UNA APROXIMACIÓN AL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO ELEMENTAL DESDE EL MARCO DEL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Lilia P. Aké

Tesis de Fin de Máster

Dirigida por el Dr. Juan D. Godino

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Granada, Septiembre de 2010

DEDICATORIA

A mis padres

Luciano y María

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por escucharme.

Al Ministerio de Asuntos Exteriores y Cooperación y, a la Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo, por concederme los recursos, a través de una beca, para llevar a cabo este trabajo de investigación.

Al Dr. Juan Díaz Godino por aceptar ser mi tutor, por su orientación, compromiso, y plena disposición en la realización de este trabajo y, por compartir conmigo su extensa experiencia y conocimiento en la actividad investigativa.

A mi familia, seres queridos y amigos que en la lejanía me han hecho sentir su cariño. Gracias María, Luciano, Gerardo e Iván por brindarme su apoyo incondicional en cada una de las decisiones que he tomado y, porque su amor inestimable en la distancia día a día fue motivación constante para ver este sueño realizado.

A mis profesores por su contribución en mi formación profesional, por brindarme asesoría y compartirme su experiencia y conocimientos.

A mis compañeros del Máster, responsables de múltiples y placenteras convivencias que dieron lugar a una grata amistad y, cuya compañía me permitió sobrellevar la lejanía de mi hogar. Especialmente a Ana y Luis que me dieron la mano en esos momentos bajos, regalándome palabras de apoyo y compartiéndome su tiempo para la consolidación de nuestro afecto.

A todos gracias

Este trabajo ha sido desarrollado en el seno del grupo FQM-126 del Plan Andaluz de Investigación de la Junta de Andalucía, "Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística", en el marco del proyecto de investigación sobre formación de profesores, SEJ2007-60110/EDUC, MEC-FEDER.

ÍNDICE

CAPITULO 4 CONCLUSIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

INTRODUCCIÓN

Sin duda alguna la enseñanza del álgebra ha sido fuertemente criticada por el poco éxito que obtienen los aprendices al momento del estudio de esta materia. Como respuesta a este hecho en las últimas dos décadas se han realizado, a nivel internacional, numerosas investigaciones que analizan y promueven la integración del álgebra en el currículo de la educación primaria (Molina, 2009). Esta propuesta curricular, conocida con el nombre de "Álgebra temprana" (Early-Algebra), plantea la introducción de modos de razonamiento algebraicos en la matemática escolar, desde los primeros cursos de la escuela elemental y lo que Kaput (2000) denomina como "algebrafying curriculum". Esta propuesta demanda que los maestros identifiquen el carácter algebraico de algunas tareas matemáticas y que puedan reconocer y promover el razonamiento algebraico presente en la actividad matemática de los niños.

Diversas perspectivas apoyan la acción de "algebrizar" el currículo de la escuela elemental, sin embargo, esta misma diversidad, tal y como los señalan Kaput y Blanton (2000) es una de las razones por la que esta reforma del álgebra, no ha progresado, ya que no se tiene un reporte suficientemente explícito de la naturaleza del razonamiento algebraico en la escuela elemental, ni una concepción de lo que se podría considerar como álgebra en los primeros grados. Estas circunstancias motivaron el interés de elaborar una caracterización del álgebra, finalidad que se persigue en esta memoria.

Nuestro propósito en este trabajo es el diseño de un modelo que permita identificar los rasgos algebraicos presentes en las tareas matemáticas, mediante la articulación de una visión global del álgebra guiada por las diversas perspectivas del álgebra escolar, y que posibilite también la caracterización del razonamiento que le acompaña. Este hecho permitirá establecer cuando una tarea matemática y su solución correspondiente pueden considerarse como algebraica.

A lo largo de este trabajo se pone de manifiesto, en el capítulo 1, la problemática que gira entorno a la enseñanza y aprendizaje del álgebra, la cual motivó esta investigación y que da origen a nuestro planteamiento del problema; asimismo, se definirán las herramientas teóricas que serán utilizadas para alcanzar nuestro propósito y la metodología a seguir. En el capítulo 2 se exponen diversas investigaciones relativas al "Early Algebra" que fundamenta y orienta nuestra caracterización a través del Enfoque

Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007) y que permitirá el desarrollo de una guía para el reconocimiento de las características algebraicas de tareas matemáticas. En el capítulo 3 se describirá nuestra aproximación del razonamiento algebraico desde el Enfoque Ontosemiótico y la guía para valorar el grado de algebrización en una práctica matemática. El apartado final versa sobre las conclusiones relativas a la inclusión del álgebra en la escuela elemental, lo que demanda este hecho por parte de los profesores, y sobre el alcance de la guía diseñada como una herramienta para el profesor.

CAPITULO 1

PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

1.1 ÁREA PROBLEMÁTICA

La mayoría de la gente percibe por qué necesitan saber aritmética: los números naturales, fracciones, decimales y porcentajes están por todas partes. Se necesitan para hacer cualquier trabajo que involucre dinero, tratar con precisión las mediciones, comprender la probabilidad, seguir los resultados de las encuestas electorales, deportes o loterías, y una amplia gama de otras cosas. Sin embargo, el álgebra parece diferente, es probable que no veamos las fórmulas algebraicas en alguna parte diferente al de la escuela, lo que no hace visible su necesidad (Usiski, 1995). Sin embargo, "a*ctualmente el trabajo en muchas áreas se apoya en los métodos e ideas del álgebra. Por ejemplo, las redes de distribución y comunicación, las leyes de la física, los modelos de población y los resultados estadísticos pueden expresarse en lenguaje simbólico* (NCTM, 2000, pág. 39). Además sin un conocimiento del álgebra se pierde el control sobre determinadas partes de la vida, se tienen más probabilidades de tomar decisiones imprudentes y no se es capaz de entender muchas ideas discutidas en química, física, ciencias de la tierra, economía, negocios, etc. (Usiski, 1995).

> *"La competencia algebraica es importante en la vida adulta. Todos los estudiantes debería aprender algebra"* (NCTM, 2000, p. 39)

Aunque la necesidad de conocer el álgebra no es tan obvia, si lo es la problemática que gira entorno a su enseñanza y aprendizaje (Kieran, 1992), pues son muchos los conceptos erróneos que los estudiantes tienen, no sólo con la comprensión del concepto de variable, sino también con la solución de ecuaciones algebraicas y problemas en la traducción de las palabras a símbolos algebraicos. Esto es especialmente preocupante, dado que el álgebra sigue desempeñando un papel fundamental en el currículo de la escuela, donde se da énfasis a la aplicación de procedimientos algebraicos para resolver problemas, la representación de las relaciones entre las cantidades, y al estudio de estructuras algebraicas (Warren, 2003). Este “problema del algebra” (Kaput y Blanton, 2001) radica en que es vista como una herramienta para la manipulación de símbolos y para resolver problemas (Kieran, 2007) y desprovista de significado (Molina, 2007), motivo por el cual su enseñanza ha sido fuertemente criticada por el poco éxito que obtienen los aprendices al momento del estudio de esta materia (Molina, 2009).

Esta problemática es resaltada en diversas investigaciones recientes sobre razonamiento algebraico que destacan defectos tales como (Schliemann, Carraher, Brizuela y Earnest, 2003): a) una limitada interpretación del signo igual, b) errores sobre el significado de las letras, c) rechazo a aceptar una expresión como $3a + 7$ como respuesta a un problema, d) dificultad al resolver ecuaciones con variables en ambos lados del signo igual y e) el hecho de que para cubrir su falta de comprensión, los estudiantes tienden a recurrir a la memorización de reglas y procedimientos y, eventualmente, llegan a creer que esta actividad es la esencia del álgebra (Kieran, 1992).

Debido a su importancia y al difícil acceso conceptual que tienen la mayoría de los estudiantes al álgebra, es que diversas investigaciones en educación matemática se han centrado en la introducción de aspectos de razonamiento algebraico en la educación primaria (Kaput, 1998; Carraher, Schliemann, y Brizuela, 2000; Carraher, Schliemann y Schwartz, 2007; Carraher, Martínez y Schliemann, 2008; Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006). Esta introducción implica cambiar la manera de concebir el álgebra como tal, para poder incluirla en la escuela elemental, con la finalidad de estimular el desarrollo del razonamiento algebraico en los niños.

1.2 PROBLEMA ESPECÍFICO DE INVESTIGACIÓN

La inclusión temprana del álgebra en la escuela primaria, denominada como “Early Algebra”[1], ha sido apoyada por diversos investigadores, entre ellos Kaput (2000) quien hizo una propuesta, denominada “algebra for all”, en la que sugiere tomar acciones para “algebrizar” el currículo de la escuela primaria. Dicha sugerencia, ha llevado a diversos investigadores a proponer diferentes formas de caracterizar la actividad algebraica, por ejemplo, las investigaciones de Bednarz, Kieran y Lee (1996), Usiskin (1989), Kaput (1998, 2000), NCTM (2000), Burkhardt (2001), Drijvers (2008) y Kieran (2007), en las

[1] El enfoque “Early Algebra” se explicará de manera amplia pero no exhaustiva en el capítulo 2.

que se abordan desde criterios diferentes y de forma poco exhaustiva: el desglose del álgebra en generalización, resolución de problemas, modelización, y funciones, mezcla procesos de razonamiento no disjuntos, como la generalización y resolución de problemas, con tópicos de matemáticas tales como las funciones y otros que involucran la modelización (Carraher y Schliemann, 2007). Es precisamente esta gran diversidad de perspectivas para caracterizar la actividad algebraica, a lo que Kaput y Blanton (2000) se refieren cuando señalan que el poco éxito obtenido para algebrizar el currículo de primaria, se debe al simple hecho de que no hay un consenso, basado en las diversas investigaciones desarrolladas, en torno a lo que ellos denominan una coherente "historia del Early Algebra" en la que la reforma podría basarse. Para estos autores esta "historia del Early Algebra" debe incluir un reporte suficientemente explícito de la naturaleza del razonamiento algebraico, descripciones de las formas maduras que puede tener y de lo que su enseñanza representa, así como de las prácticas de aula que promueven su desarrollo. También podría incluirse las descripciones de las trayectorias de desarrollo plausible de las diferentes formas de razonamiento algebraico, ejemplos de los tipos de materiales de instrucción que hacen que los alumnos pueden aprender y que se puedan incorporar en las aulas ordinarias, sobre todo como un medio por el cual se puede integrar y profundizar las matemáticas elementales.

Lins y Kaput (2004) también coinciden al respecto y señalan que pese al potencial de la propuesta "Early Algebra", aún se tiene la necesidad de:

1) Explorar la puesta en práctica y el potencial de esta propuesta y analizar el desarrollo del razonamiento[2] algebraico por alumnos de educación primaria.

2) Identificar qué contenidos algebraicos pueden y deben ser presentados, promovidos y enfatizados en el aula de Educación Primaria, y cómo pueden ser integrados en la enseñanza y aprendizaje de otras sub-áreas de las matemáticas.

3) Analizar qué herramientas (diagramas, notaciones, gráficos) pueden conducir con éxito, a los alumnos a desarrollar modos algebraicos de pensar.

4) Estudiar la implicación de la aplicación de esta propuesta para la enseñanza de las matemáticas en niveles superiores.

[2] Algunos autores utilizan indistintamente razonamiento algebraico y pensamiento algebraico, en este documento nos inclinaremos por usar la primera expresión.

Como resultado de esto, es ineludible la necesidad de caracterizar el álgebra, y el razonamiento que le acompaña, de un modo más profundo, de lo que diversos investigadores han realizado. Para esto es necesario realizar ciertas especificaciones que permitan describir las características del álgebra desde un punto de vista global y su aproximación a los niveles elementales.

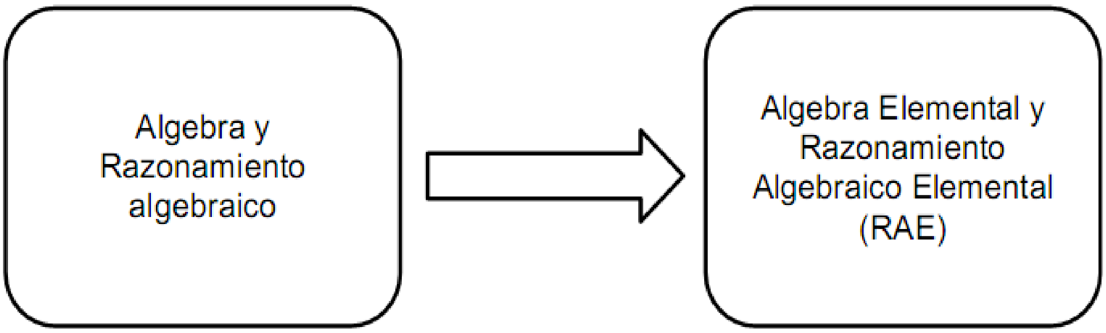


Figura 1.1 Aproximación del Álgebra hacia los primeros grados[3]

Una caracterización desde un punto de vista global y conciso permite una concepción amplia del razonamiento algebraico y su aproximación a la escuela primaria, entendiendo que dicho razonamiento algebraico elemental[4], se puede poner de manifiesto a través de la resolución de tareas relacionadas con la aritmética, la medida, la geometría o con el análisis de datos, y que también puede manifestarse en diversos “niveles” o “grados” de “algebrización”.

1.2.1 Síntesis de investigaciones sobre la introducción del álgebra en la escuela elemental

Lograr articular una visión global del álgebra, que permita el diseño de un reporte suficientemente explícito de la naturaleza del razonamiento algebraico (que incluya descripciones de las formas maduras que puede tener, así como de las formas más elementales), precisa considerar las diversas propuestas que se han suscitado al respecto de “algebrizar” el currículo de primaria. El considerar los diferentes enfoques propuestos respecto a la inclusión del álgebra en la escuela primaria brindará las pautas

[3] Se usa la expresión Álgebra Elemental para referirse al desarrollo del mismo en la escuela primaria.
[4] Se usa la expresión “Razonamiento Algebraico Elemental” (RAE) como aquel razonamiento explicitado por los niños de la escuela elemental.

necesarias para orientar una caracterización más holística pero que permita un desglose detallado de la actividad algebraica presente en una tarea matemática y su correspondiente solución.

Respecto a la introducción temprana del álgebra, diversas investigaciones realizadas proponen un cambio en la enseñanza de la aritmética, ya que consideran al álgebra como una generalización de ésta y reconocen en la aritmética las estructuras en las que se basa el álgebra. Otras hacen hincapié en la generalización a través de los patrones y el reconocimiento de relaciones funcionales.

Por otro lado, investigaciones se enfocan a desarrollar el pensamiento relacional basándose en el hecho de que las múltiples dificultades presentadas con el estudio del álgebra se deben a una concepción errónea del signo igual, ya que en la escuela primaria éste es visto como resultado y en álgebra se concibe como equivalencia. Buscan familiarizar al estudiante con la idea de incógnita y variable y el uso de la simbología.

La modelización, resolución de problemas y el uso de representaciones también son propuestas realizadas para fomentar el razonamiento algebraico en los primeros grados.

1.2.2 Caracterización del razonamiento algebraico elemental en el marco del enfoque ontosemiótico

Con la introducción del razonamiento algebraico en la escuela primaria, se hace necesario cambiar el modo en el que se concibe al álgebra como tal. Se precisa tener una visión con ciertas especificaciones, que permita establecer cuándo una tarea matemática puede considerarse como algebraica. Este hecho quizás sea bastante claro cuando nos referimos al álgebra de secundaria, sin embargo queda de manera difusa cuando nos referimos a las tareas planteadas en la escuela elemental, y aún más complicado resulta el hecho de determinar cuándo la solución de un niño de primaria posee determinado nivel de razonamiento algebraico. Por ejemplo, considérese el siguiente problema:

Problema: Un estudiante recibió de sus padres una cierta cantidad de dinero para comer durante 40 días. Sin embargo, encontró sitios en donde pudo ahorrar 4 euros al día en la comida. De esta forma, el presupuesto inicial le duró 60 días. ¿Cuánto dinero recibió?

Una estudiante, Beatriz, resolvió el problema de la siguiente manera:
Sea X el dinero recibido de los padres. Representamos por x el gasto diario previsto por los padres para comer 40 días. $x = \frac{X}{40}$.

Sea y el gasto diario real, que permitió comer 60 días: $y = \frac{x}{60}$
$40x = 60y$; además $y = x - 4$;
$40x = 60(x - 4)$; $20x = 240$; $x = 12$; cantidad recibida: $12.40 = 480$; 480€

Otro estudiante, Andrés, lo resolvió de esta otra manera:
El ahorro de 4€/día durante 40 días previstos supone un ahorro total de 160€. Con esta cantidad pudo comer durante 20 días más. El coste diario real fue de 160€/20 días = 8€/ día. Como los días reales fueron 60, el presupuesto total será 60 días x 8€/día = 480€.

Tareas como la anterior, suscitó nuestro interés en las siguientes cuestiones, sobre el álgebra y el razonamiento algebraico en la escuela elemental:

P1 *¿Qué tipo de tareas pueden ser consideradas como algebraicas y cuáles serían sus características?*

P2 *¿Para establecer la existencia de razonamiento algebraico es necesaria la presencia simbólica, lenguaje característico del álgebra?*

Para responder estas preguntas se requiere, como se ha manifestado anteriormente, una visión más amplia tanto del álgebra como del razonamiento que le acompaña, que pueda proporcionar a las matemáticas escolares la misma profundidad y poder que las múltiples facetas del álgebra han proporcionado históricamente a las matemáticas, y que pueden apoyar la integración del razonamiento algebraico en todos los grados y todos temas (Blanton & Kaput, 2001). Considerando esta necesidad, más adelante se explicitará detalladamente, cómo el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento matemático (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007) brinda herramientas útiles para poder realizar dicha caracterización.

1.3 OBJETIVOS

La necesidad de caracterizar el álgebra, de un modo más profundo, y con la finalidad de responder a nuestras inquietudes expresadas en las cuestiones planteadas en el apartado anterior (P1 y P2), conducen al siguiente objetivo que orienta la investigación:

1) *Elaborar un modelo de caracterización del álgebra, usando las nociones teóricas del Enfoque Ontosemiótico, que articule diversas perspectivas del álgebra escolar.*

Alcanzar el objetivo uno (O1) permitirá responder a las cuestiones P1 y P2, dado que con una caracterización global como la que nos permitirá elaborar el Enfoque Ontosemiótico, ayudará a reconocer las formas o configuraciones algebraicas más primitivas.

Este hecho resulta relevante tanto para los investigadores involucrados en el tema, como punto de referencia para la profundización y consideración de aspectos que parecían desvinculados. Es un aporte para los formadores de profesores quienes deben sensibilizar a los profesores en formación sobre la complejidad de las tareas algebraicas y guiarlos hacia, lo que Blanton y Kaput (2003) denominan un desarrollo de "ojos y oídos algebraicos" mediante el diseño de programas que persigan el desarrollo de esta competencia. A los profesores en servicio les permitirá una selección adecuada de las tareas que potencien un ambiente de reflexión para el desarrollo del razonamiento algebraico en los niños.

Considerando este último hecho sobre la aplicación en el aula de este modelo por parte de los profesores y, tomando a consideración la poca aplicabilidad de las investigaciones en el contexto escolar, se planteó el siguiente objetivo de investigación:

2) *Diseñar una guía, con base en la caracterización propuesta, que permita reconocer los rasgos esenciales de la actividad algebraica de un modo sistemático.*

El logro del objetivo dos (O2) va encaminado a facilitar la aplicación del modelo en la práctica docente, que permita el reconocimiento, por parte del profesor, de tareas más algebraicas que otras. Este instrumento es un paso importante en el proceso de algebrización del currículo de primaria, pues puede ser potencialmente usada para categorizar las actividades matemáticas que se proponen a los niños

Al plantear los objetivos de investigación pretendemos comprobar, por un lado, que es posible realizar una caracterización del álgebra y del razonamiento algebraico de una manera específica, concreta y global que permita reconocer sus manifestaciones en la actividad matemática de la escuela elemental. Por otro, se busca hacer factible la aplicación de los resultados de las investigaciones a contextos escolares.

1.4 MARCO TEÓRICO

Para el logro de los objetivos, el marco del enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático (EOS) propone una tipología de objetos que intervienen y emergen de las prácticas matemáticas. Se entiende por práctica "*toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por una persona (o compartidas en el seno de una institución) para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas*" (Godino y Batanero, 1994, p. 334). Esta noción tiene una utilidad potencial al momento de analizar cada una de las actividades matemáticas propuestas en los libros de texto.

Se aplicará la noción de "configuración de objetos y procesos" al caso del razonamiento algebraico potenciándose el uso de las dualidades cognitivas (Godino, Font, Wilhelmi & Lurduy, 2009) que a continuación se describen de manera sucinta y que más adelante se operativizarán en función del razonamiento algebraico:

1) *Extensivo-intensivo*. En esta dualidad un objeto que interviene en un juego de lenguaje como un caso particular (un ejemplo específico, p.e., la función $y = 2x + 1$) también puede verse como una clase más general (p.e., la familia de funciones $y = mx + n$). Esta dualidad es utilizada para explicar una de las características básicas de la actividad matemática: el uso de elementos genéricos, es decir, centra la atención en la dialéctica entre lo particular y lo general, que sin duda es una cuestión clave en la construcción y aplicación del conocimiento matemático.

2) *Ostensivo – no ostensivo*. En el Enfoque Ontosemiótico se entiende por ostensivo cualquier objeto que es público y que, por tanto, se puede mostrar a otro. Los objetos institucionales y personales tienen una naturaleza no-ostensiva (no perceptibles por sí mismos). Ahora bien, cualquiera de estos objetos se usa en las prácticas públicas por medio de sus ostensivos asociados (notaciones, símbolos, gráficos, etc.).

3) *Unitario-sistémico*. En algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (que se suponen son conocidas previamente), mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio. En el estudio de la adición y sustracción, en los últimos niveles de educación primaria, el sistema de numeración decimal (decenas, centenas,…) se considera como algo

conocido y en consecuencia como entidades unitarias (elementales). Estos mismos objetos, en el primer curso tienen que ser considerados de manera sistémica para su aprendizaje.

La consideración de las facetas duales extensivo/intensivo, ostensivo/no ostensivo y unitario/sistémico permiten la delimitación de los procesos[5] de particularización y generalización con respecto a los procesos de idealización y materialización y de estos con los de reificación y descomposición. Se trata de una delimitación importante que permite un análisis más detallado de cada uno de estos procesos y de su presencia combinada en la actividad matemática, y por tanto, clarificar la naturaleza del "objeto matemático" usualmente considerado como una entidad abstracta o ideal. Tales procesos serán utilizados para interpretar los rasgos característicos del razonamiento algebraico.

1.5 METODOLOGÍA

La metodología seguida para alcanzar los objetivos fue guiada por la revisión de la literatura que permitió reunir diferentes perspectivas sobre el álgebra, del razonamiento algebraico y su manifestación en la escuela elemental. La búsqueda de las fuentes se efectuó en bases de datos, "hand-books", revistas electrónicas, etc.

Para la caracterización de la práctica algebraica se propone una aproximación desde el Enfoque Ontosemiótico (EOS) basada en los tipos de objetos y proceso matemáticos introducidos en el mismo, que también permite una concepción del razonamiento algebraico y que tomará a consideración las caracterizaciones que dan otros autores (Bednarz, Kieran y Lee ,1996; Usiskin, 1989; Kaput, 1998; 2000; etc.).

En particular, la consideración de una práctica matemática como algebraica se basará en la intervención de procesos de generalización y simbolización, junto con otros objetos usualmente considerados como algebraicos, tales como relaciones binarias, operaciones, funciones y estructuras. Esta caracterización lleva a distinguir una tipología de

[5] En el EOS no se intenta dar, de entrada, una definición de "proceso" ya que hay muchas clases diferentes de procesos; se puede hablar de proceso como secuencia de prácticas, de procesos cognitivos, metacognitivos, procesos de instrucción, etc. Por tanto, se ha optado por seleccionar una lista de los procesos que se consideran importantes en la actividad matemática, sin pretender incluir en ella a todos los procesos implicados, entre otros motivos porque algunos de los más importantes más que procesos son hiper o mega procesos, puesto que implican procesos más elementales: representación, argumentación, idealización, generalización, etc.

“configuraciones algebraicas”, la cual permite definir “grados” de “algebrización” de la actividad matemática y construir una Guía para el Reconocimiento de Objetos y Procesos Algebraicos (GROPA) en tareas matemática. Instrumento que puede ser usado también por los profesores para analizar y seleccionar tareas escolares que posibiliten el desarrollo del razonamiento algebraico en los estudiantes.

CAPITULO 2

INVESTIGACIONES SOBRE EL ÁLGEBRA ESCOLAR. ELEMENTOS PARA UNA CARACTERIZACIÓN DEL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO ELEMENTAL

2.1 INTRODUCCIÓN

El desarrollo histórico del álgebra sugiere que actualmente ésta se concibe como la rama de las matemáticas que trata sobre la simbolización de relaciones numéricas generales, de estructuras matemáticas así como de las operaciones sobre esas estructuras (Kieran, 1992). De hecho desde los días del al- Khwarizmi, y a través de la época de Vieta y Euler, el álgebra ha consistido primordialmente en procedimientos y notaciones. Este punto de vista del álgebra, como una herramienta para la manipulación de símbolos y para resolver problemas, se ve reflejado en los programas de álgebra escolares (Kieran, 2007) y es por esta razón que su enseñanza, tal como se lleva a cabo en la realidad actualmente, es ampliamente criticada (Kaput, 1998, 2000; Butto y Rojano, 2004). La crítica se sustenta en la falta de conexión que existe entre el álgebra y las demás áreas de las matemáticas, y la total ausencia de significado en el aprendizaje algebraico, que desemboca en el hecho de que un gran número de estudiantes fracasen en esta área. De este modo la gran insatisfacción con la actual y tradicional enseñanza del álgebra, el reconocimiento de la importancia de los hábitos mentales que están involucrados en actividades algebraicas, y la preocupación por hacer del álgebra accesible a todos los estudiantes, han conducido a buscar una forma más efectiva de enseñarla (Molina, 2007).

Una de las propuestas para resolver este "problema del álgebra" se centra en la articulación de un enfoque coherente e integrado, que comience con el desarrollo del razonamiento algebraico en los primeros grados de la escuela elemental de manera que los estudiantes profundicen en el entendimiento de las matemáticas elementales para fomentar en ellos habilidades de generalización, expresión y justificación sistemática de generalizaciones matemáticas (Kaput y Blanton, 2001). Respecto a esta idea, Butto y Rojano (2004) mantienen la postura de que la introducción temprana al razonamiento algebraico es viable, partiendo de la suposición de que el desarrollo de dicho pensamiento es un proceso largo. Otros autores como Carraher, Schliemann y Schwartz (2006) también reconocen que el álgebra tiene un lugar en los primeros grados.

Investigadores como Schliemann, Carraher, Brizuela y Earnest (2003) sustentan la introducción de conceptos y notaciones algebraicos en la escuela elemental basándose en lo siguiente: (a) Las deficiencias y dificultades cognitivas con el álgebra puede ser resultados de las limitaciones del currículum de matemáticas de primaria al que los niños tienen acceso, (b) la comprensión matemática es una construcción individual que se transforma y amplía a través de la interacción social, la experiencia en múltiples contextos significativos, y el acceso a sistemas simbólicos matemáticos, y (c) los niños necesitan ser familiarizados con los sistemas simbólicos. Con este objetivo, los estudiantes se benefician de las oportunidades para comenzar con sus propias representaciones intuitivas y poco a poco adopten las representaciones convencionales como herramientas para representar y para entender las relaciones matemáticas.

Se pretende, así, que el álgebra sea introducida en los primeros años escolares por su gran potencial para enriquecer y añadir coherencia y profundidad a las matemáticas escolares, eliminando la tardía y abrupta introducción del álgebra (Kaput, 1998, 2000; Carpenter, Franke y Levi, 2003; Carraher, Schliemann y Brizuela, 2000). En este sentido, Kaput (2000) realizó una propuesta denominada "algebra for all" en la que usa el término "algebrafying" (algebrizar) el currículo para referirse a la integración del razonamiento algebraico a lo largo de todos los cursos de la escuela primaria a fin de promover al álgebra como facilitadora de una mejor comprensión de las matemáticas.

Esta inclusión temprana del álgebra en el currículo de la escuela elemental es lo que diversos investigadores denominan como **"**Early Algebra**"**, álgebra temprana, (Carraher, Schliemann, y Brizuela, 2000; Carraher, Schliemann y Schwartz, 2007; Carraher, Martínez y Schliemann, 2008; Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006; etc.). Lins y Kaput (2004) señalan que existen dos maneras de entender este enfoque: La primera se refiere al primer tiempo en que los estudiantes se relacionan con el álgebra de la escuela[1] (el primer encuentro era probable que ocurra cuando los estudiantes estaban a punto de los 12 o 13 años de edad, en algunos casos incluso más). La segunda manera de entender este enfoque, que sólo lentamente y, más recientemente, ha ido ganando terreno en la comunidad de enseñanza de las matemáticas, toman "Early Algebra" para referirse a la introducción del razonamiento algebraico a una edad mucho más temprana. Lins y Kaput, argumentan que la aceptación de la segunda visión se relaciona con el hecho de que es, sólo recientemente, que la comunidad de educación matemática comenzó a darse cuenta en serio que los niños más pequeños podrían hacer mucho más de lo que se cree actualmente respecto al razonamiento algebraico. De este modo la suposición más común de los partidarios del "Early Algebra" es:

> "*Early Algebra consiste en que algebrizar la matemática elemental sería capacitar a los estudiantes, particularmente mediante el fomento de un mayor grado de generalidad en su pensamiento y una mayor capacidad de comunicar dicha generalidad*" (Lins y Kaput, 2004, p.58)

Esta segunda aproximación es la que se ha venido desarrollando recientemente en diversas investigaciones en educación matemática para introducir aspectos del razonamiento algebraico en educación primaria, investigaciones en la que también "*se manifiestan las dificultades mostradas por los estudiantes adolescentes sobre el álgebra, las cuales en gran medida, se deben a las limitaciones de cómo se introduce la aritmética y de manera más general la matemática elemental en primaria*" (Carraher y Schliemann, 2007, 675).

2.2 SÍNTESIS DE INVESTIGACIONES SOBRE "EARLY ALGEBRA"

En esta sección presentamos una síntesis de diversos temas tratados en las investigaciones sobre la introducción del álgebra en la escuela primaria y secundaria. En primer lugar abordamos la cuestión de las relaciones entre la aritmética y el álgebra, seguido de las investigaciones sobre la generalización mediante el estudio de patrones y

[1] Este primer contacto con el álgebra es lo que se denomina pre-álgebra y también tiene una distinción respecto del "Early Algebra" la cual se analizará en un apartado más adelante.

funciones. Un interés especial tienen los trabajos sobre pensamiento relacional, por ser tema relevante con relación al "Early Algebra", así como la noción de variable, incógnita y ecuación. Incluimos finalmente diversas reflexiones realizadas por distintos autores sobre dos nuevos aspectos: el lenguaje del álgebra y sobre la naturaleza y caracterización del razonamiento algebraico, tema de especial relevancia para nuestra investigación.

1.2.1 De la aritmética al razonamiento algebraico

La mayoría de los estudiantes, perciben a la aritmética simplemente como una serie de cálculos y no piensan mucho sobre las propiedades de los números, por lo que consecuentemente al estudiar álgebra no entienden que los procedimientos que usan para resolver ecuaciones y simplificar expresiones están basados en las propiedades de los números (Carpenter, Frankie y Levi, 2003). Esto implica que la aritmética tiene un carácter intrínsecamente algebraico, que se trata de casos generales y que las estructuras pueden ser captadas de manera sucinta en la notación algebraica. En este sentido, los conceptos y la notación algebraicas deben ser consideradas como parte integral de la matemática elemental, argumentando así que el sentido algebraico de las operaciones aritméticas no es opcional sino un ingrediente esencial (Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006), pues los principios que rigen la resolución de ecuaciones en álgebra coinciden con las propiedades estructurales de los conjuntos de números (NCTM, 2000).

Muchas de las dificultades vividas por los estudiantes en álgebra se derivan de un inadecuado conocimiento base de la aritmética, porque a la mayoría de estos aprendices no se les da la oportunidad de establecer conexiones explícitas entre la aritmética y el álgebra, de modo que las experiencias de los estudiantes con la aritmética constituyen obstáculos para el aprendizaje del álgebra por las diferencias en la sintaxis, el uso de letras como una forma abreviada, las manipulaciones, las incógnitas, y la igualdad. Este hecho da como resultado que el éxito de los estudiantes con el álgebra es muy dependiente de su experiencia con la aritmética (Warren, 2003).

Cuando nos fijamos en las tradiciones de la escuela en diferentes países, la relación entre el álgebra y la aritmética es casi siempre caracterizada considerando al álgebra como aritmética generalizada, con la diferencia que, en la escuela, el álgebra es más abstracta y por tanto, más difícil que la aritmética, la cual es más concreta y por tanto, más fácil (Lins y Kaput, 2004).

Muchos estudios se han llevado cabo para investigar la transición de la aritmética al álgebra desde diferentes perspectivas; el álgebra es vista como aritmética generalizada (Kramarski, 2008), como la evolución de rupturas (Filloy y Rojano, 1989), como la reificación (Sfard y Linchevski, 1994), considerando el sentido de las operaciones (Slavit, 1998), tomando en cuenta la interpretación de los símbolos (Kieran, 1992) y el tratamiento de las operaciones y las funciones (Carraher, Schliemann y Brizuela, 2000; Kaput y Blanton, 2000). Otros autores hablan del pensamiento relacional al referirse a las igualdades numéricas como totalidades (Carpenter, Franke y Levi, 2003; Molina 2007).

Para Warren (2003), en cambio, son dos los aspectos cruciales a tener en cuenta en la transición de la aritmética al álgebra. En primer lugar, el uso de letras para representar números y, en segundo lugar, la conciencia explícita de los métodos matemáticos que se están simbolizando mediante el uso de números y letras (Kieran, 1992). Esto implica un cambio de las soluciones puramente numéricas a la consideración del método y el proceso.

La transición de la aritmética al álgebra, es un paso importante para llegar a ideas más complejas dentro de las matemáticas escolarizadas. Sin embargo, presenta obstáculos que la mayoría de los adolescentes encuentran muy difíciles de superar (Butto y Rojano, 2004), pues tradicionalmente, éstos son introducidos en el álgebra de la escuela, mediante la representación de las cantidades y los números con símbolos literales, y la operación con estos símbolos literales. Este enfoque basado en procesos normalmente implica el estudio de ecuaciones con incógnitas y que representan generalizaciones aritméticas con variables, difícilmente percibidas por los estudiantes (Warren, 2003). La principal crítica sobre la enseñanza del álgebra es que se introduce al niño en un simbolismo desprovisto de significado y de sentido, siendo que los niños vienen de trabajar con la aritmética, donde gran parte del contenido matemático que se les enseña, toma como base el dominio numérico dejando de lado ideas importantes que se interconectan con otros dominios matemáticos, como el geométrico, además, todos los símbolos poseen significados y los contextos de los problemas determinan mucho la manera de resolverlos (Butto y Rojano, 2004), hechos que no ocurren con el álgebra.

Esta separación artificial de la aritmética y el álgebra priva a los estudiantes de sistemas de gran alcance para el pensamiento acerca de las matemáticas en los primeros grados, y hace más difícil para ellos aprender álgebra en los grados superiores (Carpenter y Levi, 2000). Muchos enfoques pedagógicos se recomiendan para colmar esta dificultad, éstos implican la generalización de patrones encontrados en situaciones diversas como patrones de números, patrones visuales, y las tablas de valores; otros versan sobre desarrollar una comprensión de la variable con materiales concretos y, utilizar hojas de cálculo y los ordenadores para introducir el concepto de variable (Warren, 2003).

La comprensión requiere de mucho tiempo para desarrollarse, y el pensamiento algebraico se concibe como el desarrollo durante un período prolongado de tiempo a partir de los grados elementales (Carpenter y Levi, 2000). La introducción de conceptos y notaciones algebraicas en la escuela elemental sobre la idea de que la aritmética es una parte del álgebra se fundamenta en el hecho de que los sistemas de numeración y las operaciones aritméticas se pueden ver como funciones (Schliemann, Carraher, Brizuela y Earnest 2003) y sobre la idea de que la aritmética puede ser considerada como algebraica porque proporcionan elementos para construir y expresar generalizaciones (Carraher, Schliemann y Brizuela, 2000). Otros argumentan que el álgebra es una aritmética generalizada de los números y cantidades en que el concepto de función asume un papel importante (Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006; Tall, 1992). Lo anterior conlleva a considerar que la aritmética es un foco importante del currículo de primaria, porque puede utilizarse para el desarrollo del pensamiento algebraico reconsiderando la forma en que se enseña y se aprende (Carpenter, Frankie y Levi, 2003; Carreher, Schliemann y Brizuela, 2000) y teniendo en cuenta que existe una concepción más amplia sobre la naturaleza del álgebra en la que el énfasis no está en el aprendizaje de las reglas para la manipulación de símbolos, sino que el objetivo es desarrollar el pensamiento algebraico, no el uso experto de los procedimientos del álgebra (Carpenter y Levi, 2000).

Es preciso que los estudiantes entiendan que el álgebra es más que manipular símbolos y que también necesitan comprender los conceptos, las estructuras y principios que rigen dicha manipulación y cómo pueden usar ésta para registrar ideas y ampliar su comprensión de las situaciones (NCTM, 2000). Si los estudiantes entienden la aritmética en un nivel en que se puede explicar y justificar las propiedades que se están utilizando, dado que realizan cálculos, entonces han aprendido algunos fundamentos críticos de álgebra (Carpenter, Frankie y Levi 2003), deberán tener en cuenta las relaciones numéricas de una situación, expresarlas explícitamente en un lenguaje sencillo y cotidiano, y, finalmente, aprender a representar con letras (Warren, 2003).

Sin embargo, por desgracia, la forma en que la mayoría de los estudiantes aprenden aritmética no proporciona una base para el aprendizaje del álgebra (Carpenter, Frankie y Levi 2003). Las dificultades de los estudiantes se acentúan y se prolongan por la separación muy marcada entre la aritmética y el álgebra, separación que no puede ser enfrentada adecuadamente por los programas diseñados para la escuela elemental. Sin embargo se menciona que, para ayudar a los niños a superar las dificultades encontradas durante la instrucción en el álgebra, es necesario proponer actividades para ayudar a facilitar su aprendizaje (Carraher, Schliemann y Brizuela, 2000). Esto es atribuir un significado algebraico a las actividades matemáticas en la escuela elemental, es decir, para considerarlas como algebraicas, hecho que no resulta ser una tarea fácil. Los contenidos existentes necesitan ser transformado sutilmente con el fin de poner de manifiesto su carácter algebraico. En cierta medida, esta transformación requiere simbolismo algebraico (Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006); sin embargo también se piensa que el uso de las letras[2] no es una condición necesaria para el modo algebraico de pensar, sino que su uso en la escuela elemental como parte de la experiencia con la aritmética podría facilitar la comprensión del significado y la importancia de las letras más tarde, en el álgebra formal, proporcionando, así, una amplia oportunidad para el desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros grados (Linchevsky, 1995).

Por otro lado, también se considera que un punto clave para el éxito de la transición de la aritmética hacia el álgebra, además del darle un significado algebraico a las actividades matemáticas, es precisamente el conocimiento de la estructura matemática, que implica un conocimiento sobre los objetos matemáticos y la relación entre los objetos y las propiedades de estos objetos. En particular, la estructura matemática se ocupa de: a) las relaciones entre las cantidades (por ejemplo, las cantidades equivalentes, una cantidad menor o mayor que otra), b) propiedades de las operaciones

[2] En el apartado 2.2.5 se profundizará sobre el uso de la simbología literal, al hablar de incógnita, variable y parámetro.

(por ejemplo, la asociativa y conmutativa), c) las relaciones entre las operaciones (por ejemplo, la división y multiplicación), y d) las relaciones a través de las cantidades (por ejemplo, la transitividad de la igualdad y la desigualdad). En el enfoque tradicional del álgebra, se asume implícitamente que los estudiantes ya están familiarizados con estos conceptos en su trabajo previo con la aritmética y también que desde repetidas experiencias en el aula con la aritmética, los estudiantes lleguen a un entendimiento de la estructura de la misma por generalización inductiva, dándole un sentido a las operaciones que realizan (Warren, 2003).

Slavitt (1998) define diez aspectos que ayudan a los estudiantes a dar sentido a las operaciones y proporciona una visión sobre los inicios del pensamiento algebraico. Los diez aspectos se dividen en tres grandes grupos, a saber, los aspectos de propiedad, aspectos de la aplicación y los aspectos relacionales. Los aspectos de propiedad se refieren a las propiedades que posee cada operación y suponen (a) la capacidad de descomponer la operación en sus componentes base, (b) conocimiento de los hechos y las operaciones (por ejemplo, $7 + 8 = 15$, desde el $7 + 8 = 7 + 3 + 5 = 10 + 5 = 15$), (c) la comprensión de las propiedades del grupo relacionado con la operación, y (d) la comprensión de los diversos sistemas de símbolos que representan la operación. Los aspectos de aplicación traen consigo la capacidad para aplicar las operaciones en una variedad de contextos, utilizar incógnitas y unidades arbitrarias. Y finalmente los aspectos relacionales implican una comprensión de las relaciones entre las operaciones, y entre las distintas representaciones de la operación a través de los sistemas numéricos diferentes (por ejemplo, números enteros y racionales). Estos aspectos también implican una capacidad de moverse hacia atrás y hacia delante entre estas concepciones, implicando así que la preparación para el álgebra requiere algo más que abstraer las propiedades de la aritmética.

En este sentido es importante enseñar a los estudiantes a ver los procesos y operaciones de manera holística, y subrayando las relaciones entre los números en lugar de centrarse principalmente en la respuesta. Al discutir el valor y la eficacia de los enfoques informales con los estudiantes les puede ayudar a hacer la transición hacia los métodos algebraicos más formales (MacGregor y Stacey, 1997).

Resulta así que la aritmética es un medio a través del cual puede potenciarse el razonamiento algebraico, y comenzar a darle sentido a las operaciones, acto que requiere sin duda alguna un cambio en la forma actual de su enseñanza.

2.2.2 Razonamiento algebraico y generalización: Funciones y patrones

Todas las cuestiones relativas a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas parecen hacer referencia, directa o indirectamente, a las creencias relativas a la cuestión ontológica, "¿Qué es la matemática?". Entre las respuestas a esta cuestión resaltan: es la ciencia de patrones y el orden, la ciencia de la visión relacional, y con más fuerza, la sistematización de las relaciones. Estas tres definiciones comparten el aspecto de que algún tipo de generalización es una característica importante de las matemáticas (Presmeg, 1999).

La generalización está en el centro del razonamiento algebraico (Schliemann, Carraher, Brizuela y Earnest, 2003). Si usted hace algo una vez, probablemente no es necesario el álgebra. Pero si usted está haciendo un proceso una y otra vez, el álgebra proporciona un lenguaje muy simple para describir lo que está haciendo (Usiski, 1995). La generalización como objeto y medio de pensamiento y comunicación (Döfler, 1991; Zaskis y Liljedahl, 2002) involucra la articulación y representación de ideas unificadas que hacen explícitas relaciones matemáticas importantes (Carpenter y Levi, 2000), que es posible desarrollar en los niños, pues éstos están naturalmente predispuestos a realizar generalizaciones (Becker y Rivera, 2005).

"*El álgebra es el lenguaje de la generalización*"
(Usiski, 1995, p. 23)

Diversos autores matemáticos y educadores matemáticos han abordado el tema de la generalización dándole diferentes significados. Por ejemplo Döfler (1991) distingue entre generalización empírica y la generalización teórica. La generalización empírica se basa en reconocer características comunes o cualidades comunes de los objetos. La generalización teórica, en contraste, es intensional y extensional (general / particular) y comienza con identificación de los invariantes esenciales en los sistemas de acción (materiales o mentales), así como en las condiciones de realización o los resultados de dichas acciones. Las cualidades son abstraídas de las relaciones entre objetos, en lugar de los propios objetos.

Por su parte Harel y Tall (1991) utiliza el término generalización en el sentido de la aplicación de un argumento dado, en un contexto más amplio. Distinguen entre tres tipos diferentes de generalización: 1) Expansiva, donde se amplía la gama de aplicabilidad de un esquema existente, sin reconstruir el esquema, 2) reconstructiva, donde el esquema existente se reconstruye con el fin de ampliar la gama de aplicación, y 3) disyuntiva, en donde se construye un nuevo esquema al pasar a un nuevo contexto. Desde el punto de vista de Carraher, Martínez y Shliemann (2008) una generalización matemática es la afirmación de que alguna propiedad es válida para un gran conjunto de objetos matemáticos o condiciones, por lo que la ampliación de un conjunto ordenado de objetos muestra un cierto grado de generalización, pero esta no llega a una generalización, si no es explícitamente expresada en el lenguaje o las formas convencionales de matemáticas.

García y Martinón (1998), por otro lado, señalan que la capacidad de generalizar en matemáticas se puede considerar desde dos niveles: (1) La capacidad de una persona de ver algo general y reconocer en él lo particular y concreto (subsumir un caso particular bajo un concepto general que se conoce) y (2) la capacidad de ver algo general y aún desconocido para él en lo que está aislado y concreto (para deducir lo general de casos particulares).

Entre los diversos temas relacionados con la generalización se encuentran, específicamente, los patrones y las funciones. En este sentido, el reconocimiento de patrones, juega un papel importante pues ha sido el foco de la investigación realizada durante los últimos años. La idea básica implicada en esta noción es que toda situación repetida con regularidad da lugar a un patrón, que por lo general suele formarse a partir de un núcleo generador que se repite o bien crece de forma regular (Castro, 1994). Muchos investigadores han hecho algunos intentos de investigar las etapas o niveles en el desarrollo de la capacidad para la identificación de los patrones, principalmente centrado en la capacidad de los estudiantes a generalizar (García y Martinón, 1998). Los patrones son reconocidos en la investigación por su importancia en la introducción al álgebra y distingue entre diferentes tipos de los mismos: patrones numéricos, pictóricos y patrones geométricos, patrones en los procedimientos de cálculo, los modelos lineales y cuadráticos, repitiendo patrones, etc., (Zaskis y Liljedahl, 2002). Usando esto como base García y Martinón (1998) realizan una propuesta sobre niveles de generalización en patrones lineales y distinguen tres niveles, a saber:

1) *Actividad procedimental*. En este nivel, se reconoce el carácter iterativo y recursivo del patrón lineal. Hay una sutil diferencia entre la "estrategia de contar todo" ($f(10) = f(1) + d + \cdots + d$) y el "contar con la estrategia" ($f(10) = f(9) + d$), pues una cosa es añadir en repetidas ocasiones la diferencia constante para obtener cualquiera de los términos, extensión de la secuencia numérica (carácter iterativo), y otra cosa es utilizar el carácter recursivo del patrón con un término conocido y con este valor numérico realizar algunos cálculos para obtener el término requerido.

2) *Comprensión procedimental. Generalización local*. En este nivel, se establece una generalización local, que significa que se es capaz de establecer un invariante de la acción realizada en la imagen o secuencia numérica, dentro de un nuevo problema a otro, aunque este invariante podría ser diferente de problema en problema. Así el establecimiento de un invariante se detecta a través de la regla de cálculo utilizada por el estudiante en cualquier cuestión dentro de un problema. Por ejemplo, si la forma canónica del modelo lineal es $f(n) = 5n - 1$, a continuación, la asimilación de este estímulo en un esquema cognitivo incorrecto podría conducir al alumno al establecimiento de un invariante de la forma $f(2n) = 2f(n)$. Más tarde, mediante un control y ajuste, este invariante podría adoptar la forma $f(2n) = 2f(n) - 1$, que es válida sólo para algunos de los términos en la secuencia. La característica más importante aquí es un cambio de la actividad procedimental a la comprensión del procedimiento realizado.

3) *Comprensión conceptual. Generalización global*. En este nivel, se generaliza una estrategia, lo que significa que se ha realizado la misma acción y se ha establecido el mismo invariante en un problema nuevo, pero similar. La norma desarrollada y utilizada en un problema desde el principio es ahora un objeto que sirve como un estímulo para una acción: aplicar o transferir las acciones realizadas e invariante

establecido en otro problema, a un nuevo problema que ha sido reconocido como similar a otras ya conocidas.

La identificación y el uso de patrones en la solución de problemas y el comprender nuevos conceptos y procesos es la esencia del pensamiento matemático. El estudio de patrones y relaciones promueve la comprensión de los números y sustenta la capacidad de realizar cálculos con soltura, pero las experiencias son también necesarias para identificar, describir, continuar y crear patrones de números, de las formas y de las colecciones de objetos.

“*Los patrones son el corazón y el alma de las matemáticas*”

(Zaskis y Liljedahl, 2002, p.1)

Herbert y Brown (1997) hacen referencia a patrones en números y formas en el contexto de la resolución de problemas, usados como herramienta para desarrollar el razonamiento algebraico. Su proceso de investigación consta de tres fases: (l) Patrón de búsqueda, (2) el reconocimiento de patrones, y (3) la generalización. La búsqueda de patrones es la extracción de información, el reconocimiento de patrones es el análisis matemático, y la generalización es la aplicación de la interpretación, es lo que se aprendió.

Por su parte, Threlfall (1999) se centró en patrones de una dimensión y su repetición, es decir, patrones con un ciclo de repetición de elementos reconocibles, denominado unidad de repetición. Reconoce las ideas de la regularidad y la secuencia y aboga por el uso de patrones que se repiten como un vehículo para trabajar con símbolos y caminar hacia el álgebra conceptual y un marco para la generalización.

Stacey (1989) enfocó su investigación a los patrones lineales, centrándose en la predicción del siguiente elemento en un conjunto ordenado, que representa gráficamente como la ampliación de árboles (ver figura 2.1). Para este autor crear y reconocer patrones es una estrategia relevante al momento de resolver problemas matemáticos.

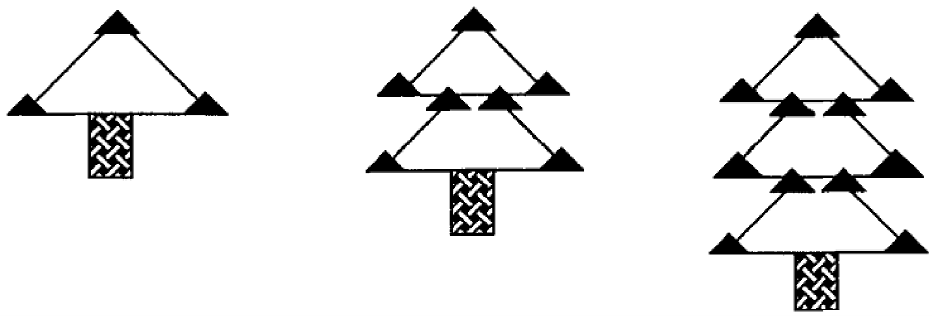


Figura 2.1 Patrones

Por otro lado, Castro (1994) orientó su trabajo al empleo de patrones numéricos que representa a través de patrones puntuales, con la finalidad de integrar el sistema de representación de los números naturales, denominado configuración puntual[3], con el sistema decimal de numeración y con el desarrollo aritmético de estos números, trabajando con secuencias numéricas lineales y cuadráticas, analizando el patrón que las define (ver figura 2.2).

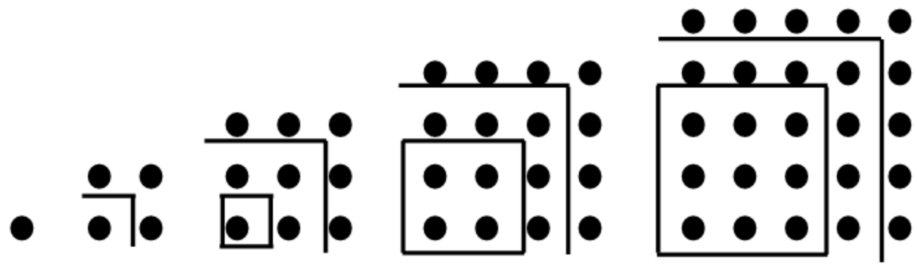


Figura 2.2 Los números cuadrados: 1, 4, 9, 16,...

Por su parte Cañadas (2007) orienta su trabajo hacia la descripción y caracterización del razonamiento inductivo, centrándose en la identificación de elementos y relaciones entre las progresiones aritméticas de números naturales de orden 1 y 2 (lo que Stacey (1989) llama de forma equivalente sucesiones de números naturales lineales y cuadráticas), reconociendo así, que la identificación de patrones es uno de los pasos importantes en el desarrollo del razonamiento inductivo, al mismo tiempo que resulta fundamental para el desarrollo de la habilidad para generalizar.

Otros autores como Carreher, Schliemann y Brizuela (2000) optan por las funciones como medios para la generalización, ellos proponen tratar a las operaciones aritméticas

[3] Se denomina así a la representación gráfica de una colección finita de puntos, que corresponde a un propósito.

como funciones. Puntualizan que al tratar las operaciones aritméticas como funciones los estudiantes usan y consideran los patrones en conjuntos de números. Los autores ilustran cómo los problemas que suelen visualizarse como del dominio de la aritmética pueden tomar un carácter algebraico desde el principio, aplicando actividades (en el caso de su investigación a niños de entre 8 y 9 años) como la que se presenta a continuación en la que se advierte la relación funcional entre las columnas ($Y = 2x + 1$):

Problema:
María tenía una tabla con los precios de las cajas de galletas. Pero llovía y algunos números fueron borrados. Vamos a ayudar a María a llenar su tabla.

Caja de galletas	Precio
	$ 3.00
2	$ 6.00
3	
	$ 12.00
5	
6	
	$ 21.00
8	
9	
10	$ 30.00

Lanin (2003) en su investigación, examina las diversas estrategias que los estudiantes utilizan en su intento de generalizar situaciones numéricas y articular las justificaciones correspondientes. Identifica seis estrategias de generalización que se describen a continuación: (a) *Contar*: realizar el dibujo de una imagen o la construcción de un modelo para representar la situación y contar el atributo deseado, (b) *Recursividad*: construir sobre la base de un término o términos de la secuencia, para construir el próximo término, (c) *Total-objeto*: El uso de una parte como una unidad para construir una unidad más grande, utilizando así los múltiplos de la unidad. Esta estrategia puede o no, requerir un ajuste por sobre o subestimación, (d) *Contextual*: es la construcción de una norma sobre la base de una relación que se determina a partir de la situación problema, (e) *Adivinar y comprobar*: utilizar una regla sin tener en cuenta por qué ésta es válida, (f) *Tasa de ajuste*: El uso de la constante de velocidad del cambio como un factor multiplicador. Un ajuste se hace entonces sumando o restando una constante para alcanzar un determinado valor de la variable dependiente.

A manera de síntesis se puede establecer que la generalización a través de patrones y el uso de funciones son una herramienta útil para introducir aspectos algebraicos en la escuela elemental, y un punto de partida para familiarizar a los niños de este nivel con la notación algebraica. En última instancia, el poder del pensamiento algebraico promulgado a través de la generalización proporciona, una oportunidad a los niños para hacer explícita la estructura matemática. Es esta sensibilidad a la profundidad en el pensamiento matemático la que puede ayudar a la transición de los estudiantes hacia las matemáticas más complejas y abstractas que se encuentran en etapas más avanzadas (Blanton y Kaput, 2003).

2.2.3 Significados del signo igual: Pensamiento relacional

A menudo se ha subrayado que el aprendizaje del álgebra es influenciado por la ambigüedad de los significados de los signos (Prediger, 2010). En este sentido el desequilibrio del signo igual en la transición de la aritmética al álgebra es muy conocido (Hewitt, 2003). Más de 20 años de investigación en psicología del desarrollo y enseñanza de las matemáticas ha indicado que muchos estudiantes de escuela primaria (con edades de 7 a 11) tienen una inadecuada comprensión del signo igual (Kieran, 1981; Carpenter , Franke, y Levi, 2003).

El signo igual es muy común en las matemáticas, y su entendimiento y uso correcto es esencial para la comprensión de muchos temas en matemáticas, como lo serían las ecuaciones algebraicas (McNeil et al, 2006). Muchos investigadores han concluido que uno de los requisitos para el éxito en el álgebra es una comprensión mucho más rica del signo igual que la que es proporcionada por la aritmética tradicional (Freiman y Lee, 2004).

Debido a su presencia en todos los niveles es que se destaca su importante papel en las matemáticas, en general, y en álgebra en particular; además su relevancia en el desarrollo del pensamiento algebraico hacen del estudio de sus significados un foco relevante de estudio (Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg y Stephens, 2005).

Existen muchas investigaciones que reportan diversos significados para el signo igual. Por ejemplo, Molina, Castro y Castro (2009) hacen hincapié en once diferentes significados del signo igual:

1) *Propuesta de una actividad:* Se refiere a la utilización del signo igual en las expresiones incompletas que contengan una cadena de números y / o símbolos que están a la izquierda del signo igual, por ejemplo: $(x-3)(x+3)=$.

2) *Operador* (también conocida como significado operacional del signo igual): Se refiere a la utilización del signo igual para indicar la respuesta a un cálculo o la simplificación de una expresión. Se interpreta como un símbolo de operador; sólo se puede leer de izquierda a derecha, por ejemplo: $4\times 5=20,\ x(x-2)+3x^2=4x^2-2x$.

3) *Expresión de una acción*: Un sentido bidireccional que amplía el significado del operador mediante el reconocimiento de la propiedad simétrica de la igualdad. Ejemplo de esto sería $2x=x(x-2)-x^2+4x,\ 24=12+12$.

4) *"Divisor":* El significado dado por los estudiantes a este símbolo es cuando se utiliza para separar los pasos de un ejercicio, por ejemplo, $f(x)=x^2=f^2(x)=x^4$. Los pasos vinculados, no podrán estar relacionados.

5) *Expresión de la equivalencia*: Se produce cuando el signo igual se utiliza para relacionar dos representaciones de un mismo objeto matemático. Se distinguen tres tipos de equivalencias: Equivalencia numérica $\left(4+5=3+6,\ 2\sqrt{3}=\sqrt{12}\right)$, equivalencia simbólica $(a+b=b+a)$, y equivalencia por definición o notación $(\frac{3}{4}=\frac{6}{8},\ 100cm=1m)$.

6) *Expresión de una condición de equivalencia* (ecuación): Este significado pertenece al contexto del álgebra. Se refiere a la utilización del signo igual para expresar una equivalencia que es verdad para algunos valores, o incluso para ninguna de las variables que figuran en él. Por ejemplo, $x^2+4x=5x-6$.

7) *Expresión de una relación funcional o dependencia:* Se refiere a la utilización del signo igual para expresar una relación de dependencia entre las variables o parámetros. Por ejemplo, $l = 2\pi r,\ y = 3x + 2$.

8) *Indicador de una conexión o correspondencia*: El significado precisa el uso del signo igual entre los objetos no matemáticos o entre las expresiones matemáticas y no matemática, esto es ♥♥♥ =3.

9) *Indicador de una estimación*: Este significado corresponde a la utilización de este símbolo para relacionar una expresión a una estimación de su valor numérico, por ejemplo $\frac{1}{3} = 0.33$.

10) *Definición de un objeto matemático*: El signo igual se utiliza para definir un objeto matemático o atribuir un nombre, por ejemplo, $a^0 = 1$ donde a es un número natural.

11) *La asignación de valor numérico*: El signo igual se utiliza para asignar un valor numérico a un símbolo. Por ejemplo, si $x = 4$, cuál es el valor numérico de $x^2 - 5$.

Por otro lado, Wilhelmi, Godino y Lacasta (2007) afirman que no existe una única definición de igualdad, pues ésta depende del dominio matemático de referencia. Así, para la igualdad de números reales, hablan como un primer punto de, *igualdad de equivalencia*, esto es, dos números reales a y b son iguales, si representan la misma clase de equivalencia: $a = b \Leftrightarrow \{a\} \equiv \{b\}$. También definen la *igualdad de orden*, especificando que dos números reales a y b son iguales, si la relación de orden en $\mathbb{R}$, cumple para ellos la propiedad antisimétrica: $a = b \Leftrightarrow [a \leq b \wedge b \leq a]$. Por otro lado, establecen que dos números reales a y b son iguales si la distancia entre ambos es nula, definiendo así, la *igualdad métrica* como: $a = b \Leftrightarrow d(a; b) = |a - b| = 0$. Mencionan que se puede interpretar la igualdad métrica valor absoluto como una topología sobre $\mathbb{R}$, en tal caso $(\mathbb{R}; d)$ es espacio topológico; y que en este contexto, afirmar que, la distancia entre dos puntos a y b es cero, equivale a determinar que el conjunto $\{a; b\}$ es conexo, con lo anterior establecen la definición *igualdad conectiva*. Definen la *igualdad algebraica*, estableciendo que dos números reales a y b son iguales, si siempre que a es solución de un ecuación E, b también lo es, esto es, $a = b \Leftrightarrow [\delta\big(E(a)\big) = 1 \Leftrightarrow \delta\big(E(b)\big) = 1]$ donde se ha denotado a $\delta(\,)$, como la función característica que asocia 1 a una sentencia verdadera y 0 a una falsa. Los autores también señalan que la igualdad entre dos números reales se puede definir también apoyándose en la teoría de funciones, definiendo así la *igualdad funcional* como: Sea $F_i(D)$ el conjunto de funciones reales de variable real inyectiva y con dominio D, entonces dos números reales a y b son iguales, si sus respectivas imágenes a través de una función inyectiva son iguales; esto es: $a = b \Leftrightarrow \exists f \in F_i(D), \{a, b\} \subseteq D, f\ no\ lineal, tal\ que\ f(a) = f(b)$. Los autores también identifican una definición de *igualdad como paso al límite*, esto es, dos números reales a y b son iguales, si a está dentro de todo entorno abierto centrado en b $(B(b;\varepsilon))$, es decir, $a = b \Leftrightarrow a \in B(b;\varepsilon), \forall\varepsilon > 0 \Leftrightarrow b \in B(a;\varepsilon), \forall\varepsilon > 0$. Por último, la definición de *igualdad numérica* presupone la aceptación de un marco de error, que depende de la naturaleza del problema o es atribuido al instrumento de cálculo. Así, la igualdad numérica queda definida como: Sea T una tolerancia de error admitido, dos números reales a y b son iguales, si a está dentro de un entorno abierto centrado en b y radio menor o igual a T $(B(b;t), t < T$, o que es lo mismo que $a = b \Leftrightarrow a \in B(b;t), t < T \Leftrightarrow b \in B(a;t), t < T$.

Wilhelmi, Godino y Lacasta señalan que la ruptura con las definiciones anteriores es radical desde el punto de vista formal; su inclusión obedece a razones pragmáticas (restricciones de medida y cálculo) y epistemológicas (nociones de aproximación suficiente y vecindad).

Alibali, Knuth, Hattkudur, McNeil y Stephens (2007) proponen una codificación de las categorías con ejemplos representantes para la definición del signo igual, basándose en un estudio realizado con 81 estudiantes de escuela intermedia, sistema de código que también fue utilizado por Knuth, Stephens, McNeil y Alibali (2006) y McNeil y Alibali (2005) y que a continuación se presenta:

Categoría	Ejemplo
Relacional	Una respuesta se codificó como relacional, si un estudiante expresó la idea general de que el signo igual significa, el mismo: “Esto significa que ambos lados de la ecuación son iguales”; “los números en ambos lados están equilibrados”.
Operacional	Una respuesta se codificó como operativo si un estudiante expresó la idea general de que el signo igual significa sumar los números o la respuesta: “Después del símbolo se muestra la respuesta”.

Sin especificar la igualdad	Determinada respuesta se codificó como la igualdad sin especificar si un estudiante proporcionó una definición usando las palabras igual o iguales, pero no ofrecieron suficiente información adicional para sugerir un conocimiento más específico: “Esto significa algo que es igual a otra cosa”; “Es igual a”.
Otro	En esta categoría se incluyeron las definiciones, que no están orientadas hacia un sentido matemático del símbolo igual: “Esto podría significar una cara sonriente, =)”; “una madre tiene que tratar a sus hijos igual”.

Tabla 2.1 Categorización del signo igual

Otras investigaciones enfatizan la importancia de distinguir solamente entre dos significados de la igualdad, el operacional y el relacional (Kieran, 1981; Filloy, Rojano, Solares 2003). Cuando se concibe al signo igual como un operador se espera que genere una respuesta, como la que se da cuando se realiza una suma. Por el contrario, cuando se concibe el signo igual como un signo relacional, se consideraría como una relación estática entre dos expresiones que son iguales en valor (Jones, Pratt, 2005). Estas dos concepciones explicarían el fracaso que tiene los estudiantes durante el periodo de transición de la aritmética al álgebra, ya que en álgebra, los estudiantes deben ver el signo igual como un símbolo de relación (es decir, “lo mismo que”) en lugar de como un símbolo de operación (es decir, “hacer algo”). En el punto de vista relacional del signo igual se vuelve particularmente importante que los estudiantes aprenden a encontrar y resolver ecuaciones algebraicas con operaciones en ambos lados del símbolo (por ejemplo, $3x - 5 = 2x + 1$), para comprender que las transformaciones realizadas en el proceso de resolver una ecuación es preservar la relación de equivalencia (es decir, las ecuaciones son equivalentes) una idea que muchos estudiantes encuentran difícil de entender (Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg y Stephens, 2005). Así la mayoría de las dificultades de los estudiantes al resolver ecuaciones algebraicas, interpretar expresiones simbólicas, trasladar de un lenguaje verbal a una representación simbólica y en general, la poca profundidad que se tiene en el conocimiento de los aspectos estructurales del álgebra se derivan de una falta de comprensión de conceptos algebraicos básicos, dos de los cuales son, precisamente la equivalencia y el pensamiento relacional (Sthepens, 2006; Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg y Stephens, 2005).

Predinger (2010), por su parte, desarrolló tres categorías, de las cuales en la segunda, considera más de un entendimiento relacional del signo igual:

1) *Significado operacional:* en la que la operación es igual a respuesta, se describe a menudo para la aritmética elemental. También se aplica, en las matemáticas superiores, como cuando en el cálculo la derivada de una función polinómica simbolizada por $f'(x) = (3x^2)' = 6x$.

2) *Significado relacional:* se centra en un uso simétrico del signo igual. Tiene cuatro subcategorías, que difieren sustancialmente entre sí y que a continuación se describen:

Identidad simétrica: El uso simétrico del signo igual en contextos aritméticos puede ayudar a expresar las relaciones en general (como conmutatividad en $3 + 5 = 5 + 3$), sino también de las identidades numéricas que son triviales para calcular en una dirección, pero difícil de entender en otra dirección, por ejemplo, mientras que $10^2 - 9^2 = 19$ es fácil de calcular, el conocimiento teórico es necesario para encontrar una representación del número 19 como una diferencia de dos números cuadrados.

Equivalencia formal describiendo términos equivalentes: se refiere a la equivalencia de los términos algebraicos con variables como $(x - 2)(x + 3) = x^2 + x - 6$ y $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, que se cumplen para todos los *x*, a y b. Esta equivalencia formal puede ser interpretada de diferentes maneras, dependiendo de la interpretación de las variables involucradas.

Ecuación condicional, caracterizando incógnitas: Aunque la ecuación $x^2 = -x + 6$ es simbólicamente parecida a $(x - 3)(x + 3) = x^2 + x - 6$ ésta tiene un carácter completamente diferente, ya que no se aplica a todos los valores de x. En esta última ecuación, se caracterizan incógnitas específicas, y uno puede (mediante la solución de la ecuación) o incluso mediante una figura determinar cuáles son las incógnitas.

Identidades contextuales en fórmulas: las fórmulas, como la fórmula del volumen del cono o la ecuación del teorema de Pitágoras $a^2 + b^2 = c^2$, no son sólo declaraciones de carácter general, sino que, por otra parte, no se aplican a todos a, b, como en equivalencia oficial, tal como también ocurre en:$(a - b)(a + b) = a^2 -$

b^2 . Las expresiones anteriores son sólo de carácter general en contextos específicos, por ejemplo, la unión *a*, *b*, *c* a las longitudes de un triángulo rectángulo y *r*, *h*, *V* a las medidas de un cono.

3) *Específicos:* en el que las identidades no se describen, pero se indican, como en las definiciones. La diferencia, por ejemplo, a una identidad contextual, es una característica epistemológica: ayuda a distinguir entre los conceptos y proposiciones. Por ejemplo, $m \coloneqq {}^{1}\!/_{2}\,(a+b)$ o $y \coloneqq 2x + 52$

Junto con el significado relacional del signo igual, surge el término pensamiento relacional como otro componente central del razonamiento algebraico. Sthepens (2006) menciona que el término pensamiento relacional es usado para considerar más de un entendimiento relacional del signo igual. Por su parte Carpenter, Franke y Levi (2003) describen el uso del pensamiento relacional cuando los estudiantes usan el sentido del número y la operación para reflexionar sobre expresiones matemáticas como objetos en lugar de cómo procedimientos aritméticos que se llevan a cabo. Así, un estudiante quien posee un pensamiento relacional es capaz de reconocer la equivalencia de expresiones como $3(x+4)$ y $3x+12$ atendiendo a sus estructuras, es decir entender la propiedad distributiva a nivel del objeto sin necesidad de cálculos individuales o verificación de que las expresiones son iguales para valores particulares de x (Sthepens, 2006).

En la escuela primaria el estudio de la aritmética a menudo privilegia el significado operacional del signo igual por centrarse exclusivamente en igualdades consideradas asimétricamente $24 \div 6 - 3 = 1$. Como consecuencia, el uso posterior del signo igual como relación y en igualdades simétricas en el álgebra de la escuela secundaria plantea dificultades, por ejemplo, al considerar expresiones como $24 \times 7 = 20 \times 7 + 4 \times 7$ o resolver ecuaciones algebraicas como $x^2 = -x + 6$ (Predinger, 2010). De estas dificultades es de donde se sustenta que el desarrollo de un significado relacional y simétrico del signo igual debiera incluirse en los planes de estudio de la escuela primaria, pues los niños de este nivel tienden a ver el signo de igualdad como un símbolo operador privado de propiedades relacionales (Jones y Pratt, 2006; Alibali, Knuth, Hattkudur, McNeil y Stephens, 2007), provocando que para poder dar un significado, los niños necesitan literalmente ver un resultado único antes de las operaciones sobre los números, es decir, una expresión como $4 + 5 = 3 + 6$ se debe escribir como $4 + 5 = 9$ (Kieran, 1981). La comprensión operativa del signo igual puede ser suficiente para resolver ecuaciones estándar como 3 + 4 = __, pero puede dar lugar a dificultades que tienen problemas más sofisticados (Hattinkudur y Alibali, 2010).

Al parecer las dificultades con el signo igual se deben al conocimiento construido a partir de la experiencia temprana con la aritmética; de este modo la capacidad de los estudiantes para adquirir el concepto relacional del signo igual puede depender del contexto de aprendizaje en este nivel. Si este es el caso, parece razonable sugerir que los contextos en que los profesores (y planes de estudio) presentan el signo igual juegan un papel importante en el desarrollo de la comprensión de los estudiantes del signo igual (McNeil, et al, 2006). Así, *"En lugar de esperar hasta el álgebra formal para desarrollar esta visión relacional, la evidencia sugiere que los estudiantes, que cuentan con experiencias adecuadas, pueden desarrollar una comprensión relacional del signo igual a una edad mucho más temprana"* (Sthepens, 2006, p. 5). La clave de este desarrollo es la exposición del signo igual en forma "no operativa" en contextos como $8 = 8$, la discusión de verdadero/falso en expresiones como $16 + 15 - 9 = 31 - 9$ y sentencias numéricas abiertas tal como $4 + 3 + 5 = \_ + 5$, usadas en el mismo sentido que Alibali (1999), para así poder desarrollar en los estudiantes un entendimiento del signo igual como símbolo relacional (Sthepens, 2006). Al respecto se han realizado varios estudios cuyo objetivo es el fomentar una visión más amplia del signo igual, que no fuera solo la que expresa un resultado. Por ejemplo, Hattinkudur, Alibali (2010) realizaron una estudio con alumnos de la escuela primaria, cuyo propósito fue determinar si una lección que incluía desigualdades fomentaba una mayor comprensión del signo igual que una lección que se centraba solo en el uso del signo igual. Los resultados indicaron que la lección que incluía desigualdades promovió una mejor comprensión del signo igual en los estudiantes de primaria que la lección que incluía el signo igual solamente.

Kieran (1981), por su parte, propuso a estudiantes de 12 a 14 años construir igualdades aritméticas con una operación en cada lado, por ejemplo:

$$2 \times 6 = 4 \times 3$$
$$2 \times 6 = 10 + 2$$
$$7 \times 2 + 3 - 2 = 5 \times 2 - 1 + 6$$

Kieran nombró a estas expresiones “identidades aritméticas” con el fin de reservar el término “ecuación” para su uso en el sentido algebraico.

A manera de síntesis se puede mencionar que durante el período de transición de la aritmética al álgebra, existe una buena cantidad de confusión. Se señala que el tipo de errores cometidos por los estudiantes sólo codifican los procedimientos, dando lugar así igualdades falsas, tales como, $1063 + 217 = 1280 - 425 = 1063$ (Kieran, 1981) en donde los estudiantes no entienden que el signo igual es una expresión de una relación por lo que las transformaciones realizadas no tienen sentido. De este modo mientras la exposición del signo igual como equivalencia no se haga presente en la escuela elemental y la aritmética siga centrándose en el significado operacional, los estudiantes seguirán presentando dificultades durante la escuela secundaria en la que se precisa utilizar los significados relacionales.

El éxito durante esta transición radicará en la capacidad de los estudiantes de cambiar entre los diferentes significados de acuerdo a las necesidades del contexto, aceptando el signo igual como un signo de equivalencias. Esta perspectiva es muy importante y podría explicar las muchas dificultades que encuentran los estudiantes (Predinger, 2010).

2.2.4 Incógnita, variable, parámetro

El uso de las letras en el álgebra escolar de secundaria parece ser ineludible, la simbología literal es un recurso potente que facilita la resolución de problemas. Sin embargo a las letras suele darse diferentes usos. Por ejemplo Küchemann (1978) especifica que las letras pueden ser interpretadas como letra evaluada, ignorada, como objeto, como incógnita o valor desconocido específico, como número generalizado y como variable. Para entender apropiadamente cada uso, a continuación se especifica la descripción correspondiente a cada caso:

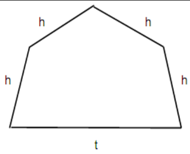
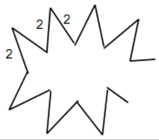
Uso de las letras	Ejemplo	Descripción
Letra evaluada	$a + 5 = 8$ $a = ?$	Aquí a puede ser evaluada inmediatamente; no hay pasos intermedios en el que participen valores desconocidos (incógnitas).
Letra ignorada	$a + b \quad = 43$ $a + 5 + 2 = ?$	La segunda ecuación difiere de la primera por el término+*2*; $a + b$ puede ser ignorada.
Letra como objeto		Las letras *h* y *t* son nombres o etiquetas para los lados.
Letra como incógnita específica		Aquí hay n lados, todos de longitud *2*. La expresión $p = n$ representa un número desconocido que no puede ser evaluado.
Letra como número generalizado	$c + d = 10$ $c < d$ $c = ?$	En este caso *c* representa un conjunto de números más que un sólo valor.
Letra como variable	¿Cuál es más grande *2n* o *n+2*?	Una relación necesita ser encontrada entre *2n* y *n+2* donde *n* varía.

Tabla 2.2 El uso de las letras

Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg y Stephens (2005) coinciden en algunos puntos sobre la clasificación del uso de las letras de la tabla anterior, basándose en un estudio realizado con estudiantes de la escuela intermedia (grados 6-8) a través del cual identificaron y clasificaron las respuestas de los estudiantes sobre la interpretación del símbolo literal en cinco categorías: *literales que toman varios valores*, como *número específico*, como *objeto*, *otros*, o *falta de respuesta / no lo sé*. Una respuesta se codificó como varios valores si el estudiante expresó la idea general de que el símbolo literal podría representar más de un valor, como número específico si el estudiante indicó que el símbolo literal representa un número en particular, y como objeto, si el estudiante sugirió que el símbolo literal representa una etiqueta de un objeto físico (como indicando que *n* representa *a* periódicos). De igual forma Asquith, Stephens, Knuth y Alibali (2007) son coincidentes con la clasificación anterior, a diferencia de que trabajaron con profesores de la escuela intermedia y agregaron la interpretación del símbolo literal como *concatenación*, que expresa la idea de que el símbolo representa el dígito en el lugar de las unidades (de forma *2n* es “veinte algo”) y *dígitos como incógnitas*, que expresa la idea de que el símbolo representa un número desconocido que es un solo dígito (ya sea 1-9 o 0-9).

Philipp (1992), habla de cantidades que representan constantes y cantidades que representan muchos valores, es decir, variables. Por ejemplo, en la ecuación del círculo $x^2 + y^2 = a^2$, x y y son variables y a es una constante. El autor señala que el uso de símbolos literales puede interpretarse como sigue:

Uso	Ejemplo
Etiqueta	$f, y\ en\ 3f = 1y$ (3 pies y 1 yarda)
Constante	π, e, c
Incógnita	$x\ en\ 5x - 9 = 91$
Generalización de números	$a, b\ en\ a + b = b + a$
Cantidades variables	$x, y\ en\ y = 9x + 2$
Parámetros	$m, b\ en\ y = mx + b$
Símbolos abstractos	$e, x\ en\ e \cdot x = x$

Tabla 2.3 Diferentes usos de los símbolos literales

Por su parte Usiski (1989) se centra en el difícil acceso de compresión, por parte de los estudiantes, a la noción de variable sobre todo cuando esta tiene un carácter multifacético, que ejemplifica con lo siguiente:

1. $A = LW$
2. $40 = 5x$
3. $\sin x = cosx \cdot \tan x$
4. $y = n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)$
5. $y = kx$

Cada una de las expresiones anteriores es interpretada de diferentes formas: a la expresión (1) usualmente es llamada fórmula, (2) es una ecuación, la expresión (3) es una identidad, la (4) es una propiedad y finalmente la expresión (5) es una función de proporcionalidad directa. Lo anterior propicia a la reflexión sobre los diferentes usos que se la da a la idea de variable, por ejemplo en (1), A, L y W son cantidades para expresar área, largo y ancho y tienen un carácter conocido. En la expresión (2), *x* representa una incógnita. En (3), *x* es el argumento de una función. En la expresión (4), a diferencia de las otras, se generaliza un modelo de la aritmética, y *n* identifica una instancia del patrón. En (5), *x* de nuevo representa el argumento de una función, *y* un valor, y k una constante (o parámetro dependiendo de cómo se use); solamente en esta expresión existe la sensación de variabilidad.

Usiski menciona que los estudiantes piensan en las variables como letras en vez de números, en este sentido se precisa mencionar que las variables no siempre toman valores numéricos. En geometría, las variables a menudo representan puntos, como se puede ver en el uso de las variables A, B y C "si $\overline{AB} = \overline{BC}$, entonces $\triangle ABC$ es isósceles". En lógica, las variables p y q a menudo son consideradas como proposiciones; en análisis, la variable f representa una función; en álgebra lineal, la variable A puede ser considerada para representar una matriz y la variable v puede ser usada para un vector; y en álgebra superior, la variable puede representar una operación. Para esta autora expresiones como $3 + \_\_ = 7$; $3+\,? = 7 \; y \; 3 + \triangle = 7$ son consideradas expresiones algebraicas y especifica que las variables no siempre tienen que expresarse con símbolos literales.

Comprender el significado de la variable resulta complejo, de hecho diversas investigaciones sobre el pensamiento de los estudiantes acerca de la noción de variable han mostrado que las concepciones de muchos estudiantes son insuficientes e inadecuadas, sobre todo en relación con el uso de símbolos en el álgebra. Los estudiantes ven a las variables como abreviaturas o etiquetas en lugar de como letras que representan cantidades (Asquith, Stephes, Knuth y Alibali, 2007). Esto hace que los estudiantes de pre-álgebra tengan necesidad de contar con un concepto bien desarrollado del significado de la variable. Esta comprensión debe estar enraizada en las experiencias con los patrones y las generalizaciones. Las variables son difíciles, incluso para los profesores de matemáticas. El término puede tener muchos significados diferentes en el estudio del álgebra, por lo que el concepto es difícil para los estudiantes. Deben ser tratados como instrumentos para expresar relaciones y la investigación sugiere que puede ser útil para los estudiantes expresar verbalmente una generalización antes de intentar representarla mediante símbolos (Philipp, 1992).

El poco entendimiento que se tiene sobre el uso que se le da a los símbolos literales acrecenta las dificultades que tienen los estudiantes respecto a la manipulación de ecuaciones, conflicto que también está relacionada con la comprensión que se tienen sobre el signo igual. De este modo la mayor parte de las dificultades de aprendizaje que tienen los niños respecto a la ecuación se debe a su experiencia con la aritmética. De acuerdo con este punto de vista, la práctica excesiva con operaciones aritméticas dificulta el aprendizaje posterior de ecuaciones más complejas, manteniendo una resistencia al cambio (McNeil y Alibali, 2005). En este último caso, las investigaciones sugieren que el aprendizaje para operar sobre la estructura de las ecuaciones puede ser más fácil para los estudiantes que ven a las ecuaciones como objetos con equilibrio simétrico.

Con lo anterior resulta preciso proporcionar a los estudiantes herramientas que permitan darle un sentido a los símbolos, característica del álgebra formal. Los símbolos no siempre estuvieron presentes, desde la época de los antiguos egipcios y babilonios, problemas matemáticos, incluso los problemas de contexto referentes a situaciones cotidianas, fueron escritos por completo en palabras al igual que sus procedimientos de solución. Debido a la impresión y el uso repetido de ciertos términos y palabras, los matemáticos comenzaron a utilizar abreviaturas para formar relaciones matemáticas. Al principio, cada grupo local de los matemáticos tenían su propio sistema de simbolización, pero poco a poco los símbolos, así como los procedimientos se estandarizaron. Al respecto Arcavi (1994, 2007) resume los componentes más importantes para dar un sentido a los símbolos:

1) Familiaridad con los símbolos. Incluye la comprensión de los símbolos y un sentido estético de su poder – cuándo y cómo los símbolos pueden y deben ser usados con el objeto de exhibir relaciones, generalidades y demostraciones que de otra manera permanecerían ocultas e invisibles.

2) Capacidad para manipular y también “leer a través” de expresiones simbólicas, como dos aspectos complementarios en la resolución de problemas algebraicos. Permite por un lado, separarse de los significados y al mismo tiempo adoptar una visión global de las expresiones simbólicas, que son condiciones necesarias para que las manipulaciones sean relativamente rápidas y eficientes. Por otro lado, permite captar niveles de conexión y razonabilidad en los resultados.

3) Conciencia de que uno puede diseñar exitosamente relaciones simbólicas que expresen cierta información (verbal o gráfica) dada o deseada.

4) La capacidad de seleccionar una posible representación simbólica (es decir, elegir la variable a la cual asignar un símbolo), y en ciertos casos, reconocer nuestra propia insatisfacción con esa selección, prestarle atención e ingeniarse para buscar una mejor. Por ejemplo, en el proceso de resolución de un problema, hacer una pausa para considerar si sería más conveniente representar tres números consecutivos como $n, n+1, n+2$, ó $n-1, n, n+1$ o quizás como $n-2, n-1, n$.

5) Conciencia de la necesidad de revisar los significados de los símbolos durante la aplicación de un procedimiento, durante la resolución de un problema o durante la inspección de un resultado, y comparar esos significados con las intuiciones (o premoniciones) acerca de los resultados esperados y con la situación misma del problema. Considérese, por ejemplo, los problemas para ejercitar la acción y el lenguaje de las generalizaciones numéricas, como lo sería el siguiente ejemplo que en este caso requiere expresar la cantidad de sillas necesarias para acomodarlas alrededor de *n* mesas, de la siguiente manera:

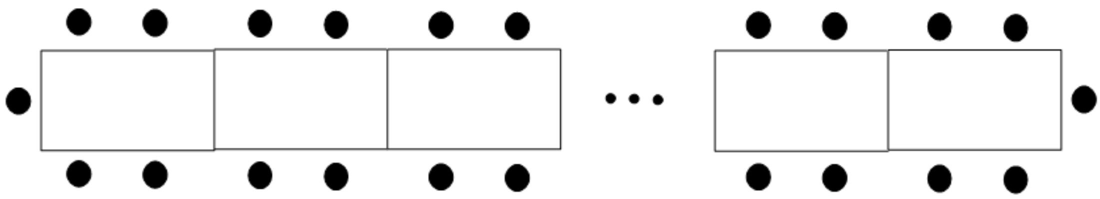


Figura 2.3 Generalización numérica

6) Conciencia de que los símbolos pueden desempeñar roles distintos en diferentes contextos y desarrollar un sentido intuitivo de esas diferencias. Considérese los distintos roles que pueden desempeñar las variables y los parámetros, y los distintos “tiempos de sustitución”. Por ejemplo, en el caso de la expresión general de funciones lineales $y = ax + b$, tanto x, y (las variables) como b, a (los parámetros) representan números, pero los objetos matemáticos que uno obtiene al efectuar la sustitución, son muy diferentes. En términos del plano Cartesiano, sustituir valores para x, y, fija un punto del conjunto de todos los puntos, mientras que sustituir valores para b, a, fija una línea (o una función lineal) del conjunto de todas las líneas posibles. Así, $y = b$ puede interpretarse de dos maneras diferentes: si fue el resultado de haber sustituido $x = 0$ (en $y = ax + b$), o si fue el resultado haber sustituido $a = 0$ (en $y = ax + b$). En el primer caso, encontramos la ordenada

(general) de un punto cuya abscisa es 0. En el segundo caso, encontramos la ecuación de una recta (general) cuya pendiente es 0.

El uso de las letras es una característica del álgebra y es preciso hacer hincapié en su significado, ya sea como incógnita, variable, parámetro, etc., pues son parte de un lenguaje que es fuente de múltiples dificultades por parte de los estudiantes al momento de operar con ellas.

2.2.5 El álgebra como lenguaje

Las investigaciones recientes en educación matemática marcan una tendencia a considerar a la matemática como un lenguaje, los sistemas simbólicos y los objetos simbolizados hacen de ésta, un lenguaje propio, sustentado en el lenguaje natural (Fernández, 1997). Por lo tanto el álgebra precisa ser un lenguaje que tiene la función de facilitar la expresión de los conceptos matemáticos. Las reflexiones que incluimos a continuación sobre la visión del álgebra como lenguaje son un resumen e interpretación personal de las ideas contenidas al respecto en el texto de Filloy, Puig y Rojano (2008). Dicho libro constituye un verdadero tratado sobre el álgebra, desde un punto de educativo, basado en sus propias investigaciones realizadas, desde los años 80.

Como se describe en el mencionado texto, entre los autores que se han interesado en estudiar el lenguaje matemático desde el punto de vista educativo nos encontramos a Pimm (1987) que en su libro "Speaking Mathematically" aborda dicho análisis con herramientas de la lingüística teórica. Su estudio también aborda el tema del papel del lenguaje natural en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con un énfasis especial en cómo los significados asignados a las palabras en el lenguaje coloquial son transferidos de manera espontánea por los niños, a las matemáticas, lo que conlleva a un conflicto al momento de aprender el lenguaje algébrico, pues mientras el lenguaje natural puede comunicar significados a pesar de los abusos sintácticos que muchas veces se cometen, el lenguaje algebraico es preciso, obedece a reglas exactas, no tiene significado salvo por la interpretación rigorosa de sus símbolos (Fernández, 1997). Cuando trata el tema del formalismo del lenguaje, Pimm aborda necesariamente el tema del simbolismo algebraico ya que es una referencia esencial cuando se habla de un sistema de símbolos matemáticos, de su sintaxis y gramática.

En diversos trabajos Duval (Duval, 1995; 2006) ha desarrollo un marco teórico extenso y consistente sobre el papel de los registros de representación semiótica en el aprendizaje matemático, incluyendo, por tanto, los registros de índole algebraica, junto con los restantes (lengua natural, lenguaje geométrico, etc.). La variedad de sistemas semióticos de representación en matemáticas (gráficos, fórmulas, tablas, figuras geométricas, etc.) y las conversiones entre ellos son un tema central en los trabajos de Duval. Este autor sostiene que uno de los mayores problemas en la semiosis (producción, interpretación y transformación de signos) tiene lugar en los casos de no congruencia en los procesos de conversión entre las representaciones. La coordinación de registros por los alumnos es considerada como condición necesaria para la aprehensión conceptual en matemáticas.

Dentro de su marco teórico Duval trata con las diferencias y relaciones entre la lengua natural y los lenguajes formales, en particular la geometría y la lógica como casos ilustrativos de las traducciones entre la lengua natural y el lenguaje formal. Este estudio también se podría aplicar al caso del álgebra, en particular las cuestiones relacionadas con los problemas de "puesta en ecuación", donde se debe traducir el texto de un problema escrito en lengua natural al lenguaje algebraico. El autor alude al simbolismo algebraico cuando trata la conversión de expresiones algebraicas y gráficos cartesianos, aunque sin hacer un estudio específico del lenguaje algebraico.

Brown (2001) es otro autor que analiza el carácter instrumental del lenguaje en el desarrollo de la comprensión matemática. Utiliza ejemplos tomados de la investigación en educación matemática para estudiar cómo el lenguaje influye en la actividad desarrollada en el marco normativo de una situación dada. Una de las implicaciones de este análisis es que el aprendizaje se puede ver como una reconciliación entre modos convencionales y potenciales de describir una tal situación, desde el punto de vista de los alumnos y los profesores. Por este motivo utiliza, entre otros recursos metodológicos la noción de narrativa, introducida por el filósofo francés Ricoer, y la aplica al estudio de los fenómenos de transición entre la aritmética y el álgebra, usando resultados de otras investigaciones. De esta manera, los resultados de estudios previos sobre dicha transición logra una nueva dimensión, la visión de los individuos que tienen la experiencia de la transición y que usan sus propios medios de expresión para narrar su apreciación de los límites entre la aritmética y el álgebra.

Los trabajos de Pimm, Duval y Brown analizan las relaciones entre el lenguaje (oral, escrito,...) y el aprendizaje de las matemáticas desde diferentes perspectivas teóricas (teoría lingüística, semiótica, sociología crítica y hermenéutica). Una postura diferente es la adopta por Radford, Filloy y colaboradores.

Radford (2003; 2006) adopta de Vygotsky la idea de que la cognición humana está ligada al uso de signos, por lo que deja de ser central lo que los signos representan y en su lugar lo importante es lo que nos permiten hacer (visión pragmática-antropológica sobre el significado). Además, estos signos forman parte de sistemas de signos y trascienden las cogniciones del individuo al formar parte de una cultura. Desde esta perspectiva Radford analiza tanto la emergencia del pensamiento algebraico en los alumnos que están iniciando el estudio del álgebra y la emergencia del simbolismo algebraico en la historia.

El libro de Filloy, Puig y Rojano (2008) "Educational Algebra", forma parte de los intentos por teorizar sobre las relaciones entre las matemáticas, el lenguaje y la educación, con una atención especializada en el lenguaje del álgebra. Asumen principalmente una perspectiva semiótica pragmática e histórica y favorecen de este modo una visión del significado como uso, más que formal y referencial; el foco de atención del análisis es la actividad de los individuos con el lenguaje del álgebra y la adquisición progresiva de competencia algebraica.

La postura pragmatista-antropológica, adoptada por autores como Radford, Filloy y cols sobre el lenguaje algebraico nos parece muy pertinente. Uno de los rasgos característicos del álgebra es, sin duda, el empleo de una escritura específica: el uso de letras, frecuentemente combinadas con números para designar "sus objetos", viene a ser algo propio del álgebra. Pero otro rasgo propio del álgebra, quizás más importante que la designación o referencia a entidades extensivas indeterminadas, o a objetos intensivos con mayor o menor grado de generalidad, es la de establecer relaciones, operaciones, cambios o transformaciones que se realizan con tales entidades algebraicas. Para ese trabajo, la "economía expresiva" del uso de las inscripciones alfanuméricas es fundamental, resultando por tanto que tal simbolismo viene a ser un instrumento del trabajo algebraico, y no tanto, un medio de representación. Con el simbolismo algebraico básicamente "se hacen" cosas, más que se representan cosas.

Sistemas matemáticos de signos

Filloy, Puig y Rojano (2008) utilizan la noción de “sistema matemático de signos”[4] (mathematical sign system, MSS) para dar cuenta, entre otras cosas, de las relaciones simbióticas entre las diferentes formas de expresión en el trabajo matemático, en particular, las relaciones entre el lenguaje algebraico y el lenguaje natural. Adoptan una perspectiva semiótica - pragmatista (Peirce) en la manera triádica de concebir los signos en lugar de una perspectiva diádica (Saussure) más usada en los estudios lingüísticos. La aproximación sistémica a los signos matemáticos está motivada por la constatación de que el significado de cualquier notación, expresión o texto matemático depende del resto de los objetos o elementos que le acompañan.

En la perspectiva semiótica pragmatista la noción de signo no queda restringida a los elementos lingüísticos, palabras, o inscripciones, sino que abarca los tres elementos que participan del signo peirceano: el representamen, el objeto y el interpretante. Como afirman Filloy y cols (2008) es usual, cuando se describe el lenguaje en que se escriben los textos matemáticos, distinguir entre los signos entendidos como matemáticos en sentido estricto y los que corresponden al lenguaje ordinario. Sin embargo, desde el punto de vista de los procesos de significación, esta distinción no es crucial, ya que es necesario tener en cuenta el sistema como un todo, y lo que se debe describir como matemático es el sistema y no los signos; de aquí que prefieran hablar de sistema matemático de signos, ya que el sistema es el responsable del significado de los textos. Es la naturaleza del sistema lo que es matemático y no los signos individuales. Si aplicamos esta idea al caso del álgebra tendríamos la consecuencia de que la consideración de un texto como de naturaleza algebraica no se debería hacer en base meramente a la presencia de cierto tipo de inscripciones aisladas, expresiones alfanuméricas, sino al sistema de objetos referidos por dichas expresiones, sus interpretaciones y el sistema de prácticas de las cuales participan. Esta idea está bien reflejada en la noción de configuración algebraica que será introducida en el capítulo 3 de esta memoria, la cual en cierta manera operativiza la noción de “sistema matemático de signos”.

[4] El Sistema Matemático de Signos (SMS) usualmente es conocido como sistema de representación simbólico.

Las expresiones algebraicas como iconos

Según la relación que los signos tengan con el objeto, Peirce realiza la siguiente clasificación:

Iconos: Tienen una relación de semejanza, en tanto se parecen al objeto que representan. La relación con aquello a lo que se refieren es directa, por ejemplo: pinturas, retratos, dibujos figurativos, mapas, etc. La representación muestra la estructura u organización del objeto.

Índices: La relación con los objetos que representan es de contigüidad (relación de causa-efecto) con respecto a la realidad. Por ejemplo, un rayo (es índice de tormenta), una huella (es índice de alguien que pasó por ahí), etc.

Símbolos: Frente a los iconos y los indices (o síntomas), según Peirce los símbolos son signos inmotivados, en los que la relación entre el significante y el significado es totalmente convencional. Ejemplo: palabras, logotipos, escudos de armas, señales de tránsito.

Los diferentes tipos de signos pueden combinarse, en el caso particular de la fotografía, por ejemplo se trataría de un icono (en tanto hay una relación de semejanza con el objeto) pero también es índice puesto que la fotografía se ve afectada por el objeto que representa (la fotografía se produce a través de registrar diferencias lumínicas de aquello que representa).

Filloy, Puig y Rojano (2008) explican con claridad el carácter de iconos de las expresiones algebraicas, en el marco de la semiótica Peirceana. Las expresiones algebraicas son iconos porque como signos tienen las propiedades de los objetos que las componen. Una característica que distingue a los iconos es que mediante la observación directa del mismo se pueden descubrir otras verdades relativas al objeto distintas de las que son suficientes para determinar su construcción. Esta capacidad de revelar verdades no esperadas es precisamente en lo que radica la utilidad de las fórmulas algebraicas, por lo que su carácter icónico es el que prevalece. Así, por ejemplo, la expresión $y = x^2 - 2x + 1$, es una parábola; la mera expresión informa de las propiedades esenciales de dicho objeto matemático.

Sin embargo, las letras de las expresiones algebraicas, tomadas de manera aislada, no son iconos, sino índices: cada letra es un índice de una cantidad. No son símbolos. Si la expresión algebraica es el resultado de la traducción de un enunciado verbal de un problema aritmético-algebraico, cada letra específica representa una cantidad específica como resultado de la convención establecida por la persona que hace la traducción. Por el contrario, los signos +, =, /, etc., son símbolos en el sentido de Peirce. En las expresiones algebraicas encontramos, por tanto, ejemplo de la imbricación de los tres tipos de signos en la escritura matemática: las letras funcionan como índices, los signos de las operaciones, igualdad, desigualdad, etc. son símbolos, mientras la expresiones como un todo funcionan como un icono.

El álgebra resulta ser un lenguaje, fuente de conflictos y fracasos en las matemáticas, pero necesario para la transmisión del significado matemático, trasmisión que exigen a los estudiantes expresar el significado matemático verbalmente, a través del lenguaje natural, y visualmente mediante los símbolos, gráficos, y representaciones propios de las matemáticas (Férnandez, 1997).

2.2.6 Reflexiones sobre la naturaleza del álgebra en la bibliografía

El álgebra y el razonamiento algebraico es un tema central que en las últimas décadas ha cobrado especial interés al pretender ser incluidos en la escuela elemental. Al respecto diversas reflexiones realizadas por distintos autores sobre la caracterización del razonamiento algebraico han surgido principalmente en lo que respecta al “Early Algebra”, con la finalidad de caracterizar la actividad algebraica en la escuela primaria. En este sentido, primeramente, resulta preciso realizar una distinción entre el pre-algebra y el “Early Algebra”, pues aunque ambos enfoques están relacionados con la enseñanza de la matemática previa a la formalización del álgebra, su finalidad es diferente, mientras que el pre-álgebra permite mitigar las dificultades que muestran los estudiantes al iniciar en el álgebra como lo serían las atribuidas a las diferencias entre la aritmética y el álgebra, el enfoque “Early Algebra” considera el desarrollo del pensamiento algebraico en la edad temprana de los niños y que toma una postura diferente respecto a las dificultades del algebra, sustentando que éstas son debidas a la manera en que las matemáticas elementales son introducidas (Carraher y Schliemann, 2007).

Entonces, ¿qué es el “Early Algebra”, si no es el álgebra que a la mayoría de nosotros se nos enseñó? El enfoque “Early Algebra” se trata de un enfoque novedoso, o una familia de enfoques para la interpretación y aplicación de los temas ya existentes de la matemática temprana. Se diferencia del álgebra que comúnmente encontramos en la escuela secundaria, pues se basa en gran medida en los contextos de los problemas de fondo, sólo poco a poco introduce la notación formal, y es estrechamente entrelazada con temas del currículo de la matemática elemental (Carraher, Schliemann y Schwartz, 2007). Esto es posible debido a que el álgebra reside en silencio dentro del currículo de la matemática temprana en problemas de palabras; en tópicos como la adición, sustracción, multiplicación, división, razón, proporción, número racional, medición; y en los sistemas de representación como gráficas, tablas, notación aritmética escrita, exploración de estructuras (Carraher y Schliemann, 2007). De este modo, resulta que el “Early Algebra” no es lo mismo que la enseñanza del álgebra: en este enfoque los profesores ayudan a sus alumnos, a reflexionar profundamente sobre temas ordinarios de la matemática temprana, expresan la generalización y el uso de representaciones simbólicas que se convierten en objetos de análisis y deducción. Por tanto el aprendizaje desde este enfoque implica un cambio conceptual a partir de casos particulares a los conjuntos de los casos y sus relaciones (Carraher, Schliemann, y Schwartz, 2007). Se refiere al pensamiento algebraico que nace de una serie de actividades sobre los números, geometría y medición realizadas en la escuela elemental. Existe una necesidad de expresar las relaciones que se revelan y cualquier reserva formal sólo debe introducirse cuando los estudiantes están preparados. De esta manera, se coloca una base para el uso de los símbolos que expresan generalidades de manera concisa y se trasmite un significado independiente de las actividades con las que se establecieron.

Es preciso mencionar que no existe un punto de vista unificado sobre este enfoque; algunos autores consideran que se debe promover el desarrollo de los aspectos algebraicos que ya posee el pensamiento de los niños como lo son el razonamiento numérico y aritmético. Otros autores consideran por el contrario que los cambios en la forma de pensar de los niños deben ser promovidos de mejor modo mediante el uso de herramientas, tales como notaciones y diagramas, que les permitan operar en un nivel más elevado de generalidad (Lins y Kaput, 2004). Esta discrepancia ha llevado a algunos autores a proponer diversas caracterizaciones sobre la actividad algebraica que pudiera clarificar el enfoque “Early Algebra” y la naturaleza del álgebra en general; entre ellos se puede mencionar a Bednarz, Kieran y Lee (1996) que distinguen cinco concepciones diferentes referentes al álgebra: (a) El algebra como expresión de la generalización de patrones numéricos y geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas, (b) el álgebra como una herramienta para la resolución de problemas, (c) como la modelización de fenómenos físicos, usando variedad de representaciones, y (d) el álgebra como el estudio de las funciones.

Otra propuesta para caracterizar el álgebra es la realizada por Usiskin (1989) esta autora distingue cuatro concepciones del algebra que relaciona fuertemente con el uso de las variables. La primera concepción hace hincapié en el álgebra como generalización de la aritmética y se piensa en variables como generalización de patrones para obtener propiedades. Por ejemplo:

$$3 \cdot 5 = 15$$
$$2 \cdot 5 = 10$$
$$1 \cdot 5 = 5$$
$$0 \cdot 5 = 0$$

Esto puede ser extendido a los números negativos como:

$$-1 \cdot 5 = -5$$
$$-2 \cdot 5 = -10$$

Esta idea se puede generalizar para obtener propiedades como:

$$-x \cdot y = -xy$$

El álgebra como un estudio de procedimientos para la solución de determinados problemas, es la segunda concepción que distingue esta autora; bajo este punto de vista las variables pueden ser incógnitas o constantes. La tercera concepción distingue al álgebra como un estudio de relaciones entre cantidades, con esta concepción se inicia el estudio de las fórmulas, aquí las variables varían y se piensa en ellas como parámetros o como argumentos, es importante mencionar que sólo en esta concepción existen las nociones de variable dependiente e independiente. El álgebra como el estudio de estructuras, es la cuarta concepción, y se refiere al estudio del álgebra en niveles superiores, involucra estructuras tales como grupos, anillos, dominios y espacios vectoriales. Por ejemplo:

Considérese lo siguiente:

$$factoriza\ \ 3x^2 + 4ax - 132a^2$$

Como se puede apreciar la concepción de la variable representada aquí no se ha tratado previamente. No hay ninguna función o relación, la variable no es un argumento. No hay ecuación que deba resolverse, por lo que la variable no está actuando como una incógnita (o valor desconocido). No existe un patrón que generalizar.

La respuesta $(3x + 22a)(x + 6a)$ podría ser comprobada por la sustitución de valores para x y a en el polinomio dado y en la respuesta de los factores obtenidos, pero esto casi nunca se hace, por lo que el estudiante no percibe con profundidad el procedimiento realizado.

Por su parte, Kaput (1998, 2000) señala que el álgebra debe presentar, (a) la generalización de patrones y relaciones (particularmente la generalización de la aritmética y del razonamiento cualitativo), (b) el estudio de funciones y relaciones, (c) el estudio de estructuras y sistemas abstraídos de cálculos y relaciones, (d) un conjunto de lenguajes de modelización y control de fenómenos, y (e) la manipulación sintácticamente guiada de formalismos.

El National Council of Teachers of Mathematics también manifiesta su preocupación por el aprendizaje del álgebra y sostiene que la competencia algebraica es importante en la vida adulta, tanto para el trabajo como para la educación postsecundaria y por esa razón todos los estudiantes deberían aprender algebra. El NCTM (2000) distinguen como componentes del *estándar* de álgebra los siguientes aspectos:

1) Comprender patrones, relaciones y funciones.

2) Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos.

3) Usar modelo matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas.

4) Analizar el cambio en contextos diversos.

Por su parte, Burkhardt (2001) propuso una taxonomía para lo que significa hacer álgebra, para el autor la actividad algebraica comprende: invertir relaciones funcionales, construir demostraciones simbólicas generales, formular comandos algebraicos de programación, también menciona la importancia de extender patrones numéricos y geométricos; formular reglas verbales para expresar las generalizaciones de los patrones; sustituir números en formulas y calcular los resultados y, formular reglas verbales para relaciones funcionales o para brindar explicaciones para resultados generales.

Otra caracterización que se suma a las anteriores, es la que propone Drijvers (2008) quien distingue cinco enfoques de algebra: (a) El álgebra como un medio para resolver problemas, problemas que, se caracterizan por encontrar qué valor de la incógnita satisface las condiciones del problema, (b) el segundo enfoque versa sobre el estudio de las funciones, este enfoque funcional se ve principalmente como un medio para formular e investigar las relaciones entre las variables. Se trata de la covariación y la dinámica: ¿cómo es que un cambio en el valor de una variable afecta a la otra? (c) El álgebra como generalización, patrones y estructuras, es el tercer enfoque propuesto, se centra en la generalización de relaciones, y la investigación de los patrones y estructuras. Aquí las variables son números generalizados, (e) el cuarto enfoque es el álgebra como lenguaje, en este enfoque se considera al álgebra como un medio para expresar ideas matemáticas y en el que la sintaxis, los símbolos y notaciones son necesarios. Este enfoque percibe al álgebra como un sistema de representaciones, como un sistema semiótico en el que las variables no son más que símbolos que no se refieren a un significado específico en un contexto determinado; y por último un quinto enfoque (f) el álgebra desde una perspectiva histórica, aquí se sustenta que el desarrollo histórico del álgebra es una fuente de inspiración para el desarrollo de una trayectoria de aprendizaje.

El punto de vista de Kieran (2007), se apoya en propuestas de diversos autores y elabora un modelo que sintetiza las actividades del álgebra escolar en tres tipos de actividades: (a) Actividades de tipo generacional, las cuales implican la formación de expresiones y ecuaciones, los cuales considera como los objetos del álgebra. Incluye en esta categoría como ejemplos típicos, las ecuaciones que contienen una incógnita que representan situaciones problemas, expresiones de generalidad que surgen de patrones geométricos o secuencias numéricas, y expresiones de reglas que gobiernan relaciones numéricas. (b) Las actividades de tipo transformacional (o actividades basadas en reglas), incluyen, por ejemplo, agrupar términos semejantes, factorizar, desarrollar, sustituir una expresión por otra, sumar y multiplicar expresiones polinómicas, resolver ecuaciones e inecuaciones, simplificar expresiones, sustituir valores numéricos en expresiones, trabajar con ecuaciones y expresiones equivalentes, etc. Aunque la mayor parte de estas actividades se interesan por los cambios en la forma simbólica de una expresión o ecuación que mantienen la equivalencia esto no implica que se trate de actividades rutinarias ya que su justificación implica la aplicación de axiomas y propiedades de las estructuras correspondientes. (c) El tercer tipo son las actividades de tipo global o de meta-nivel, que sugieren el uso de procesos matemáticos más generales. Son las actividades para las que el álgebra se usa como una herramienta, pero que no son exclusivas del álgebra. En concreto se incluye en esta categoría, resolución de problemas, modelización, trabajar con patrones generalizables, justificar y probar, hacer predicciones y conjeturas, estudiar el cambio en situaciones funcionales, buscar relaciones o estructura, etc., así como proponer actividades que se pueden ciertamente realizar sin usar expresiones simbólico-literales algebraicas.

Todas las investigaciones anteriores respecto a los aspectos que caracterizan al álgebra llevan consigo el fin de ponerlos en práctica para desarrollar el razonamiento algebraico en los estudiantes. Respecto al razonamiento algebraico, Kieran (2007) menciona que "*puede interpretarse como una aproximación cuantitativa a las situaciones que hace hincapié en los aspectos generales de relaciones con herramientas que no son necesariamente literal-simbólico, pero que en última instancia, puede ser utilizado como apoyo cognitivo de creación y para sostener el discurso más tradicional de la escuela sobre el álgebra*" (p. 275). Por su parte Carraher y Schliemann (2007) mencionan que el razonamiento algebraico se refiere a un proceso psicológico que involucra resolución de problemas que pueden ser expresados matemáticamente de manera fácil usando notación algebraica.

Kieran (2004) menciona que el razonamiento algebraico en los grados elementales involucra el desarrollo de formas de pensamiento en actividades para las que el álgebra simbólico-literal puede ser utilizada como herramienta, pero que no son exclusivos ya que se puede estar involucrado en el álgebra sin usar ningún símbolo literal en absoluto. Por ejemplo, al analizar las relaciones entre cantidades, al notar la estructura, el estudio del cambio, generalización, resolución de problemas, el modelado, justificación, prueba y predicción. Involucra una actividad de generalización de los estudiantes sobre datos y relaciones matemáticas, estableciendo generalizaciones a través de la conjetura y la argumentación, y expresándolos mediante formas cada vez más formales (Kaput y Blaton, 2002).

Esta discrepancia entre opiniones llevan a Carraher y Schliemann (2007) a afirmar que la mayoría de los autores han trabajado sobre dimensiones específicas de interés y que relativamente pocos han tratado de caracterizar el campo del algebra y el razonamiento algebraico de manera exhaustiva. Esta observación lleva a los autores citados a considerar que posiblemente el análisis del razonamiento algebraico está todavía en su infancia y su caracterización también. Sin embargo, parece ser que de lo que no duda es que la generalización resulta fundamental para que una tarea pueda tener un carácter algebraico; como lo afirman Kaput y Lins (2004) al establecer que las características claves del razonamiento algebraico son:

1. Involucra actos de generalización deliberada y expresiones de generalidad.

2. Involucra un esfuerzo separado, razonamiento basado en las formas de generalizaciones sintácticamente-estructuradas, incluyendo acciones sintáctica y semánticamente guiadas.

Y, por otro lado, como lo manifiestan Carpenter y Levi (2000) al considerar como núcleo fundamental del pensamiento algebraico a las generalizaciones y el uso de símbolos para representar ideas matemáticas y resolver problemas, lleva a considerar a la generalización como la base del razonamiento algebraico (Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006). Dado también que la mayor parte de las expresiones y manipulaciones algebraicas pueden ser explicadas a partir de las expresiones y manipulaciones aritméticas, es factible pensar que a través de la correcta enseñanza de la aritmética se desarrolle el razonamiento algebraico (Usiski, 1995).

El punto de ruptura entre la aritmética y el álgebra es reconocido indudablemente como problemático. Respecto a esto, es relevante mencionar que la necesidad de reconceptualizar la naturaleza de álgebra y el razonamiento algebraico para introducirlos en la escuela elemental, hacen que la preocupación sea cada vez mayor especialmente en lo que respecta a esta separación artificial, en donde el conocimiento de la estructura matemática es esencial para el éxito de la transición (Warren, 2003).

2.3 EL ÁLGEBRA EN LA ESCUELA ELEMENTAL: IMPLICACIONES PARA EL PROFESOR

Respecto a la introducción del álgebra en la escuela elemental y el razonamiento algebraico elemental, existen muchas investigaciones que reportan que los niños son capaces de desarrollar este tipo de razonamiento con tareas específicas que permitan dicho desarrollo. Por ejemplo, Schliemann, Carraher, Brizuela and Earnest (2003) siguen un enfoque del algebra como aritmética generalizada de números y cantidades. En su estudio longitudinal trabajaron con niños de 9-10 años a quienes aplicaron actividades relacionadas con la adición, sustracción, multiplicación, división, fracción, razón, proporción y números negativos. Cuyas conclusiones arrojaron que los estudiantes son capaces de resolver actividades como la siguiente:

Problema:
Harold tiene algo de dinero. Sally tiene cuatro veces más dinero que Harold. Harold gana 18.00 dólares más que Sally. Ahora él tiene la misma cantidad que Sally. ¿Puedes calcular cuánto dinero tiene en total Harold? ¿Qué hay de Sally? (Cada paso en el problema se presentó de forma gradual)

Por otro lado, Blanton y Kaput (2004) examinan cómo los estudiantes de grados elementales son capaces de desarrollar y expresar relaciones funcionales, proponiendo actividades para niños de preescolar como la que incluimos a continuación:

Problema:

1. Supongamos que estás en un refugio para perros y que quieres contar todos los ojos de los perros que veas. Si hubiera un perro, ¿cuántos ojos habría?, ¿Y si hubiera dos perros? ¿Tres perros? ¿100 perros? ¿Ves una relación entre el número de perros y el número total de ojos? ¿Cómo describirías esta relación? ¿Cómo sabes que esto funciona?
2. Supongamos que quieres saber cuántos ojos y colas hay en total. ¿Cuántos ojos y colas hay en un perro?, ¿Dos perros?, ¿Tres perros?, ¿100 perros?, ¿Cómo describirías la relación entre el número de perros y el número total de ojos y colas? ¿Cómo sabes que esto funciona?

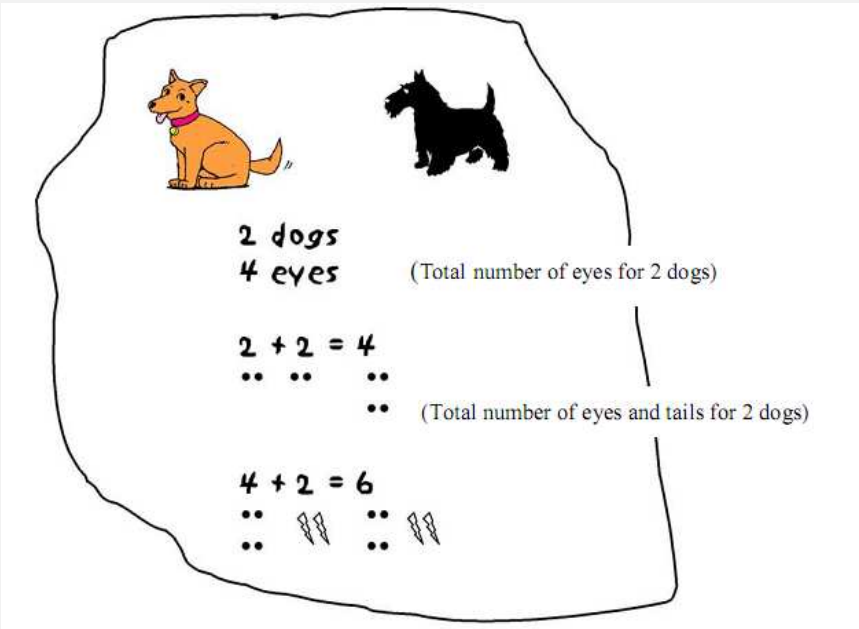


Figura 2.4 Relación funcional

La introducción del razonamiento algebraico en la escuela primaria, trae consigo reconocer el carácter algebraico en las actividades matemáticas de la escuela elemental, así como el diseño de actividades que expresen un proceso de generalización y que también puedan resolverse tanto de una forma aritmética como de manera algebraica. El razonamiento algebraico es un proceso en que los estudiantes tienen que generalizar ideas matemáticas, establecer las generalizaciones a través del discurso de la argumentación, y expresarlas cada vez con términos más formales, hecho que requiere una atención a la estructura y las relaciones entre los objetos matemáticos (Blanton y Kaput, 2003). Lo anterior requiere que los profesores de todos los niveles de Educación Primaria promuevan el pensamiento algebraico con el objetivo de facilitar el aprendizaje del álgebra y fomentar un aprendizaje con comprensión de las matemáticas, introduciendo el carácter algebraico en la matemática elemental (Carraher y Schliemann, 2007). Estos hechos implican realizar grandes cambios en relación a la manera de concebir la enseñanza y el aprendizaje del álgebra y su inclusión en la escuela primaria. Estos cambios no son fáciles de llevar a cabo, sobre todo cuando los nuevos enfoques implican la participación de nuevas herramientas conceptuales y considerando también que los profesores de la educación primaria no están capacitados para enseñar álgebra (Kaput y Blanton, 2001).

Los profesores necesitan estar capacitados para crear oportunidades de razonamiento algebraico: “algebrizar” problemas aritméticos existentes transformándolos de problemas aritméticos de una respuesta numérica a las oportunidades para desarrollar el razonamiento algebraico en los niños a través del trabajo con patrones, conjeturando, generalizando, y justificando los hechos y relaciones matemáticas. Es necesaria la construcción en el maestro de “ojos y oídos algebraicos" para que puedan identificar las oportunidades para la generalización y la expresión sistemática de la generalidad (Kaput y Blanton, 2001), y poner de manifiesto el carácter algebraico de la matemática elemental (Carraher y Schliemann, 2007).

Blanton y Kaput (2003) en su investigación con profesores en servicio a través del proyecto “Generalizando para extender la aritmética al razonamiento algebraico”, identificaron serie de características, que perciben como parte de un perfil emergente del tipo de práctica que apoya a los estudiantes para el desarrollo del razonamiento algebraico, a saber:

1) *Integración espontánea de conversaciones algebraica en el aula*. Los autores la definen como una conversación que los estudiantes deben de manifestar cuando participan en algún tipo de generalización o formalización o en el momento de razonar sobre las generalizaciones, de una manera espontánea y sin fisuras. Además de ser capaz de transformar una tarea aritmética de rutina en una que requiere razonamiento algebraico.

2) *Una espiral de temas algebraicos más importantes sobre períodos de tiempo*. Implica ver a las tareas no de forma aislada y como actividades de una sola vez sino como las tareas cuya ejecución puede ser ejercida sobre una diversidad de experiencias en el aula. Por ejemplo, los estudiantes pueden iniciar identificando simples relaciones aditivas y avanzar hasta describir relaciones más complejas que involucraban tanto a las sumas y multiplicaciones.

3) *Actividad de diseño*. Exige del docente la capacidad de encontrar, crear o "algebrizar" tareas matemáticas. La autonomía en el desarrollo de tareas es un componente crítico en el crecimiento autosostenido del docente.

4) *Herramientas para el razonamiento algebraico*. Estas herramientas apoyan el razonamiento algebraico y están definidos como aquellos objetos, estructuras o procesos que facilitan el razonamiento matemático de los estudiantes y, en particular, el razonamiento algebraico. Incluyen objetos como tablas para organizar los datos, diagramas y gráficos de líneas para la construcción de argumentos. Se incluye también procesos matemáticos, como la grabación, recogida, representación y organización de datos, que se hayan producido en contextos que no implican de manera explícita razonamiento algebraico (por ejemplo, contextos estadísticos).

Por otro lado, según la propuesta "Early Algebra", los docentes han de suscitar la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas y crear un ambiente escolar en el que se valore que los alumnos exploren, modelicen, hagan predicciones, discutan, argumenten, comprueben ideas y también practiquen habilidades de cálculo (Blanton y Kaput, 2004, 2005). Stephens (2008) considera que sería conveniente que los maestros pensaran el álgebra como una "forma de pensamiento" y no como una lista de procedimientos a seguir, por lo que es necesario que los maestros de la escuela elemental reconceptualicen la aritmética para poder desarrollar en el aula actividades algebraicas adecuadas para fomentar el razonamiento algebraico en los niños de la escuela primaria (Warren 2009).

Así, con la reforma del álgebra que pretende el desarrollo del razonamiento algebraico en la escuela elemental, los maestros de primaria están en la ruta crítica para esta reforma longitudinal, pues todavía tienen poca experiencia con las ricas y conectadas actividades para generalizar y formalizar (Kaput y Blanton, 2001). Aunque este cambio impone grandes exigencias a los alumnos y a los profesores, como catálisis de crecimiento conceptual, vale la pena el esfuerzo (Carraher, Schliemann, y Schwartz, 2006).

Para finalizar esta sección mencionamos los trabajos que se vienen realizando en la Universidad de Granada por Castro y Godino (Castro y Godino, 2008; Castro y Godino, 2009) sobre evaluación y desarrollo de competencias de análisis didáctico de profesores en formación sobre tareas de índole algebraica. Utilizando herramientas del enfoque ontosemiótico se han realizado investigaciones para evaluar las competencias iniciales de razonamiento algebraico elemental de futuros profesores de educación primaria, así como experiencias orientadas a promover el desarrollo de dichas competencias.

Asimismo, el libro de texto Godino y Font (2003) para la formación matemática y didáctica de futuros profesores en el área del razonamiento algebraico es una aportación relevante, teniendo en cuenta la escasez de esta clase de bibliografía en el panorama internacional y la importancia que tiene la formación de profesores para la mejora del razonamiento algebraico en la escuela.

CAPITULO 3

CARACTERIZACIÓN DEL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO ELEMENTAL EN EL MARCO DEL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

3.1 INTRODUCCION

La enseñanza y el aprendizaje del álgebra, es reconocida por la investigación didáctica como particularmente conflictiva para los estudiantes. Al respecto diversos autores han realizado varias propuestas para hacer frente a la problemática que representa el álgebra para los estudiantes. En este sentido, destaca la propuesta "Early algebra" que pone énfasis en desarrollar el razonamiento algebraico en la escuela elemental, en particular, fomentar las situaciones de índole relacional, así como al uso, con frecuencia implícito, de ciertas propiedades estructurales de los sistemas numéricos. Además se reconoce que las situaciones y prácticas algebraicas pueden implementarse apoyadas en el uso de un lenguaje natural, y otras formas no analíticas de expresión. La propuesta "Early-Algebra" va acompañada de una amplia concepción del álgebra que engloba el estudio de relaciones funcionales, el estudio y generalización de patrones y relaciones numéricas, el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, el desarrollo y la manipulación del simbolismo, y la modelización como dominio de expresión y formalización de generalizaciones (Schliemann, Carraher, Brizuela, y Earnest, 2003).

Diversas investigaciones han tratado de explicitar los rasgos característicos del álgebra (formal, incluyendo así sus formas "maduras"), habiendo un cierto consenso en destacar la generalización como un proceso clave de la misma, y por tanto la noción de variable, ya que como afirma Dörfler (1991), "*generalizar significa construir variables*" (p.84). Otro rasgo característico del álgebra es el tratamiento de situaciones en las cuales intervienen cantidades o valores indeterminados, esto es, el uso de incógnitas y ecuaciones que modelizan dichas situaciones y que mediante el cálculo (algebraico) se da respuesta a las mismas. Tanto para las situaciones que requieren generalización como para el manejo de las incógnitas, se utiliza una forma analítica de expresión característica y eficaz, usualmente alfanumérica.

Sin embargo, como lo señala Blanton y Kaput (2001) se necesita una visión más amplia y más profunda del álgebra que pueda proporcionar a las matemáticas escolares la misma profundidad y poder que las múltiples facetas del álgebra han proporcionado históricamente a las matemáticas, y que pueden apoyar la integración del razonamiento algebraico en todos los grados y todos los temas.

A continuación se desarrolla una caracterización del álgebra y del razonamiento que le acompaña mediante el uso de las herramientas que proporciona el enfoque ontosemiótico y que considera las aportaciones realizadas sobre el álgebra y su inclusión en los niveles elementales.

3.2 CARACTERIZACIÓN DEL ALGEBRA EN LA ESCUELA ELEMENTAL EN EL MARCO DEL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

En el marco del enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático (EOS) (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007) se han introducido algunas nociones que pueden permitir la caracterización de la práctica algebraica.

En esta sección proponemos una caracterización del álgebra en términos de los tipos de objetos y procesos que intervienen en la práctica matemática. La actividad matemática, algebraica o de otro tipo, tiene lugar cuando una persona aborda la solución de cierto tipo de problemas o tareas, realizando determinadas prácticas operativas y discursivas. En dichas prácticas intervienen elementos de naturaleza diversa, en particular, medios de expresión, reglas conceptuales, procedimentales, proposiciones y justificaciones. En consecuencia, la caracterización de una práctica, y el pensamiento que la acompaña, como de índole algebraica habrá que hacerla en términos de la presencia de los tipos de objetos y de procesos que intervienen en la misma.

En el EOS se propone una tipología de objetos que intervienen y emergen de las prácticas matemáticas. La figura 3.1 resume los seis tipos de objetos primarios y vamos a utilizarla como pauta para indagar los tipos de “objetos algebraicos”.

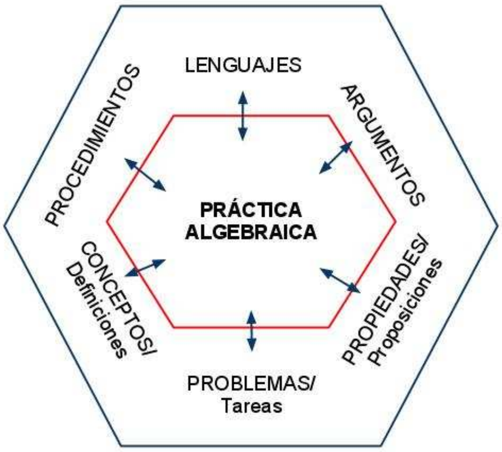


Figura 3.1 Objetos implicados en la práctica algebraica

La consideración de una práctica matemática como de índole algebraica puede hacerse con base a la presencia de cierto tipo de objetos, usualmente considerados en la literatura como algebraicos. Estos pueden ser conceptos, procedimientos, propiedades, argumentos, expresados preferentemente con un lenguaje simbólico - literal. Así tomando en cuenta que el álgebra demanda de los estudiantes una visión relacional del signo igual si se quiere dar algún sentido a ecuaciones más complicadas, con operaciones en ambos lados, significado que no se consigue si sólo se posee un conocimiento operativo del sigo igual como "el total" o "la respuesta" (Hattinkudur y Alibali's, 2010), es que se considera que el pensamiento relacional juega un papel esencial en el desarrollo del pensamiento algebraico (Slavit, 1998). Al igual que el desarrollo del pensamiento relacional, resulta importante enseñar a los estudiantes a ver los procesos y operaciones de manera holística, y subrayando las relaciones entre los números en lugar de centrarse principalmente en la respuesta (Stacey y MacGregor, 1997). Lo anterior nos llevó a considerar como tipos de objetos algebraicos primarios:

1) Relaciones binarias (de equivalencia o de orden) y sus respectivas propiedades (reflexiva, simétrica, transitiva; antisimétrica, etc.).

2) Relaciones entre operaciones y sus propiedades, realizadas sobre los elementos de conjuntos de objetos diversos (números, transformaciones geométricas, etc.). El denominado cálculo algebraico se caracteriza por la aplicación de propiedades tales

como asociativa, conmutativa, distributiva, existencia de elemento neutro y de un inverso. Pueden intervenir también otros conceptos como ecuación, inecuación, incógnita, variable, así como procedimientos tales como, eliminación, trasposición de términos, factorización, desarrollo de términos, entre otros.

Además de los anteriores objetos algebraicos, y teniendo en cuenta los puntos de vista de Berdnarz, Kieran y Lee (1996), Kaput (1998, 2000) y el NCTM (2000) en relación a que el estudio de las funciones es un componente característico de la actividad algebraica y una herramienta potente en la escuela elemental, y teniendo en cuenta, además, que las operaciones aritméticas se pueden ver como funciones (Carpenter y Levi, 2000) proponemos, como objetos algebraicos primarios:

3) Funciones, sus tipos, operaciones con funciones, y propiedades; funciones proposicionales (verdadero/falso); fórmulas, parámetros.

Apoyándonos en el hecho de que el conocimiento de la estructura matemática resulta de vital importancia para tener éxito en el estudio del álgebra (Warren, 2003), pues como lo señala Usiski, (1999) el estudio de las estructuras es un componente característico de la actividad algebraica, establecemos también, como objetos primarios los siguientes:

4) Estructuras y sus tipos (semigrupo, monoide, semimódulo, grupo, módulo, anillo, cuerpo, espacio vectorial, etc.) propias del álgebra superior o abstracta.

En el marco del EOS las prácticas matemáticas y los objetos que intervienen en las mismas se pueden contemplar desde distintos puntos de vista, según el contexto o el juego de lenguaje en que tienen lugar dichas prácticas. La figura 3.2 resume dichos puntos de vista, representados como pares de dualidades para indicar las relaciones dialécticas que se establecen entre las mismas. De estas dualidades se potencia el uso de tres de ellas que a continuación se explican:

Figura 3.2 Relatividad contextual de la práctica algebraica

La dualidad *intensivo-extensivo*. Considerando que los procesos de generalización y progresivamente la formalización de una generalidad son fundamentales para el desarrollo del pensamiento algebraico (Blanton y Kaput, 2003), se considera este aspecto como parte fundamental de nuestra caracterización, pero a través de la identificación de objetos intensivos y de objetos extensivos que proporcionan un análisis más profundo. Un objeto se dice que es *extensivo* si interviene en una práctica matemática como un ejemplar particular, mientras que se dice que es *intensivo* si interviene como un tipo, clase o generalidad. Estos atributos de los objetos matemáticos, emergentes de los procesos duales de particularización y generalización, son relativos al juego de lenguaje en que participan, y no entidades absolutas. Por ejemplo, en el estudio de las funciones, $y = 2x + 1$, sería una función particular perteneciente a la clase o tipo de funciones lineales, $y = mx + n$; esta última expresión será un objeto intensivo. No obstante, en el estudio de las funciones polinómicas, la función lineal, $y = mx + n$, será un caso particular (un extensivo) de dicha clase de funciones (un intensivo).

La función lineal particular, $y = 2x + 1$, está constituida a partir de otros extensivos, los números 2, 1, la operación de sumar números reales, así como de otros intensivos, como es el conjunto R de números reales sobre el que toma valores la variable independiente x y la dependiente y de dicha función. Asimismo, al pedir a los alumnos que continúen la serie de números, 1, 3, 5, 7, 9, …, y encuentren la "ley general" que siguen, esperamos que nos digan algo así como $2x + 1$. Los números particulares 1, 3, 5,… son objetos extensivos, mientras que la regla general, y la serie completa de números impares, resultado del proceso de generalización, es un objeto de naturaleza intensional.

Esta manera de abordar el estudio de la generalización (y el proceso dual de particularización) muestra claramente el carácter relativo y contextual de tales procesos, así como la existencia de distintos niveles o grados de generalización. De la misma manera que los elementos de un conjunto pueden ser otros conjuntos, los objetos intensivos pueden dar lugar a nuevos objetos intensivos de mayor generalidad.

La creación de objetos intensivos está íntimamente relacionada y dependiente de otro proceso primario como es el de *simbolización*, parte esencial del razonamiento algebraico que permite que los objetos matemáticos sean más asequibles a la reflexión (NCTM, 2000). En el estudio de la función $y = 2x + 1$, el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ está representado (aquí de manera tácita) por las letras x e y, las cuales se consideran como *variables* que "toman" valores en $\mathbb{R}$. Dado que $\mathbb{R}$ es un conjunto estructurado con unas operaciones que cumplen determinadas propiedades, la expresión simbólica, $2x + 1$ interpretable en el cuerpo algebraico $\mathbb{R}$, ha producido un objeto de un nuevo orden de generalidad que es la función lineal.

La dualidad *unitario – sistémico* permite describir los procesos mediante los cuales una entidad compuesta o sistémica (un intensivo) pasa a ser vista como una entidad unitaria (proceso de reificación, entificación, objetivación). Una vez que un intensivo es visto como una entidad unitaria podrá participar en otros procesos de generalización y dar lugar a intensivos de orden superior.

Asimismo, la dualidad *ostensivo – no ostensivo* aporta una nueva comprensión de los procesos de generalización, a los objetos intensivos resultantes, y a los "artefactos" que necesariamente deben intervenir para que tenga lugar la generalización. Con la ostensión nos referimos a los medios semióticos de objetivación (Radford, 2003), a los recursos perceptivos de expresión (simbólicos, o de cualquier otro tipo). Usualmente los objetos matemáticos (conceptos, proposiciones, etc) se consideran objetos ideales o mentales, o sea, objetos no ostensivos. Sin embargo, su "producción" y comunicación tiene que hacerse con la intervención de objetos perceptibles (objetos ostensivos) como lo sería a través del uso de palabras (Golding y Kaput, 1996), de representaciones gráficas o figurativas, imágenes, iconos, sistemas alfanuméricos (Font, 2000) y algebraicos (ecuaciones, etc.), de figuras geométricas y representaciones sinónimas (Castro y Castro, 1997). Las generalidades o abstracciones, sean conceptos, procedimientos, propiedades, son en sí mismas no ostensivas, pero su toma de conciencia y manipulación por el sujeto requiere el uso de símbolos ostensivos.

Los objetos y procesos algebraicos descritos aportan criterios para distinguir distintos tipos de configuraciones algebraicas, las cuales permitirán discriminar diferentes tipos y grados de algebrización de la actividad matemática. Habrá tareas matemáticas que pongan en juego de manera específica relaciones binarias, operaciones, funciones, estructuras, sugiriendo la definición de configuraciones de tipo relacional, operacional, funcional, estructural. También habrá tareas cuyo foco de atención será la transformación entre distintos modos de expresión, particularmente entre los lenguajes natural, icónico, gestual, etc., a lenguaje simbólico - literal (configuración de tipo transformacional).

La consideración de los procesos de particularización - generalización, y los objetos secundarios que se generan en los mismos, o que intervienen o se aplican en los mismos, aporta un nuevo criterio de clasificación de las configuraciones algebraicas. La presencia de objetos intensivos en una práctica matemática nos sirve para reconocer indicios de un cierto nivel de abstracción o generalización. La emergencia de los objetos intensivos atraviesa por distintos momentos o etapas cada una de las cuales le aporta distintos niveles o capas de generalidad. Un número, 3, una figura geométrica, el triángulo, se presenta como entidad unitaria, ideal, abstracta, general; pero al mismo tiempo su construcción, idealización, abstracción, reificación, pasa por distintos momentos y contextos, cada uno de los cuales le impregna de significados parciales.

La presencia de objetos intensivos (generalidades, conceptualizaciones, abstracciones), en alguno de sus niveles o capas de generalidad, será un rasgo característico de actividad algebraica elemental. Entendida el álgebra de esta manera, supone ampliar su presencia en las matemáticas escolares, ya que en las primeras actividades matemáticas, como pueden ser las de conteo de colecciones de objetos realizados por niños de preescolar hay procesos de generalización - conceptualización.

Un criterio adicional de clasificación de las configuraciones algebraicas se deriva del hecho de que las prácticas matemáticas pueden ser orientadas al objetivo de generar nuevos objetos intensivos (prácticas generativas), o simplemente a la aplicación de objetos intensivos (prácticas de aplicación).

En el modelo de caracterización de la práctica algebraica (ver Figura 3.3) se resume los criterios o variables que describen los tipos de configuraciones algebraicas presentes en la actividad matemática de acuerdo con el análisis que acabamos de presentar.

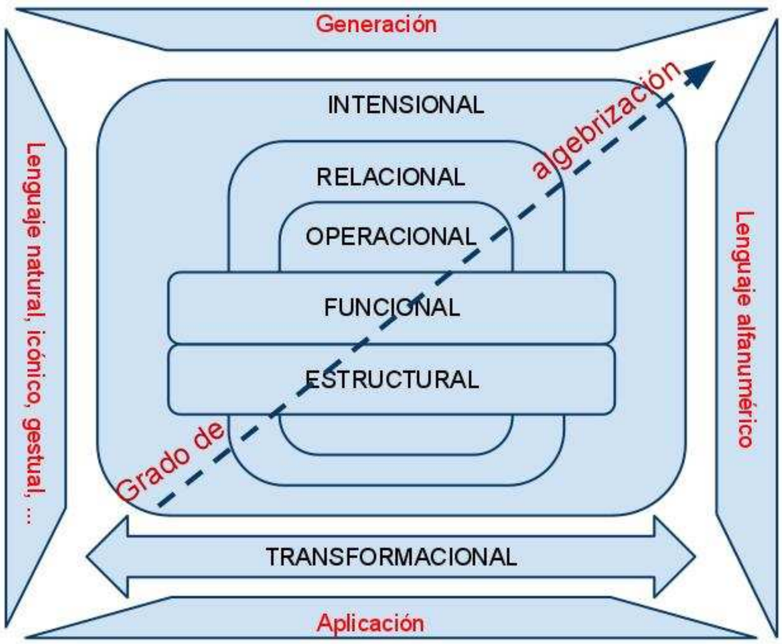


Figura 3.3 Variables que caracterizan la actividad algebraica

La aplicación sistemática de este esquema da lugar a una tipología de configuraciones algebraicas. La configuración algebraica y sus tipos, es entendida en este documento como el sistema semiótico formada por la red de objetos y procesos que intervienen en la solución de las tareas sobre las cuales se centran las prácticas.

En el nivel más básico o primario de algebrización estará la configuración intensional (generativa o aplicativa), expresada con lenguaje natural, icónico, gestual. El uso de lenguaje alfanumérico, junto con objetos algebraicos de tipo relacional, operacional y estructural marcarán niveles más avanzados de algebrización.

Las actividades usadas en las investigaciones sobre “pensamiento relacional” (Carpenter et al, 2003, Stephens, 2006) son de tipo mixto, relacional-operacional ya que en ellas intervienen secuencias de operaciones aritméticas combinadas con el signo igual en su acepción de relación de equivalencia, y requieren la aplicación de propiedades generales de las operaciones aritméticas (asociativa, conmutativa, distributiva). En su mayoría son de tipo aplicativo y expresadas con lenguaje simbólico - aritmético.

Describimos a continuación ejemplos de tareas matemáticas analizadas usando el modelo anteriormente descrito, ejemplificando las configuraciones básicas:

Configuración intensional

Si un niño se le propone la siguiente tarea:

> “Pinta de color rojo los triángulos, de verde los círculos (redondos), de azul los cuadrados, de amarillo los rectángulos y de negro los rombos”.

Si el estudiante la resuelve correctamente podemos afirmar que ha generalizado o abstraído aspectos figurativos de los conceptos generales de triángulo, círculo, cuadrado, rectángulo y rombo, y los está aplicando al caso particular de los dibujos que se le presentan.

Asimismo, el niño que responde a la pregunta, ¿Cuántas canicas tienes?, mostrando cinco dedos, pronunciando la palabra “cinco”, o escribiendo el símbolo 5, ha realizado un proceso de generalización o abstracción, por lo que podríamos decir que ha alcanzado un cierto nivel de “razonamiento algebraico”. Ciertamente que aún puede que no sea capaz de relacionar y operar con tales objetos intensivos usando el recurso de los símbolos numéricos, pero no se puede negar que ha desarrollado una cierta capacidad de generalización. Un primer grado de algebrización se debe reconocer, por tanto, asociado a la presencia de objetos intensivos (configuración intensional).

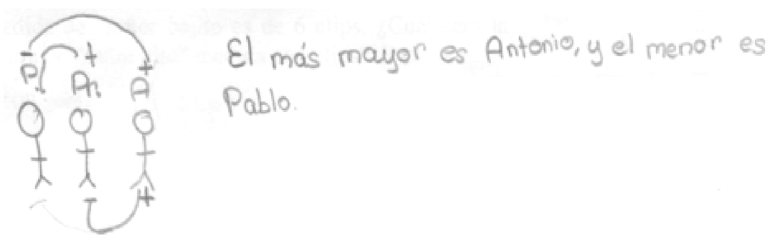
No es necesario representar con símbolos literales los objetos intensivos para que dichos objetos intervengan en una práctica matemática. El uso de símbolos literales será necesario, o al menos, de gran utilidad para representar intensivos de mayor nivel de generalidad. Por ejemplo, el número 428 es una forma eficiente de representar cuatro centenas, dos decenas y ocho unidades, esto es, $4 \times 100 + 2 \times 10 + 8$. Si esta expresión se presenta a los estudiantes como un ejemplo de la expresión más general, $a \times 10^2 + b \times 10 + c$, estamos introduciéndoles en un primer nivel de razonamiento algebraico. A su vez la expresión polinómica, $a \times 10^2 + b \times 10 + c$, se puede presentar como un caso particular de la expresión polinómica general de cualquier número en base 10, o en otra base diferente. También se puede generalizar al caso en que las potencias de la base sean negativas, esto es, para representar números decimales.

Configuración relacional

Veamos el siguiente problema resuelto de dos maneras diferentes. En ambos casos se moviliza una configuración de tipo relacional, pero la primera solución se puede calificar de "más algebraica":

Problema: Tres amigos, Pedro, Antonio y Pablo, no se ponen de acuerdo sobre su edad. Pedro es más viejo que Pablo; Pablo es más joven que Antonio; Antonio, a su vez, es más viejo que Pedro. ¿Quién tiene más edad?, ¿Y menos?

Solución 1: La Figura 3.4 muestra la solución dada por un niño.



Transcripción:

El más mayor es Antonio, y el menor es Pablo.

Figura 3.4 Solución del problema de las edades

En esta resolución podemos reconocer rasgos de razonamiento algebraico de tipo relacional, según la definición dada. Las edades de Pedro, Antonio y Pablo son desconocidas; sus valores pueden variar dentro de un rango. El conjunto de valores posibles de cada una de las edades es un objeto intensivo. Entre las edades hay relaciones de desigualdad; la comparación de las edades requiere poner en juego la propiedad transitiva de la relación de orden en el conjunto numérico de los naturales aplicada a conjuntos de valores. Se aprecia el uso de recursos gráficos - un arco - para vincular las edades que se comparan, y el uso de los símbolos “más” y “menos” para indicar “mayor” y “menor” respectivamente.

Solución 2: Pedro es más viejo que Pablo, por ejemplo, Pedro tiene 15 años y Pablo 12. Antonio es más viejo que Pedro, por ejemplo, 16 años. O sea, Pablo es el más joven y Antonio el más viejo.

Esta solución se basa en valores particulares dados a las edades; son objetos extensivos. No obstante, esta solución también requiere movilizar una propiedad algebraica, la transitividad de la relación de orden en $\mathbb{N}$, aquí particularizada en la comparación de los tres números, 12, 15 y 16. El modo de razonamiento de la solución 1 se puede considerar más algebraico que el de la solución 2 al poner en juego más cantidad de objetos intensivos y el esbozo de una notación simbólica.

Configuración operacional

Problema: Un estudiante recibió de sus padres una cierta cantidad de dinero para comer durante 40 días. Sin embargo, encontró sitios en donde pudo ahorrar 4 euros al día en la comida. De esta forma, el presupuesto inicial le duró 60 días. ¿Cuánto dinero recibió?

Una estudiante, Beatriz, resolvió el problema de la siguiente manera:
Sea X el dinero recibido de los padres. Representamos por x el gasto diario previsto por los padres para comer 40 días. $x = \frac{X}{40}$.
Sea y el gasto diario real, que permitió comer 60 días: $y = \frac{x}{60}$
$40x = 60y$; además $y = x - 4$;
$40x = 60(x - 4)$; $20x = 240$; $x = 12$; cantidad recibida: $12.40 = 480$; 480€

El problema anterior es un ejemplo de tarea que pone en juego una configuración de tipo operacional. Se utilizan letras para representar las incógnitas, las relaciones se establecen mediante una ecuación, se opera con las incógnitas aplicando las definiciones y propiedades de las operaciones aritméticas.

Se puede calificar de configuración operacional, aplicativa (se aplican los conceptos de incógnita y ecuación, el conjunto de valores posibles de las incógnitas), implicando la transformación del enunciado dado en lenguaje natural a lenguaje alfanumérico.

Configuración relacional- operacional

Problema: ¿Qué número hay que poner en lugar de [ ] en la expresión, 67 + 83 = [ ] +82?

Solución: Un alumno puede resolver la tarea sumando y restando 1 al primer miembro de la igualdad, 67+1+83-1, obtiene 68 + 82; a continuación resta 82 a ambos miembros y obtiene [ ] = 68.

De este modo aplica propiedades generales de la relación de equivalencia y la propiedad asociativa de la adición.

Este modo de pensar y de resolver tareas con expresiones numéricas se conoce en la bibliografía sobre “Early Algebra” como características del pensamiento relacional[1]. Esto no tiene lugar si un alumno realiza la suma del primer término y después resta 82; obtiene el resultado 68, pero en este caso pone en juego hechos numéricos particulares.

Se trata de una configuración de tipo relacional – operacional, aplicativa, expresada con lenguaje ordinario y numérico.

Problema: Encuentra los valores que hacen cada una de las siguientes sentencias numéricas verdaderas: $44 + 29 = 45 + a$; $65 + 38 = 62 + b$; $99 + 87 = 98 + 86 + c$.

Este ejemplo pone en juego también una configuración de tipo mixto, relacional y operacional, pero introduciendo el uso de notación simbólica literal.

Configuración funcional

El concepto central es el de función, vinculado a un patrón que se expresa gráficamente pero que puede ser expresado usando otros objetos ostensivos. En la solución al problema siguiente se pueden reconocer los conceptos de variación, variable independiente, variable dependiente.

Problema: Una bacteria se reproduce por reproducción celular. De cada una se obtienen dos. ¿Cuántas bacterias formarán parte de la cuarta generación? ¿Y en la quinta generación? ¿Y en la generación número 100?

[1] Se trata de un uso excesivamente restrictivo de la expresión “pensamiento relacional” al tratarse sólo de tareas que involucran el uso de números y operaciones aritméticas. La idea de comprensión relacional de Skemp puede estar en la base del uso de esta caracterización de las actividades algebraicas elementales, la cual se aplica al aprendizaje de cualquier contenido matemático.

Se establece una dependencia funcional entre la generación (variable independiente) y el número de bacterias correspondiente (variable dependiente). El lenguaje es aritmético y se pretende generar la regla general, o criterio de la correspondencia, al cual se puede llegar por multiplicaciones sucesivas y subsecuentemente, por el reconocimiento del uso de potencias. Lo que podría desembocar en la expresión funcional que establece que a la generación "*n*" le corresponde 2^n bacterias.

Calificamos esta configuración como de tipo funcional, generativo (se debe reconocer el criterio general de la correspondencia), expresada con lenguaje natural y numérico.

Configuración estructural

Intervienen como objetos centrales las propiedades estructurales de las operaciones.

En libros de primaria encontramos elementos teóricos que suponen el inicio de una reflexión sobre la estructura algebraica de los conjuntos y operaciones con números. Tal es el caso de los enunciados generales de las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de las operaciones aritméticas y su aplicación a la solución de problemas, como en Ferrero y cols (1999)[2].

Las propiedades de la suma

Propiedad conmutativa El orden de los sumandos no altera la suma	*Propiedad asociativa* Para sumar tres números, sumamos dos cualesquiera de ellos y el resultado se suma con el tercero.

Relaciones entre los términos de la resta

Para comprobar si una resta está bien hecha se suma el sustraendo con la diferencia y el resultado debe ser el minuendo	M - S = D S + D = M M - D = S
En una resta, la diferencia no varía cuando se suma o se resta un mismo número al minuendo y al sustraendo	

Propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de la multiplicación

Propiedad conmutativa En una multiplicación, el orden de los factores no altera el resultado	*Propiedad asociativa* Para multiplicar tres números, se multiplican primero dos de ellos y el resultado por el tercero

Propiedad distributiva

El producto de una suma por un número es igual a la suma de los productos de cada sumando por ese número	El producto de una diferencia por un número es igual a la diferencia de los productos de cada término por ese número

[2] Ferrero y cols (1999*). Matemáticas 5.*Madrid: Anaya.

3.1 INSTRUMENTO PARA VALORAR EL GRADO DE ALGEBRIZACIÓN EN UNA PRACTICA MATEMÁTICA

Considerando el modelo para la caracterización de la práctica algebraica (figura 3.3) planteado desde el enfoque ontosemiótico se ha diseñado un instrumento para la valoración del grado de algebrización de la actividad matemática. Este instrumento denominado Guía de Reconocimiento de Objetos y Procesos Algebraicos (ver Tabla 3.1) posibilita la identificación de las variables que definen la presencia del álgebra.

		Variable	Valores
1	Intensional	Tipo de intensivos	Ausencia Generación de intensivos Aplicación de intensivos
2	Lenguaje	Tipo de lenguaje	Lenguaje natural Símbolo – literal Numérico Gráfico Tabular Icónico Gestual
3	Relacional	Relaciones binarias y propiedades	Ausencia de relaciones binarias Igualdad como resultado de operación Igualdad como equivalencia de expresiones Relación de orden
4	Operacional	Operaciones y propiedades	Ausencia de operaciones y propiedades Operaciones aritméticas
5	Funcional	Patrones y funciones	Ausencia de patrones y funciones Patrón aritmético Patrón geométrico Patrón pictórico
6	Estructural	Estructuras y sus propiedades	Ausencia de estructuras Semigrupo Monoide Grupo Anillos Cuerpos Espacios Vectoriales

Tabla 3.1: Guía de Reconocimiento de Objetos y Procesos Algebraicos

La Guía proporciona un análisis de la tarea algebraica, de modo que la presencia o ausencia de determinadas variables permiten establecer un menor o mayor grado de algebrización de la tarea analizada y el tipo correspondiente, proporcionando información, en la que el profesor puede basarse para la elección adecuada de las tareas que pretende proponer a los estudiantes.

3.2 LA GUIA DE RECONOCIMIENTO DE OBJETOS Y PROCESOS COMO RECURSO PARA EL PROFESOR DE MATEMATICAS

Sin duda alguna el profesor juega un papel importante en el desarrollo de los conocimientos de los estudiantes. Un punto crucial es la elección de las tareas que los profesores proponen a sus estudiantes con la finalidad de fomentar en ellos la reflexión sobre los objetos matemáticos. En este sentido la herramienta desarrollada a partir del Enfoque Ontosemiótico puede permitir al profesor juzgar el carácter algebraico de las tareas y seleccionar aquellas que proporcione un mayor grado de algebrización. Las variables y valores que caracterizan el razonamiento algebraico elemental, según el modelo propuesto en este capítulo, pueden servir de base al profesor para modificar adecuadamente las tareas de los libros de texto, a fin de promover progresivamente el pensamiento algebraico de sus alumnos.

Esto, no obstante, supone un reto para la formación de profesores ya que dicha formación debe contemplar de manera sistemática la visión ampliada del álgebra que hemos desarrollado en este trabajo, que exige por parte de los profesores un cambio en su concepción acerca del álgebra y focalizar su atención en las conexiones existentes entre el álgebra y la aritmética ofreciendo oportunidades para el desarrollo del razonamiento algebraico elemental a través de tareas que permiten reconocer estructuras, el carácter relacional del signo igual, identificación de patrones que lleven a la generalización, etc. Los profesores requieren desarrollar habilidades para “algebrizar” ejercicios que se encuentran en los libros de texto, e identificar aspectos de la red de conceptos y significados algebraicos que podrían ser puestos en juego durante la actividad matemática.

A manera de síntesis se puede decir que el desarrollo del razonamiento algebraico en los niños de la escuela elemental, implica un cambio en el modo de concebir el álgebra, en las tareas propuestas a los estudiantes y, en el modo en que los profesores llevan a cabo su práctica docente.

CAPITULO 4

CONCLUSIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

El álgebra suele plantear muchísimos problemas a los estudiantes al momento de aprender ese metalenguaje, altamente codificado: aparecen las letras que, muchas veces son utilizadas como objetos, otras como números generalizados, como variables, como incógnitas, etc.; la palabra “igual” es utilizada con múltiples significados y su uso implica la reversibilidad de su lectura, la simetría y la transitividad en su aplicación; la traducción de enunciados del lenguaje natural al lenguaje algebraico. EL conflicto que representa el aprendizaje del álgebra para los estudiantes implica el desafío de encontrar nuevas maneras de hacer que el poder del álgebra esté a disposición de todos los estudiantes, encontrar formas de enseñanza que creen ambientes de clase que permitan a los estudiantes aprender con comprensión . Es necesario seguir varias líneas de cambios sobre lo que ya sabemos de la enseñanza y aprendizaje del álgebra, entre las que se puede mencionar: Comenzar temprano e incluir diversas formas de pensamiento algebraico. Se propone, así, el álgebra como una componente transversal del currículo y como un elemento clave para dar coherencia, profundidad y poder a las matemáticas escolares de manera que se elimine la introducción tardía y abrupta del álgebra formal (Kaput, 1998).

Al introducir el álgebra en el currículo de primaria se hace necesaria una concepción específica y global que permita reconocer el álgebra hasta en su forma más primitiva. Por tal motivo, en este trabajo hemos tratado de elaborar un modo de ver la práctica algebraica, y el pensamiento que la acompaña, desde una perspectiva global. Para ello hemos aplicado algunas nociones del Enfoque Ontosemiótico, el cual mediante la adopción de supuestos pragmatistas, antropológicos y semióticos sobre el conocimiento matemático, permite tener en cuenta los diversos objetos, procesos y facetas que intervienen en la actividad matemática.

El álgebra, entendida desde la perspectiva del EOS, es una forma de pensar y actuar en matemáticas caracterizada esencialmente por la dialéctica entre los procesos de generalización - particularización, y en consecuencia por la intervención y emergencia de objetos intensivos de niveles progresivos de generalidad. Los procesos de algebrización no solamente se pueden aplicar a tareas propias de la aritmética, sino pertenecientes también a la medida, la geometría, y el análisis de datos. El álgebra es más que un instrumento de modelización y más que un lenguaje simbólico; es una forma de pensar y actuar en matemáticas, una actitud a generalizar, y por tanto, a simbolizar y operar con símbolos, que penetra todas sus ramas y las impulsa hacia nuevos niveles de creatividad. El razonamiento algebraico elemental, es por tanto, un sistema de prácticas operativas y discursivas puestas en juego en la resolución de tareas abordables en la educación primaria en las cuales intervienen objetos y procesos algebraicos, muchos de ellos en su forma primitiva (simbolización, relación, variables, incógnitas, ecuaciones, patrones, generalización, modelación, etc.).

Aunque no podamos dar una respuesta definitiva al problema de caracterización del álgebra y que será necesario profundizar en la reflexión y el debate, consideramos que el desarrollo de este trabajo implica un paso importante.

4.1 Conclusiones relativas al Razonamiento Algebraico Elemental y sus implicaciones en la formación de profesores.

Sin duda alguna la “algebrización” del currículo de la escuela elemental, implica, como se ha mencionado antes, un cambio en la forma de concebir el álgebra y de las tareas propuestas a los niños, para promover en ellos el razonamiento algebraico. Sin embargo, realizar estos cambios no sería suficiente sin considerar una de las claves más importantes para la “algebrización” del currículo, el maestro, pues es él, quien necesita ser capaz de identificar y nutrir las raíces del razonamiento algebraico en formas que parecen muy diferentes de lo que se considera álgebra (Kaput, 2000). Como parte de esta postura, entonces los profesores de todos los niveles de Educación Primaria deben promover el pensamiento algebraico con el objetivo de facilitar el aprendizaje del álgebra y fomentar un aprendizaje con comprensión de las matemáticas.

Los profesores pueden promover el pensamiento algebraico ayudando a los alumnos a prestar atención a las propiedades, relaciones y patrones involucrados en todo tipo de actividades matemáticas, aunque no parezcan algebraicas a simple vista (Molina, 2007). En este sentido, el modelo de caracterización del razonamiento algebraico, propuesto en el Capítulo 3, puede jugar un papel importante en la formación de profesores, pues permite el análisis de la actividad algebraica en general; por su parte la Guía de Reconocimiento de Objetos y Procesos Algebraicos permite el análisis de tareas tanto para su re-diseño, así como el diseño de otras que potencien el razonamiento algebraico en los niños.

4.2 Cuestiones de investigación abiertas

El fomento del desarrollo del razonamiento algebraico en los niños de la escuela primaria, lleva a considerar el tipo de tareas que podrían ser utilizados para explotar las ideas matemáticas que la disciplina reconoce como "algebraicas" y examinar las características de estas tareas. Al respecto Blanton y Kaput (2002) mencionan que las tareas deben estimular el uso de los números y operaciones numéricas como objetos para el razonamiento algebraico; hacen hincapié en el hecho de que los números pueden ser usados algebraicamente cuando el tipo o medida del número elegido requiere que el estudiante piense sobre la estructura y la relación entre cantidades, y no simplemente operaciones aritméticas con cantidades. También deben involucrar secuencias de cálculos que podrían ser explotadas para comprometer a los estudiantes algebraicamente, de modo que se involucre al estudiante en un proceso más complejo que permita percibir el pensamiento algebraico. Por último, los autores mencionan que las tareas deben permitir la realización de acciones y situaciones familiares a los estudiantes. Como ejemplo de este tipo de tareas proponen:

Problema:
Si 5 personas en un grupo se estrechan las manos entre sí una vez, ¿cuántos apretones de manos habrá entre ellos? ¿Si hubieran seis personas en el grupo, cuántos apretones de manos se tendría? ¿Y si fueran siete personas? ¿Ocho personas? ¿Si se tuvieran 20 personas, cuántos apretones de manos habrá? Escribe con números las sentencias que muestren tu resultado. Muestra cómo obtuviste la solución.

La importancia que tienen las tareas en el desarrollo del razonamiento algebraico en los niños, es un punto de interés que lleva a considerar el análisis de las tareas presentes en los libros de texto como una cuestión abierta. En este sentido, resulta relevante esclarecer la naturaleza más o menos algebraica de las tareas incluidas en los libros de texto de la educación primaria, pues son la fuente de información en la que los profesores se basan para su enseñanza (Kieran, 1992). Esto lleva al planteamiento de la siguiente cuestión:

¿Qué rasgos algebraicos tienen las tareas comúnmente presentadas en los libros de texto de la educación primaria?

El evaluar los libros de texto de educación primaria respecto al "grado de algebrización" que presentan permite juzgar si las lecciones priorizan los aspectos procedimentales en vez fomentar aspectos relacionales, funcionales y estructurales del álgebra. También se favorece una caracterización de las actividades matemáticas presentes en los textos de primaria que se pueden proponer en el contexto del razonamiento algebraico en la escuela elemental. En este sentido el modelo desarrollado para el análisis de tareas matemáticas constituye una herramienta potente que se puede utilizar para la elección adecuada de las tareas presentes en los libros de texto, e incluso para su modificación y diseño.

Este hecho también tiene sus implicaciones en la formación de profesores, ya que el análisis de un libro de texto ha de ser una de las competencias contemplada en la formación de profesores, pues éstos moldean las prácticas instruccionales y la planeación curricular de los maestros. El análisis crítico de los textos escolares, la evaluación de su pertinencia, idoneidad, adecuación, etc. debe ser un componente importante en los programas de formación de profesores de matemáticas (Font y Godino, 2006).

REFERENCIAS

Alibali, M. W. (1999). How children change their minds: Strategy change can be gradual or abrupt. *Developmental Psychology, 35*, 127-145.

Alibali, M. W., Knuth, E. J., Hattikudur, S., McNeil, N. M., y Stephens, A.C. (2007). A longitudinal examination of middle school students' understanding of the equal sign and equivalence equations. *Mathematical Thiking and Learning,* 9(3), 221-247.

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14*(3), 24-35.

Arcavi, A. (2007). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 8*(44), 59-75.

Asquith, P., Stephens, A., Knuth, E., y Alibali, M. W. (2007). Middle school mathematics teachers´ knowledge of students´ understanding of core algebraic concepts:equal sign and variable. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(3), 249-272.

Becker, J. R., y Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. En H. L. Chick, y J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 4 (pp. 121-128). Melbourne: PME.

Bednarz, N., Kieran, C., y Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Blanton, M. L., y Kaput, J. J. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience Part II. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra* (Vol. 1, pp. 87-102). Melbourne: University of Melbourne, Australia.

Blanton, M. L., y Kaput, J. J. (2003). Developing elementary teachers´ "algebra eyes and ears". *Teaching Children Mathematics, 10*, 70-77.

Blanton, M. L., y Kaput, J. J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. J. Hoines, y A. B. Fuglestad (Eds), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 2 (pp. 135-142). Bergen: Bergen University College.

Blanton, M. L., y Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412.

Brown, T. (2001). *Mathematics education and language. Interpreting hermeneutics and post-structuralism*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Burkardt, H. (2001). Algebra for all: What does it mean? How are we doing? In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, y J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra*, Vol. 1 (pp. 140-146). Melbourne: University of Melbourne, Australia.

Butto, C., y Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: Abordaje basado en la geometría. *Educación Matemática*, *16*(1), 113-148.

Carpenter, T. P., Frankle, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically. Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carpenter, T. P., y Levi, L. (2000). *Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades*. (Res.Rep.00-2). Madison, WI: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. L. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En: F. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Vol. 2 (pp. 669-705). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Carraher, D. W., Martinez, M. V., y Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM, 40*(1), 3-22.

Carraher, D., Schliemann, A. D., y Brizuela, B. M. (2000). Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions. En M. L. Fernandez (Ed). Conferencia magistral presentada en el *22nd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Tucson, Arizona.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., y Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(2), 87.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., y Schwartz, J. L. (2007). Early algebra is not the same as algebra early. En J. Kaput. D. Carraher, y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 235–272). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Cañadas, M. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas*. Tesis Doctoral no publicada, Universidad de Granada, España.

Castro, E. (1994). *Exploración de Patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con Escolares de Primer Ciclo de Secundaria (12-14 años*). Tesis Doctoral no publicada, Universidad de Granada, España.

Castro, E., y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación secundaria en la escuela secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: Horsori Editorial.

Castro, W. F. y Godino, J. D. (2008). Evaluación del razonamiento algebraico elemental en futuros maestros: Un estudio exploratorio. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds), *Investigación en Educación Matemática. XII Simposio de la SEIEM* (pp. 273-282). Badajoz.

Castro, W. F. y Godino, J. D. (2009). Cognitive configurations of pre-service teachers when solving an arithmetic-algebraic problem. Paper presented at the meeting of the *CERME 6, Group 4: Algebraic Thinking.* Lyon, France.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. En, A. J. Bishop et al. (ed.), *Mathematical Knowledge: Its Growth Throught Teaching* (pp. 63-85). Dordrecht: Kluwer A.P.

Drijvers, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: design research on the understanding of the concept of parameter*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Utrecht, Utrecht. Descargado el 5 de abril de 2010 de http://igitur-archive.library.uu.nl/dissertations/2003-0925-101838/inhoud.htm

Duval, R. (1995). *Semiosis et Pensée Humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuals*. Berne: Peter Lang S.A. Editions scientifiques européennes.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1), 103-131.

Fernández, F. (1997). Aspectos históricos del paso de la aritmética al álgebra. Implicaciones para la enseñanza del lenguaje simbólico algebraico. *Revista de didáctica de las matemáticas*, 14, 75-91.

Filloy, E., y Rojano, T. (1989). Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 19-25.

Filloy, E., Puig, L., y Rojano, T (2008). *Educational algebra. A theorical and empirical approach*. New York: Springer.

Filloy, E., Rojano, T., y Solares, A. (2003). Two meanings of the “equal” sign and senses of comparison and substitution methods. En N. A. Pateman; B. J. Dougherty y J. T. Zilliox (Eds), *Proceedings of the 27th Conference International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4 (pp. 223-230). Honolulu: College of Education, University of Hawaii.

Font, V. (2000). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, *14*, 1-35.

Font, V., y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matematica Pesquisa, 8*(1), 67-98.

Font, V., Godino, J. D. y D’Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 27* (2), 2-7.

Freiman, V., y Lee, L. (2004). Tracking primary students'understanding of the equality sign. En M. J. Hoines y A. B. Fuglestad (Eds), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the International Group for the Psycology of Mathematics Education*, Vol. 2 (pp 415-422). Bergen: Bergen University College.

García-Cruz, J. A., y Martinón, A. (1998). Levels of generalization in linear patterns. Olivier, A., Newstead, K. (Eds). *Proceeding of the 22th Conference of the International Group for the Psycology of Mathematics,*Vol. 2 (pp 329-336). Stellenbosch: University of Stellenboch.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 22* (2), 237-284.

Godino, J.D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherche en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39* (1), 127-135.

Godino, J. D. y Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. (Recuperable en, http://www.ugr.es/local/jgodino/).

Godino, J. D., Font, V., y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(1), 133-156.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Lurduy, O. (2009). Systems of practices and configurations of objects and processes as tools for the semiotic analysis in mathematics education. *Semiotic Approaches to Mathematics, the History of Mathematics and Mathematics Education* - 3rd Meeting. Aristotle University of Thessaloniki, July 16-17, 2009.

Goldin, G. A., y Kaput, J. J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. En L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Golding, y B. Greer (Eds.), *Theories of Mathematical Learning* (pp. 397-430). Mahwah, NJ: Laurence Erlbaum Associates, Inc.

Harel, G., y Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematics, 11*(1), 38-42.

Hattikudur, S., y Alibali, M. W. (2010). Learning about the equal sign: Does comparing with inequality symbols help? Journal of Experimental Child Psychology, 107, 15-30.

Herbert, K., y Brown, R. H. (1997). Patterns as tools for algebraic reasoning. *Teaching Children Mathematics, 3*, 340-345.

Hewitt, D. (2003). Notation issues: Visual effects and ordering operations. In N. Pateman, B. J., Dougherty, y J. Zillox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the Group for the Psycology of Mathematics Education*, Vol. 3 (pp. 63-69). Honolulu: College of Education, University of Hawaii.

Jones, I., y Pratt, D. (2005). Three utilities for the equal sign. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3*, 185-192. Melbourne: PME.

Kaput, J. J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. En E. Von Glasersfeld (ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp 53-74). Dordrecht: Kluwer A. P.

Kaput, J. (1998). Teaching and Learning a New Algebra. In E. Fennema y T. A.Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp.133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J.J. (2000). *Transforming algebra from a engine of inequity fo an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*: National Center of Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. Dartmouth, MA.

Kaput, J., y Blanton, M. L. (2000). Algebraic reasoning in the context of elementarymathematics: Making it implementable on a massive scale. Presentado en el *Annual Meeting of the North American Educational Research Association,* Montreal,Canada.

Kaput, J., y Blanton, M. L. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience. En H. Chick, K. Stacey, J. Vicent., y J. Vicent (Eds), Artículo presentado en The Future of the Teaching and Learning of Algebra. *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference* Vol. 1 (pp. 344-350). Melbourne: University of Melbourne.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*(3), 317-326.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (390-419). New York: Macmillan

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator, 18*(1), 139-151.

Kieran, K. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. En F. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, 707-762). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., y Stephens, A. C. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence y variable 1. *ZDM, 37*(1), 68-76.

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., y Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(4), 297-312.

Kramarski, B., (2008). Promoting teachears' algebraic reasoning and self-regulation with metacognitive guidance. *Metacognition Learning*, *3*, 83-99.

Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in School*, *7*(4), 23-26.

Lannin, J. K. (2003). Developing algebraic reasoning through generalization. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *8*(7), 342-349.

Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: A definition of pre-algebra. *The Journal of Mathematical Behavior*, *14*(1), 113-120.

Lins, R., y Kaput, J. J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. En K. Stacey, H. Chick, y M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra. The 12th ICMI study* (pp. 47-70). Massachusetts, USA: Kluwer Academic Publishers.

MacGregor, M., y Stacey, K. (1997). Students'understanding of algebraic notation: 11–15. *Educational Studies in Mathematics*, *33*(1), 1-19.

McNeil, N. M., y Alibali, M. W. (2005). Why won't you change your mind? knowledge of operational patterns hinders learning and performance on equations. *Child Development*, *76*(4), 883-899.

McNeil, N. M., Grandau, L., Knuth, E. J., Alibali, M. W., Stephens, A. C., Hattikudur, S., et al. (2006). Middle-school students' understanding of the equal sign: The books they read Can't help. *Cognition and Instruction*, *24*(3), 367-385.

Molina, M. (2007). *Desarrollo del Pensamiento Relacional y Comprensión del Signo Igual por Alumnos de Tercero de Educación Primaria*. Tesis Doctoral no publicada, Universidad de Granada, España.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: Integración del pensamiento algebraico en educación primaria (Proposal of a curricular change: Integration of algebraic thinking in elementary education). *PNA: Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *3*(3), 135-156.

Molina, M., Castro, E., y Castro, E. (2009). Elementary students' understanding of the equal sign in number sentences. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *7*(1), 341-368.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.

Philipp, R. A. (1992). The many uses algebraic variables. *The Mathematics Teacher*, *85*(7), 557-561.

Pimm, D. (1987). *Speaking Mathematically*. New York: Routledge.

Prediger, S. (2010). How to develop mathematics-for-teaching and for understanding: The case of meanings of the equal sign. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13*(1), 73-93.

Presmeg, N. C. (1999). On visualization and generalization in mathematics. Hitt, F. y Santos, M. (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the 21st conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 1 (pp 23-27). Cuernavaca: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Universidad Autónoma del Estado de Morelos.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to studentes' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.

Radford, L. (2006). The anthropology of meaning. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1/2), 39-65.

Sfard, A., y Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification - the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2), 191-228.

Slavit, D. (1998). The role of operation sense in transitions from arithmetic to algebraic thought. *Educational Studies in Mathematics, 37*(3), 251-274.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147-164.

Stephens, A. C. (2006). Equivalence and relational thinking: Preservice elementary teachers' awareness of opportunities and misconceptions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *9*(3), 249-278.

Stephens, A. C. (2008). What "counts" as algebra in the eyes of preservice elementary teachers?. *The Journal of Mathematical Behavior, 27*(1), 33-47.

Tall, D. (1992). The transition from arithmetic to algebra: Number patterns or proceptual programming. *New Directions in Algebra Education*, 213-231.

Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the early primary years. En A. Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 18-30). London: Cassell.

Usiskin, Z. (1989). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford (Ed.), *The Ideas of Algebra K-12* (pp. 8-19). Reston, VA: NCTM.

Usiskin, Z. (1995). Why is algebra important to learn. *American Educator, 19*(1), 30-37.

Warren, E. (2003). The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra. *Mathematics Education Research Journal*, *15*(2), 122-137.

Warren, E., (2009). Early Childhood Teachers' Professional Learning in early algebraic thiking: A model that supports new knowledge and pedagogy. *Mathematics Education Research Journal, 9*, 30-45.

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D., y Lacasta, E. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 27*(79), 77.

Zazkis, R., y Liljedahk, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics, 49*(3), 379-402.

Anexo

Naturaleza del Razonamiento Algebraico Elemental[1]

Juan D. Godino, Walter F. Castro y Lilia P. Aké

Resumen

La introducción del razonamiento algebraico en educación primaria es un tema de interés para la investigación e innovación curricular en didáctica de las matemáticas, lo que supone una visión ampliada de la naturaleza del álgebra escolar. En este trabajo proponemos una manera de concebir el razonamiento algebraico basada en los tipos de objetos y procesos matemáticos introducidos en el enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático. En particular, la consideración de una práctica matemática como algebraica se basará en la intervención de procesos de generalización y simbolización, junto con otros objetos usualmente considerados como algebraicos, tales como relaciones binarias, operaciones, funciones y estructuras. Esta forma de concebir el álgebra elemental es contrastada con las caracterizaciones dadas por otros autores. Asimismo, proponemos una tipología de configuraciones algebraicas que permite definir grados de algebrización de la actividad matemática.

Palabras clave: álgebra escolar, educación matemática, enfoque ontosemiótico, configuración algebraica, grado de algebrización.

Abstract

The introduction of the algebraic reasoning in primary education is a subject of interest for research and curricular innovation in Mathematics Education, which supposes an extended vision of the nature of school algebra. In this paper we propose a way to conceive the algebraic reasoning based on the types of mathematical objggects and processes introduced in the onto-semiotic approach to mathematical knowledge. In particular, considering a mathematical practice as algebraic is based on the intervention of generalization and symbolization processes, along with other usually considered as algebraic objects, such as binary relations, operations, functions and structures. This way to conceive elementary algebra is based on and compared with the characterizations given by other authors. We propose also a typology of algebraic configurations that allows defining algebrization degrees of mathematical activity.

Title: The Nature of Elementary Algebraic Reasoning

Keywords: School algebra, mathematics education, onto-semiotic approach, algebraic configuration, degree of algebrization.

Soluciones aritmética y algebraica de tareas escolares

Un profesor propone a sus estudiantes el siguiente problema:

Problema 1: Un estudiante recibió de sus padres una cierta cantidad de dinero para comer durante 40 días. Sin embargo, encontró sitios en donde pudo ahorrar 4 euros al día en la comida. De esta forma, el presupuesto inicial le duró 60 días. ¿Cuánto dinero recibió?

Una estudiante, Beatriz, resolvió el problema de la siguiente manera:

> Sea X el dinero recibido de los padres. Representamos por *x* el gasto diario previsto por los padres para comer 40 días. $x = X/40$.
> Sea *y* el gasto diario real, que permitió comer 60 días: $y = X/60$
> $40x = 60y$; además $y = x - 4$;
> $40x = 60(x-4)$; $20x = 240$; $x = 12$; Cantidad recibida: $12.40=480$; 480€

Otro estudiante, Andrés, lo resolvió de esta otra manera:

[1] Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Trabajo en elaboración. Versión 28 Julio 2010.

> El ahorro de 4€/día durante 40 días previstos supone un ahorro total de 160€. Con esta cantidad pudo comer durante 20 días más. El coste diario real fue de 160€/20 días = 8€/ día. Como los días reales fueron 60, el presupuesto total será 60 días x 8€/día = 480€.

En este ejemplo parece que no hay ninguna dificultad en aceptar que la solución de Andrés se puede calificar de aritmética, mientras que la de Beatriz de algebraica. Beatriz usa letras para representar las cantidades desconocidas, y opera con ellas de acuerdo con ciertas reglas para obtener la solución. En cambio Andrés opera directamente con números naturales particulares a los cuales les aplica operaciones aritméticas (sumar, multiplicar y dividir).

Sin embargo, las fronteras entre el álgebra y la aritmética no son tan claras como las mostradas en las dos soluciones al problema 1. Veamos ahora este otro ejemplo:

Problema 2: Tres amigos, Pedro, Antonio y Pablo, no se ponen de acuerdo sobre su edad. Pedro es más viejo que Pablo; Pablo es más joven que Antonio; Antonio, a su vez, es más viejo que Pedro. ¿Quién tiene más edad?, ¿Y menos?

Andrés razonó de la siguiente manera:

> Como Antonio es más mayor que Pedro y Pedro es mayor que Pablo entonces Antonio es también mayor que Pablo, luego Antonio es el mayor. Como Pablo es más joven que Pedro y Pedro es más joven que Antonio entonces Pablo es el más joven.

¿Podemos calificar el problema 2 y la solución dada por Andrés como aritmética o como algebraica? ¿Sólo podemos considerar como solución algebraica aquella actividad matemática que involucra el uso de incógnitas, ecuaciones, símbolos literales y operaciones con dichos símbolos, como la realizada por Beatriz?

Estas cuestiones no son triviales ni intrascendentes, como mostraremos en este trabajo. No son triviales si tenemos en cuenta la abundante literatura existente donde se aborda esta problemática (Carraher y Schliemann, 2007; Kieran, 2007), tampoco son intrascendentes desde el punto de vista educativo ya que involucran diversas maneras de concebir la propia actividad matemática, así como su enseñanza y aprendizaje en la escuela.

Problemática del álgebra escolar

Diversas investigaciones (Wagner y Kieran, 1989; Bednarz, Kieran y Lee, 1996; Kieran, 2007) han evidenciado las dificultades de los niños en el tránsito desde la aritmética hasta el álgebra en la escuela secundaria. Estas investigaciones han señalado temas de investigación, así como aproximaciones al razonamiento algebraico que posteriormente definieron cuestiones de investigación específicas sobre la inclusión del álgebra en la escuela primaria.

De acuerdo con Kieran (1989, 1992), las dificultades de los estudiantes de secundaria se centran en el significado de las letras, el cambio de convenciones entre la aritmética y el álgebra, y el reconocimiento de la estructura. El álgebra, entendida de una manera restrictiva como lenguaje simbólico, y orientada básicamente a la resolución de ecuaciones y estudio de los polinomios, aparece de manera abrupta en secundaria, sin continuidad con los temas de aritmética, medida y geometría tratados en primaria. En esta aproximación, "se atribuyen las dificultades mostradas por los estudiantes adolescentes sobre el álgebra, en gran medida, a las limitaciones de cómo se introduce la aritmética y de manera más general la matemática elemental en primaria" (Carraher y Schliemann, 2007, 675).

En razón a la dificultad del álgebra, y a que las competencias algebraicas de carácter simbólico son el resultado de un proceso de maduración más general que se desarrolla a lo largo del tiempo (Santrock, 2001), se justifica que su enseñanza se inicie desde la escuela primaria (Carpenter et al. 2003). En este sentido diversos investigadores han apoyado la inclusión temprana del algebra en la escuela primaria (Davis, 1985; Vergnaud, 1989). Kaput (2000) hizo una propuesta, denominada "algebra for all", en la que sugiere tomar acción para "algebrizar" el currículo de la escuela primaria con el fin de promover al álgebra como facilitadora de una mejor comprensión de las matemáticas en lugar de ser inhibidora. La inclusión del razonamiento algebraico elemental en el currículo de la escuela primaria se ha denominado "Early álgebra", que en el caso de los Principios y Estándares 2000 (NCTM, 2000) se concretó en la recomendación de incluir el contenido de álgebra desde los primeros grados.

La inclusión del álgebra en el currículo de la escuela primaria reclama una concepción más amplia del razonamiento algebraico elemental[2], entendiendo que dicho razonamiento se puede poner de manifiesto no sólo en tareas relacionadas con la aritmética, la medida, la geometría o con el análisis de datos, sino que lo hace con diversos "grados" de algebrización. La presencia de los objetos y procesos reconocidos como algebraicos es gradual, sistemática y progresiva.

El enfoque del "Early álgebra" supone una problemática epistemológica y didáctica. En el ámbito de lo epistemológico la inclusión del álgebra en la escuela elemental supone un cambio del foco de atención desde los aspectos simbólicos y procedimentales hacia aspectos estructurales del razonamiento algebraico. Carraher y Schliemann (2007) afirman que la mayoría de los autores han trabajado sobre dimensiones específicas de interés y que relativamente pocos han tratado de caracterizar el campo de manera exhaustiva. "Cuando lo han intentado, la estructura categórica ocasionalmente exhibe inconsistencias y solapamientos. Por ejemplo, el desglose del álgebra en generalización, resolución de problemas, modelización, y funciones, mezcla procesos de razonamiento no disjuntos (generalización y resolución de problemas) con tópicos de matemáticas (funciones) y otro (modelización) (Bednarz, 1996) que puede ser entendido, bien como tema matemático o un conjunto de procesos de razonamiento" (p.676). Esta observación lleva a los autores citados a considerar que posiblemente el análisis del pensamiento algebraico está todavía en su infancia.

En cuanto a la problemática didáctica se abre un programa de investigación didáctica que aborde los problemas de aprendizaje y de enseñanza de las nuevas tareas y competencias algebraicas, entendidas bajo la nueva perspectiva, así como sobre la formación de profesores en este campo.

Avanzar en la clarificación de la naturaleza del razonamiento algebraico elemental es un tema complejo pero necesario desde el punto de vista educativo. Como afirma Radford (2000, p. 238), "necesitamos profundizar en nuestra propia comprensión de la naturaleza del pensamiento algebraico y la manera en que se relaciona con la generalización". La elaboración de un modelo comprensivo puede ayudar a articular coherentemente el currículo matemático escolar con los distintos niveles escolares, y facilitar el diseño de actividades instruccionales que favorezcan el surgimiento y consolidación progresivos del razonamiento algebraico.

En este trabajo abordaremos este problema utilizando algunas herramientas teóricas del "enfoque ontosemiótico" del conocimiento matemático (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). Consideramos, junto con diversos autores (Mason, 1996; Mason, Graham, Pimm y Gower, 1985; Carraher, Martínez y Schliemann, 2008; Cooper y Warren, 2008), que la generalización es un rasgo característico del razonamiento algebraico, así como los medios para simbolizar, tanto las situaciones de generalización, como las de indeterminación (uso de incógnitas y ecuaciones para modelizar situaciones). Asimismo, las nociones de relación, operación y estructura son propias del álgebra. En

[2] En principio usaremos la expresión "razonamiento algebraico elemental" (RAE) como traducción de "early algebra". No obstante, las características que proponemos para el RAE, en términos de tipos de tareas, objetos y procesos algebraicos implicados, permiten incluir en esta noción el álgebra de secundaria, reforzando de esta manera una visión integrada del álgebra escolar.

la siguiente sección analizamos brevemente estos rasgos característicos del álgebra. Posteriormente presentamos una visión integrada sobre el razonamiento algebraico elemental, que tiene en cuenta los rasgos característicos del álgebra destacados por otros autores, y que permite reconocer distintos tipos y grados de algebrización de la actividad matemática. La noción de configuración algebraica y sus diversos tipos puede ayudar a los profesores a reconocer el razonamiento algebraico en las tareas propuestas en los libros de texto y modificarlas adecuadamente para potenciarlo.

Rasgos característicos del álgebra escolar

Diversos autores se han interesado por reflexionar acerca de los rasgos que caracterizan el álgebra escolar. Kieran (2007), apoyándose en propuestas de diversos autores, elabora un modelo que sintetiza las actividades del álgebra escolar en tres tipos: generacional, transformacional, y global o de meta-nivel. Las actividades de tipo *generacional* implican la formación de expresiones y ecuaciones, los cuales considera como los objetos del álgebra. Incluye en esta categoría como ejemplos típicos, a) ecuaciones que contienen una incógnita que representan situaciones problemas, b) expresiones de generalidad que surgen de patrones geométricos o secuencias numéricas, c) expresiones de reglas que gobiernan relaciones numéricas.

Las actividades de tipo *transformacional* (o actividades basadas en reglas), incluyen, por ejemplo, agrupar términos semejantes, factorizar, desarrollar, sustituir una expresión por otra, sumar y multiplicar expresiones polinómicas, resolver ecuaciones e inecuaciones, simplificar expresiones, sustituir valores numéricos en expresiones, trabajar con ecuaciones y expresiones equivalentes, etc. Aunque la mayor parte de estas actividades se interesan por los cambios en la forma simbólica de una expresión o ecuación que mantienen la equivalencia esto no implica que se trate de actividades rutinarias ya que su justificación implica la aplicación de axiomas y propiedades de las estructuras correspondientes.

La tercera categoría de actividades que propone Kieran la denomina *global* /o de nivel meta porque sugiera el uso de procesos matemáticos más generales. Son las actividades para las que el álgebra se usa como una herramienta, pero que no son exclusivas del álgebra. En concreto se incluye en esta categoría, resolución de problemas, modelización, trabajar con patrones generalizables, justificar y probar, hacer predicciones y conjeturas, estudiar el cambio en situaciones funcionales, buscar relaciones o estructura, etc. –“actividades que se pueden ciertamente realizar sin usar expresiones simbólico-literales algebraicas” (p. 714).

Parece que hay consenso en que uno de los rasgos característicos del razonamiento algebraico es su manera de abordar los procesos de generalización matemática, esto es, el estudio de situaciones en las que se pasa de considerar casos particulares de situaciones, conceptos, procedimientos, etc., (objetos determinados) a las clases o tipos de tales objetos. “La generalización tiene que ver con identificar patrones y propiedades comunes a varias situaciones” (Mason, 1999, p. 9).

Dörfler (1991) equipara abstracción con generalización y esta última la vincula con el uso de variables, rasgo característico del álgebra. Distingue entre generalizaciones empíricas y teóricas. Las generalizaciones empíricas se basan en reconocer características o cualidades comunes a los objetos o situaciones, mientras que las teóricas se derivan de identificar invariantes esenciales en sistemas de acción (materiales o mentales), así como en las condiciones de realización o los resultados de dichas acciones. “Las generalizaciones teóricas no tienen sus raíces exclusivamente en las propias cosas sino en la creación, transformación y actividad operativa, en las acciones de los seres humanos” (p. 84). El papel esencial que tienen los símbolos en los procesos de generalización, como variables referenciales de los elementos que intervienen en la acción y las relaciones entre ellos, lleva a Dörfler a concluir que “generalizar significa construir variables” (p.84).

Según Kieran (1989, p, 165), “para una caracterización significativa del pensamiento algebraico no es suficiente ver lo general en lo particular, se debe ser capaz de expresarlo algebraicamente”. Esa expresión es una condición previa para la “manipulación” de las representaciones simbólicas que produce otras equivalentes más útiles para la resolución de los problemas.

Sin embargo, una tendencia reciente entre los investigadores propone separar el simbolismo algebraico del pensamiento algebraico. “Esta consideración separada es impulsada por dos factores: (1) el reconocimiento de la posibilidad de manipulación simbólica sin sentido, y (2) la tendencia en la escuela elemental de introducir el ‘álgebra temprana’, esto es, focalizar la atención en la estructura más bien que en el cálculo” (Zazkis y Liljedahl, 2002, p. 398). En la perspectiva del “álgebra temprana”, el reconocimiento de lo general desempeña un papel esencial como condición previa de la expresión. Kaput y Blanton (2001) ven la generalización y la expresión sistemática progresiva de la generalidad como subyacente a todo el trabajo que hacemos en álgebra.

El simbolismo algebraico es el lenguaje que da voz al pensamiento algebraico, “el lenguaje que expresa la generalidad” (Mason, 1996). Pero la naturaleza de dicho lenguaje puede ser diversa. Hay un desfase entre la habilidad de los estudiantes para reconocer un cierto grado de generalidad, expresar la generalidad verbalmente y la habilidad para emplear la notación algebraica con facilidad. English y Warren (1998) consideran que la parte más difícil es expresar algebraicamente las generalizaciones.

En este sentido Radford (2003), al estudiar los tipos de generalización de patrones numérico-geométricos por estudiantes de secundaria, identifica la puesta en funcionamiento por dichos estudiantes de dos tipos de generalización pre-algebraica: la generalización factual, y la generalización contextual. En el primer tipo se trata de una generalización de acciones en la forma de un esquema operacional, esquema que permanece ligado al nivel concreto de uso de los símbolos numéricos, a términos deícticos y gestos, como medios semióticos de objetivación; lo general o lo indeterminado quedan sin nombrar. Las generalizaciones contextuales suponen un nivel más avanzado, sin alcanzar el nivel de las generalizaciones simbólicas algebraicas; en este caso se generalizan no solo las acciones numéricas sino también los objetos y las acciones. “Van más allá del dominio de las figuras específicas y tratan con objetos genéricos (como la figura) que no pueden ser percibidos por nuestros sentidos” (p.65)

Con ser esencial para el álgebra, la generalización no se estudia exclusivamente de manera algebraica, ni todas las actividades algebraicas involucran generalización. Algunos autores relacionan el álgebra con el tratamiento de objetos de naturaleza indeterminada, tales como incógnitas, variables y parámetros. "Lo que esto significa es que, en álgebra, se calcula con cantidades indeterminadas (esto es, se suma, resta, divide, etc., incógnitas y parámetros como si se conocieran, como si fueran números específicos (Radford, 2010, p. 2). En el problema 1 de la introducción hay que hallar una cantidad de dinero recibido de los padres, que es un valor particular específico, pero no determinado inicialmente. El gasto diario previsto y el real también son valores específicos indeterminados en los datos del problema. La técnica algebraica característica es nombrar tales cantidades indeterminadas y operar con ellas como si fueran conocidas. Se trata de una práctica típicamente algebraica que no involucra procesos de generalización.

Otro rasgo característico del álgebra es el estudio de las relaciones de equivalencia y sus propiedades, así como el estudio de las operaciones entre los elementos de los conjuntos numéricos, o de otro tipo, y las propiedades de las estructuras que se generan en los mismos. En relación al pensamiento relacional la investigación sobre “álgebra temprana” se ha interesado particularmente por indagar la comprensión de los estudiantes por los significados operacional y relacional del signo igual, esto es, la distinción entre el uso del signo igual para indicar el resultado de operaciones, o la equivalencia de dos expresiones (Carpenter, Levi, Franke, y Zeringue, 2005; Stephens, 2006; Molina, Castro y Castro, 2009).

De las descripciones del pensamiento algebraico, y correlativamente del razonamiento y actividad algebraica, se puede concluir que la consideración de una actividad como algebraica tiene contornos difusos. En algunos casos puede haber un claro consenso, como son las actividades generacionales y transformacionales -formación y manipulación de expresiones simbólico-literales-, pero no así en otras actividades, como modelización, resolución de problemas, o con actividades típicas del "early algebra", como las equivalencias de expresiones aritméticas. Parece pertinente considerar que en el proceso de transición desde la aritmética hasta el álgebra cruza una "zona transicional" en la que se admite que las tareas matemáticas pueden exhibir objetos y procesos algebraicos con una presencia gradual pero creciente.

Aproximación al álgebra desde un enfoque ontosemiótico

La perspectiva pragmatista, antropológica y semiótica del "enfoque ontosemiótico" del conocimiento matemático (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007) aporta herramientas teóricas para analizar la actividad matemática en general y, en particular, para el tipo de actividad que caracteriza el álgebra, como vamos a mostrar a continuación. El EOS permite caracterizar el álgebra en términos de los tipos de objetos y procesos que intervienen en la práctica matemática.

La actividad algebraica tiene lugar cuando una persona aborda la solución de cierto tipo de problemas o tareas, realizando determinadas prácticas operativas y discursivas. En dichas prácticas intervienen elementos de naturaleza diversa, en particular, medios de expresión, reglas conceptuales, procedimentales, proposiciones y justificaciones. En consecuencia, la caracterización de una práctica, y el pensamiento que la acompaña, como de índole algebraica habrá que hacerla en términos de la presencia de los tipos de objetos y de procesos que intervienen en la misma. Dichos objetos y procesos vinculados a las prácticas, están interrelacionados formando configuraciones.

Tipos de objetos algebraicos primarios

En el EOS se propone una tipología de objetos que intervienen y emergen de las prácticas matemáticas, entendiéndose por práctica "toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por una persona (o compartidas en el seno de una institución) para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994, p. 334).

La figura 1 resume los seis tipos de objetos primarios y vamos a utilizarla como pauta para indagar los tipos de "objetos algebraicos".

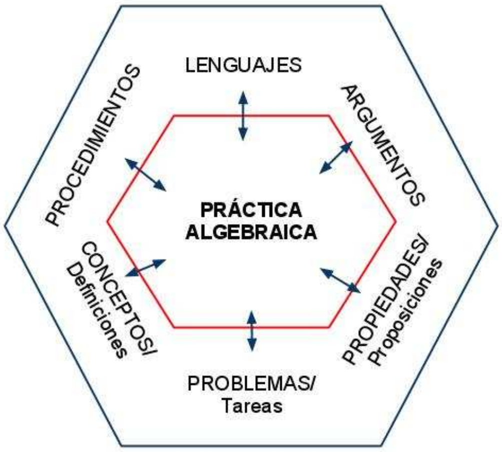


Figura 1: Objetos implicados en la práctica algebraica

La consideración de una práctica matemática como de índole algebraica puede hacerse en base a la presencia de cierto tipo de objetos, usualmente considerados en la literatura como algebraicos. Estos pueden ser conceptos, procedimientos, propiedades, argumentos, expresados preferentemente con un lenguaje alfanumérico. En una primera aproximación vamos a considerar como tipos de objetos algebraicos primarios los siguientes:

1) Relaciones binarias – de equivalencia o de orden – y sus respectivas propiedades (reflexiva, simétrica, transitiva; antisimétrica, etc.)
2) Operaciones y sus propiedades, realizadas sobre los elementos de conjuntos de objetos diversos (números, transformaciones geométricas, etc.). El denominado cálculo algebraico se caracteriza por la aplicación de propiedades tales como asociativa, conmutativa, distributiva, existencia de elemento neutro y de un inverso. Pueden intervenir también otros conceptos como ecuación, inecuación, incógnita, así como procedimientos tales como, eliminación, trasposición de términos, factorización, desarrollo de términos, entre otros.
3) Funciones, sus tipos, operaciones con funciones, y propiedades; funciones proposicionales (verdadero/falso); variables, fórmulas, parámetros.
4) Estructuras y sus tipos (semigrupo, monoide, semimódulo, grupo, módulo, anillo, cuerpo, espacio vectorial, etc.) propias del álgebra superior o abstracta.

Estos tipos de objetos algebraicos básicos se pueden expresar con diversos lenguajes, preferentemente de tipo alfanumérico si nos atenemos al sentido "clásico" del álgebra que describe Kieran (1989, p, 165). Pero en el contexto escolar también se usan otros medios de expresión, en particular el lenguaje ordinario, gráfico, tabular, incluso gestual (Radford, 2003; Arzarello, 2006). Un tipo de actividad algebraica primaria será la traducción o transformación entre distintos lenguajes (registros de representación), particularmente la conversión (Duval, 2008) entre el registro de la lengua natural al registro alfanumérico.

Relatividad contextual de las prácticas algebraicas

En el marco del EOS las prácticas matemáticas y los objetos que intervienen en las mismas se pueden contemplar desde distintos puntos de vista, según el contexto o el juego de lenguaje en que tienen lugar dichas prácticas. La figura 2 resume dichos puntos de vista, representados como pares de dualidades para indicar las relaciones dialécticas que se establecen entre las mismas.

Figura 2: Relatividad contextual de la práctica algebraica

En el caso de las prácticas algebraicas la dualidad extensivo - intensivo (particular - general), y los procesos asociados de particularización – generalización, tiene una importancia especial, dado el papel de la generalización como uno de los rasgos característicos del álgebra, según hemos visto en la sección anterior.

Un objeto se dice que es *extensivo* si interviene en una práctica matemática como un ejemplar particular, mientras que se dice que es *intensivo* si interviene como un tipo, clase o generalidad. Estos atributos de los objetos matemáticos, emergentes de los procesos duales de particularización y generalización, son relativos al juego de lenguaje en que participan, y no entidades absolutas. Por ejemplo, en el estudio de las funciones, $y = 2x + 1$, sería una función particular perteneciente a la clase o tipo de funciones lineales, $y = mx + n$; esta última expresión será un objeto intensivo. No obstante, en el estudio de las funciones polinómicas, la función lineal, $y = mx + n$, será un caso particular (un extensivo) de dicha clase de funciones (un intensivo).

La función lineal particular, $y = 2x + 1$, está constituida a partir de otros extensivos, los números 2, 1, la operación de sumar números reales, así como de otros intensivos, como es el conjunto R de números reales sobre el que toma valores la variable independiente x y la dependiente y de dicha función. Asimismo, al pedir a los alumnos que continúen la serie de números, 1, 3, 5, 7, 9, …, y encuentren la “ley general” que siguen, esperamos que nos digan algo así como $2x+1$. Los números particulares 1, 3, 5, … son objetos extensivos, mientras que la regla general, y la serie completa de números impares, resultado del proceso de generalización, es un objeto de naturaleza intensional.

Esta manera de abordar el estudio de la generalización (y el proceso dual de particularización) muestra claramente el carácter relativo y contextual de tales procesos, así como la existencia de distintos niveles o grados de generalización. De la misma manera que los elementos de un conjunto pueden ser otros conjuntos, los objetos intensivos pueden dar lugar a nuevos objetos intensivos de mayor generalidad.

La creación de objetos intensivos está íntimamente relacionada y dependiente de otro proceso primario como es el de *simbolización* o representación. En el estudio de la función $y = 2x + 1$, el conjunto de los números reales R está representado (aquí de manera tácita) por las letras *x* e *y*, las cuales se consideran como *variables* que "toman" valores en R. Dado que R es un conjunto estructurado con unas operaciones que cumplen determinadas propiedades, la expresión simbólica, $2x + 1$, interpretable en el cuerpo algebraico R, ha producido un objeto de un nuevo orden de generalidad que es la función lineal.

La dualidad *unitario – sistémico* permite describir los procesos mediante los cuales una entidad compuesta o sistémica (un intensivo) pasa a ser vista como una entidad unitaria (proceso de reificación, entificación, objetivación). Una vez que un intensivo es visto como una entidad unitaria podrá participar en otros procesos de generalización y dar lugar a intensivos de orden superior.

Asimismo, la dualidad *ostensivo – no ostensivo* aporta una nueva comprensión de los procesos de generalización, a los objetos intensivos resultantes, y a los "artefactos" que necesariamente deben intervenir para que tenga lugar la generalización. Con la ostensión nos referimos a los medios semióticos de objetivación (Radford, 2003), a los recursos perceptivos de expresión (simbólicos, o de cualquier otro tipo). Usualmente los objetos matemáticos (conceptos, proposiciones, …) se consideran objetos ideales o mentales, o sea, objetos no ostensivos. Sin embargo, su "producción" y comunicación tiene que hacerse con la intervención de objetos percibibles (palabras, símbolos, gestos, ..), esto es, objetos ostensivos. Las generalidades o abstracciones, sean conceptos, procedimientos, propiedades, son en sí mismas no ostensivas, pero su toma de conciencia y manipulación por el sujeto requiere el uso de símbolos ostensivos.

La complejidad del aprendizaje de la matemática, esencialmente caracterizada por la presencia de procesos de generalización y entidades generales (intensivos), se puede comprender si tenemos en cuenta la intervención conjunta de procesos de idealización, discriminando el intensivo de sus posibles materializaciones o representaciones, y procesos de reificación. El resultado final de la generalización es un nuevo objeto cuya naturaleza es diferente de los componentes de donde *proviene*.

Tipos de configuraciones algebraicas

Los objetos y procesos que hemos descrito en la sección 4 aportan criterios para distinguir distintos tipos de configuraciones algebraicas, las cuales permitirán discriminar diferentes tipos y grados de algebrización de la actividad matemática. Habrá tareas matemáticas que pongan en juego de manera específica relaciones binarias, operaciones, funciones, estructuras, sugiriendo la definición de configuraciones de tipo relacional, operacional, funcional, estructural. También habrá tareas cuyo foco de atención será la transformación entre distintos modos de expresión, particularmente entre los lenguajes natural, icónico, gestual, etc., a lenguaje alfanumérico (configuración de tipo transformacional).

La consideración de los procesos de particularización - generalización, y los objetos que se generan en los mismos (extensivos, intensivos), o que intervienen o se aplican en los mismos, aporta un nuevo criterio de clasificación de las prácticas algebraicas, las configuraciones de objetos y el razonamiento que las acompaña. La presencia de objetos intensivos en una práctica matemática nos sirve para reconocer indicios de un cierto nivel de abstracción o generalización. La emergencia de los objetos intensivos atraviesa por distintos momentos o etapas cada una de las cuales le aporta distintos niveles o capas de generalidad. Un número, 3, una figura geométrica, el triángulo, se presenta como entidad unitaria, ideal, abstracta, general; pero al mismo tiempo su construcción, idealización, abstracción, reificación, pasa por distintos momentos y contextos, cada uno de los cuales le impregna de significados parciales y distintos niveles de generalidad.

La presencia de objetos intensivos (generalidades, conceptualizaciones, abstracciones), en alguno de sus niveles o capas de generalidad, será un rasgo característico de actividad algebraica elemental. Entendida el álgebra de esta manera, supone ampliar su presencia en las matemáticas escolares, ya que en las primeras actividades matemáticas, como pueden ser las de conteo de colecciones de objetos realizados por niños de preescolar hay procesos de generalización – conceptualización.

El razonamiento algebraico se inicia a partir de las actividades aritméticas de cuantificación de cantidades mediante los procesos de simbolización numérica. Los símbolos numéricos se organizan, desde los primeros niveles, como un sistema formado por elementos relacionados mediante ciertas operaciones; tales operaciones, que inicialmente refieren a acciones sobre cantidades, pasan a ser operaciones sobre los propios símbolos y vienen relacionadas con un sistema de propiedades estructurales. Se obtiene de este modo un primer ejemplo de estructura algebraica: los semigrupos aditivo y multiplicativo de los números naturales. Ciertamente que nos niños no van a estudiar estas estructuras algebraicas como tales, pero en el trabajo con las operaciones aritméticas (que son también un tipo de funciones) ponen en juego conceptos y teoremas "en acto", en el sentido descrito por Vergnaud (1990), que son propios de las mencionadas estructuras.

El surgimiento del razonamiento algebraico se basa en un primer proceso de generalización: de la cantidad de una magnitud concreta (por ejemplo, número de canicas) se pasa al símbolo que representa una cantidad de una magnitud cualquiera (número de personas, caramelos, etc.). El sistema de símbolos emergentes de este sistema de prácticas de cuantificación y ordenación, regulado mediante los axiomas de Peano, se convierte en el sistema numérico natural.

"La idea clave detrás de esta nueva visión es que la aritmética es parte del álgebra, esto es, la parte que trata con los sistemas numéricos, la recta numérica, funciones simples, etc. La aritmética trata con la parte del álgebra en la que números particulares y medidas son tratadas como ejemplos de otros ejemplos más generales" (Carraher y Schliemann, 2007, p. 698).

Un nivel más avanzado de "pensamiento algebraico" se pone de manifiesto en las actividades que involucran relaciones binarias y correspondencias (funciones), primero entre cantidades, entre símbolos estructurados, después. La igualdad, como relación de equivalencia entre números (y como indicación del resultado de una acción-operación) es otro objeto emergente de la práctica matemática que caracteriza el razonamiento algebraico. A partir de la igualdad como relación de equivalencia se obtienen clases de equivalencia y conjuntos cocientes, objetos característicos del álgebra; a partir de las correspondencias (aplicaciones, funciones) se obtienen los isomorfismos entre estructuras, etc.

Un criterio adicional de clasificación de las configuraciones algebraicas se deriva del hecho de que las prácticas matemáticas pueden ser orientadas al objetivo de generar nuevos objetos intensivos (prácticas generativas), o simplemente a la aplicación de objetos intensivos (prácticas de aplicación).

La Figura 3 resume los criterios o variables que describen los tipos de configuraciones algebraicas presentes en la actividad matemática de acuerdo con el análisis que acabamos de presentar.

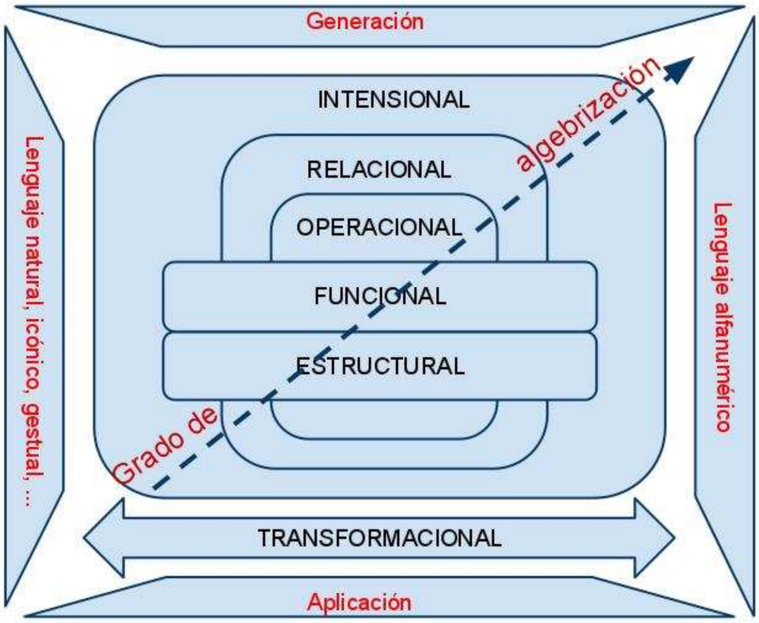


Figura 3: Variables que caracterizan la actividad algebraica

La aplicación sistemática de este esquema da lugar a una tipología de configuraciones algebraicas. En el nivel más básico o primario de algebrización estará la configuración intensional (generativa o aplicativa), expresada con lenguaje natural, icónico, gestual. El uso de lenguaje alfanumérico, junto con objetos algebraicos de tipo relacional, operacional y estructural marcarán niveles más avanzados de algebrización.

Las actividades usadas en las investigaciones sobre "pensamiento relacional" (Carpenter et al, 2003, Stephens, 2006; Molina, 2006) son de tipo mixto, relacional-operacional ya que en ellas intervienen secuencias de operaciones aritméticas combinadas con el signo igual en su acepción de relación de equivalencia, y requieren la aplicación de propiedades generales de las operaciones aritméticas (asociativa, conmutativa, distributiva, ...). En su mayoría son de tipo aplicativo y expresadas con lenguaje simbólico - aritmético.

Continuidad o ruptura: Grado de algebrización

La manera de concebir el álgebra (y de manera equivalente, el pensamiento/ razonamiento algebraico) que hemos descrito postula una cierta imbricación y continuidad entre el álgebra y el resto de contenidos matemáticos (aritmética, medida, geometría, análisis, estocástica). Siempre que reconozcamos la presencia de objetos intensivos en una práctica matemática, en alguno de sus niveles de generalidad o intensión, estamos en condiciones de atribuir un cierto grado de algebrización a dicha práctica[3], tanto si el intensivo se expresa de manera alfanumérica, como si no.

Sin embargo, dado que el uso de representaciones alfanuméricas para los intensivos que intervienen en una práctica matemática facilita la reflexión sobre los mismos, y el acceso a nuevos niveles de generalidad y cálculo operatorio, parece conveniente considerar a dichas configuraciones como

[3] Bolea, Boch y Gascón (2001) reconocen que las organizaciones matemáticas pueden tener un carácter más o menos “algebrizado” y caracterizan el álgebra escolar como un instrumento genérico de modelización de la actividad matemática. Nuestro análisis de los tipos y grados de algebrización de las tareas matemáticas difiere sustancialmente del realizado por estos autores.

algebraicas en sentido estricto, y aquellas en que no se usan dichas representaciones como configuraciones *protoalgebraicas*. Esto no debe suponer el abandono de la hipótesis de continuidad, ya que no hay álgebra sin protoálgebra[4]. "Ontogénicamente hablando, hay espacio para una amplia zona conceptual donde los estudiantes pueden comenzar a pensar algebraicamente, aunque no recurran aún (o al menos no en gran medida) a signos alfanuméricos. Esta zona, que podemos llamar la *zona de emergencia del pensamiento algebraico*, ha permanecido largamente ignorada, como resultado de nuestra obsesión con reconocer el álgebra solo en lo simbólico" (Radord, 2010, p. 3)

Tipos y grados de algebrización de tareas escolares

Describimos a continuación ejemplos de tareas matemáticas analizadas usando el modelo de razonamiento algebraico descrito en la sección anterior.

Configuración intensional

Si un niño realiza correctamente la siguiente tarea:

"Pinta de color rojo los triángulos, de verde los círculos (redondos), de azul los cuadrados, de amarillo los rectángulos y de negro los rombos",

podemos afirmar que ha generalizado o abstraído aspectos figurativos de los conceptos generales de triángulo, círculo, cuadrado, rectángulo y rombo, y los está aplicando al caso particular de los dibujos que se le presentan.

Asimismo, el niño que responde a la pregunta, ¿Cuántas canicas tienes?, mostrando cinco dedos, pronunciando la palabra "cinco", dibujando cinco palotes, o escribiendo el símbolo 5, ha realizado un proceso de generalización o abstracción, por lo que podríamos decir que ha alcanzado un cierto nivel de "razonamiento algebraico". Ciertamente que aún puede que no sea capaz de relacionar y operar con tales objetos intensivos usando el recurso de los símbolos numéricos, pero no se puede negar que ha desarrollado una cierta capacidad de generalización. Un primer grado de algebrización se debe reconocer, por tanto, asociado a la presencia de objetos intensivos (configuración intensional).

No es necesario representar con símbolos literales los objetos intensivos para que dichos objetos intervengan en una práctica matemática. El uso de símbolos literales será necesario, o al menos, de gran utilidad para representar intensivos de mayor nivel de generalidad. Por ejemplo, el número 428 es una forma eficiente de representar cuatro centenas, dos decenas y 8 unidades, esto es, $4\times100 + 2\times10 + 8$. Si esta expresión se presenta a los estudiantes como un ejemplo de la expresión más general, $a\times10^2 + b\times10 + c$, estamos introduciéndoles en un primer nivel de razonamiento algebraico. A su vez la expresión polinómica, $a\times10^2 + b\times10 + c$, se puede presentar como un caso particular de la expresión polinómica general de cualquier número en base 10, o en otra base diferente. También se puede generalizar al caso en que las potencias de la base sean negativas, esto es, para representar números decimales.

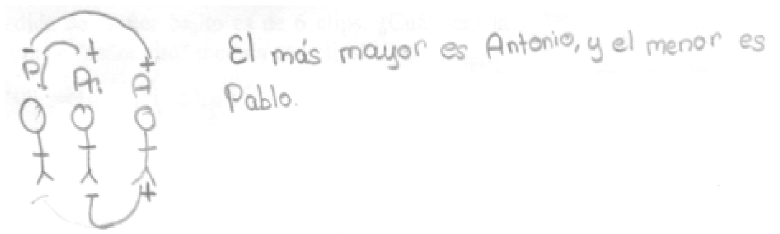
[4] Usamos el término "protoálgebra" para designar el sentido ampliado del álgebra que venimos describiendo en este trabajo, esto es, a la actividad matemática que pone en juego configuraciones intensionales en cualquier nivel de generalidad y simbolización. Este uso difiere del sentido histórico atribuido por Puig (2009), y del objeto protomatemático introducido en la teoría de la transposición didáctica de Chevallard (1991).

Configuración relacional

Veamos el problema 2, mencionado en la primera sección del trabajo, resuelto de dos maneras diferentes. En ambos casos se moviliza una configuración de tipo relacional, pero la primera solución se puede calificar de “más algebraica”:

Problema: Tres amigos, Pedro, Antonio y Pablo, no se ponen de acuerdo sobre su edad. Pedro es más viejo que Pablo; Pablo es más joven que Antonio; Antonio, a su vez, es más viejo que Pedro. ¿Quién tiene más edad?, ¿Y menos?

Solución 1: La Figura 4 muestra la solución dada por un niño.



Transcripción:

El más mayor es Antonio, y el menor es Pablo.

Figura 4. Solución del problema de las edades

En esta resolución podemos reconocer rasgos de razonamiento algebraico de tipo relacional, según la definición dada. Las edades de Pedro, Antonio y Pablo son desconocidas; sus valores pueden variar dentro de un rango. El conjunto de valores posibles de cada una de las edades es un objeto intensivo. Entre las edades hay relaciones de desigualdad; la comparación de las edades requiere poner en juego la propiedad transitiva de la relación de orden en el conjunto numérico de los naturales aplicada a conjuntos de valores. Se aprecia el uso de recursos gráficos- un arco- para vincular las edades que se comparan, y el uso de los símbolos “más” y “menos” para indicar “mayor” y “menor” respectivamente.

Solución 2: Pedro es más viejo que Pablo, por ejemplo, Pedro tiene 15 años y Pablo 12. Antonio es más viejo que Pedro, por ejemplo, 16 años. O sea, Pablo es el más joven y Antonio el más viejo.

Esta solución se basa en valores particulares dados a las edades; son objetos extensivos. No obstante, esta solución también requiere movilizar una propiedad algebraica, la transitividad de la relación de orden en N, aquí particularizada en la comparación de los tres números, 12, 15 y 16. El modo de razonamiento de la solución 1 se puede considerar más algebraico que el de la solución 2 al poner en juego más cantidad de objetos intensivos y el esbozo de una notación simbólica.

Configuración operacional

El problema 1 incluido en la sección 1 es un ejemplo de tarea que pone en juego una configuración de tipo operacional. Se utilizan letras para representar las incógnitas, las relaciones se establecen mediante una ecuación, se opera con las incógnitas aplicando las definiciones y propiedades de las operaciones aritméticas.

Se puede calificar de configuración operacional, aplicativa (se aplican los conceptos de incógnita y ecuación, el conjunto de valores posibles de las incógnitas), implicando la transformación del enunciado dado en lenguaje natural a lenguaje alfanumérico.

Configuración relacional- operacional

Problema 1: ¿Qué número hay que poner en lugar de [ ] en la expresión, 67 + 83 = [ ] +82?

Solución: Un alumno puede resolver la tarea sumando y restando 1 al primer miembro de la igualdad, 67+1+83-1, obtiene 68 + 82; a continuación resta 82 a ambos miembros y obtiene [] = 68. De este modo aplica propiedades generales de la relación de equivalencia y la propiedad asociativa de la adición.

Este modo de pensar y de resolver tareas con expresiones numéricas se conoce en la bibliografía sobre "early algebra" como características del pensamiento relacional[5]. Esto no tiene lugar si un alumno realiza la suma del primer término y después resta 82; obtiene el resultado 68, pero en este caso pone en juego hechos numéricos particulares.

Se trata de una configuración de tipo relacional – operacional, aplicativa, expresada con lenguaje ordinario y numérico.

Problema 2: Encuentra los valores que hacen cada una de las siguientes sentencias numéricas verdaderas: 44 + 29 = 45 +a; 65 + 38 = 62 + b; 99 + 87 = 98 + 86 + c.

Este ejemplo pone en juego también una configuración de tipo mixto, relacional y operacional, pero introduciendo el uso de notación simbólica literal.

Configuración funcional

El concepto central es el de función, vinculado a un patrón que se expresa gráficamente pero que puede ser expresado usando otros objetos ostensivos. En la solución al problema siguiente se pueden reconocer los conceptos de variación, variable independiente, variable dependiente.

Problema: Una bacteria se reproduce por reproducción celular. De cada una se obtienen dos. ¿Cuántas bacterias formarán parte de la cuarta generación? ¿Y en la quinta generación? ¿Y en la generación número 100?

Se establece una dependencia funcional entre la generación (variable independiente) y el número de bacterias correspondiente (variable dependiente). El lenguaje es aritmético y se pretende generar la regla general, o criterio de la correspondencia, al cual se puede llegar por multiplicaciones sucesivas y subsecuentemente, por el reconocimiento del uso de potencias. Lo que podría desembocar en la expresión funcional que establece que a la generación "n" le corresponde 2^n bacterias.

Calificamos esta configuración como de tipo funcional, generativo (se debe reconocer el criterio general de la correspondencia), expresada con lenguaje natural y numérico.

Configuración estructural

Intervienen como objetos centrales las propiedades estructurales de las operaciones.

En libros de primaria encontramos elementos teóricos que suponen el inicio de una reflexión sobre la estructura algebraica de los conjuntos y operaciones con números. Tal es el caso de los enunciados

---

[5] Se trata de un uso excesivamente restrictivo de la expresión "pensamiento relacional" al tratarse sólo de tareas que involucran el uso de números y operaciones aritméticas. La idea de comprensión relacional de Skemp puede estar en la base del uso de esta caracterización de las actividades algebraicas elementales, la cual se aplica al aprendizaje de cualquier contenido matemático.

generales de las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de las operaciones aritméticas y su aplicación a la solución de problemas, como en Ferrero y cols (1999)[6].

Las propiedades de la suma

Propiedad conmutativa El orden de los sumandos no altera la suma	*Propiedad asociativa* Para sumar tres números, sumamos dos cualesquiera de ellos y el resultado se suma con el tercero.

Relaciones entre los términos de la resta

Para comprobar si una resta está bien hecha se suma el sustraendo con la diferencia y el resultado debe ser el minuendo	M - S = D S + D = M M - D = S
En una resta, la diferencia no varía cuando se suma o se resta un mismo número al minuendo y al sustraendo	

Propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de la multiplicación

Propiedad conmutativa En una multiplicación, el orden de los factores no altera el resultado	*Propiedad asociativa* Para multiplicar tres números, se multiplican primero dos de ellos y el resultado por el tercero

Propiedad distributiva

El producto de una suma por un número es igual a la suma de los productos de cada sumando por ese número	El producto de una diferencia por un número es igual a la diferencia de los productos de cada término por ese número

Síntesis y reflexiones finales

La clarificación de la naturaleza de la práctica matemática en sus diversas áreas de contenido y de los objetos y procesos que intervienen en la misma es una cuestión de interés para la investigación en educación matemática. Esto es así porque la educación se ocupa de mejorar la enseñanza y el aprendizaje y un paso previo deberá ser comprender con profundidad los conocimientos y competencias que se desean promover y desarrollar. En este trabajo hemos abordado esta problemática para el caso del álgebra, rama de las matemáticas que sirve de herramienta de trabajo para los restantes campos de la matemática, así como área de investigación en sí misma, y que la investigación didáctica reconoce como particularmente conflictiva para los estudiantes.

Distintos autores han tratado de explicitar los rasgos característicos del álgebra, habiendo un cierto consenso en destacar la generalización como un proceso clave de la misma, y por tanto la noción de variable, ya que como afirma Dörfler (1991), "generalizar significa construir variables" (p.84). Otro rasgo característico del álgebra es el tratamiento de situaciones en las cuales intervienen cantidades o valores indeterminados, esto es, el uso de incógnitas y ecuaciones que modelizan dichas situaciones y que mediante el cálculo (algebraico) se da respuesta a las mismas. Tanto para las situaciones que requieren generalización como para el manejo de las indeterminadas se utiliza una forma analítica de expresión característica y eficaz, usualmente alfanumérica.

Las investigaciones sobre "early algebra" han puesto además el acento en otros aspectos del razonamiento algebraico elemental, en particular, las situaciones de índole relacional, en principio no reducibles a las situaciones de generalización ni indeterminación, así como al uso, con frecuencia implícito, de ciertas propiedades estructurales de los sistemas numéricos. Además se reconoce que las situaciones y prácticas algebraicas pueden implementarse apoyadas en el uso de la lengua natural, y otras formas no analíticas de expresión.

[6] Ferrero y cols (1999*). Matemáticas 5.*Madrid: Anaya.

En este trabajo hemos tratado de elaborar un modo de ver la práctica algebraica, y el pensamiento que la acompaña, desde una perspectiva global. Para ello hemos aplicado algunas nociones del "enfoque ontosemiótico", el cual mediante la adopción de supuestos pragmatistas, antropológicos y semióticos sobre el conocimiento matemático permite tener en cuenta los diversos objetos, procesos y facetas que intervienen en la actividad matemática.

Aunque no podamos dar una respuesta definitiva al problema de caracterización del álgebra y que será necesario profundizar en la reflexión y el debate, nos parece que la dualidad extensivo - intensivo puede servir de base para dar cuenta de tres rasgos característicos del álgebra,

- la indeterminación, uso de incógnitas, ecuaciones y nociones relacionadas

- la generalización, uso de variables, fórmulas, parámetros

- la relación, binaria o de otro tipo

En estos tres tipos de situaciones o tareas matemáticas se puede reconocer la participación de objetos intensivos, esto es, conjuntos o clases de elementos agrupados mediante la intervención de un criterio o regla.

Parece necesario distinguir entre situaciones de generalización e indeterminación; en el primer caso se trata de construir un intensivo, encontrando un modo de expresar un elemento cualquiera del conjunto o clase de elementos que se deben considerar como un todo unitario. En el segundo se supone dado un objeto intensivo y la tarea consiste en hallar un elemento particular, fijo pero indeterminado. Ambos casos son considerados en nuestro modelo dentro del tipo de configuración intensional, en un caso generativa, y en otro aplicativa.

Otra noción que puede ayudar a caracterizar las prácticas matemáticas de índole algebraico es la de configuración algebraica y sus tipos, entendida como el sistema semiótico formada por la red de objetos y procesos que intervienen en la solución de las tareas sobre las cuales se centran las prácticas.

La consideración simultánea de los grados de intensión de los objetos que intervienen en una práctica y del tipo de lenguajes que se usan, analítico - alfanumérico, versus icónico, gestual, o natural, permite definir grados de algebrización, lo cual puede ayudar superar la brecha o ruptura mediante la cual se describe con frecuencia la práctica algebraica que se realiza en educación secundaria, frente al trabajo matemático que se realiza en educación primaria.

El razonamiento algebraico entendido como hemos descrito en este trabajo, se reconoce presente en muchas tareas del currículo matemático de la escuela primaria. El álgebra es una forma de pensar y actuar en matemáticas caracterizada esencialmente por la dialéctica entre los procesos de generalización - particularización, y en consecuencia por la intervención y emergencia de objetos intensivos de niveles progresivos de generalidad. Los procesos de algebrización no solamente se pueden aplicar a tareas propias de la aritmética, sino pertenecientes también a la medida, la geometría, y el análisis de datos. El álgebra es más que un instrumento de modelización y más que un lenguaje simbólico; es una forma de pensar y actuar en matemáticas, una actitud a generalizar, y por tanto, a simbolizar y operar con símbolos, que penetra todas sus ramas y las impulsa hacia nuevos niveles de creatividad.

Nuestras reflexiones sobre la naturaleza del razonamiento algebraico tienen fuertes implicaciones para la formación de profesores de matemáticas. Si queremos que dicho razonamiento penetre en las aulas de primaria, y mejorar el tratamiento del álgebra en secundaria, el profesor debe ser el principal agente del cambio. No basta con elaborar propuestas curriculares (NCTM, 2000) que incluyan el álgebra desde los primeros niveles educativos. Es necesario que los profesores participen de la visión ampliada del álgebra que hemos descrito en este trabajo a fin de que estén capacitados para transformar las tareas matemáticas escolares hacia el logro de niveles progresivos de algebrización.

Reconocimiento:

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación, SEJ2007-60110/EDUC. MEC-FEDER.

REFERENCIAS

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* Número especial, 2006, 267-299.

Bednarz, N., Kieran, C., y Lee, L. (1996). Approaches to Algebra. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Blanton, M. L., y Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412-446.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21 (3), 247-304.

Carpenter, T., Levi, L., Franke, M.L. y Zeringue, J.K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education,* 37, 53-59.

Carpenter, T. P., Frankle, M. L., et al. (2003). *Thinking Mathematically. Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. L. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En: F. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, 669-705). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Carraher, D. W., Martínez, M. V. y Schliemann. A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, 40, 3-22.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica*. Buenos Aires: Editorial Aique.

Cooper, T. J. y Warren, E. (2008). The effect of different representations on years 3 to 5 students' ability to generalize. *ZDM Mathematics Education*, 40, 23-37.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. En, A. J. Bishop et al. (ed.), *Mathematical Knowledge: Its Growth Throught Teaching* (pp. 63-85). Dordrecht: Kluwer A.P.

Duval, R. (2008). Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. En, L. Radford, G. Schubring, y F. Seeger (eds.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture* (pp. 39–62). Rotterdam: Sense Publishers.

Filloy, E., Rojano, T. y Puig, L. (2007). *Educational algebra: A theoretical and empirical approach*. Berlin: Springer.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22 (2/3): 237-284.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2): 127-135.

Kieran, K. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. En, F. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, 707-762). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Molina, M., Castro, Enc, y Castro, E. (2009). Elementary students' understanding of the equal sign in number sentences. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 7 (1), 341-368.

Mason, J. y Pimm, D. (1984). Generic examples: seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 277-289.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Puig, L. (2009). Protoálgebra en Babilonia. *Suma*, 61, Junio 2009, 93-98.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics,* 42, 237-268.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to studentes' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12 (1), 1-19.

Stephens, A. C. (2006). Equivalence and relational thinking: preservice elementary teachers' awareness of opportunities and misconceptions. Journal of Mathematics Teacher Education, 9, 249-278.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 10 (2,3), 133-170.

Zazkis, R., y Liljedahk, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics, 49*(3), 379-402.