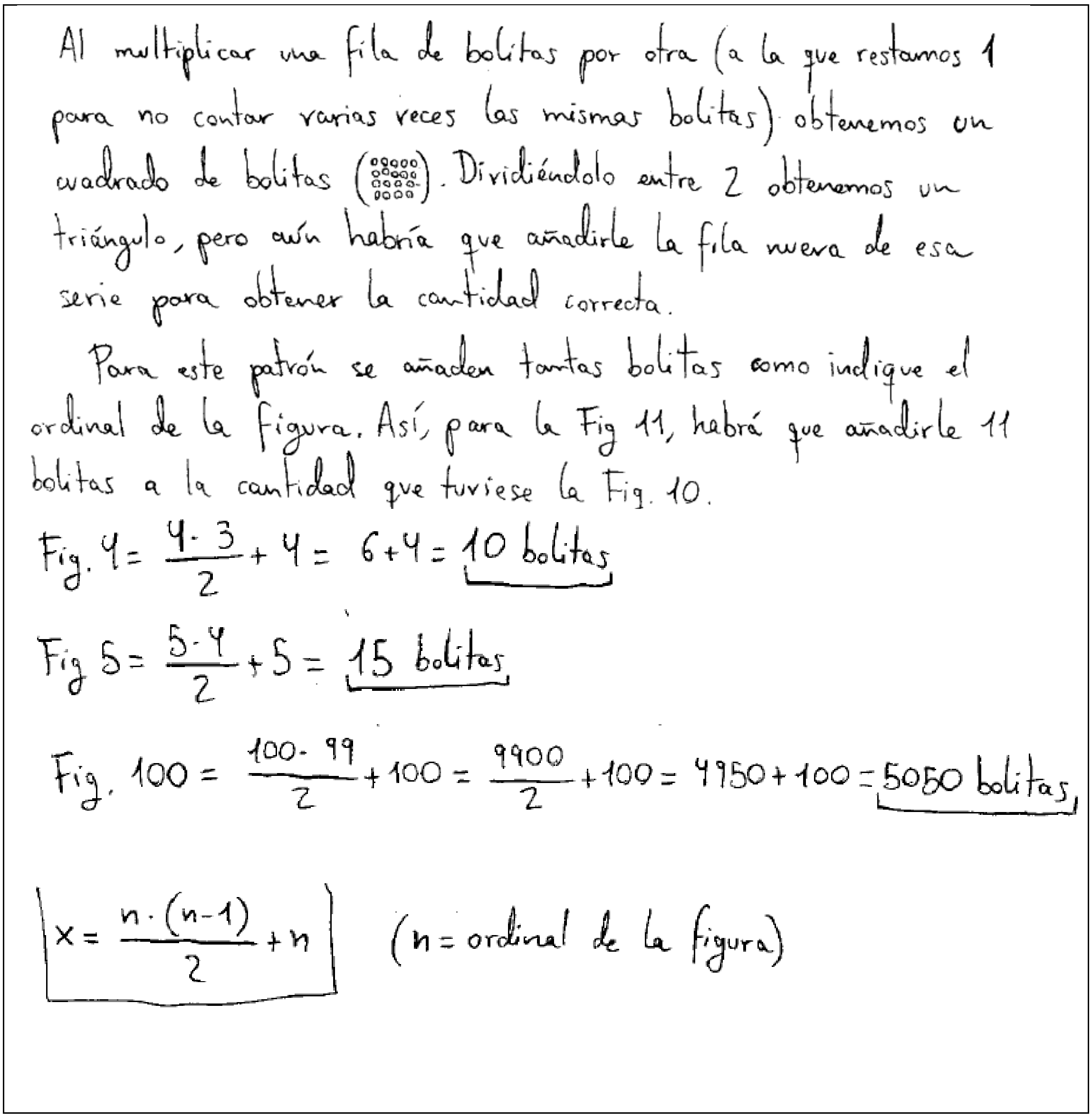
Posición 4ª = $f(4) = 3 \cdot 4 - 3 = \boxed{9}$ bolitas

Posición 5ª = $f(5) = 3 \cdot 5 - 3 = \boxed{12}$ bolitas

$f(100) = 3 \cdot 100 - 3 = \boxed{297}$ bolitas. Aplicamos la misma formula anterior.

Figura 5.90. Solución del estudiante E63

En la resolución del estudiante E63 se identifican características que no concuerdan con el comportamiento del patrón. Se utilizan los lenguajes natural y alfanumérico a través de los cuales se expresa la regla: “las bolas aumentan de 3 en 3 […] y le restamos 3 para saber cuántas bolas hay en la figura requerida; $f(n) = 3n - 3$; y justifica su afirmación sustituyendo los valores de las primeras posiciones. Sin embargo, su razonamiento sigue supuestos erróneos que se comprobarían utilizando la fórmula para la primera posición de la secuencia.



Al multiplicar una fila de bolitas por otra (a la que restamos 1 para no contar varias veces las mismas bolitas) obtenemos un cuadrado de bolitas ( ). Dividiéndolo entre 2 obtenemos un triángulo, pero aún habría que añadirle la fila nueva de esa serie para obtener la cantidad correcta.

Para este patrón se añaden tantas bolitas como indique el ordinal de la figura. Así, para la Fig 11, habrá que añadirle 11 bolitas a la cantidad que tuviese la Fig. 10.

Fig. $4 = \frac{4 \cdot 3}{2} + 4 = 6 + 4 = \underline{10 \text{ bolitas}}$

Fig $5 = \frac{5 \cdot 4}{2} + 5 = \underline{15 \text{ bolitas}}$

Fig. $100 = \frac{100 \cdot 99}{2} + 100 = \frac{9900}{2} + 100 = 4950 + 100 = \underline{5050 \text{ bolitas}}$

$\boxed{x = \frac{n \cdot (n-1)}{2} + n}$ (n = ordinal de la figura)

Figura 5.91. Solución del estudiante E21

El estudiante encuentra una fórmula correcta que permite calcular el número de bolitas de la figura en una posición cualquiera, expresada en lenguaje alfanumérico. La justificación de la fórmula se apoya en un razonamiento visual, expresado con lenguaje natural confuso y no del todo correcto, ya que la inferencia visual de la fórmula requiere formar un rectángulo de puntos de lados n y $(n-1)$, y no un cuadrado. No opera con las variables para obtener una expresión canónica del criterio de la correspondencia. Hay un uso explícito de elementos genéricos para la posición de la figura y el número de bolitas correspondiente, expresado en términos contextuales y también de manera simbólica. Sin embargo, el mero uso de símbolos literales en la expresión de una generalidad no es suficiente para reconocer la presencia de una práctica propiamente algebraica.

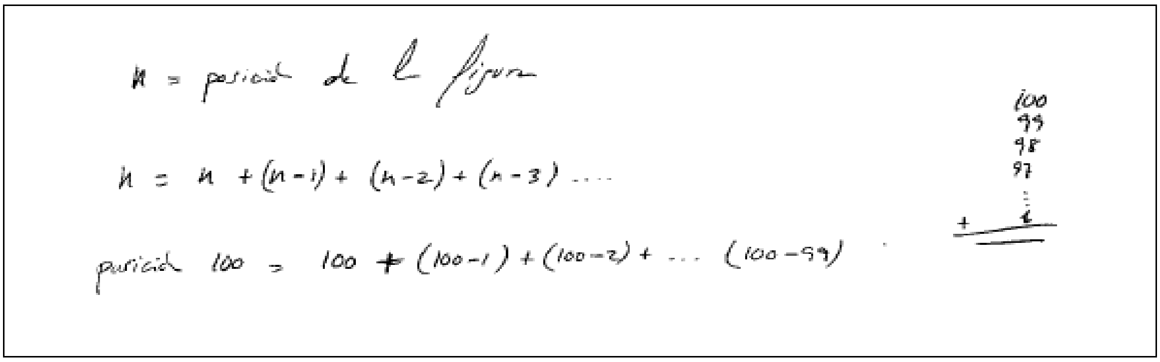


Figura 5.92. Solución del estudiante E28

En la soluciones del estudiante E28 se aprecia como conecta el problema con la sumatoria de las posiciones implicadas, así lo refleja la expresión $n = n + (n-1) + (n-2) + (n-3)$ pese al error en la notación. La producción es similar a la configuración 3, con la diferencia de que se logra expresar la sumatoria en términos alfanuméricos.

Como se manifiestan en las configuraciones identificadas a los maestros en formación les resultó difícil encontrar una regla general que les proporcione el valor del número de bolitas en la posición 100, incluso pese a que sus resoluciones manifiestan ciertos rasgos de índole algebraica. Esto queda explícito en la tabla 5.61 que muestra la incidencia de los niveles de algebrización en la muestra de 52 estudiantes que realizaron el examen y de acuerdo a las configuraciones identificadas.

Tabla 5.61. Frecuencias de respuestas a la tarea del examen según niveles de RAE

Configuración	**Nivel 0**	**Nivel 1**	**Nivel 2**	**Total**
1. Aplicación de la regla de 3	1			1
2. Razonamiento recursivo	25			25
3. Regla basada en la sumatoria		5		5
4. Regla en términos alfanuméricos			21	21
Total de soluciones				**52**

Se hace explícito que respecto a la resolución del problema en su ítem a) y b) (relativas a la obtención de una regla general) fueron 6 soluciones que se desarrollaron óptimamente y se consideraron como correctas. Por lo que las carencias respecto al conocimiento avanzado son evidentes. Es importante recordar que el desempeño de los estudiantes respecto al análisis de patrones es regularmente bueno en la tarea 3 (los palillos) de la práctica 1 y la tarea 5 (secuencia de figuras) de la práctica 5 por lo que posiblemente las soluciones imprecisas e incorrectas de esta tarea (números triangulares) tengan su origen en la situación de examen en la que los estudiantes se encontraban.

4.3.3.2. Ítems relacionados con el conocimiento especializado del contenido

El conocimiento especializado queda recogido en los ítems b) (objetos algebraicos identificados) y c) (nivel de algebrización asignado) de la tarea incluida en el examen final. A continuación se reportan los resultados de estos ítems.

Sobre los objetos algebraicos identificados. El análisis de la información refleja que 18 de los 52 estudiantes enlistaron predominantemente objetos matemáticos de carácter aritmético o relativo al contexto, tal es el caso del estudiante E42 que nombra los siguientes objetos: "*incógnita*, *números enteros, multiplicación, número de bolas, numero de figura*". Por otro lado, 27 estudiantes hicieron referencia a objetos prioritariamente de carácter algebraico; por ejemplo, el estudiante E35 enlista los siguientes objetos: "*variable independiente, dependiente e incógnita*". Finalmente 7 de los estudiantes no contestaron a este ítem.

Sobre la asignación de niveles de algebrización. Respecto a la asignación de un nivel de algebrización se informa que 5 de los estudiantes asignaron un nivel cero de algebrización a su propia producción; 11 estudiantes asignaron un nivel 1 y otros 13 futuros docentes un nivel 2. Llama la atención que 9 de los 52 maestros en formación asignaron un nivel 3 de algebrización al desarrollo de sus respuestas, esto se contrapone a los resultados evidenciados en la tabla 5.42 (del apartado 4.3.3.1) en la que no se identificó ninguna configuración que asocie soluciones con un nivel 3 de algebrización. 9 estudiantes no contestaron al ítem.

Es importante hacer referencia a la producción de 5 estudiantes que proporcionaron 2 formas de solución a esta tarea incluida en el examen final. La figura 5.86 muestra el caso del estudiante E2.

3) Pertenece a un nivel cero de algebrización, porque para resolverlo sólo son necesarias operaciones aritméticas. Si observamos la figura vemos que es una secuencia en la que se van sumando tres progresivamente. De este modo bastaría con multiplicar el número de posición por tres, y me daría el resultado, pero hay un inconveniente, y es que la secuencia ha empezado con una bolita, por lo que lo dicho anteriormente no es del todo exacto. Por tanto, podríamos resolverlo multiplicando el número anterior de posición de la figura que nos pidan por tres. Por ejemplo: nos piden la posición 5, pues multiplicamos la posición anterior 4 por 3, y el resultado es 12. Otra forma de resolverlo sería multiplicar el número de posición por 3 y luego restarle tres bolitas. Ejemplo: se pide la posición 100, pues 100 por 3, y luego restamos 3. El resultado es 297 bolitas. Si se resuelve el ejercicio de las formas descritas anteriormente el nivel de algebrización es cero, porque como hemos comprobado, sólo se llevan a cabo las operaciones aritméticas de multiplicación y resta.	Comentarios del investigador El estudiante describe a través de un lenguaje verbal el razonamiento (incorrecto) que guío la obtención del resultado.
Si se saca una regla general de tipo $P(x) = (n-1) \cdot 3$, estaríamos hablando de un nivel de algebrización más avanzado. $\boxed{P(x) = (n-1) \cdot 3}$ $P(x)$ ↓ Una determinada posición; n ↘ nº posición de la figura	El estudiante traduce (de forma incorrecta) el primer razonamiento dado de manera verbal en términos alfanuméricos. La obtención de una regla general y el no tratamiento supone para el estudiante un nivel avanzado de algebrización.

Figura 5.93. Solución manifestada por el estudiante E2 a la tarea del examen

De manera general, respecto a la tarea incluida en el examen final, es posible destacar que su resolución resultó claramente difícil para los maestros en formación, lo que implica un déficit en su conocimiento avanzado del contenido. La identificación de objetos algebraicos parecen tenerlo claro (al menos en las tareas relativas a las funciones), pero no es así con la asignación de niveles. Sin duda estos resultados deberán ser tenidos en cuenta en el diseño e implementación de nuevos ciclos formativos centrados en el desarrollo del sentido algebraico de los maestros en formación.

4.3.4. Trayectoria cognitiva. El caso del estudiante E21

Dada la forma de llevarse a cabo la implementación del proceso formativo, en específico sobre la realización de actividades grupales en y fuera del aula, el realizar un seguimiento de cada alumno es difícilmente factible. En este apartado describimos, en la medida de lo posible, el proceso evolutivo de uno de los estudiantes con la finalidad de identificar la progresión de sus aprendizajes reflejados en cada una de las pruebas escritas. Elegimos al maestro en formación E21 por su desempeño en la prueba final, y a partir de esto se reportan los resultados correspondientes a las prácticas 1 y 5.

En la resolución de las tareas de la práctica 1,que daban cuenta sobre el conocimiento común y avanzado del contenido, el estudiante E21 manifestó formas de solución que se asociaban a las siguientes configuraciones cognitivas: para la tarea 1 (la limonada), en el ítem c (sobre la formulación de una regla), exhibe la configuración funcional en términos no alfanuméricos (configuración 13, de nivel 1); para la tarea 2 (el gasto diario) se asoció su solución a la configuración de planteamiento de una ecuación (configuración 3 de nivel 3); en la tarea 3 (los palillos) la solución manifestada por este estudiante se asoció a la configuración de generalización no alfanumérica (configuración 6 de nivel 1); en la tarea 4 (multiplicaciones incompletas) su solución se vinculó a la configuración de operación inversa (configuración 3 de nivel 1). Las producciones de este estudiante exhiben niveles de algebrización entre 0 y 1 exceptuando la tarea 2 que movilizó una resolución que implica un nivel 3 de algebrización. El estudiante resuelve regularmente bien los problemas planteados en la práctica, lo que indica cierto conocimiento común y avanzado del contenido. Sin embargo, respecto al análisis de objetos y significados que implicaba poner de manifiesto aspectos del conocimiento especializado, sus observaciones no son del todo precisas. El grupo A2-1, grupo del que el estudiante E21 es integrante, proporciona respuestas correctas para cada uno de los problemas de la práctica 1. No obstante manifestaron dificultades al momento de identificar los significados de los objetos matemáticos que pusieron en juego en sus producciones grupales.

En lo que respecta a la práctica 5, el grupo A2-1 se caracterizó por proporcionar una única respuesta a las 5 enunciados planteados en la práctica exceptuando el enunciado 2 sobre el cual propusieron 2 soluciones. En el anexo 12 se muestran las características de cada solución, los objetos algebraicos identificados por el grupo, así como su correspondiente asignación de nivel de algebrización. Las soluciones planteadas son en su mayoría de nivel 0, reportándose de esta manera para los enunciados 1, 2, 3 y 4 y abordadas de forma regularmente bien, lo que indica cierto dominio del conocimiento común. El carácter aritmético de las soluciones planteadas sugiere la identificación escasa de objetos algebraicos. Sin embargo, los objetos que se identifican (en su mayoría de índole aritmética) guardan cierta correspondencia con las soluciones propuestas. Por otro lado, las asignaciones de niveles de algebrización raramente se corresponden con la solución dada y la justificación de tal asignación es poco precisa. Esto indica deficiencias en el conocimiento especializado del contenido. Finalmente, en la prueba final el estudiante resuelve con éxito la tarea sobre los números triangulares; la configuración asociada a su solución es la de articulación de una regla alfanumérica (configuración 4 de nivel 2). Los objetos algebraicos que indica se corresponden parcialmente con su solución. El estudiante parece tener un conflicto con la distinción entre variable e incógnita, ecuación y función , serie y sucesión; enumera como objetos algebraicos, objetos de índole aritmética como la multiplicación, resta, división y suma y hace referencia a otros relativos al contexto del problema como cuadrado (de bolitas), fila y triángulo. Asigna adecuadamente el nivel 2 de algebrización a su producción dado que formula una regla general en términos simbólicos-literales.

De manera global se aprecia cómo el desempeño del estudiante E21 respecto al conocimiento común y avanzado del contenido es relativamente bueno a lo largo del proceso formativo. Por otro lado, el conocimiento especializado manifestado en la práctica 1 y 5 (producciones grupales) presenta incongruencias respecto a los objetos de índole algebraica y asignación de niveles. Respecto a la tarea final, la producción de este estudiante guarda cierta congruencia considerando la solución, los objetos algebraicos y el nivel de algebrización. Aunque una sola tarea no es suficiente para evaluar los aprendizajes logrados, la resolución adecuada sugiere avances en la adquisición de competencias relativas al RAE, sobre todo cuando la tarea de manera general resultó poco accesible para los maestros en formación.

5. ANÁLISIS RETROSPECTIVO. IDONEIDAD DIDÁCTICA DEL PROCESO FORMATIVO

En este apartado de la tesis hacemos un análisis retrospectivo de la experiencia formativa aplicando la noción de idoneidad didáctica introducida en el marco del EOS, con la finalidad de identificar mejoras potenciales del proceso de estudio. Usaremos como guía para la reflexión el sistema de indicadores de idoneidad descrito en Godino (2011) para las facetas epistémica, ecológica, interaccional, mediacional, cognitiva y afectiva.

5.1. IDONEIDAD EPISTÉMICA

La idoneidad epistémica o matemática se entiende como el grado en que los significados implementados (o pretendidos) en el proceso de estudio representan a los significados de referencia del objeto o contenido cuyo estudio se pretende, en nuestro caso el RAE. En la tabla 5.62 se indican los componentes de la faceta epistémica y los indicadores de idoneidad.

Tabla 5.62. Componentes e indicadores de idoneidad epistémica

COMPONENTES:	DESCRIPTORES:
Situaciones-problemas	- Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones-problemas que permitan contextualizar, ejercitar, aplicar y generalizar el conocimiento matemático, los cuales proceden de la propia matemática y de otros contextos. - Se proponen situaciones de generación de problemas
Lenguajes	- Se usa un amplio repertorio de representaciones (materiales, icónicas y simbólicas) para modelizar problemas e ideas matemáticas, analizando la pertinencia y potencialidad de uno u otro tipo de representación y realizando procesos de traducción entre las mismas. - Se favorece que los estudiantes construyan, perfeccionen y usen sus propias representaciones para organizar, registrar y comunicar ideas. - El nivel del lenguaje usado es adecuado a los estudiantes a que se dirige.
Reglas (Definiciones, propiedades, procedimientos)	- Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen - Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado - Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar y generalizar definiciones, propiedades y procedimientos
Argumentos	- Se favorece el razonamiento y la prueba de los enunciados y proposiciones matemáticas mediante diversos tipos de razonamientos y métodos de prueba. - Los estudiantes formulan con frecuencia conjeturas sobre relaciones matemáticas, las investigan y justifican. - Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo al que se dirigen.
Relaciones	- Se favorece el establecimiento y el uso de conexiones entre las ideas matemáticas (problemas, representaciones, conceptos,

	procedimientos, propiedades, argumentos) - Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas. - Se reconocen y aplican las ideas matemáticas en contextos no matemáticos. - Los contenidos matemáticos se presentan y estudian como un todo organizado

En el capítulo 3 de la tesis hemos presentado nuestra conceptualización del RAE, sus elementos característicos según los distintos niveles de algebrización que hemos definido, lo que constituye el significado de referencia del objeto. El proceso de estudio planificado e implementado ha tenido como objetivo que los futuros maestros reconozcan los niveles de algebrización de la actividad matemática elemental y los objetos y procesos algebraicos que caracterizan dichos niveles.

En la planificación del proceso formativo se incluyeron la Práctica 1 (Resolución de problemas), como un primer encuentro con el análisis de objetos y procesos algebraicos en la actividad de resolución de problemas matemáticos escolares, la Práctica 5 (Álgebra en educación primaria), en la que específicamente se proponen actividades de reconocimiento de niveles de algebrización. Como documento de estudio se incluyó una versión previa del texto Aké, Godino y Gonzato (2013), "Contenidos y actividades algebraicas en Educación Primaria", donde se presenta a los estudiantes una síntesis del significado de referencia del RAE, junto con la descripción de los niveles de algebrización. Este texto fue complementado con el diseño e implementación de explicaciones complementarias del profesor en las sesiones de clase teóricas, particularmente indicando los rasgos característicos del sentido algebraico. Las tareas incluidas en las prácticas 1 y 5 se tienen en cuenta situaciones que involucran pensamiento relacional, reconocimiento de patrones, y los procesos de modelización, generalización y representación. Como conclusión podemos considerar que la idoneidad epistémica del proceso formativo, tanto en la fase de diseño como de implementación, es alta.

5.2. IDONEIDAD ECOLÓGICA

La idoneidad ecológica se entiende como el grado de adaptación curricular, socio-profesional, apertura a la innovación y conexiones intra e interdisciplinares. En la tabla 5.63 se indican los componentes de la faceta ecológica y los indicadores de idoneidad correspondientes.

Tabla 5.63. Componentes e indicadores de idoneidad ecológica

COMPONENTES:	DESCRIPTORES:
Adaptación al currículo	- Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares
Apertura hacia la innovación didáctica	- Se realizan y promueven procesos de innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva - Se integra el uso de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto educativo
Adaptación socio-profesional y cultural	- Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes
Educación en valores	- Se contempla la formación en valores democráticos (respeto por la diversidad, tolerancia, integración, cooperación...) y se dan oportunidades para que los estudiantes realicen cuestionamientos a lo aparentemente evidente o dado como natural (pensamiento crítico)
Conexiones intra e interdisciplinares	- Los contenidos (conceptos, procedimientos, …) se relacionan entre sí mostrando las estructuras que los organizan. - Los contenidos matemáticos se aplican y relacionan con los contenidos de otras disciplinas.

El contenido del RAE no se contempla de manera explícita en el programa de formación de maestros de educación primaria en España. Sin embargo, como se ha informado en el capítulo 1, existen múltiples investigaciones que concluyen en la necesidad de introducir formas de pensamiento algebraico en la escuela elemental, y de hecho así se contempla en documentos curriculares como el NCTM (2000). En consecuencia, en los planes de formación de maestros se deben introducir cambios a fin de capacitarles para promover progresivamente el pensamiento algebraico en los niños. La acción formativa contemplada en nuestra experiencia supone, por tanto, una apertura a la innovación didáctica, adaptación socio-profesional y al establecimiento de conexiones entre distintos contenidos matemáticos, dado el carácter transversal del razonamiento algebraico. En cuanto al uso de las nuevas tecnologías de la información constatamos el uso de proyección de diapositivas en las sesiones de clase y el uso de una sesión video-grabada de una clase con niños de primaria resolviendo una actividad de índole algebraica.

Destacamos un hecho relevante de nuestra innovación: la inclusión del RAE en el programa teórico-práctico de un curso sobre Enseñanza y aprendizaje de la matemática en educación primaria, introduciendo el sentido algebraico en coordinación con los sentidos numérico, métrico, geométrico y estocástico. Podemos concluir, por tanto, que la idoneidad ecológica del proceso formativo es alta.

5.3. IDONEIDAD INTERACCIONAL

La idoneidad interaccional se entiende como el grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje. En la tabla 5.64 se indican los componentes de la faceta interaccional y los indicadores de idoneidad correspondientes.

Tabla 5.64. Componentes e indicadores de idoneidad interaccional

COMPONENTES:	DESCRIPTORES:
Interacción docente-discente	- El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.) - Reconoce y resuelve los conflictos de los alumnos (se hacen preguntas y respuestas adecuadas, etc.) - Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento - Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos. - Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase
Interacción entre discentes	- Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes - Tratan de convencerse a sí mismos y a los demás de la validez de sus afirmaciones, conjeturas y respuestas, apoyándose en argumentos matemáticos - Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión
Autonomía	- Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos)
Evaluación formativa	- Se realiza una observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos usando técnicas variadas y pertinentes.

Las formas de interacción profesor - estudiantes, y de los estudiantes entre sí, estuvieron condicionadas por el diseño de la Guía docente del curso, en la cual se contemplaban distintos tipos de espacios, momentos y formas de interacción: 1) Clase presencial de teoría de una sesión de 2 horas a la semana, en gran grupo (usualmente entre 50 y 60 estudiantes), en la cual se privilegia el formato de clase magistral; 2) Clase presencial de seminarios de una sesión de 1 hora a la semana, con grupos de tamaño mediano (18 a 20 estudiantes), en la cual se privilegia el formato de trabajo en equipos de 3 o 4 estudiantes; 3) Tutoría presencial, individual o en equipos, en tiempos flexibles a lo largo de la semana; 4) Tutoría virtual, individual, en horario libre.

La idoneidad interaccional planificada, según los tipos de formatos de interacción descritos, se podría calificar como alta, dado que se prevé la posibilidad de implementar configuraciones didácticas de diferentes tipos: magistral, dialógica, trabajo cooperativo, personal. Sin embargo, en la implementación real los momentos de tutoría individual o grupal fueron muy escasos, por lo que fue difícil para el profesor reconocer los conflictos de aprendizaje de los estudiantes. En los momentos presenciales el tamaño de la clases era más bien grande, lo que dificultó la interacción profesor - estudiantes y la solución de los conflictos.

La organización de equipos de trabajo de 3 o 4 estudiantes para la realización de las prácticas facilitó el diálogo y comunicación entre estudiantes, al tiempo que les concede un cierto grado de autonomía y responsabilidad en la realización del trabajo. No obstante, el diseño de las prácticas era relativamente cerrado; se pedía responder a un conjunto de cuestiones previamente elegidas por el profesor. La realización de las prácticas exigía elaborar un informe escrito por parte de los equipos de trabajo, que debían entregar al profesor al cabo de una semana de iniciada la práctica. Este documento servía de base para una evaluación formativa grupal a lo largo del curso y para la toma de decisiones en los momentos de institucionalización de los conocimientos requeridos para dar respuesta a las cuestiones planteadas.

Teniendo en cuenta los indicadores mencionados la idoneidad interaccional implementada se puede calificar de mediana. En próximas implementaciones sería necesario facilitar y fomentar momentos de tutorías individuales y grupales en horarios que no interfieran con otras actividades requeridas a los estudiantes en otras materias del plan de estudios.

5.4. IDONEIDAD MEDIACIONAL

La idoneidad mediacional se entiende como grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. En la tabla 5.65 se indican los componentes de la faceta mediacional y los indicadores de idoneidad correspondientes.

Tabla 5.65. Componentes e indicadores de idoneidad mediacional

COMPONENTES:	DESCRIPTORES:
Recursos materiales (Manipulativos, calculadoras, ordenadores)	- Se usan materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al contenido pretendido - Las definiciones y propiedades son contextualizadas y

	motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	- El número y la distribución de los alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida - El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora) - El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido
Tiempo (De enseñanza colectiva /tutorización; tiempo de aprendizaje)	- El tiempo (presencial y no presencial) es suficiente para la enseñanza pretendida - Se dedica suficiente tiempo a los contenidos más importantes del tema - Se dedica tiempo suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión

La naturaleza didáctico-epistémica del contenido instruccional objeto del proceso de estudio hace innecesario el uso de recursos tecnológicos que ayuden a representar los conocimientos. Cuando era pertinente, no obstante, el profesor hizo uso de representaciones esquemáticas y medios de proyección visual; en una de las sesiones fue usada una clase video-grabada en la que niños de primaria resolvían una tarea de contenido algebraico y fue usada como contextualización del tema. Este componente de la idoneidad mediacional se puede considerar como adecuado.

El número de estudiantes inscritos en el curso, 58, aunque no era excesivamente alto como suele ser usual en la enseñanza universitaria en España, si lo era para lograr una atención personalizada de los estudiantes. El profesor llevaba un registro personal de cada estudiante, pero la información recogida, aparte de la asistencia a los seminarios de prácticas que era individualizado, refería al trabajo realizado por el equipo correspondiente.

Dado que el proceso de estudio tiene lugar en diversos momentos y espacios (gran grupo en el aula, grupos medianos en los seminarios de prácticas, equipos de trabajo, trabajo individual) sería necesario un registro más pormenorizado de cada uno de los estudiantes, para de esta manera poder explicar la variabilidad de los aprendizajes logrados, que no depende exclusivamente del componente epistémico y docente.

5.5. IDONEIDAD COGNITIVA

La idoneidad cognitiva se entiende como grado en que los contenidos implementados (o pretendidos) son adecuados para los alumnos, es decir, están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos. En la tabla 5.66 se indican los componentes de la faceta cognitiva y los descriptores de idoneidad correspondientes.

Tabla 5.66. Componentes e indicadores de idoneidad cognitiva

COMPONENTES:	DESCRIPTORES:
Conocimientos previos (Se tienen en cuenta los mismos elementos que en la idoneidad epistémica)	- Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio) - Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar en sus diversas componentes (tienen una dificultad manejable)
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	- Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo - Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes
Aprendizaje (Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica: situaciones, lenguajes, conceptos, procedimientos, proposiciones, argumentos y relaciones entre los mismos)	- Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos pretendidos (incluyendo comprensión y competencia): - Comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; competencia metacognitiva (planificación, control, evaluación, análisis-síntesis) - La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia - Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones.

En cuanto a los conocimientos previos podemos afirmar que los estudiantes tienen los conocimientos necesarios para iniciar el estudio del tema ya que las carencias de conocimientos común y avanzado sobre razonamiento algebraico elemental, detectadas en la primera fase de la práctica 1 (resolución de 4 problemas propios de primaria o primer ciclo de secundaria), son contempladas como una etapa del proceso formativo. La primera consigna que se propone a los estudiantes es "resuelve la tarea", la cual va seguida por la reflexión de índole epistémica sobre los tipos de objetos matemáticos puestos en juego en dicha actividad. Esta reflexión aunque sí es nueva para los futuros maestros, no es trivial para ellos como se ha revelado en esta investigación, pero es el principal objetivo del proceso formativo. Dado el carácter profesional de los estudios de magisterio el principal criterio para su inclusión en el programa debe ser la justificación de su pertinencia para el logro de una enseñanza de la matemática de calidad en primaria.

El análisis de la idoneidad cognitiva del proceso formativo debemos centrarlo, por tanto, en comprobar el grado de logro de los aprendizajes pretendidos. En este sentido podemos concluir, teniendo en cuenta los resultados de la evaluación final, y de los informes colectivos de la práctica 5, que un alto porcentaje de estudiantes han tenido importantes dificultades para discriminar los objetos algebraicos y asignar niveles de algebrización a la resolución de las tareas matemáticas propuestas. En consecuencia, la idoneidad cognitiva del proceso implementado debemos calificarla de baja.

5.6. IDONEIDAD AFECTIVA

La idoneidad afectiva se entiende como grado de implicación, interés y motivación de los estudiantes. En la tabla 5.67 se indican los componentes de la faceta afectiva y los indicadores de idoneidad correspondientes.

Tabla 5.67. Componentes e indicadores de idoneidad afectiva

COMPONENTES:	DESCRIPTORES:
Intereses y necesidades	- Las tareas se refieren a temas de interés para los estudiantes - Se proponen situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional
Actitudes	- Se promueve la participación en las actividades y responsabilidad en el trabajo en equipo. - Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice. - Se incentiva la perseverancia y el trabajo sistemático.
Emociones	- Se promueve la autoestima y seguridad en sí mismo para realizar tareas matemáticas (evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas). - Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.

En la enseñanza universitaria de índole profesional, como son los estudios de magisterio, se supone que los estudiantes inscritos tienen una motivación intrínseca por su decisión personal de prepararse para ejercer la docencia. Aparte de este supuesto general, el diseño del curso contempló la resolución de tareas matemáticas propias de los niveles de educación primaria y se trató de motivar la reflexión sobre el razonamiento algebraico por su relación con los procesos de generalización y de expresión de la generalidad en el trabajo matemático. Es decir, las situaciones estudiadas tienen relación con la profesión de maestro. La organización de equipos de trabajo para la resolución de las tareas prácticas atribuye responsabilidad y autonomía a los propios estudiantes, creando situaciones para la argumentación en situaciones de igualdad.

Se reconoce, no obstante, que esta faceta no recibió una atención suficiente tanto en el diseño como en la implementación. En particular se debería organizar un sistema de recogida de información sobre los distintos aspectos de la dimensión afectiva que permita conocer la situación de los estudiantes, en especial los que muestran un perfil cognitivo más bajo, y tomar decisiones al respecto.

5.7. INTERACCIÓN ENTRE FACETAS Y DIMENSIÓN NORMATIVA

Teniendo en cuenta el nivel relativamente bajo de los aprendizajes logrados por los estudiantes se puede concluir que la idoneidad cognitiva del proceso de estudio implementado ha sido baja. Es claro que si se quiere conseguir que los futuros maestros adquieran conocimiento y comprensión de las características del razonamiento algebraico elemental, y competencia para discriminar los distintos niveles de algebrización de la actividad matemática escolar es necesario ampliar el tiempo de instrucción y la inclusión de nuevas actividades prácticas. El diseño de unidades didácticas sobre desarrollo del razonamiento algebraico en los distintos ciclos de educación primaria lo consideramos una actividad potencialmente valiosa para ampliar la acción formativa realizada en esta investigación. Estas nuevas actividades instruccionales deberían ser contempladas en el tercer y cuarto año de la carrera de magisterio.

La principal norma que ha condicionado la acción formativa está relacionada con la faceta mediacional (tiempo asignado y número de estudiantes implicados). El número de créditos asignados a la asignatura (6 créditos, 150 horas de estudio en total y que viene establecido por el plan de estudios); la organización docente (fijada por Vicerrectorado correspondiente) y la Guía docente aprobada por el Departamento son normas de obligado cumplimiento. La asignatura "Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria" debe atender al desarrollo de los conocimientos didáctico - matemáticos de los diversos bloques de contenido de educación primaria, esto es, del sentido numérico, geométrico, métrico y estocástico, no solo del sentido algebraico. En realidad la introducción del sentido algebraico ha sido una innovación docente, que en cierto modo supone una ruptura de las normas epistémicas establecidas en la Guía docente del Departamento.

Ahora bien, la introducción de esta innovación está motivada por una norma propia de la disciplina Didáctica de la matemática que progresivamente va adquiriendo mayor consistencia: es necesario contemplar el desarrollo del pensamiento algebraico desde los primeros niveles de educación primaria, y en consecuencia los profesores de primaria deben ser capacitados para promover dicho pensamiento.

Otra norma que afecta de manera especial al trabajo de los estudiantes, que es necesario tener en cuenta coma factor explicativo de los aprendizajes logrados (o no logrados), es que los estudiantes deben estudiar simultáneamente otras cuatro materias, además de la asignatura "Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria". Cada una de estas materias exige una dedicación que no siempre es equilibrada y coordinada. Se tiene constancia de que en algunas ocasiones algunos estudiantes no asistieron a las clases presenciales por diversas razones. Por ejemplo, porque debían asistir a sesiones de tutorías de otros profesores, o porque tenían que preparar evaluaciones de otras materias. Sin duda, la acción formativa aplicada a los estudiantes no se puede considerar como homogénea.

CAPÍTULO 6

SÍNTESIS Y CONCLUSIONES

1. INTRODUCCION

En esta memoria hemos presentado un estudio de evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación. Como primera parte del estudio, hemos realizado un análisis de las diferentes propuestas teóricas sobre el razonamiento algebraico. El marco teórico en el que hemos basado nuestra investigación, nos permitió articular una propuesta para conceptualizar dicho razonamiento en los niveles elementales permitiendo reconstruir un significado de referencia del Razonamiento Algebraico Elemental (RAE). Posteriormente, se realizó un análisis de las respuestas dadas por un grupo de maestros en formación mexicanos a un cuestionario sobre el RAE, que permitió desvelar aspectos relevantes del significado personal de los estudiantes y las carencias formativas respecto al objeto matemático evaluado. Finalmente se diseñó, implementó y evaluó un proceso formativo centrado en el desarrollo de conocimientos y competencias sobre el RAE de un grupo de maestros en formación inicial.

Para finalizar nuestro trabajo de investigación, se precisa sintetizar las conclusiones obtenidas respecto al cumplimiento de los objetivos planteados así como de nuestras hipótesis iniciales. También destacamos las aportaciones de nuestro trabajo tanto en su condición de investigación así como en su contribución a la docencia, sin dejar de reconocer las limitaciones del mismo. Concluimos el capítulo, describiendo algunas líneas abiertas sobre las cuales se puede continuar el trabajo iniciado.

2. CONCLUSIONES SOBRE LOS OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

A continuación reproducimos los objetivos generales, considerando también los objetivos específicos descritos en el capítulo 2 de esta memoria.

OG-1. *Caracterizar el álgebra y el razonamiento algebraico desde una perspectiva global que permita la identificación de sus principales rasgos con el fin de clarificar su naturaleza en los grados elementales.*

Para la consecución de este objetivo general planteamos los siguientes objetivos específicos:

OE-1.1. Analizar las diversas propuestas de caracterización del álgebra escolar reflejadas en las investigaciones.

A través de la revisión de la literatura recogida en el capítulo 1 damos un panorama sintético sobre las investigaciones realizadas respecto a la inclusión del álgebra en los niveles elementales. A partir del análisis de la literatura, hemos organizado la información destacando 4 aspectos:

1. Las investigaciones realizadas sobre las diferentes temáticas que permiten introducir el álgebra en la escuela elemental: generalización de la aritmética, el estudio de los patrones y las funciones, el estudio de la equivalencia enmarcado dentro del pensamiento relacional, el estudio de las nociones de incógnita y variable (temáticas conocidas en la literatura como rutas de acceso al álgebra).
2. Las propuestas curriculares en donde se ponen de manifiesto la intención de incluir bloques temáticos sobre álgebra en los diseños curriculares para la educación infantil y primaria.
3. Las investigaciones que proponen diferentes enfoques del álgebra para caracterizar el razonamiento algebraico que permitiese entender su naturaleza en la escuela primaria.
4. La formación del maestro de primaria respecto a la inclusión del álgebra en la escuela elemental.

El estudio de las diversas tareas empleadas en las investigaciones para promover el razonamiento algebraico en los niños da cuenta de la diversidad en las formas de interpretar el álgebra en los niveles elementales. Por tal motivo se consideró necesaria la articulación de una visión propia del álgebra que nos permitiese tener un marco de referencia sobre su significado en la escuela primaria. Para ello consideramos el siguiente objetivo específico:

OE-1.2. Elaborar un modelo de caracterización del álgebra que articule, bajo la interpretación del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, las diversas perspectivas del álgebra escolar.

Para la consecución de este objetivo consideramos las diversas investigaciones recogidas en el capítulo 1 y su interpretación desde el marco teórico. Para la articulación de nuestra propuesta consideramos dos aspectos centrales para la actividad algebraica en los que la literatura parece haber un consenso, los procesos de generalización y la simbolización. La generalización, interpretada desde el EOS, mediante la noción de objeto intensivo, permite entenderla como una entidad relativa al contexto y no como una entidad absoluta, lo que favorece su estudio en los primeros grados de la escuela primaria. La simbolización, ligada a los procesos de generalización, tiene lugar, cuando emerge un objeto intensivo como entidad unitaria y es comunicada a través de medios ostensivos. En este sentido los procesos de unitarización y ostensión juegan un papel relevante en la formulación de nuevos procesos de generalización. Paralelamente consideramos el pensamiento funcional y el estructural, así como la modelización como fuentes de donde pueden emerger tareas que promuevan el desarrollo del razonamiento algebraico. Como resultado de nuestras interpretaciones de los objetos y procesos algebraicos, realizamos una propuesta en la que definimos criterios para distinguir niveles de razonamiento algebraico en la escuela elemental. Las justificaciones respecto a la articulación de nuestro modelo con las propuestas por otros autores y descritas en el capítulo 3, nos lleva a la consideración de que nuestra propuesta es coherente y consistente.

Dada la necesidad de incidir en la formación de profesores para que la propuesta de introducción del razonamiento algebraico en la primaria sea viable, nos llevó al planteamiento del segundo objetivo general de investigación.

OG-2.*Indagar sobre los conocimientos que poseen futuros maestros de educación primaria al resolver tareas de índole algebraica.*

Se pretendía contar con un marco de referencia sobre los conocimientos de maestros en formación inicial respecto al RAE. Para hacer esta evaluación se eligió el contexto mexicano dado la inclusión de formas de razonamiento algebraico en el currículo de educación básica de este país. Para el cumplimiento de este objetivo general se plantearon los siguientes objetivos específicos:

OE-2.1. Elaborar un instrumento, que contemple el modelo de caracterización del álgebra propuesto y las facetas del conocimiento del profesor, y aplicarlo a una muestra de maestros en formación para indagar sobre aspectos relevantes de los conocimientos que tienen sobre el RAE.

Para alcanzar este objetivo nos planteamos la construcción de un cuestionario propio. Para ello decidimos recopilar diversas tareas propuestas en las investigaciones, así como las propuestas en los Estándares curriculares de la NCTM; también tuvimos en cuenta algunas tareas de un libro de texto.

En la construcción de nuestro instrumento decidimos contemplar, en la selección de las tareas, nuestra propuesta de niveles de algebrización que funge como significado de referencia. Además, también consideramos el tipo de conocimiento que es posible evaluar a través de las mismas; para esto último nos ceñimos a la propuesta del conocimiento del profesor propuesta por Godino (2009). El análisis a priori realizado sobre cada tarea del instrumento nos permitió poner de manifiesto el contenido a evaluar y la previsión de posibles formas de resolución por parte de los maestros en formación. La aplicación del cuestionario nos llevó consecuentemente al siguiente objetivo específico:

OE-2.2 Analizar y describir las producciones de los futuros maestros para determinar si existen regularidades en las soluciones propuestas que permitan caracterizar los significados personales sobre RAE e identificar carencias formativas sobre el mismo.

Para dar cumplimiento a este objetivo específico se analizaron las respuestas que dieron los estudiantes al cuestionario diseñado. En un primer momento se realizaron análisis de frecuencias simples sobre el grado de corrección de las respuestas dadas por los estudiantes, sobre el empleo de los diferentes métodos de resolución definidos de acuerdo al modelo de niveles de algebrización, sobre los diferentes tipos de conocimiento identificados y sobre las diferentes estrategias de enseñanza sugeridas por los maestros en formación. Adicionalmente, se realizó un análisis descriptivo y utilizando las herramientas del EOS, para detallar los elementos algebraicos puestos en juego en las distintos tipos de resoluciones elaboradas por los estudiantes. Esto nos permitió inferir una serie de conclusiones sobre su conocimiento relacionado con el RAE y las limitaciones en su formación inicial.

Estos resultados nos condujeron a formular el siguiente objetivo general de investigación:

OG-3. *Realizar un estudio de caso de un proceso formativo con maestros en formación inicial orientado a promover el desarrollo del RAE.*

Para alcanzar este objetivo se plantearon los objetivos específicos siguientes:

OE-3.1. Diseñar e implementar una experiencia formativa en un grupo de futuros maestros orientada a desarrollar la competencia de los mismos para reconocer los objetos algebraicos y asignar niveles de algebrización a la actividad matemática escolar.

Para cumplimentar este objetivo se incidió en un grupo de 56 maestros en formación de la Universidad de Granada en el contexto de la asignatura "Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria" impartida a lo largo de un cuatrimestre. Para tal intervención formativa se diseñaron 10 tareas específicas cuya elección se realizó de acuerdo:

- Al significado de referencia sobre el RAE articulado desde el EOS (capítulo 3) y basado en la revisión de la literatura (capítulo 1).
- Al conocimiento del profesor (Godino, 2009), específicamente la faceta epistémica (conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido y conocimiento avanzado del contenido).

Posteriormente, el análisis a priori realizado sobre las tareas reveló el contenido a ser evaluado, así como la previsión de posibles respuestas por parte de los maestros en formación. Las 10 tareas fueron aplicadas en 3 momentos diferentes a lo largo del curso a modo de actividades prácticas: práctica 1 (Resolución de problemas), práctica 5 (Álgebra en educación primaria) y examen final (Tarea sobre patrones). La práctica 1 constaba de 4 tareas y fue aplicada a modo de diagnóstico para dar cuenta de los conocimientos iniciales de los estudiantes. La práctica 5 constaba de 5 tareas y fue aplicada para promover principalmente nuestra conceptualización sobre el RAE. Finalmente, se incluyó una tarea en el examen final que pretendía dar cuenta, en aspectos parciales, sobre los conocimientos y competencias finales adquiridas. Las prácticas no solo implicaban la resolución de las tareas sino también exigían al maestro en formación un análisis sobre la identificación de objetos matemáticos implicados en sus soluciones (práctica 1) y la identificación de objetos algebraicos y niveles de algebrización (práctica 5 y examen final). Además de la aplicación de las prácticas, el proceso formativo fue consolidado con las puestas en común y discusiones realizadas sobre las mismas en las que el profesor institucionalizaba los conocimientos puestos en juego en cada una de las prácticas. Un aspecto importante que también forma parte importante del proceso formativo es la reflexión promovida en los estudiantes a través de un documento que informa sobre la introducción del álgebra en los niveles elementales, así como las explicaciones del profesor en distintos momentos del desarrollo del curso sobre las características del RAE.

OE-3.2. Valorar la idoneidad didáctica de la experiencia formativa e identificar mejoras potenciales de dicha experiencia.

Para el cumplimiento de este objetivo específico se realizó, una vez concluido el proceso formativo, un análisis retrospectivo aplicando la noción de idoneidad didáctica, teniendo en cuenta las seis facetas que caracterizan los procesos de estudio en el marco del EOS (facetas epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional). También se tiene en cuenta la dimensión normativa como ayuda para el reconocimiento de restricciones que han condicionado el proceso formativo, en particular el tiempo asignado.

3. CONCLUSIONES RESPECTO A LAS HIPÓTESIS

Las hipótesis que hemos planteado para nuestro trabajo son presentadas como expectativas de lo que esperábamos obtener con la realización del mismo, se corresponden con las preguntas de investigación y se basan en el estudio de la literatura expuesto en el capítulo 1. A continuación contraponemos nuestras hipótesis con los resultados que hemos obtenido.

HG1: Se puede caracterizar el álgebra de la escuela primaria, distinguiendo distintos niveles de algebrización en el razonamiento algebraico elemental, teniendo en cuenta los procesos de generalización matemática, la articulación de diversas representaciones lingüísticas, el cálculo analítico basado en las propiedades estructurales y los procesos de modelización matemática.

La hipótesis se confirma con la propuesta que hemos realizado en el capítulo 3. Nuestro marco teórico nos permitió identificar objetos y procesos algebraicos que permiten identificar en una actividad matemática, rasgos algebraicos. Se trata de una propuesta teórica fundamentada en la literatura y complementada por el marco teórico al cual nos ceñimos en esta investigación.

HG2: Los maestros en formación entienden el álgebra escolar como manipulación de expresiones simbólicas literales, tienen importantes dificultades para modelizar y resolver de manera algebraica problemas de enunciado verbal, y para expresar los procesos de generalización de manera algebraica.

El análisis de las respuestas de los estudiantes, realizado en el capítulo 4, revela por un lado la forma de entender el RAE por parte de dichos estudiantes. Así mismo, el uso de la noción de configuración de objetos y procesos del EOS para realizar el análisis de las respuestas ha permitido profundizar en los conocimientos expuestos por los maestros en formación al resolver el cuestionario. Por otro lado, del estudio también se desprende que los maestros en formación tienen carencias tanto en el conocimiento común, como en el avanzado y el especializado del contenido objeto de la investigación. Notorias son las limitaciones respecto al conocimiento del contenido en relación con la enseñanza.

HG3: El desarrollo del RAE en los maestros en formación inicial se puede alcanzar mediante prácticas discursivas que muestren a los estudiantes los rasgos característicos del razonamiento algebraico elemental y actividades prácticas basadas en el reconocimiento de niveles de algebrización en la resolución de problemas propios de educación primaria.

Esta hipótesis se confirma parcialmente. El análisis de las producciones sugiere que aunque los maestros en formación resuelven regularmente bien las tareas relacionadas con el conocimiento común manifiestan dificultades al momento de resolver las tareas sobre el conocimiento avanzado (tabla 6.1). Sus formas de resolución prioritariamente son de nivel cero de algebrización, así lo reflejan las configuraciones cognitivas identificadas; esto sugiere que las prácticas matemáticas puestas de manifiesto por los estudiantes son poco adecuadas para promover el RAE. Por otro lado, los análisis de aspectos relacionados con el conocimiento especializado del contenido sugieren que la identificación de objetos matemáticos en general y la determinación de objetos algebraicos en particular son un reto para los futuros docentes. Se manifiesta una desconexión entre la identificación de objetos algebraicos y la asignación de niveles de algebrización, por lo que esta competencia no fue desarrollada en la mayoría de los estudiantes.

Tabla 6.1. Tipo de conocimientos implicados en el proceso formativo

Conocimiento	Acción	Tarea
Común del contenido	Resolver la tarea	Práctica 1 1. La limonada (ítems a y b) 4. Multiplicaciones incompletas Práctica 5 1. Igualdades con datos desconocidos 2. La desigualdad con datos desconocidos 3. Los medios de locomoción 4. El precio de los sándwiches
Conocimiento avanzado del contenido	Resolver la tarea	Práctica 1 1. La limonada (ítem c) 2. El gasto diario 3. Los palillos Práctica 5 3. Secuencia de figuras Tarea integrada en el examen 5. Números triangulares
Conocimiento especializado	• Identificación de objetos matemáticos implicados en las tareas y en sus soluciones correspondientes	Práctica 1 completa
	• Resolver de varias formas • Identificar objetos algebraicos • Identificar niveles de algebrización	Práctica 5 completa
	• Identificar objetos algebraicos • Identifica niveles de algebrización	Tarea del examen

Las puestas en común, las discusiones y el estudio del documento álgebra en educación primaria (anexo 8) sugieren avances en el desarrollo de las competencias de los estudiantes.

4. APORTES Y LIMITACIONES DEL ESTUDIO

Uno de los principales aportes es la conceptualización del RAE basada en niveles de algebrización articulada desde el EOS. Dada la falta de consenso sobre el significado del álgebra en los niveles elementales, nuestra propuesta imbrica las diferentes caracterizaciones realizadas desde las investigaciones con las herramientas del EOS proporcionando un significado de referencia del mismo. Esto supone un avance en el esclarecimiento de la naturaleza del álgebra en la escuela elemental.

Otro de los aportes es la evaluación sobre el RAE realizada con maestros en formación de México, dada la inexistencia de este contenido en el currículo español. El tener un marco de referencia sobre los conocimientos de futuros docentes que están familiarizados con el álgebra en la escuela primaria, aporta conocimientos sobre los significados personales de los estudiantes respecto al mismo. Los resultados suponen que aunque se integra en el plan de estudios de la licenciatura en educación primaria una asignatura sobre el álgebra (su enseñanza y aprendizaje), los futuros docentes mexicanos manifiestan dificultades en la resolución de problemas de índole algebraica. Los maestros en formación aún identifican al álgebra con la manipulación simbólica y el uso exclusivo de letras, por lo que el hacer frente a la reforma educativa de la educación básica en México, que integra desde 2009 un enfoque sobre resolución de problemas en el que se incluye el *sentido numérico y pensamiento algebraico* para los niños, implica un reto para los futuros maestros.

En esta misma línea sobre formación de profesores, consideramos como otra aportación de nuestro trabajo, la implementación de un proceso formativo que contempla el desarrollo del RAE y cuya finalidad es brindar a los maestros en formación oportunidades para desarrollar competencias de análisis para la identificación de rasgos algebraicos en la actividad matemática escolar. El proporcionar pautas a los maestros en formación para la identificación de niveles de algebrización en la práctica matemática supone avances para la integración de la propuesta en las aulas de la escuela elemental.

El diseño de tareas específicas incluidas en el cuestionario (capítulo 4) y en las prácticas (capítulo 5), en cuya estructura se pone de manifiesto nuestra conceptualización del RAE integrada al modelo de conocimiento del profesor propuesto por Godino (2009), aportan información cruzada respecto a dos tópicos de creciente interés en la comunidad de investigadores. Nuestra pretensión de hacer operativo nuestro enfoque sobre el álgebra incorporado a la noción del conocimiento didáctico-matemático constituye un aporte, tanto en el campo de formación de profesores como en el campo de didáctica del álgebra.

Por otro lado, reconocemos el carácter limitado de nuestra investigación en cuanto a la no exhaustividad de la recopilación de tareas de las investigaciones. El tener un marco de referencia amplio sobre las tipologías de tareas que, según las investigaciones, promueven el desarrollo del pensamiento algebraico es un punto de partida para realizar una clasificación de acuerdo al nivel educativo. En este sentido, el EOS proporciona las herramientas necesarias para realizar dicha discriminación.

Respecto al estudio exploratorio desarrollado en el capítulo 4, se reconoce como una limitación, la falta de acceso, por parte de los investigadores, al contexto educativo de los futuros docentes mexicanos. No se tuvo acceso al enfoque de la asignatura *Álgebra: su enseñanza y aprendizaje,* contemplada en su plan de estudios y la forma en que integra (si es que lo hace) la reforma educativa que impacta las aulas de educación primaria.

La integración de nuestra perspectiva teórica sobre el RAE en el aula de formación de maestros, desarrollada en el capítulo 5 tuvo ciertas limitaciones. Por un lado, el tiempo académico y los diferentes contenidos a ser desarrollados a lo largo del curso originaron modificaciones considerables en el proceso formativo. Los trabajos individuales fueron modificados a trabajos grupales, lo que impidió tener una trayectoria cognitiva por individuo y un análisis de su progreso. Además, la consideración en la evaluación sumativa de una sola tarea respecto al RAE, no fue suficiente para tener una perspectiva completa de los conocimientos finales adquiridos por los maestros en formación. Las limitaciones de tiempo también afectaron el proceso de retroalimentación, discusión y reflexión sobre cada una de las soluciones realizadas por los estudiantes.

Tampoco fue posible realizar estudios de caso con determinados alumnos, lo que hubiera permitido un seguimiento detallado tanto de sus formas de abordar los problemas como del proceso de evolución de las competencias sobre identificación de objetos algebraicos y niveles de algebrización.

5. LINEAS DE INVESTIGACIÓN ABIERTAS

La planificación e implementación de la enseñanza del RAE en los distintos niveles de educación primaria requiere que los maestros tengan un sistema de conocimientos didáctico-matemáticos (CDM-RAE) para lo cual es necesario diseñar acciones formativas específicas que aborden los distintos componentes de dichos conocimientos (Godino, 2009). Ello supone una línea de investigación que en este trabajo apenas hemos iniciado, ya que lo hemos centrado en algunos aspectos del conocimiento común y avanzado del contenido y un aspecto parcial del conocimiento especializado del contenido referido a la faceta epistémica del mismo (reconocimiento de objetos algebraicos y niveles de algebrización).

Así mismo, las cuestiones relacionadas con los conocimientos sobre errores, dificultades, conflictos de aprendizaje (faceta cognitiva del conocimiento especializado del contenido) y aspectos afectivos deberán ser tenidas en cuenta en nuevas investigaciones. De manera más específica consideramos necesario profundizar en dos direcciones:

1) Construcción de instrumentos para evaluar el grado de comprensión y dominio de maestros en formación sobre CDM-RAE. El cuestionario descrito en el capítulo 4 de la tesis y aplicado a una muestra de estudiantes mexicanos evalúa básicamente aspectos del conocimiento común y ampliado del CDM sobre RAE, mientras que la tarea incluida en el examen final del proceso formativo (capítulo 5) es insuficiente para el evaluar los diferentes componentes de dichos conocimientos. Por tanto, se hace necesario el diseño de nuevos instrumentos más sistemáticos que permitan evaluar todas las categorías y tipos de conocimientos específicos que poseen los estudiantes para maestros.

2) Ampliar las experiencias formativas sobre RAE en los distintos cursos sobre educación matemática que reciben los maestros a lo largo de su carrera.

Por otro lado, el análisis de libros de texto de educación primaria, desde el punto de vista de las posibilidades que presentan para el desarrollo del sentido algebraico en los niños, y de posibles cambios a introducir en las actividades incluidas en los textos puede ser un tipo de acción formativa de interés en la formación de los maestros. Así mismo, una vez que los estudiantes estén familiarizados con los rasgos característicos del álgebra elemental y de los niveles de algebrización de la actividad matemática se puede proponer la elaboración de unidades didácticas orientadas a la promoción del sentido algebraico en los distintos niveles de educación primaria. Mediante la elaboración de estas unidades didácticas es posible movilizar las distintas facetas y componentes del CDM-RAE, por lo que pueden ser un recurso instruccional valioso, sobre todo si los estudiantes tienen ocasión de implementar dichas unidades en los colegios durante los periodos de prácticas de enseñanza y flexionar con las mismas.

6. PUBLICACIONES DERIVADAS DE LA TESIS DOCTORAL

Artículos de revista:

Godino, J. D., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. D. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Boletim de Educação Matemática - BOLEMA*, 26 (42B), 483-511.

Godino, J. D. Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2013). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias* (en prensa).

Aké, L., Godino, J. D. y Gonzato, M. (2013). Contenidos y actividades algebraicas en Educación Primaria. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 33, 39-52.

Comunicaciones en Actas de Congresos referidas:

Aké, L., Castro, W. F., Godino, J. D. (2011). Conocimiento didáctico-matemático sobre el razonamiento algebraico elemental: un estudio exploratorio. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds), *Investigación en Educación Matemática. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 227-236). Ciudad Real

Godino, J.D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M.R. (2012). Niveles de razonamiento algebraico elemental. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. Penalva, F.

García, y L. Ordoñez (Eds), *Investigación en Educación Matemática. XVI Simposio de la SEIEM* (pp. 285-294). Jaén.

Aké, L., Godino, J. D., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2013). Proto-algebraic levels of mathematical thinking. En A. M. Lindmeier y A. Heinze (Eds.). *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 2, (pp. 1-8). Kiel, Germany: PME.

REFERENCIAS

Aké, L., Castro, W. F., Godino, J. D. (2011). Conocimiento didáctico-matemático sobre el razonamiento algebraico elemental: un estudio exploratorio. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds), *Investigación en Educación Matemática. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 227-236). Ciudad Real.

Aké, L., Godino, J. D., y Gonzato, M. (2013). Contenidos y actividades algebraicas en Educación Primaria. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 33, 39-52.

Alibali, M. W. (1999). How children change their minds: Strategy change can be gradual or abrupt. *Developmental Psychology,* 35, 127-145.

Alibali, M. W., Knuth, E. J., Hattikudur, S., McNeil, N. M., y Stephens, A.C. (2007). A longitudinal examination of middle school students' understanding of the equal sign and equivalence equations. *Mathematical Thinking and Learning,* 9(3), 221-247.

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics,* 14(3), 24-35.

Arcavi, A. (2007). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 8(44), 59-75.

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* Número especial, 267-299.

Asquith, P., Stephens, A., Knuth, E., y Alibali, M. W. (2007). Middle school mathematics teachers´ knowledge of students´ understanding of core algebraic concepts: equal sign and variable. *Mathematical Thinking and Learning,* 9(3), 249-272.

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, 51, 241-247.

Ball, D. L. (2003). What mathematical knowledge is needed for teaching mathematics. Secretary's Summit on Mathematics, US Department of Education.

Becker, J. R., y Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. En H. L. Chick, y J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 4 (pp. 121-128). Melbourne: PME.

Bednarz N. (1996). Language activities, conceptualization and problem solving: The role played by verbalization in the development of mathematical though in young children. In H.M. Mansfield, N.A. Pateman, and N. Bednarz (Eds.) *Mathematics for tomorrow's young children: International perspectives on curriculum* (pp. 228-239). Dordrecht: Kluwer.

Bednarz, N., y Guzmán, J. (2003a). ¿Cómo abordan los estudiantes de secundaria la resolución de problemas antes de ser introducidos al álgebra? Un estudio exploratorio Quebec-México. En Filloy, Eugenio (coordinador), *Matemática Educativa, Aspectos de la investigación actual, Fondo de Cultura Económica* (FCE, Editorial), ISBN 968-16-7028-0, pp. 11-40.

Bednarz, N., Kieran, C., y Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bednarz, N., Radford, L., Janvier, B. y Lepage, A. (1992). Arithmetic and algebraic thinking in problem solving. In W. Geeslin y Graham (Eds.), *Proceedings of the 16th conference of the International Group forthe Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1 (pp. 65-72). Durham, New Hampshire: Program Committee.

Blanton, M. L., y Kaput, J. J. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience Part II. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra*, Vol. 1 (pp. 87-102). Melbourne: University of Melbourne, Australia.

Blanton, M. L., y Kaput, J. J. (2003). Developing elementary teachers' "algebra eyes and ears: Understanding Characteristics of Professional Development that Promote Generative and Self-Sustaining Change in Teacher Practice". *Teaching Children Mathematics,* 10, 70-77.

Blanton, M. L., y Kaput, J. J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. J. Hoines, y A. B. Fuglestad (Eds), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 2 (pp. 135-142). Bergen: Bergen University College.

Blanton, M. L., y Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education,* 36(5), 412-446.

Blanton, M. L., y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En, J. Cai, E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. Advances in mathematics education*. (pp. 5-21). Berlin: Springer-Verlag.

Bolea, P., Bosch, M. Y Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21 (3), 247-304.

Borko, H., Frykholm, J. A., Pittman, M., Eiteljorg, E., Nelson, M., Jacobs, J., Clark, K. K., y Schneider, C. (2005). Preparing teachers to foster algebraic thinking**.** *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM): International Reviews on Mathematical Education*, 37(1), 43–52.

Borko, H., y Putnam, R. (1996). Learning to teach. In David C. Berliner y Robert C. Calfee (Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp. 673-709). New York: Macmillan.

Branco, N. y Ponte, J. P (2012). Developing algebraic and didactical knowlendge in pre-service primary teacher education. *The 36th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), Taiwan.*

Brown, T. (2001). *Mathematics education and language. Interpreting hermeneutics and post-structuralism*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Burkardt, H. (2001). Algebra for all: What does it mean? How are we doing? In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, y J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra,* Vol. 1 (pp. 140-146). Melbourne: University of Melbourne, Australia.

Butto, C., y Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: Abordaje basado en la geometría. *Educación Matemática,* 16(1), 113-148.

Cai, J., y Knuth, E. (2011). *Early Algebrization: A global dialogue from multiple perspectives*. Heidelberg, Germany: Springer-Verlag

Caprano, M., Rangel-Chavez, A., y Caprano, R. (2008). Effective preparation for teaching of algebra at the primary level. *The 11th International Conference on Mathematics Education (ICME-11) for Topic Study Group 2: New developments and trends in mathematics education at primary level*. Monterrey, México.

Carpenter, T. P., Frankle, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically. Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carpenter, T. P., y Levi, L. (2000). *Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades*. (Res.Rep.00-2). Madison, WI: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science (NCISLA).

Carpenter T., Levi L., Franke M.L., Zeringue J.K. (2005): Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM): The International Journal on Mathematics Education*, 37, 53-59.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. L. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En: F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* Vol. 2 (pp. 669-705). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Carraher, D. W., Martinez, M. V., y Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM): The International Journal on Mathematics Education* 40(1), 3-22.

Carraher, D., Schliemann, A. D., y Brizuela, B. M. (2000). Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions. En M. L. Fernández (Ed). Conferencia magistral presentada en el *22nd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME),* Tucson, Arizona.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., y Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education,* 37(2), 87.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., y Schwartz, J. L. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. En J. Kaput. D. Carraher, y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 235–272). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Cañadas, M. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas*. Tesis Doctoral no publicada, Universidad de Granada, España.

Caspi, S., & Sfard, A. (2012). Spontaneous meta-arithmetic as the first step toward school algebra. *International Journal of Educational Research*, 51(52), 45–65

Castro, E. (1994). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con Escolares de Primer Ciclo de Secundaria (12-14 años*). Tesis Doctoral no publicada, Universidad de Granada, España.

Castro, E. (1994). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa*. Tesis Doctoral no publicada, Universidad de Granada, España.

Castro, E., y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación secundaria en la escuela secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: Horsori Editorial.

Castro, W. F. (2011). *Evaluación y desarrollo de competencias de análisis didáctico de tareas sobre razonamiento algebraico elemental en futuros profesores*. Universidad de Granada, España.

Castro, W. F. y Godino, J. D. (2008). Evaluación del razonamiento algebraico elemental en futuros maestros: Un estudio exploratorio. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds), *Investigación en Educación Matemática. XII Simposio de la SEIEM* (pp. 273-282). Badajoz.

Castro, W. F. y Godino, J. D. (2009). Cognitive configurations of pre-service teachers when solving an arithmetic-algebraic problem. Paper presented at the *meeting of the CERME 6, Group 4: Algebraic Thinking.* Lyon, France.

Cerdán, F. (2007). *Estudios sobre la familia de problemas aritmético-algebraicos*. Tesis Doctoral no publicada, Universidad de Valencia, España.

Chaiklin, S. and Lesgold, S. (1984) Prealgebra students' knowledge of algebraic tasks with arithmetic expressions. Paper presented at the *annual meeting of the American Research Association.* New Orleands, LA.

Cohen, L., y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La muralla.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research methods education*. London: Routledge.

Cooper, T. J. y Warren, E. (2008) Generalising mathematical structure in Years 3-4: A case study of equivalence of expression. In Figueras, O., Cortina, J. L., Alatorre, S., Rojano, T. y Sepulveda, A., (Eds.) *Proceedings of the 32th Conference International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME),* (pp. 369-376). Morelia, México.

Cooper, T. J. y Warren, E. (2011). Years 2 to 6 Students' Ability to Generalise: Models, Representations and Theory for Teaching and Learning. En, J. Cai, E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. Advances in mathematics education*. (pp. 187-211). Berlin: Springer-Verlag.

Creswell, J. W. (2009). *Research Design: qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (3.ª ed.). Londres: Sage

Darling-Hammond, L., Holtzman, D. J., Gatlin, S. J. y Heiling, V. (2005). Does teacher preparation matter? Evidence about teacher certification, teach for America and teacher effectiveness. *Education Policy Analysis Archives*, 13 (42).

Davis, R.B. (1984). *Learning mathematics: the cognitive science approach to mathematics education.* London: Croom Helm.

Davis, R. B. (1985). Algebraic thinking in the early grades. *Journal of Mathematical Behavior,* 4(2), 195-208.

Del Estado, J. (2006). Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *BOE de*, *4*.

Design Based Research Collective (DBRC) (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher*, *32*(1), 5-8.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. En, A. J. Bishop et al. (Ed.), *Mathematical Knowledge: It's Growth Throught Teaching* (pp. 63-85). Dordrecht: Kluwer A.P.

Drouhard, J. P. y Teppo, A. R. (2004). Symbols and language. En K. Stacey, H. Chick y M. Kenda (Eds.), The future of the teaching and learning of algebra. The 12 th ICMI Study New ICMI Study Series (pp. 225-264). Berlin: Springer.

Drijvers, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: design research on the understanding of the concept of parameter*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Utrecht, Utrecht. Descargado el 5 de abril de 2010 de http://igitur-archive.library.uu.nl/dissertations/2003-0925-101838/inhoud.htm

Drijvers, P. (2008). The cube of algebraic concepts, ICT tools and their roles. In D. Berntzen, B. Barzel y S. Hussmann (Eds.), *Tagungsdocumentationder T3-Pfingsttagung,* (pp. 27-58). Muenster, Germany: Universitat Muenster.

Duval, R. (1995). *Semiosis et Pensée Humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuals*. Berne: Peter Lang S.A. Editions scientifiques européennes.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1), 103-131.

Duval, R. (2008). Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. En, L. Radford, G. Schubring, y F. Seeger (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture* (pp. 39–62). Rotterdam: Sense Publishers.

Escuela Normal de Educación Primaria (ENEPY) (s. f). Escuela Normal Rodolfo Menéndez de la Peña, Mérida Yucatán. Disponible en: http://www.normalrodolfo.edu.mx/quienes-somos/mision/

English, L. D., y Warren, E. (1998). Which is larger, $t+t$ or $t+4$? The Mathematics Teacher, 91(2): 166-170.

Fernández, F. (1997). Aspectos históricos del paso de la aritmética al álgebra. Implicaciones para la enseñanza del lenguaje simbólico algebraico. *Revista de didáctica de las matemáticas*, 14, 75-91.

Ferrero, L., et al (1999). *Matemáticas 5*.Madrid: Anaya

Ferrero, L., et al (2007). *Sexto de primaria: tercer ciclo Matemáticas*. Madrid, Anaya.

Filloy, E., y Rojano, T. (1989). Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 19-25.

Filloy, E., Puig, L., y Rojano, T (2008). *Educational algebra. A theorical and empirical approach*. New York: Springer.

Filloy, E., Rojano, T., y Solares, A. (2003). Two meanings of the "equal" sign and senses of comparison and substitution methods. En N. A. Pateman; B. J. Dougherty y J. T. Zilliox (Eds), *Proceedings of the 27th Conference International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*, Vol. 4 (pp. 223-230). Honolulu: College of Education, University of Hawaii.

Font, V. (2000). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. *Philosophy of Mathematics Education Journal, 14*, 1-35.

Font, V., y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matematica Pesquisa*, *8*(1), 67-98.

Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 27* (2), 2-7.

Freiman, V., y Lee, L. (2004). Tracking primary students'understanding of the equality sign. En M. J. Hoines y A. B. Fuglestad (Eds), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the International Group for the Psycology of Mathematics Education (PME)*, Vol. 2 (pp 415-422). Bergen: Bergen University College.

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Cap.6. Reidel, Dordrecht. Traducción de trabajo para uso interno. Luis Puig Espinosa. Universidad de Valencia.

García-Cruz, J. A., y Martinón, A. (1998). Levels of generalization in linear patterns. Olivier, A., Newstead, K. (Eds). *Proceeding of the 22th Conference of the International Group for the Psycology of Mathematics (PME),*Vol. 2 (pp 329-336). Stellenbosch: University of Stellenboch.

Gallardo, J. (2004). *Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. El caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales*. Tesis Doctoral no publicada, Universidad de Málaga, España

Gascón, J. (1999). La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. *Educación Matemática*, 11(1), 77-88.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14 (2), 203-231.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, *22* (2), 237-284.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en Internet: URL: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_tfs.htm.

Godino J. D. (2009). *Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas*. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.

Godino, J. D. (2010). Godino, J. D. (2010). *Perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina tecnocientífica*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49 - 68). Jaén: SEIEM.

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2013). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias* (en prensa).

Godino, J.D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M.R. (2012). Niveles de razonamiento algebraico elemental. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. Penalva, F. García, y L. Ordoñez (Eds), *Investigación en Educación Matemática. XVI Simposio de la SEIEM* (pp. 285-294). Jaén.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En, A. Sierpinska y J.

Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J.D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherche en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM): The International Journal on Mathematics Education*, *39* (1), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, A., Estepa, A., Lacasta, E. y Wilhelmi, M. R. (2013). Didactic engineering as design-based research in mathematics education. *Proceedings of the CERME 8,* Turkey.

Godino, J. D., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. D. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Boletim de Educação Matemática-BOLEMA*, 26 (42B), 483-511.

Godino, J. D., Contreras, A., y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 26*(1), 39-88.

Godino, J. D. y Font, V. (2003). Razonamiento algebraico y su didá. Universidad de Granada. (Recuperable en, http://www.ugr.es/local/jgodino/).

Godino, J. D., Font, V., y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(1), 133-156.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Lurduy, O. (2009). Systems of practices and configurations of objects and processes as tools for the semiotic analysis in mathematics education. *Semiotic Approaches to Mathematics, the History of Mathematics and Mathematics Education - 3rd Meeting*. Aristotle University of Thessaloniki, July 16-17, 2009.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, 77(2), 247-265.

Goldin, G. A., y Kaput, J. J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. En L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Golding, y B. Greer (Eds.), *Theories of Mathematical Learning* (pp. 397-430). Mahwah, NJ: Laurence Erlbaum Associates, Inc.

Graham, A. y Thomas, M. (2000). Building a versatile understanding of algebraic variables with a graphic calculator. Educational Studies in Mathematics 41, 265-282.

Greenes, C., and R. Rubenstein (2008). *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics.* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Harel, G., y Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematics,* 11(1), 38-42.

Hattikudur, S., y Alibali, M. W. (2010). Learning about the equal sign: Does comparing with inequality symbols help? *Journal of Experimental Child Psychology*, 107, 15-30.

Herbert, K., y Brown, R. H. (1997). Patterns as tools for algebraic reasoning. *Teaching Children Mathematics, 3*, 340-345.

Hernández Sampieri. R., Fernández, C., Baptista P. (2003). *Metodología de la investigación*. 3ª Edición. México, DF.

Hewitt, D. (2003). Notation issues: Visual effects and ordering operations. In N. Pateman, B. J., Dougherty, y J. Zillox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the Group for the Psycology of Mathematics Education (PME),* Vol. 3 (pp. 63-69). Honolulu: College of Education, University of Hawaii.

Hill H. C., Ball D.L., Schilling S.G. (2008): Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.

Hill, H., Rowan, B., y Ball, D. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, 42 (2), 371-406.

Hill, H.C., Schilling, S.G., y Ball, D. L 2004. Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *Elementary School Journal*, 105, 11-30.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra. The effect of brackets. In M. J. Hoines y A. B. Fuglestad (Eds). *Proceedinfs of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*, Vol. 3, (pp. 49-56). Bergen, Normay: Bergen University College..

Hodgen, J. (2011). Knowing and identity: A situated Theory of mathematics knowledge in teaching. En T. Rowland y K Rutheven (Eds). *Mathematical Knowledge in Teaching*, (pp 27-42) . Melbourne, Australia: Springer.

Jacobs, V., Franke, M., Carpenter, T., Levi, L., y Battey, D. (2007).A Large-Scale Study of Professional Development Focused on Children's Algebraic Reasoning in Elementary School. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 258-288.

Johnson, R. B., y Onwuegbuzie, A. J. (2004). Mixed methods research: A research paradigm whose time has come. *Educational Researcher*, 33(7), 14-26.

Jones, I., y Pratt, D. (2005). Three utilities for the equal sign. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3*, 185-192. Melbourne: PME.

Junta de Andalucía (2007). Orden 10/8/2007 por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía. Área de Matemáticas.

Kaput, J. J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. En E. Von Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp 53-74). Dordrecht: Kluwer A. P.

Kaput, J. (1998). Teaching and Learning a New Algebra. In E. Fennema y T. A.Romberg (Eds.). *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp.133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J.J. (2000). *Transforming algebra from a engine of inequity fo an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*: National Center of Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science (NCISLA). Dartmouth, MA.

Kaput, J., y Blanton, M. L. (2000). Algebraic reasoning in the context of elementarymathematics: Making it implementable on a massive scale. *Annual Meeting of the North American Educational Research Association,* Montreal,Canada.

Kaput, J., y Blanton, M. L. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience. Part I: Transforming Task Structure. En H. Chick, K. Stacey, J. Vicent., y J. Vicent (Eds). Paper presented at the Future of the Teaching and Learning of Algebra. *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference* Vol. 1 (pp. 344-350). Melbourne: University of Melbourne.

Kaput, J., y Blanton, M. L. (2002). Design principles for tasks that support algebraic thinking in elementary school classrooms. In A. D. Cockburn y E. Nardi (Eds.) *Proceedings of the 26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* Vol. 2, (pp. 105-112) Norwich: University of East Anglia.

Kaput, J. J., Carraher, D. W., y Blanton, M. L. (Eds.) (2008). *Algebra in the Early Grades.* New York: Lawrence Erlbaum, Associates and National Council of Teachers of Mathematics.

Kelly, A. E., y Lesh, R.A. (2000). *Handbook of research design in mathematics and science education*. New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kelly, A. E., Lesh, R. A., y Baek, J. Y. (Eds.) (2008). *Handbook of design research in methods in education. Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching*. New York, NY: Routledge.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*(3), 317-326.

Kieran, C. (1989) A perspective on algebraic thinking. *Proceedings of the 13th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*, Vol. 2, (pp. 163-171). París.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (390-419). New York: Macmillan

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator,* 18(1), 139-151.

Kieran, K. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, 707-762). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., y Stephens, A. C. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence y variable 1. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM): The International Journal on Mathematics Education*, 37(1), 68-76.

Knuth, E., Alibali, M., Weinberg, A., McNeil, N., y Stephens, A. (2011). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equality and variable. In J. Cai and E. Knuth (Eds.). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 259-276). Heidelberg, Germany: Springer.

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., y Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education,* 37(4), 297-312.

Kramarski, B., (2008). Promoting teachears' algebraic reasoning and self-regulation with metacognitive guidance. *Metacognition Learning*, *3*, 83-99.

Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in School, 7*(4), 23-26.

Lamon, S. (1993). Ratio and proportion: Connecting and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, pp. 41-61.

Lannin, J. K. (2003). Developing algebraic reasoning through generalization. *Mathematics Teaching in the Middle School, 8*(7), 342-349.

León, O. G., y Montero, I. (2003). *Métodos de investigación en psicología y educación* (3 ed.): Mc Graw Hill.

Learning mathematics for teaching project. (s. f). Mathematical knowledge for teaching (MKT) measures: Mathematics released items. Disponible en: http://lmt.mspnet.org/media/data/MKT_Released_items_2008.pdf?media_000000005770.pdf

Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: A definition of pre-algebra. *The Journal of Mathematical Behavior, 14*(1), 113-120.

Lins, R., y Kaput, J. J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. En K. Stacey, H. Chick, y M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra. The 12th ICMI study* (pp. 47-70). Massachusetts, USA: Kluwer Academic Publishers.

MacGregor, M., y Stacey, K. (1997). Students'understanding of algebraic notation: 11–15. *Educational Studies in Mathematics, 33*(1), 1-19.

Mason, J. (1996) Qualitative researching. London: Sage Publications.

Mason, J., y Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 277-289.

Secretaría de Educación Pública (SEP) (s. f). Subsecretaria de educación superior: Dirección general de educación superior para profesionales de la educación pública en México. Disponible en: http://www.ses.sep.gob.mx/wb/ses/direccion_general_de_educacion_superior_para_p

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria.

McNeil, N. M., y Alibali, M. W. (2005). Why won't you change your mind? knowledge of operational patterns hinders learning and performance on equations. *Child Development, 76*(4), 883-899.

McNeil, N. M., Grandau, L., Knuth, E. J., Alibali, M. W., Stephens, A. C., Hattikudur, S., et al. (2006). Middle-school students' understanding of the equal sign: The books they read Can't help. *Cognition and Instruction, 24*(3), 367-385.

Molina, M. (2007). *Desarrollo del Pensamiento Relacional y Comprensión del Signo Igual por Alumnos de Tercero de Educación Primaria*. Tesis Doctoral no publicada, Universidad de Granada, España.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: Integración del pensamiento algebraico en educación primaria (Proposal of a curricular change: Integration of algebraic thinking in elementary education). *PNA: Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 3*(3), 135-156.

Molina, M., Castro, E., y Castro, E. (2009). Elementary students' understanding of the equal sign in number sentences. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 7*(1), 341-368.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75–88

Morris, A. (1999). Developing concepts of mathematical structure: pre–arithmetic reasoning versus extended arithmetic reasoning. Focus on Learning Problems in Mathematics, 21(1), 44-72.

Moss, J., y Beatty, R. (2006). Knowledge building in mathematics: Supporting collaborative learning in pattern problems. *Computer-Supported Collaborative Learning*, 1(4), 441–465.

Moss, J., y London, S. (2011). An Approach to Geometric and Numeric Patterning that Fosters Second Grade Students' Reasoning and Generalizing about Functions and Co-variation. En, J. Cai, E. Knuth (eds.), *Early algebraization. Advances in mathematics education,* (pp. 277-298). Berlin: Springer-Verlag.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Autor.

National Council of Teachers of Mathematics. (2006). Curriculum focal points for prekindergarten through grade 8 mathematics: A quest for coherence. Reston, VA: Author.

National Center for Improving Student Learning and Achievement-NCISLA- (2003). Algebraic skills and strategies for elementary teachers and students. *Brief*, *3*(1), 1-12.

National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. (2011). Common core state standards for mathematics. (Disponible en, http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf)

Palarea, M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años*. Universidad de la Laguna, Tenerife, España.

Petrou, M., y Goulding, M. (2011). Conceptualizing teachers' mathematical knowledge in teaching. In Rowland T. y Ruthven K. (Eds.), *Mathematical knowledge in teaching* (pp. 9-25). London: Springer

Philipp, R. A. (1992). The many uses algebraic variables. *The Mathematics Teacher, 85*(7), 557-561.

Pierce, C. S. (1978). *The Collected Papers of Charles Sanders Pierce,* Cambridge, MA, The Belknap Press of Harvard University Press

Pimm, D. (1987). *Speaking Mathematically*. New York: Routledge.

Prediger, S. (2010). How to develop mathematics-for-teaching and for understanding: The case of meanings of the equal sign. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(1), 73-93.

Presmeg, N. C. (1999). On visualization and generalization in mathematics. Hitt, F. y Santos, M. (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the 21st conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME),* Vol. 1 (pp 23-27). Cuernavaca: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Universidad Autónoma del Estado de Morelos.

Puig E, L., y Cerdan P, F. (1990). Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales. En E. Filloy y T. Rojano (Eds) *Artículo presentado en el Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática (pp. 35-48),* Cuernavaca, Morelos.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in student's emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 42, 237-268.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to studentes' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.

Radford, L. (2006). The anthropology of meaning. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1/2), 39-65.

Radford, L. (2010). The anthropological turn in mathematics education and its implication on the meaning of mathematical activity and classroom practice. *Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics,* 10, 103-120.

Radford, L. (2011). Grade 2 Students' Non-Symbolic Algebraic Thinking. En, J. Cai, E. Knuth (Eds.), *Early algebraization*. *Advances in mathematics education.* (pp. 303-320). Berlin: Springer-Verlag.

Reforma Integral de Educación Básica (2009). (Disponible en: http://basica.sep.gob.mx/reformaintegral/sitio/index.php?act=rieb)

Rivas, M., Godino, J. D. y Castro W. F. (2012). Desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. *Bolema (SP)*, 26 (42B), 559-588.

Ruiz-Monzón, N., Bosch, M., y Gascón, J. (2010). La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en secundaria. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 545-556). Lleida: SEIEM.

Santrock, J. W. (2001). *Educational Psychology*. McGraw-Hill (Ed.), London 2001

Saussere, F. (1915). *Curso de lingüística general.* Madrid: Alianza, 1991

Schliemann, A.D., Carraher, D.W., y Brizuela, B. (2007). *Bringing Out the Algebraic Character of Arithmetic: From Children's Ideas to Classroom Practice*. Lawrence Erlbaum Associates

Sfard, A. (1987). Mathematical practices, anomalies and classroom communication problems. In P. Ernest (Ed.), *Constructing mathematical knowledge: Epistemology and mathematics education.* London, UK: The Falmer Press

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same Coin. *Educational Studies in Mathematics,* 22(1):1-36.

Sfard, A., y Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification - the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2), 191-228.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4-14.

Slavit, D. (1998). The role of operation sense in transitions from arithmetic to algebraic thought. *Educational Studies in Mathematics, 37*(3), 251-274.

Smith, M. (2011). A Procedural Focus and a Relationship Focus to Algebra: How U.S. Teachers and Japanese Teachers Treat Systems of Equations. En, J. Cai, E. Knuth (eds.), *Early algebraization. Advances in mathematics education*. (pp. 511-526). Berlin: Springer-Verlag.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147-164.

Stacey, K. (1997). *Computer algebra: The coming challenge for mathematics curriculum*. *Vinculum,* 34 (2), 16-18.

Stacey, K. y MacGregor, M. (1997). *Building Foundations for Algebra*. Mathematics Teaching in the Middle School, Vol. 2, nº 4, pp. 252-60.

Stephens, A. C. (2006). Equivalence and relational thinking: Preservice elementary teachers' awareness of opportunities and misconceptions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*(3), 249-278.

Stephens, A. C. (2008). What "counts" as algebra in the eyes of preservice elementary teachers? *The Journal of Mathematical Behavior, 27*(1), 33-47.

Tall, D. (1992). The transition from arithmetic to algebra: Number patterns or proceptual programming. *New Directions in Algebra Education,* 213-231.

Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the early primary years. En A. Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 18-30). London: Cassell.

Usiskin, Z. (1989). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford (Ed.), *The Ideas of Algebra K-12* (pp. 8-19). Reston, VA: NCTM.

Usiskin, Z. (1995). Why is algebra important to learn. *American Educator, 19*(1), 30-37.

Van Ameron, B. A. (2002). *Reinvention of early algebra: Developmental research on the transition from arithmetic to algebra*. Utrech: CD-B Press.

Vergnaud G. (1988): Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre. En: C. Laborde, N. Balacheff (Eds.) *Actes du Premier Colloque Franco-Allemand de Didactique des Mathématiques et de l'informatique*, (pp. 189-199). La Pensée Sauvage, Grenoble, París

Wagner, S., y Kieran, C. (1989). *Research issues in the learning and teaching of algebra*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics; Hillsdale, NJ: ErlbaumKieran

Warren, E. (2001). Algebraic understanfing and the importance of operation sense. In M. Heuvel-Penhuizen (Ed.), *Procedfings of the 25th International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*, Vol. 4, (pp. 399-406). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.

Warren, E. (2003). The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra. *Mathematics Education Research Journal, 15*(2), 122-137.